1644

IN DEI NOMINE.

OPVSCVLVM DE LINEIS RECTIS ÆQVIDISTANTIBVS, ET NON AEQVIDISTANTIBVS.

Petri Antonij Cataldi.

BONONIAE,
Apud Hæredes Ioannis Rossij. M. DC. III.
Superiorum permissu.

XCELLENTISSIMIS,
HVMANISSIMISQ. DD.
MATHEMATICIS,
ominis ſumma obſeruantia Colendiſsimis.
Petrus Antonius Cataldus F. P.

CVM in præſenti Opuſculo includatur demonſtratio eius, quod in primo libro Elementorũ Euclidis, pro quinto poſtulato ponitur, quòd à quamplurimis deſideratur, atq; ideo etiam ſine ipſius adminiculo vigeſimanona Propoſitio eiuſdem primi libri oſtenſiuè demonſtretur, auſus ſum illud in lucem edens, Excel-ißimis, atq; humaniſsimis Dominationibus veſtris, vt iam fa-dicare, vt ſi à firmo earundem iudicio iudicatum fuerit verè, d in illo proponitur concludi, ipſum dignentur patrocinio com-ti, & me inter deuotißimos, & humillimos ſeruos cooptare, gra meců agentes Omnipotenti Deo, Scientiarum omnium & Au-i, & datori, qui illam nobis perſcrutationem concesſerit; ſin , quod optatur minus fortè repererint, non grauẽtur etiam pro bonitate, & iudicio perfectionem illam ei dare, quæ ipſi debe-me excuſantes, qui cum ſim homo, & imperfectus (licet agens ertiſsima Geometrica Scientia) facilè errare potuerim (& eo gis cum interruptè id operis compoſuerim inter multas angu-s, infirmitates, & rerum aliarum occupationes, quæ me multis inc annis oppreſſum tenẽt) neq; iccirco dedignentur me in gra n ſuam recipere, quippe qui etiam omnes Excellẽtiſsimas Domi-ones Veſtras ex corde, & amo, & veneror, rogoq́; D. O. M. vt, ibus mentem aſsiduè illuſtret, ad aßiduè quoq; operandum pro Diuinæ Maieſtatis gloria, & proximi noſtri ſalute. Bononiæ Veneris 24. Ianuarij M. DC. III. peragrante Luna gradum vi-numquartum Geminorum in Trigono ſiniſtro Martis.

AD LECTORES

QVONIAM Excell. Mathematicorum numerus magnus est, & Author non nisi paucos cognoscit, monitum voluit se quadringenta ex his Opuscula, Reuerendo Admodum Patri D. Valentino Pino Canonicorum Regularium Sancti Seruatoris Bononiæ Priori vigilantissimo consignauisse (qui præter alias virtutes innumeras, Mathematicis etiam disciplinis excellit, quemadmodum ex ipsius doctissimo Opere de horologiorum Solarium fabrica cognoscitur) vt ipsius Admodum Reuerenda Paternitas illi faueat, singula singulis Excellẽtissimarum Dominationum suarum donandas curare, quæ (vti ipse Author rogat) in sui gratiam illas acceptũ mittent.

Valete.

DE

IN DEI NOMINE.

OPERETTA
DELLE LINEE RETTE EQVIDISTANTI, ET NON EQVIDISTANTI.

DI

Pietro Antonio Cataldo.

IN BOLOGNA;

Presso gli Heredi di Giouanni Rossi. M.DC.III.

Con licenza de' Superiori.

A' GLI ECCELLENTISS. ET CORTESISS. SIGNORI MATHEMATICI,

Signori ſempre Colendiſsimi.

Pietro Antonio Cataldo.

INCLVDENDOSI *nella preſente Operetta la dimoſtratione di quello, che nel primo libro de gli Elementi d'Euclide è poſto per quinta petitione, coſa deſiderata da molti; Et anco ſenza aiuto d'eſſa, eſſendoui dimoſtrata oſtenſiuamente la venteſimanona propoſitione del detto primo libro; hò nel publicarla al Mondo preſo ardire d'indrizzarla, come fò, alle Eccellentiſſime, & amoreuoliſſime Signorie Voſtre, accioche ſe dal loro ſaldo giudicio ſarà approuato concluderſi realmente quello, che in eſſa ſi tratta, ſi degnino riceuerla in protettione, & hauer me per deuotiſſimo, & humiliſſimo Seruo. Ringratiando meco Iddio Omnipotentiſſimo, Autore, & Maeſtro d'ogni dottrina, dell'hauercela data. Et quādo non la trouaſſero tale, quale ſi deſidera, ſi contentino anco con la giudicioſiſſima bontà loro darle quella perfettione, che ſe le conuiene, eſcuſando me, che eſſendo huomo, & imperfetto (ancorche trattando di certiſſima Scienza Geometrica) haueſſi facilmente errato (hauendola maſſime interrottamente compoſta fra le molte anguſtie, infirmità, e trauagli, che molti anni ſono mi tengono di continuo oppreſſo) non reſtando perciò di ripormi nella gratia loro, come quello, che con tutto il cuore tutte anco le Signorie Voſtre Eccellentiſſime amo, & riueriſco. Et per fine prego N. S. Dio benigniſſimo, che di continuo à tutti ne illuſtri l'intelletto ad operare anco di continuo à gloria di ſua Diuina Maeſtà, & à ſalute del proſſimo. Di Bologna Venerdì alli 24. di Genaro* M. DC. III. *paſſando la Luna per il grado vigeſimoquarto de' Gemini, nel Trino ſiniſtro di Marte.*

AI LETTORI.

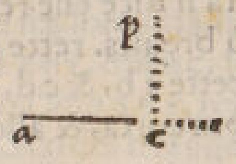
PErche il numero de gli Eccell. Mathematici è grande, ne l'Autore hà cognitione se non di pochissimi di essi, egli fà loro sapere, che hà consegnate quattrocento di queste Operette al Molto Reu. Padre Don Valentino Pini Priore meritissimo de' Canonici Regolari di S. Saluadore di Bologna (quale, oltre all'altre molte dottrine, è anco Mathematico Eccellentissimo, come ben si conosce dalla dottisima Opera sua della Fabrica de gli Horologij Solari) accioche la Paternità sua molto Reuerenda lo fauorisca à farne donare vna à ciascuna delle loro Signorie Eccellentisime, che (come le supplica) li farà gratia di mandarla à pigliare.

DI-

DIFFINITIONE PRIMA.

La distanza da vn punto dato fuori d' vna linea retta proposta di indefinita lunghezza ad essa linea retta proposta, si dice essere la breuissima linea retta, che partendosi dal punto dato, arriui alla retta proposta.

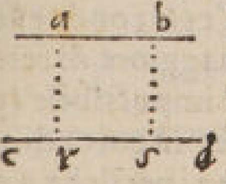
PER essempio. Sia proposta la retta a c, di indefinita lũghezza, cioè, che si possa allungare da qual si vogli parte, quanto si vogli, & sia dato il punto p. fuori d' essa retta (cioè che non sia indiretto, ò per il diritto d'essa, ò vogliamo dire in tal luogo, che allungando la linea proposta, ella non possa passare per il punto dato p.) La distanza di detto punto dato p. alla proposta retta a c, si dice, ò si chiama essere la breuissima linea, che imaginata partirsi da detto pũto dato p. arriui alla proposta retta a c, ò sua dirittura.



DIFFINITIONE SECONDA.

Vna linea retta data, si dice essere equidistante ad vna retta proposta nel medesimo piano, quando da dui diuersi punti, quali si voglino, presi nella data, tirando linee breuissime alla proposta, elle saranno eguali; ò vogliamo dire, quando nella data, segnati dui diuersi punti, le distanze da essi punti alla retta proposta siano eguali. Ma non equidistanti, si chiamaranno la data, & la proposta, quãdo esse distanze dette fussero ineguali. Et le due rette, data, & proposta si dicono auicinarsi, ò accostarsi insieme dalla banda, doue la distãza si trouasse minore. Et si dicono andarsi allontanãdo dalla bãda, doue la distanza si trouasse maggiore.

PER essempio. La data a b, & la proposta c d. rette, si dicono essere equidistanti frà loro, quando nella data a b. presi, ò segnati dui diuersi punti, & siano a, & b, & da essi alla c d. proposta tirate linee breuissime (intẽdẽdosi sempre, che essa c d, alla quale si hanno da tirare le linee breuissime, sia imaginata di indefinita lũghezza, cioè, che si possa allungare da ciascuna banda, quando occorra, accioche le linee breuissime, quali andarãno dalli punti presi nella data alla dirittura d'essa proposta possano terminare in essa proposta) & siano a r, b s; elle siano eguali frà loro, cioè



che tanto sia lunga a r, quanto b s, che mostrano le distanze dalla a b, nelli dui punti diuersi a, & b, alla c d; ò vogliamo dire alla dirittura d'essa c d. Ma quando dall'a, tirata vna linea breuiss. alla c d, (intesa al lũgata quãto occorra) & sia la a d, & dal b, vna linea breuiss. alla medesma c d, & sia la b r, auẽga

che la a d, & la b r, (quali mostrano le distãze nelli dui pũti diuersi a, & b, della a b, alla c d, ò sua dirittura) siano ineguali fra loro, allhora si dice esse rette a b, & c d, essere nõ equidistãti. Et delle distãze, ò breuiss. rette a d, & b r: trouãdosi più corta la b r, destra, si dice le rette a b, & c d, nõ equidistãti, auicinarsi da q̃sta bãda destra di b r, più corta, & allontanarsi dalla banda sinistra di a d, più lunga.

PROPOSITIONE PRIMA.

Se da vn punto dato ad vna linea proposta di indefinita lunghezza si tiri vna perpendicolare, essa perpendicolare sarà la più breue linea, che dal punto dato partendosi, possa arriuare alla linea proposta; ne allcun'altra retta, che dall'istesso punto dato partẽdosi arriui alla medesma detta proposta, potrà essere vguale à detta perpendicolare.

SIA dato il punto a, & proposta la retta b c, alla quale dal punto a, sia tirata la perpendicolare a r, si dice ella essere la breuissima linea, che partendosi dal punto a, possa arriuare alla retta b c; Che se ella non fusse la breuissima (per l'aduersario) saria vn'altra linea più breue di a r; hor sia a n; se possibile fusse, onde nel triangolo rettangolo a r n, essendo il lato a n, per l'aduersario più corto di a r, ancora (per la 18. del primo d'Euclide) l'angolo r, retto, opposto ad a n, saria più piccolo dell'a n r; perilche l'a n r, saria ottuso, cioè maggior di retto, ma ancora l'ãgolo estrinseco a n c, (per la 16. del primo) è maggiore dell'intrinseco oppostoli a r n, retto, però sarà ottuso anch'egli; onde essendo ciascuno delli dui a n r, & a n c, ottuso, cioè maggiore di retto; la somma loro saria maggiore di dui retti, il che è impossibile (per la 13. del primo.) Ouero se a n, p l'auersario fusse più corta di a r; ancora l'angolo r, retto saria più piccolo dell'a n r, perilche a n r, saria ottuso, ma esso a n r, gionto ad a n c, fanno quanto dui retti (per la 13. del primo) onde essendo a n r, maggior di retto, l'a n c, che è il restante fino à dui retti, saria minore di retto, & però acuto;

ma egli è eſtrinſeco del triãgolo a r n ; & però maggiore dell'intrinſeco oppoſtoli r retto;onde l'ãgolo acuto ſaria maggior d̄l ret o; il che è impoſsibile ; impoſsibile dunque è ancora, che alcuna retta, quale dall'a, arriui alla retta b c, poſſa eſſer più breue della ꝑpẽdicolare a r; E che alcũ'altra retta,che dall'iſteſſo pũto dato partẽdoſi, arriui alla medeſma detta ꝑpoſta, non poſſa eſſere vguale à detta ꝑpendicolare a r, ſi proua così; Se per l'auerſario alcun' altra poniamo la a n ; poteſſe eſſere eguale alla a r; allhora nel triangolo a r n ; di dui lati a r, & a n, eguali (per l'auerſario) li angoli r, & n, ſopra alla baſe (per la 5. del primo) ſariano eguali fra loro, ma l'r, è retto, però anco l'n, ſaria retto ; Et perche li dui a n r, & a n c, ſono eguali à dui retti (per la 13. del primo) eſſendo l'vno a n r, retto, ancora l'altro a n c, ſaria retto, ma egli è eſtrinſeco del triangolo rettangolo a r n ; & però maggiore dell' intrinſeco oppoſtoli r, che è retto;onde il retto ſarebbe maggiore del retto (ouero l'eſtrinſeco ſarebbe eguale all'intrinſeco oppoſtoli, eſſendo ciaſcuno d'eſſi retto) il che è impoſsibile ; non è poſsibile dunque, che alcun' altra retta dall' a, peruenente alla b c ; ſia eguale, ne minore della ꝑpendicolare a r; perilche ella ſarà la breuiſsima.

COROLLARIO.

Di quì ſi conoſce , che quando da vn punto dato, ad vna linea propoſta ſi tira vna perpendicolare, ella è la diſtanza , che ſi troua dal punto dato alle linea propoſta.

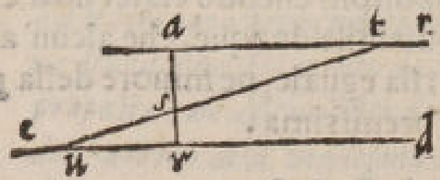
PROPOSITIONE SECONDA.

Quando due linee rette ſiano equidiſtanti fra loro , le linee, che partendoſi dalla prima arriuino perpendicolarmente alla ſeconda, ſaranno anco perpendicolari à detta prima.

SIANO le due rette m n, & c d, equidiſtanti , & dal punto a, ſegnato nella prima, ſia tirata a r, perpendicolare alla ſeconda, cioè che facci gli angoli all' r , retti . Si dice, che la iſteſſa a r, è anco perpẽdicolare alla prima linea m n; cioè che gli angoli all' a , ſono anch' eſsi retti . Perche ſe eſſa r a ; non fuſſe ꝑpendicolare alla m n, ne ſeguiria, che dall'r, tirando vna perpendicolare alla m n, ella andaſſe à terminare altroue, che in a, hor vada ſe poſsibile è in t, che così a t r, & n t r, ſariano angoli retti , & nel

 trian-

triangolo rettangolo r t a, che hà il lato t a, allungato in m, l'ango lo r a m, estrinseco (per la 16. del primo) saria maggiore del retto r t a, intrinseco oppostoli, & pò saria ottuso, ma li dui angoli r a m, & r a t, in somma sono eguali à dui retti, onde essendo l'vno r a m, maggiore di retto, cioè ottuso, l'altro restãte r a t, saria minore del l'altro retto, & pò acuto; pilche egli saria minore dell'angolo r t a, che è retto p l'auersario: Et considerato il triangolo rettãgolo r t a; perche l angolo r a t, acuto saria minore dell' r t a, retto; ancora il lato r t, opposto all'acuto saria minore dell' r a, opposto al retto. Hora dal pũto t, tirisi vna perpendicolare alla retta c d, & sia la t o, quale di necessità peruerrà alla c d, di quà dal punto r, cioè verso d (poiche in r, non può andare, cioè essere la istessa t r, perche allhora l'angolo t r d, saria retto, ma egli è parte dell' a r d, che è retto anc'egli, per il supposito, & gli angoli retti sono fra loro egua li per commune concessione; però la parte saria eguale al tutto, il che è impossibile. Ne fra r, & c, può andare, poniamo in u, segãdo la a r, poniamo in s, pche allhora nel trian goletto s u r, essendo l'angolo u, intrinseco retto, egli verria ad essere eguale all'angolo s r d, che anc'egli è retto, & estrinseco oppostoli, il che è impossibile (per la 16. del primo.) Et perche le due rette m n, & c d, sono equidistanti dal supposito, le due a r, & t o, perpendicolari alla c d, saranno eguali fra loro, & pche l'angolo a r d, è retto, il t r o sua parte, & però minore di lui sarà acuto, cioè minore di retto, & pò minore dell'ango lo retto t o r, onde nel triãg. t o r, rettãgolo, pche l'angolo t r o, acuto è minore del t o r, retto, ancora il lato t o (opposto all'acuto) sarà minore del lato r t (opposto al retto) pilche ancora r a, eguale al la t o, sarà minore della medesma linea r t, cioè r t, sarà maggiore di r a; ma di sopra si può essa r t, esser minore della istessa r a; onde la r t, saria & maggiore, & minore della r a; il che è impossibile, pò è anco impossibile quello, da che questa impossibilità si dedurria, cioè che a r, perpendicolare alla c d, non sia anco perpendicolare alla m n; gli sarà dunque perpendicolare, che è quello, che si volena prouare.

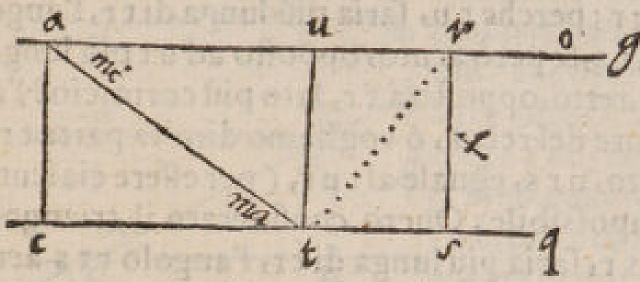


PROPOSITIONE TERZA.

Se date due linee rette equidistanti si tirino da dui diversi punti della prima due perpendicolari alla seconda, allhora la parte del la pri-

la prima linea intrapresa fra i due termini delle perpendicolari, sarà eguale alla parte della seconda linea intrapresa fra gl'altri dui termini delle medesime perpendicolari.

SIANO le due rette equidistanti a g, & c q, & sù la prima a g, siano segnati li dui punti a, & r, dalli quali alla seconda c q, si tirino le perpẽdicolari

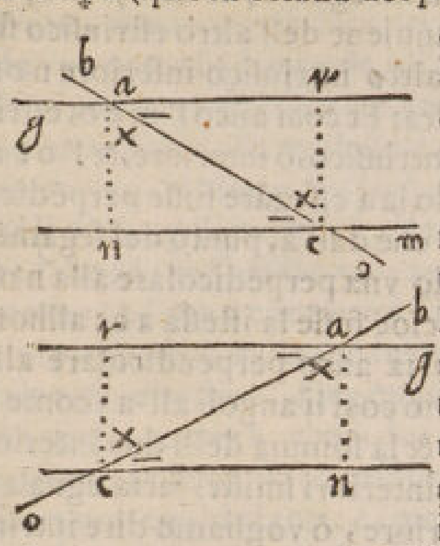


 a c, & r s, quali per la equidistanza delle linee, sarãno eguali fra loro, & faranno anco angoli retti cõ la a g (per la seconda di questo.) Si dice, che anco le due a r, & c s, intraprese fra esse nelle due equidistãti saranno eguali l'vna all'altra; Perche se non fussero eguali, l'vna saria più lunga dell'altra, hor sia, se possibile è, più lunga la c s, & quel più si facci rimanere da vna banda, poniamo dall's, & sia s t, si che per l'aduersario t c, resti eguale ad a r, & tirata la a t, ciascuno delli angoli c a t, t a r, parte del retto a, sarà acuto; hora dal pũto t, alla a g, si tiri la perpendicolare t u, quale di necessità caderà fra r, & a, (che in r, nõ può cadere, perche l'angolo t r a, retto, saria parte dell's r a, retto, & à lui eguale (essendo gli angoli retti eguali fra loro) cioè la parte saria eguale al tutto, che è impossibile. Et oltre all'r, poniamo in o, non può cadere, segando la s r, poniamo in x: perche considerato il triangolo x r o, che haueria il lato r o, allungato in g l'angolo x o g, estrinseco, essendo retto, saria eguale all'angolo x r o, che è retto, & intrinseco oppostoli, il che è impossibile; Et per la medesima causa non potrà cadere in a, ne oltre all'a:) Onde perche a u, parte di a r, è minore di essa a r, saria anco minore di c t, posta dall'aduersario eguale alla a r; Et perche t u, è eguale alla c a, per la equidistanza delle linee, & essendo essa t u perpendicolare alla a g, è anco perpendicolare alla c q (per la seconda di questo) considerati li dui triangoli a u t, t c a; perche li due lati a t, t u, dell'vno sono eguali alli dui lati t a, a c, dell'altro; ma la base u a, saria minore della base c t, ancora l'angolo a t u, contenuto da detti dui lati dell vno saria minore dell'angolo t a c, contenuto da detti suoi relatiui lati dell'altro (per la 25. del primo) & perciò l'a t c, restante d'vn retto u t c, saria maggiore del t a u, restante del retto c a u. Hora tirata la t r, & cõsiderato il triangolo t a r, & anco l'a t c, che per l'aduersario il primo lato r a, di l'vno l'vno è eguale al primo lato c t, dell'altro, & il secondo a t, al secōdo t a; ma l'angolo t a r, contenuto dalli dui lati dell'vno è minore dell'angolo a t c, contenuto dalli dui lati dell'altro, ne segue (per la 24. del primo) che la base t r, sia minore della base c a; cioè che la linea c a, sia maggiore della t r, & perciò anco ciascuna delle due t u, & s r (eguale alla c a) saria maggiore della medesma t r; Onde nel triangolo rettangolo t u r; perche t u, saria più lunga di t r, l'angolo t r u, parte del retto u r s, & però acuto, opposto ad u t più lunga, saria maggiore del t u r, retto, opposto à t r, lato più corto, cioè l'āgolo acuto saria maggiore del retto, ò vogliamo dire la parte t r u saria maggiore del tutto, u r s, eguale al t u r, (per essere ciascuno di essi retto) il che è impossibile; Ouero considerato il triangolo rettangolo t s r, perche s r, saria più lunga di t r, l'angolo r t s acuto (che è parte del retto u t s) saria maggiore del t s r retto; il che è impossibile; Impossibile è dunque, che le due rette a r, & c s, poste fra le due perpendicolari c a, & r s, siano ineguali fra loro, & però saranno eguali.

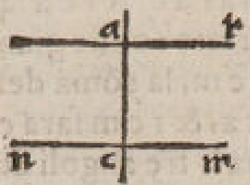
PROPOSITIONE QVARTA.

Se sopra à due linee rette equidistanti cada vna retta, come si vogli, segandole ambedue; li dui angoli intrinseci formati da vna medesma parte gionti insieme saranno eguali à dui angoli retti; Et di più l'intrinsico superiore dall'vna parte sarà eguale all'intrinsico inferiore dall'altra parte; Et ancora ciascuno delli estrinseci sarà eguale all' intrinsico oppostoli dalla medesma parte.

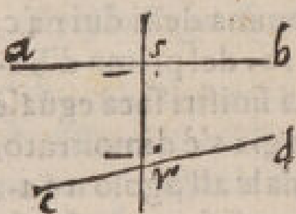
SIA che la retta a c, seghi le due equidistāti a r, & n m, in a, & c, si dice, che la somma delli dui angoli intrinsici da vna medesima parte è vguale à dui retti, &c. Per dimostrarlo dal punto a, alla n m, si tiri la perpendicolare a n, che perciò farà ancora angoli retti con la a r, in a (per la seconda di questo) & dall'altro punto c, del segamento, si tiri alla a r la perpendicolare c r, quale similmente (per la seconda di questo) sarà anco perpendicolare alla n m, & perciò anco farà angoli retti con la n m; & esse due perpendicolari a n, & c r saranno eguali fra loro, per la supposta equidistanza delle rette a r, & n m; & di più le rette a r, & n c, intraprese da dette perpendicolari a n, & c r, sarāno eguali fra loro (per la antecedente terza propositione:) Onde nelli dui triangoli rettangoli a r c, & c n a; li tre lati dell'vno sono eguali alli tre lati loro corrispondenti dell'altro l'altro pò (per la ottaua del primo) li angoli dell'vno sarãno eguali alli angoli à loro corrispondenti dell'altro, cioè r a c-, ad n c a-, & r c a, x ad n a c, x; ma r a c, & n a c contengono vn retto n a r, cioè sono eguali ad vn retto, però ancora r a c, & r c a saranno eguali ad vn retto: onde giuntoli l'angolo retto r c m, la sõma delli tre angoli r a c, r c a, & r c m sarà eguale à dui retti; ma li tre angoli detti sono quanto li dui intrinsici destri r a c, & a c m (perche a c m da se è eguale alli dui a c r, & r c m sue parti, in che egli è diuiso, che lo contengono intieramente) però li dui intrinsici destri detti sono eguali à dui retti; Et perche tutti quattro li intrinsici, cioè li dui destri, & li dui sinistri in somma sono eguali à quattro retti (per la 13. del primo d'Euclide) essendo già li dui destri eguali à dui retti, ne segue, che li dui sinistri siano anco essi eguali à dui altri retti, che è il restante delli quattro retti detti; Ouero perche l'angolo n c a - è eguale all'r a c-, & q̃sto r a c-, insieme con l'n a c, x contẽgono vn retto r a n, ancora l'n c a-cõ l'n a c, x, si eguagliarãno ad vn retto, onde giõtoli l'angolo retto n a g, la sõma (che è quãto il totale g a c, con l'n c a) cioè li due intrinsici sinistri sarà quãto dui retti. Ouero pche n c a-è eguale ad r a c,-, giontoli cõmunemente il g a c, la somma delli dui n c a, & g a c, intrinsici sinistri sarà eguale alla somma delli dui r a c, & g a c, ma questa è eguale à dui retti (per la 13. del primo d'Euclide) però anco la somma di detti dui intrinsici sinistri sarà eguale à dui retti. Et quanto alli angoli coalterni, di già s'è dimostrato, che l'ãgolo r a c-, ĩtrinsico destro superiore è eguale all'ãgolo n c a-, intrinsico sinistro inferiore. Qũãto poi al g a c, egli è composto da vn retto, & dall'x; ma da vn'altro retto, & da vn'altro x, è anco coperto l'm c a, però questo m c a, sarà eguale al g a c. Ouero, perche la somma di r a c, & g a c, è eguale à dui retti, & anco la somma di n c a, & m c a, è eguale à dui retti, essendo già dimostrato l'r a c, da se essere eguale all'n c a, da se, ne segue, che anco il rimanente g a c, sarà eguale al rimanente m c a; Et che ciascuno delli estrinsici sia eguale all'angolo intrinsico oppostoli dalla medesima parte, è facile da conoscere; poiche quãto al b a r, egli è vguale all'a c m, essendo ciascuno di essi eguale al g a c, (opposito al b a r, per il segamento



mento delle rette g r, & b c (& però à lui eguale per la 15. del primo)& coalterno all' m c a) L'istesso auuiene dell'altro estrinsico superiore g a b, nell' essere eguale all' altro intrinsico inferiore n c a, oppostoli dalla medesima parte sinistra; Et così anco l' m c o, estrinsico, ò esteriore, sarà eguale all' r a c, intrinsico, ò interiore, & l' o c n, al g a c. Et quando la a c, segãte fusse perpẽdicolare alla n m; cioè che dall'a, punto del segamẽto nella a r; tirando vna perpẽdicolare alla n m; ella arriuasse in c, cioè fusse la istessa a c; allhora la medesima a c; saria anco perpendicolare alla a r (per la seconda di questo) & perciò così li angoli all' a, come li angoli al c, tutti sariano retti; onde, & la somma delli due interiori destri, & anco la somma delli due interiori sinistri saria eguale à dui retti. Et così anco ciascuno interiore, ò vogliamo dire intrinsico superiore da vna parte, saria eguale al suo coalterno, ò vogliamo dire interiore, ò intrinsico inferiore dall'altra parte. Et similmente ciascuno delli quattro esteriori saria eguale al suo relatiuo, ò corrispondente intrinsico, ò interiore oppostoli dalla medesima parte.



Notisi, che la superiore propositione è la istessa, che la 29. del primo d'Euclide, & è dimostrata ostensiuamente, per proprij mezi, cioè senza ridurre l'aduersario all'impossibile, & non hà bisogno altrimenti del quinto postulato posto per petitione, ò primo principio, qual dice. Si domanda esserci concesso, che se vna linea retta segando due linee rette facci li angoli interiori, & da vna medesima parte, minori di dui retti, allhora le due rette allungate in infinito, esser necessario, che concorrano (cioè si congiunghino insieme, facendo angolo) da quella parte, nella quale gli angoli interiori sono minori di dui retti. Et perciò esso quinto postulato non è necessario alla sua dimostratione.



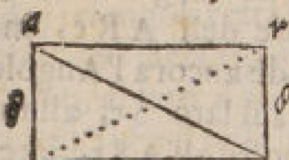
Notisi ancora, che detto quinto postulato, ò cosa in Euclide posta p petitione, ò primo principio si conosce non hauersi à pigliar p tale, poiche nõ hà le due parti necessarie alli primi principij, che sono; L'essere noto al senso, & l'essere indemostrabile; Anzi egli è demostrabile, & perciò si può, ò deue pigliare per propositione, come si vede essere fatto in questa Operetta, doue egli si dimostra nella 12. propositione, dicendo. Se due linee rette date siano segato da vna retta, & occorra, che la somma delli dui angoli intrinsici, ò voglia-

vogliamo dire interni, ò interiori da vna medesima parte sia maggiore, ò minore di dui angoli retti; Ouero che l'interno superiore da vna parte sia ineguale all' interno inferiore dall'altra parte (che sono coalterni frà loro.) Ouero, che l'esterno sia ineguale all'interno oppostoli dalla medesima parte; allhora le due rette date, saranno non equidistanti frà loro; Et più si auicinarãno dalla banda doue li dui angoli interiori giõti insieme sono minori di dui retti; O doue (che è l'istesso) l'interiore è minore dell'altro interiore à lui coalterno; O doue (che pure è l'istesso) l'interiore sia minore dell'esteriore oppostoli dalla medesima parte. Della qual propositione, quella parte, che dice. Che quando di due rette date, segate da vn'altra retta, occorra, che li dui angoli interiori da vna medesima parte gionti insieme siano minori di dui retti; allhora le due retti date, siano non equidistanti; è (mediante la superiore quarta propositione) dimostrata, così. Le due rette date, conditionate come di sopra, non possono essere equidistanti; perche allhora (per la quarta di questo) di necessità; la somma delli dui angoli interiori da vna medesima parte saria eguale à dui retti; Li coalterni sariano eguali frà loro; Et l'esteriore saria eguale all' interiore oppostoli da vna medesima parte; Il che tutto è contro il supposito. Nõ potendo dunque essere equidistanti frà loro, saranno non equidistanti, come si voleua dimostrare.

PROPOSITIONE QVINTA.

Se sopra ad vna retta data si tirino due perpendicolari eguali, & si congiunghino con vna retta, ella sarà equidistante, & eguale alla data oppostali, sopra alla quale stanno le due perpendicolari, quali verranno anco ad essere perpendicolari alla linea detta, che le congiunge insieme.

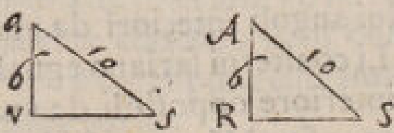
SOPRA c s, data, siano perpendicolari a c, & r s, & eguali, & si tiri a r; si dice, che ella sarà equidistante alla c s, & à lei eguale; Perche, se a r, non fusse equidistante à c s, li saria non equidistante,



& perciò presi in l'vna d'esse a r; i dui diuersi punti a, & r; essi sariano non egualmẽte distanti dalla c s; però le due perpendicolari a c, & r s, che mostrano dette distãze sariano ineguali; ma elle non possono essere ineguali (ponendosi elle dal supposito eguali) però manco la a r; non può essere nõ equidistante alla c s; gli sarà dunque equidistante; & perciò (per

la se-la seconda di questo) ciascuna delle due a c, & r s, che è perpendicolare alla c s, sarà anco perpendicolare alla a r; & perciò l'angolo a, & anco l'angolo r, sarà retto, onde tirata c r, ouero a s, & considerati li dui triangoli rettangoli a c s, & a r s, che li dui lati c a, a s, in l'vno, sono eguali alli loro corrispondenti r s, s a, nell'altro, ne segue (per quello, che quì sotto si mostrarà) che li altri angoli dell'vno siano eguali alli altri angoli dell'altro, & il restāte lato a r, dell'vno, al restante lato c s, dell'altro, cioè la linea a r, alla c s, oppostali, come si volea dimostrare.

Quando di dui triangoli rettangoli, dui lati dell'vno, sono eguali à i dui lati loro corrispondenti dell'altro, ancora il restante lato dell'vno sarà eguale al restante lato dell'altro, & ciascuno delli altri dui angoli dell'vno sarà eguale al suo corrispondente angolo dell'altro; & l'vn triangolo all'altro.



NELLI dui triangoli rettangoli a r s, & A R S, se li dui lati continēti l'angolo retto dell'vno fussero eguali alli dui lati continenti l'angolo R, retto dell'altro, ancora (per la 4. del primo d'Euclide) il restante lato dell'vno, saria eguale al restante lato dell'altro, gli angoli à gli angoli, &c. Ma siano r a, & a s, eguali ad R A; & A S; Si dice, che anco R S, sarà eguale ad r s. Perche se non fussero eguali, l'vno saria più lungo dell'altro, hor sia per l'auuersario R S, più lungo, & si facci restare dalla parte S, quello in che eccede r s, sì che R t, douenti per l'auuersario eguale ad r s; che perciò nelli dui triang. rettāg. a r s, & A R t. essendo li dui lati a r, r s, con il suo angolo r, retto, eguali alli dui lati A R R t, con il suo angolo R, retto, ne seguiria (per la 4. del primo) che ancō la base A t, fusse eguale alla base a s, & perciò saria anco eguale alla A S. (posta eguale alla a s) onde nel triangolo A t S. li dui lati A t. & A S. sariano eguali frà loro, e pciò li dui angoli A S t, & A t S, sariano eguali frà loro, ma l'A t S, esteriore del triangolo rettangolo A R t, che hà il lato R t, allungato in S. è maggiore dell' A R t, interiore retto, oppostoli, & perciò è ottuso; onde ancora l'Angolo A S t, saria ottuso. Et nel triangolo A S t, che hà il lato S t, allungato in R, l'angolo A t R, che è esteriore opposto all'A S t, interiore, saria maggiore d'esso A S t, ottuso, cioè saria ottuso anco egli, ma ancora l'angolo A t S. è ottuso, però li angoli A t R, & A t S, fatti dalla linea A t, cadente sopra alla R S, sariano ambidui

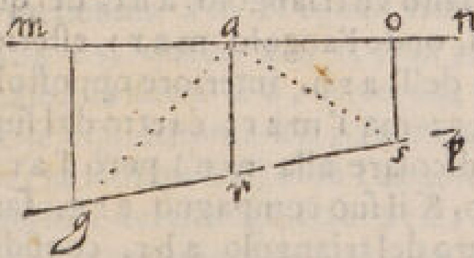
dui

dui ottusi, ò vogliamo dire, maggiori ciascun d'essi di retto, & perciò in somma maggiori di dui retti; il che è impossibile (per la 13. del primo) non possono dunque li dui lati r s; & R S, essere inegualí fra loro, & però saranno eguali, & consequentemente l'angolo a, sarà eguale all'A, l's, all'S, & l'vn triangolo all'altro.

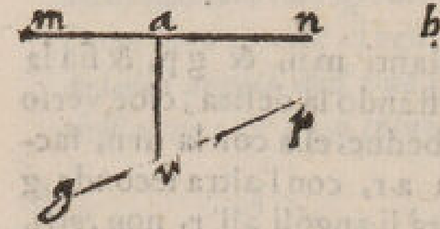
PROPOSITIONE SESTA.

Se sopra à due linee rette date non equidistanti, si tiri vna retta, che sia perpendicolare alla prima ella non potrà essere perpendicolare alla seconda, anzi con la seconda farà angolo acuto dalla parte doue le linee date si vanno accostando, & però ottuso dall'altra parte.

SIANO le due rette date non equidistanti m n, & g p, & sia la parte, dalla quale elle si vanno accostando la destra, cioè verso l'n, & p. Et tirata a r, che le seghi ambedue, ella con la m n, facci gli angoli all'a, retti. Si dice, che essa a r, con l'altra seconda g p; farà li angoli all'r, non retti, & sarà acuto l'a r s, dalla banda del quale le date non equidistanti si auicinano. Perche se per l'auersario gli angoli all'r, fussero retti, prese r g, & r s, eguali, & tirate a s, & a g, & considerati

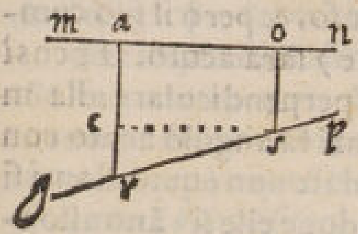


li dui triangoli a r g, & a r s, che fariano rettangoli per l'aduersario, & però l'angolo r, dell'vno, eguale all'angolo r, dell'altro & li dui lati g r, r a, continenti l'angolo r, dell'vno, alli dui lati s r, r a, continenti l'angolo r, dell'altro, ne seguiria (per la 4. del primo) la base a g, douere esser' eguale alla base a s; & gli altri angoli dell'vno, à gli altri angoli à loro corrispondenti dell'altro; Onde ancora l'angolo m a g, restante del retto m a r, saria eguale all'angolo n a s, restante del retto n a r: Hora dalli punti s, & g, tirate ad n m; le perpendicolari s o, & g t, & considerati li dui triangoli rettangoli s o a, & g t a; che di più l'angolo s a o, dell'vno saria eguale all'angolo g a t, dell'altro, & il lato a s, dell'vno, al lato a g, dell'altro, ne seguiria (per la 26. del primo d'Euclide) che il restante angolo a s o, dell'vno fusse eguale al restante angolo t g a, dell'altro, il lato o a, al lato t a, & ancora il lato s o, al lato g t; ma s o, & g t, che sono perpendicolari alla m n; mostrano la distāza della g p, alla m n, nelli dui diuersi punti g, & s; & perche fariano eguali, ne feguiria, che g p; & m n; fussero equidistanti, il che è contro il suppofito, & però impossibile. Onde impossibile è anco, che li angoli a r g, & a r p, siano retti; saranno dunque non retti, cioè l'vno ottufo, & l'altro acuto, come si volea prouare. Et l'acuto farà a r p, ponendofi, che le linee m n, & g p, non equidistanti si auicinino verfo n; & p; allontanandosi verfo m, & g, (cioè fupponendo, che g t, fia più lunga di r a; & r a, più lunga di s o, cioè che il punto g, fia più distante dalla retta m n, che non è il punto r, & il punto r, più distante dalla istessa retta m n, che il punto s.) Perche effendo più vicine le rette date dalla parte n p; che dall'altra, ne fegue, che da essa parte allungate elle finalmente occorreffero insieme formãdo ango-

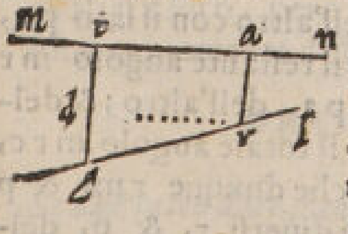


lo; hor poniamo mentalmente, che ciò occorreffe in h, confiderato dalla detta parte destra, lontano dalla a r, (perpendicolare alla m n) quanto si vogli, che così le due a h, & r h; con la a r, formariano vn triangolo a h r, del quale il lato h a, faria allungato in m, onde l'angolo m a r; esteriore d'esso triangolo farà maggiore dell' a r h, interiore oppostoli, cioè l' a r h; farà minore dell' m a r; ma l' m a r; è retto dal suppofito (ponendofi la a r, perpendicolare alla m n) però l' a r h, minore di lui, verrà ad effere acuto, & il fuo compagno a r g, farà ottufo, come si volea prouare. Ouero del triangolo a h r, confiderato il lato h r, allũgato in g, l'angolo esteriore a r g, farà maggiore dell' r a h; interiore oppostoli, ma esso interiore è retto, però l'esteriore, cioè a r g, farà ottufo, & confequentemente a r p, farà acuto, che è quello dalla parte doue le date m n, & g p, non equidistanti si vanno auicinando. Et questo anco, da fe (fenza la prima fuperiore dimostratione, doue si riducea l'auerfario all'impossibile) può bastare à dimostrare ostensiuamente, che la retta a r, perpendicolare alla m n; non è altramente perpendicolare alla g p; poiche si proua, che l'angolo a r p; destro è acuto, & l' a r g; finistro è ottufo.

Ancora si potria da principio dimostrare la Propofitione totale così. Siano le due rette date non equidistanti m n, & g p; quali più si auicinino dalla parte destra n p, & fopra ad esse fia tirata a r, quale fia perpendicolare in a, alla prima m n; Si dice ella non poter'effere perpendicolare alla feconda g p; anzi, che con essa feconda g p, farà angolo acuto dalla parte destra n p; doue le date s'auicis'auicinano, & ottuſo dall'altra parte, cioè ſi dice l'angolo a r p; eſſere acuto, & l' a r g, ottuſo. Et per prouarlo; Da vn' altro punto preſo nella prima m n, ò dalla parte deſtra da a, verſo n; ò dalla ſiniſtra da a, verſo m, poniamo dalla deſtra, & ſia o, alla iſteſſa prima m n, ſi tiri la perpendicolare o s, di modo lunga, che arriui anco alla ſeconda g p; & ſia che vi arriui in s, che così le due



s o, & r a, perpẽdicolari alla m n; moſtraranno la diſtanza dalli dui diuerſi punti r, & s, ſegnati nella g p; alla m n, quali due perpendicolari r a, & s o, ſarãno ineguali, ſupponendoſi che le due date m n, & g p, ſiano non equidiſtanti. Et di più perche ſi dice elle auicinarſi dalla parte deſtra; la deſtra s o, doue la diſtanza è minore ſarà più corta della ſiniſtra a r; hora da queſta a r, più lunga, cominciando dall'a, doue fà angolo retto con la m n; ſi leghi la parte a c; eguale alla o s, & ſi tiri la c s; & conſiderate le due rette c a, & s o, ambedue perpendicolari alla medeſima a o, & eguali frà loro, quali ſono congiunte inſieme dalla c s, queſta c s, (per la 5. di queſto) ſarà equidiſtante, & eguale alla detta a o, & però la a c, che è perpendicolare all' vna d'eſſe equidiſtanti a o; ſarà ancora perpendicolare all'altra c s, (per la 2. di queſto) cioè l'angolo a c s, ſarà retto; & perche egli è eſteriore del triangoletto s r c, che hà il lato r c, allungato in a, egli ſarà maggiore dell'angolo c r s, interiore oppoſtoli (per la 16. del primo d'Euclide) cioè l'angolo c r s, ſarà minore dell'a c s, che è retto, però detto c r s; ſarà acuto, ma queſto è l'angolo, che fà la a r, con la g p; ſeconda delle due date non equidiſtanti, che più ſi auicinano dalla parte n p, deſtra, doue è queſt'angolo, però conoſciamo, che la a r, non è altrimẽti perpendicolare alla ſeconda data g p; anzi con lei fà angolo acuto dalla parte deſtra, doue le due date ſi ſuppongono auicinarſi, ottuſo dunque ſarà l'altro a r g, ſiniſtro (per la 13. del primo) dalla qual parte ſiniſtra le due rette date non equidiſtanti ſi allontanano frà loro.



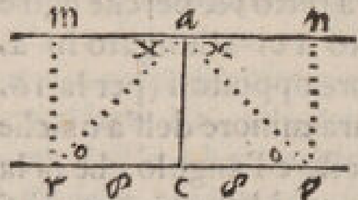
Et ſe nella prima linea m n, haueſsimo preſo il punto t, dalla parte ſiniſtra, dalla quale le due rette date m n, & g p, non equidiſtanti ſi vanno allontanando, & da eſſo punto t, alla m n, tirata la perpendicolare t g, peruenente alla g p, in g; allhora, perche queſta t g, ſaria più lunga della a r, (eſſendo le due rette date, più diſtan-

distanti (dal supposito) dalla parte sinistra, che dalla destra) da essa t g, cominciando dal punto t, doue ella fà angolo retto con la m n, si segaria la parte t d, eguale alla a r, & tirata la r d, ella (per la 5. di questo) sarà equidistante, & eguale alla a t, perilche la a r, che è perpendicolare alla a t, sarà ancora perpendicolare alla r d, (per la 2. di questo) cioè l'angolo a r d, sarà retto, onde l'a r g, che è maggiore di detto retto sua parte, sarà ottuso, & però il suo compagno a r p. (per la 13. del primo d'Euclide) sarà acuto. Et così conosciamo pure, che la retta a r, essendo perpendicolare alla m n, non può essere perpédicolare alla g p; anzi fà angolo acuto con essa g p; dalla parte destra p, doue le due date non equidistanti si auicinano, & ottuso dalla parte sinistra g, doue elle si vāno allontanando, il che è quello, che si voleua dimostrare.

PROPOSITIONE SETTIMA.

Se sopra à due rette date cada vna retta, che sia perpendicolare ad ambedue, è necessario esse due rette date esser' equidistāti fra loro.

SOPRA m n, & r p, date cada a c, & occorra, che ciascuno delli angoli all'a, & al c, sia retto, si dice, che m n, & r p, sono equidistanti frà loro. Per dimostrarlo, presa c p, & c r, eguali, dalli punti p, & r, alla m n, si tirino le perpendicolari p n, & r m, accioche li angoli all'm, & all'n, siano retti, & si tirino r a, & p a, & considerati li dui triangoli rettangoli r c a, & p c a, li dui lati r c, c a, cō il suo angolo retto saranno eguali alli dui lati p c, c a, con il suo angolo retto, onde (per la 4. del primo) r a, sarà eguale alla p a, l'angolo a r c, all'a p c, & l'r a c, al p a c, onde cauato l'r a c, dal retto m a c, & il p a c, dal retto n a c, li dui angoli rimanenti r a m, & p a n, saranno eguali frà loro. Et nelli dui triangoli rettangoli r m a, & p n a, perche li dui angoli m, & a, dell'vno, con il lato r a, sono eguali alli corrispondenti dui angoli n, & a, dell'altro con il lato p a, ne segue (per la 26. del primo d'Euclide) che il restante angolo m r a, dell'vno, sarà eguale al restante angolo n p a, dell'altro; & delli lati r m, al p n; & m a, ad n a; Onde il totale angolo m r c, sarà anco eguale al totale angolo n p c; Perche dunque r m, & p n; perpendicolari alla m n; dalli dui punti diuersi r, & p, della linea r p; sono eguali frà loro, ne segue, che la r p, sia da ciascuna



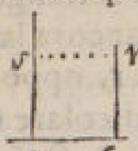
ſcuna parte egualmente lontana, & però equidiſtante alla m n, come ſi voleua prouare. Conoſciamo ancora, che per la medeſma cauſa; perche ſopra n p, & a c, cade n a, perpendicolare ad ambedue, ne ſegue, che n p, ſia equidiſtante alla a c; Et di più vediamo, che ſopra le due equidiſtanti m n, & r p, cadendo r m, & p n; perpendicolari alla m n, che elle ſaranno anco perpendicolari alla r p, & perciò che l'angolo m r p, ſarà retto, e così l'n p r.

Ouero per dimoſtrare la ſopradetta propoſitione, ſi potria dire. Se le due rette m n, & r p, non fuſſero equidiſtanti, elle ſariano non equidiſtanti, & però la retta a c, che è perpendicolare all'vna m n; non potria eſſere perpēdicolare all'altra r p, (per la 6. di queſto) ma il ſuppoſito è, che eſſa a c, ſia anco perpēdicolare alla r p; però non potrà a c, non eſſere perpendicolare alla r p; onde ne anco potrà eſſa r p, non eſſere equidiſtāte alla m n; gli ſarà dunque equidiſtante.

PROPOSITIONE OTTAVA.

Se ſopra ad vna retta data cadano due perpendicolari; elle ſaranno equidiſtanti frà loro.

SOPRA alla data a c, ſiano le due perpendicolari a s, & c r, ſi dice elle eſſere equidiſtanti frà loro; Per dimoſtrarlo, faccinſi eſſe due perpendicolari eguali (dalla più lunga ſegando vna parte



eguale alla minore) & ſia a s, eguale alla c r, & ſi cōgiungano li punti r, & s, con la retta r s, quale (per la 5. di queſto) ſarà eguale, & equidiſtante alla a c, & li angoli r, & s, ſaranno retti, come li c, & a, (per la 4. di queſto) onde anco ciaſcuna delle due rette c a, & r s, ſarà perpendicolare à ciaſcuna delle due c r, & a s; & però ciaſcuna delle due c a, & r s, (per il corollario della prima di queſto) moſtrarà la diſtanza di c r, ad a s, nelli dui diuerſi punti c, & r, preſi nella c r; ouero moſtrarà la diſtanza di a s, alla c r, nelli dui diuerſi punti a, & s, preſi nella a s, ma eſſe c a, & r s, ſono eguali frà loro, però anco le due c r, & a s, (per la 2. diffinitione) ſono egualmente diſtanti, ò equidiſtanti frà loro, come ſi vogli dire.

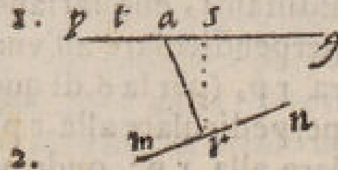
PROPOSITIONE NONA.

Se due rette date ſiano non equidiſtanti, & da vn punto ſegnato nella prima, ſi tiri vna perpendicolare alla ſeconda, & dal punto

doue

doue nella seconda arriua essa perpendicolare, si tiri vna perpendicolare alla prima, quest'vltima perpendicolare sarà più corta della antecedente perpendicolare, & andarà frà la antecedente, & quella banda, doue le linee date si vanno auicinando.

SIANO le due rette date non equidistanti p g, prima, & m n, seconda, che si vanno auicinando dalla parte g n, & dal punto a, segnato nella prima sia tirata a r, perpendicolare alla seconda,



che così, essendo l'angolo a r n, retto, il g a r, sarà acuto (per la 6. di questo.) Hora dal punto r, tirando vna perpendicolare alla prima linea p g, ella andarà di necessità frà a, & g, perche sopra la istessa r a, non può andare, che allhora l'angolo r a g, saria retto, & di già sappiamo egli douere essere acuto, ne frà a, & p, può andare, perche dicendosi dall'aduersario ella poterui andare, & arriuarui, poniamo in t, & però l'angolo r t a, essere retto, ne seguiria, che considerato il triangolo rettangolo r t a, del lato t a, allungato in g, l'angolo esteriore g a r, esser maggiore dell'interiore oppostoli a t r, cioè l'acuto del retto, il che è impossibile, andarà dunque frà a, & g, (cioè dalla banda della perpendicolare r a, doue le date non equidistanti si vanno auicinando) & sia la r s, & così l'angolo r s a, sarà retto, & perciò maggiore dell's a r, acuto, onde nel triangolo rettangolo r s a, perche l'angolo a, acuto è minore dell's, retto, ancora la linea, ò lato r s, opposta all'acuto, sarà più corta della a r, opposta al retto (per la 19. del primo d'Euclide) cioè la perpendicolare r s, alla prima linea, sarà più corta della perpẽdicolare a r, alla secõda.

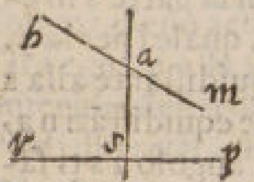
PROPOSITIONE DECIMA.

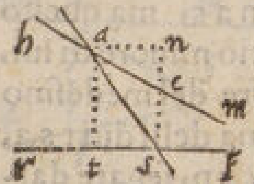
Se due linee rette date non equidistanti siano segate da vna retta, li dui angoli interiori dalla parte doue le rette date si vanno auicinando, gionti insieme, cioè la somma loro sarà minore di dui angoli retti. Et la somma delli dui angoli interiori dall'altra parte, doue le linee date si vanno allontanando sarà maggiore di dui angoli retti; Ancora l'angolo interiore dalla parte, doue le due rette date non equidistanti si vanno auicinando, sarà minore dell'interiore à lui coalterno dall'altra parte, cioè delli coalterni, minori saranno quelli, che sono dalla parte doue le date non equidistanti si vanno auicinando, & maggiori quelli dall'altra

parte

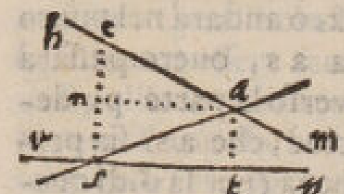
parte doue le date si vanno allontanando. Et di più ciascuno delli dui angoli interiori dalla parte doue le rette date non equidistanti si vanno auicinando, sarà minore dell' angolo esteriore à lui opposto dalla medesima parte: ma dall'altra parte doue elle si vanno allontanando auuerrà il contrario, cioè, che ciascuno delli dui angoli interiori sarà maggiore dell'esteriore oppostoli dalla detta medesima parte.

SOPRA le due rette date h m, & r p, non equidistanti, anzi più vicine dalla banda di m p, che dalla banda di h r, si tiri a s, come si vogli, segandole ambedue in a, & s. Si dice li dui angoli interiori m a s, & p s a, essere minori di dui retti; perche dal punto a, imaginando, tirata vna perpendicolare alla r p, ella, ò andarà nel punto s, cioè sarà vna istessa con la a s, ouero passarà verso la parte r, sinistra, ò verso la parte p, destra; Se andarà nel pũto s, cioè, che a s, sia perpẽdicolare alla r p, ella, allhora (per la 6. di questo) con l'altra linea h m, inequidistante alla r p; farà angolo acuto dalla parte m, destra, doue esse non equidistãti si auicinano, & ottuso dalla parte h, sinistra, doue si allontanano, cioè l'angolo m a s, sarà acuto, & però gionto con il retto p s a, la somma (da questa parte destra, doue le non equidistanti si auicinano) sarà minore di dui retti; & l'angolo h a s, sarà ottuso, però gionto con il retto a s r, la somma (dalla parte sinistra, doue le non equidistanti si allontanano) sarà maggiore di dui retti. Ma se la perpendicolare alla r p, partendosi dal punto a, vi arriui in t, sinistro dall' s, allhora dal punto s, si tiri la s c, perpendicolare alla istessa r p; che essendo le date h m, & r p, non equidistãti, anzi più vicine dalla parte di m p, ne seguirà dette due perpendicolari t a, & s c, alla r p, essere ineguali, & più corta essere la s c; Hora questa s c, si allunghi sopra dal c, finche si facci eguale alla t a, & questo sia, che occorra in n, cioè, che s n, sia eguale alla t a, & tirisi la n a, quale (per la 5. di questo) sarà eguale, & equidistante alla t s, & però essendo a n, & t s, equidistanti, segate dalla retta a s; l'angolo n a s, sarà eguale al suo coalterno t s a, cioè l'interiore superiore destro all'interiore inferiore sinistro (per la 4. di questo) ma l'angolo c a s, parte dell' n a s, è minore di lui, però sarà anco minore del t s a, onde giontoli commmunemente l'angolo a s p; la somma delli dui



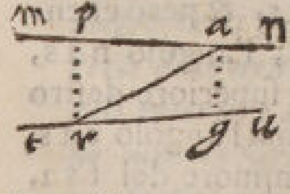


c a s, & a s p, (che ſono li dui interiori dalla parte deſtra, doue le due rette date ſi auicinano) ſarà minore della ſomma delli dui t s a, & a s p; ma queſta ſomma è eguale à dui retti (per la 13. del primo d'Euclide) però quella ſarà minore di dui retti. Et conſequentemente li dui altri angoli interiori ſiniſtri h a s, & r s a, che ſono il reſtante delli deſtri, ſino à 4. retti, ſarà maggiore di dui retti. Et quando la perpendicolare alla r p, partendoſi dal punto a, vi arriui in t, deſtro dall' s, allhora dal punto s, ſi tiri la s c, perpendicolare alla iſteſſa r p, che eſſendo le date h m, & r p, non equidiſtāti, anzi più vicine dalla parte di m p, ne ſeguirà dette due perpendicolari s t, & t a, alla r p, eſſere ineguali, & più lunga eſſere la s c. Hora da queſta s c, cominciando dall' s, ſi ſeghi la parte s n, eguale alla t a, & ſi tiri la a n, quale (per la 5. di queſto) ſarà eguale, & equidiſtante alla s t, perilche eſſendo queſte due equidiſtāti n a, & s t, ſegate dalla retta a s, l'angolo a s t, ſarà eguale al ſuo coalterno n a s, ma queſto n a s, è parte del c a s, & perciò minore di lui, però anco l'a s t, ſarà minore del medeſmo c a s; onde giontoli communemēte l' m a s, la ſomma delli dui t s a, & m a s (che ſono li dui interiori deſtri delle h m, & r p, ſegate dalla a s.) ſarà minore della ſomma delli dui c a s, & m a s; ma queſta è eguale à dui retti (per la 13. del primo d'Euclide) però quella ſarà minore di dui retti. Et conſequentemente la ſomma delli dui angoli interiori ſiniſtri c a s, & r s a, ſarà maggiore di dui retti.

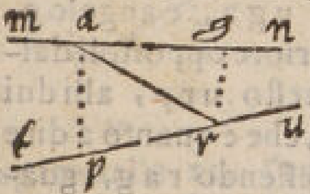


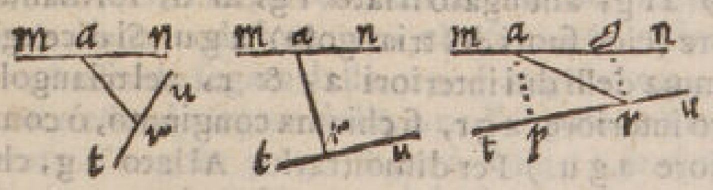
Ancora ſi può dimoſtrare queſta prima parte della preſente propoſitione nel modo, che ſegue.

Seghi a r, le due date non equidiſtanti m n, & t u, che s'accoſtano verſo n u, quale a r, con m n, dalla banda di n, ſarà angolo retto, ouero ottuſo, ouero acuto. Se retto, allhora l'altro interiore deſtro a r u, ſarà acuto (per la 6. di queſto) & perciò la ſomma di eſsi dui interiori deſtri n a r, & u r a, ſarà minore di dui retti. Se n a r, ſia ottuſo, ſeghiſene il retto n a g, tirando alla m n, in a, la perpendicolare a g, che così l' a g u (per la 6. di queſto) ſarà acuto, & dall' r, alla m n, ſi tiri la perpendicolare r p, (quale ſarà più lunga della g a) & l'angolo p r u, ſarà acuto; & perche g a, & r p, ſono perpendicolari ad m n, elle ſaranno equidiſtanti frà loro (per



ro (per la 8. di questo) onde essendo segate da a r, l'angolo p r a, sarà eguale al suo coalterno r a g, & perche la somma di p r a, & a r g, è il p r g, acuto, anco la somma di a r g, & r a g, sarà acuto, onde giontoli il retto n a g, la somma loro, con esso retto, cioè n a r, & u r a, sarà manco di dui retti; Ouero, perche sopra p r, & a g, equidistanti cade t u, l'angolo esteriore a g u, acuto, sarà eguale all'interiore oppostoli p r u; ma questo è eguale alla somma delli dui a r g, & r a g, (perche per la equidistanza delle rette p r, & a g, segate dalla a r, l'angolo r a g, è eguale al suo coalterno p r a, & questo p r a, con l'a r g, compõgono il totale angolo acuto p r g) però anco l'angolo a g u, acuto, sarà eguale alla somma delli dui a r g, & r a g; onde giontoli il retto n a g, la somma d'esso acuto con il retto, qual somma è manco di dui retti, sarà eguale alla somma di n a r, & a r u; cioè questi dui angoli interiori destri delle m n, & t u, segate dalla a r, saranno manco di dui retti. Et quando l'angolo n a r, sia acuto, allhora giongaseli tanto, che doventi retto, cioè tirisi alla m n, in a, la perpendicolare a p, finche arriui alla t u, & l'angolo a p u, sarà acuto (per la 6. di questo) ancora dal punto r, alla medesma m n, si tiri la perpendicolare r g, (quale sarà più corta della p a) & l'angolo g r u, sarà acuto; & perche esse due p a, & r g, perpendicolari alla m n, sono equidistãti frà loro (per la 8. di questo) & segate dalla a r, l'angolo g r a, sarà eguale al suo coalterno p a r, & però la somma di g r a, & g a r, sarà eguale alla somma di p a r, & r a g, cioè ad vn retto, onde giõtoli g r u, acuto, la somma delli tre g a r, a r g, & g r u, (che è quanto li dui interiori n a r, & u r a) non arriuarà, cioè sarà minore di dui retti. Ouero quando l'angolo n a r, sia acuto, allhora l'a r u, sarà acuto, ò retto, ò ottuso. Se acuto, ò retto, la somma con n a r, acuto sarà manco di dui retti. Se ottuso, seghisene il retto g r u, & dal punto a, tirisi la perpẽdicolare a p, alla t u, che perciò sarà equidistante alla r g, & l'angolo p a n, sarà acuto, come l'r g n; L'angolo p a r, sarà eguale al suo coalterno a r g, & però a r g, con g a r, saranno eguali al p a g, cioè la somma loro sarà manco d'vn retto (es-





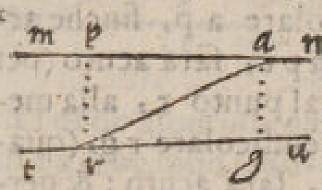
 sendo

ſendo p a g, acuto) che con il g r u, retto ſaranno manco di dui retti, ma li tre detti g a r; a r g; & il retto g r u, ſono quanto li dui n a r, & a r u, (perche a r u, comprende il retto g r u, & l'a r g, come ſue parti totali) perilche ſi conoſce eſsi dui n a r, & a r u, eſſere in ſomma manco di dui retti, come ſi volea dimoſtrare. Et conſequentemente in ciaſcun modo li altri dui m a r, & t r a, interiori dalla parte doue le date non equidiſtāti ſi allontanano frà loro, ſaranno in ſomma più di dui retti.

COROLLARIO.

Di quì ſi conoſce, che quando d'vn triangolo è allungato vn lato l'angolo eſteriore, che ſi forma è eguale alla ſomma delli dui interiori nel triangolo oppoſtili.

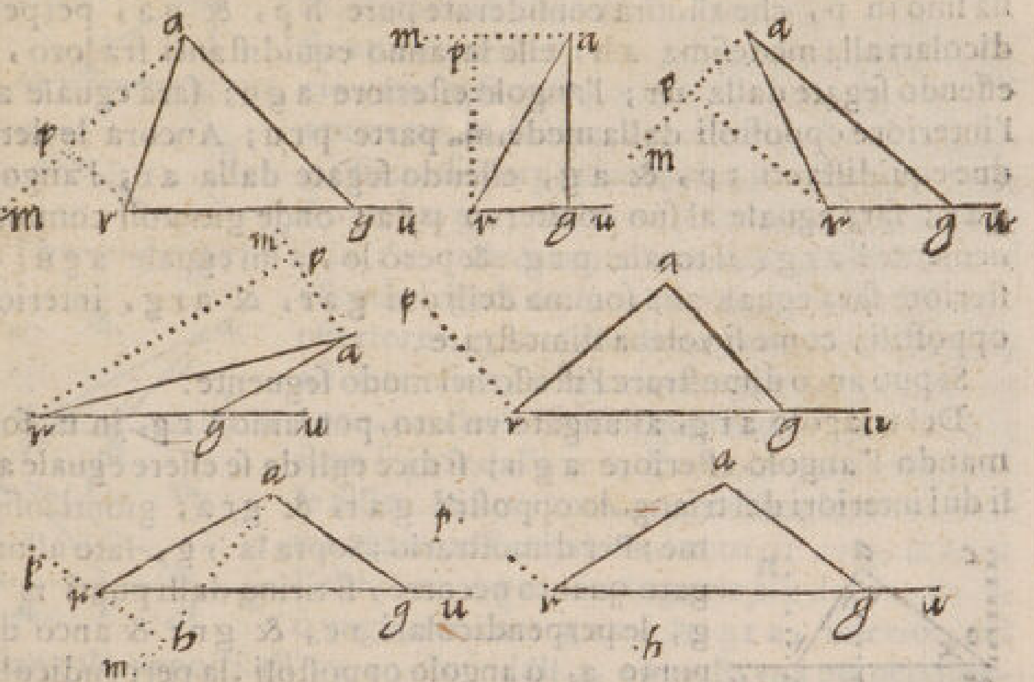
PERCHE di ſopra nella figura quì ricopiata hauendo prouato l'angolo u g a, eſſere eguale all'u r p, (per la equidiſtanza delle rette r p, & g a, ſegate dalla u r, che u g a, è angolo eſteriore, & p r u, è l'interiore oppoſtoli dalla medeſma parte) & queſto u r p, alli dui g r a, & a r p, ſue parti, che è quanto à dire alli dui g r a, & r a g, (eſſendo r a g, eguale al ſuo coalterno a r p, delle equidiſtanti r p, & g a, ſegate dalla r a) conoſciamo, che ancora l'u g a, ſarà eguale alli medeſmi dui g r a, & r a g, che ſono li dui interiori oppoſtili nel triangolo a r g, che hà il lato r g, allungato in u.



Et ancora ſi potrà dimoſtrare eſſa prima parte della ſuperiore propoſitione in altro modo, ſe prima ſi dimoſtrarà la ſeguente.

Di ciaſcun triangolo, allungando vn lato qual ſi vogli, l'angolo eſteriore ſarà eguale alla ſomma delli dui interiori nel triangolo oppoſtili.

SIA del triangolo a r g, allungato il lato r g, in u, formando l'angolo eſteriore (cioè fuori del triangolo) a g u. Si dice egli eſſere eguale alla ſomma delli dui interiori a, & r, nel triangolo oppoſtili (che l'altro interiore a g r, ſi chiama congiunto, ò compagno à detto eſteriore a g u.) Per dimoſtrarlo. Al lato a g, che fà angolo con l'allungamento g u, dalla parte ſuperiore a, verſo la banda d'r, ſi tiri la perpendicolare a m; Et dal punto r, che è l'altra eſtremità del lato allungato per g, in u, ſi tiri vna perpendipendicolare alla a m, & sia la r p; Onde essendo ciascuna delle due rette r p, & g a, perpendicolari alla a m; esse due rette saranno equidistanti frà loro (per la 8. di questo) & perche elle sono



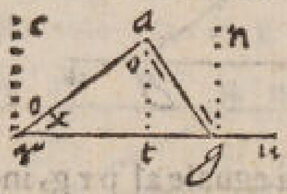
segate dalla r u, l'angolo a g u, esteriore, sarà eguale al p r g, interiore oppostoli dalla istessa parte. Et anco, perche le due equidistanti r p, & g a, sono segate dalla a r; l'angolo r a g, sarà eguale al suo coalterno p r a, onde giontoli communemente l'a r g, alla somma delli dui p r a, & a r g, & però al totale p r g, sarà eguale la somma delli dui r a g, & a r g, interiori nel triangolo, ma al medesimo angolo p r g, è eguale l'esteriore a g u, però esso a g u, sarà anco egli eguale alla somma delli detti dui interiori a, & r. Et se la perpendicolare, che dal punto a, si tirasse alla a g, fusse la a r, altro lato del triangolo g a r; cioè, che l'angolo a, interiore fusse retto; allhora dal punto r, tirata, ò imaginato essere tirata dalla parte superiore la r p, perpendicolare alla r a; pure nel medesimo modo si diria, che essendo r p, & a g, perpendicolari alla medesima a r, elle sono equidistanti frà loro, & che perciò essendo segate dalla u r, l'angolo a g u; è eguale al p r g, & anco essendo segate dalla a r; l'angolo p r a, è eguale all'a, onde tutto l'angolo p r g; & però l'a g u; sarà eguale, & all'a, & all'a r g, cioè alla somma delli dui interiori a, & r. Et se la perpendicolare, che dal punto a, si tirasse al lato a g, passasse dentro del triangolo, cioè, che l'angolo r a g, fusse ottuso; allhora ad essa

perpen-

perpendicolare, paſſante dentro al triangolo, & allungata quanto occorre ſi tiri dal punto r, la perpendicolare r h, & queſta dalla parte ſuperiore, cioè da r, ſi allunghi alquanto à beneplacito, & ſia fino in p, che allhora conſiderate pure h p, & g a, perpendicolari alla medeſima a h, elle ſaranno equidiſtanti frà loro, & eſſendo ſegate dalla u r; l'angolo eſteriore a g u; ſarà eguale all'interiore oppoſtoli dalla medeſma parte p r u; Ancora le dette due equidiſtanti r p, & a g, eſſendo ſegate dalla a r; l'angolo g a r; ſarà eguale al ſuo coalterno p r a; onde giontoli communemente l'a r g, il totale p r g, & però lo, à lui eguale a g u; eſteriore ſarà eguale alla ſomma delli dui g a r, & a r g, interiori oppoſtili, come ſi voleua dimoſtrare.

Si può anco dimoſtrare l'iſteſſo nel modo ſeguente.

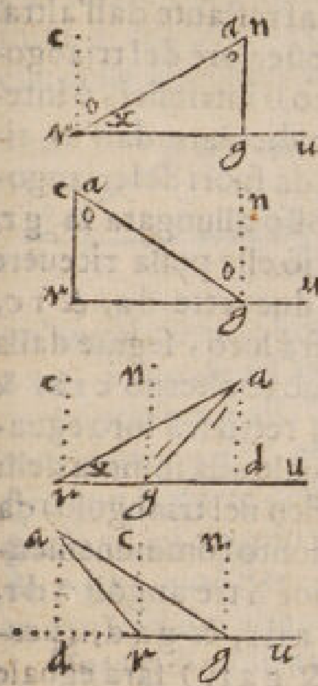
Del triãgolo a r g, allungato vn lato, poniamo l'r g, in u, formando l'angolo eſteriore a g u; ſi dice egli da ſe eſſere eguale alli dui interiori del triangolo oppoſtili g a r, & g r a; gionti inſieme;



Per dimoſtrarlo; Sopra la r g, lato allungato quanto occorre, ſi tirino dalli punti r, & g, le perpendicolari r c, & g n; & anco dal punto a, ò angolo oppoſtoli, la perpendicolare a t; quale, ò caderà dentro del triangolo, ò ſul lato deſtro a g; ò ſul ſiniſtro a r, ò fuori del triangolo dalla parte deſtra, ò dalla ſiniſtra: Cada prima dentro del triangolo, sù la baſe, ò linea r g, in t. Et conſiderate le due rette a t, & r c, perpendicolari alla r t, elle ſaranno equidiſtanti frà loro; onde eſſendo ſegate dalla a r; l'angolo o, ſarà eguale all' o, ſuo coalterno; Ancora conſiderate le due g n, & t a; perpendicolari alla t g, elle ſaranno equidiſtanti frà loro, & perche ſono ſegate dalla a g; l'angolo - ſarà eguale al ſuo coalterno -, onde tutto l'angolo a, ò vogliamo dire r a g, ſarà eguale alli dui c r a, & n g a; & giuntoli communemente l'angolo x, la ſomma di tutto l'a, con l'x, cioè delli dui interiori a, & r, nel triangolo r a g; ſarà eguale alli tre c r a, a r t, & n g a; ma alli dui c r a, & a r t; che formano il retto c r t, è eguale l'n g u (ò perch'egli è retto, ò perche conſiderate le due rette r c, & g n; perpẽdicolari alla iſteſſa r g; & però equidiſtanti frà loro, ſegate dalla r u; l'angolo n g u; eſteriore è eguale al c r u, interiore oppoſtoli dalla medeſima parte) però à queſto n g u, giontoli l'a g n; & ſe ne forma il totale eſteriore a g u, la ſomma, cioè queſto a g u, è quanto li tre detti, & però quanto li dui interiori g r a, & g a r. Cada hora la perpẽ-

dicola-

dicolare, che dal punto, ò sommità a, del triangolo (opposta alla



linea r g, d'esso allungata) arriui à detta base, ò linea allungata, sul lato destro a g, cioè sia vna linea istessa con il lato a g, quale, perciò verrà à fare angoli retti con la r u; & sarà anco vna istessa linea con quella, che dal punto g, si tirasse perpẽdicolare alla r g; & perche, & questa g a, & la r c, sono perpendicolari alla r u, elle saranno equidistanti frà loro, & essendo segate dalla u r, l'angolo estrinsico, ò esteriore u g a, (che hora è retto) sarà eguale all' intrinsico, ò interiore oppostoli c r u: Et anco, perche le istesse equidistanti g a, & r c, sono segate dalla r a, l'angolo o, sarà eguale all' o, suo coalterno; perilche giontoli communemente l'angolo x, tutto il c r g, & però l'esteriore a g u, sarà eguale alli dui o, & x, ò vogliamo dire g a r, & g r a, interiori nel triangolo opposti all' u g a; Et se dall' a, tirando vna perpendicolare alla r g, ella caderà in r, cioè sia l'istesso lato a r; & però quella istessa linea, che anco dal punto r, si eleuasse perpendicolarmente alla r g; allhora, perche questa, & la g n, perpendicolare alla medesma r g, in g, saranno equidistanti frà loro, & segate dalla a g, l'angolo a, sarà eguale all' a g n, suo coalterno, onde giontoli communemente l'r, gli a, & r; interiori del triangolo saranno eguali all' r, & a g n; ma tanto è l'n g u, quanto l'r, però esso n g u, con l'a g n, & consequentemente tutto l esteriore a g u, da loro formato, sarà eguale all' a, & r, interiori nel triangolo oppostili, gionti insieme. Et quando dal punto a, tirãdo vna perpẽdicolare alla r g, ella cada fuori del triangolo, poniamo dalla parte destra in d, sù l'allungamento g u; allhora considerate le due rette c r, & a d, perpendicolari alla r u; & però equidistanti frà loro, segate dalla r a, si dirà l'angolo c r a, essere eguale al suo coalterno d a r, & giontoli communemente l'a r g, tutto il c r d, retto sarà eguale alli dui d a r, & a r g, & però anco l'n g d, retto, eguale al c r d, sarà eguale alli medesmi dui d a r, & a r g; Hora considerate le due rette g n, & d a; perpendicolari alla r u; & però equidistanti frà loro, segate dalla g a, l'angolo n g a, sarà eguale al suo coalterno d a g, onde dall' n g d, retto leuando l'n g a, sua parte (& restarà l'a g d) & dalla somma delli dui

a r g, &

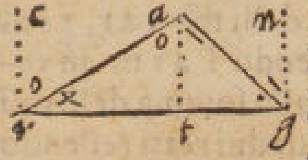
arg, & dar, leuando il dag, parte del dar, (& restarà gar, & arg) il restante da vna banda sarà eguale al restante dall'altra, cioè il solo angolo agd, che è l'estrinsico, ò esteriore del triangolo sarà eguale alli dui gar, & arg; che sono li intrinsici, ò interiori oppostili in esso triangolo. Et se la perpendicolare dall'a, tirata alla base,ò lato allungato del triangolo cada fuori del triangolo dalla parte sinistra, poniamo in d, (supposto allungata la gr, da essa parte sinistra r, quanto bisogna, acciò ella possa riceuere detta perpendicolare ad.) Considerando le due rette da, & rc, perpendicolari alla du, & però equidistanti frà loro, segate dalla ar; si vedrà l'angolo dar, essere eguale al suo coalterno cra, & gionto all'vna parte l'adr, & all'altra il crg; retti, frà loro eguali, la somma delli dui rad, & adr, sarà eguale alla somma delli dui cra, & crg; cioè al totale arg, (intrinsico nel triangolo) da loro composto; & di nuouo à ciascuna bãda gionto communemente l'angolo gar, la somma da vna banda, cioè li tre angoli adr, rad, & gar, che è quãto à dire li dui angoli adr, & gad, (perche il gad, comprende in se precise li rad, & gar,) sarà eguale alla somma dall'altra banda, cioè alli dui interiori arg, & gar,& perche all'angolo gad, è eguale l'nga, (suo coalterno nelle linee gn, & da, perpendicolari alla du, & però equidistãti frà loro segate dalla ga) & all'adr, retto è eguale l'ngu, retto, ne segue, che anco la sõma di questi dui nga, & ngu, & però il totale agu, esteriore (del triangolo) da loro formato, sia eguale alla somma delli medesimi dui arg, & gar, interiori,nel triangolo oppostili, Che è quanto occorrea dimostrare.

COROLLARIO.

Dalle cose dimostrate si conosce, che li tre angoli di qual si vogli triangolo gionti insieme, sono in somma quanto dui retti.

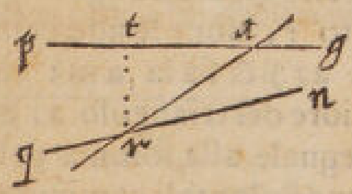
PERCHE sapendo, che l'angolo esteriore (allungato vn lato, qual si vogli) è eguale alli dui interiori oppostili; Et perche esso esteriore con l'vltimo interiore congiuntoli suo compagno è sempre in somma eguale à dui angoli retti (per la 13. del primo d'Euclide) ne segue, che ancora li dui interiori detti con esso vltimo interiore, cioè tutti tre li interiori, sono medesmamente eguali à dui angoli retti.

Ouero, perche (poniamo nel triangolo arg,) presa per base vn lato,ò linea d'esso sopra alla quale possa cadere dentro del triangolo vna lo vna perpẽdicolare dall'angolo oppostoli, & sia il lato r g, & dall' a, tiratali la perpẽdicolare a t, & anco dalli punti r, & g, termini d'essa base tirate ad essa le perpendicolari r c, & g n; perche delle due parti dell'angolo a, la t a r; è eguale all'angolo c r a, & esso c r a, con l'a r t, sinistro interiore sopra alla base del triangolo a r g, proposto, cõpongono il retto c r t; sappiamo, che ancora detto a r g, sinistro con la parte sinistra r a t, dell'angolo r a g, viene ad essere eguale ad vn'angolo retto; Similmẽte l'altra parte destra g a t, dell'angolo r a g, è eguale all'angolo n g a; & esso n g a, con l'a g t, destro interiore sopra alla base del proposto triangolo a r g; compongono il retto n g t; perilche vediamo, che ancora detto a g r, destro con la parte destra g a t, dell'angolo r a g; viene ad essere eguale ad vn'angolo retto, onde tutto l'angolo r a g, con li dui a r g, & a g r; cioè li tre angoli del triangolo proposto vengono ad essere eguali à dui angoli retti.

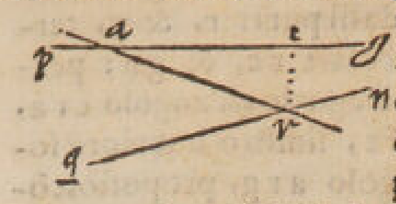


Hora pdimostrare la sopradetta prima parte della decima propositione, mediante la superiore, si potrà dire.

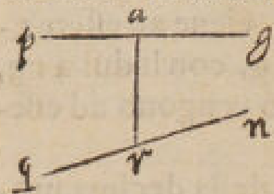
SEGHI a r, le due rette date non equidistãti p g, & q n; che si accostano dalla parte destra g n; Si dice, che la somma delli dui angoli interiori destri, cioè dalla parte doue elle s'accostano, gionti insieme, è minore di dui angoli retti. Per dimostrarlo. Dal punto a, alla q n, ouero dal punto r, alla p g, si tiri la perpendicolare r t, & sia che ella arriui alla p g, in t, dalla banda sinistra da a, & allhora considerato il triangolo rettãgolo a t r; del quale il lato t a, è allungato in g; sapremo, che l'angolo g a r, esteriore d'esso triangolo è eguale alla somma delli dui a t r, & a r t, interiori oppostili, onde giontoli communemente l'angolo n r a, la somma delli g a r, & n r a, sarà eguale alla somma delli tre a t r; a r t, & a r n; ò vogliamo dire alla somma delli dui a t r, & t r n, (ponendo il t r n, in vece delli dui a r t, & a r n, sue parti, che lo compongono totalmente) ma la somma delli dui a t r, & t r n, è minore di dui retti; perche essendo a t r, retto, il t r n, è acuto (per la 6. di questo) perilche anco la somma delli dui g a r, & n r a, interiori destri delle linee date non equidistanti sarà minore di dui retti. Et se dal punto r, tirando vna perpendicolare alla p g, ella andasse dalla banda destra dall' a, es-



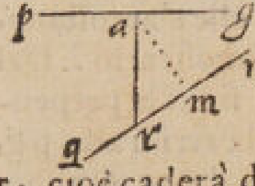
ſendo la r t; dell'altra figura rincontro; allhora cōſiderato il trian



golo a t r, rettangolo, che hà il lato a t, allungato in g; l'angolo g t r, eſteriore d'eſſo, ſarà eguale alli dui interiori t a r, & t r a, onde gionto communemēte l'angolo t r n; la ſomma delli tre t a r, t r a, & t r n, & però delli dui t a r, & a r n, (ponendo l'a r n, in vece delli t r a, & t r n, ſue parti) ſarà eguale alla ſomma delli dui g t r, & t r n; ma la ſomma di queſti è manco di dui retti (eſſendo il g t r, retto dalla conſtruttione, & però il t r n, acuto (per la 6. di queſto) perilche anco la ſomma delli dui t a r, & a r n, interiori deſtri delle date non equidiſtanti auicinātiſi dalla detta parte deſtra ſarà minore di dui retti. Et ſe dal punto r, tirando vna per-



pēdicolare alla p g, ella vi arriuaſſe in a, cioè che la iſteſſa ſegante a r, fuſſe perpendicolare alla p g; allhora, perche (per la 6. di queſto) eſſendo l'angolo g a r, retto, l'a r n, ſaria acuto (approſsimandoſi dal ſuppoſito da quella banda deſtra le date non equidiſtanti) chiaramente ſi conoſce la ſomma d'eſsi dui angoli g a r, & a r n, cioè d'vn retto, & d'vno acuto, eſſere minore di dui retti. Ouero quando la a r, ſia perpen-

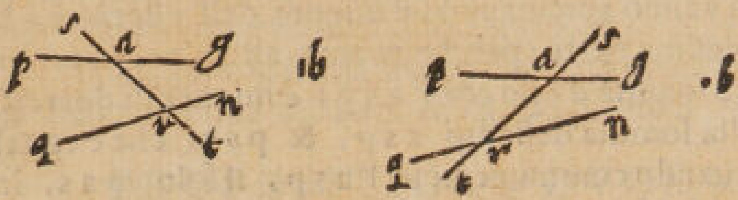


dicolare alla p g, (cioè ad vna delle due date nō equidiſtanti) cioè l'angolo g a r, retto, allhora dal punto a, alla q n; tirata vna perpendicolare (quale per la 9. di queſto ſegarà l'angolo g a r, cioè caderà dalla banda deſtra dal punto r, doue le non equidiſtanti ſi auicinano, & ſarà più corta della a r) & ſia la a m; che l'angolo a m n, ſarà retto, & eſſendo eſteriore del triangolo a r m, che hà il lato r m, allungato in n, ſarà eguale alla ſomma delli dui intrinſici oppoſtili r a m; & a r m; onde giontoli communemente l'angolo g a m; che è acuto, cioè parte del retto g a r; la ſomma da vna bāda, che è delli tre a r m; r a m, & g a m, & però delli dui a r m, & g a r, (ponendo il g a r, in vece delle ſue due parti r a m, & g a m, che preciſemente lo compongono) ſarà eguale alla ſomma delli dui a m n, & g a m; ma queſta ſomma è minore di dui retti, perche l'vno a m n; è retto, & l'altro g a m, è acuto; perilche ſimilmēte la ſomma di quelli g a r, & a r n, interiori deſtri delle date non equidiſtanti ſarà minore di dui retti.

Ma ancora facilmente ſi potrà concludere la verità della iſteſſa prima parte della decima propoſitione; così,

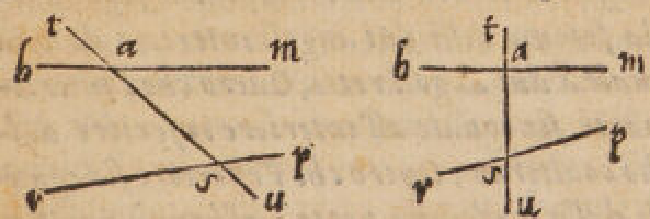
Perche

Perche le due date nonequidistanti p g, & q n; segate dalla a r; si vanno auicinando dalla parte g n, elle si considerino, ò imaginino, allungate quanto bisogna, accioche auicinãdosi più di continuo finalmẽte cõcorrino, e sia supposto il concorso in b.



Onde considerato il triangolo b a r, & vno de' suoi lati b a, ouero b r, allungato in p, ouero in q, (ouero il lato a r, allungato in s, ouero in t) poniamo il b a, in p, ne segue, che l'angolo esteriore p a r, sia maggiore dell'angolo a r b, interiore oppostoli; Ouero perciò che l' s a b, eguale al p a r, (per la 15. del primo d'Euclide) sia maggiore del detto a r b, perilche giontoli communemente l'angolo b a r, la somma delli dui p a r, & b a r, ouero delli dui s a b, & b a r, qual somma è eguale à dui retti (per la 13. del primo) sarà maggiore della somma delli dui b a r, & a r b, cioè ne segue, che la somma di questi g a r, & a r n, interiori destri sia minore di dui retti; ma li quattro interiori in sõma sono eguali à quattro retti, però la somma delli dui restãti p a r, & q r a; quali sono dalla parte sinistra, doue le linee date si vanno discostando sarà maggiore di dui retti.

Hora, che l'angolo interiore dalla parte destra, doue le due date non equidistanti si suppongono andarsi auicinando, sia minore dell'interiore à lui coalterno dall'altra parte, cioè che l' a s p, sia minore dell' h a s, ouero che l' m a s, sia minore dell' a s r. è facile da prouare; perche, sapẽdo già per quello, che si è dimostrato, che la sõma delli dui interiori destri m a s, & a s p, è minore di dui retti;



& (per la 13. del primo) che la somma delli dui m a s, & h a s, è eguale à dui retti, leuando da ciascuna d'esse somme l'angolo m a s, commune, il restante a s p, da vna parte sarà minore del restante h a s, dall'altra; Et similmente, perche la somma delli dui r s a, & a s p; è eguale à dui retti, & però maggiore della somma delli dui m a s; a s p; minore di dui retti, leuando communemente da ciascuna sõma l'angolo a s p; ne restarà l' r s a; maggiore dell' m a s; ò vogliamo dire l' m a s, minore dell' r s a, à lui coalterno dall'altra partra parte finiſtra. Nel medeſmo modo ſi farà chiaro, che ciaſcuno delli dui angoli interiori deſtri, cioè dalla parte doue le due date non equidiſtanti ſi vanno auicinando, è minore dell'eſteriore à lui oppoſto dalla medeſima parte; perche quanto all' m a s, interiore ſuperiore deſtro, la ſomma d'eſſo con l' a s p; è minore di dui retti, & però minore della ſomma delli dui a s p, & p s u, che è eguale à dui retti, onde leuando communemēte l' a s p, il ſolo m a s, interiore ſarà minore del ſolo p s u, eſteriore. Ouero, perche m a s, è minore di a s r, à lui coalterno, ſarà anco minore dell' u s p, eguale (per la 15. del primo) à detto coalterno a s r; L'iſteſſo ſi dice dell' a s p, riſpetto al t a m. Et che poi dall'altra parte ſiniſtra, doue le date non equidiſtanti ſi vanno allontanando, conuerſamente auuenga, che ciaſcuno delli dui angoli interiori ſia maggiore dell'eſteriore oppoſtoli dalla medeſima parte, pure è facilmente chiaro, poiche quāto all' a s r, egli con l' h a s, forma ſomma maggiore di dui retti (per la prima parte di queſta propoſitione) ma con il medeſmo h a s, gionto il t a h, ſe ne compone ſomma ſolo eguale à dui retti, & però quella ſomma è maggiore di queſta, onde il ſolo angolo a s r, interiore ſiniſtro, ſarà anco maggiore del ſolo t a h, eſteriore ſiniſtro à lui oppoſto. Et nel medeſmo modo ſi proua l'altro h a s, interiore ſiniſtro eſſere maggiore dell' altro eſteriore ſiniſtro oppoſtoli r s u; che è quanto occorrea dimoſtrare.

PROPOSITIONE VNDECIMA.

Se ſopra à due rette date, eſſendo tirata vna retta, che le ſeghi ambedue, occorra, che la ſomma delli dui angoli interiori da vna medeſima parte ſia eguale à dui angoli retti, Ouero che l'interiore ſuperiore da vna parte ſia eguale all'interiore inferiore dall'altra parte, cioè al ſuo coalterno; Ouero che l'eſteriore ſia eguale all'interiore oppoſtoli dalla medeſima parte; allhora è neceſſario, che eſſe due rette date ſiano equidiſtanti frà loro.

PERCHE, ſe le due rette date non fuſſero equidiſtanti frà loro, elle ſariano non equidiſtanti; ma non equidiſtanti non poſſono eſſere, perche allhora, per la decima di queſto, conuerria, che la ſomma delli dui angoli interiori da vna medeſima parte fuſſe maggiore, ò minore di dui retti. Et che l'intrinſico ſuperiore da vna parte fuſſe ineguale all'intrinſico inferiore dall'altra parte, cioè al ſuo coalterno. Et che l'eſteriore fuſſe ineguale all' interiore oppoſtoli dalla

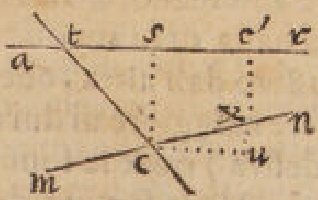
dalla medesima parte, il che tutto è contro il supposito; non potendo dunque le rette date, essere non equidistanti, saranno frà loro equidistanti, come si volea dimostrare.

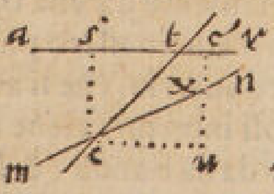
Notisi, che la sopradetta vndecima propositione dimostra l'istesso, che si fà nella 27. & 28. del primo d'Euclide.

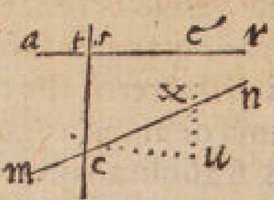
PROPOSITIONE DVODECIMA.

Se due linee rette date siano segate da vna retta, & occorra, che la somma delli dui angoli interiori da vna medesima parte sia maggiore, ò minore di dui angoli retti, Ouero che l'intrinsico superiore da vna parte sia ineguale all'intrinsico inferiore dall'altra parte (che sono coalterni frà loro.) Ouero che l'esteriore sia ineguale all'interiore oppostoli dalla medesima parte; allhora le due rette date saranno non equidistanti frà loro; Et più si auicinarano dalla banda doue li dui angoli interiori gionti insieme sono minori di dui retti, O doue (che è l'istesso) l'intrinsico è minore dell'altro intrinsico è interiore à lui coalterno, O doue (che pure è l'istesso) l'intrinsico è minore dell'estrinseco oppostoli dalla medesima parte.

PERCHE le due rette date, conditionate, come si dice, non possono essere equidistanti, che allhora (per la quarta di questo) di necessità, la somma delli dui angoli interiori da vna medesima parte saria eguale à dui retti; L'interiore saria eguale all'interiore dall'altra parte à lui coalterno. Et l'esteriore saria eguale all'interiore oppostoli dalla medesima parte; il che tutto è contro il supposito; Non potendo dunque essere equidistanti frà loro, sarãno non equidistanti, come si volea dimostrare. Et che le due rette date, più si auicinino dalla banda, doue la somma delli dui angoli interiori è minore di dui retti, si può dimostrare, così. Essendo le rette date a r, & m n, segate dalla t







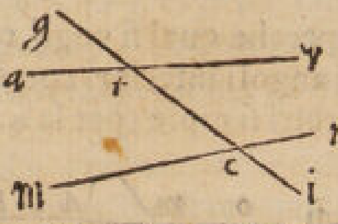
c; & li dui angoli interiori r t c, & n c t, da vna medesima parte destra, minori di dui retti (che così li dui interiori sinistri saranno maggiori di dui retti, poiche tutti quattro li interiori sono sempre

eguali

eguali à quattro retti) si dice, che esse due rette date più si auicinano dalla parte destra; perche accioche li dui angoli interiori destri in somma douentassero eguali à dui retti, stando fermo il superiore r t c; conuerria aggrandire l'inferiore t c n; aggiungendoli quello, che manca alla somma loro per arriuare à dui retti. Et stãdo ferma la linea t c, conuerria tirare dal punto c, vna retta, che con la t c, formasse angolo tanto maggiore del t c n, quanto bisognasse. & perciò essa linea da tirarsi passaria di sotto dalla c n; hor sia la c u, (che si trouaria tirando dal c, vna perpendicolare c s, alla a r, & dal c, à questa c s, la perpendicolare c u) & da vn punto segnato in detta c u; poniamo dall' u; si tiri la perpendicolare u e, alla a r, quale verrà à segare la c n, posta frà c u, & s r, & sia il segamento in x, cioè scriuasi x, nel punto del segamento; perilche la parte x e, d'essa sarà più corta della totale u e, & perciò sarà ancora più corta della c s, eguale alla u e, (che essendo le due rette s r, & c u, equidistanti frà loro (per la 7. di questo) perche sono segate da s c, che fà angoli retti con ciascuna di loro, cioè che è perpendicolare à ciascuna di loro) & le c s, & u e, perpendicolari alla a r; & perciò anco perpendicolari alla c u, (per la 2. di questo) mostrando la distanza dell' vna all'altra, & essendo esse distanze eguali frà loro (per la equidistanza detta delle s r, & c u) conuerrà, che c s, & u e, quali mostrano esse eguali distanze siano eguali frà loro) perilche più vicina è la m n, alla a r, in x, che in c; Onde elle si vanno auicinando dalla parte d'x, cioè dalla parte destra, come si volea prouare. Et consequentemente si vanno allontanando dalla sinistra, poiche c s, distanza sinistra è più lũga di x e, distãza destra della inferior linea m n; alla superiore a r; nelli dui diuersi punti c, sinistro, & x, destro. Ancora, che le due rette date si vadano auicinando dalla parte doue la somma delli dui angoli interiori è minore di dui angoli retti, si può prouare così. Se le due rette date, & già prouate essere non equidistanti, & che perciò necessariamente da vna banda si auicinano, & dall'altra si allontanano; nõ si auicinassero più dalla bãda delli angoli minori di dui retti, elle conuerria, che si auicinassero dall'altra, oue la somma delli dui angoli interiori viene ad essere maggiore di dui retti, & si allontanassero dalla banda (& sia la destra) doue la somma delli dui angoli interiori è minore di dui retti. Ma la somma delli dui angoli interiori dalla banda doue le linee non equidistãti si vanno allontanando è sempre maggiore di dui retti (per la 10. di questo) onde essi dui angoli interiori destri, in vn'istesso tempo fariano

minori,

minori, & maggiori di dui angoli retti, il che è impossibile, impossibile è dunque, che le due rette date non si auicinino da detta parte destra, & perciò da essa parte destra doue la somma de' dui angoli interiori è minore di dui retti, si andaranno auicinando; andando allontanandosi dall'altra, doue la somma de' dui angoli interiori è maggiore di dui retti. Et quanto alli angoli interiori coalterni. Se nelle due rette date a r, & m n, segate dalla t c, occorrerà che l'angolo r t c, intrinsico superiore destro, sia minore dell'angolo t c m, intrinsico inferiore sinistro à lui coalterno (ouero che il t c n, intrinsico inferiore destro, sia minore dell'angolo a t c, intrinsico superiore sinistro à lui coalterno) questo anco



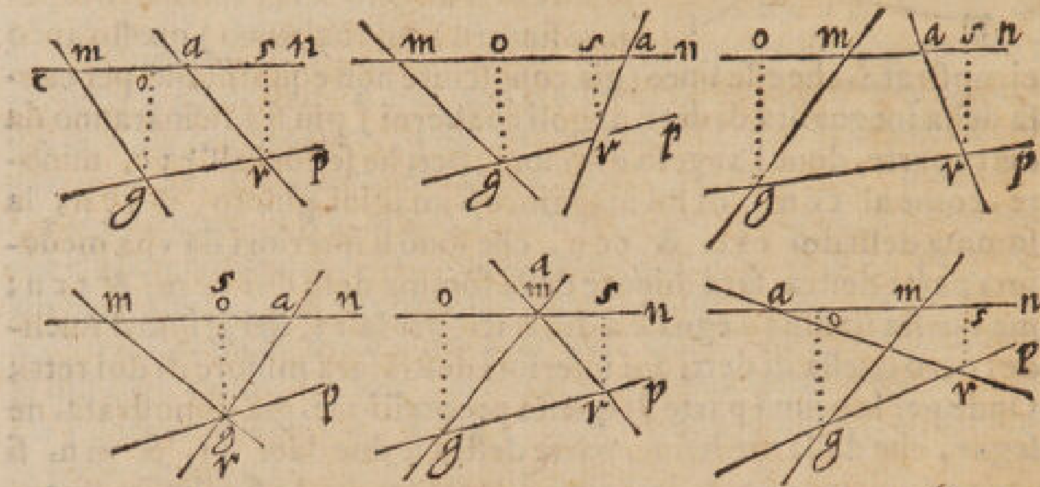
ci mostrarà, che esse linee (già conosciute non equidistanti per causa della inegualità di detti angoli coalterni) più si auicinaranno da detta parte, doue l'angolo è minore; perche se così all'r t c, minore, come al t c m, di lui maggiore si imagini giunto, il t c n; la somma delli dui r t c, & t c n, che sono li interiori da vna medesma parte destra, sarà minore della somma delli dui t c m, & t c n; ma questa somma è eguale à dui retti (per la 13. del primo d'Euclide) però quella di detti dui interiori destri sarà minore di dui retti; Onde per la prima parte di questa propositione, già dimostrata, ne segue, che dalla medesima parte destra le due date a r, & m n, si vadano auicinando, & dall'altra allontanando. Et similméte, quanto all'esteriore, & interiore oppostoli dalla medesima parte; se sapremo, che l'angolo interiore r t c, sia minore dell'esteriore i c n, oppostoli dalla medesina parte destra, ouero il t c n, del g t n, pure concluderemo, che le due date a r, & m n, (già conosciute non equidistanti, per causa della inegualità di detti angoli interiore, & esteriore oppostti da vna medesima parte) si vadano auicinãdo da detta parte destra; perche essendo minore il t c n; del g t r; se così all'vno, come all'altro si giunga mentalmente il c t r; la somma d'esso, col t c n; sarà minore, che la somma d'esso, col g t r; ma la somma, col g t r; è eguale à dui retti, però la somma, col t c n, sarà minore di dui retti; & perche questa somma di t c n, & c t r, comprende li dui angoli interiori destri, ne segue (per la prima parte già prouata di questa propositione) che da essa parte destra le date a r, & m n, si deuano andare auicinando, & andarsi allontanando dall'altra parte sinistra.

PRO-

PROPOSITIONE DECIMATERZA.

Se ſopra à due rette date, ſi tirino linee ſeganti, la ſomma delli dui angoli interiori da vna medeſima parte, che farà l'vna ſegante con le due date, ſarà eguale alla ſomma delli dui angoli interiori, che dalla medeſima parte farà qual ſi vogli altra ſegante con le iſteſſe due date.

SE le due rette date ſiano equidiſtanti; perche qual ſi vogli retta, che le feghi, fà la ſomma delli dui angoli interiori con eſſe date, da vna medeſima parte eguali à dui retti ſempre (per la 4. di



queſto) è chiaro quanto ſi propone. Ma ſe le due date ſiano non equidiſtanti, poniamo m n, & g p, ſegate da a r, & m g; prouaremo quanto ſi propone, così. Tirate le perpendicolari g o, & r s, all'vna delle date, dalli dui punti del ſegamento nell'altra, quali due perpendicolari ſaranno equidiſtanti frà loro (per la 8. di queſto) & perciò la ſomma delli dui angoli deſtri interiori a o g, & o g r, che fà l'vna con le due date, ſarà eguale alla ſomma delli dui angoli interiori pur deſtri n s r, & s r p; che fà l'altra con le iſteſſe due date (eſſendo l'a o g, da ſe eguale all'n s r, & l'o g r, all's r p, per la 4 di queſto.) Perche poi à quelli ſi eguagliano li dui s m g, & m g r, interiori fatti dall'vna ſegante con le due date dalla parte deſtra, & à quegl' altri ſi eguagliano li dui s a r, & a r p; interiori fatti dall'altra ſegante con le iſteſſe due date dalla medeſima parte deſtra (& il tutto per quello, che ſi è dimoſtrato nella prima parte della decima di queſto) ne ſegue, che la ſomma delli dui fatti dall'vna ſegante, ſia eguale alla ſomma delli dui fatti dall'altra

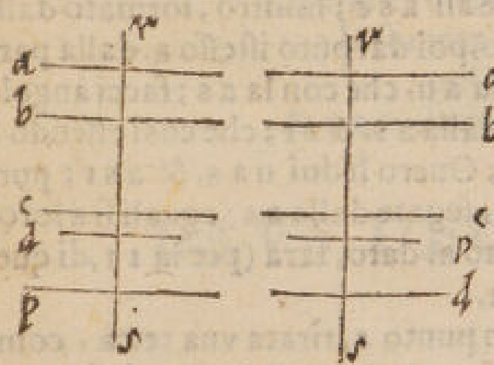
ſegante

segante da vn'istessa parte destra con le due date. Et consequentemente la somma delli dui angoli interiori fatti dalla parte sinistra con le due date dall'vna segante sarà eguale alla somma delli dui interiori fatti dalla medesima parte sinistra con le due date dall'altra segante, poiche, così questi, come quelli sono il restante delli destri à quattro angoli retti.

PROPOSITIONE DECIMAQVARTA.

Se quante si voglino rette linee date siano equidistanti ad vna istessa retta proposta, elle saranno equidistanti frà loro.

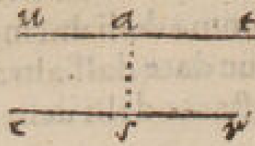
SIA ciascuna delle date a b c d, equidistante alla proposta p; Si dice elle essere equidistanti frà loro. Perche imaginata vna retta perpendicolare alla proposta, & questa allungata, finche seghi ciascuna delle date (imaginate anco elle allungate, se occorrerà, finche la perpendicolare alla proposta le possa segare) & sia la r s, ella (per la seconda di questo) sarà anco perpendicolare à ciascuna delle date; onde (per la settima di questo) ciascuna delle date, sarà equidistante à ciascuna altra d'esse date, cioè la a, à ciascuna delle altre, similmente la b, à ciascuna delle altre, & così la c, alla d, & à quante altre equidistanti alla p, si trouaranno.



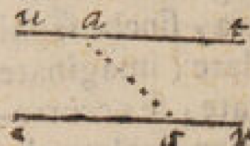
PROPOSITIONE DECIMAQVINTA.
Problema, ouero Operatione.

Da vn punto dato, tirare vna retta equidistante ad vna retta proposta, che non sia in diretto con detto punto dato, cioè tale, che dal punto dato, tirando vna linea ad vn termine della proposta, ella non si vnisca per il diritto con la proposta, ma facci angolo con lei.

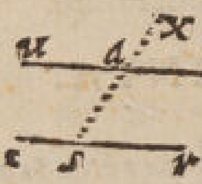
DAL punto a, dato, per tirare vna retta equidistante alla proposta c r; Da esso punto, tirisi vna perpendicolare alla c r; (allungando essa c r, quando occorresse, di modo, che vi possa cader sopra detta perpendicolare, ò vogliamo dire, accioche ella possa essere segata da detta perpendicolare) & sia la a s; Et dal punto iſteſſo dato a, ſi tiri vna perpendicolare à queſta a s, ò dalla parte ſiniſtra, ò dalla deſtra, come ſi vogli, & ſia la a u; ouero la a t, quale a u, ouero a t; ò vogliamo dire la u t, ſarà equidiſtante alla c r, come ſi voleua (per la 7. di queſto) eſſendo dalla conſtruttione vna medeſima retta a s, perpendicolare, & alla propoſta c r, & alla a u; ouero a t, ò vogliamo dire alla totale u t; O vogliamo dire, la u t; ſarà equidiſtante alla c r, (per la 11. di queſto) eſſendo ciaſcuno delli angoli all' a, & all' s, retto, & però facendo la ſomma delli dui angoli t a s, & r s a, interiori deſtri, ouero la ſomma delli dui u a s, & c s a, interiori ſiniſtri, eguali à dui retti.

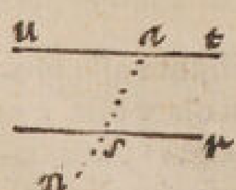


Ouero in altro modo. Dal punto dato a, tiriſi vna retta; come ſi vogli, che arriui alla propoſta c r, & ſia la a s, poi dal punto iſteſſo a, dalla parte deſtra ſi tiri la a t; che cō la a s, facci angolo eguale all' a s c; ſiniſtro, formato dalla a s, & s c; Ouero, poi dal pūto iſteſſo a, dalla parte ſiniſtra ſi tiri la a u, che con la a s; facci angolo eguale all' a s r; deſtro, formato dalla a s, & s r; che così eſſendo li dui angoli t a s, & a s c, coalterni; Ouero li dui u a s, & a s r; pure coalterni (delle due rette u t, & c r, ſegate dalla a s; eguali frà loro; la u t, tirata, ò che paſſa per il punto a, dato, ſarà (per la 11. di queſto) equidiſtante alla c r, propoſta.



Ouero in altro modo. Dal dato punto a, tirata vna retta, come ſi vogli, che arriui alla c r, propoſta, & anco allungata di ſopra al punto a, quanto ſi vogli, poniamo in x; poi dal punto a, ſi tiri la a t, che dalla parte deſtra con la a x, facci angolo eguale all' a s r, che dalla iſteſſa parte deſtra fà la a s, tirata con la s r, Ouero (che reſulta l'iſteſſo) poi dal punto a, ſi tiri la a u; che dalla parte ſiniſtra con la a x, facci angolo eguale all' a s c, che dalla iſteſſa parte ſiniſtra fà la a s, tirata con la s c; che così, cōſiderate le due rette u t, & c r, ſegate dalla x s, perche l'angolo eſteriore x a t, deſtro è eguale all'interiore a s r; oppoſtoli dalla medeſima parte, Ouero, perche l'angolo eſteriore x a u, ſiniſtro è eguale all'interiore a s c, oppoſtoli dalla medeſima parte, ſapremo (per la 11. di queſto) che le due u t, & c r, ſono equidiſtanti frà loro. Et quando la retta s a, non ſi voleſſe allungare dalla parte ſuperiore a; allunghiſi dalla inferiore s, poniamo in n, & poi dal punto a, ſi tiri la a t, deſtra, che con la a s, facci l'angolo t a s, deſtro eguale



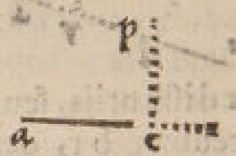


eguale all'esteriore destro r s n; Ouero si tiri la a u, sinistra, che con la a s, facci l'angolo u a s, sinistro eguale all'esteriore sinistro c s n; che per la medesma causa sopradetta la a t, ò vogliamo dire la u t, sarà pure equidistante alla proposta c r. Ne è da dubitare, che le rette u a, & a t, non siano congiunte insieme per il diritto, formando vna retta u t; cioè che la u a, allungata verso a, non si vnisca con la a t; ouero che la t a, allungata verso a, nō si vnisca con la a u; poiche essendo l'angolo x a t, eguale all'a s r, & l'x a u, eguale all'a s c; ancora la somma delli dui x a t, & x a u; sarà eguale alla somma delli dui a s r, & a s c; ma questa è eguale à dui retti (per la 13. del primo d'Euclide) & però anco quella somma sarà eguale à dui retti; perilche (per la 14. del primo) le due a t, & a u; sono insieme congiunte per il diritto; L'istesso occorre nelli altri modi superiori di operare, che in ciascun d'esi la somma delli dui angoli t a s, & u a s, è eguale à dui retti.

LAVS DEO SEMPER.

DEFINITIO PRIMA.

Diſtantia puncti dati extra propoſitam lineam rectam indefinitæ longitudinis ad ipſam propoſitam rectam, dicitur eſſe linea recta breuiſſima, quæ diſcedens à puncto dato perueniat ad rectam propoſitam.

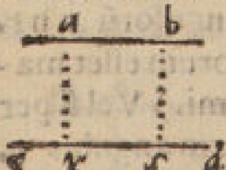


EXEMPLI gratia. Propoſita ſit recta a c, indefinitæ longitudinis, ſcilicet, vt poſsit produci à qualibet parte quantumlibet. Et dato puncto p, extra rectam ipſam (ſcilicet quod non ſit indirectum ipſius lineæ, ſeu tali in loco ſit vt producta recta propoſita, tranſire non poſsit per datum punctum p.) Diſtantia dicti puncti dati p, à propoſita recta a c, dicitur eſſe recta breuiſsima, quæ conſiderata diſcedere ab ipſo dato puncto p, perueniat ad propoſitã rectam a c, ſeu ad ipſius rectitudinem.

DEFINITIO II.

Linea recta data dicitur eſſe æquidiſtans rectæ propoſitæ in eodem plano, quando à duobus diuerſis punctis ad libitum in data recta aſſumptis, ductis rectis breuiſsimis ad propoſitam, ipſæ ſint ad inuicem æquales, ſeu manis. Quando in data recta linea, duobus diuerſis punctis ſignatis, diſtantiæ ab ipſis punctis ad rectam propoſitam ſint æquales. Sed non æquidiſtantes dicentur, data, & propoſita, quando diſtantiæ ipſæ eſſent inæquales. Et ipſæ duæ rectæ, data ſcilicet, & propoſita, dicũtur altera alteri viciniores fieri ab ea parte in qua diſtantia reperiatur minor, & remotiores fieri ab ea parte, in qua diſtantia reperiatur maior.

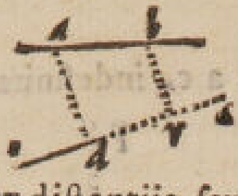
EXEMPLI gratia. Lineæ rectæ, ſcilicet data a b, & propoſita c d, dicuntur eſſe æquidiſtantes ad inuicem, quando in data a b, aſſumptis, vel ſignatis duobus diuerſis punctis, & ſint a, & b, & ab ipſis ad propoſitã c d, ductis lineis breuiſsimis (ſemper hac



ratione, vt ipſa c d, ad quam ducendæ ſunt dictæ lineæ breuiſsimæ intelligatur eſſe indefinitæ longitudinis, ſcilicet, quod vtrinq; poſsit produci, quãdo opus ſit, vt lineæ breuiſsimæ, quæ ibunt à ſuſceptis punctis in data, ad rectitudinem ipſius propoſitæ terminari poſsint in ipſa propoſita) & ſint a r, & b s; ipſæ ad inuicem ſint æquales, ſcilicet, vt æquæ longa ſit a r, a c, b s, quæ

oſten-

ostendunt distantiam ab a b, in duobus diuersis punctis a, & b, ad rectam c d, seu ad directionem ipsius c d, Sed quando ab a, ducta linea breuissima ad eandem c d, (quantum opus sit producta) & sit a d, & à b, ducta recta breuissima ad eandem c d, & sit b r, eueniat, vt rectæ a d, & b r, (ostědentes distantias rectæ a b, ad rectam c d, seu ad rectitudinem eius, in duobus diuersis punctis a, & b,) sint ad inuicem inæquales, tunc rectæ ipsæ a b, & c d, dicuntur esse non æquidistantes. Et ex distantijs, seu rectis breuissimis a d, & b r, reperta minori, seu breuiori b r, dextra, dicuntur rectæ a b, & c d, non æquidistantes, appropinquari ab ipsa parte dextra lineæ b r, breuioris, & remoueri à parte sinistra lineæ a d, lŏngioris.



THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si à dato puncto ad lineam propositam indefinitæ longitudinis, ducatur perpendicularis, ipsa perpendicularis erit linea omnium breuissima earum quæ à puncto dato discendentes peruenire possint ad rectam propositam, nec aliqua alia recta, quæ ab eodem puncto dato discedens, perueniat ad eandem rectam propositam, poterit esse æqualis dictæ perpendiculari.

DATVM sit punctũ a, & proposita recta b c, ad quam à puncto a, ducta sit perpendicularis a r; dicitur ea esse linea breuissima, quæ à puncto a, discedens peruenire possit ad rectã b c; Nam si ipsa breuissima non esset (per aduersarium) aliqua alia linea esset breuior ipsa a r, & sit (si fieri possit) a n, ideo in triangulo rectangulo a r n, cum per aduersarium latus a n, sit breuius a r, etiam (per 18. primi) angulus rectus r, oppositus rectæ a n, esset minor angulo a n r, ideo angulus a n r, esset obtusus, maior scilicet recto, sed etiam angulus externus a n c, (per 16. primi) est maior interno sibi opposito a r n, recto, ideo ipse etiam erit obtusus; cum ergo quilibet duorum angulorũ a n r, & a n c, sit obtusus, scilicet maior recto, summa ipsorum esset maior duobus rectis, quod est impossibile (per 13. primi.) Vel si per aduersarium, recta a n, esset breuior recta a r, etiam angulus r, rectus, esset minor angulo a n r, quamobrem a n r, esset obtusus, sed angulus ipse a n r, simul cum a n c, constituunt summã æqualem duobus rectis (per 13. primi) ideo existente angulo a n r, maiori re-

iori recto, tunc a n c, (quod est residuum duorum rectorum) esset minor recto, ideo acutus, sed ipse a n c, est externus triãguli a r n, & ideo maior interno r, recto, sibi opposito, quamobrem acutus angulus esset maior recto, quod impossibile est, ergo etiam est impossibile, vt recta aliqua, quæ à puncto a, perueniat ad rectã b c, esse possit breuior perpendiculari a r. Quod etiam nulla alia recta, quæ ab eodem puncto dato discedens perueniat ad eandem rectam propositam possit esse æqualis dictæ perpendiculari a r, ita probatur. Si per aduersarium aliqua alia, & sit a n, æqualis esse posset rectæ a r, tunc in triangulo a r n, duorum laterum a r, & a n, æqualium (per aduersarium) anguli r, & n, ad basim (per primã partem quintæ primi) essent ad inuicem æquales, sed r, est rectus, ideo n, etiã esset rectus. Et quia duo anguli a n r, & a n c, sunt æquales duob. rectis (p 13. primi) vno a n r, existẽte recto, alter ẽt a n c, esset rectus, sed ipse a n c, est externus trianguli a r n, ideo maior interno sibi opposito r, recto, vnde rectus esset maior recto (vel externus esset æqualis interno sibi opposito ambobus existentibus rectis) quod est impossibile; impossibile ergo est quod aliqua alia recta ducta ab a, puncto, vsq; ad rectam b c, sit æqualis, neq; minor perpendiculari a r; ideo ipsa a r, erit recta breuissima.

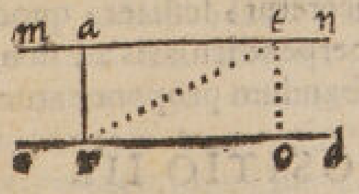
COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, quod. Quando à dato puncto ad rectam propositam ducitur perpendicularis, ipsa est distantia, qua reperitur inter punctum datum, & lineam propositam.

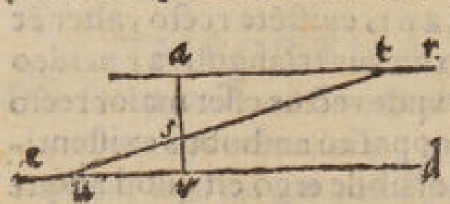
THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Quando duæ rectæ lineæ ad inuicem sunt æquidistãtes, lineæ à prima perpendiculariter peruenietes ad secundam erunt etiam perpendiculares ipsi primæ.

SInt duæ rectæ m n, & c d, æquidistantes, & à puncto a, in prima notato, ducta sit a r, perpendicularis ad secundam, scilicet, vt faciat angulos ad r, rectos, dicitur eadem a r, perpendicularis etiam esse ad primã lineam m n, scilicet, quod anguli etiam ad a, sunt recti; Nam si ipsa r a, non esset perpendicularis ad m n, sequeretur, quod si ab r, duceretur recta perpendicularis ad m n, ipsa alibi termina-



retur, quã in a; terminetur ergo si possibile est in t, & ideo a t r, & n t r, essent anguli recti, & in triangulo rectangulo r t a, quod habet latus t a, productum in m, angulus r a m, externus (per 16. primi) esset minor recto r t a, interno, sibi opposito, ideo esset obtusus, sed summa duorum angulorum r a m, & r a t, est æqualis duobus rectis, ideo cum vnus ipsorũ r a m, sit maior recto, scilicet obtusus, alter qui remanet r a t, esset minor altero recto, ideo acutus, quare ipse esset minor angulo r t a, qui est rectus per aduersarium. Et considerato triangulo rectangulo r t a; quia angulus r a t, acutus, esset minor angulo r t a, recto, latus etiam r t, quod opponitur acuto esset minus latere r a, recto opposito; Nunc à puncto t, ducatur perpendicularis ad rectam c d, & sit t o, quæ necessario perueniet ad c d, à parte dextra puncti r, scilicet versus d, (in r, enim ire non potest, scilicet non potest esse t r, nam tunc angulus t r d, esset rectus, sed ipse est pars anguli a r d, qui etiam est rectus (ex hypothesi) & anguli recti sunt ad inuicem æquales, ideo pars

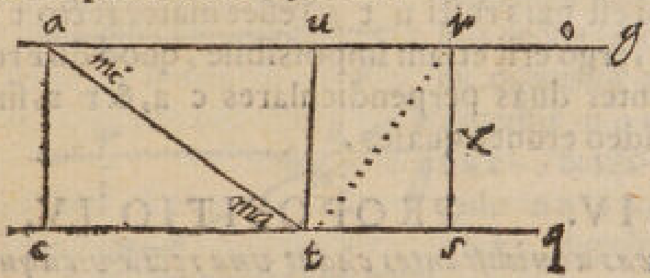


esset æqualis toto, quod est impossibile. Nec etiam inter r, & c, ire potest, ponamus in u, secando rectã a r, ponamus in s, nam tunc in paruo triangulo s u r, cum angulus u, internus sit rectus, ipse esset æqualis angulo s r d, qui etiam est rectus, & internus ipsi oppositus, quod est impossibile (per 16. primi) & quia ex hypothisi duæ rectæ m n, & c d, sunt æquidistantes, duæ a r, & t o, perpendiculares ad c d, erunt ad inuicem æquales, & quia angulus a r d, est rectus, angulus t r o, eius pars, & ꝓpterea minor eo, erit acutus, scilicet minor recto; ideo minor etiam angulo recto t o r, cum autem in triangulo rectangulo t o r, angulus t r o, acutus, sit minor t o r, recto, etiam latus t o, (acuto oppositum) erit minus latere r t, (recto opposito) quare r a, etiam (t o, æquale) erit minus eadem linea r t, scilicet r t, erit maior r a, sed superius probatũ est ipsam r t, esse minorem ipsa r a, ideo r t, esset maior, & minor recta a r, quod est impossibile, ergo etiam impossibile est illud à quo hæc impossibilitas deduceretur, scilicet, quod a r, perpendicularis ad c d, non sit etiam perpendicularis ad m n, erit igitur ipsi m n, perpẽdicularis, ꝙ probandum proponebatur.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Datis duabus rectis lineis æquidistantibus, si à duobus diuersis punctis in *ctis in prima signatis ducantur duæ perpendiculares ad secundam, tunc pars primæ lineæ intercepta inter duos terminos perpendicularium, erit æqualis parti secundæ lineæ interceptæ inter alios duos terminos earumdem perpendicularium.*

SINT duæ rectæ æquidistantes a g, & c q; & super primam a g, sint signata duo puncta a, & r, à quibus ad secundam c q, ducantur perpendicolares a c, & r s, quæ propter æquidistantiam linearum erunt ad inuicem æquales, & facient etiam angulos rectos cum recta a g, (per secundam huius.) Dicitur quod duæ a r, & c s, interceptæ inter ipsas perpédiculares erunt æquales ad inuicem; Nam si non essent æquales, vna ipsarum esset longior altera, sit ergo si posibile est c s, longior, & excessus remaneat ab vna parte, ponamus ad partem s, & sit s t, ita vt per aduersariũ t c, remaneat æqualis a r, & ducta a t, vterq; angulorũ c a t, t a r, pars recti a, erit acutus, nũc à puncto t, ad a g, ducatur perpendicularis t u, quæ necessario cadet



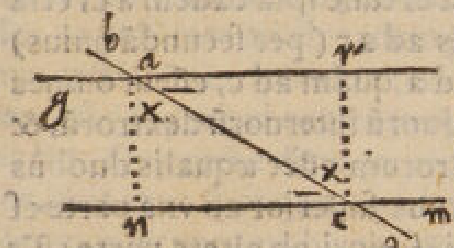
inter r, & a, (in r, enim cadere non potest, quoniam angulus t r a, rectus, esset pars anguli recti s r a, & ipsi æqualis (cum anguli recti sint ad inuicem æquales) scilicet pars esset æqualis toto, quod est imposibile. Nec vltra r, ponamus in o, cadere nõ potest secando s r, ponamus in x, nam considerato triangulo x r o, quod haberet latus r o, productum in g, angulus x o g, externus cum esset rectus, esset æqualis angulo x r o, qui est rectus, & internus ipsi oppositus, quod est imposibile; Eadem de causa nõ poterit cadere in a, nec vltra.) Cum autem a u, pars a r, sit minor ipsa a r, erit etiam minor recta c t, ab aduersario posita æqualis a r. Et quia t u, est æqualis c a, ob æquidistantiam linearum, & cum t u, sit perpendicularis ad a g, est etiam perpendicularis ad c q, (per secundam huius.) Consideratis duobus triangulis a u t, t c a, quia duo latera a t, t u, vnius, sunt æqualia duobus lateribus t a, a c, alterius, sed basis u a, esset minor basi c t; etiam angulus a t u, contentus à dictis duobus lateribus vnius esset minor angulo t a c, contẽto ab antedictis lateribus alterius ipsis correspondentibus (per 25. primi) & propterea angulus a t c, residuum recti u t c, esset maior angulo t a u, quod est residuum recti c a u.

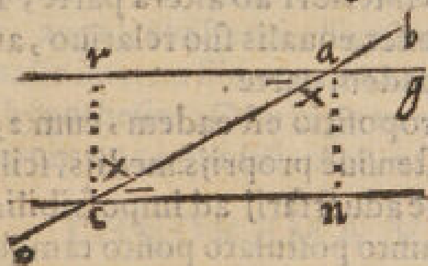
cti c a u. Nunc ducta t r, & considerato triangulo t a r, & et a t c, in quibus per aduersarium primū latus r a, vnius est æquale primo lateri c t, alterius, & secundum a t, ad secundum t a, sed angulus t a r, contentus duobus lateribus vnius est minor angulo a t c, contento duobus lateribus alterius, sequitur (per 24. primi) quod basis t r, sit minor basi c a, scilicet quod linea c a, sit maior linea t r, & ideò quælibet duarum t u, & s r, (æqualium c a) esset maior eadem t r; Vnde in triangulo rectangulo t u r, quia t u, esset longius t r, angulus t r u, pars recti u r s, ideo acutus oppositus lateri u t, longiori, esset maior t u r, recto opposito lateri breuiori t r, scilicet angulus acutus esset maior recto, seu dicamus pars t r u, esset maior toto u r s, æqualis t u r (cum quisq; ipsorū sit rectus) quod est impossibile; Vel triangulo rectangulo t s r. considerato, quia s r, esset longius t r, angulus r t s, acutus (qui est pars recti u t s) esset maior recto t s r, quod est impossibile, ergo erit etiam impossibile, quod duæ rectæ a r, & c s, positæ inter duas perpendiculares c a, & r s, sint ad inuicem inæquales, ideo erunt æquales.

THEOREMA IV. PROPOSITIO IV.

Si super duas rectas lineas æquidistantes cadat vna recta vtcūque secans ambas, duo anguli interni ab eadem parte formati simul sumpti erunt æquales duobus rectis. Et etiam internus superior ab vna parte erit æqualis interno inferiore ab altera parte. Itē quilibet externorum erit æqualis interno opposito ab eadē parte.

REcta a c, secet duas æquidistantes a r, & n m, in a, & c, Dicitur summa duorum angulorum internorum ab eadem parte esse æqualis duobus rectis, &c. Ad hæc demonstranda, a, puncto a, ad rectam n m, ducatur perpendicularis a n, quæ propterea faciet etiā angulos rectos cum recta a r, in a (per secundam huius) & ab altero puncto c, sectionis, ducatur ad a r, perpendicularis c r, quæ similiter (per secundam huius) erit etiam perpendicularis rectæ n m, & propterea faciet etiam angulos rectos cum recta n m, & ipsæ duæ perpendiculares a n, & c r, erunt ad inuicem æquales, ex supposita æquidistantia rectarum a r, & n m. Item rectæ a r, & n c, interceptæ à dictis perpendicularibus a n, & c r, erunt ad inuicem æquales (per antecedentem tertiam propositionem) Vnde in duobus triangulis rectangulis a r c, & c n a, tria latera vnius sunt æqualia tribus lateribus ipsis correspondentibus alterius, ideo (per octauam primi) mi) anguli vnius ſunt æquales angulis ipſis correſpondentibus alterius, ſcilicet r a c-, angulo n c a-, & r c a, x, angulo n a c, x, ſed r a c, & n a c, continent vnum rectum n a r, ſcilicet ſunt æquales vni recto, ideo r a c, & r c a, etiam erunt æquales vni recto, vnde ipſis addito angulo recto r c m, ſumma trium angulorũ r a c, r c a, & r c m, erit æqualis duobus rectis, ſed tres anguli prædicti æquantur duobus internis dextris r a c, & a c m (q̃a a c m, per ſe, eſt æqualis duobus a c r, & r c m, ſuis partibus, in quibus diuiſus eſt, quæ ipſum integrè continent) ideo duo interni dextri dicti ſunt æquales duobus rectis. Et quia omnes quattuor interni, ſcilicet duo dextri, & duo ſiniſtri ſimul ſunt æquales quattuor rectis (per 13. primi Euclidis) cum iam duo dextri ſint æquales duobus rectis, ſequitur quod duo ſiniſtri, etiam ſint æquales alijs duobus rectis (eſt enim illud, q̃d remanet ex quattuor rectis dictis.) Vel quia angulus n c a - eſt æqualis angulo r a c -, & iſte r a c, -, ſimul cum angulo n a c, x, continet vnum rectum r a n; angulus etiã n c a - ſimul cum angulo n a c, x, erunt æquales vni recto, ideo ipſis addito angulo recto

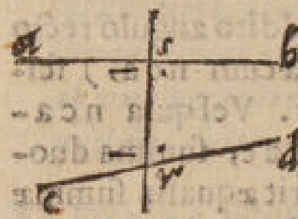




n a g, ſumma eorum (& eſt, vt totalis g a c, vna cum n c a,) ſcilicet duo interni ſiniſtri, æquabitur duobus rectis, Vel quia n c a - eſt æqualis angulo r a c -, addito communiter g a c, ſumma duorum n c a, & g a c, internorum ſiniſtrorum erit æqualis ſummæ duorum r a c, & g a c, ſed iſta eſt æqualis duobus rectis (per 13. primi) ideo ſumma etiam duorum dictorum internorũ ſiniſtrorum, erit æqualis duobus rectis. Quantum vero ad coalternos angulos attinet, iam oſtenſum eſt, quod angulus r a c - internus dexter ſuperior eſt æqualis angulo n c a - interno ſiniſtro inferiori; Et quantum ad g a c, ipſe componitur ex vno recto, & ex x, ſed ab alio recto, & ab alio x, componitur etiam m c a; ideo iſte m c a, erit æqualis angulo g a c; Vel quia ſumma duorum r a c, & g a c, eſt æqualis duobus rectis, & etiam ſumma duorum n c a, & m c a, eſt æqualis duobus rectis, cum iam oſtẽſum ſit r a c, per ſe æquari angulo n c a, per ſe, ſequitur, quod etiam reliquus g a c, erit æqualis reliquo m c a. Quod etiam quilibet externorum ſit æqualis angulo interno oppoſito ab eadem parte, eſt facile cognitu; nam quo ad b a r, ad b a r, ipse est æqualis angulo a c m, cum quilibet eorum æquetur angulo g a c, (qui opponitur angulo b a r, per intersectionem rectarum g r, & b c, & ideo est æqualis ipsi g a c, (per 15. primi) & est coalternus angulo m c a) Idem euenit de altero externo superiore g a b, scilicet ob similem causam est æqualis altero interno inferiori n c a, opposito ab eadem parte sinistra ; Et similiter angulus m c o, externus erit æqualis interno r a c, & angulus o c n, angulo g a c. Et quando recta a c, secans, esset perpendicularis ad n m, scilicet quod à puncto a, sectionis in a r, du

cendo perpendicularē ad n m, ipsa perueniisset in c, scilicet esset eadē a c, tunc ipsa eadem a c, etiā esset perpendicularis ad a r (per secundā huius) & ideo tam anguli ad a quàm ad c, essent omnes recti, vnde, & sūma duorū internorū dextrorū, & etiam summa duorum internorū sinistrorum esset æqualis duobus rectis ; Et similiter etiam quilibet internus superior ab vna parte esset æqualis ipsi coalterno, seu interno inferiori ab altera parte ; Et etiam vnusquisq; quattuor externorū esset æqualis suo relatiuo , aut correspondente interno opposito ab eadem parte.

Notandum est, quod superior propositio est eadem , cum 29. primi Euclidis, & est demstōrata ostensiuè proprijs medijs, scilicet sine reductione aduersarij ad impossibilia,



nec opus habet quinto postulato posito tamquā petitione, seu primo principio, quod est ; Postuletur, quod si in duas rectas lineas recta linea incidens interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectas lineas illas in infinitum productas inter se conuenire ex ea parte, in qua sunt anguli duobus rectis minores. Et ideo ipsum quintum postulatum non est necessarium ad eam demonstrandam.

Notetur etiam, quod cognoscitur dictum quintum postulatū, non esse accipiendum, vt petitionem, seu primum principium, cum non habeat duas partes necessarias ad principia prima, quæ sunt ; Esse notum ad sensum, & esse indemonstrabile. Imo dictum postulatum est demonstrabile, & propterea potest, seu debet accipi vt Propositio, quod videtur factum esse in hoc Opusculo, vbi demōstratur in Propositio 12. in qua dicitur. Si duæ rectæ datæ secentur à recta, & accidat, quod summa duorum angulorum internorum ab vna parte sit maior, vel minor duobus angulis rectis. Vel quod internus superior ab vna parte sit inæqualis interno inferiori ab altera par-

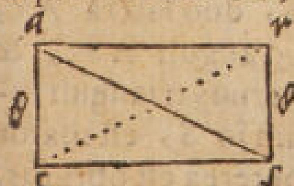
ra parra parte (qui sunt coalterni ad inuicem) vel quod externus sit inæqualis interno opposito ab eadem parte , tunc duæ rectæ datæ erunt non æquidistantes ad inuicem ; Et se se appropinquabunt à parte, in qua duo anguli interni simul iuncti sunt minores duob. rectis; Seu in qua(qđ est idē) internus est minor altero interno ipsi coalterno; Seu in qua (quod similiter est idem) internus est minor externo ipsi opposito ab eadem parte .

Cuius propositionis, pars illa, in qua dicitur. Quando duæ rectæ datæ secantur à recta , si accidat , quod summa duorum angulorum internorum ab eadem parte sit minor duobus rectis (scilicet , quod duo anguli interni ab eadem parte simul sumpti sint minores duobus rectis) tunc ipsæ duæ rectæ datæ necessariò sint non æquidistantes ; est (superiori quarta propositione mediante) demonstrata tali pacto. Duæ rectæ datæ, vt proponitur, esse non possunt æquidistantes,quia tunc (per quartam huius) necessariò summa duorum angulorum internorum ab vna , & eadem parte esset æqualis duobus rectis , anguli coalterni essent ad inuicem æquales . Et externus esset æqualis interno sibi opposito ab eadem parte. Quod totum est contra hypothesim ; Cum ergo non posint esse ad inuicem æquidistantes erunt non æquidistantes, vt ostendendum proponebatur.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si super datam rectam ducantur duæ perpendiculares æquales, & coniungantur cum vna recta ipsa erit æquidistans , & æqualis rectæ datæ super quam duæ perpendiculares insistunt, quæ etiam erunt perpendiculares ad lineā dictam,quæ cōiungit ipsas simul.

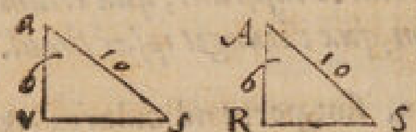
SVPER datam c s, rectæ a c, & r s, sint perpendiculares , & æquales, ducaturq; a r ; Dicitur ipsa a r, esse æquidistans, & æqualis rectæ c s ; Si enim a r, non esset æquidistans rectæ c s,esset ipsi non æquidistans, ideo in vna ipsarū, a r, scilicet, sumptis duobus diuersis punctis a, & r, ipsa puncta essent non æqualiter distantia à recta c s ; ideo duæ perpendiculares a c, & r s, quæ ostēdunt distātias ipsas essent inæquales , sed illæ inæquales esse non possunt (cum ex hypothesi ponantur æquales) ideo nec etiam a r, poterit esse non æquidistans rectæ c s, ipsi ergo erit æquidistans , & propterea (per secundam huius) quælibet duarum a c, & r s, perpendicularis ad rectam c s, erit etiā perpendicularis ad a r, & propterea angulus a, & etiam angulus



r, erit rectus; Nūc ducta recta c r, vel a s, cōſideratisq; duobus triangulis rectangulis a c s, & a r s, cū duo latera c a, a s, vnius ſint æqualia duobus lateribus r s, s a, ipſis correſpondentibus alterius, ſequitur (per id quod hic inferius demonſtrabitur) quod reliqui anguli vnius ſint æquales reliquis angulis alterius, & reliquum latus c s, vnius reliquo lateri r a, alterius ſcilicet, vt recta a r, ſit æqualis rectæ c s, ſibi oppoſitæ, vt oſtendere proponebatur.

Duorum triangulorum rectangulorum, quando duo latera vnius ſunt æqualia duobus lateribus ipſis correſpondentibus alterius, reliquum latus vnius erit etiam æquale reliquo lateri alterius, & quilibet aliorum angulorū vnius erit æqualis angulo ipſi correſpondenti alterius, & triangulum erit æquale triangulo.

IN triangulis rectangulis a r s, & A R S, ſi duo latera continentia angulum r, rectum vnius eſſent æqualia duobus lateribus continentibus angulum R, rectum alterius, etiam reliquum latus vnius (per quartam primi) eſſet æquale reliquo lateri alterius; anguli, angulis, &c. Sed ſint r a, & a s, æqualia lateribus R A, & A S; dicitur, quod etiam R S, erit æquale lateri r s; Nam ſi non eſſent æqualia, vnum ipſorum eſſet longius altero, ſit ergo (per aduerſarium) R S, longius, à quo ſecetur R t, ad æqualitatem r s, ſcilicet, ita vt id in quo R S, excedit r s, remaneat à parte S, & R t (per aduerſarium) euadat æqualem lateri a r, & ideo cum in duobus triāgulis rectangulis a r s, & A R t, duo latera a r, r s, & angulus r, rectus ab eis contētus, eſſent æqualia duobus lateribus A R, R t, & angulo R, recto ab ipſis contento, ſequeretur (per 4. primi) quod etiam baſis



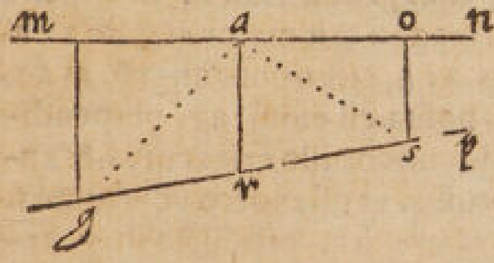
A t, eſſet æqualis baſi a s, ideo eſſet etiā æqualis rectæ A S, (poſitæ æqualis rectæ a s.) Vnde in triangulo A t S, duo latera A t, A s, eſſent ad inuicem æqualia, & propterea duo anguli A S t, & A t S, eſſent ad inuicem æquales, ſed A t S, externus trianguli rectanguli A R t, habentis latus R t, productum in S, eſt maior angulo A R t, interno recto ipſi oppoſito, & propterea eſt obtuſus, ideo etiam angulus A S t, eſſet obtuſus. Et in triangulo A S t, ꝙ habet latus S t, productum in R, angulus A t R, qui eſt externus oppoſitus angulo A S t, interno, eſſet maior ipſo angulo A S t, obtuſo, ſcilicet eſſet obtuſus, ſed angulus etiam A t S, eſt obtuſus, ideo anguli A t R, & A t S, facti à linea A t, cadente ſuper lineam

neam R S, essent ambo obtusi, seu quilibet eorum esset maior recto, & propterea summa eorum esset maior duobus rectis, quod impossibile est (per 13. primi) non possunt ergo duo latera r s, & R S, esse ad inuicem inæqualia, ideo erunt æqualia, & consequenter angulus a, erit æqualis angulo A, angulus s, angulo S, & triangulum alteri triangulo.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

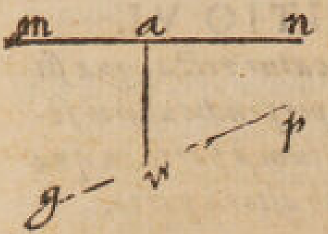
Si super duas rectas datas non æquidistantes ducatur recta, quæ sit perpendicularis primæ, ipsa esse non poterit perpendicularis secundæ, imo cum secunda faciet angulum acutum à parte, in qua lineæ datæ se se appropinquant, & obtusum ab altera parte.

SInt duæ rectæ datæ non æquidistantes m n, & g p, & pars, in qua ipse se se appropinquant sit dextra, scilicet versus n, & p; Et ducta a r, quæ secet vtramq; ipsa cum m n, faciat angulos ad a, rectos, Dicitur quod ipsa a r, cum altera secunda g p, faciet angulos ad r, non rectos, & quod acutus erit a r s, à parte cuius rectę datæ non æquidistantes se se appropinquant. Nam si (per aduersarium) anguli ad r, essent recti, acceptis r g, & r s, æqualibus, & ductis rectis a s, & a g, consideratisq; duobus triangulis a r g, & a r s, quæ essent rectangula (per aduersarium) & ideo angulus r, vnius æqualis angulo r, alterius, & duo latera g r, r a, continentia angulum r, vnius, duobus lateribus s r, r a, continētia angulum r, alterius, sequeretur (per 4. primi) quod basis a g, deberet esse æqualis basi a s, & reliqui anguli vnius, reliquis angulis alterius vterq; vtrique. Vnde etiam angulus m a g, qui remanet à recto m a r, esset æqualis angulo n a s, remanēte à recto n a r. Nunc à punctis s, & g, ductis ad n m, perpēdicularibus s o, & g t, & consideratis duobus triangulis rectangulis s o a, & g t a, in quibus etiam angulus s a o, vnius esset æqualis angulo g a t, alterius, & latus a s, vnius lateri a g, alterius, sequeretur (per 26. primi Euclidis) quod reliquus angulus a s o, vnius esset æqualis reliquo angulo t g a, alterius, latus o a, lateri t a, & etiam latus s o, lateri g t, sed s o, & g t, quæ sunt perpendiculares ad m n, ostendunt distantiam rectæ g p, ad m n, in duobus diuersis punctis g, & s, & quia essent



 æqua-

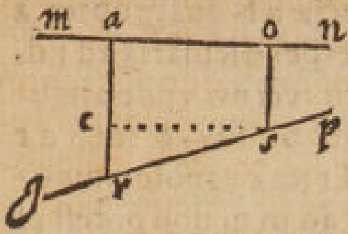
æquales, ſequeretur quod g p, & m n, eſſent æquidiſtantes, quod eſt contra ſuppoſitum, ideo impoſsibile, ergo impoſsibile etiam eſt angulos a r g, & a r p, eſſe rectos, erunt ergo non recti, ſcilicet vnus obtuſus, & alter acutus, vt probare proponebatur; Et acutus erit a r p, ſupponendo rectas m n, & g p, non æquidiſtantes appropinquari verſus n, & p, & remoueri verſus m, & g, (ſupponendo, ſcilicet, quod g t, ſit longior r a, & r a, longior s o, ſcilicet, quod punctum g, magis diſtet à recta m n, quàm punctũ r, & punctũ r, remotius ſit ab ipſa recta m n, quàm punctũ s.) Nam cum rectæ datæ ſint propinquiores à parte n p, quã ab altera parte, ſequitur quod ab ea parte productæ ipſæ tandem concurrerent ſimul, conſtituendo angulum, & ponamus hoc euenire in h, puncto, conſiderato à dicta parte dextra diſtante ab a r, (quæ eſt perpendicularis ad m n,) quantumlibet, & ita duæ a h, & r h, cum a r, ſimul formarent triangulum a h r, cuius latus h a, eſſet productum in m, quare angulus m a r, externus eiuſdem trianguli erit maior angulo a r h, interno illi oppoſito, ſcilicet angulus a r h, erit minor angulo m a r, ſed m a r, eſt rectus (ex hypotheſi; poſita eſt enim a r, perpendicularis ad m n,) ideo angulus a r h, minor illo erit acutus, & angulus a r g, ipſi coniunctus erit obtuſus, vt oſtendere volebamus. Vel in triangulo a h r, conſiderato latere h r, producto in g, angulus externus a r g, erit maior angulo r a h, interno ipſi oppoſito, ſed ipſe internus eſt rectus ideo externus a r g, erit obtuſus, & conſequenter a r p, erit acutus, qui eſt ille à parte, in qua duæ rectæ datæ m n, & g p, non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant. Hoc etiam ex ſe (ſine prima ſuperiori demoſtratione, vbi ducitur aduerſarius ad impoſsibile, ſufficere poteſt ad demõſtrandũ oſtenſiuè, quod recta a r, perpendicularis ad m n, non eſt perpendicularis ad g p; nam probatur angulum a r p, dextrum eſſe acutum, & a r g, ſiniſtrum eſſe obtuſum.



Poterit etiam ab initio demonſtrari propoſitio totalis, tali modo. Sint duæ rectæ datæ non æquidiſtantes m n, & g p, quæ magis ſe ſe appropinquant à parte dextra n p, & ſuper ipſas ducta ſit a r, quæ ſit perpendicularis in a, ad primam m n; Dicitur ipſam non poſſe eſſe perpendicularem ad ſecundam g p; imo, quod cum ipſa ſecunda g p; faciet angulum acutum à parte dextra n p, in qua rectæ datæ ſe ſe appropinquant, & obtuſum ab altera parte, ſcilicet,

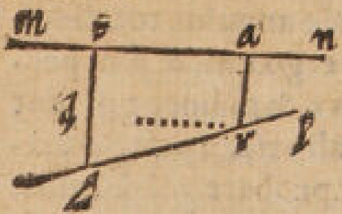
dicitur

dicitur angulus a r p, esse acutus, & a r g, obtusus. Et ad hoc



probandum: Ab alio puncto assumpto in prima m n, seu à parte dextra, ab a, versus n, seu à sinistra ab a, versus m, ponamus à dextra, & sit o, ad eandem primam m n, ducatur perpendicularis o s, tam lõga, vt perueniat etiam ad secundam g p, & sit vt perueniat ad ipsam in s, & tunc duæ rectæ s o, & r a, pependiculares ad m n, ostendent distantiam à duobus diuersis punctis r, & s, signatis in g p, ad m n, quæ duæ perpendiculares r a, & s o, erunt inæquales, quoniã supponitur duas rectas datas m n, & g p, esse non ęquidistantes. Amplius, quoniam dicũtur ipsæ appropinquari à parte dextra, recta s o, dextra vbi distantia illarum est minor, erit breuior sinistra a r, nunc ab hac a r, longior, sumpto principio ab a, vbi facit angulum rectum cum m n, secetur pars a c, æqualis rectæ o s, & ducatur c s, & consideratis duabus rectis c a, & s o, perpendicularib. ambabus ad eandem a o, & æqualibus ad inuicem, quæ sunt simul iunctæ à recta c s, hæc c s, (per quintam huius) erit æquidistans, & æqualis dictæ a o, ideo a c, quæ est perpẽdicularis ad vnam ipsarum æquidistantium a o, erit etiam perpendicularis ad aliam c s. (per secundam huius) scilicet angulus a c s, erit rectus, & quoniam est externus trianguli parui s r c, habentis latus r c, prolungatum in a, ipse erit maior angulo c r s, interno sibi opposito (per 16. primi Euclidis) scilicet angulus c r s, erit minor angulo a c s, recto, ideo ipse c r s, erit acutus, sed hic est angulus factus ab a r, cum recta g p, secunda duarum datarum non ęquidistãtium, se se appropinquantium à parte n p, dextra à qua est angulus iste. ideo cognoscimus a r, non esse perpendicularẽ ad secundã datã g p; imo cum ipsa g p, facere angulũ acutum à parte dextra, in qua duæ rectæ datæ supponuntur appropinquari, obtusus ergo erit alter a r g, sinister (per 13. primi) à qua parte sinistra duæ rectę datæ non æquidistantes ab inuicem remouentur.

Et si in prima linea m n, esset assumptum punctum t, à parte sinistra, à qua duæ rectæ datæ m n, & g p, non æquidistantes se se remo-



uent, & ab ipso puncto t, ad m n, ducta perpendicularis t g, perueniens ad g p, in g, tũc (quia ista t g,) esset longior a r, (cum duæ rectæ datę ex hypothesi sint remotiores à parte sinistra, quàm à dextra) ab ipsa t g, incipiendo à puncto t, vbi ipsa facit angulum rectum

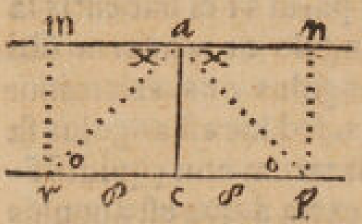
cum

cum m n, ſecaretur pars t d, æqualis rectæ a r, & ducta r d, ipſa (per quintam huius) erit æquidiſtans, & æqualis rectæ a t, quapropter a r, quæ eſt perpendicularis ad a t, erit etiam perpendicularis ad r d, (per ſecundam huius) ſcilicet angulus a r d, erit rectus, vnde angulus a r g, qui eſt maior dicto recto ſua parte erit obtuſus, & ideo a r p, ipſi coniuncto (per 13. primi) erit acutus. Et ita cognoſcimus etiam, quod recta a r, exiſtens perpendicularis ad m n, non poteſt eſſe perpendicularis ad g p, imo facit angulum acutum cum ipſa g p, à parte dextra p, in qua duæ rectæ datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant, & obtuſum à parte ſiniſtra g, in qua ſe ſe remouent, quod oſtendendum erat.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si ſuper duas rectas datas cadat recta, quæ ſit perpendicularis ad ambas, neceſſe eſt, vt ipſæ duæ rectæ datæ ſint ad inuicem æquidiſtantes.

SVper datas m n, & r p, cadat a c, & eueniat, vt quilibet angulorum ad a, & ad c, ſit rectus, dicitur m n, & r p, eſſe æquidiſtantes ad inuicem, quod ſic demonſtratur; Acceptis c p, & c r, æqualibus à punctis p, & r, ad m n, ducantur perpendiculares p n, & r m, vt anguli ad m, & ad n, ſint recti, ducantur



quæ r a, & p a; conſideratiſq; duobus triãgulis rectangulis r c a, & p c a, duo latera r c, c a, cum ipſorum angulo recto, erunt æqualia duobus lateribus p c, c a, ipſiq; angulo recto, ideo (per quartã primi) r a, erit æqualis rectæ p a, angulus a r c, angulo a p c, & angulus r a c, angulo p a c, ideo dempto angulo r a c, à recto m a c, & p a c, à recto n a c, duo anguli, qui remanent r a m, & p a n, erunt æquales ad inuicẽ. Et in duobus trtangulis rectangulis r m a, & p n a, quia duo anguli anguli m, & a, vnius cum latere r a, ſunt æquales duobus angulis n, & a, alterius cum latere p a, ſequitur (per 26. primi) quod reliquus angulus m r a, vnius erit æqualis reliquo angulo n p a, alterius, & latus r m, lateri p n, & latus m a, lateri n a, vnde angulus totalis m r c, etiam erit ęqualis totali angulo n p c, quia ergo r m, & p n, perpendicularis ad m n, à duobus diuerſis punctis r, & p, lineę r p, ſunt ad inuicem æquales ſequitur, quod recta r p, ab vtraq; parte ęqualiter diſtet, ſcilicet ſit æquidiſtãs rectæ m n, vt probare volebamus. Cognoſcitur etiam, quod ob eandem rationem, vel cauſam, quia ſu

per

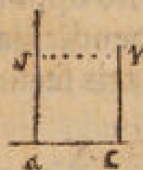
per n p,& a c, cadit n a, ppendicularis ad ambas; ob id sequitur, qđ n p, sit æquidistans rectæ a c. Amplius videtur etiam, quod, cum super duas æquidistantes m n, & r p, cadant r m, & p n, perpendicu lares ad m n, ipsæ erunt etiam perpendiculares ad r p, & ideo angu lus m r p, erit rectus, & etiam rectus erit n p r.

Seu ad demonstrandam superiorem propositionem dici poterit Si duæ rectæ m n,& r p, non essent æquidistantes, illæ essent non æquidistantes, & ideo recta a c, quæ est perpendicularis ad m n, vna ipsarum non poterit esse perpendicularis ad alteram r p, (per sextā huius) sed suppositum est, quod ipsa a c, sit etiam perpendicularis ad r p, ideo a c, non poterit non esse perpendicularis ad r p, vnde nec etiam poterit ipsa r p, non esse æquidistans ad m n, ergo erit ipsi æquidistans.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si super rectam datam cadant duæ perpendiculares, illæ ad inuicem erunt æquidistantes.

SVper datam a c, sint perpendiculares duæ rectæ a s, & c r, Dicimus illas esse ad inuicem æquidistantes, quod sic demonstratur.



Faciamus ipsas duas perpendiculares æquales (à longiori secando partem æqualem minori) & sit a s, æqualis c r, coniunganturq; duo puncta r, & s, cū recta r s, q̄ (per 5. huius) erit æqualis, & æquidistans rectæ a c, anguliq; r, & s, erunt recti, vt anguli c, & a (per quartam huius) vnde etiam quælibet duarum rectarum c a, & r s, erit perpendicularis cuilibet rectarum c r, & a s, & ideo quælibet duarum c a, & r s, (per corollarium primæ huius) ostendet distantiam rectæ c r, ad rectam a s, in duobus diuersis punctis c, & r, sumptis in recta c r, vel ostendet distantiam rectæ a s, ad rectam c r, in duobus diuersis punctis a, & s, sumptis in recta a s, sed ipsæ c a, & r s, sunt æquales ad inuicem, ideo etiam duæ c r, & a s (per secundam definitionē) erūt æqualiter distantes, seu æquidistantes ad inuicem.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si duæ rectæ datæ sint nō æquidistantes, & à puncto in prima signato ducatur perpendicularis ad secundam, & à puncto à quo ipsa perpendicularis peruenit ad secundam ducatur recta perpendicularis ad primam, hæc vltima perpendicularis erit breuior antecedente perpendiculari, & cadet inter antecedentem, & illam partem, in qua datæ rectæ se se appropinquant.

Sint

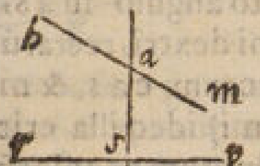
SInt duæ rectæ datæ non æquidistantes p g, prima, & m n, secunda, quæ se se appropinquant à parte g n, & à puncto a, in prima signato ducatur a r, perpendicularis ad secundam, & ita cum angulus a r n, sit rectus, g a r, erit acutus (per sextam huius) Nūc à puncto r, ducta recta perpendiculari ad primam p g, ipsa necessario cadet inter a, & g, quoniam super ipsam r a, cadere non potest quia tunc angulus r a g, esset rectus, & iam scimus ipsum debere esse acutum; nec inter a, & p, cadere potest, nam si hoc fieri posset per aduersarium, & ponatur peruenire in t, scilicet angulum r t a, esse rectum, sequeretur, quod considerato triangulo rectangulo r t a, habente latus t a, productū in g, angulus externus g a r, esset minor interno opposito a t r, scilicet acutus recto, quod est impossibile, cadet ergo inter a, & g, (scilicet à parte perpendicularis r a, in qua rectæ datæ non æquidistantes se se appropinquant) & sit r s, & ita angulus r s a, erit rectus, ideo maior angulo s a r, acuto, vnde in triangulo rectangulo r s a, quia, angulus a, acutus est minor angulo s, recto, etiam latus r s, acuto oppositum, erit breuius latere a r, recto opposito (per 19. primi Euclidis) scilicet recta r s, quæ est perpendicularis primæ lineæ, erit breuior recta a r, quæ est perpendicularis secūdæ.

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

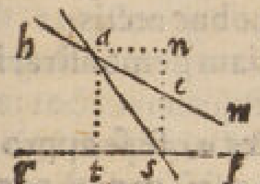
Si duæ rectæ datæ non æquidistantes secentur à recta, duo anguli interni à parte, in qua rectæ datæ se se appropinquant simul iuncti, scilicet summa illorum erit minor duobus angulis rectis, summa vero duorum angulorum internorum ab altera parte, in qua datæ rectæ remotiores sunt, erit minor duobus angulis rectis. Item angulus externus à parte, in qua duæ rectæ datæ non æquidistantes se se appropinquant, erit minor angulo interno ipsi coalterno ab altera parte; scilicet ex coalternis minores erunt illi, qui sunt à parte, in qua datæ non æquidistantes se se appropinquāt, et maiores illi, qui sunt ab altera parte, in qua rectæ datæ remotiores euadunt. Item quilibet angulorum internorum à parte, in qua rectæ datæ non æquidistantes se se appropinquant, erit minor angulo externo ipsi opposito ab eadem parte, sed ab altera parte, in qua ipsæ rectæ remotiores euadunt, erit contrariū scilicet quilibet duorum angulorum internorum erit maior externo opposito à dicta eadem parte.

Super

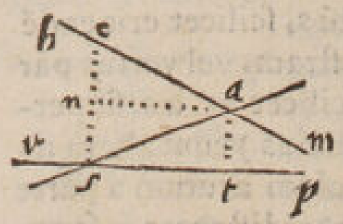
SVper duas rectas datas h m, & r p, non æquidiſtantes, imo propinquiores à parte m p, quam à parte h r, ducatur recta a s, vtcunque ſecans ambas in a, & s; dicitur angulos internos m a s, & p s a, eſſe minores duobus rectis; quia à puncto a, ducta recta perpendiculari ad r p, ipſa vel cadet in punctũ s, ſcilicet erit eadẽ cum recta a s, vel trãſibit verſum parte r, ſiniſtram, vel verſus partem p, dextram. Si ceciderit in punctum s, ſcilicet vt a s. ſit perpendicularis rectæ a p, illa tunc (per ſextam huius) cum altera linea h m, inæquidiſtante rectæ r p, faciet angulum acutum à parte



m, dextra, in qua ipſæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant, & obtuſum à parte h, ſiniſtra, à qua ſe ſe remouent (ſcilicet angulus m a s, erit acutus, & ideo iuncto recto p s a, ſumma (ab hac parte dextra, in qua rectæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant) erit minor duobus rectis, & angulus h a s, erit obtuſus, ideo iuncto recto a r s, ſumma (à parte ſiniſtra, à qua rectæ non æquidiſtantes ſe ſe remouent) erit minor duobus rectis. Sed ſi perpendicularis ad r p, diſcedens à puncto a, perueniat, ad r p, in t, ſiniſtro ad s, tunc à puncto s, ducatur s c, perpendicularis ad ipſam r p; & cum datæ h m, & r p, non ſint æquidiſtantes, imo propinquiores à parte m p, ſequitur dictas duas perpendiculares t a, & s c, ad r p, eſſe inæquales, & breuiorem exiſtere s c, Nũc hęc s c, producatur vltra ad c, quouſq; fiet ęqualis rectę t a, & hoc eueniat in n, ſcilicet, quod s n, ſit æqualis rectæ t a, & ducatur n a, quæ (per quintam huius) erit æqualis, & æquidiſtans rectæ t s, & ideo cum a n, & t s, æquidiſtantes ſint ſectæ à recta a s, angulus n a s, erit æqualis ſibi coalterno t s a, ſcilicet internus ſuperior dexter interno inferiori ſiniſtro (per quartam huius) ſed angulus c a s, pars anguli n a s, eſt minor ipſo n a s, ideo erit etiam minor angulo t s a, vnde communiter iuncto angulo a s p, ſumma duorũ c a s, & a s p (qui ſunt duo interni à parte dextra, in qua duæ rectæ datæ ſe ſe appropinquant) erit minor ſumma duorum t s a, & a s p, ſed hæc ſumma eſt æqualis duobus rectis (per 13. primi) ideo illa erit minor duobus rectis. Et conſequenter alij duo anguli interni ſiniſtri h a s, & r s a, qui remanent è dextris ad quattuor rectos vſque erunt maiores duobus rectis. Et quando recta perpendicularis ad r p, diſcendens à puncto a, perueniat ad ipſam in t, dextro ab s, tunc à puncto s, ducatur s c, perpendicularis ad eandẽ r p, quod cum datæ h m, & r p, ſint non æquidiſtantes, imo propin-

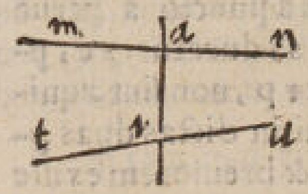


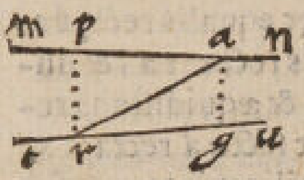
quiores à parte m p, ſequeretur dictas duas perpendiculares s t, & t a, ad r p, eſſe inæquales,& s c, eſſe longiorem t a, Nunc ab hac s c, incipiendo à puncto s, ſecetur pars s n, æqualis rectæ t a,& ducatur a n, quæ(per quintam huius)erit æqualis,& æquidiſtans rectæ s t, quare cũ hæ duæ æquidiſtantes n a, & s t, ſectæ ſint à recta a s, angulus a s t, erit æqualis ſuo coalterno n a s, ſed hic n a s, eſt pars anguli c a s, ideo minor ipſo, ergo etiam a s t, erit minor eodem c a s, vnde communiter iuncto angulo m a s, ſumma duorum t s a, & m a s (qui ſunt duo interni dextri, rectarũ h m, & r p, ſectarum ab a s) erit minor ſumma duorum c a s, & m a s, ſed hæc eſt æqualis duobus rectis (per 13. primi) ideo illa erit minor duobus rectis. Et per conſequens ſumma duorum angulorũ internorum ſiniſtrorum c a s, & r s a, erit maior duobus rectis.



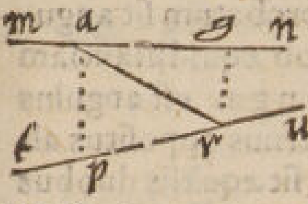
Hæc prima pars huius Propoſitionis poteſt etiam demonſtrari modo ſequenti.

Secet recta a r, duas datas nõ æquidiſtãtes m n,& t u, ſe ſe appropinquãtes verſus n u, quæ a r, cum m n; à parte n, faciet angulum rectum, vel obtuſum, vel acutum. Si rectum, tunc alter internus dexter a r u, erit acutus (per ſextam huius) & propterea ſumma ipſorum duorum internorũ dexterorum n a r, & u r a, erit minor duobus rectis. Si n a r, ſit obtuſus, ab ipſo ſecetur rectus n a g, ducendo ad m n, in a, perpendicularem a g, & ita angulus a g u (per ſextam huius) erit acutus, & ab r, ad m n, ducatur perpendicularis r p (quæ erit longior recta g a) & angulus p r u, erit acutus, & quia g a, & r p, ſunt perpendiculares ad m n, ipſæ erunt æquidiſtantes ad inuicem (per octauam huius) vnde cum ſint ſectæ ab a r, angulus p r a, erit æqualis ſuo coalterno r a g, & quia ſumma angulorum p r a, & a r g, eſt angulus p r g, acutus, etiam ſumma angulorum a r g, & r a g, erit acutus, vnde ipſis addito recto n a g, ſumma illorũ cum ipſo recto, ſcilicet n a r, & u r a, erit minor duobus rectis. Vel quia ſuper p r, & a g, æquidiſtantes cadit recta t u, angulus externus a g u, acutus, erit æqualis interno oppoſito p r u, ſed hic angulus eſt æqualis ſummæ duorũ a r g, & r a g (quia propterea æquidiſtantiam rectarum p r, & a g, ſectarum ab a r, angulus r a g, eſt æqualis ſuo coalterno p r a,& iſte p r a, cum a r g, componunt

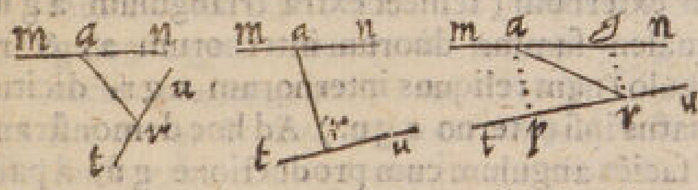




nunt totalem angulum acutum p r g) ideo etiam angulus a g u, acutus, erit æqualis ſummæ duorũ a r g,& r a g, vnde ipſi addito recto n a g, ſumma ipſius acuti cum recto, quæ ſumma eſt minor duobus rectis erit æqualis ſummæ angulorum n a r, & a r u; ſcilicet hi duo anguli interni dextri rectarum m n, & t u, ſectarum ab a r, erunt minores duobus rectis. Et quando angulus n a r, ſit acutus,



tunc ipſi tantum addatur, vt euadat rectus, ſcilicet ducatur ad m n, à puncto a, perpendicularis a p, quouſque perueniat ad t u, & angulus a p u, erit acutus (per ſextam huius) item à puncto r, eidem rectè m n, ducatur perpendicularis r g (quæ erit breuior recta p a.) & angulus g r u, erit acutus, & quia ipſæ duæ rectæ p a, & r g, perpendiculares ad rectam m n, ſunt ad inuicem æquidiſtantes (per octauam huius) & ſectæ ab a r, angulus g r a, erit æqualis ſuo coalterno p a r, & ideo ſumma angulorum g r a,& g a r, erit æqualis ſummæ p a r, & r a g, ſcilicet vni recto, vnde ipſis addito g r u, acuto, ſũma triũ g a r, a r g, & g r u (quæ æquipollet duobus internis n a r, & u r a) non perueniet ad duos rectos, ſcilicet erit minor duobus rectis. Vel quando angulus n a r, ſit acutus, tunc a r u, erit acutus, vel rectus, vel obtuſus; ſi acutus, vel rectus, ſũma ipſius cũ angulo n a r, acuto erit minor duobus rectis; ſi obtuſus ſecetur ab ipſo angulus rectus g r u, & à puncto a, ducatur perpendicularis a p, ad rectam t u, quæ propterea erit æquidiſtans rectæ r g, & angulus p a n, erit acutus,

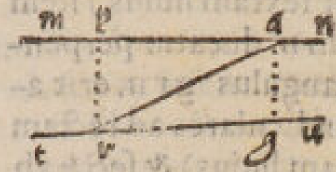


vt eſt r g n, Angulus p a r, erit æqualis ſuo coalterno a r g,& ideo angulus a r g, ſimul cum angulo g a r, erunt æquales angulo p a g, ſcilicet ſumma illorum erit minor vno recto (cum p a g, ſit acutus) quæ cum angulo g r u, recto faciẽt ſummam minorem duobus rectis, ſed tres anguli dicti g a r, a r g, & rectus g r u, ſunt æquipollentes duobus n a r, & a r u (quia a r u, continet rectum g r u, & a r g, partes eius totales) ideo cognoſcitur ipſos duos angulos n a r, & a r u, in ſumma eſſe minores duobus rectis, vt oſtendere volebamus. Et per conſequens modo quolibet alij duo m a r, & t r a, interni à parte, à qua datæ non æquidiſtantes ſe ſe remouent, erunt in ſumma maiores duobus rectis.

COROLLARIVM.

Hinc cognoſcitur, quod quando vnum ex lateribus triãguli eſt productum, angulus externus, qui formatur eſt æqualis ſummæ duorum oppoſitorum internorum in triangulo.

QVIA ſuperius in figura hic reſcripta cum probatum ſit angulum u g a, eſſe æqualem angulo u r p, (ob æquidiſtantiam rectarum r p, & g a, ſectarum ab u r; quod u g a, eſt angulus externus, & p r u, eſt internus oppoſitus ab



eadẽ parte) & hic u r p, ſit æqualis duobus g r a, & a r p, ſuis partibus, quod eſt ac ſi dicamus duobus g r a, & r a g, (cum r a g, ſit æqualis ſuo coalterno a r p, ex æquidiſtantibus r p, & g a, ſectis ab r a) cognoſcimus, quod etiã u g a, erit æqualis eiſdem duobus g r a, & r a g, qui ſunt duo interni oppoſiti in triãgulo a r g, habente latus r g, productum in u.

Poterit etiam oſtendi ipſa prima pars ſuperioris propoſitionis, alio modo, ſi prius demonſtretur ſequens.

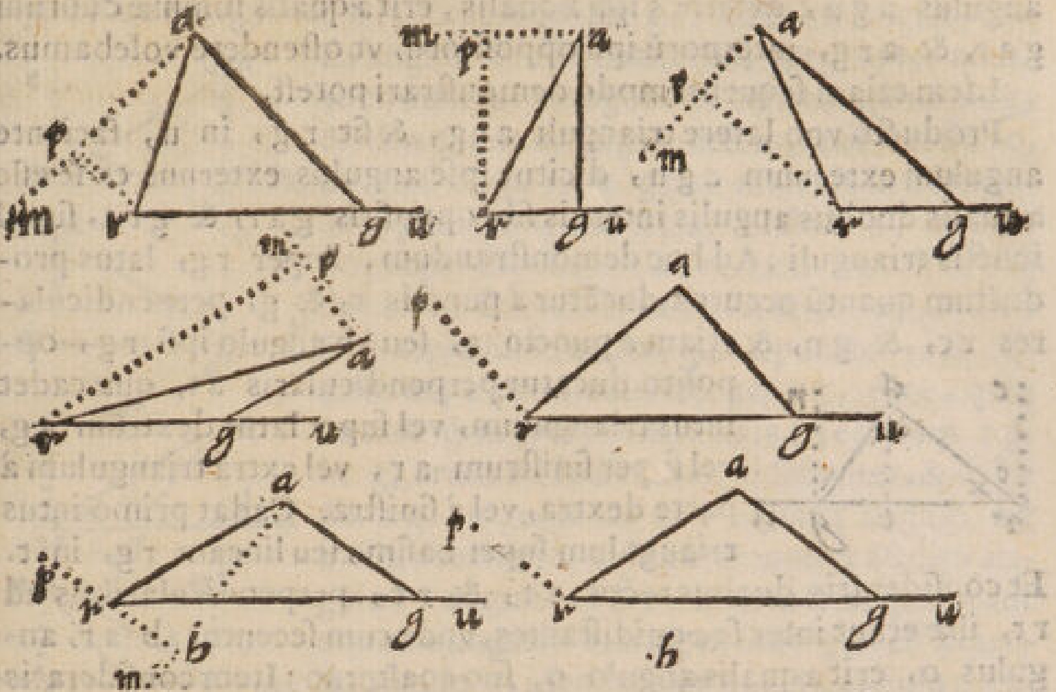
LEMMA.

Cuiuslibet trianguli producto vno latere quouis, angulus externus erit æqualis ſummæ duorum internorum in triangulo ipſi oppoſitorum.

TRIANGVLI a r g, productum ſit latus r g, in u, conſtituendo angulum externum (ſcilicet extra triangulum a g u. Dicitur ipſum eſſe æqualem ſummæ duorum internorum a, & r, oppoſitorum in triangulo (nam reliquus internorum a g r, dicitur coniunctus, ſeu aſſociatus ipſi externo a g u.) Ad hoc demonſtrandum; Ad latus a g, faciẽs angulum cum productione g u, à parte ſuperiori a, verſus partem r, ducatur perpẽdicularis a m, Et à puncto r, ſcilicet ab altera extremitate lateris producti per g, in u, ducatur perpẽdicularis ad a m, & ſit r p; Vnde cum quælibet duarũ rectarum r p, & g a, ſit perpendicularis ad a m, ipſæ duæ rectæ erunt æquidiſtantes ad inuicem (per octauam huius) & quia ſectæ ſunt ab r u, angulus a g u, externus erit æqualis angulo p r g, interno oppoſito ab eadem parte; Et etiã quia duæ æquidiſtantes r p, & g a, ſectæ ſunt ab a r, angulus r a g, erit æqualis ſuo coalterno p r a, vnde ipſis addito communiter angulo a r g, ſummæ duorum p r a, & a r g, & ideo totali angulo p r g, erit æqua-

æqua-

æqualis summa duorum r a g, & a r g, interni in triangulo, sed ei-



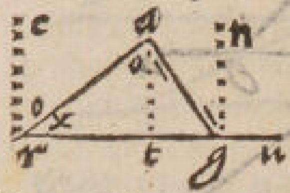
dem angulo p r g, est æqualis externus a g u, ideo ipse a g u; etiam erit æqualis summæ dictorum duorum internorum a, & r. Et si perpẽdicularis, quæ à puncto a, duceretur ad a g, esset a r, scilicet alterum latus trianguli g a r, scilicet, quod angulus a, internus esset rectus, tunc à puncto r, ducta à superiori parte recta r p, perpendiculari rectæ r a, similiter eodem modo diceretur, q; existentibus r p, & a g, perpendicularibus eidem a r, ipsæ ad inuicẽ essent æquidistãtes, & propterea cũ sint sectæ à recta u r, angulus a g u, erit æqualis angulo p r g; & etiam cum sint sectæ à recta a r, angulus p r a, erit æqualis angulo a, ideo totus angulus p r g, & ideo a g u, erit æqualis, & angulo a, & angulo a r g, scilicet summæ duorum internorum a, & r; Et si perpendicularis, quæ à puncto a, duceretur ad latus a g, transiret per triangulum, scilicet, vt angulus r a g, esset obtusus, tunc ipsi perpendiculari transeunti per triangulum, & productæ quantum conuenit, ducatur à puncto r, perpendicularis r h, & hæc à parte superiori, scilicet ab r, aliquantulum producatur ad libitum, & sit in p, vsq; & tunc similiter consideratis rectis h p, & g a, perpendicularibus eidem a h, ipsæ erunt ad inuicem æquidistantes, & cum sint sectæ ab u r, angulus externus a g u, erit æqualis interno illi opposito ab eadem parte p r u. Item duæ dictæ æquidistantes r p, & a g, cum sint sectæ ab a r, angulus g a r, erit æqualis suo coalterno

p r a,

p r a, ideo addito cōmuniter a r g, totalis angulus p r g, & ideo angulus a g u, externus ipsi æqualis, erit æqualis summæ duorum g a r, & a r g, internorū ipsi oppositorū, vt ostendere volebamus.

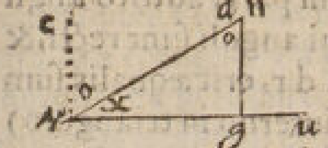
Idem etiam sequenti modo demonstrari potest.

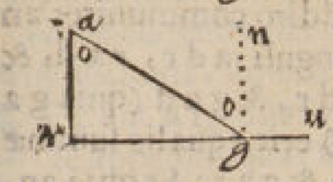
Producto vno latere trianguli a r g, & sit r g, in u, faciente angulum externum a g u, dicitur ipse angulus externus ex se esse æqualis duobus angulis internis sibi oppositis g a r, & g r a, simul iunctis trianguli; Ad hoc demonstrandum. Super r g, latus productum quantū occurrit, ducātur à punctis r, & g, perpendiculares r c, & g n, & etiam à puncto a, seu ab angulo ipsi r g, opposito ducatur perpendicularis a t, quæ cadet intus triangulum, vel super latus dextrum a g, vel super sinistrum a r, vel extra triangulum à parte dextra, vel à sinistra. Cadat primo intus triangulum super basim, seu lineam r g, in t.



Et consideratis duabus rectis a t, & r c, perpendicularibus ad r t, illæ erunt inter se æquidistantes, vnde cum secentur ab a r, angulus o, erit æqualis angulo o, suo coalterno; Item consideratis duabus g n, & t a, perpendicularibus ad rectam t g, illæ erunt æquidistantes ad inuicem, & quia secantur ab a g, angulus - erit æqualis suo coalterno - vnde totalis angulus a, seu r a g, erit æqualis duobus c r a, & n g a, & communiter addito angulo x, summa totius anguli a, cum x, scilicet duorum internorum a, & r, in triangulo r a g, erit æqualis tribus angulis c r a, a r t, & n g a, sed duobus c r a, & a r t, constituentibus rectum c r t, est æqualis angulus n g u, (vel quia est rectus, vel quia consideratis duabus rectis r c, & g n, perpendicularibus eidem r g, & propterea æquidistātibus ad inuicem, sectæ à recta r u, angulus n g u, externus est æqualis angulo c r u, interno ipsi opposito ab eadem parte) ideo huic n g u, addito a g n, & sic constituitur totalis externus a g u, summa, scilicet hic a g u, est quantum tres dicti anguli, & ideo quantum duo interni g r a, & g a r; Cadat nunc perpendicularis, quæ à puncto, seu à summitate a, trianguli (opposita lateri r g, ipsius producti) perueniat ad dictā basim, seu lineam productam super latus dextrum a g, scilicet sit vna, & eadem linea cum latere a g, quod latus ob hoc faciet angulos rectos cum recta r u, & erit etiam vna, & eadem linea cum illa, quæ à puncto g, duceretur perpendicularis rectæ r g; & quia, & hæc g a, & r c, sunt perpendiculares rectæ r u, ipsæ erunt æquidistantes ad inuicem, & cum secētur à recta u r, angulus externus u g a, (qui nunc est rectus)

ctus) erit æqualis interno ipsi opposito c r u, Et quia etiam eædem æquidistantes g a, & r c, sunt sectæ ab r a, angulus o, erit ęqua





lis angulo o, sibi coalterno, quapropter addito communiter angulo x, totus angulus c r g, & ideo externus a g u, erit æqualis duobus o, & x, seu g a r, & g r a, internis in triangulo oppositis angulo u g a. Et si ab a, ducendo perpendicularem ad rectam r g, ipsa cadat in r, scilicet sit vna cum latere a r, & ideo sit illa ipsa linea etiam, quæ à puncto r, se extolleret perpendiculariter ad r g, tunc, quia hæc, & g n, perpendicularis ad eandem r g, in g, erunt ad inuicem æquidistantes, & sectæ ab a g, angulus a, erit æqualis angulo a g n, sibi coalterno, vnde communiter addito angulo r, anguli a, & r, interni trianguli erunt æquales angulis r, & a g n, sed n g u, est æqualis angulo r, ideo ipse n g n, cum angulo a g n, & consequenter totus externus a g u, ab illis formatus, erit æqualis angulis a, & r, internis oppositis in triangulo simul sumptis. Et quando à puncto a, ducta recta perpendiculari rectæ r g, ipsa cadat extra triangulum ponamus à parte dextra in d, super productione g u, tunc consideratis duobus rectis c r, & a d, ppendicularibus rectę r u, & ideo æquidistantibus ad inuicem sectis à recta r a, dicetur angulus c r a, esse æqualis suo coalterno d a r, & communiter addito a r g, totus c r d, rectus erit æqualis duobus d a r, & a r g, & ideo etiam angulus n g d, rectus, æqualis c r d, erit æqualis eisdem duobus d a r, & a r g, Nunc consideratis duabus rectis g, n, & d a, perpendicularib. rectæ r u, & ideo ęquidistantibus ad inuicem sectis à recta g a, angulus n g a, erit æqualis suo coalterno d a g, vnde ab angulo n g d, recto, dempto n g a, eius parte (& remanebit a g d) & à summa duorum a r g, & d a r, dempto angulo d a g, parte anguli d a r (& remanebunt g a r, & a n g) residuum ab vna parte erit æquale residuo ab alia, scilicet solus angulus a g d, qui est externus trianguli erit æqualis duobus g a r, & a r g, qui sunt interni ipsi oppositi in ipso triangulo. Et si perpendicularis ad basim, seu latus productum trianguli ducta à puncto a, cadat extra triangulum à parte sinistra ponamus in d (supponendo, quod recta g r, sit producta ab ipsa parte sinistra r, quãtum sufficit, vt posit recipere dictam perpendicularem a d) Consi

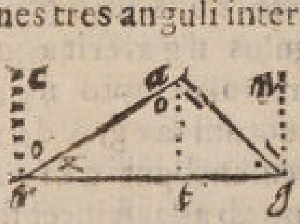
deratis

deratis duabus rectis d a, & r c, perpendicularibus rectę d u, & ideo æquidistantibus ad inuicem, sectis à recta a r, videbitur angulus d a r, esse æqualis suo coalterno c r a, & vni parti addito angulo a d r, & alteri parti addito angulo c r g, qui anguli sunt recti, & ad inuicem æquales, summa duorum r a d, & a d r, erit æqualis summæ duorum c r a, & c r g, scilicet totali a r g (interno in triangulo) ab ipsis composito, & amplius cuilibet parti addito communiter angulo g a r, summa ab vna parte, scilicet tres anguli a d r, r a d, & g a r, quod est, ac si dicamus duos angulos a d r, & g a d (quia g a d, continet in se præcisè angulos r a d, & g a r) erit æqualis summæ alterius partis, scilicet duobus internis a r g, & g a r; Et quia angulus n g a, est æqualis angulo g a d (suo coalterno in lineis g n, & d a, perpendicularibus rectæ d u, & ideo æquidistantibus ad inuicem sectis à recta g a) & angulo a d r, recto est æqualis angulus n g u, rectus, sequitur q etiam summã horũ duorum n g a, & n g u, & ideo totalis angulus a g u, externus (trianguli) ab ipsis formatus sit æqualis summę eorundem duorum a r g, & g a r, internorum in triangulo oppositorum, quod opportebat demonstrare.

COROLLARIVM.

Ex demonstratis perspicuum est. Tres angulos cuiuscunque trianguli simul sumptos esse æquales duobus rectis.

QVoniam cum notum sit angulum externum (vno latere quouis producto) esse æquale duobus internis, & oppositis, & quia ipse internus simul cum reliquo interno ipsi coniuncto semper componit summã æqualem duobus rectis (per 13. primi) sequitur, quod etiam duo interni dicti cum ipso reliquo interno, scilicet quod omnes tres anguli interni trianguli sint æquales similiter duobus rectis.

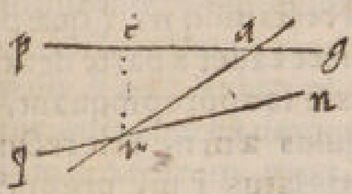


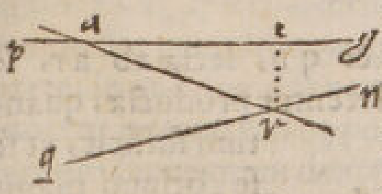
Vel (& sit in triangulo a r g) ponamus esse basim vnum ex lateribus, vel vnam & lineis ipsius trianguli, super quam posit cadere in triangulum perpendicularis ab angulo opposito ipsi lateri, & sit latus r g, & à puncto a, ducta perpẽdiculari a t, lateri r g, & etiam à punctis r, & g, terminantibus basim, ductis perpendicularibus r c, & g n, ipsi basi; quia ex duobus partibus anguli a, pars t a r, est æqualis angulo c r a, & ipse c r a, cum a r t, sinistro interno super basim ꝑpositi trianguli a r g, componunt, vel constituunt rectum c r t, scimus etiam dictum a r g, sinistrum cum parte sinistra r a t, anguli r a g, necessario esse æqualem

lem vno angulo recto. Similiter alia pars dextra g a t, anguli r a g, est æqualis angulo n g a, & ipse n g a, cum angulo a g t, dextro interno, super basim propositi triãguli a r g, cõponũt rectum n g t, quapropter videmus etiam dictum a g r, dextrum, cum parte dextra g a t, anguli r a g, necessario esse æqualé vni recto, vnde totus angulus r a g, simulcum duobus a r g, & a g r, scilicet tres anguli propositi trianguli erunt necessario æquales duobus angulis rectis.

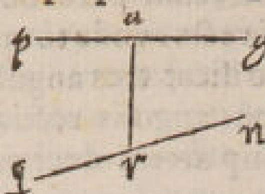
Nunc ad demonstrandum supradictam primamp artem decimæ Propositionis, superiori medio; poterit dici.

SECET a r, duas rectas nonæquidistantes p g, & q n, quæ se se appropinquãt à parte dextra g n; Dicitur, summa duorum angulorum internorum dextrorum, scilicet à parte, in qua ipse se se appropinquant simul iunctorum esse minor duobus rectis. Ad hoc demonstrandum; A puncto a, ad rectam q n, vel à puncto r, ad rectam p g, ducatur perpẽdicularis r t, & sit quod perueniat ad p g, in t, à parte sinistra ab a, & tunc considerato triangulo rectangulo a t r, cuius latus t a, est productũ in g, scimus angulum g a r, externum ipsius trianguli esse æqualem summæ duorum a t r, & a r t, internorum oppositorum, ideo communiter addito angulo n r a, summa angulorũ g a r, & n r a, erit æqualis summæ trium angulorũ a t r, a r t, & a r n, seu summæ duorum a t r, & t r n, (ponẽdo angulum t r n, loco duorum a r t, & a r n, partes ipsius, quæ componunt ipsum totaliter) sed summa duorum a t r, & t r n, est minor duobus rectis, nam cum a t r, sit rectus t r n, est acutus (per sextam huius) quapropter etiam summa duorum g a r, & n r a, internorum dextrorum linearum datarum non æquidistantium est minor duobus rectis. Et si à puncto r, ducta perpẽdiculari ad rectam p g, ipsa caderet à parte dextra ab a, & esset r t, alterius figuræ, tunc considerato triangulo a t r, rectangulo, habente latus a t, productum in g, angulus g t r, externus erit æqualis duobus internis t a r, & t r a, ideo communiter addito angulo t r n, summa trium t a r, t r a, & t r n, & ideò duorum t a r, & a r n, (posito a r n, loco duorum t r a, & t r n, partes ipsius) erit æqualis summæ duorum g t r, & t r n, sed summa horum est minor duobus rectis (cum g t r, sit rectus per constructionem, & ideo t r n, acutus (per sextã huius) quapropter

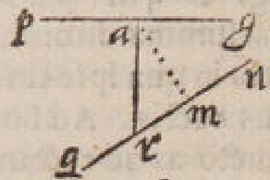




etiam ſumma duorum t a r, & a r n, internorum dextrorum duarum datarum linearum non æquidiſtãtium ſe ſe appropinquantium à dicta parte dextra erit minor duobus rectis. Et ſi à puncto r, ducta perpendiculari ad rectam p g, perueniſſet in a, ſcilicet, quod



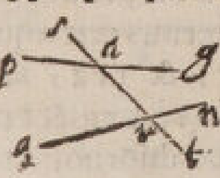
eadem ſecans a r, eſſet perpẽdicularis ad p g, tunc, quia (per ſextam huius) exiſtente angulo g a r, recto, angulus a r n, eſſet acutus (cum ex hypotheſi datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquent ab ipſa parte) clarè perſpicitur ſummam ipſorum duorũ angulorum g a r, & a r n, ſcilicet vnius



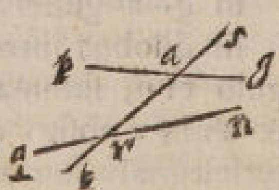
recti, & vnius acuti eſſe minorem duobus rectis. Vel quando a r, ſit perpendicularis ad rectã p g, (ſcilicet ad vnam duarum datarum non æquidiſtantium) ſcilicet exiſtente angulo g a r, recto, tunc à puncto a, ducta perpendiculari ad rectam q n, (quæ per nonam huius) ſecabit angulum g a r, ſcilicet cadet à parte dextra à puncto r, in qua rectæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant, & erit breuior recta a r) & ſit a m, quod angulus a m n, erit rectus, & cum ſit externus trianguli a r m, habentis latus r m, productũ in r, erit æqualis ſummæ duorum internorum oppoſitorum r a m, & a r m, ideo communiter addito angulo g a m, qui eſt acutus, ſcilicet pars recti g a r, ſumma ab vna parte, quæ eſt trium angulorum a r m, r a m, & g a m, & ideo duorum a r m, & g a r, (poſito g a r, loco duarum eius partium r a m, & g a m, quæ integrè ipſum componunt) erit æqualis ſummæ duorũ a m n, & g a m, ſed hæc ſumma eſt minor duobus rectis, quia vnus eorum a m n, eſt rectus, alter vero g a m, acutus, quare ſimiliter ſumma illorũ g a r, & a r n, internorum dextrorum, linearum datarũ non æquidiſtantium erit minor duobus rectis.

Sed facile etiam veritas eiuſdem primæ partis decimæ Propoſitionis oſtendi poterit, hoc modo.

Quia duæ datæ non æquidiſtantes p g, & q n, ſectæ ab a r, ſe ſe appropinquant à parte g n, ipſæ conſiderentur productæ, quantum ſufficit, vt ſe ſe cõtinuo magis appropinquantes tandẽ concurrãt, & ſupponatur cõ curſus in b, Vnde conſiderato triangulo b a r, & vno ex eius lateribus b a, vel



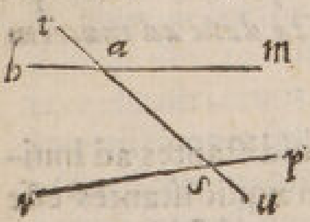
b

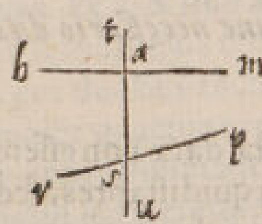


b

b r, pro-b r, producto in p, vel in q, (vel latere a r, producto in s, vel in t,) ponamus b a, in p; sequitur, quod angulus externus p a r, sit maior angulo a r b, interno opposito, Vel ob hoc, quod angulus s a b, æqualis angulo p a r, (per 15. primi) sit maior dicto a r b, quapropter addito communiter angulo b a r, summa duorum p a r, & b a r, Vel duorum s a b, & b a r, quæ summa est æqualis duobus rectis (per 13. primi) erit maior summa duorum b a r, & a r b, scilicet sequitur, quod summa horũ g a r, & a r n, internorum dextrorum sit minor duobus rectis, sed quattuor interni simul sumpti, sunt æquales quattuor rectis, ideo summa duorum reliquorum p a r, & q r a, qui sunt à parte sinistra, à qua lineæ datæ remotiores euadunt erit maior duobus rectis.

Nunc quod angulus internus à parte dextra, in qua duæ datæ non æquidistantes supponuntur ad inuicem appropinquari, sit minor interno ipsi coalterno ab altera parte, scilicet, quod a s p, sit minor angulo h a s. Vel quod m a s, sit minor angulo a s r, facilè probatur, quia cum ex demonstratis notum sit, summam duorum internorum dextrorum m a s, & a s p, esse minorem duobus rectis, & (per 13. primi) summam duorum m a s, & h a s, esse æqualem duobus rectis, dempto ab vtraq; summa angulo m a s, communi, reliquus angulus a s p, ab vna parte, erit minor reliquo h a s, ab altera.





Et similiter quia summa duorum r s a, & a s p, est æqualis duobus rectis, & ideo maior summa duorum m a s, & a s p, quæ est minor duobus rectis, dempto ab vtraq; parte communi angulo a s p, remanebit angulus r s a, maior angulo m a s, seu m a s, minor angulo r s a, ipsi coalterno ab alia parte sinistra. Eodẽ modo perspicuum fiet quemlibet angulorum internorum dextrorum, scilicet à parte, in qua duæ datæ non æquidistantes se se appropinquant esse minorem interno sibi opposito ab eadem parte, quia quo ad m a s, internum superiorem dextrum, summa eius cum angulo a s p, est minor duobus rectis, & ideo minor summa duorum a s p, & p s u, quæ est æqualis duobus rectis, vnde dempto cõmuni angulo a s p; solus m a s, internus erit minor solo p s u, externo; Vel quia m a s, est minor angulo a s r, sibi coalterno, erit etiã minor angulo u s p, æquali (per 15. primi) dicto coalterno a s r. Idem dicitur de angulo a s p, respectu anguli t a m. Et postea, quod ab altera parte finiſtra, à qua datæ non æquidiſtantes ſe ſe remouent, conuerſo modo eueniat, quod quilibet duorum angulorum internorum ſit maior externo oppoſito ab eadem parte, ſimiliter patet, quoniam, quo ad a s r, ipſe cum angulo h a s, facit ſummam maiorem duobus rectis (per primam partem huius) ſed eidem h a s, addito angulo t a h, ſumma, quæ componitur eſt tantum æqualis duobus rectis, & ideo illa ſumma eſt maior iſta, vnde etiã ſolus angulus a s r, internus ſiniſter erit maior ſolo angulo t a h, externo ſiniſtro ſibi oppoſito. Eodem modo etiam probatur alium angulum h a s, internũ ſiniſtrum eſſe maiorem alio externo ſiniſtro oppoſito r s u, Quod eſt, quod demonſtrare volebamus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

Si ſuper duabus rectis datis, ducta ſit recta, quæ ſecet ambas, & accidat, quod ſumma duorum angulorum internorum ab eadem parte ſit æqualis duobus rectis; Vel quod internus ſuperior ab vna parte ſit æqualis interno inferiori ab altera parte, ſcilicet angulo ſibi coalterno; Vel quod externus ſit æqualis interno oppoſito ab eadem parte, tunc neceſſario duæ rectæ datæ ad inuicem erunt æquidiſtantes.

QVONIAM ſi duæ rectæ datæ non eſſent æquidiſtantes ad inuicem, illæ eſſent non æquidiſtantes, ſed non æquidiſtantes eſſe non poſſunt, quia tunc (per 10. huius) oporteret, quod ſumma duorũ angulorũ internorũ ab eadẽ parte eſſet minor, vel maior duobus rectis; Et quod internus ſuperior ab vna parte eſſet inæqualis interno inferiori ab altera parte, ſcilicet ſuo coalterno. Et quod externus eſſet inæqualis interno oppoſito ab eadem parte; Quod totum eſt contra ſuppoſitum; cum ergo rectæ datæ eſſe non poſsint non æquidiſtantes, erunt æquidiſtantes ad inuicem, vt demonſtrandum erat.

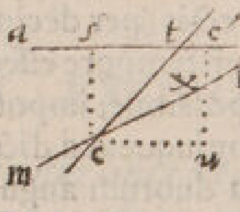
Notandum eſt ſupradictam 11. Propoſitionem, oſtendere idẽ, quod oſtenditur in 27. & 28. primi Euclidis.

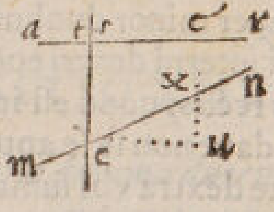
THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Si duæ rectæ lineæ datæ ſecentur à recta, & accidat, quod ſumma duorum angulorum internorum ab vna parte ſit maior, vel minor duobus angulis rectis; Vel quod internus ſuperior ab vna parte

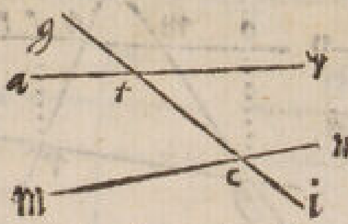
parte sit inæqualis interno inferiori ab altera parte (qui sunt coalterni ad inuicem;) Vel quod externus sit inæqualis interno opposito ab eadem parte, tunc duæ rectæ datæ erunt non æquidistantes ad inuicem; Et se se appropinquabũt à parte, in qua anguli interni simul iuncti sunt minores duobus rectis; Seu in qua (quod est idem) internus est minor altero interno ipsi coalterno; Seu in qua (quod similiter est idem) internus est minor externo ipsi opposito ab eadem parte.

QVIA duæ rectæ datæ supradictas cõditiones habentes non possunt esse æquidistantes: nam tunc (per quartam huius) necessario summa duorum angulorum internorum ab eadem parte esset æqualis duobus rectis; Internus esset æqualis interno ab altera parte sibi coalterno; Et externus esset æqualis interno opposito ab eadem parte, quæ omnia sunt contra suppositionem. Cum ergo non possint esse ad inuicem æquidistantes erunt non æquidistantes, vt demonstrare volebamus. Quod vero duæ rectæ datæ magis propinquæ sint à parte, in qua summa duorum angulorum internorum est minor duobus rectis, ita demonstrari potest. Cum rectæ datæ a r, & a m, sectæ sint à recta t c, & duo anguli interni r t c, & n t c, à parte dextra minores sint duobus rectis (quod tali pacto duo interni sinistri erunt maiores duobus rectis, quoniam omnes quattuor interni semper sunt æquales quattuor rectis) dicitur, quod ipsæ duæ rectæ datæ magis se se appropinquant à parte dextra; nam vt duo anguli interni dextri simul sumpti euaderent æquales duobus rectis existẽte superiori r t c, oporteret maiorem facere inferiorem t c n, ipsi addendo, quod deficit ab illorum summa ad complementũ duo-





rum rectorum. Et manente linea t c, oporteret à puncto c, ducere rectam, quæ cum recta t c, constitueret angulum maiorem angulo t c n, quantum opus esset, & ob hoc ipsa recta ducenda transiret, subtus rectam c n, & sit c u, (quæ reperietur ducendo à puncto c, perpendicularem c s, rectæ a r, & à puncto c, ad hanc c s, perpendicularem c u) & à puncto in ipsa c u, signato, ponamus à puncto u, ducatur perpendicularis u e, ad rectam a r, quæ secabit fecabit rectam cn, pofitam inter cu, & sr, & fit x, punctum fectionis, fcilicet fcribatur x, in puncto fectionis, & ob hoc pars xe, ipfius, erit breuior totali ue, & ideo erit etiam breuior recta cs, ipfi ue, æqualis (nam cum duæ rectæ sr, & cu, fint æquidiftantes ad inuicẽ (per 7. huius, q̃a fectæ funt à recta sc, quæ facit angulos rectos cum qualibet illarũ, fcilicet, quæ eft perpendicularis vnicuiq; ipfarũ) & rectæ cs, & ue, perpẽdiculares rectæ ar, & ideo ẽt perpendiculares rectæ cu, (p 2. huius) oftẽdentes diftantiam vnius ab altera, & cum ipfæ diftãtiæ fint ad inuicem æquales (propter æquidiftantiam dictam rectarum sr, & cu) conuenit, vt cs, & ue, quæ oftendunt ipfas æquales diftãtias fint ad inuicem æquales) quapropter propinquior eft mn, rectæ ar, in x, quàm in c, Vnde ipfe fe fe appropinquant à parte x, fcilicet à parte dextra, vt volebamus probare; Et confequenter fe fe remouẽt à parte finiftra, nam cs, diftantia finiftra eft longior recta xe, diftantia dextra inferioris lineæ mn, ad fuperiorem ar, in duobus diuerfis punctis c, finiftro, & x, dextro. Item, quod duæ rectæ datæ fe fe appropinquent à parte, in qua fumma duorum angulorum internorum eft minor duobus angulis rectis, poteft probari tali modo. Si duæ rectæ datæ, & iam probatæ non æquidiftantes, & quod neceffario ab vna parte fe fe appropinquant, & ab altera fe fe remouent, non fe fe appropinquaffent à parte vbi anguli funt minores duobus rectis, opus effet, quod illæ fe fe appropinquaffent ab altera parte, vbi fumma duorum angulorum internorum eft maior duobus rectis, & fe fe remouiffent à parte (& fit dextra) vbi fumma duorum angulorũ internorum eft minor duobus rectis; Sed fumma duorum angulorum internorum à parte vbi lineæ non æquidiftantes fe fe remouent eft femper minor duobus rectis (per decimã huius.) Vnde ipfi duo anguli interni dextri eodem tempore effent minores, & maiores duobus rectis, quod eft impofsibile, impofsibile ergo eft, quod duæ rectæ datæ non fe fe appropinquent à dicta parte dextra, ideo ab ipfa parte dextra vbi fumma duorum angulorum internorum eft minor duobus rectis fe fe appropinquant, fe fe remouẽdo ab alia parte vbi fumma angulorum internorum eft maior duobus rectis. Quo ad angulos internos coalternos. Si in duabus rectis datis ar, & mn, fectis à recta tc, occurrat angulum rtc, internum fuperiorem dextrum effe minorem angulo tcm, interno inferiori finiftro ipfi coalterno (vel quod tcn, internus inferior dexter, fit minor angulo atc, interno fuperiori finiftro ipfi coalterno) hoc etiam nobis oftendet, quod ipfæ lineæ (iam cognitæ non æquidiftãtes ob inæqualiqualitatem dictorum angulorum coalternorum) magis se se appropinquant ab ipsa parte, vbi angulus est minor, quoniam si tàm angulo r t c, minori, quàm angulo t c m, ipsi maiori fingatur additus angulus t c n, summa duorum r t c, & t c n, qui sunt interni ab vna eadem parte dextra, erit minor summa duorum t c m, & t c n, sed hæc summa est æqualis duobus rectis (per 13. primi) ideo summa dictorum duorum internorum dextrorum erit minor duobus rectis, vnde per primam partem huius Propositionis iam demonstratam, sequitur quod ab eadem parte dextra duæ datæ a r, & m n, se se appropinquent, & ab alia se se remoueant. Et similiter, quo ad externum, & internum oppositum ab eadem parte, si notum fuerit, quod angulus internus r t c, sit minor externo i c n, ipsi opposito ab eadem parte dextra, vel quod t c n, sit minor externo g t r; similiter concluderemus, quod duæ datæ a r, & m n, (iam cognitæ non æquidistantes ob inæqualitatem dictorum angulorum internorum, & externorum oppositorum ad inuicem ab eadem parte) se se appropinquarent à dicta parte dextra, quia cum t c n, sit minor angulo g t r, si tàm vni, quàm alteri mente iungatur angulus c t r, summa ipsius cũ angulo t c n, erit minor summa ipsius cum angulo g t r, sed summa cum g t r, est æqualis duobus rectis, ideo summa cum t c n, erit minor duobus rectis, & quia hæc summa angulorum t c n, & c t r, comprehendit duos angulos internos dextros, sequitur (per primam partem iam probatam huius Propositionis) quod ab ipsa parte dextra datæ a r, & m n, debeant se se appropinquare, & se se remouere ab altera parte sinistra.

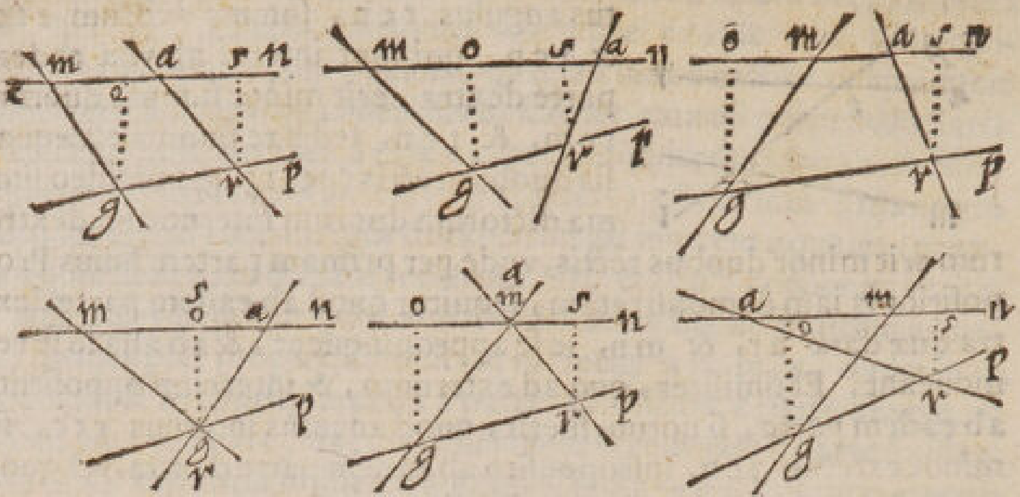


THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

Si super duas rectas datas ducantur lineæ secantes, summa duorum angulorum internorum ab vna eadem parte, quos faciet vna secantium cum duabus datis, erit æqualis summæ duorum internorum angulorum, quos ab eadem parte, faciet qualibet alia secans cum ijsdem duabus datis.

SI duæ rectæ datæ sint æquidistantes, quia quælibet recta, quæ secet ipsas facit summam duorum angulorum internorum cum ipsis datis æqualem duobus rectis semper (per quartam huius) clarum

rum est, quod proponitur. Sed si duæ datæ sint non æquidistantes, ponamus mn, & gp, sectæ ab ar, & mg, ita probabimus



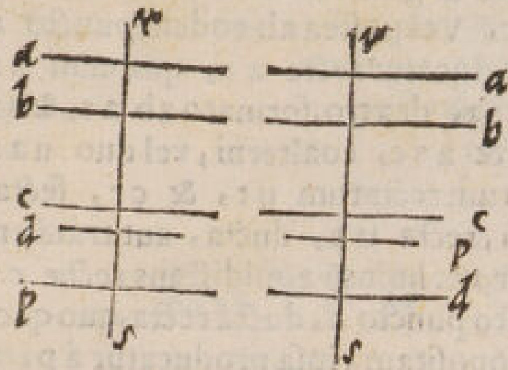
quantum proponitur; Ductis perpendicularibus go, & rs, alteri datarum à duobus punctis sectionis in alia, quæ duæ perpendiculares erunt ad inuicem æquidistantes (per octauam huius) & propterea summa duorum angulorum dextrorum internorum aog, & ogr, factorũ ab vna, cum duabus datis, erit æqualis summæ duorum angulorum internorum similiter dextrorum nsr, & srp, factorum ab altera cum ijsdem duabus datis (cum angulus aog, per se sit æqualis angulo nsr, & angulus ogr, angulo srp, per quartam huius.) Quia postea illis æquãtur duo smg, & mgr; interni facti ab vna secantium cum duabus datis à parte dextra, & duobus alijs æquantur duo sar, & arp, interni facti ab altera secante, cum ijsdem duabus datis ab eadem parte dextra (& hoc totũ ob demonstratis in prima parte decimæ huius) sequitur, quod summa duorum angulorum factorum ab vna secantium sit æqualis summæ duorum factorum ab altera secante ab eadem parte dextra cum duabus datis; Et consequenter, quod summa duorum angulorum internorum factorum à parte sinistra cum duabus datis ab vna secante, erit æqualis summæ duorum internorum factorum ab eadem parte sinistra cum duabus datis ab alia secante, quoniam tàm isti, quàm illi sunt, quod remanet à dextris, vsq; ad quattuor rectos.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XIV.

Si quotquot rectæ lineæ datæ sint æquidistantes vni rectæ propositæ, ipsæ erunt æquidistantes ad inuicem.

Sit

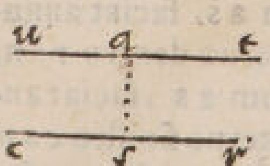
SIT quæcumque datarũ a b c d, æquidiſtans propoſitæ p. Dicitur ipſas eſſe ad inuicem æquidiſtantes; Nam poſita ad libitum vna recta perpendiculari ad propoſitam, & hæc producatur quouſq; ſecet quamcunq; datarum (ipſis etiã productis, ſi occurrat quouſq; perpendicularis propoſitæ lineæ eas ſecare poſſit) & ſit r s, illa (per ſecundam huius) erit etiam perpendicularis cuicunq; datarum, vnde (per ſeptimam huius) quæcunq; datarum erit æquidiſtans cuicunque alteri ipſarum datarum, ſcilicet recta a, cuicunque aliarum, ſimiliter b, cuicunque aliarum, & ſic c, ad d, & ad quaſcunque alias rectas æquidiſtantes rectæ p, propoſitæ.



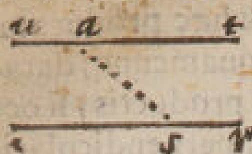
PROBLEMA. PROPOSITIO XV.

A dato puncto ducere rectam æquidiſtantem ad propoſitam rectam, quæ non ſit in directum cum ipſo puncto dato, ſcilicet talis ſit, vt ſi à puncto dato duceretur linea ad vnum terminorum propoſitæ, illa non vniatur cũ propoſita, ſed faciat angulũ cum ipſa.

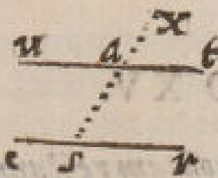
A DATO puncto a, ducenda ſit recta æquidiſtans rectæ propoſitæ c r. Ab ipſo puncto a, ducatur recta perpendicularis ad rectam c r, (producendo ipſam c r, quando opus ſit, tali modo, vt ipſa perpendicularis ſuper eam cadere poſsit, ita vt illa ſecari poſsit à dicta perpendiculari) & ſit a s, & ab eodem puncto dato a, ducatur perpendicularis ad hanc a s, ſeu à parte ſiniſtra, ſeu à dextra ad libitum, & ſit a u, vel a t, quæ a u, vel a t, ſeu u t, erit æquidiſtans rectæ c r, vt volebamus (per ſeptimam huius) cum à cõſtructione, vna, & eadem recta a s, ſit perpendicularis propoſitæ c r, & a u, vel a t, ſeu totali u t, vel poſſumus dicere rectam u t, eſſe æquidiſtantem rectæ c r, (per 11. huius) cum quicunque angulorum ab a, & ab s, ſit rectus, & ideo cum ſumma duorum angulorum t a s, & r s a, internorum dextrorum, vel cum ſumma duorum u a s, & c s a, internorum ſiniſtrorũ ſit æqualis duobus rectis. Vel alio modo; A pũcto da-

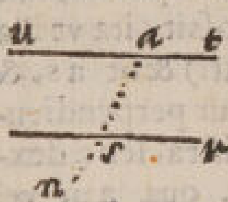


cto dato a. Ducatur rectam ad libitum, quæ perueniat ad propoſitam c r, & ſit a s, poſtea ab eodem puncto a, à parte dextra



ducatur recta a t, quæ cum recta a s, faciat angulum æqualem angulo a s c, ſiniſtro formato ab a s, & s c, Vel poſtea ab eodem puncto a, à parte ſiniſtra ducatur recta a u, quæ cum a s, faciat angulũ æqualem angulo a s r, dextro, formato ab a s, & s r, nam ita cũ ſint duo anguli t a s, & a s c, coalterni, vel duo u a s, & a s r, ſimiliter coalterni (duarum rectarum u t, & c r, ſectarum ab a s) æquales ad inuicem, recta u t, ducta, aut tranſiens per punctum a, datum, erit (per 11. huius) æquidiſtans rectæ c r, propoſitæ. Vel alio modo; A dato puncto a, ducta recta, quo quomodo, quæ perueniat ad c r, propoſitam, ipſa producatur à parte ſuperiori puncti a, quantumlibet, ponamus in x, poſtea à puncto a, ducatur recta a t, quæ à parte dextra cum recta a x, faciat angulum æqualem angulo a s r, quem ab ipſa parte dextra facit recta a s, ducta cum recta s r. Vel (quod idem eſt) poſtea à puncto a, ducatur recta a u, quæ à parte ſiniſtra cum a x, faciat angulum æqualem angulo a s c, quem ab eadem parte ſiniſtra facit recta a s, ducta cũ recta s c, & ita conſideratis duabus rectis u t, & c r, ſectis à recta x s, quia angulus externus x a t, dexter, eſt æqualis interno a s r, ipſi oppoſito ab eadem parte, Vel quia angulus externus x a u, ſiniſter eſt æqualis interno a s c, ipſi oppoſito ab eadem parte, ſciemus (per 11. huius) quod duæ rectæ u t, & c r, ſunt æquidiſtantes ad inuicem. Et ſi nolemus producere rectam a s, à parte ſuperiori a, producatur ab inferiori s, ponamus in n, poſtea à puncto a, ducatur a t, dextra, quæ cum a s, faciat angulum t a s, dextrum æqualem interno dextro r s n, Vel ducatur a u, ſiniſtra, quæ cum a s, faciat angulum u a s, ſiniſtrũ æqualem interno ſiniſtro c s n; quod ob eãdem cauſam ſupradictam recta a t, ſeu dicamus u t, erit æquidiſtans propoſitæ c r. Nec dubitandum eſt quod duæ rectæ u a, & a t, non ſint ſimul coniunctæ indirectum conſtituendo vnam rectam u t, ſcilicet, quod u a, producta verſus a, non vniatur cum recta a t, vel quod t a, producta verſus a, non vniatur cum recta a u; quoniam cum angulus x a t, ſit æqualis angulo a s r, & angulus x a u, æqualis angulo a s c, etiam ſumma duorum angulorum x a t, & x a u, erit æqualis ſummæ duorum





a s r, &

asr, & asc, sed hæc est æqualis duobus rectis (per 13. primi) & ideo illa summa etiam erit æqualis duobus rectis, & propterea (per 14. primi) duæ rectæ at, & au, sunt simul coniunctæ in directum. Idem occurrit in alijs modis superioribus operandi, quod in quocunq; illorũ summa angulorum tas, & uas, est ęqualis duobus rectis.

LAVS DEO SEMPER.