Se vend à Bordeaux, chez CHAPPUIS freres, Libraires, Jurés de l'Université, Place Royale, à l'entrée de la Bourse.

USAGE
DU COMPAS
DE
PROPORTION,
ET DE
L'INSTRUMENT
UNIVERSEL.

Pour résoudre promptement & très-exactement les Problêmes de la Géométrie pratique, tant sur le papier que sur le terrein, sans aucun calcul.

Avec un Traité de la Division des Champs.

Par M. OZANAM, de l'Académie Royale des Sciences.

NOUVELLE ÉDITION.

Enrichie de Figures en Taille-douce.

A PARIS,

Chez CLAUDE-ANTOINE JOMBERT, Fils, Libraire rue Dauphine.

M. DCC. LXIX.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

AVERTISSEMENT.

L'ESTIME particuliere & l'empreſſement que le public a toujours témoigné pour les ouvrages de M. Ozanam, m'engagent, ami lecteur, à vous donner aujourd'hui une nouvelle édition de ſon Traité de l'Uſage du compas de proportion, que j'ai réduit à une forme plus portative, ce qui m'a obligé de faire graver en cuivre les figures de cet Ouvrage qui n'étoient qu'en bois dans les éditions précédentes.

Les uſages du Compas de proportion étant en très-grand nombre, on s'eſt propoſé de donner ſeulement ici ceux qui ont paru les plus utiles & les plus généraux, afin que par leur moyen on puiſſe trouver facilement les autres de ſoi-même, ce qui deviendra fort aiſé quand on aura bien compris les démonſtrations de ceux que l'on enſeigne dans ce Traité. Dans cette intention l'on s'eſt contenté de placer ſur cet inſtrument, d'un côté, la ligne des parties égales, pour pouvoir diviſer une ligne ſelon une raiſon donnée : la ligne des plans, qui ſert à augmenter ou à diminuer un plan à volonté : & celle des polygones, pour pouvoir inſcrire dans un cercle un polygone régulier de tel nombre de côtés qu'on voudra. De l'autre côté du compas de proportion on a tracé la ligne des cordes, pour la meſure des angles : la ligne des ſolides, pour pouvoir augmenter ou diminuer un ſolide ſelon une raiſon donnée ; & la ligne des métaux, pour connoître la proportion que les ſix métaux ont entr'eux. On a ajouté à cette édition, d'un côté, la ligne du poids des boulets ; & de l'autre, celle du calibre des pieces, qui manquoient aux anciennes éditions, auſſi-bien que la ligne des métaux, & que l'on a inſérées dans celle-ci pour n'y rien laiſſer à deſirer ; c'eſt auſſi pour cette raiſon qu'on a ajouté des démonſtrations dans le courant du livre aux endroits où l'on a jugé qu'elles étoient néceſſaires.

Comme ce Traité de l'uſage du Compas de proportion formeroit tout ſeul un trop petit volume, j'ai cru faire plaiſir aux curieux d'y joindre un petit livre aſſez rare du même Auteur, qui a pour titre, *Uſage de l'Inſtrument univerſel*, ces deux Ouvrages ayant également pour objet de réſoudre promptement & ſans calcul les problêmes les plus ordinaires de la Géométrie-pratique.

Ceux qui ont parlé de l'Inſtrument univerſel avant M. Ozanam, l'avoient fait ſi légérement, qu'il dit dans ſa préface que cet Inſtrument peut déſormais paſſer pour nouveau, parce qu'on n'en avoit enſeigné l'uſage que pour lever un plan, au lieu que notre Auteur l'a rendu univerſel pour toutes les opérations de la Géométrie-pratique. Il eſt vrai que la difficulté d'avoir ces inſtrumens bien juſtes l'avoit fait négliger de ſon tems ; mais M. Ozanam en ayant fait exécuter par d'habiles ouvriers, les diverſes expériences qu'il a fait enſuite avec ceux-ci, lui ont ſi bien réuſſi, qu'il aſſure que cet Inſtrument eſt le plus exact de tous ceux qui ont été inventés juſqu'à préſent pour travailler ſur le terrein, & qu'il eſt même plus commode que les autres, en ce qu'il ne faut ſçavoir ni Trigonométrie, ni Arithmétique pour s'en ſervir.

Il eſt bon cependant d'avertir ici, que non-ſeulement l'Inſtrument univerſel demande à être travaillé avec une grande exactitude, mais encore qu'on doit être très-ſoigneux à le placer avec préciſion au point marqué : autrement on s'expoſeroit à commettre des erreurs conſidérables, ſur-tout ſi l'on n'étoit pas beaucoup éloigné de l'objet que l'on veut viſer par les pinnules, ou par la lunette, quand il y en a. C'eſt ce qui a fait abandonner l'uſage de cet Inſtrument à bien des perſonnes, qui ont conclu trop légérement qu'il ne pouvoit pas être parfaitement juſte, quoiqu'il ſeroit facile de prouver le contraire, en ce qu'on n'eſt pas obligé ici de connoître la quantité des angles viſuels, comme il arrive en ſe ſervant du demi-cercle; (ce qu'il n'eſt jamais poſſible de ſçavoir au vrai) au lieu qu'avec l'Inſtrument univerſel, la choſe que l'on veut exécuter ſe trouve toute tracée ſur ſa ſurface, ainſi qu'on le verra dans l'explication de ſes uſages. D'autres ſe ſont imaginés que cet Inſtrument n'étoit autre choſe que la planchette; parce que tous les rayons viſuels ſe tracent deſſus, pour avoir ce que l'on cherche ſur le terrein ou en l'air, réduit en petit ſur la ſurface de l'Inſtrument; mais il y a bien de la différence de l'un à l'autre, comme il ſera aiſé à chacun de s'en appercevoir quand on ſçaura de quelle maniere on ſe ſert de la planchette, & de notre Inſtrument univerſel.

Ce volume eſt terminé par un Traité de la diviſion des Champs, que M. Ozanam avoit joint à celui de l'uſage du compas de proportion, & qui a toujours depuis été imprimé à la ſuite de cet ouvrage dans les différentes éditions qui en ont été faites. L'utilité de ce dernier Traité eſt trop connue & trop fréquente dans la Géométrie-pratique & dans l'arpentage, pour qu'il ſoit néceſſaire de s'étendre davantage là deſſus ; c'eſt pourquoi je terminerai cet avertiſſement par la table des Chapitres & des Problêmes contenus dans ces trois Traités.

TABLE

Des Chapitres & des Problêmes contenus dans ce Volume.

USAGE DU COMPAS DE PROPORTION.

CHAPITRE PREMIER. *Construction du compas de proportion*, page 2
Table du nombre des parties des côtés homologues de tous les plans semblables, doubles, triples, quadruples, &c. à l'égard du plus petit côté de 125, *ou du plus grand de* 1000 *parties*, 7
Tables des côtés des polygones réguliers depuis le quarré jusqu'au dodécagone, 11
Tables des parties des côtés homologues de tous les solides semblables, doubles, triples, quadruples, &c. à l'égard du plus petit côté de 125, *& du plus grand de* 1000 *parties*, 16

Table des poids & des diametres des ſix métaux, 22

Preuve des diviſions du compas, 25

CHAP. II. *Uſage de la ligne des parties égales,* 30

PROBLÊME I. *Diviſer une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra,* 31

Probl. II. *Couper une ligne donnée ſelon une raiſon donnée,* 34

Probl. III. *Etant données deux lignes, & les parties égales de l'une, trouver les parties égales de l'autre,* 38

Probl. IV. *Etant donnée une ligne & le nombre des parties égales qu'elle contient, en retrancher tel nombre que l'on voudra de ces parties,* 40

Probl. V. *Trouver une ligne égale à la circonférence d'un cercle donné,* 43

Probl. VI. *Ouvrir le compas de proportion, enſorte que l'angle des deux lignes des parties égales ſoit droit,* 44

Probl. VII. *A trois lignes données trouver une quatrieme proportionnelle,* 46

Probl. VIII. *Trouver géométriquement à deux lignes données une troiſieme proportionnelle, & à trois lignes une quatrieme,* 51

Probl. IX. *Diviſer une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra,* 54

Chap. III. *Usage de la ligne des Plans*, 55
Probl. I. *Etant donné un triangle, trouver un autre triangle semblable en raison donnée*, 56
Probl. II. *Trouver la raison de deux plans semblables donnés*, 60
Probl. III. *Ouvrir le compas de proportion, ensorte que les deux lignes des plans fassent un angle droit*, 64
Probl. IV. *Trouver un plan semblable & égal à deux plans semblables donnés*, 65
Probl. V. *Entre deux lignes données trouver une moyenne proportionnelle*, 68
Probl. VI. *Trouver géométriquement entre deux lignes données une moyenne proportionnelle*, 72
Chap. IV. *Usage de la ligne des polygones*, 76
Probl. I. *Décrire un polygone régulier dans un cercle donné*, 77
Probl. II. *Décrire sur une ligne donnée un polygone régulier*, 79
Probl. III. *Couper une ligne donnée dans la moyenne & extréme raison*, 82
Probl. IV. *Décrire sur une base donnée un triangle isoscele, dont l'un des deux angles à la base soit double de l'angle au sommet*, 85
Probl. V. *Ouvrir le compas de proportion, ensorte que les deux lignes des*

polygones fassent un angle droit, 87
CHAP. V. *Usage de la ligne des cordes,* 88
Probl. I. *Prendre sur la circonférence d'un cercle donné un arc d'autant de degrés que l'on voudra,* 89
Probl. II. *Ouvrir le compas de proportion de maniere que l'angle des deux lignes des cordes soit d'autant de degrés qu'on voudra,* 93
Probl. III. *Trouver le demi-diametre d'un arc de cercle donné, dont on connoît les degrés,* 96
CHAP. VI. *Usage de la ligne des solides,* 98
Probl. I. *Etant donnée une pyramide, trouver une pyramide semblable en raison donnée,* 99
Probl. II. *Trouver la raison de deux solides semblables donnés,* 103
Probl. III. *Ouvrir le compas de proportion de façon que l'angle des deux lignes des solides soit un angle droit,* 107
Probl. IV. *Trouver un solide semblable & égal à deux solides semblables donnés,* 108
Lemme. *Si de quatre lignes les trois premieres sont proportionnelles, & que le cube de la troisieme soit égal au solide sous la premiere & le quarré de la quatrieme, ces quatre lignes seront proportionnelles,* 112

Probl. V. *Entre deux lignes données trouver deux moyennes proportionnelles*, 114

Probl. VI. *Trouver géométriquement entre deux lignes données deux moyennes proportionnelles*, 117

Probl. VII. *Trouver ſans le ſecours du compas de proportion, & d'une façon plus méchanique, entre deux lignes données, deux moyennes proportionnelles*, 120

Probl. VIII. *Trouver le côté d'un cube égal au parallelipipede HBC, dans lequel H ſignifie ſa hauteur, & B, C, les diametres de ſa baſe*, 123

Chap. VII. *Uſage de la ligne des métaux*, 124

Probl. I. *Etant donné le diametre d'une ſphere quelconque faite de l'un des ſix métaux, par exemple, d'argent, trouver le diametre d'une ſphere d'or de même poids*, ibid.

Probl. II. *Trouver le rapport ſpécifique des ſix métaux, par exemple, de l'argent à l'or*, 125

Probl. III. *Ayant un corps fait de l'un des ſix métaux, comme d'étain, d'un poids, par exemple, de 36 livres, trouver le poids d'un corps d'argent qui ſeroit de même volume que celui d'étain*, 127

Probl. IV. *Trouver le rapport du poids de deux corps ſemblables, dont l'un ſoit, par exemple, d'étain, & l'autre d'argent, leur diametre étant donné,* 128
Probl. V. *Le diametre d'une ſphere de cuivre & ſon poids de dix livres étant donné, trouver le diametre d'une ſphere d'or peſant 15 livres,* 129

USAGE DE L'INSTRUMENT UNIVERSEL.

Uſage de cet Inſtrument, 131
Conſtruction de l'Inſtrument univerſel, 132
Probl. I. *Meſurer un angle acceſſible ſur la terre,* 135
Probl. II. *Meſurer un angle inacceſſible ſur la terre,* 136
Probl. III. *Faire à un point donné d'une ligne donnée ſur la terre un angle d'autant de degrés que l'on voudra,* 138
Probl. IV. *Diviſer un angle donné inacceſſible ſur la terre en deux également,* 139
Probl. V. *Diviſer une ligne donnée inacceſſible ſur la terre en deux également,* 142
Probl. VI. *Retrancher d'une ligne donnée inacceſſible ſur la terre, une partie d'une grandeur donnée,* 145

Probl. VII. *Prolonger une ligne donnée ſur la terre, quand il ſe trouve quelque empêchement,* 147
Probl. VIII. *Tirer par un point donné ſur la terre à une ligne donnée acceſſible d'un côté, une parallele,* 150
Probl. IX. *Tirer par un point donné ſur la terre à une ligne donnée inacceſſible, une parallele,* 152
Probl. X. *Tirer par un point donné ſur une ligne donnée acceſſible ſur la terre, une perpendiculaire,* 154
Probl. XI. *Tirer par un point donné hors d'une ligne donnée acceſſible ſur la terre, une perpendiculaire,* ibid.
Probl. XII. *Tirer par un point donné hors d'une ligne donnée inacceſſible ſur la terre, une perpendiculaire,* 155
Probl. XIII. *Meſurer une ligne ſur la terre, acceſſible des deux côtés,* 157
Probl. XIV. *Meſurer une ligne ſur la terre, acceſſible d'un côté,* 159
Probl. XV. *Meſurer une ligne inacceſſible ſur la terre,* 161
Probl. XVI. *Meſurer ſur la terre une ligne acceſſible inclinée à l'horiſon,* 166
Probl. XVII. *Meſurer une hauteur acceſſible,* 168
Probl. XVIII. *Meſurer une hauteur inacceſſible,* 170

Probl. XIX. *Mesurer d'en haut une ligne inaccessible*, 173
Probl. XX. *Mesurer d'en haut une hauteur inaccessible*, 177
Probl. XXI. *Mesurer une profondeur*, 180
Probl. XXII. *Tracer un plan sur la terre*, 183
Probl. XXIII. *Lever le plan d'une place accessible sur la terre*, 185
Probl. XXIV. *Lever le plan d'une place inaccessible sur la terre*, 187

TRAITÉ DE LA DIVISION DES CHAMPS.

CHAP. I. *De la division des triangles.*
Probl. I. *Diviser le triangle donné ABC, en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes tirées de l'angle donné A*, 190
Probl. II. *Diviser le triangle donné ABC, en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes paralleles au côté BC*, 191
Probl. III. *Diviser en deux également le triangle ABC par une ligne perpendiculaire au côté AB*, 193
Probl. IV. *Diviser le triangle donné ABC en deux également par une ligne tirée du point donné D sur le côté BC*, 195
Probl. V. *Diviser le triangle donné ABC*, en

en autant de parties égales que l'on voudra, par des lignes tirées du point donné D ſur le côté donné BC, 196

Probl. VI. *Tirer du point donné D au dedans du triangle donné ABC trois lignes, enſorte que l'une paſſe par l'angle donné A, & que les trois diviſent le triangle donné ABC en trois parties égales,* 198

Probl. VII. *Diviſer le triangle donné ABC en trois parties égales, par trois lignes tirées aux trois angles A, B, C,* 199

Probl. VIII. *Retrancher du triangle donné ABC un triangle égal au donné CDE, & ayant un angle égal à l'un de ceux du triangle donné ABC,* 200

Probl. IX. *Retrancher du triangle donné ABC un triangle égal au donné CDE, par une ligne tirée de l'angle donné B,* 201

Probl. X. *Retrancher du triangle donné ABC un triangle égal au donné CDE, par une ligne tirée par le point I donné ſur le côté BC,* 202

Probl. XI. *Retrancher du triangle donné ABC un triangle égal au donné CDE par une ligne parallele au côté donné BC,* 203

CHAP. II. *De la diviſion des quadrilateres.*

Probl. I. *Diviſer le parallelogramme donné ABCD en autant de parties égales qu'on* *voudra, par des lignes paralleles au côté donné AD ou BC,* 206

Probl. II. *Diviſer le parallelogramme donné ABCD en trois parties égales, en commençant par l'angle donné A,* 207

Probl. III. *Diviſer le parallelogramme donné ABCD en trois parties égales, en commençant par le point E donné ſur le côté AB,* 208

Probl. IV *Diviſer le parallelogramme dondé ABCD en trois parties égales, par deux lignes tirées de l'angle donné A.* 209

Probl. V. *Diviſer le parallelogramme donné ABCD en trois parties égales, par deux lignes tirées du point donné E ſur le côté donné AB,* 210

Probl. VI. *Diviſer le trapézoïde donné ABCD en autant de parties égales qu'on voudra,* 211

Probl. VII. *Diviſer le trapeze donné ABCD en deux également, par une ligne droite tirée de l'angle donné D,* ibid.

Probl. VIII. *Diviſer le trapeze donné ABCD en deux également, par une ligne droite tirée du point E, milieu du côté AB,* 212

Probl. IX. *Diviſer le trapeze donné ABCD en deux également, par une ligne droite tirée du point E donné ſur le côté CD,* 214

Probl. X. *Diviser le trapeze donné AB-CD en deux également, par une ligne parallele au point donné AD,* 216

Probl. XI. *Diviser le trapeze donné AB-CD en trois parties égales par deux lignes tirées de l'angle donné D,* 222

Probl. XII. *Diviser le trapeze donné AB-CD en trois parties égales, par deux lignes tirées du point E donné sur le côté CD,* ibid.

Probl. XIII. *Diviser le trapeze donné AB-CD en deux parties égales par deux lignes paralleles au côté donné AD,* 224

Probl. XIV. *Diviser le trapeze donné AB-CD en trois parties égales, par deux lignes tirées des deux angles opposés B, D,* 225

Probl. XV. *Diviser le trapeze donné AB-CD en deux parties, dont la raison soit égale à celle des deux lignes données AG, GH,* 226

Probl. XVI. *Retrancher d'un trapeze donné une figure égale à une autre figure donnée,* 228

Chap. III. *De la division des Polygones.*

Probl. I. *Diviser un polygone régulier en deux également par une ligne tirée du milieu de l'un de ses côtés,* 229

Lemme. *Réduire un polygone proposé en triangle,* 230

Probl. II. *Diviser un polygone régulier en deux également, par une ligne parallele à l'un de ses côtés,* 231
Probl. III. *Diviser un polygone régulier en deux également par deux lignes perpendiculaires entr'elles,* 233
Probl. IV. *Diviser un polygone régulier en deux également, par une ligne tirée d'un point donné sur l'un de ses côtés,* 235
Probl. V. *Diviser le polygone donné AB-CDE en trois parties égales, par deux lignes tirées du point donné O, sur le côté CD,* 236
Probl. VI. *Diviser en trois parties égales le polygone donné ABCDE, par deux lignes tirées de l'angle donné D,* 237
Probl. VII. *Diviser le polygone donné ABCDE en trois parties égales, par deux lignes tirées des deux points OF, donnés sur le côté CD,* 238
Probl. VIII. *Diviser le polygone donné ABCDE en deux parties dans la raison des deux lignes données AI, IL, par une ligne tirée de l'angle D,* 239

Fin de la Table des Chap. & des Problêmes contenus dans ces trois Traités.

APPROBATION

De M. Belidor, Censeur Royal, ancien Professeur de Mathématique aux Ecoles d'Artillerie de la Fére, &c.

J'AI lu, par ordre de Monseigneur le Chancelier, les Œuvres de M. Ozanam, contenant le Dictionnaire, le Cours, & les Recréations Mathématiques, un Traité de l'Arpentage, la Géométrie-pratique, l'Usage du Compas de proportion, la Méthode pour lever les Plans, & les Elémens d'Euclides.

Les Ouvrages de M. Ozanam ayant servi jusqu'ici d'école à presque tous ceux qui se sont appliqués aux Mathématiques, depuis qu'elles ont été regardées en Europe comme la base de toutes les Sciences : il y a apparence que cette nouvelle Edition de ses Œuvres sera aussi-bien reçue du Public, que l'ont été les précédentes. A Paris, le 24 Février 1746. BELIDOR.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre, à nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT : Notre bien amé CHARLES ANTOINE JOMBERT, Libraire à Paris, Nous a fait expoſer qu'il déſireroit faire réimprimer & donner au Public des Ouvrages qui ont pour titre : *Œuvres de Mathématique de feu M. Ozanam, de l'Académie des Sciences ; Secrets des Arts & Métiers ; le Teinturier parfait ; l'Art de la Verrerie ; l'Art de tourner du Pere Plumier.* S'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege ſur ce néceſſaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes de faire réimprimer leſdits livres en un ou pluſieurs volumes, & autant de fois que bon lui ſemblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par-tout notre Royaume, pendant le tems de neuf années conſécutives, à compter du jour de la date deſdites Préſentes : Faiſons défenſes à toutes perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance ; comme auſſi à tous Libraires & Imprimeurs, d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire leſdits livres, en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns Extraits, ſous quelque prétexte que ce ſoit, d'augmentations, corrections, & autres, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Expoſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts ; à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date dicelles; que la réimpreſſion deſdits livres ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modele ſous le contre-ſcel des Préſentes; que l'Impétrant ſe conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; qu'avant de les expoſer en vente, les manuſcrits & imprimés qui auront ſervi de copie à la réimpreſſion deſdits livres ſeront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, le ſieur d'Agueſſeau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier le ſieur d'Agueſſeau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Préſentes. Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant, ou ſes ayans cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie deſdites Préſentes, qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin deſdits livres, ſoit tenue pour duement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers & Secretaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, &

nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris le vingt-deuxieme jour du mois de Juillet l'an de grace 1746, & de notre Regne le trente-unieme. Par le Roi en ſon Conſeil,

SAINSON.

Regiſtré ſur le Regiſtre 11 *de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris*, *N°.* 615, *fol.* 543, *conformément aux anciens Réglemens confirmés par celui du* 28 *Février* 1733. *A Paris, le* 5 *Mai* 1746.

VINCENT, *Syndic.*

USAGE

USAGE

DU COMPAS

DE PROPORTION.

Le compas de proportion eſt un inſtrument de mathématique dont on peut ſe ſervir très-commodément pour réſoudre promptement & facilement les problêmes les plus utiles & les plus néceſſaires dans toutes les parties des mathématiques, & principalement dans la géométrie pratique, tant ſur le papier que ſur le terrein.

Quoique la conſtruction de cet inſtrument ne ſoit pas inconnue aux ouvriers qui travaillent aux inſtrumens de mathématique, néanmoins je ne laiſſerai pas de l'enſeigner ici briévement pour les lignes que nous nous ſommes propoſé d'y mettre; ſavoir, pour les lignes des *parties égales, des plans, des polygones, des cordes, des solides, & des métaux*, étant facile à leur imitation d'y ajouter les autres lignes dont on peut avoir besoin dans la pratique, comme *la ligne des tangentes*, pour la description des cadrans solaires, &c.

CHAPITRE PREMIER.

Construction du compas de proportion.

Planche premiere.

AYANT déterminé la longueur du compas de proportion que vous voulez construire, comme de six pouces, ce qui est le plus ordinaire, & la largeur, comme de six lignes; préparez deux regles de laiton, ou de quelqu'autre matiere solide, ayant cette même longueur & cette même largeur, pour les jambes de votre compas, lesquelles doivent être mobiles à l'entour de leurs extrêmités, que l'on doit pour cette fin joindre ensemble par le moyen d'une charniere, ensorte que le compas de proportion se puisse fermer & ouvrir comme l'on voudra par un mouvement qui soit autant égal & uniforme qu'il sera possible, pour s'en pouvoir servir plus commodément

Le centre de cette charniere sera pris pour le centre du compas de proportion, comme A, duquel on doit tirer sur chaque jambe, de côté & d'autre, toutes les lignes qu'on veut ajouter au compas de proportion, pour son usage, & premierement *la ligne des parties égales*, ainsi appellée, parce qu'elle est divisée en un certain nombre de parties égales, tel que l'on veut, & le plus grand sera le meilleur, afin que l'usage en soit plus universel. Ce nombre est ordinairement 200, dans une longueur de six pouces; & quoique la division de cette ligne en 200 parties égales soit facile, néanmoins pour ne rien laisser à deviner, je dirai ici en peu de mots la maniere de faire cette division.

Planche premiere.

La longueur de votre ligne étant déterminée sur chaque jambe, divisez-la depuis le centre du compas de proportion jusqu'à son extrêmité, en deux parties égales, dont chacune vaudra 100. Divisez encore chacune de ces deux parties égales en deux autres parties égales, dont chacune vaudra 50. Divisez ensuite chacune de ces parties égales en deux autres parties égales, & chacune de ces nou-

Ligne des parties égales.

Pl. 1. velles parties égales en cinq parties égales, & enfin chacune de ces dernieres parties égales encore en cinq parties égales, & la ligne proposée se trouvera divisée en ses 200 parties égales, que vous séparerez de cinq en cinq par de petites lignes, ausquelles vous ajouterez des chifres de 10 en 10 seulement, en les comptant depuis le centre A, jusqu'à l'autre extrêmité, où le nombre 200 se trouvera.

Ligne des plans. Proche la ligne des parties égales, on pourra ajouter sur la même surface du compas de proportion *la ligne des plans*, ainsi appellée, parce qu'elle comprend depuis le centre A, les côtés homologues d'un certain nombre de plans semblables, multiples du premier & plus petit, par les nombres naturels 2, 3, 4, &c. Ce nombre est ordinairement 64, dans une longueur de six pouces, telle que nous l'avons ici supposée, de sorte que l'extrêmité de cette ligne représente le côté du 64^e plan, c'est-à-dire, d'un plan 64 fois plus grand qu'un autre plan semblable, dont le côté homologue est égal à la 8^e partie de toute la ligne des plans, parce que la racine quarrée de 64 est 8, & c'est pour cela qu'on a choisi ce nombre quarré 64, afin que sa racine quarrée 8 étant exacte, on ait aussi exactement le côté homologue du premier & du plus petit plan ſemblable, parce que ce côté eſt égal à la 8ᵉ partie du côté homologue du 64ᵉ plan, puiſque la racine quarrée de 64 eſt 8, & que les plans ſemblables ſont entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues (par la 20 du 6). Pl. 1.

Pour trouver le côté homologue de ce premier & plus petit plan, & par ſon moyen les côtés homologues de tous les autres plans ſemblables, doubles, triples, quadruples, & ainſi de ſuite juſqu'au 64ᵉ & plus grand plan; diviſez à part le côté de ce plus grand plan, ou la ligne des plans, en un certain nombre de parties égales, qui ſoit diviſible par la racine quarrée 8 du plus grand plan 64, le nombre le plus grand ſera le meilleur, comme en 1000 parties égales, ce qui ſera facile dans une longueur de ſix pouces; diviſez ce nombre 1000, par la même racine quarrée 8 du plus grand plan 64, & le quotient donnera exactement 125 parties pour la quantité du côté du premier plan. C'eſt pourquoi ſi l'on porte 125 parties ſur la ligne des plans depuis le centre A, on aura un point qui terminera la longueur du côté homologue du premier plan, par le

Pl. 1. moyen duquel on trouvera aiſément les longueurs des côtés homologues des autres plans ſemblables multiples ; comme ſi on veut trouver le côté homologue d'un plan double, on multipliera par 2, le quarré 15625 du nombre 125 de parties du côté du premier plan, & on prendra la racine quarrée du produit 31250, laquelle donnera environ 177 parties pour le côté homologue du plan double : c'eſt pourquoi ſi on porte 177 parties ſur la ligne des plans depuis le centre A, on aura un ſecond point qui terminera la longueur du côté du ſecond plan, ainſi des autres. C'eſt de cette maniere que nous avons ſupputé la table ſuivante.

TABLE du nombre des parties des côtés homologues de tous les plans ſemblables, doubles, triples, quadruples, &c, à l'égard du plus petit côté de 125, *ou du plus grand de* 1000 *parties.*

1	125	17	515	33	718	49	875
2	177	18	530	34	729	50	884
3	216	19	545	35	739	51	892
4	250	20	559	36	750	52	901
5	279	21	573	37	760	53	910
6	306	22	586	38	770	54	918
7	330	23	599	39	780	55	927
8	353	24	612	40	790	56	935
9	375	25	625	41	800	57	944
10	395	26	637	42	810	58	952
11	414	27	650	43	819	59	960
12	433	28	661	44	829	60	968
13	450	29	673	45	839	61	976
14	467	30	684	46	848	62	984
15	484	31	696	47	857	63	992
16	500	32	707	48	866	64	1000

Cette table ſe peut ſupputer par une autre maniere qui eſt plus facile que la précédente, parce qu'elle peut ſervir de la même façon pour un autre nombre du plus grand plan que 64, lorſque ce nom-ne ſera pas quarré, & qu'il ne diviſera pas exactement le quarré du nombre des parties du côté du même plus grand plan, ce qui empêchera le côté du premier plan d'être exact, & de pouvoir s'en ſervir pour trouver commodément les côtés homologues des plans ſemblables multiples. Dans ce cas on pourra trouver ces côtés plus facilement en cette ſorte.

Faites une regle de trois directe, dont le premier terme ſoit le plus grand plan, comme ici 64, le ſecond ſoit le plan ſemblable dont on cherche le côté homologue, comme par exemple 5 pour un plan quintuple du plus petit, & le troiſieme ſoit le quarré du nombre des parties du côté du plus grand plan, comme ici 1000000; la racine quarrée du quatrieme terme 78155, donnera environ 279 parties pour le côté homologue du plan quintuple (comme il eſt évident par la 20 du 6), ainſi des autres.

Ligne des polygones. Pl. 1. Enfin proche la ligne des plans, on pourra ajouter *la ligne des polygones*, ainſi appellée parce qu'elle comprend depuis le centre A, les côtés d'un certain nombre de polygones réguliers inſcrits dans un même cercle, le *quarré* y étant compris, & non le *triangle*, pour n'être pas d'un grand uſage. Ce nombre eſt ordinairement 8, en commençant depuis le *quarré* juſqu'au *dodecagone*, les autres polygones n'étant pas d'un ſi grand uſage, parce que les polygones réguliers ne ſervent ordinairement que pour la fortification des places régulieres, & qu'il ſe trouve rarement une place réguliere de plus de douze baſtions. Pl. 1.

Puiſque les côtés des polygones réguliers inſcrits dans un même cercle diminuent à meſure qu'ils ont plus de côtés, il s'enſuit que le côté du quarré eſt le plus grand de tous, & que par conſéquent on le doit faire égal à la longueur de la ligne des polygones que nous avons ſuppoſée de ſix pouces, en la prenant depuis le centre A.

Ayant ainſi déterminé la longueur du côté du quarré, on le diviſera en tel nombre de parties égales que l'on voudra, & le plus grand ſera le meilleur, comme en 1000, pour trouver dans ces parties la valeur des côtés des autres polygones, & premierement le côté de l'*exagone*, ou le rayon du cercle commun à tous ces polygones, ce qui ſera facile, parce que ce rayon eſt le côté d'un triangle iſoſcele rectangle dont l'hipotenuſe eſt égale au côté du quarré. C'eſt pourquoi ſi on multiplie ce côté, que nous avons ſuppoſé de 1000 parties, par lui-même, on aura 1000000 pour ſon quarré, dont la moitié 500000 ſera par conſéquent le quarré du rayon (par 47, 1). C'eſt pourquoi ſi on prend la racine quarrée de cette moitié 500000, on aura 707 parties pour le rayon, ou pour le côté de l'exagone, que l'on pourra auſſi trouver par cette analogie.

Comme le ſinus total . . . 100000
Au côté du quarré 1000
Ainſi le ſinus de 45 degrés 70710
Au côté de l'exagone 707

Par le moyen du côté de l'exagone ainſi trouvé, on trouvera les côtés de tel autre polygone qu'on voudra, par cette analogie.

Comme le ſinus total,
Au double du côté de l'exagone;
Ainſi le ſinus de la moitié de l'angle du centre du polygone,
Au côté du polygone qu'on cherche.

C'eſt de cette maniere que nous avons conſtruit la table ſuivante qui montre la quantité des côtés des polygones réguliers depuis le *quarré* juſqu'au *dodecagone*, & il ſera facile de la prolonger autant que l'on voudra, pour les polygones de plus de côtés, & par ſon moyen de marquer les côtés ſur la ligne des polygones, en portant les parties qu'ils contiennent depuis le centre A ſur la même ligne des polygones. Cela eſt trop clair, ſans qu'il ſoit beſoin d'en donner un exemple particulier, & c'eſt pour cela auſſi que nous ne nous ſommes pas arrêtés à donner la démonſtration des deux analogies précédentes.

TABLE des côtés des polygones réguliers, depuis le quarré juſqu'au décagone.

Polygones.	côtés.
Quarré.	1000
Pentagone.	831
Exagone.	707
Eptagone.	613
Octogone.	540
Ennéagone.	484
Décagone.	437
Endécagone.	398
Dodécagone.	366

Il ne reſte plus qu'à vous enſeigner la maniere de mettre de l'autre côté, c'eſt

Pl. 1. à-dire, ſur l'autre ſurface de chaque jambe du compas de proportion, les lignes des cordes, des ſolides & des métaux, & premierement *la ligne des cordes* en cette ſorte.

Ligne des cordes. Ayant tiré du centre A, ſur chaque jambe du compas de proportion, la ligne des cordes, ainſi appellée parce qu'elle comprend les cordes de tous les degrés du demi-cercle qui a pour diametre la longueur de cette ligne, laquelle doit être égale de côté & d'autre; portez les cordes de tous les degrés de ce demi-cercle diviſé exactement en ſes 180 degrés, en les prenant depuis l'une des deux extrêmités du diametre, depuis le centre A, ſur chaque ligne des cordes, & y marquez autant de points, qui repréſenteront les degrés du demi-cercle: ſéparez ces points ou degrés de 5 en 5 par de petites lignes, pour les pouvoir compter plus facilement, & y ajoutez les chifres de 10 en 10, en commençant à compter depuis le centre A, juſqu'à l'extrêmité du compas de proportion, où le 180^{e} degré ſe trouvera.

On pourroit auſſi marquer les degrés ſur cette ligne des cordes par le moyen d'une table qui ſuppoſeroit la longueur de la ligne des cordes diviſée en 1000 parties égales; mais comme cette maniere ne me semble pas si simple, ni si exacte que la précédente, je n'en parlerai pas davantage. Pl. 1.

Proche la ligne des cordes, on pourra mettre *la ligne des solides*, ainsi appellée parce qu'elle comprend les côtés homologues d'un certain nombre de solides semblables, multiples du premier & plus petit, par les nombres naturels 2, 3, 4, &c. Ce nombre est ordinairement 64, dans une longueur de six pouces, telle que nous l'avons ici supposé, de sorte que l'extrêmité de cette ligne représente le côté du 64^e^ solide, c'est-à-dire, d'un solide 64 fois plus grand qu'un autre solide semblable, dont le côté homologue est égal à la 4^e^ partie de toute la ligne des solides, parce que la racine cubique de 64 est 4, & c'est pour cela que l'on a choisi ce nombre cubique 64, afin que sa racine cubique 4 étant exacte, on ait aussi exactement le côté homologue du premier & plus petit solide semblable, parce que ce côté est égal à la 4^e^ partie du côté homologue du 64^e^ solide, puisque la racine cubique de 64 est 4, & que les solides semblables sont comme les cubes de leurs côtés homologues (par 23, 11).

Ligne des solides.

Pour trouver le côté homologue de ce premier & plus petit ſolide, & par ſon moyen les côtés homologues de tous les autres ſolides ſemblables, doubles, triples, quadruples, & ainſi de ſuite juſques au 64^{e} & plus grand ſolide ; diviſez à part le côté de ce plus grand ſolide, ou la ligne des ſolides, en un certain nombre de parties égales, qui ſoit diviſible par la racine cubique 4, du plus grand ſolide 64, & le nombre le plus grand ſera le meilleur; comme en 1000 parties égales ; diviſez ce nombre 1000, par la même racine cubique 4, du plus grand ſolide 64, & le quotient donnera exactement 250 parties pour la quantité du côté de premier ſolide. C'eſt pourquoi ſi l'on porte 250 parties ſur la ligne des ſolides depuis le centre A, on aura un point qui terminera la longueur du côté homologue du premier ſolide, par le moyen duquel on trouvera aiſément les longueurs des côtés homologues des autres ſolides ſemblables multiples ; comme ſi on veut trouver le côté homologue d'un ſolide double, on multipliera par 2 le cube 15625000 du nombre 250 des parties du côté du premier ſolide, & on prendra la racine cubique du produit 31250000, laquelle donnera environ

315 parties pour le côté homologue du ſolide double. C'eſt pourquoi ſi on porte 315 parties ſur la ligne des ſolides depuis le centre A, on aura un ſecond point qui terminera le côté du ſecond ſolide, ainſi des autres.

C'eſt de cette maniere que l'on a ſupputé la table ſuivante.

TABLE des parties des côtés homologues de tous les ſolides ſemblables, doubles, triples, quadruples, &c. à l'égard du plus petit côté de 125, & du plus grand de 1000 parties.

1	250	17	643	33	802	49	914
2	315	18	655	34	810	50	921
3	360	19	667	35	818	51	927
4	397	20	678	36	825	52	933
5	427	21	689	37	833	53	939
6	454	22	700	38	840	54	945
7	478	23	711	39	848	55	951
8	500	24	721	40	855	56	956
9	520	25	731	41	862	57	962
10	538	26	740	42	869	58	967
11	556	27	750	43	876	59	973
12	572	28	759	44	882	60	978
13	588	29	768	45	889	61	984
14	602	30	777	46	896	62	989
15	616	31	785	47	902	63	995
16	630	32	794	48	908	64	1000

Cette table ſe peut ſupputer par une autre maniere qui eſt plus facile que la précédente, parce qu'elle peut ſe rvir de la même façon pour un autre nom bre du plus grand ſolide que 64, lorſque ce no mbre nombre ne ſera pas cubique, & qu'il ne diviſera pas exactement le cube du nombre des parties du côté du même plus grand ſolide, ce qui empêchera le côté du premier ſolide d'être exact & de pouvoir s'en ſervir pour trouver commodément les côtés homologues des ſolides ſemblables multiples. Dans ce cas on pourra trouver ces côtés plus facilement en cette ſorte.

Faites une regle de trois directe dont le premier terme ſoit le plus grand ſolide, comme ici 64, le ſecond ſoit le ſolide ſemblable dont on cherche le côté homologue, comme, par exemple, 5 pour un ſolide quintuple du plus petit, & le troiſieme ſoit le cube du nombre des parties du côté du plus grand ſolide, comme ici 1000000000, & la racine cubique du quatrieme terme 78125000, donnera environ 427 parties, pour le côté homologue du ſolide quintuple (comme il eſt évident par 23, 11); ainſi des autres.

À côté de la ligne des ſolides, l'on marque ſur les jambes du compas de proportion *la ligne des métaux* : on les repréſente par des caracteres chymiques, comme on le verra ci-après. La diviſion de cette ligne ſe fait ainſi : l'étain, le

Ligne des métaux.

Pl. 1. moins pesant des six métaux, se place au bout de chaque jambe du compas, à une distance du centre égal à la longueur de toute l'échelle de 1000 parties; les autres métaux se marquent ensuite en se rapprochant du centre, chacun suivant le nombre des parties qui leur convient, pris sur la même échelle.

Définition.

La grandeur d'un corps, ou l'espace qu'il occupe, s'appelle le volume de ce corps.

Théoreme.

Le poids d'un corps est au poids d'un autre corps, comme le produit de son volume par la pesanteur spécifique, est au produit du volume & de la pesanteur spécifique de l'autre; c'est-à-dire, que si les deux corps sont A & B, que le poids du premier soit P, son volume u, & sa pesanteur spécifique m, & que le poids du second soit D, son volume h, & sa pesanteur spécifique n, l'on aura toujours P. D :: $um.\ hn$.

Démonstration.

Si le corps A est trois fois plus gros que le corps B, l'on pourra faire avec A trois corps de même volume que B, & si la matiere qui compose le corps A est trois ou quatre fois plus pesante que la pesanteur spécifique de celle qui compose B; chacun des trois volumes que A a produit, sera trois ou quatre fois plus pesant que B; & les trois ensemble, c'est-à dire A, seront par conséquent neuf fois ou douze fois plus pesant que B : d'où il est clair, que la pesanteur de A est à celle de B, comme le produit de son volume, par sa pesanteur spécifique, est au produit du volume de B, par sa gravité spécifique : donc que P. D : : *um*. *hn*.

Corollaire.

Il suit de-là, premierement : que si les volumes sont égaux, l'on aura P, D : : m, n; d'où l'on voit que pour avoir le rapport des pesanteurs spécifiques des deux corps, il faut les peser dans l'état de l'égalité de volume. Secondement : que si les gravités spécifiques de ces corps sont les mêmes, c'est-à-dire si $m = n$

on aura P, D :: u, h, ce qui montre qu'alors les poids ſont comme les volumes. Troiſiemement : que ſi P=D, um ſera égal à hn, par conſéquent nous aurons toujours dans ce cas de l'égalité de volume de deux corps, que leurs gravités ſpécifiques ſont en raiſon réciproque de leurs volumes : d'où il ſuit que connoiſſant le rapport de la peſanteur ſpécifique de deux corps & le volume de l'un, que l'on trouvera le volume de l'autre, étant le quatrieme terme d'une proportion. Par exemple, ſi l'on veut ſavoir le volume d'un corps de fer égal en peſanteur à un corps d'étain dont on connoît le volume ou le diametre, que nous ſuppoſons de 1000 parties, & que l'on ſache que leurs gravités ſpécifiques ſont entre elles comme 558 liv. eſt à 516 liv. 2 onces, l'on fera cette proportion, 558 l. 516 liv. 2 onces :: le cube de 1000, eſt à un quatrieme terme, qui ſera le cube du diametre du corps de fer, que l'on trouvera, en extrayant la racine cubique de 974 parties, ou un peu moins de celle dont eſt formé le diametre de la boule d'étain.

La diviſion de la ligne des métaux eſt fondée ſur le corollaire précédent, comme onl e verra ; c'eſt ce qui en fera la dé-

monstration : elle se trace à côté de celle Pl. 5.
des solides : elle contient six métaux, que
les chimistes désignent par des caracteres
comme il est ici marqué : savoir,

OR	☉	*le Soleil.*
PLOMB.	♄	*Saturne.*
ARGENT	☽	*la Lune.*
CUIVRE	♀	*Venus.*
FER.	♂	*Mars.*
ÉTAIN	♃	*Jupiter.*

Comme l'étain est le moins pesant des six métaux, il est clair que de tous les corps semblables que l'on feroit de ces différens métaux, celui d'étain auroit le plus grand volume, & par conséquent le plus grand diametre, s'ils sont supposés sphériques ; c'est pour cela qu'il est désigné au 64ᵉ solide : d'où l'on voit que son diametre est exprimé par la longueur d'une des branches du compas de proportion, & qu'il est de 1000 parties, ayant pour les solides divisé ainsi cette branche. Cela posé, il sera aisé en se servant des rapports spécifiques des cinq autres métaux à l'étain (que l'on a trouvé en pesant des volumes égaux de chacun de ces six métaux, conformément au N°. 1 du corollaire précédent, ainsi qu'ils sont ci-après marqués) & du cube de 1000 parties, diametre de l'étain qui en exprime le volume, de trouver les diametres des cinq autres métaux de même poids que celui d'étain, en agissant comme au N°. 3 du même corollaire. C'est ainsi que l'on a trouvé les diametres de ces métaux dans la table suivante:

MÉTAUX.			DIAMETRE
Poids d'un pied cube de chacun des six métaux.			En petites parties des corps de même poids faites des six métaux.
	liv.	*onc.*	
Or, . . .	1326.	4	*Or*, . . . 730
Plomb, . .	802.	2	*Plomb*, . 863
Argent, . .	720.	12	*Argent*, . 895
Cuivre, . .	627.	12	*Cuivre*, . 937
Fer, ...	558.	0	*Fer*, . . . 974
Étain, . . .	516.	2	*Etain*, . 1000

Si l'on veut éviter la peine de tirer la racine cube en cherchant les diametres des corps de même poids, il faudra au lieu de se servir comme on a fait (N°. 3 du corollaire précédent) du cube de 1000, se servir du 64ᵉ solide pour troisieme terme de la proportion, & dire 558 liv. est à 516 liv. 2 onces, comme 64 est à un quatrieme terme, qui sera le 59ᵉ solide avec un petit reste; ensuite chercher son diametre dans la table des solides qui est de 973 parties, au lieu duquel l'on prendra 974 à cause du petit reste. Pl. 1.

La démonstration de ceci paroîtra évidente si l'on fait attention que les solides 64 & 59 sont en même raison que le cube de 1000 avec le cube que l'on trouve, (par le N°. 3 du corol. ci-dessus) à cause que 1000 est le diametre du 64ᵉ solide.

Si l'on prend maintenant sur une échelle divisée en 1000 parties égales & de la longueur d'une des branches du compas de proportion, les longueurs des diametres marqués ci-dessus des six métaux, & que l'on les place, à compter du centre de la charniere, sur la ligne des métaux avec leur caractere, il est clair que cette ligne sera divisée comme elle doit l'être.

De la ligne qui contient le poids des boulets.

La ligne du poids des boulets se trace sur le compas de proportion comme on la voit marquée sur cette planche. Sa division se fait en l'ouvrant de trois pouces au point où se trouve marqué le 4ᵉ solide, l'expérience ayant fait connoître qu'un boulet de fer fondu de 3 pouces de diametre pese 4 livres. Les lignes du compas de proportion étant ainsi ouvertes, si l'on prend toutes les ouvertu-

Pl. 1. res des solides depuis 1 jusqu'à 64, & qu'on les place sur la ligne dont il s'agit, à compter toujours de l'une de ses extrêmités, & que l'on y marque pour la 1^{e}, la 2^{e}, la 3^{e} ouverture, & ainsi de suite, 1, 2, 3 livres, &c. cette ligne se trouvera divisée, à la réserve des parties de la livre que l'on y marquera en transportant (après avoir fermé le compas de proportion en sorte que l'ouverture du solide 4 soit égal au diametre du boulet d'une livre) l'ouverture du premier solide pour $\frac{1}{4}$ de livre, celle du second pour $\frac{1}{2}$, & celle du troisieme pour $\frac{3}{4}$.

De la ligne qui sert à connoître le calibre des pieces de canon.

Voici la maniere de tracer *la ligne du calibre des pieces.*

Si l'on ajoute aux divisions de la ligne du poids des boulets, pour le vent selon qu'ils sont plus pesans, une ligne à celle de 6 livres, 2 à celle de 12, & 3 ou 4 à celle de 24, &c. que l'on place toutes les longueurs de ces divisions ainsi augmentées sur la ligne du calibre des pieces, à compter de l'une de ses extrêmités, & que l'on y marque les chiffres 1, 2, 3 & 4, jusqu'à 64, elle se trouvera divisée.

La démonstration de la division de ces lignes sera évidente si l'on fait attention qu'ayant ouvert le compas de proportion

tion de 3 pouces au quatrieme ſolide, toutes les ouvertures que l'on a priſes ſont en même raiſon que les diametres des ſolides ; par conſéquent elles ſont auſſi des diametres de ſolides ou de boulets depuis 1 juſqu'à 64 ; & comme l'ouverture au quatrieme ſolide eſt le diametre d'un boulet de 4 livres, il s'enſuit que les autres ouvertures ſont des diametres de boulets de 5, 6, 7 livres, &c. Pl. 1.

L'on peut encore trouver, en faiſant une proportion, les diametres des boulets : par exemple, ſi l'on veut avoir celui de 32 livres, il faut dire : 4 livres eſt à 32 livres, comme 27 pouces cubes, diametre du boulet de 4 livres, eſt à un quatrieme terme, dont la racine cube, qui ſera de 6 pouces, donnera le diametre que l'on cherche ; ce qui eſt évident par le n°. 1 du corollaire précédent.

Preuve des diviſions du compas de proportion.

Parties égales.

Pour connoître premierement ſi la ligne des parties égales eſt bien diviſée, il n'y a qu'à y prendre avec un compas ordinaire un nombre tel que l'on voudra de ces parties égales, en commençant par où l'on jugera à propos, & porter l'ouverture du compas ainſi ouvert ſur la

Pl. I. même ligne des parties égales, en mettant une pointe du compas sur tel point de division que l'on voudra : car si cette ligne des parties égales est bien divisée, l'autre pointe du compas étant tournée de part & d'autre, tombera précisément sur un autre point de division, & les deux pointes du compas comprendront le même nombre de parties égales.

Cordes. On ne peut pas appliquer la même maniere aux divisions de la ligne des cordes, parce que ces divisions ne sont pas égales, étant plus serrées vers la fin que vers le commencement, c'est-à-dire, que vers le centre du compas de proportion, ce que la nature du cercle ne permet pas d'être autrement. Ainsi pour connoître si la ligne des cordes est bien divisée, faites ainsi.

Choisissez à volonté sur la ligne des cordes deux points également éloignés du point marqué 120, l'un au dessus, & l'autre au dessous ; par exemple, les deux points marqués 100 & 140, qui en sont éloignés chacun de 20 degrés, le premier par défaut, & le deuxieme par excès ; & prenez avec un compas commun la distance de ces deux points, laquelle, si la ligne des cordes est bien divisée, sera égale à la corde de 20 degrés, ou à la diſtance du point marqué 20 ſur la ligne des cordes au centre du compas de proportion. Pl. 1.

C'eſt de la même façon que l'on connoîtra que la diſtance des deux points marqués 150, 90, ſur la même ligne des cordes, eſt égale à la corde de 30 degrés, par leſquels 150 & 90 different de 120; & que pareillement la diſtance des deux points 155 & 85 eſt égale à la corde de 35 degrés, par leſquels 155 & 85 different de 120, ainſi des autres, juſqu'aux deux points marqués 180 & 60.

Cette pratique eſt fondée ſur un théorême que j'ai démontré ailleurs, ſçavoir, que *la différence des ſinus de deux arcs également éloignés de 60 degrés, eſt égale au ſinus de la différence entre l'un de ces deux arcs & 60 degrés*. D'où il ſuit, en doublant, que *la différence des cordes de deux arcs également éloignés de 120 degrés, eſt égale à la corde de la diſtance de l'un de ces deux arcs à 120 degrés.*

On peut par d'autres théorêmes examiner autrement la diviſion des cordes. Ainſi pour connoître ſi les cordes de 60, 80, 100, & 160 degrés, ſont bien marquées, on ſe ſervira de cet autre théorême qui nous apprend que *ces quatre cordes ſont proportionnelles*, parce que

Pl. 1. *les sinus de 30, 40, 50, & 80 degrés sont aussi proportionnels*, comme je l'ai démontré pareillement ailleurs.

Plans. Pour connoître si la ligne des plans est bien divisée, prenez avec un compas ordinaire la distance de quelque point que ce soit de cette ligne au centre du compas de proportion; & portez cette distance depuis le même point de division, de l'autre côté, sur la même ligne des plans; si la division en est juste, vous rencontrerez un nombre de plans quatre fois plus grand que celui qui a été pris auparavant depuis le centre: & si l'on porte encore une fois la même ouverture du compas, on tombera sur un nombre de plans neuf fois plus grand que celui qui a été pris au commencement, parce que les plans semblables sont en raison doublée de celle de leurs côtés homologues (*par* 20, 6).

Solides. De même, pour connoître si la ligne des solides est bien divisée, l'on doit avec un compas commun prendre la distance d'un point quelconque de division de cette ligne au centre du compas de proportion, & porter cette distance depuis le même point vers l'autre côté sur la meme ligne des solides; car si elle est bien divisée, l'on rencontrera un nombre de solides huit fois plus grand que celui qui aura été pris, parce que les solides semblables sont en raison triplée de celle de leurs côtés homologues. (*par* 33, 11). Pl. II

Enfin pour connoître si la ligne des polygones est bien divisée, l'on prendra sur cette ligne, avec un compas ordinaire, la distance du centre du compas de proportion au point marqué 6, qui appartient à l'exagone, dont l'angle du centre est de 60 degrés, & l'on portera cette distance ou rayon de l'exagone depuis le point marqué 60 sur une ligne des cordes, à l'autre point marqué 60 sur l'autre ligne des cordes, en ouvrant pour cela les deux jambes du compas de proportion de telle façon que la distance de ces deux points marqués 60 soit égale au rayon de l'exagone, c'est-à-dire, à la partie de la ligne des cordes entre le centre du compas de proportion & le point marqué 6. *Polygones.*

Le compas de proportion demeurant ainsi ouvert, prenez avec un compas commun sur chaque ligne des cordes la distance des deux points marqués 90, & la portez sur la ligne des polygones, en mettant une pointe du compas au centre du compas de proportion. Si cette ligne des polygones eſt bien diviſée, l'autre pointe du compas tombera préciſément ſur le point marqué 4, qui appartient au quarré, dont l'angle du centre eſt de 90 degrés, c'eſt-à-dire, que cette diſtance de 90 à 90 ſera égale au rayon du quarré.

De même prenez avec un compas commun ſur chaque ligne des cordes la diſtance des deux points marqués 72, & la portez ſur la ligne des polygones, en commençant depuis le centre du compas de proportion : car ſi cette ligne des polygones eſt bien diviſée, l'on rencontrera ſur la même ligne le point marqué 5, qui appartient au pentagone régulier, où l'angle du centre eſt de 72 degrés. Ainſi des autres.

CHAPITRE II.

Uſage de la ligne des parties égales.

LA ligne des parties égales ſert pour diviſer une ligne droite d'une grandeur donnée en parties égales, pour lui ajouter ou pour en retrancher telle partie que l'on voudra, pour tracer un plan ſur le papier, pour ſervir d'échelle à ce plan,

& y connoître la mesure de toutes ses parties par rapport à une ligne connue : ce qui est d'une très-grande utilité dans la fortification, où l'on peut connoître sans trigonométrie, & sans aucune échelle particuliere, la quantité d'une courtine, d'une face, d'un flanc, &c, le côté intérieur du polygone, ou bien la ligne de défense étant supposée d'une grandeur connue, laquelle est d'environ 120 toises dans un fort royal.

PROBLEME I.

Diviser une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra. Pl. II. fig. 1.

Pour diviser une ligne donnée en un nombre donné de parties égales, il en faut porter la longueur sur la ligne des parties égales du compas de proportion à un nombre, de part & d'autre, qui soit divisible par le nombre donné ; ensorte que le compas de proportion soit ouvert d'une telle maniere que la distance de ce nombre dans chaque ligne des parties égales soit égale à la ligne donnée. Après quoi, le compas de proportion demeurant ainsi ouvert, on prendra avec le compas commun de côté & d'autre sur la même ligne des parties égales la distance du nombre qui viendra en divisant, par le nombre donné, le nombre auquel on a appliqué la longueur de la ligne donnée sur les parties égales, & cette distance divisera la ligne donnée en autant de parties égales qu'il a été proposé.

Exemple.

Pl. 2. Fig. 1. Qu'il faille diviser, par exemple, en cinq parties égales la ligne donnée FG. Supposons que les deux lignes AB, AC, soient chacune la ligne des parties égales du compas de proportion, ensorte que A soit le centre, & les extrêmités B, C, les points 200; parce que ce nombre 200 est divisible par 5, il pourra servir pour la division de la ligne proposée FG en cinq parties égales, sçavoir en ouvrant le compas de proportion ensorte que la distance BC de 200 à 200 soit égale à la ligne proposée FG, & en prenant la distance DE de 40 à 40, qui est la cinquieme partie de 200; (car je suppose que la marque 40 est en D & en E) cette ouverture DE divisera la ligne proposée FG en cinq parties égales, comme il étoit proposé, c'est-à-dire, que la ligne DE sera la cinquieme partie de la ligne donnée FG ou de son égale BC.

Démonſtration.

Car, à cauſe que les deux triangles iſoſceles ABC, ADC, ſont ſemblables (par la 6 du 6), on connoît (par 4, 6) que les quatre lignes AD, AB, DE, BC, ſont proportionnelles. D'où il ſuit que comme AD eſt la cinquieme partie de AB, parce que AD eſt de 40 parties, & AB de 200, auſſi la ligne DE eſt la cinquieme partie de la ligne BC ou FG, ſon égale. *Ce qu'il falloit démontrer.* Pl. 2, Fig. 1.

Remarque.

Au lieu d'appliquer la longueur de la ligne donnée FG de 200 à 200, on l'auroit pu appliquer de 100 à 100, qui eſt un nombre diviſible par 5, & alors on auroit pris la diſtance de 20 à 20, qui eſt la cinquieme partie de 100, pour avoir auſſi la cinquieme partie de la ligne propoſée FG; mais il auroit fallu ouvrir davantage le compas de proportion, ce qui eſt moins commode dans la pratique. C'eſt pour cela que nous nous ſommes ſervi du nombre 200, lequel étant plus éloigné du centre A, ne demande pas une ſi grande ouverture du compas de proportion.

Pl. 2. Fig. 1. Si on ne peut pas appliquer ſur la ligne des parties égales la longueur de la ligne donnée FG, pour être trop grande, on en appliquera ſeulement la moitié, ou le tiers, pour en trouver la cinquieme partie, comme il a été enſeigné, & le double, ou le triple de cette partie ſera la cinquieme partie de toute la ligne propoſée FG. Il peut arriver d'autres cas, leſquels n'étant pas de grande conſéquence, ne méritent pas que nous en parlions ici davantage.

PROBLEME II.

Couper une ligne donnée ſelon une raiſon donnée. Pl. II. Fig. 2.

Pl. 2. Fig. 2. Appliquez la ligne donnée ſur la ligne des parties égales de part & d'autre, enſorte que le compas de proportion ſoit tellement ouvert que la diſtance du nombre égal à la ſomme des deux termes de la raiſon donnée, pris de côté & d'autre ſur la ligne des parties égales, ſoit égale à la ligne donnée; & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez avec le compas commun ſur chaque ligne des parties égales la diſtance du nombre égal à l'un des deux termes de la raiſon donnée, pour la porter enſuite ſur la ligne proposée depuis l'une de ses deux extrêmités, & cette ligne se trouvera coupée selon la raison donnée.

Exemple.

Qu'il faille diviser la ligne donnée FG en deux parties, dont la raison soit égale à celle des deux nombres donnés 50, 90. Supposons que les lignes AB, AC, soient chacune la ligne des parties égales du compas de proportion, que le centre soit A, que les deux points B, C, également éloignés du centre A, soient les points marqués 140, qui est la somme des deux termes 50, 90, de la raison donnée, & que les deux points D, E, aussi également éloignés du centre A, soient les points marqués 50, qui est l'un des deux nombres de la raison donnée. Ayant ouvert le compas de proportion ensorte que la distance BC, de 140 à 140, soit égale à la ligne donnée FG, prenez la distance DE de 50 à 50, & la portez sur la ligne donnée FG, depuis son extrêmité F en H, & les deux parties FH, GH, seront dans la raison des deux nombres donnés 50, 90. Pl. 2. Fig. 2.

Démonstration.

Pl. 2. Fig. 2. Car si l'on tire par le point D, à la ligne AC, la parallele DI, on aura CI égale à DE, & par conséquent à FH, parce que l'on a fait FH égale à DE; & à cause de BC égale à FG, par la construction, on aura BI égale à GH; & parce que AD est de 50 parties, & AB de 140, & par conséquent DB de 90, & que (par 2, 6) la raison des lignes CI, BI, est égale à celle des deux AD, DB, 50, 90, il s'ensuit que la raison des deux lignes FH, GH, égales aux deux CI, BI, est égale aussi à celle des deux nombres donnés 50, 90. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Si les deux nombres donnés sont trop petits, on les multipliera chacun par un même nombre tel qu'on voudra, pour avoir leurs équimultiples, lesquels étant en même raison que les deux nombres donnés, pourront servir pour la solution du problême, pourvu que leur somme ne soit pas plus grande que 200, parce que le plus grand nombre des parties égales ne passe pas 200.

On fera tout le contraire quand les

deux nombres donnés seront trop grands, c'est-à-dire qu'on les divisera chacun par un même nombre tel que l'on voudra, pour avoir deux autres nombres plus petits, dont on pourra se servir à la place des deux donnés, puisqu'ils seront dans la même raison, comme étant semblables parties aliquotes des deux nombres donnés.

Il est évident que s'il falloit couper la ligne FG en parties proportionnelles à plus que deux nombres donnés, il faudroit ajouter ensemble tous ces nombres donnés pour avoir leur somme, & travailler comme il vient d'être enseigné.

Si les deux termes de la raison donnée sont des fractions de diverse espece, on les réduira en d'autres fractions de même dénomination ; & en négligeant le dénominateur commun, on se servira des numérateurs à la place des fractions proposées.

Enfin si les deux termes de la raison donnée sont des nombres irrationnels, par exemple $\sqrt{5}$ & $\sqrt{3}$, on prendra par approximation les racines de ces deux nombres irrationnels, sçavoir, 223 & 173, qui serviront pour les deux termes de la raison donnée.

PROBLEME III.

Etant donné deux lignes & les parties égales de l'une, trouver les parties égales de l'autre. Pl. II. Fig. 3.

SI l'on applique la longueur de la ligne, dont les parties égales sont connues, de côté & d'autre au nombre de ces parties sur la ligne des parties égales du compas de proportion, & que l'on porte la longueur de l'autre ligne sur la même ligne de ses parties égales, sans changer l'ouverture du compas de proportion, ensorte que cette longueur s'accorde de part & d'autre à un même nombre; ce nombre sera celui des parties égales qu'on cherche.

Exemple.

Pl. 2. Que la ligne FG soit, par exemple, le
Fig. 3. côté intérieur d'un polygone fortifié, & que ce côté étant supposé de 120 parties égales ou de 120 toises, il faille trouver dans ces mêmes parties la quantité de la demi-gorge FH. Supposons, comme à l'ordinaire, que les lignes AB, AC soient chacune la ligne des parties égales du compas de proportion, que le centre soit A, & que les deux points B, C,

ſoient les points marqués 120. Ayant ouvert le compas de proportion, enſorte que la diſtance BC, de 120 à 120, ſoit égale à la ligne donnée FG, & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, portez avec le compas commun la longueur de l'autre ligne donnée FH, ſur la ligne des parties égales, en ſorte que cette longueur réponde de côté & d'autre en deux points également éloignés du centre A, c'eſt.à-dire d'un même nombre des parties égales, comme D, E; & ſi ce nombre ſe rencontre, par exemple, 26, c'eſt-à-dire, ſi chacune des deux lignes égales AD, AE, ſe trouve de 26 parties, on conclura que la ligne FH contient 26 parties ſemblables à celles dont FG en comprend 120. Pl. 2. Fig. 3.

Démonſtration.

Car dans les deux triangles iſoſceles ABC, ADE, on connoît (par 4, 6) que la raiſon des deux lignes, BC, DE, ou de leurs égales FG, FH, eſt égale à celle des deux AB, AD, ou des deux nombres 120, 26. C'eſt pourquoi la ligne FG étant de 120 parties égales, il eſt de néceſſité que la ligne FH contienne 26 de ces mêmes parties. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Pl. 2. Fig. 3. On pourra connoître de la même façon la quantité d'une face, d'un flanc, d'une courtine, & de toutes les autres lignes d'un polygone fortifié. Mais si la ligne FG, se trouve trop grande pour pouvoir être appliquée sur sa ligne des parties égales, on se servira de sa moitié, ou de son tiers, en prenant pareillement la moitié ou le tiers du nombre de la ligne DE, pour la ligne FH. Et si le nombre des parties supposées de la ligne FG est trop grand, on se servira aussi de la moitié ou du tiers de ce nombre, après quoi on prendra le double ou le triple du nombre des parties égales que l'on trouvera pour la ligne FH, pour avoir en ce double ou ce triple le véritable nombre des parties égales de la même ligne FH.

PROBLEME IV.

Etant donné une ligne, & le nombre des parties égales qu'elle contient, en retrancher tel nombre que l'on voudra de ces parties. Pl. II. fig. 3.

Ayant appliqué la longueur de la ligne donnée de côté & d'autre au nombre

nombre des parties égales qu'elle contient, ſur la ligne des parties égales du compas de proportion, portez la diſtance du nombre des parties égales qu'on veut retrancher, priſe de part & d'autre ſur la même ligne des parties égales du compas de proportion ainſi ouvert, ſur la ligne propoſée depuis l'une de ſes extrêmités vers l'autre extrêmité, & le problême ſera reſolu.

Exemple.

Reprenons la figure précédente, & qu'il faille retrancher du côté intérieur FG, que nous ſuppoſons de 120 toiſes, la ligne FH de 26 toiſes, telle que doit être la demi-gorge dans l'exagone, ſelon notre méthode nouvelle de fortifier, qui convient parfaitement bien aux meilleures maximes de la fortification. Appliquez la ligne donnée FG ſur chaque ligne des parties égales AB, AC, du compas de proportion, de 120 à 120, en ſorte que la diſtance BC de 120 à 120 ſoit égale à la ligne propoſée FG; & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, portez la diſtance DE de 26 à 26 ſur la ligne donnée FG, depuis ſon extrêmité F en H, & la ligne FH ſera de 26 parties égales, dont la Pl. 2. Fig. 3.

ligne FG en comprend 120 ; la démonſtration eſt tout-à-fait la même que celle du problême précédent.

Remarque.

Vous voyez, par la pratique de ce problême & du précédent, que la ligne des parties égales du compas de proportion peut très-commodément ſervir d'échelle pour quelque plan que ce ſoit, pourvu que l'on ſçache la quantité d'un de ſes côtés, & que l'on peut aiſément tracer un plan ſur le papier, & le réduire en un volume plus grand ou plus petit de la maniere que l'on voudra. Cela eſt trop clair pour en parler davantage.

Je dirai ſeulement que ſi la ligne FG eſt trop grande, on ſe ſervira de ſa moitiés ou de ſon tiers, & on prendra le double ou le triple du nombre donné pour la ligne FH ; & que ſi le nombre des parties ſuppoſées de la ligne FG eſt trop grand, on ſe ſervira auſſi de la moitié ou du tiers de ce nombre, en prenant pareillement la moitié ou le tiers du nombre donné pour la ligne FH.

PROBLEME V.

Trouver une ligne égale à la circonférence d'un cercle donné.

Puiſque le diametre d'un cercle eſt à ſa circonférence environ comme 100 eſt à 314, ou comme 50 eſt à 157, comme nous l'avons démontré dans notre *Géométrie pratique*, il s'enſuit que ſi on applique le diametre du cercle donné de 50 à 50, ſur la ligne des parties égales du compas de proportion, & que le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, on prenne ſur la même ligne des parties égales la diſtance de 157 à 157, on aura la longueur de la circonférence qu'on cherche.

Remarque.

Si on ne peut pas ouvrir commodément le compas de proportion, en portant la longeur du diametre du cercle donné de 50 à 50, pour être trop grande, on le portera de 100 à 100, & alors la diſtance de 157 à 157 donnera ſeulement la moitié de la circonférence du cercle propoſé.

Si tout au contraire, en connoiſſant la circonférence d'un cercle, on vouloit trouver ſon diametre, il faudroit appliquer la longueur de cette circonférence de 157 à 137 ſur la ligne des parties égales du compas de proportion, & prendre la diſtance de 50 à 50 ſur la même ligne des parties égales du compas de proportion ainſi ouvert, pour avoir le diametre qu'on cherche.

PROBLEME VI.

Ouvrir le compas de proportion enſorte que l'angle des deux lignes des parties égales ſoit droit.

Formez de deux nombres quelconques, comme de 6, 12, ce triangle 180, 144, 108, & ayant pris ſur la ligne des parties égales depuis le centre du compas de proportion 180 parties, appliquez cette longueur ſur la même ligne des parties égales, de part & d'autre, de 108 à 144, & le compas de proportion ſe trouvera ouvert à un angle de 90 degrés, à l'égard de la ligne des parties égales (comme il eſt évident par 47. 1.)

Remarque.

Si les nombres du triangle rectangle ſont trop petits, on ſe ſervira de leur double ou de leur triple, comme il faudroit se servir de leur moitié ou de leur tiers, s'ils étoient trop grands : mais pour empêcher que cela arrive, il faut que les deux nombres générateurs soient tels que la somme de leurs quarrés ne passe pas 200, parce que la ligne des parties égales ne contient pas plus de 200 parties.

Pour former un triangle rectangle de deux nombres donnés, on prendra la somme de leurs quarrés pour l'hypoténuse, la différence des mêmes quarrés pour un côté, & le double du produit de ces deux mêmes nombres pour l'autre côté.

Ce problême se peut proposer & résoudre plus généralement, en faisant que l'angle des deux lignes des parties égales soit égal à un angle donné, en cette sorte.

Ayant pris depuis le centre du compas de proportion, sur la ligne des parties égales, le nombre des parties que contient le sinus de la moitié de l'angle proposé pour un sinus total de 200 parties; appliquez cette longueur sur la même ligne des parties égales, de côté & d'autre, toujours de 100 à 100, & les deux lignes des parties égales feront un angle égal au proposé.

Lorſque les deux lignes des parties égales font un angle droit, cela peut ſervir pour ajouter enſemble deux quarrés, ou bien deux autres plans ſemblables entre eux, par une méthode qui eſt tout-à-fait ſemblable à celle que nous enſeignerons au IV^e problême du chapitre troiſieme.

PROBLEME VII.

A trois lignes données trouver une quatrieme proportionnelle. Pl. II. Fig. 4.

Ayant porté la longueur des deux premieres lignes données, chacune ſur la ligne des parties égales du compas de proportion, qu'il ne ſera pas néceſſaire d'ouvrir, parce que cette tranſpoſition ſe doit faire depuis le centre; pour ſçavoir combien chacune de ces deux lignes contient de parties égales, écrivez ſur chacune le nombre des parties égales qu'elle comprendra, pour vous en ſouvenir; & ayant appliqué la longueur de la troiſieme ligne donnée de part & d'autre ſur la ligne des parties égales du compas de proportion, à un nombre égal à celui des parties égales de la premiere ligne donnée; & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez ſur la même ligne des parties égales la diſtance de côté & d'autre du nombre égal à celui des parties égales de la ſeconde ligne donnée, & cette diſtance donnera la longueur de la quatrieme ligne proportionnelle qu'on cherche.

Exemple.

Comme s'il faut trouver aux trois lignes données HI, KL, MN, une quatrieme proportionnelle, en portant la longueur HI de la premiere ligne donnée ſur la ligne AB, ou AC, des parties égales du compas de proportion, depuis le centre A en D ou en E, on trouve que ce point D ou E eſt 15, par exemple, on marquera 15 ſur la ligne HI; & pareillement en portant la longueur de la ſeconde ligne donnée KL ſur la même ligne AB ou AC des parties égales, depuis le centre A en B ou en C, on trouve que ce point B ou C eſt par exemple 20, on écrira 20 ſur la ſeconde ligne KL. Après cela ouvrez le compas de proportion, enſorte que la diſtance DE, de 15 à 15 ſur la ligne des parties égales, ſoit égale à la troiſieme ligne donnée MN, & alors la diſtance BC de 20 à 20 ſera la quatrieme proportionnelle

Pl. 2. Fig. 4.

Pl. 2. Fig. 4. qu'on cherche, c'eſt-à-dire que les quatre lignes HI, KL, MN, BC feront proportionnelles.

Démonſtration.

Car on connoît (par la 4 du 6), dans les deux triangles iſoſceles ſemblables ABC, ADE, que les quatre lignes AD, AB, DE, BC, ſont proportionnelles ; & parce que les trois premieres AD, AB, DE, ſont égales aux trois données HI, KL, MN, il eſt de néceſſité que les quatre lignes HI, KL, MN, BC, ſoient auſſi proportionnelles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Il eſt évident (par la 16 du 5) qu'on peut prendre la troiſieme ligne donnée MN pour la ſeconde KL, & celle-ci pour celle-là, ce qui peut en quelque rencontre faciliter la pratique de ce problême.

Si les deux premieres lignes données ſont plus longues que le compas de proportion, on en portera la longueur ſur une échelle plus grande, diviſée exactement en parties égales, pour pouvoir connoître le nombre des parties égales qu'elles contiennent, ou bien on pourra

en

en leur place porter ſur la ligne des parties égales du compas de proportion leurs moitiés ou leurs tiers, pour avoir le nombre de leurs parties égales, qui ſera pris pour celui des deux lignes propoſées; parce qu'ainſi on trouvera toujours la même ligne quatrieme proportionnelle (comme il eſt évident par 11, 5).

Si la troiſieme ligne donnée eſt auſſi trop grande pour pouvoir être appliquée ſur le compas de proportion, on en appliquera ſeulement la moitié ou le tiers, & alors le double ou le triple de la quatrieme proportionnelle qu'on trouvera, ſera la quatrieme ligne proportionnelle qu'on cherche, ou bien on ſe ſervira de la moitié ou du tiers de la premiere & de cette troiſieme, & la quatrieme proportionnelle qu'on trouvera ſera celle qu'on cherche.

Corollaire.

Par le moyen de ce problême, on peut aiſément trouver à deux lignes données une troiſieme proportionnelle, ſavoir en ajoutant aux deux lignes données une troiſieme égale à la deuxieme, & en cherchant à ces trois lignes une quatrieme proportionnelle, comme il vient d'être enſeigné.

On pourra auſſi facilement trouver à

trois figures ſemblables données une quatrieme figure ſemblable proportionnelle, ſavoir en cherchant aux côtés homologues des trois figures données une quatrieme ligne proportionnelle, qui ſera le côté homologue de la figure qu'on cherche, & pareillement à trois cercles donnés, ou à trois ſpheres données, un quatrieme cercle ou une quatrieme ſphere proportionnelle, ſavoir en cherchant à leurs trois diametres un quatrieme diametre proportionnel.

Enfin on peut aiſément ſur une ligne donnée décrire un plan ſemblable à un plan donné, augmenter ou diminuer une ligne donnée, ſelon une raiſon donnée, & réſoudre pluſieurs autres problêmes dont la conſtruction ſera facile à inventer à celui qui aura bien compris la théorie & la pratique de ce problême & des précédens.

Or comme les lignes proportionnelles ſont d'un fréquent uſage dans la géométrie, j'enſeignerai ici en paſſant une maniere prompte & facile pour les trouver géométriquement.

PROBLEME VIII.

Trouver géométriquement à deux lignes données une troisieme proportionnelle, & à trois, une quatrieme. Pl. II. fig. 5 & 6.

Premierement pour trouver aux deux lignes données AC, AD une troisieme proportionnelle, inscrivez dans le demi-cercle ABF, décrit de l'extrêmité C, par l'autre extrêmité A, de la premiere ligne donnée AC, la droite AB, égale à l'autre ligne donnée AD, & décrivez du centre B, par la même extrêmité A, une circonférence de cercle AEG, qui rencontre ici la premiere ligne donnée AC, prolongée au point E, & termine la ligne AE, qui sera troisieme proportionnelle aux deux données AC, AD. Pl. II. Fig. 5.

Démonstration.

Car si on prolonge l'arc AE jusqu'à ce qu'il coupe la ligne AB, prolongée en G, & qu'on tire les droites EG, BF, on aura dans les deux triangles rectangles semblables ABF, AEG, cette analogie, AF, AG :: AB, AE; & si à la place des deux premiers termes AF, AG, on met leurs moitiés AC, AB, on aura celle-ci, AC, AB :: AB, AE, où l'on voit qu'à cause de AB, égale à AD, par la construction, la ligne AE est troisieme proportionnelle aux deux données AC, AD, *ce qu'il falloit démontrer.*

Si la seconde ligne donnée AD, se trouve trop grande pour pouvoir être inscrite dans le demi-cercle ABF, on n'y inscrira que sa moitié ou que son tiers, & alors le double ou le triple de la ligne AE sera la troisieme proportionnelle qu'on cherche.

Pl. II. fig. 6. Secondement, pour trouver une quatrieme proportionnelle aux trois lignes données AB, AC, AD, qui doivent être mises d'un même côté en ligne droite & partir d'un même point, tel qu'est ici le point A, décrivez par ce point commun A, des extrêmités B, C, de la premiere & de la seconde ligne donnée AB, AC, les deux arcs AEG, AFH, & inscrivez dans le premier AEC, la droite AE, égale à la troisieme ligne donnée AD, & cette ligne AE étant prolongée jusqu'à la circonférence du second arc AFH, donnera la longueur AF de la quatrieme ligne proportionnelle qu'on cherche, de sorte que les quatre lignes AB, AC, AD, AF, seront proportionnelles.

Démonſtration.

Car ſi on acheve les demi-cercles AEG, AFH, & qu'on tire les droites EG, FH, on aura dans les deux triangles rectangles ſemblables AEG, AFH, cette analogie, AG, AH :: AE, AF; & ſi à la place des deux premiers termes AG, AH, on met leurs moitiés AB, AC; & au lieu de la ligne AE, ſon égale AD, on aura cette autre analogie AB, AC :: AD, AF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Si la troiſieme ligne donnée AD eſt trop grande pour pouvoir être inſcrite dans le premier demi-cercle AEG, il y faut inſcrire la ſeconde AC, ſi elle eſt plus petite; & au lieu de décrire le ſecond demi-cercle AFH du centre C, on le décrira du centre D: car ainſi on trouvera toujours la même quatrieme proportionnelle AF, parce que (par 11, 5) il eſt permis de changer de place aux deux dernieres lignes données AC, AD.

Ou bien n'inſcrivez dans le premier demi-cercle AEG, que la moitié ou que le tiers de la ligne trop grande AD, & alors la moitié ou le tiers de la ligne AF, terminée par le ſecond demi-cercle AFH, décrit du centre C, ſera la quatrieme proportionnelle qu'on cherche.

On pourra, par le même principe, trouver à deux lignes données une troiſieme proportionnelle, en ajoutant aux deux lignes données une troiſieme égale à la ſeconde, comme nous avons déja dit ailleurs.

Mais on peut auſſi, par le même principe, diviſer une ligne donnée en autant de parties égales que l'on voudra, comme vous allez voir.

PROBLEME IX.

Diviſer une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra. Pl. II, fig. 7.

Pl. II. fig. 7. Parcourez ſur la ligne indéfinie AF cinq parties égales d'une grandeur volontaire, aux points A, B, C, D, E, F, ſi vous voulez diviſer la ligne donnée en cinq parties égales, & décrivez des centres B, C, D, E, F, par le même point A, autant de circonférences de cercle. Après cela appliquez la ligne donnée ſur le plus grand cercle, en commençant depuis A, laquelle, par exemple, ſoit AG, & cette ligne AG ſe trouvera diviſée par les autres circonférences de cercle en cinq parties égales aux points H, I, K, L, comme il eſt aiſé à démontrer.

Démonſtration.

Car imaginant avoir tiré les lignes droites LC & KE, on aura deux triangles rectangles en L & en K, leurs angles étant renfermés dans les demi-cercles ALC & AKE, & étant clair que les demi-circonférences AL & AK paſſeront la premiere par C, & la ſeconde par E : de plus ces deux triangles ſont ſemblables, ayant l'angle A commun ; ainſi AC, AE : : AL, AK ; & AB, AC : : AC, AE, étant les moitiés : donc AB, AC : : AL, AK. Donc les lignes droites que l'on imaginera tirées de L en B & de K en C, &c. ſeront paralleles, & par conſéquent la ligne AG donnée ſera diviſée en même nombre de parties égales que AF.

CHAPITRE III.

Uſage de la ligne des plans.

La ligne des plans ſert pour trouver avec facilité un plan multiple ou ſous-multiple d'un plan ſemblable donné; augmenter ou diminuer un plan ſelon une raiſon donnée; pour trouver entre deux lignes données une moyenne proportionnelle, & pour réſoudre pluſieurs autres problêmes de géométrie, entre leſquels nous choiſirons ici ſeulement ceux qui ſont les plus néceſſaires, & qui ſe rencontrent le plus dans la pratique, parce que les autres étant d'une théorie plus profonde & d'une pratique moins ordinaire, doivent être réſolus d'une maniere auſſi plus géométrique & plus ſcientifique.

PROBLEME I.

Etant donné un triangle, trouver un autre triangle ſemblable en raiſon donnée. Pl. III, fig. 8.

Appliquez la longueur d'un côté du triangle donné ſur la ligne des plans du compas de proportion, à un nombre égal de part & d'autre au premier terme de la raiſon donnée; & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez ſur la même ligne des plans la diſtance de côté & d'autre du nombre égal au ſecond terme de la raiſon donnée, pour voir la longueur du côté homologue du triangle qu'on cherche. C'eſt de la même façon que l'on trouvera les côtés homologues aux deux autres côtés du triangle proposé.

Exemple.

Soit donné le triangle FGH, & qu'il lui faille trouver un autre triangle ſemblable, enſorte que le triangle FGH ſoit à celui qu'on cherche, par exemple, comme 3 à 4. Pl. III, fig. 8.

Suppoſons que les lignes AB, AC, ſoient chacune la ligne des plans du compas de proportion, que le centre ſoit A, que les points marqués 4, ou du quatrieme plan, ſoient B, C, & que les points marqués 3, ou du troiſieme plan, ſoient D, E. Pour trouver le côté homologue à l'un des côtés du triangle donné FGH, comme au côté FG, portez la longueur de ce côté FG ſur la ligne des plans AB, AC, de côté & d'autre de 3 à 3, enſorte que la diſtance DE de 3 à 3 ſoit égale au même côté FG; alors la diſtance BC de 4 à 4, ſera le côté IK homologue au côté FG. On trouvera de la même façon le côté IL homologue au côté FH, & le côté KL homologue au côté GH, & le triangle IKL ſera celui qu'on cherche, c'eſt-à-dire qu'il ſera ſemblable au triangle donné FGH, & que ce triangle FGH ſera au triangle IKL, comme 3 à 4.

Démonſtration.

Car dans les deux triangles iſoſceles ſemblables, ABC, ADE, on connoît (par 4, 6) que les quatre lignes DE, BC, AD, AB, ſont proportionnelles, & (par 22, 6) que leurs quarrés ſont auſſi proportionnels; & parce que les deux quarrés AD, AB, ſont entre eux comme 3 à 4 (par la conſtruction de la ligne des plans) les deux quarrés DE, BC, ou FG, IK, feront auſſi entre eux comme 3 à 4; & l'on connoîtra de la même façon que les deux quarrés FH, IL, ſont auſſi dans la raiſon de 3 à 4, auſſi bien que les deux GH, KL; d'où il ſuit (par 11, 5) que les trois quarrés FG, FH, GH, ſont proportionnels aux trois quarrés IK, IL, KL, & (par 22, 6) que les trois côtés du triangle FGH ſont proportionnels aux trois côtés du triangle IKL. C'eſt pourquoi (par 5, 6) ces deux triangles feront ſemblables, & (par 19, 6) le triangle FGH ſera au triangle IKL, comme 3 à 4: *ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Si les deux termes de la raiſon donnée ſont trop grands, on prendra leurs ſou-multiples, en les diviſant chacun par un même nombre tel que l'on voudra ; & s'ils ſont trop petits, on prendra leurs multiples, en les multipliant chacun par un même nombre tel que l'on voudra, pourvu que le plus grand nombre qui viendra ne ſurpaſſe pas 64, parce que dans le compas de proportion le plus grand plan n'eſt que 64.

Si les deux termes de la raiſon donnée ont leurs racines quarrées préciſes, on ſe ſervira de ces racines quarrées ; mais au lieu de travailler ſur la ligne des plans, on travaillera ſur la ligne des parties égales : car ainſi les côtés homologues des deux triangles ſemblables ſeront dans la raiſon de ces racines quarrées, & (par 19, 6) les deux triangles ſeront dans la raiſon des deux nombres donnés.

Enfin ſi les deux termes de la raiſon donnée ſont des fractions de différente eſpece, on les réduira en deux autres fractions de même dénomination ; & en négligeant le dénominateur commun, on ſe ſervira des deux numérateurs à la place des deux fractions propoſées, pour travailler ſur la ligne des plans, comme il a été enſeigné.

Corollaire.

On pourra de la même façon à un cercle donné trouver un autre cercle en raiſon donnée, en travaillant par le diametre du cercle donné pour avoir le diametre du cercle qu'on cherche; & pareillement à un polygone donné trouver un autre polygone ſemblable en raiſon donnée, en réduiſant le polygone donné en triangles par une ou pluſieurs diagonales, & en cherchant autant de triangles ſemblables dans la raiſon donnée, leſquels étant joints enſemble donneront le polygone qu'on cherche.

Ainſi vous voyez qu'on peut, à l'aide de ce problême, augmenter & diminuer un polygone donné, ou un cercle donné, ſelon une raiſon donnée, parce que cette raiſon peut être de plus grande ou de moindre inégalité.

PROBLEME II.

Trouver la raiſon de deux plans ſemblables donnés. Pl. III, fig. 8.

Portez la longueur d'un des côtés du plus petit des polygones donnés ſur la ligne des plans du compas de proportion à un même nombre de part & d'autre, tel que l'on voudra; & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, portez ſur la même ligne des plans la longueur du côté homologue de l'autre plan donné, pour voir à quel nombre égal de côté & d'autre cette longueur répond : & ce ſecond nombre avec le premier auquel répond le côté homologue du premier plan donné, ſeront les deux termes de la raiſon qu'on cherche.

Exemple.

Reprenons la figure précédente, & qu'il faille trouver la raiſon des deux triangles ſemblables donnés FGH, IKL. Suppoſons que les deux lignes AB, AC, ſoient chacune la ligne des plans du compas de proportion, & que le centre ſoit A. Ayant porté la longueur du côté FG de côté & d'autre ſur la ligne des plans au nombre 3, par exemple, enſorte que la diſtance DE, de 3 à 3, ſoit égale au côté FG, laiſſez le compas de proportion ainſi ouvert, & portez la longueur du côté IK, homologue au côté FG ſur la même ligne des plans, à un même nombre de part & d'autre, comme de B en C, ou ſoit, par exemple, le nombre 4. Cela étant, je dis que Pl. III, fig. 8.

le plan FGH eſt au plan IKL, comme 3 à 4, dont la démonſtration eſt tout-à-fait la même que celle du problême précédent.

Remarque.

Si le côté du plus grand plan donné eſt trop grand pour pouvoir être appliqué ſur le compas de proportion, qui ſeroit trop peu ouvert, il faut porter la longueur du côté du plus petit plan donné ſur un même nombre de la ligne des plans, le plus proche du centre qu'il ſera poſſible, afin que le compas de proportion étant ainſi plus ouvert, on puiſſe y porter la longueur du côté homologue du plus grand plan donné.

Mais ſi le côté du plus petit plan donné ſe trouve trop grand pour pouvoir être appliqué ſur la ligne des plans à un même nombre de part & d'autre, comme nous avons dit, il le faudra porter depuis le centre ſur la même ligne des plans, & auſſi le côté homologue du plus grand plan donné, pour avoir les deux nombres des côtés homologues des deux plans donnés, & ces deux nombres en exprimeront la raiſon.

Que ſi ces deux côtés homologues ſe trouvent encore trop grands, on ſe ſervira de leurs moitiés ou de leurs tiers : & pour ne pas tomber dans cette difficulté, si l'on peut, on se servira dans chaque plan donné des deux plus petits côtés homologues, lorsque les deux plans donnés seront irréguliers.

Ce problême se peut aussi résoudre assez facilement par le moyen de la ligne des parties égales du compas de proportion, savoir en cherchant à deux côtés homologues des deux plans donnés une troisieme ligne proportionnelle, comme il a été enseigné au *problême VI* du chapitre précédent : parce que (par la 20 du 6) les nombres des parties égales que contiendront la premiere & la troisieme proportionnelle, seront les deux termes de la raison qu'on cherche.

Corollaire.

Comme les cercles sont dans la raison des quarrés de leurs diametres (par 2, 12) on voit aisément que l'on peut, par le moyen de ce problême, trouver avec la même facilité la raison de deux cercles donnés, en se servant de leurs diametres, comme de deux côtés homologues, &c.

PROBLEME III.

Ouvrir le compas de proportion enſorte que les deux lignes des plans faſſent un angle droit. Pl. III, fig. 9.

Ayant pris avec le compas commun ſur la ligne des plans, depuis le centre du compas de proportion, la longueur d'un nombre de plans tel que l'on voudra, appliquez cette longueur ſur la même ligne des plans, de part & d'autre, à un même nombre égal à la moitié du précédent, & alors les deux lignes des plans feront au centre un angle droit.

Exemple.

Pl. III, fig. 9. Suppoſons que les lignes AB, AC, ſoient chacune la ligne des plans du compas de proportion, dont le centre ſera par conſéquent en A. Suppoſons encore que les points B, C, ſoient chacun les points du 32^{e} plan, par exemple, & que les points D, E, ſoient chacun le point du 16^{e} plan, moitié du premier 32. Je dis que ſi vous ouvrez le compas de proportion, enſorte que la diſtance DE de 16 à 16 ſoit égale à AB ou à AC, l'angle A ſera droit.

Démonſtration.

Démonstration.

Car puisque AB ou DE est 32, & que AD est 16, moitié de 32, le quarré DE sera, par la construction de la ligne des plans, double du quarré AD ou AE, & par conséquent égal aux deux quarrés AD, AE; d'où il suit (par 48, 1) que l'angle A est droit: *ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

Il suit évidemment de la pratique de ce problême, que si la ligne DE est plus grande en puissance que le double de la ligne AD, c'est-à-dire que si le plan AB, égal à DE, est plus grand que le double du plan AD, l'angle A sera obtus: & aigu, si le plan AB est moindre que le double du plan AD.

PROBLEME IV.

Trouver un plan semblable & égal à deux plans semblables donnés, Pl. III, fig. 10.

Ayant porté deux côtés homologues tels que l'on voudra des deux plans donnés sur la ligne des plans du compas de proportion, en commençant depuis le centre, pour connoître le nombre des plans de chacun, & ayant ouvert le compas de proportion à angle droit, par le problême précédent, la diſtance des deux nombres trouvés, priſe de côté & d'autre ſur la ligne des plans, donnera le côté homologue d'un plan ſemblable & égal aux deux donnés.

Exemple.

Pl. III, fig. 10. Qu'il faille trouver le côté homologue d'un plan ſemblable & égal à deux plans ſemblables donnés, dont deux côtés homologues ſont les lignes DE, FG. Suppoſons que les lignes AB, AC ſoient chacune la ligne des plans du compas de proportion dont le centre eſt A, que le côté DE étant porté ſur la ligne des plans AB depuis le centre A en B, ce point B ſoit le 4^{e} plan, & que l'autre côté FG étant pareillement porté ſur l'autre ligne des plans AC, depuis le centre A en C, que ce point C ſoit le 9^{e} plan. Cela étant ſuppoſé, le compas de proportion étant ouvert à angle droit, enſorte que l'angle A ſoit droit, la diſtance BC de 4 à 9, priſe de côté & d'autre ſur la ligne des plans, ſera le côté homologue d'un plan ſemblable & égal aux deux donnés, dont DE, FG ſont deux côtés homologues.

Démonstration.

Car (par la 47 du 1) le quarré BC étant égal aux deux quarrés AB, AC, ou DE, FG, la ligne BC sera (par 31 6) le côté homologue d'un plan semblable & égal aux deux donnés, dont DE, FG sont deux côtés homologues: *ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Si les côtés DE, FG ne peuvent pas être portés sur la ligne des plans, pour être trop grands, on en portera seulement la moitié ou le tiers; & alors le double ou le triple de la distance BC sera le côté homologue qu'on cherche.

Ce problême se peut aussi résoudre sans qu'il soit besoin d'ouvrir à angle droit le compas de proportion, comme vous le verrez au problême IV du sixieme chapitre, dans la méthode que nous enseignerons pour ajouter ensemble deux solides semblables, par le moyen de la ligne des solides; cette méthode étant la même pour les plans, excepté qu'on doit se servir de la ligne des plans.

Corollaire.

Par le moyen de ce problême, on peut

ſe flatter de ſçavoir la maniere d'ajouter enſemble autant de plans ſemblables que l'on voudra, en ajoutant enſemble les deux premiers, & ajoutant à la ſomme le troiſieme, & ainſi enſuite; comme auſſi de trouver un plan ſemblable égal à la différence d'un plan avec un ou pluſieurs autres qui lui ſont ſemblables.

On peut auſſi facilement trouver un cercle égal à pluſieurs cercles donnés, en travaillant par leurs diametres, conſidérés comme les côtés homolgues d'autant de plans ſemblables.

PROBLEME V.

Entre deux lignes données trouver une moyenne proportionnelle. Pl. III, fig 11.

Ayant porté chacune des deux lignes données ſur la ligne des parties égales du compas de proportion, ou ſur quelqu'autre ligne diviſée en parties égales, pour ſavoir le nombre des parties égales que chacune contient, appliquez la longueur de la plus grande ligne donnée de part & d'autre ſur la ligne des plans du compas de proportion, à un nombre égal à celui de ſes parties égales; & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez ſur la même ligne des plans, de côté & d'autre la diſtance du nombre égal à celui des parties égales de la plus petite des deux lignes données, pour avoir la moyenne proportionnelle qu'on cherche.

Exemple.

Qu'il faille trouver une moyenne proportionnelle entre les deux lignes données FG, HI, dont la plus petite FG contienne, par exemple, 20 parties égales, & la plus grande HI en contienne 45. Suppoſons que les lignes AB, AC ſoient chacune la ligne des plans du compas de proportion, dont le centre eſt A : que les points B, C ſoient chacun le 45ᵉ plan, & les points D, E chacun le 20ᵉ plan. Appliquez la longueur de la plus grande ligne donnée HI ſur la ligne des plans, de part & d'autre, aux points B, C, enſorte que la diſtance BC, de 45 à 45, ſoit égale à la plus grande ligne donnée HI, & alors le diſtance DE, de 20 à 20, ſera moyenne proportionnelle entre les deux lignes données FG, HI. Pl. II, fig. 11.

Démonſtration.

Car dans les triangles iſoſceles ſemblables ABC, ADE, on a (par 4, 6) cette analogie, AB, AD :: BC, DE; ou AB, AD :: HI, DE, à cause de BC égale à HI, par la construction; c'est pourquoi (par 22, 6) on aura celle-ci $\overline{AB}^2$, $\overline{AD}^2$ :: $\overline{HI}^2$, $\overline{DE}^2$; & si à la place des deux premiers termes $\overline{AB}^2$, $\overline{AD}^2$, on met les deux nombres 45, 20, qui sont en même raison, par la construction de la ligne des plans : ou bien si à la place de deux nombres 45, 20, on met les deux lignes HI, FG qui sont aussi en même raison, on aura cette autre analogie HI, FG :: $\overline{HI}^2$, $\overline{DE}^2$; & enfin si aux deux premiers termes HI, FG on donne la hauteur commune HI, on aura cette analogie $\overline{HI}^2$, FG + HI :: $\overline{HI}^2$, $\overline{DE}^2$; où l'on voit que le rectangle FG + HI est égal au quarré DE, parce que les antécédens étant égaux, les conséquens FG + HI & $\overline{DE}^2$, le seront aussi, & que (par 17, 6) la ligne DE est moyenne proportionnelle entre les deux lignes données FG, HI, *ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Si les nombres des parties égales des deux lignes données ſont trop grands, on ſe ſervira de leurs moitiés ou de leurs tiers, comme il faudroit ſe ſervir des doubles ou des triples des deux mêmes nombres, s'ils étoient trop petits.

Ce problême ſe peut auſſi réſoudre par le moyen de la ligne des parties égales; mais comme la ſolution en eſt plus longue, nous n'en parlerons pas davantage.

Corollaire.

Par le moyen de ce problême, on peut aiſément réduire un plan en quarré, comme par exemple un cercle, en cherchant entre ſon rayon & la moitié de ſa circonférence une moyenne proportionnelle: un triangle, en cherchant entre un de ſes côtés & la moitié de ſa perpendiculaire une moyenne proportionnelle, & telle autre figure plane que l'on voudra, parce qu'on la peut aiſément réduire en triangle.

On peut auſſi facilement trouver une figure ſemblable & égale à la différence de deux plans ſemblables donnés, ſçavoir en cherchant entre la ſomme & la différence des deux côtés homologues quelconques, une moyenne proportionnelle, qui ſera le côté homologue de la figure qu'on cherche, &c.

Or comme l'uſage d'une moyenne proportionnelle eſt très-conſidérable dans la géométrie, nous ajouterons ici, pour ceux qui aiment la ſpéculation des mathématiques, une méthode curieuſe pour la trouver géométriquement.

PROBLEME VI.

Trouver géométriquement entre deux lignes données une moyenne proportionnelle. Pl. III, fig. 12.

Que les deux lignes données ſoient AB, AC que je ſuppoſe placées en ligne droite, l'une ſur l'autre, & tirées du même point A, pour avoir une conſtruction plus facile, telle qu'eſt la ſuivante.

Ayant prolongé la plus grande ligne donnée AC en E, enſorte que la ligne CE ſoit égale à la plus petite ligne donnée AB, & ayant tiré à la ligne AB, par ſon extrêmité B, la perpendiculaire BF égale à la même ligne AB, inſcrivez dans un demi-cercle décrit alentour de la ligne AE la ligne EG égale à la ligne EF, & décrivez du centre A par le point

G

G une circonférence de cercle, qui se trouve ici coupée par la ligne locale AH, qui fait en A avec AC un angle demi-droit au point H, duquel on doit tirer à la ligne AC la perpendiculaire HD, & la ligne HD = la ligne AD sera moyenne proportionnelle entre les deux données AB, AC.

Démonstration.

Car dans le triangle rectangle AGE, on a (par la 47 du 1) $\overline{AG}^2$, ou $\overline{AH}^2$, ou $2\,\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{EG}^2$, & à cause de $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 + 2\,ACE$ (par 4 2) ou de $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,CAB$, parce que l'on a fait CE égale AB, & encore à cause de $\overline{EG}^2$, ou $\overline{EF}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BE}^2$ (par 47, 1) ou de $\overline{EF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, on aura $2\,\overline{AD}^2 = 2\,CAB$, & par conséquent $\overline{AD}^2 = CAB$, & l'on connoîtra (par 17, 6) que la ligne AD est moyenne proportionnelle entre les deux données AB, AC : *ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Cette conſtruction a été tirée de l'équation conſtitutive du problême, que nous avons réduite en deux lieux, ſavoir en un lieu à la ligne droite, & en un lieu au cercle, en cette ſorte.

Si l'on ſuppoſe AB $= a$, AC $= b$, & AD $= x$, on aura $xx = ab$ pour l'équation conſtitutive du problême, que l'on réduira en deux lieux, en ſuppoſant premierement ce lieu à la ligne droite $x + y = b$, pour avoir $x = b - y$, & par conſéquent $xx = bb - 2\,by + yy$; d'où ôtant le double de l'équation conſtitutive, ſavoir $2\,xx = 2\,ab$, on aura ce lieu au cercle, $-xx = bb - 2ab - 2by + yy$, dont le rayon eſt Rab, que l'on peut trouver géométriquement ſans ſuppoſer l'invention d'une moyenne proportionnelle, ſavoir par la ſeule ſouſtraction des deux quarrés aa, bb du quarré $aa + 2\,ab + bb$, de la ſomme $a + b$ des deux lignes données AB, AC, comme vous avez vu dans la conſtruction.

Si vous voulez un lieu à un autre cercle, & par conſéquent une autre conſtruction, mettez $x + y$ à la place de b, ce qui ſe peut faire à cauſe du lieu ſuppoſé à la ligne droite $x + y = b$, & l'équation conſtitutive $xx=ab$ ſe changera en celle-ci $xx=ax+ay$, dont le double $2xx=2ax+2ay$ étant ôté de $xx=bb-2by+yy$, on aura cet autre lieu au cercle $-xx=bb-2ax+2ay-2by+yy$, dont le rayon eſt R $2aa+2ab$, lequel on peut trouver auſſi géométriquement ſans aucune moyenne proportionnelle, ſavoir par l'addition des deux quarrés aa, $aa+2ab+bb$, & par la ſouſtraction du quarré bb, comme vous verrez dans notre grand traité d'algebre, lorſqu'il aura le bonheur de paroître.

On peut encore trouver un lieu à un autre cercle donné, & par conſéquent une troiſieme conſtruction; car dans le lieu ſuppoſé à la ligne droite $x+y=$, on trouvera $y=b-x$, & par conſéquent $yy=bb-2bx+xx$: d'où ôtant $2xx=2ax+2ay$, qui eſt le double de l'équation conſtitutive changée, on aura cet autre lieu au cercle, $yy-2ax-2ay=bb-2bx-xx$, dont le rayon eſt R $2aa-2ab+2bb$, que l'on peut trouver pareillement ſans aucune moyenne proportionnelle, ſavoir par la ſeule addition des trois quarrés aa, bb, $aa-2ab+bb$, comme vous verrez dans le même traité d'algebre, où nous avons expliqué &

démontre à fond ces deux dernieres conſtructions, & ce n'eſt pas le lieu ici d'en dire davantage. Ceux qui voudront ſavoir plus particulierement la maniere de réſoudre par deux lieux les équations de deux dimenſions, pourront voir *nos deux traités des lieux géométriques*, & *de la conſtruction des équations*, qui ſont précédés d'un traité *des lignes du premier genre*.

CHAPITRE IV.

Uſage de la ligne des polygones.

LA ligne des polygones ſert principalement à diviſer un cercle donné en autant de parties égales que l'on voudra, ce qu'il faut ſavoir faire dans l'architecture militaire, pour la fortification des places régulieres, & quelquefois auſſi dans l'architecture civile, pour la deſcription des carreaux faits en polygones propres pour paver une ſalle; elle ſert auſſi dans la géométrie, comme, par exemple, pour couper une ligne donnée dans la moyenne & extrême raiſon, pour tracer un triangle iſoſcele où l'angle à la baſe ſoit double de l'angle du ſommet, &c.

PROBLEME I.

Décrire un polygone régulier dans un cercle donné. Pl. III, fig. 13.

Appliquez la longueur du rayon du cercle donné de part & d'autre ſur la ligne des polygones du compas de proportion de 6 à 6, & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez ſur la même ligne des polygones la diſtance de côté & d'autre d'un même nombre égal au nombre des côtés du polygone que vous voulez décrire, pour avoir le côté de ce polygone.

Exemple.

Qu'il faille décrire un eptagone régulier dans le cercle donné HIG, dont le centre eſt I, & le rayon IF ou IG. Suppoſons que les lignes AB, AC ſoient chacune la ligne des polygones du compas de proportion, dont le centre eſt A; que les points B, C ſoient chacun les points de l'exagone, & les points D, E chacun les points de l'eptagone. Ayant appliqué la longueur du rayon IF ou IG ſur la ligne des polygones, de part & d'autre, de B en C, enſorte que la diſtance BC de 6 à 6 ſoit égale au rayon IF, & le Pl. III, fig. 13.

compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez la diſtance DE de 7 à 7, laquelle donnera la longueur du côté FG, ou FH, de l'eptagone régulier inſcriptible dans le cercle donné HFG.

Démonſtration.

Car dans les deux triangles iſoſceles ſemblables ABC, AED, on connoît (par 4, 6) que la raiſon des deux lignes AB, AD eſt égale à celle des deux BC, DE; c'eſt pourquoi comme AD eſt le côté d'un eptagone régulier inſcrit dans un cercle dont le rayon eſt AB, par la conſtruction de la ligne des polygones, il eſt de néceſſité que DE ou FG ſoit auſſi le côté d'un eptagone régulier inſcrit dans un cercle dont le rayon eſt BC ou IF: *ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Si le rayon du cercle donné eſt trop grand pour pouvoir être appliqué ſur la ligne des polygones, on en appliquera ſeulement la moitié ou le tiers, & alors le double ou le triple de la ligne qu'on trouvera ſera le côté du polygone qu'on cherche.

Quand le polygone qu'on veut décrire au dedans du cercle donné aura plus de douze côtés, on ne pourra plus ſe ſervir de la ligne des polygones ; & dans ce cas on se servira de la ligne des cordes, par le moyen de laquelle on fera l'arc FG d'autant de degrés qu'en doit avoir l'angle du centre I, lesquels on trouvera en divisant 360 degrés par le nombre des côtés du polygone.

PROBLEME II.

Décrire sur une ligne donnée un polygone régulier. Pl. III, fig. 13.

Ayant appliqué la longueur de la ligne donnée de part & d'autre sur la ligne des polygones du compas de proportion, à un nombre égal à celui des côtés du polygone qu'on veut décrire, & le compas de proportion demeurant ainsi ouvert, prenez sur la même ligne des polygones, de côté & d'autre, la distance de 6 à 6, laquelle sera le rayon du cercle propre à décrire le polygone. C'est pourquoi, si avec cette ouverture on décrit des deux extrêmités de la ligne donnée deux arcs de cercle, l'intersection de ces deux arcs donnera le cercle de ce centre.

Exemple.

Reprenons la figure précédente, & supposons que sur la ligne donnée FG, il Pl. III, fig. 13.

faille décrire un eptagone régulier. Suppo-sons aussi que les lignes AB, AC soient chacune la ligne des polygones du compas de proportion, dont le centre est A, que les points B, C soient chacun le point de l'exagone, & les points D, E chacun le point de l'eptagone ; appliquez la longueur de la ligne donnée FG sur la ligne des polygones, de part & d'autre, aux points D, E, ensorte que la distance DE de 7 à 7 soit égale à la ligne donnée FG ; & le compas de proportion demeurant ainsi ouvert, décrivez avec la distance BC de 6 à 6, prise sur la même ligne des polygones des deux extrêmités F, G, deux arcs de cercle, dont le point de section I sera le centre du cercle circonscriptible, de sorte que la ligne BC sera le rayon du cercle propre à décrire le polygone.

Démonstration.

Car dans les deux triangles isosceles semblables ABC, ADE, on connoît (par 4, 6) que la raison des deux lignes AD, AB, est égale à celle des deux DE, BC ; & comme la ligne AD est le côté d'un eptagone régulier inscrit dans un cercle dont le rayon est AB, par la construction de la ligne des polygones, il faut que la ligne DE ou FG ſoit auſſi le côté d'un eptagone régulier inſcrit dans un cercle dont BC eſt le rayon : *ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Si la ligne donnée eſt trop petite pour pouvoir être appliquée ſur la ligne des polygones, il en faut appliquer le double ou le triple, & alors la moitié ou le tiers de la ligne qu'on trouvera ſera le rayon du cercle circonſcrit.

Quand le polygone qu'on veut décrire ſur la ligne donnée aura plus de douze côtés, on ne pourra pas ſe ſervir de la ligne des polygones, & alors le centre I du cercle circonſcrit ſe trouvera par le moyen de la ligne des cordes, en tirant des deux extrêmités F, G, de la ligne donnée FG, les deux rayons FI, GI, qui faſſent avec la ligne donnée FG chacune un angle égal au demi-angle du polygone, lequel demi-angle eſt égal au complément de la moitié de l'angle du centre.

PROBLEME III.

Couper une ligne donnée dans la moyenne & extrême raiſon. Pl. III, fig. 14.

Appliquez la longueur de la ligne donnée ſur la ligne des polygones du compas de proportion, de part & d'autre, de 6 à 6, & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez ſur la même ligne des polygones de côté & d'autre la diſtance de 10 à 10, laquelle donnera le plus grand ſegment de la ligne propoſée.

Exemple.

Pl. III, fig. 14. Qu'il faille couper la ligne donnée FG en H dans la moyenne & extrême raiſon. Suppoſons que les lignes AB, AC ſoient chacune la ligne des polygones du compas de proportion, dont le centre eſt A; que les points B, C ſoient chacun le point de l'exagone, & les points D, E chacun le point du décagone. Ayant appliqué la longueur de la ligne donnée FG ſur la ligne des polygones de part & d'autre de B en C, enſorte que la diſtance BC de 6 à 6 ſoit égale à la ligne donnée FG, & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, la diſtance DE de 10 à 10 donnera la longueur du grand ſegment FH.

Démonſtration.

Car dans les deux triangles iſoſceles ſemblables ABC, ADE, on connoît (par 4, 6) que la raiſon des lignes AB, AD eſt égale à celle des deux BC, DE, ou FG, FH; & comme AD, AB ſont les côtés d'un décagone & d'un exagone inſcrits dans un même cercle, il faut que FG, FH ſoient auſſi les côtés d'un exagone & d'un décagone inſcrits dans un même cercle. C'eſt pourquoi (par le *coroll.* de la 9 du 13) le point H diviſe la ligne propoſée FG dans la moyenne & extrême raiſon : *ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Si la ligne donnée eſt trop longue pour pouvoir être appliquée ſur la ligne des polygones, on en appliquera ſeulement la moitié ou le tiers, & alors le double ou le triple de la ligne qu'on trouvera ſera le plus grand ſegment de la ligne propoſée.

Ce problême se peut aussi résoudre par la ligne des cordes ; savoir, en appliquant la ligne donnée sur la ligne des cordes de 60 à 60, & en prenant sur la même ligne des cordes la distance de 36 à 36, qui donnera le grand segment de la ligne proposée, parce que le côté de l'exagone est la corde de 60 degrés, & le côté du décagone la corde de 36 degrés dans un même cercle.

Corollaire.

Par le moyen de ce problême on peut aisément résoudre cette équation de deux dimensions, $xx + ax = aa$, savoir, en coupant la ligne représentée par la lettre a dans la moyenne & extrême raison ; car le plus grand segment de cette ligne ainsi coupée sera la racine véritable de l'équation proposée $xx + ax = aa$, & le plus petit sera la racine véritable de celle ci, $xx - 3ax = - aa$, comme il sera aisé à démontrer à celui qui entendra l'algebre.

PROBLEME IV.

Décrire ſur une baſe donnée un triangle iſoſcele, dont l'un des deux angles à la baſe ſoit double de l'angle au ſommet. Pl. III, fig. 15.

Appliquez la longueur de la baſe donnée de part & d'autre ſur la ligne des polygones du compas de proportion de 10 à 10, & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez ſur la même ligne des polygones de côté & d'autre la diſtance de *6* à *6*, pour avoir la longueur de chacun des deux côtés du triangle qu'on cherche.

Exemple.

Qu'il faille décrire ſur la baſe donnée FG un triangle iſoſcele FGH, enſorte que l'angle F ou G ſoit double de l'angle H. Suppoſons que les deux lignes AB, AC ſoient chacune la ligne des polygones du compas de proportion, dont le centre eſt A; que les points B, C ſoient chacun le point *6*, & les points D, E chacun le point 10. Appliquez la ligne donnée FG ſur la ligne des po-

Pl, III, fig. 15.

lygones de part & d'autre de D en E, enforte que la diftance DE de 10 à 10 foit égale à la bafe donnée FG; & le compas de proportion demeurant ainfi ouvert, prenez la diftance BC de 6 à 6, pour avoir le côté FH ou GH du triangle qu'on cherche.

Démonftration.

Pour la démonftration, faites HI égale à FG ou à DE; & parce que dans les triangles ifofceles femblables ADE, ABC, on a (par 4, 2) cette analogie AD, AB :: DE, BC, que AD eft le côté d'un décagone, & AB le côté d'un exagone, infcrits dans un même cercle, il faut que DE, ou FG, ou HI, foit pareillement le côté d'un décagone, & BC ou FH le côté d'un exagone, infcrits dans le même cercle; c'eft pourquoi (par 9, 13) la ligne FH eft coupée en I dans la moyenne & extrême raifon, & (par 10, 4) le triangle FGH fera celui qu'on cherche : *ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Ce problême fe peut auffi réfoudre par le moyen de la ligne des cordes, fa-voir, en appliquant ſur cette ligne des cordes la longueur de la ligne donnée de part & d'autre de 36 à 36, & en prenant ſur la même ligne des cordes la diſtance de 60 à 60, qui donnera le côté du triangle qu'on cherche.

PROBLEME V.

Ouvrir le compas de proportion enſorte que les deux lignes des polygones faſſent un angle droit. Pl. III, fig. 16.

Ayant pris avec le compas commun ſur la ligne des polygones depuis le centre du compas de proportion, la longueur du côté du pentagone, appliquez cette même longueur ſur la même ligne des polygones de côté & d'autre de 10 à 6, & alors les deux lignes des polygones feront au centre un angle droit.

Exemple.

Suppoſons que les lignes AB, AC ſoient chacune la ligne des polygones du compas de proportion dont le centre eſt A. Suppoſons encore que AB ſoit le côté du pentagone, AD le côté de l'exagone, & AC le côté du décagone. Je dis que Pl. III, fig. 16.

ſi l'on ouvre le compas de proportion ; enſorte que la diſtance CD de 10 à 6 ſoit égale au côté AB du pentagone, l'angle A ſera droit.

Démonſtration.

Car puiſque le quarré AB ou CD du côté du pentagone eſt égal au quarré AC du côté du décagone, & au quarré AD du côté de l'exagone (par 10, 13), il eſt de néceſſité (par 48, 1) que l'angle A ſoit droit : *ce qu'il falloit démontrer.*

CHAPITRE V.

Uſage de la ligne des cordes.

LA ligne des cordes ſert pour meſurer un angle ſur le papier ou ſur le terrein : ou bien pour faire ſur le papier ou ſur le terrein un angle d'autant de degrés que l'on voudra. Elle ſert auſſi pour la deſcription des polygones réguliers, comme vous avez vu, & pour réſoudre pluſieurs autres problêmes, dont les principaux & les plus néceſſaires ſont ſeulement ici déclarés.

PROBLEME

PROBLEME I.

Prendre ſur la circonférence d'un cercle donné un arc d'autant de degrés que l'on voudra. Pl. IV, fig. 17.

Appliquez le rayon du cercle donné ſur la ligne des cordes du compas de proportion, de part & d'autre, toujours de 60 à 60, parce que le rayon d'un cercle eſt égal à la corde de 60 degrés ; & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez ſur la même ligne des cordes de côté & d'autre, la diſtance du nombre égal à celui des degrés propoſés, & la tranſportez ſur la circonférence du cercle donné, pour avoir un arc d'autant de degrés qu'il étoit propoſé.

Exemple.

Que le rayon du cercle donné ſoit FG, & qu'il faille prendre ſur ſa circonférence un arc, par exemple, de 80 degrés. Suppoſons que les lignes AB, AC, ſoient chacune la ligne des cordes du compas de proportion, dont le centre eſt A. Que AB ou AC ſoit la corde de 80 degrés, & AD ou AE, la corde

Pl. IV, fig. 17.

de 60 degrés. Ayant appliqué la longueur du rayon FG, de part & d'autre, de D en E; enforte que la distance DE de 60 à 60 soit égale au rayon FG, & le compas de proportion demeurant ainsi ouvert, portez la distance BC de 80 à 80 sur la circonférence du cercle donné, depuis G en H, pour avoir l'arc GIH de 80 degrés.

Démonstration.

Car dans les triangles isosceles semblables ABC, ADE, on connoît (par 4, 2) que la raison des lignes AD, AB, est égale à celle des lignes DE, BC, ou FG, GH, & comme AB est la corde de 80 degrés à l'égard du rayon AD, par la construction de la ligne des cordes, il est de nécessité que GH soit aussi la corde de 80 degrés à l'égard du rayon FG, & que par conséquent l'arc GH soit de 80 degrés : *ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

On peut par une opération contraire trouver les dégrés d'un arc dont on connoît le demi-diametre ; sçavoir, en appliquant ce demi-diametre de 60 à 60 ſur la ligne des cordes, & en tranſportant la corde de l'arc propoſé ſur la même ligne des cordes, enſorte que l'on rencontre de part & d'autre un même nombre de degrés ; car ce nombre marquera la quantité de l'arc propoſé.

Corollaire.

On peut, par le moyen de ce problême, faire à un point donné d'une ligne donnée ſur le papier, un angle d'autant de degrés que l'on voudra : ou bien connoître la quantité d'un angle rectiligne donné ſur le papier, puiſque la meſure d'un tel angle eſt un arc de cercle décrit de ſa pointe. D'où il eſt aiſé de conſtruire ſur une baſe donnée un triangle iſoſcele, où l'angle de la baſe ſoit à l'angle du ſommet en raiſon donnée, en faiſant à chaque extrêmité de la baſe donnée un angle dont les degrés ſe trouveront en multipliant 90 degrés par le double du terme homologue à l'angle de la baſe, & en diviſant le produit par la ſomme du même double & de l'autre terme.

On peut, ſans la ligne des cordes, faire à un point donné d'une ligne donnée un angle d'autant de degrés que l'on voudra ; ſçavoir, par le moyen de la ligne des tangentes, quand elle eſt ſur le compas de proportion, ce qui arrive rarement, parce que cette ligne ne peut pas contenir tous les degrés du quart de cercle, le nombre de ces degrés ne pouvant pas ſurpaſſer 75.

Si donc on veut ſe ſervir de la ligne des tangentes, que je ſuppoſe marquée avec ſes degrés ſur chaque jambe du compas de proportion, pour faire à un point donné d'une ligne donnée un angle, par exemple, de 50 degrés; au lieu d'accommoder la longueur de cette ligne de 60 à 60 ſur la ligne des cordes, il la faut accommoder ſur la ligne des tangentes de 45 à 45, parce que le rayon ou ſinus total eſt égal à la tangente de 45 degrés: & au lieu de porter la diſtance de 50 à 50, qui eſt le nombre des degrés propoſés, ſur la circonférence de cercle décrit du point donné, on la portera ſur une ligne perpendiculaire tirée par l'extrêmité de la ligne donnée, lorſque cette diſtance aura été priſe de part & d'autre ſur la ligne des tangentes, &c.

PROBLEME II.

Ouvrir le compas de proportion de maniere que l'angle des deux lignes des cordes ſoit d'autant de degrés qu'on voudra. Pl. IV, fig. 18.

Si on prend depuis le centre du compas de proportion ſur l'une des deux lignes des cordes la corde correſpondante aux degrés propoſés, & qu'on en applique la longueur ſur les lignes des cordes de côté & d'autre, de 60 à 60, le compas de proportion ſe trouvera ouvert comme l'on demande.

Exemple.

Qu'il faille ouvrir le compas de proportion enſorte que les deux lignes des cordes faſſent un angle, par exemple, de 40 degrés. Suppoſons que les lignes AD, AE ſoient chacune la corde de 40 degrés, & les lignes AB, AC, chacune la corde de 60 degrés. Je dis que ſi on applique la corde AD ou AE de 40 degrés de côté & d'autre de B en C, enſorte que la diſtance BC de 60 à 60 ſoit égale à la corde AD de 40 degrés, l'angle A ſera auſſi de 40 degrés.

Pl. IV, fig. 28.

Exemple.

Car ſi l'on décrit du centre A par les points B, C l'arc de cercle BC, & que l'on conſidere que la ligne AD eſt la corde de 40 degrés à l'égard du rayon AB, qui eſt la corde de 60 degrés, on connoîtra aiſément que la ligne BC, égale à la ligne AD, eſt auſſi la corde de 40 degrés ; & comme elle eſt la corde de l'arc BC, il s'enſuit que l'arc BC, & par conſéquent l'angle A eſt auſſi de 40 degrés. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

On peut, par une opération contraire à la précédente, connoître l'ouverture du compas de proportion à l'égard de la ligne des cordes : car ſi on porte depuis le centre du compas de proportion, ſur la ligne des cordes, la diſtance de 60 à 60, priſe de part & d'autre ſur la même ligne des cordes, on rencontrera le nombre de degrés de l'ouverture qu'on cherche.

C'eſt à cauſe de cela que l'on ajoute quelquefois au compas de proportion des pinnules placées ſur la ligne des cordes, pour pouvoir meſurer un angle ſur la terre, ou pour en faire un ſur la terre d'autant de degrés que l'on voudra : mais j'aimerois mieux me ſervir d'un demi-cercle bien diviſé, le compas de proportion n'étant propre que pour travailler promptement ſur le papier. C'eſt pourquoi je négligerai ici d'expliquer pluſieurs uſages, qui ne ſont que d'une pure curioſité.

Si l'on veut ouvrir le compas de proportion enſorte que les deux lignes des cordes, ou bien des parties égales, ou de deux lignes ſemblables, tracées de part & d'autre ſur le compas de proportion, faſſent un angle égal au donné A, il faut à volonté décrire de cet angle donné A l'arc de cercle BC, & porter le demi-diametre AB ou AC, depuis le centre du compas de proportion ſur chacune des deux lignes que vous voulez ouvrir à l'angle donné. Après quoi ſi l'on marque ſur chaque ligne le point où le demi-diametre ſe terminera, & que l'on ouvre le compas de proportion enſorte que la diſtance de ces deux points ſoit égale à celle des deux extrêmités de l'arc BC, les deux lignes propoſées feront un angle égal au donné A. Fig. 18.

PROBLEME III.

Trouver le demi-diametre d'un arc de cercle donné dont on connoît les degrés. Pl. IV, fig. 17.

Si on applique la corde de l'arc donné ſur la ligne des cordes du compas de proportion, de côté & d'autre, au nombre des degrés de l'arc propoſé, & qu'on laiſſe le compas de proportion ainſi ouvert, la diſtance de 60 à 60, priſe ſur la même ligne des cordes, donnera la longueur du rayon qu'on cherche.

Exemple.

Pl. IV; fig. 17. Que l'arc de cercle GH ſoit, par exemple de 80 degrés, & qu'il en faille trouver le rayon FG. Suppoſons que les lignes AB, AC ſoient chacune la ligne des cordes du compas de proportion, dont le centre eſt A; que AB ou AC ſoit la corde de 80 degrés, & AD ou AE la corde de 60 degrés. Je dis que ſi on applique la corde GH ſur la ligne des parties égales du compas de proportion, de part & autre, de B en C, enſorte que la diſtance BC de 80 à 80 ſoit

ſoit égale à cette corde GH, la diſtance DE de 60 à 60 ſera égale au rayon FG.

Démonſtration.

Car dans les triangles iſoſceles ſemblables ABC, ADE, on connoît (par 4 6) que la raiſon des lignes AB, AD eſt égale à celle des lignes BC, DE, ou GH, DE; & comme AD eſt le rayon à l'égard de la corde AB de 80 degrés, par la conſtruction de la ligne des cordes, il eſt de néceſſité que DE ſoit auſſi le rayon à l'égard de la corde GH de 80 degrés, & par conſéquent le demi-diametre de l'arc propoſé GIH.

Remarque.

Si l'arc GIH étoit ſimplement donné, ſans en connoître ni le centre, ni le nombre des degrés, on trouvera ce nombre de degrés, en prenant à volonté ſur cet arc un point comme I, & en tirant les deux cordes IG, IH, dont l'angle GIH étant meſuré, & ſon double étant ôté de 360 degrés, le reſte donnera le nombre qu'on cherche.

Corollaire.

On peut, par le moyen de ce problême trouver aiſément le centre d'un cercle, ou d'un arc de cercle donné, ou bien faire paſſer par trois points donnés une circonférence de cercle : car ſi on prend ſur le cercle donné un arc à volonté, pour en connoître les degrés, comme il a été enſeigné dans la remarque précédente, & qu'à l'intervalle du rayon que l'on trouvera, on faſſe de deux points quelconques de l'arc donné, ou de trois points donnés, deux arcs de cercle qui s'entre-coupent, la ſection de ces deux arcs donnera le centre du cercle qu'on cherche.

CHAPITRE VI.

Uſage de la ligne des ſolides.

LA ligne des ſolides à l'égard des corps a les mêmes uſages que la ligne des plans à l'égard des ſurfaces, comme vous allez voir dans les problêmes ſuivans.

PROBLEME I.

Etant donnée une pyramide, trouver une autre pyramide semblable en raison donnée. Pl. IV, fig. 19.

Appliquez la longueur d'un côté de la pyramide donnée sur la ligne des solides du compas de proportion à un nombre égal de part & d'autre au premier terme de la raison donnée ; & le compas de proportion demeurant ainsi ouvert, prenez sur la même ligne des solides la distance de côté & d'autre du nombre égal au second terme de la raison donnée, pour avoir la longueur du côté homologue de la pyramide qu'on cherche. C'est de la même façon que l'on trouvera les côtés homologues aux autres côtés de la pyramide proposée.

Exemple.

Soit donnée la pyramide FGHI, & qu'il lui faille trouver une autre pyramide semblable, ensorte que la pyramide FGHI soit à celle qu'on cherche, comme, par exemple, 16 à 54. Supposons que les lignes AB, AC soient chacune

Pl. IV, fig. 19.

la ligne des ſolides du compas de proportion, dont le centre eſt A. Que les points marqués 54, ou du 54^{e} ſolide, ſoient B, C, & que les points marqués 16, ou du 16^{e} ſolide, ſoient D, E. Pour trouver le côté homologue à l'un des côtés de la pyramide donnée FGHI, comme au côté FG, portez la longueur de ce côté FG ſur la ligne des ſolides AB, AC, de côté & d'autre, de D en E, enſorte que la diſtance DE, de 16 à 16, ſoit égale au même côté FG; alors la diſtance BC, de 54 à 54, donnera la longueur du côté KL, homologue au côté FA. On trouvera de la même façon le côté LM, homologue au côté GH, & pareillement la hauteur NO, homologue à la hauteur IP, & ainſi des autres, & la pyramide KLMN ſera celle qu'on cherche, c'eſt-à-dire, qu'elle ſera ſemblable à la pyramide donnée FGHI, & que cette pyramide FGHI ſera à la pyramide KLMN, comme 16 à 54.

Démonſtration.

Car dans les deux triangles iſoſceles ſemblables ABC, ADE, on connoît (par 4, 6) que les quatre lignes DE, BC, AD, AB, ſont proportionnelles, & (par 37, 11) que leurs cubes ſont auſſi proportionnels ; & parce que les deux cubes AD, AB sont entre eux comme 16 à 54, par la construction de la ligne des solides, les deux cubes DE, BC, ou FG, KL, seront aussi entre eux comme 16 à 54, & (par 8, 12) la pyramyde FGHI sera à la pyramide KLMN aussi comme 16 à 54, parce que ces deux pyramides sont semblables par la construction, (& par *Def.* 9, 11) : *ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Si les deux termes de la raison donnée sont trop grands, on prendra leurs soumultiples, en les divisant chacun par un même nombre tel que l'on voudra : s'ils sont trop petits, on prendra leurs multiples, en les multipliant chacun par un même nombre tel que l'on voudra, pourvû que le plus grand nombre qui viendra ne surpasse pas 64, parce que dans le compas de proportion le plus grand solide n'est que 64.

Si les deux termes de la raison donnée ont leurs racines cubiques exactes, on se servira de ces racines cubiques à la place des deux nombres donnés ; mais au lieu de travailler sur la ligne des solides, on travaillera ſur la ligne des parties égales : car ainſi les côtés homologues des deux pyramides ſemblables ſeront dans la raiſon de ces racines cubiques, & (par 8, 11) les deux pyramides ſeront dans la raiſon des deux nombres donnés.

Enfin, ſi les deux termes de la raiſon donnée ſont des fractions de différente eſpece, on les réduira en deux autres fractions de même dénomination ; & en négligeant le dénominateur commun, on ſe ſervira des deux numérateurs à la place des deux fractions données, pour travailler ſur la ligne des ſolides, comme il a été enſeigné.

Corollaire.

On pourra de la même façon à une ſphere donnée trouver une autre ſphere en raiſon donnée, en travaillant par le diametre de la ſphere donnée, pour avoir le diametre de la ſphere qu'on cherche ; & pareillement à un cone ou à un cylindre donné, trouver un cone ou un cylindre ſemblable en raiſon donnée, en travaillant par le diametre de la baſe & par la hauteur du cone ou du cylindre donné, pour avoir le diametre de la baſe

& la hauteur du cone ou du cylindre qu'on cherche.

On pourra auſſi de la même façon, à quelque autre corps donné que ce ſoit, trouver un corps ſemblable en raiſon donnée, en travaillant ſéparément pour chaque côté du ſolide donné, pour avoir le côté homologue du ſolide qu'on cherche.

Ainſi vous voyez qu'on peut, à l'aide de ce problême, augmenter ou diminuer un ſolide donné, & par conſéquent une ſphere donnée, & auſſi un cone & un cylindre donnés ſelon une raiſon donnée, parce que cette raiſon donnée peut être de plus grande ou de moindre inégalité.

PROBLEME II.

Trouver la raiſon de deux ſolides ſemblables donnés. Pl. IV, fig. 19.

Portez la longueur d'un des côtés du plus petit des deux ſolides donnés ſur la ligne des ſolides du compas de proportion de part & d'autre, à un même nombre tel que l'on voudra; & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, portez ſur la même ligne des ſolides la longueur du côté homologue de l'autre ſolide donné, pour voir à quel nombre égal de côté & d'autre cette longueur répond, & ce ſecond nombre avec le premier auquel répond le côté homologue du premier ſolide, ſeront les deux termes de la raiſon qu'on cherche.

Remarque.

Pl. IV, fig. 19. Reprenons la figure précédente, & qu'il faille trouver la raiſon des deux pyramides ſemblables données FGHI, KLMN. Suppoſons que les deux lignes AB, AC ſoient chacune la ligne des ſolides du compas de proportion, dont le centre eſt A. Ayant porté la longueur du côté FG de part & d'autre ſur la ligne des ſolides au nombre 16, par exemple, enſorte que la diſtance DE de 16 à 16 ſoit égale au côté FG, laiſſez le compas de proportion ainſi ouvert, & portez la longueur du côté KL, homologue au côté FG, ſur la même ligne des ſolides, à un même nombre de côté & d'autre, comme de B en C, où ſoit par exemple le nombre 54 : cela étant, je dis que le ſolide FGHI eſt au ſolide KLMN, comme 16 à 54, dont la démonſtration eſt la même que celle du problême précédent.

Remarque.

Si le côté du plus grand ſolide donné eſt trop grand pour pouvoir être appliqué ſur le compas de proportion, qui ſeroit trop peu ouvert, il faut porter la longueur du côté du plus petit ſolide donné ſur la ligne des ſolides, le plus proche du centre qu'il ſera poſſible, afin que le compas de proportion étant ainſi plus ouvert, on puiſſe y porter la longueur du côté homologue du plus grand ſolide donné.

Mais ſi le côté du plus petit ſolide donné ſe trouve trop grand pour pouvoir être appliqué ſur la ligne des ſolides à un même nombre de part & d'autre, comme nous avons dit, il le faudra porter depuis le centre ſur la même ligne des ſolides, & auſſi le côté homologue du plus grand ſolide donné, pour avoir les deux nombres des côtés homologues des deux ſolides donnés, & ces deux nombres en exprimeront la raiſon.

Que ſi ces deux côtés homologues ſe trouvent encore trop grands, on ſe ſervira de leurs moitiés ou de leurs tiers : & pour ne pas tomber dans cette difficulté, ſi l'on peut, on ſe ſervira dans chaque ſolide donné des deux côtés homologues les plus petits, lorſque les deux ſolides donnés ſeront irréguliers.

Ce problême ſe peut auſſi réſoudre par le moyen de la ligne des parties égales du compas de proportion, ſçavoir en cherchant à deux côtés homologues des deux ſolides donnés une troiſieme ligne proportionnelle, & à ces trois lignes une quatrieme proportionnelle, comme il a été enſeigné au problême VI du chapitre ſecond; parce que (par 33, 11) les nombres des parties égales que contiendront la premiere & la quatrieme proportionnelle, ſeront les deux termes de la raiſon qu'on demande.

Corollaire.

Comme les ſpheres ſont dans la raiſon des cubes de leurs diametres, (par 18, 12) on voit aiſément que l'on peut par le moyen de ce problême trouver avec la même facilité la raiſon de deux ſpheres données, en ſe ſervant de leurs diametres comme de deux côtés homologues. Et pareillement on pourra trouver la raiſon de deux cones ou de deux cylindres ſemblables donnés, en ſe ſervant des diametres de leurs baſes, &c.

PROBLEME III.

Ouvrir le compas de proportion de façon que les deux lignes des ſolides faſſent un angle droit.

Ayant pris ſur la ligne des ſolides, depuis le centre du compas de proportion, le côté du 15^e ſolide, appliquez-en la longueur ſur la même ligne des ſolides, de part & d'autre, de 3 à 8, & le compas de proportion ſe trouvera ouvert à un angle de 90 degrés à l'égard de la ligne des ſolides, parce que le quarré du côté du 15^e ſolide, eſt à peu près égal au quarré du côté du 3^e ſolide & au quarré du côté du 8^e ſolide, ſans qu'il s'en manque ſeulement une milliéme partie de la longueur du compas de proportion, ce qui eſt de petite conſéquence pour la pratique, comme l'on peut voir dans les tables des ſolides, qui vous feront connoître que l'on peut auſſi appliquer la longueur du plus grand & 64^e ſolide, priſe depuis le centre ſur la ligne des ſolides, de part & d'autre, de 3 à 52, ou de 9 à 46, ou bien encore de 16 à 30, ſans que l'erreur ſoit ſeulement d'une milliéme partie de la longueur du plus grand ſolide.

PROBLEME IV.

Trouver un solide semblable & égal à deux solides semblables donnés. Pl. IV, fig. 20.

Supposant que l'un des côtés du premier solide donné soit d'un nombre de solides tel que l'on voudra, appliquez-en la longueur sur la ligne des solides du compas de proportion, de part & d'autre, à ce nombre supposé, & le compas de proportion demeurant ainsi ouvert, portez la longueur du côté homologue du second solide donné sur la même ligne des solides, ensorte que cette longueur réponde de côté & d'autre à un même nombre; alors la distance du nombre égal à la somme de ces deux nombres, prise de part & d'autre sur la ligne des solides, donnera le côté homologue du solide qu'on cherche.

Exemple.

Pl. IV. fig. 20. Qu'il faille trouver le côté homologue d'un solide semblable & égal à deux solides semblables donnés, dont deux côtés homologues soient les lignes HI, KL. Supposons que les lignes AB, AC ſoient chacune la ligne des ſolides du compas de proportion, dont le centre eſt A. Suppoſons encore que les deux points F, G ſoient chacun le point, par exemple du 8^{e} ſolide, auquel on appliquera, ſi l'on veut, la longueur du côté HI, enſorte que la diſtance FG, de 8 à 8, ſoit égale à ce côté HI, pour appliquer enſuite ſur la même ligne des ſolides la longueur de l'autre côté KL, de part & d'autre, de D en E, enſorte que les points D, E ſoient chacun également éloignés du centre A, c'eſt-à-dire, d'un même nombre de ſolides, qui ſoit, par exemple 27, enſorte que la diſtance DE de 27 à 27 ſoit égale à cet autre côté KL. Cela fait, & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, je dis que la diſtance BC, de 35 à 35, qui eſt la ſomme des deux nombres précédens 8, 27, qui expriment la raiſon des deux ſolides donnés, eſt égale au côté homologue d'un ſolide ſemblable & égal aux deux ſolides donnés, dont deux côtés homologues ſont HI, KL.

Démonſtration.

Car dans les triangles iſoſceles ſemblables ABC, AFG, on a (par 4, 6) cette analogie, AB, AF :: DE, FG; c'eſt pourquoi (par 27, 11) on aura celle-ci $\overline{AB}^3$, $\overline{AF}^3$ :: $\overline{BC}^3$, $\overline{FG}^3$; & ſi à la place des deux premiers termes $\overline{AB}^3$, $\overline{AF}^3$, on met les deux nombres 35, 8, qui ſont en même raiſon, parce que AB eſt le côté du 35^e ſolide, & AF le côté du 8^e, on aura cette autre analogie, 35, 8 :: $\overline{BC}^3$, $\overline{FG}^3$, & en diviſant, on aura celle-ci, 27, 8 :: $\overline{BC}^3 - \overline{FG}^3$, $\overline{FG}^3$; & ſi à la place des deux premiers termes 27, 8, on met les deux cubes AD, AF, qui ſont en même raiſon, parce que AD eſt le côté du 27^e ſolide, & AF le côté du 8^e, ou bien ſi à la place de ces deux $\overline{AD}^3$, $\overline{AF}^3$, on met les deux $\overline{DE}^3$, $\overline{FG}^3$, qui ſont en même raiſon, à cauſe des triangles iſoſceles ſemblables ADE, AFG, on aura cette autre analogie, $\overline{DE}^3$, $\overline{FG}^3$ :: $\overline{BC}^3 - \overline{FG}^3$, $\overline{FG}^3$; où l'on voit que le cube DE, ou IK eſt égal à la différence des deux BC, FG ou HI, & par conſéquent le cube BC eſt égal à la ſomme des deux HI, KL D'où il ſuit (par 33, 11) que la ligne BC eſt un côté homologue d'un ſolide ſemblable & égal aux deux ſolides ſemblables donnés, dont deux côtés homologues ſont les lignes HI, KL : *ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Pour n'avoir pas un nombre trop grand dans la ſomme des deux nombres qui expriment la raiſon des deux ſolides donnés, on donnera au côté du premier ſolide donné un nombre de ſolides le plus petit que l'on pourra, afin que l'autre nombre des ſolides du côté homologue du ſecond ſolide ſoit auſſi plus petit, & qu'ainſi la ſomme de ces deux nombres ſe puiſſe trouver ſur la ligne des ſolides.

Corollaire.

Il ſuit aiſément de la pratique de ce problême que l'on peut ajouter enſemble plus de deux ſolides ſemblables donnés, ſavoir en ajoutant enſemble les deux premiers, & en ajoutant à la ſomme le troiſieme, & ainſi enſuite.

On peut auſſi facilement trouver une ſphere égale à pluſieurs ſpheres données, en travaillant par leurs diametres, conſidérés comme les côtés homologues d'autant de ſolides ſemblables, & trouver pareillement un cône ou un cylindre égal à plusieurs cônes, ou à plusieurs cylindres donnés, savoir en travaillant par les diametres de leurs bases & par leurs hauteurs, &c.

On peut aussi, à l'imitation de ce problême, trouver un solide semblable & égal à la différence de deux solides semblables donnés, si au lieu d'ajouter ensemble les deux nombres de leur raison, on ôte le plus petit du plus grand, &c.

LEMME.

Si de quatre lignes les trois premieres sont proportionnelles, & que le cube de la troisieme soit égal au solide sous la premiere & le quarré de la quatrieme, ces quatre lignes seront dans une proportion continue. Pl. IV, fig. 21.

Je dis que si des quatre lignes FG, KL, DE, HI, les trois premieres FG, KL, DE sont proportionnelles, & que le solide $FG + \overline{HI}^2$, sous la premiere FG, & le quarré de la quatrieme HI, soit égal au cube de la troisieme DE, ces quatre lignes FG, KL, DE, HI, seront continuellement proportionnelles.

Démonstration.

Démonſtration.

Puiſque, par la ſuppoſition, le ſolide FG+$\overline{HI}^2$ eſt ſuppoſé égal au cube DE, on aura (par 34, 11) cette analogie FG, DE :: $\overline{DE}^2$, $\overline{HI}^2$; & ſi on donne aux deux premiers termes FG, DE, la hauteur commune DE, on aura cette autre analogie FGDE, $\overline{DE}^2$ :: $\overline{DE}^2$, $\overline{HI}^2$; & ſi à la place du plan FG + DE, on met le quarré KL qui lui eſt égal (par 17, 6) à cauſe des trois proportionnelles FG, KL, DE, on aura cette autre analogie $\overline{KL}^2$, $\overline{DE}^2$ :: $\overline{DE}^2$, $\overline{HI}^2$, où l'on voit (par 22, 6) que les trois lignes KL, DL, HI ſont proportionnelles; & parce que les trois lignes FG, KL, DE, ſont auſſi proportionnelles, par la ſuppoſition, il eſt de néceſſité que les quatre FG, KL, DE, HI ſoient continuellement proportionnelles : *ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME V.

Entre deux lignes données, trouver deux moyennes proportionnelles. Pl.IV, fig.22.

Ayant porté chacune des deux lignes données ſur la ligne des parties égales du compas de proportion, ou ſur quelqu'autre ligne diviſée en parties égales, pour ſçavoir le nombre des parties égales que chacune contient, appliquez la longueur de la plus grande ligne donnée, de part & d'autre, ſur la ligne des ſolides du compas de proportion, à un nombre égal à celui de ſes parties égales; & le compas de proportion demeurant ainſi ouvert, prenez ſur la même ligne des ſolides de côté & d'autre la diſtance du nombre égal à celui des parties égales de l'autre ligne donnée, pour avoir la plus grande des deux moyennes proportionnelles qu'on cherche, entre laquelle & la plus petite ligne donnée, une moyenne proportionnelle ſera la plus petite des deux moyennes qu'on cherche.

Exemple.

Pl. IV, fig. 22. Qu'il faille trouver deux moyennes proportionnelles entre les deux lignes donnée FG, HI, dont la plus petite FG contienne, par exemple, 20 parties égales, & la plus grande HI en contienne 45. Supposons que les lignes AB, AC soient chacune la ligne des solides du compas de proportion, dont le centre est A; que les points B, C soient chacun le 45^{e} solide, & les points D, E chacun le 20^{e} solide. Appliquez la longueur de la plus grande ligne HI sur la ligne des solides, de part & d'autre, aux points B, C, ensorte que la distance BC, de 45 à 45, soit égale à la plus grande ligne donnée HI, & alors la distance DE, de 20 à 20, sera la plus grande des deux moyennes proportionnelles qu'on cherche, c'est-à-dire, la troisieme des qnatré continuellement proportionnelles, dont G est la premiere, & HI la quatrieme; & si entre cette troisieme trouvée DE & la premiere FG, on trouve une moyenne proportionnelle, on aura la seconde.

Démonstration.

Car dans les triangles isosceles semblables ABC, ADE, on a (par 4, 6) cette analogie AB, AD :: BC, DE, ou AB, AD :: HI, DE, à cause de

BC égale à HI par la construction ; c'est pourquoi (par 37, 11) on aura celle-ci, $\overline{AB}^3$, $\overline{AD}^3$ :: $\overline{HI}^3$, $\overline{DE}^3$; & si à la place des deux premiers termes $\overline{AB}^3$, $\overline{AD}^3$, on met les deux nombres 45, 20, qui sont en même raison, par la construction de la ligne des solides, ou bien si à la place de ces deux nombres 45, 20, on met les deux lignes HI, FG, qui sont aussi en même raison, on aura cette autre analogie HI, FG :: $\overline{HI}^3$, $\overline{DE}^3$; & enfin si aux deux premiers termes HI, FG, considérés comme des hauteurs, on donne la base commune $\overline{HI}^2$, on aura cette derniere analogie $\overline{HI}^3$, FG + $\overline{HI}^2$ :: $\overline{HI}^3$, $\overline{DE}^3$, où l'on voit que le solide FG$\overline{HI}^3$ est égal au cube DE ; d'où il suit, par le lemme précédent, que la ligne DE est la plus grande des deux moyennes proportionnelles qu'on cherche ; *ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Si les nombres des parties égales des deux lignes données sont trop grands, on se servira de leurs moitiés ou de leurs tiers, comme il faudroit se servir des doubles ou des triples des deux mêmes nombres, s'ils étoient trop petits.

Or comme l'usage de deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données est absolument nécessaire pour la réduction d'un solide en cube, nous ajouterons ici une méthode facile pour les trouver géométriquement.

PROBLEME VI.

Trouver géométriquement entre deux lignes données deux moyennes proportionnelles. Pl. IV, fig. 23.

Pour trouver deux moyennes proportionnelles entre les deux lignes données AB, AC, divisez l'une de ces deux, comme AC, en deux également, au point D, & lui tirez par ce point D la perpendiculaire DE, égale à la moitié de l'autre ligne donnée AB, pour décrire du centre E par les points A, C, une circonférence de cercle AIFK. Après cela décrivez par le point A sur l'axe AC la parabole FAM, dont le parametre soit AC, & par la section F du cercle & de la parabole, tirez la droite FG perpendiculaire à l'axe AC, & Pl. IV, fig. 23.

les deux lignes AG, FG seront les deux moyennes qu'on cherche, de sorte que les quatre lignes AB, AG, FG, AC seront dans une continuelle proportion.

Démonstration.

Car si on tire le diametre IK perpendiculaire à la ligne FG ou parallele à l'axe AB, les deux lignes LF, LH seront égales entre elles (par 3, 3) ensuite de quoi on connoîtra aisément que la somme des deux lignes FG, GH est égale à la ligne AB.

Cela étant supposé, on considérera que par la propriété de la parabole on a cette analogie, AC, FG :: FG, AG, & que par la propriété du cercle, on a celle-ci CG, GH :: FG, AG. C'est pourquoi on aura celle-ci, AG, CG :: FG, GH, en composant on aura celle-ci AC, AG :: FG, AB, parce que la ligne AB est égale à la somme des deux FG, GH. De cette derniere analogie & de la premiere, il suit que les quatre lignes AB, AG, FG, AC, sont dans une proportion continue : *ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Nous avons donné dans notre grand traité d'algebre douze manieres différentes & très-ſimples pour la ſolution de ce problême ; mais comme celle-ci me ſemble la plus facile de toutes, je l'ai rapportée ici préférablement à toutes les autres.

Cependant comme il eſt incommode de tracer une parabole toutes les fois que l'on veut trouver entre deux lignes données deux moyennes en proportion continue, je veux vous enſeigner ici une autre méthode pour la même fin, qui eſt indépendante du compas de proportion, & que, bien qu'elle ſoit méchanique, je préfere dans la pratique à toute autre, tant pour la juſteſſe que pour la facilié.

PROBLEME VII.

Trouver ſans le ſecours du compas de proportion & d'une maniere plus facile deux moyennes proportionnelles à deux lignes données. Planche IV, figure 24.

Pour donc trouver entre les deux lignes données AB, AC, deux moyennes en continuelle proportion, l'on en fera le parallelelograme rectangle AB, CD, dont le centre E ſe trouve dans la rencontre des diagonales AD, BC, & l'on décrira de ce centre E une circonférence de cercle de telle grandeur que la ligne droite FG tirée par les deux points F, G, où cette circonférence coupe les deux lignes AB, AC, prolongées autant qu'il en ſera beſoin, paſſe par l'angle droit D; car alors les deux lignes FC, BG ſeront les deux moyennes qu'on cherche; de ſorte que les quatre lignes AB, CF, BG, AC ſeront dans une proportion continue.

Démonſtration.

Si l'on tire du centre E les deux rayons

rayons EG, EF, & les droites EH, EI, perpendiculaires aux deux AB, AC, qu'elles diviſeront en deux également aux points H, I, à cauſe des deux triangles iſoſceles AEC, AEB, l'on conſidérera que puiſque les deux lignes EF, EG ſont égales entre elles, comme étant les rayons d'un même cercle, leurs quarrés ſeront auſſi égaux, & la ſomme $\overline{EH}^2 + \overline{FH}^2$ ſera par conſéquent égale à la ſomme $\overline{GI}^2 + \overline{EI}^2$ (par 47, 1). C'eſt pourquoi (par 4, 2) la ſomme $\overline{EH}^2 + \overline{FC}^2 + \overline{CH}^2 + 2HCF$ ſera égale à la ſomme $\overline{EI}^2 + \overline{BI}^2 + \overline{BG}^2 + 2IBG$; & ſi l'on ôte de la ſomme $\overline{EH}^2 + \overline{FC}^2 + \overline{CH}^2 + 2HCF$, la ſomme $\overline{EH}^2 + \overline{CH}^2$, & de la ſomme $\overline{EI}^2 + \overline{BI}^2 + \overline{BG}^2 + 2IBG$, la ſomme $\overline{EI}^2 + \overline{BI}^2$, égale à la ſomme précédente $\overline{EH}^2 + \overline{CH}^2$, chaque ſomme étant égale au quarré de la moitié de la diagonale BC (par 47, 1), & que l'on change 2HC en AC, & 2BI en AB, l'on connoîtra que la ſomme $\overline{FC}^2 + ACF$ eſt égale à la ſomme $\overline{BG}^2 + ABG$, & (par 3, 2) que le rectangle AFC eſt égal au rectangle AGB.

D'où l'on tire (par 14, 6) cette analogie AF, AG :: BG, CF, laquelle, en changeant les deux premiers termes AF, AG en ces deux BD, BG, qui ſont en même raiſon (par 4, 6) à cauſe des deux triangles équiangles FAG, DBG, ſe changera en celle-ci, BD, BG :: BG, CF, qui fait connoître que les trois lignes BD, BG, CF, ou AC, BG, CF, ſont proportionnelles; & ſi l'on change les deux premiers termes BD, BG de l'analogie précédente, aux deux CF, CD, qui ſont en même raiſon (par 4, 6), à cauſe des deux triangles équiangles FCD, DBG, l'on aura cette autre analogie, CF, CD :: BG, CF, par où l'on connoît que les trois lignes BG, CF, CD, ou BG, CF, AB, ſont auſſi proportionnelles, & que par conſéquent les quatre AC, BG, CF, AB, ſont continuellement proportionnelles : *ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROBLEME VIII.

Trouver le côté d'un cube égal au parallelipipede HBC, dans laquelle H signifie sa hauteur, & B, C les dimensions de la base.

Pour cela il faut chercher une moyenne proportionnelle entre les deux dimensions B & C de la base, que nous nommerons M ; ensuite entre cette moyenne M & la hauteur H, il faut chercher deux moyennes proportionnelles P & S : la premiere P sera le côté du cube égal au parallelipipede, c'est-à-dire que $PPP = HBC$.

Démonstration.

Puisque M est moyenne entre B & C, on aura $B, M :: M, C$. D'où l'on tire $MM = BC$, & en multipliant par H, il vient $MMH = BCH$; & comme P & S sont moyennes continues entre M & H, nous avons $\div M, P, S, H$: ce qui donne $MH = PS$, $MS = PP$; d'où l'on tire $\frac{MH}{P} = S$, & $S = \frac{PP}{M}$. Partant $\frac{MH}{P} = \frac{PP}{M}$, & $MMH = PPP$;

d'où l'on voit que PPP=BCH, puisque MMH=BCH : donc la premiere des deux moyennes eſt le côté du cube que l'on cherche.

CHAPITRE VII.

Uſage de la ligne des Métaux.

PROBLEME I.

Etant donné le diametre d'une ſphere quelconque faite de l'un des ſix métaux, par exemple, d'argent, trouver le diametre d'une ſphere d'or du même poids.

Il faut prendre le diametre donné, & ouvrir le compas de proportion aux points où eſt marqué le caractere de l'argent de la grandeur de ce diametre ; & ſi l'on prend alors l'ouverture qui répond au caractere de l'or, elle ſera le diametre que l'on cherche.

Démonſtration.

Par la conſtruction de la ligne des métaux, les diſtances depuis le centre de la charniere jusqu'aux caracteres de ces métaux, sont des diametres de corps semblables & d'égale pesanteur, qui seroient faits de ces métaux; & comme les ouvertures qui répondent à ces métaux sont en même raison que ces diametres, formant avec eux des triangles semblables, il s'ensuit qu'elles sont aussi des diametres de corps semblables, égaux en pesanteur & faits de ces métaux : donc l'ouverture qui répond au caractere de l'or est le diametre que l'on cherche.

PROBLEME II.

Trouver le rapport spécifique des six métaux, par exemple, de l'argent à l'or.

Il faut prendre sur la ligne des métaux le diametre de l'argent, & le porter à une ouverture des solides, comme, par exemple, au 50^{e}; ensuite, sans changer l'ouverture du compas de proportion, il faut porter le diametre de l'or pris sur la ligne des métaux, ensorte qu'il convienne à quelqu'un des solides, comme il arrive ici à peu-près au 27^{e} solide; c'est ce qui fait voir que la pesanteur spécifique de l'argent est à celle de l'or, comme 27 est à 50, & quelque chose de plus, à cause que l'ouverture ne s'est point rencontrée précisément au 27e solide.

Démonstration.

Nous sçavons, par la construction de la ligne des métaux, que leurs pesanteurs spécifiques sont en raison réciproque des cubes de leurs diametres marqués sur cette ligne ; & comme on a porté ces diametres à l'ouverture des solides, celui d'argent au 50e, & que celui d'or s'est trouvé convenir au 27e solide, il est clair que ces deux ouvertures formant des triangles semblables avec les diametres des solides 50 & 27, elles seront en même raison ; & comme les cubes de ces diametres sont entre eux en même raison que le 50e & le 27e solides, il est clair encore que les cubes des ouvertures qui répondent à ces deux solides sont aussi dans la même raison qu'eux ; mais les cubes de ces ouvertures, qui sont les diametres de l'argent & de l'or, expriment en raison inverse le rapport de leurs gravités spécifiques : donc le 50e & le 27e solides expriment aussi en raison inverse leurs gravités spécifiques, par conséquent à celle de l'argent & à celle de l'or, comme 27 est à 50.

PROBLEME III.

Ayant un corps fait de l'un des ſix métaux, comme d'étain, d'un poids, par exemple, de 36 livres, trouver le poids d'un corps d'argent, qui ſeroit de même volume que celui d'étain.

Pour le trouver, ouvrez le compas de proportion enſorte que ſon ouverture au 36^e^ ſolide ſoit égale au diametre pris ſur la ligne des métaux qui convient à l'argent, & portez enſuite le diametre, qui eſt celui de l'étain, à l'ouverture des ſolides, en remarquant auquel il convient, ſans changer l'ouverture du compas de proportion, qui eſt ici au 50^e^, & quelque choſe de plus : cela étant, je dis que le poids du corps d'argent de même volume que celui d'étain, qui peſe 36 livres, en peſera 50.

Démonſtration.

Ayant fait voir dans la démonſtration précédente que les ſolides auſquels répondent les diametres des métaux, expriment dans un ordre renverſé le rapport de la peſanteur ſpécifique de ces métaux; il s'ensuit que le diametre de l'argent étant l'ouverture du 36ᵉ corps, & que celui d'étain s'étant trouvé convenir à peu pres au 50ᵉ, les pesanteurs ou gravités spécifiques de ces deux corps sont entre elles comme 50 est à 36; & à cause que la pesanteur du corps d'étain est de 36 livres, celle d'argent sera par conséquent de 50 livres.

PROBLEME IV.

Trouver le rapport du poids de deux corps semblables, dont l'un soit, par exemple, d'étain, & l'autre d'argent, leur diametre étant donné.

Pour cela ouvrez le compas de proportion de maniere que l'ouverture des points des caracteres de l'étain soit égale au diametre de la boule d'étain, & sans changer cette ouverture, prenez celle qui répond au signe de l'argent; si elle se trouve plus grande ou plus petite que le diametre de la boule d'argent, cette boule sera plus ou moins pesante que celle d'étain; car par la construction de la ligne des métaux, elle seroit de même poids que celle d'étain, si son diametre étoit égal à cette ouverture:

d'où l'on voit que si l'on porte cette ouverture sur l'ouverture de quelque solide, & qu'ensuite l'on cherche à quel solide convient le diametre du corps d'argent, les solides alors marqueront leur rapport, & par conséquent celui de la boule d'argent à celle d'étain : ceci n'a pas besoin d'être démontré.

PROBLEME V:

Le diametre d'une sphere de cuivre & son poids de dix livres étant donné, trouver le diametre d'une sphere d'or pesant 15 livres.

Il faut chetcher une boule d'or égale à celle de cuivre, par le problême I, & ouvrir le compas de proportion au 10^e^ solide de la grandeur de ce diametre; si l'on prend l'ouverture du 15^e^ solide, elle sera le diametre que l'on cherche, comme il est aisé à démontrer.

Remarque.

L'on peut faire sur tous les corps semblables, de quelques métaux qu'ils soient des six, ce que nous avons fait en particulier sur des sphériques, en se servant de leurs côtés homologues, comme nous nous sommes servis des diametres.

Quant à l'usage de la ligne du poids des boulets, l'on sent assez qu'il faut porter dessus la longueur de leur diametre pour en connoître le poids; il en est de même pour celle du calibre des canons, c'est pourquoi nous ne nous étendrons pas davantage la-dessus.

Fin de l'usage du compas de proportion.

USAGE
DE L'INSTRUMENT
UNIVERSEL.

Cet inſtrument eſt appellé *univerſel*, parce qu'il ſert univerſellement pour toutes les opérations de la géométrie pratique, comme pour meſurer des angles ſur la terre ou en l'air, ou bien pour y faire tel angle qu'on voudra: pour tirer des lignes paralleles à des lignes données ſur la terre, ou bien pour leur tirer des perpendiculaires: pour meſurer toutes ſortes de lignes droites ſur la terre avec beaucoup de facilité & une très-grande juſteſſe, ſans aucune ſupputation, & même pour en meſurer pluſieurs à la fois ſans aucune peine, quand elles ſont acceſſibles d'un côté: pour lever promptement & exactement un plan qui eſt ſur la terre, ou bien pour tracer ſur la terre un plan qui eſt ſur le papier, avec une facilité & une exactitude admirable; comme aussi pour lever la carte d'un pays, & plusieurs autres usages que nous expliquerons dans ce traité, après avoir enseigné la maniere de le construire.

CONSTRUCTION

De l'instrument universel.

Pl. V. PREPAREZ en premier lieu le cadre rectangulaire ABCD de laiton, ou de quelqu'autre matiere solide, dont la longueur AB soit d'environ un pied, & la largeur BC d'environ 8 pouces, & dont chaque regle soit à peu près large de six lignes, excepté celle qui est terminée par les deux lignes paralleles AB, EF, qui doit être un peu plus large, comme de 9 lignes, pour y pouvoir tirer environ par le milieu de sa largeur, ou un peu plus proche de la ligne EF, une ligne droite parallele aux deux AB, EF, comme IK, qui sera terminée aux deux points I, K, par les deux lignes prolongées EH, FG. Cette ligne IK, que nous appellerons *ligne de conduite*, doit être divisé en un certain nombre de parties égales, qui peut être tel que l'on voudra; mais le plus grand est le meilleur, comme, par exemple 400; ce qui se peut faire sans peine sur une longueur de 12 pouces.

On ajoutera aussi aux trois autres regles BC, CD, AD d'autres divisions, qui ne peuvent pas être égales, parce qu'elles doivent marquer les degrés du demi-cercle, dont le centre sera pris au point L, milieu de la ligne de conduite IK.

On ajoutera encore au-dedans du cadre EFGH un parallelogramme rectangle qui soit environ de la même grandeur, & qui se puisse ôter & remettre quand on voudra, afin que ce parallelogramme puisse contenir & resserrer dans l'entre-deux EFGH une feuille de papier que l'on ajoute sur la surface, pour y pouvoir tracer les rayons visuels qui se tirent le long de la ligne de foi d'une alidade, qui est dessus ce papier, & qui est semblable à celle des demi-cercles ordinaires; avec cette différence, que cette alilade doit être non-seulement mobile autour de son centre, mais que ce centre doit être aussi mobile sur la ligne de conduite IK, ensorte qu'il puisse se mouvoir & s'arrêter à telle diviſion que l'on voudra de la ligne IK, ce que le ſieur *Chapotot* a très bien exécuté ; car c'eſt en cela que conſiſte la plus grande difficulté de l'inſtrument.

Outre les pinnules ordinaires qui doivent être aux extrêmités de l'alidade, laquelle ne doit pas être moindre que la diagonale du cadre, ou que la diſtance des deux points A, C, il y en doit avoir auſſi aux deux extrêmités de la ligne de conduite IK, dont les diviſions doivent être tranſportées ſur la ligne de foi de l'alidade, pour rendre l'uſage de cet inſtrument auſſi commode & auſſi univerſel qu'il eſt poſſible, comme vous allez voir dans les problêmes ſuivans, après que nous aurons dit que cet inſtrument a, comme les autres, un genouil attaché au-deſſous du parallelogramme précédent, avec un pied pour le ſoutenir, & que ce parallelogramme, qui doit être ajouté avec ſa feuille de papier dans l'eſpace vuide EFGH, peut être de laiton ; mais pour rendre l'inſtrument moins peſant, j'aimerois mieux le faire de bois de noyer ou de poirier.

Probleme I.

Mesurer un angle accessible sur la terre.
Pl. VI, fig. 1.

Pour connoître la quantité de l'angle donné ABC, dont la pointe B est accessible sur la terre, coulez l'alidade de l'instrument universel le long de la ligne de conduite, & l'arrêtez lorsque son centre répondra précisément sur le centre L des degrés; & ayant appliqué le même centre L sur la pointe B de l'angle donné ABC, ensorte que la ligne de conduite BD réponde sur la ligne BC (ce qui arrivera lorsque regardant par les pinnules de la ligne de conduite LD, on verra l'extrêmité C de la ligne BC); tournez l'alidade vers le point A, ensorte que par les pinnules vous voyez ce point A, & alors la ligne de foi montrera sur le bord de l'instrument au point E le nombre des degrés de l'angle proposé ABC, en les comptant depuis D. Pl. VI, fig. 1.

Autrement.

Si les degrés du demi-cercle n'étoient

pas marqués ſur l'inſtrument univerſel, on ne laiſſeroit pas de pouvoir connoître la quantité de l'angle propoſé ABC, en tirant ſur la ſurface de l'inſtrument la droite LE le long de la ligne de foi, lorſque l'alidade eſt tournée vers le point A, ſans qu'il ſoit beſoin que ſon centre ſoit au milieu L de la ligne de conduite D, & en meſurant avec un rapporteur la quantité de l'angle DLE, qui donnera celle du propoſé ABC.

Probleme II.

Meſurer un angle inacceſſible ſur la terre.
Pl. VI, fig. 2.

Pl. VI, fig. 2. Propoſons l'angle inacceſſible BAC, dont chaque ligne AB, AC puiſſe être vue de loin, autrement on ne pourroit pas meſurer cet angle. Choiſiſſez ſur terre deux points commodes comme D, E, qui doivent être proches de l'angle A, autant qu'il ſera poſſible ; enſorte que le point D ſoit en ligne droite avec la ligne AC, & que pareillement le point E ſoit en ligne droite avec la ligne AB, & imaginez-vous la ligne droite DE, pour meſurer, par le problême précédent, la quantité des deux angles acceſſibles

acceſſibles ADE, AED, dont la ſomme ſera ôtée de 180 degrés, pour avoir au reſte la valeur de l'angle propoſé A.

Autrement.

Ayant placé l'inſtrument univerſel, enſorte que ſa ligne de conduite réponde ſur la ligne ED, & le centre *e* de l'alidade ſur le point E, tournez l'alidade vers le point A, & tirez ſur la ſurface de l'inſtrument le long de la ligne de foi la droite *e* F. Après cela coulez l'alidade le long de la ligne de conduite, & l'arrêtez au point *d*, éloigné du premier *e*, d'autant de parties égales que la ligne DE aura de toiſes, ou de pieds; & ayant tranſporté l'inſtrument univerſel à l'autre extrêmité D de la ligne DE, enſorte que le centre *d* de l'alidade réponde ſur cette extrêmité D, & la ligne de conduite ſur la ligne DE, tournez auſſi l'alidade vers le point A, & tirez pareillement ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, la droite *d* G, qui rencontrera la premiere *e* F en quelque point, comme en *a*, & meſurez avec un rapporteur, ou autrement, l'angle *e a d*, qui eſt égal au propoſé B A C.

Remarque.

Vous prendrez garde que le nombre des parties égales de la ligne de foi, qui seront comprises entre les deux points *d*, *a*, représente la longueur de la ligne DA; & que pareillement le nombre des parties égales de la ligne de foi, qui seront comprises entre les deux points *e*,*a*, le centre de l'alidade étant remis en *e*, donne la longueur de la ligne EA. Ainsi vous voyez que par cette seconde méthode on connoît trois choses à la fois, l'angle A, & les deux lignes AD, AE.

PROBLEME LII.

Faire à un point donné d'une ligne donnée sur la terre, un angle d'autant de degrés que l'on voudra. Pl. VI, fig. 1.

Pl, VI, fig. 1. Qu'il faille tirer au point B de la ligne donnée BC sur la terre, une ligne qui fasse avec la même ligne BC, un angle de 50 degrés : par exemple Ayant avancé le centre de l'alidade de l'instrument universel au centre L des degrés ; & ayant tourné l'alidade en sorte que la ligne de foi LE soit au point E, de 50 degrés, en les comptant depuis D; appliquez l'instrument enforte que le centre L réponde perpendiculairement sur le point donné B, & la ligne de conduite LD sur la ligne donnée BC, & faites planter un piquet sur terre en ligne droite avec la ligne de foi LE, comme en A; alors imaginant sur terre la ligne droite AB, on aura l'angle ABC de 50 degrés, comme il étoit proposé.

PROBLEME IV.

Diviser un angle donné, inaccessible sur la terre, en deux également. Planche VI, figure 2.

Pour diviser en deux également l'angle donné inaccessible sur la terre BAC, c'est-à-dire, pour tirer sur terre une ligne droite, laquelle étant prolongée divise cet angle donné BAC en deux angles égaux; choisissez sur terre deux points autant proches qu'il sera possible de l'angle A, comme D, E, ensorte que le point D soit en ligne droite avec la ligne AC, & le point E en ligne droite avec l'autre ligne AB de l'angle donné BAC, & mesurez exacte- Pl. VI, fig. 2.

ment la diſtance DE, qui ſoit, par exemple, de 200 pieds.

Cette préparation étant faite, arrêtez l'alidade de l'inſtrument univerſel en quelque point de la ligne de conduite, comme en *e*; & ayant appliqué l'inſtrument en telle ſorte que ce point *e* réponde perpendiculairement ſur le point E, & la ligne de conduite ſur la ligne DE, tournez l'alidade vers le point A, & tirez ſur la ſurface de l'inſtrument le long de la ligne de foi la droite *e* F. Après cela comptez ſur la ligne de conduite 200 parties égales depuis *e* en *d*, pour les 200 pieds de la ligne DE; & ayant poſé le centre de l'alidade au point *d*, appliquez de nouveau l'inſtrument univerſel, enſorte que ce point *d* réponde ſur le point D, & la ligne de conduite *de* ſur la ligne DE, & tournez l'alidade vers le point A, pour tirer, comme auparavant, ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, la droite *d* G, qui coupera la premiere *e* F en quelque point, comme en *a*, où ſe fait la repréſentation de l'angle donné A.

Enfin diviſez en deux également l'angle *ead* par la droite *ah*; & ayant pris ſur la ligne D E la partie D H, d'autant de pieds que la partie *dh* contiendra de parties égales de la ligne de conduite, & ayant avancé le centre de l'alidade ſur le point *h*, appliquez pour une troiſieme fois l'inſtrument univerſel, enſorte que ce point *h* réponde ſur le point H, & la ligne de conduite *de* ſur la ligne DE, & tournez l'alidade vers le même point A, enſorte que la ligne de foi couvre préciſément la ligne *ha*; alors ſi vous faites planter ſur terre pluſieurs piquets qui ſoient en ligne droite avec la ligne de foi de l'alidade, ces piquets feront ſur terre une ligne droite, laquelle étant prolongée diviſera l'angle propoſé BAC en deux également.

Remarque.

Si au lieu de diviſer l'angle *ead* en deux également, on le diviſoit en trois par deux lignes tirées de l'angle *a*, & que l'on travaillât pour chaque ligne comme nous avons fait pour la ligne *ah*, on diviſeroit l'angle propoſé BAC en trois parties égales. Ainſi on voit que par cette méthode on peut diviſer un angle inacceſſible ſur la terre en autant de parties égales qu'on voudra.

PROBLEME V.

Diviser une ligne donnée inaccessible sur la terre en deux également. Planche VI, figure 3.

Pl. VI, fig. 3. Pour diviser en deux parties égales la ligne donnée AB, inaccessible sur la terre, choisissez à volonté deux points commodes sur la terre, comme D, E, qui doivent être autant proches de la ligne proposée AB qu'il sera possible, & dont la distance DE doit être connue exactement : nous la supposerons ici de 200 pieds.

Cette préparation étant faite, arrêtez le centre de l'alidade de l'instrument universel en quelque point commode de la ligne de conduite, comme en *d*, & ayant appliqué l'instrument en telle sorte que ce point *d* réponde sur l'extrêmité D de la ligne DE, & la ligne de conduite sur la même ligne DE, tournez l'alidade successivement vers les extrêmités A, B de la ligne donnée AB, & tirez sur la surface de l'instrument le long de la ligne de foi, les droites *d* F, *d* G.

Après cela prenez sur la ligne de conduite, depuis *d* en *e* 200 parties égales pour les 200 pieds de la ligne DE; & ayant appliqué l'inſtrument univerſel enſorte que ce point *e* réponde ſur l'autre extrêmité E de la ligne DE, & la ligne de conduite *de* ſur la même ligne DE; & ayant arrêté le centre de l'alidade au même point *e*, tournez comme auparavant l'alidade vers les extrêmités A, B de la ligne donnée AB, & tirez ſur la ſurface de l'inſtrument le long de la ligne de foi les droites *e*H, *e*I, qui couperont les deux premieres DF, DG en deux points, comme *a*, *b*, par où vous tirerez la droite *ab*, que vous diviſerez en deux également au point *o*.

Enfin tournez l'alidade, dont le centre doit toujours demeurer en *e*, vers le point *o*, enſorte que la ligne de foi ſoit ſur ce point *o*, & faites planter ſur terre pluſieurs piquets en ligne droite avec la ligne de foi; ces piquets feront ſur terre une ligne droite, laquelle étant prolongée diviſera la ligne propoſé AB en deux parties égales.

Remarque.

Le nombre des parties égales de la ligne de foi qui ſe trouvent compriſes entre les points *e*, *o*, repréſentant la diſtance du point E au point O, milieu de la ligne AB, on voit aisément que si on prend sur terre en ligne droite avec la ligne de foi, la ligne EO, d'autant de pieds que la ligne *e o* comprendra de parties égales, lorsque cela sera possible, on aura en O le point de milieu de la ligne proposée AB.

Si au lieu de diviser la ligne *a b* en deux également, on la divisoit en trois parties égales, par exemple, par deux points marqués entre ses deux extrêmités *a*, *b*, & que l'on travaillât pour chaque point comme nous avons fait pour le point *o*, on diviseroit la ligne proposée AB en trois parties égales. Ainsi vous voyez que par cette méthode on peut diviser une ligne donnée inaccessible sur la terre en autant de parties égales que l'on voudra, sans la connoître.

PROBLEME

PROBLEME VI.

Retrancher d'une ligne donnée inaccessible sur la terre une partie d'une grandeur donnée. Pl. VI, fig. 3.

Qu'il faille retrancher de la ligne donnée AB, inaccessible sur la terre, depuis A vers B, une partie qui soit, par exemple, de 50 pieds. Ayant choisi, comme auparavant, deux points commodes sur la terre, comme D, E, dont la distance DE sera supposée de 200 pieds; & ayant arrêté le centre de l'alidade d'un instrument universel en quelque point de la ligne de conduite, comme en *d*, appliquez l'instrument ensorte que le point *d* réponde sur l'extrêmité D de la ligne DE, & la ligne de conduite sur la même ligne DE, tournez l'alidade vers les extrêmités A, B de la ligne donnée AB, pour tirer sur la surface de l'instrument, le long de la ligne de foi, les rayons visuels *d*F, *d*G. Pl. VI, fig. 3.

Après cela avancez le centre de l'alidade de 200 parties égales, que vous compterez sur la ligne de conduite depuis *d* en *e*, pour les 200 pieds de la

Pl. VI, fig. 3. ligne DE, & ayant arrêté le centre de l'alidade au point *e*, & l'inſtrument univerſel étant appliqué en telle ſorte que ce point *e* réponde ſur l'autre extrêmité E, de la ligne DE, & la ligne de conduite *de* ſur la même ligne DE, tournez l'alidade vers les mêmes extrêmités A, B, de la ligne donnée AB, pour tirer pareillement ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, les rayons viſuels *e*H, *e*I, qui rencontreront les premiers *d*F, *d*G, en *a* & en *b*, par où vous tirerez la droite *ab*, qui repréſentera la ligne donnée AB ſur la terre.

Cela étant fait, retranchez de la ligne *ab* la partie *ao* de 50 parties égales priſes ſur la ligne de conduite *de*, pour les 50 pieds que l'on veut retrancher de la ligne propoſée AB; & ayant tourné l'alidade vers le point *o*, enſorte que la ligne de foi tombe préciſément ſur ce point *o*, faites planter ſur terre pluſieurs piquets qui ſoient en ligne droite avec la ligne de foi, & ces piquets feront une ligne droite, laquelle étant prolongée retranchera de la ligne donnée AB la partie AO de 50 pieds, comme il étoit propoſé.

Remarque.

Lorſque la ligne donnée AB, ſera acceſſible entre ſes deux extrêmités A, B, on pourra trouver le point O, éloigné de ſon extrêmité A de 50 pieds, en comptant depuis E juſqu'à O, autant de pieds que la ligne *e o* comprendra de parties égales de la ligne de foi. Pl. VI. fig. 3.

Si on vouloit retrancher de la ligne propoſée A B, pluſieurs parties d'une grandeur donnée, il n'y auroit qu'à retrancher de la ligne *ab* autant de parties égales priſes ſur la ligne de conduite *d e*, & travailler comme auparavant.

Probleme VII.

Prolonger une ligne donnée ſur la terre, quand il y a quelque empêchement. Pl. VI, fig. 4.

Il ſeroit facile par la vue de prolonger la ligne donnée AB ſur la terre au-delà du point B, ſi la muraille FD ne ſervoit d'obſtacle. Dans ce cas, il ſuffira de trouver au-delà de la muraille FD deux points comme E, H, qui ſoient en ligne droite avec la ligne pro- Pl. VI, fig. 4.

Pl. VI, fig. 4.

posée AB ; car ainsi on pourra prolonger à la vue la droite EH, & par conséquent la ligne AB, aussi loin que l'on voudra.

Nous avons déja résolu ce problême dans notre géométrie pratique, par le moyen du demi-cercle, ce que nous pourrions faire de même ici, parce que les degrés du demi cercle sont aussi marqués sur notre instrument universel : mais nous le résoudrons autrement & plus facilement par le moyen des parties égales qui sont marquées sur la ligne de conduite & sur l'alidade, soit que la ligne proposée AB soit accessible ou inaccessible, en cette sorte.

Ayant pris, comme dans les deux problêmes précédens, deux points à volonté sur terre, comme M, N, dont la distance MN soit, par exemple, de 200 pieds, & ayant arrêté le centre de l'alidade de l'instrument universel en quelque point de sa ligne de conduite, comme en *m* ; appliquez l'instrument enforte que ce point *m* réponde sur l'extrêmité M de la ligne MN, & la ligne de conduite sur la même ligne MN, & tournez l'alidade vers deux points commodes de la ligne AB, comme vers les points A & B, pour tirer sur la surface de l'instrument le long de la ligne de foi les deux rayons visuels *m*I, *m*K. Pl, VI, fig. 4.

Après cela, portez le centre de l'alidade depuis *m* en *n*, la partie *mn* de la ligne de conduite étant de 200 parties égales pour les 200 pieds de la ligne MN; & ayant appliqué l'instrument universel ensorte que le point *n* réponde perpendiculairement sur l'autre extrêmité N de la ligne MN, & la ligne de conduite *mn* sur la même ligne MN, tournez l'alidade vers les mêmes points A, B, pour tirer pareillement sur la surface de l'instrument, le long de la ligne de foi, les deux autres rayons visuels *n*L, *n*P, qui couperont les deux premiers *m*I, *m*K en deux points, comme *a*, *b*, par où vous menerez la droite *ab*, que vous prolongerez au-delà de *b* autant qu'il vous plaira.

Après cela, choisissez sur la ligne *ab* prolongée deux points à discrétion un peu éloignés entre eux, comme *e*, *h*; & ayant avancé l'alidade vers *e*, ensorte que la ligne de foi couvre ce point *e*, comptez en ligne droite depuis N jusqu'en E, autant de pieds que la ligne *ne* contiendra de parties égales de la ligne de foi; & ayant de la même façon avancé l'alidade en *h*, ensorte que la li-

Pl. VI, fig. 4. gne de foi tombe précisément sur ce point *h*, comptez en ligne droite depuis N en H, autant de pieds que la partie *n h* contiendra de parties égales de la ligne de foi ; & les deux points E, H seront en ligne droite avec la ligne proposée AB.

PROBLEME VIII.

Tirer par un point donné sur la terre à une ligne donnée accessible d'un côté, une parallele. Pl. VI, fig. 5.

Pl. VI, fig. 5. Que la ligne donnée soit AB accessible vers A, & que le point donné soit C, par lequel il faille tirer à la ligne donnée AB une parallele. Imaginez-vous une ligne droite tirée sur la terre par le point donné C, & par l'extrêmité accessible A de la ligne AB. Mesurez (par Probl. I,) l'angle BAC, & faites (par probl. II,) au point donné C, l'angle FCG, égal au précédent BAG, par la ligne CF, qui sera parallele à la proposée AB.

Autrement.

Ayant arrêté le centre de l'alidade de

l'inſtrument univerſel en quelque point de la ligne de conduite, comme en D, & l'inſtrument étant appliqué en telle ſorte que ce point D réponde perpendiculairement à l'extrêmité A de la ligne donnée AB, & la ligne de conduite ſur la ligne AC, tournez l'alidade vers le point B, enſorte que par les pinnules vous voyez ce point B, qui eſt l'autre extrêmité de la ligne donnée AB, & laiſſez l'alidade dans cette ſituation : ou bien, parce qu'elle pourroit varier, tirez pour une plus grande ſûreté ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, la droite DE. Pl. VI, fig. 5.

Après cela appliquez de nouveau l'inſtrument univerſel, enſorte que le point D réponde perpendiculairement ſur le point donné C, & la ligne de conduite ſur la ligne AC, & faites planter ſur terre quelques piquets qui ſoient en ligne droite avec la ligne de foi de l'alidade arrêtée ſur la ligne DE, & ces piquets feront ſur terre une ligne droite CF, qui ſera parallele à la ligne donnée AB.

Remarque.

Si la ligne donnée AB étoit entiérement acceſſible, au lieu de tirer du point

Pl. VI, fig. 5. donné C, par l'extrêmité A, une ligne droite, on la pourroit tirer du même point donné C, par tel autre point que l'on voudroit de la ligne donnée AB, ſelon qu'il ſembleroit plus commode, & travailler, comme il vient d'être enſeigné, en prenant cet autre point pour le point A.

PROBLEME IX.

Tirer par un point donné ſur la terre à une ligne donnée inacceſſible, une parallele. Pl. VI, fig. 6.

Pl. VI, fig. 6. Que la ligne donnée inacceſſible ſoit AB, & que le point donné ſoit C, par lequel il lui faille tirer une parallele. Prenez à diſcrétion un point ſur terre, comme D, par lequel & par le point donné C, il faut imaginer la ligne droite CD, & en meſurer exactement la grandeur, que nous ſuppoſerons de 100 pieds.

Cette préparation étant faite, arrêtez le centre de l'alidade de l'inſtrument univerſel en quelque point de la ligne de conduite, comme en *d*, & l'inſtrument univerſel étant appliqué en telle ſorte que le centre *d* réponde ſur le point

D, & la ligne de conduite ſur la ligne CD, tournez l'alidade vers les extrêmités A, B de la ligne donnée AB, & tirez ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, les droites *d* E, *d* F. Pl. VI, fig. 6.

Après cela, tranſportez l'inſtrument vers le point donné C, & le centre de l'alidade, qui étoit en *d*, étant avancé en *c* de 100 parties égales de la ligne de conduite, pour les 100 pieds que nous avons donnés à la ligne CD, appliquez l'inſtrument enſorte que le point *c* réponde ſur le point donné C, & la ligne de conduite *cd* ſur la ligne CD, & l'alidade étant pareillement tournée vers les mêmes extrêmités A, B de la ligne donnée AB, tirez ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, les droites *c*L, *c*M, qui rencontreront les deux premieres *d*E, *d*F en deux points, comme *a*, *b* que vous joindrez ſi vous voulez par la droite *ab*.

Enfin faites planter ſur terre pluſieurs piquets qui ſoient en ligne droite avec les deux points *a*, *b*, & ces piquets feront la ligne droite GH, qui ſera parallele à la ligne donnée AB, & elle ſeroit celle qu'on cherche, ſi elle paſſoit par le point donné C; & comme elle

Pl. VI, fig. 6. n'en sera pas beaucoup éloignée, il ne sera pas difficile de tirer par ce point C la droite IK, parallele à la ligne GH: car ainsi elle sera aussi parallele à la ligne proposée AB.

PROBLEME X.

Tirer par un point donné sur une ligne donnée accessible sur la terre, une perpendiculaire. Pl. VII, fig. 7.

Pl. VII, fig. 7. Que la ligne donnée soit AB, & qu'il lui faille tirer par le point donné C une perpendiculaire. Faites (par Probl. III,) au point donné C, avec la ligne donnée AB, un angle de 90 degrés, par la droite CD, qui sera perpendiculaire à la proposée AB.

PROBLEME XI.

Tirer par un point donné hors d'une ligne donnée accessible sur la terre, une perpendiculaire. Pl. VII, fig. 7.

Pl. VII, fig. 7. Que la ligne donnée soit AB, & le point donné E, hors de cette ligne, par lequel il lui faille tirer une perpendiculaire. Ayant pris à discrétion un point comme C ſur la ligne donnée AB, tirez-lui (par Probl. X,) par ce point C la perpendiculaire indéfinie CD (par Probl. VIII,) tirez par le point donné E la droite EH, parallele à la ligne CD, & cette droite EH ſera perpendiculaire à la propoſée AB. Pl. VII, fig. 7.

PROBLEME XII.

Tirer par un point donné hors d'une ligne donnée inacceſſible ſur la terre, une perpendiculaire. Pl. VII, fig. 7.

Que la ligne donnée inacceſſible ſoit AB, & qu'il lui faille tirer par le point donné E une perpendiculaire. Tirez (par Probl. IX,) par le point donné E la droite FG, parallele à la ligne donnée AB, & (par Probl. X,) tirez par le même point donné E la droite EH, perpendiculaire à la parallele FG, & cette droite EH ſera auſſi perpendiculaire à la ligne propoſée AB. Pl. VII, fig. 7.

Autrement.

Choiſiſſez ſur terre un point commode, comme C, autant proche qu'il ſera poſſible de la ligne donnée AB, & éloi- Pl. VII, fig. 8.

Pl. VII, fig. 8. gné considérablement du point donné E; comme de cent toises, ensorte que la ligne CE soit de cette longueur, & arrêtez le centre de l'alidade de l'instrument universel en un point commode de la ligne de conduite, comme en *c*, pour appliquer en premier lieu l'instrument universel, ensorte que ce point *c* réponde perpendiculairement au point C, pris à discrétion sur la terre, & sa ligne de conduite sur la ligne CE. Après on tournera l'alidade vers les extrêmités A B de la ligne donnée AB, & on tirera sur la surface de l'instrument le long de la ligne de foi, les rayons visuels *c*F, *c*G.

Après cela retirez le centre de l'alidade de 100 parties égales de la ligne de conduite, pour les 100 toises de la ligne CE, depuis *c* en *e*, & appliquez de nouveau l'instrument en telle sorte que le point *e* réponde sur le point donné E, & la ligne de conduite *ce* sur la ligne CE, afin que l'alidade étant tournée vers les mêmes extrêmités A, B de la ligne donnée AB, on puisse tirer sur la surface de l'instrument, le long de la ligne de foi, les rayons visuels *e*H, *e*I, qui couperont les premiers *c*F, *c*G en deux points, comme *a*, *b*, par où vous irerez la droite *a b*.

Enfin tirez du point *e* la droite *e*D perpendiculaire à la ligne *ab*, & l'alidade étant avancée sur le point D, ensorte que la ligne de foi soit précisément sur la ligne *e*D, faites planter sur terre quelques piquets qui soient en ligne droite avec la ligne *e*D ou avec la ligne de foi, & ces piquets feront sur terre la ligne droite EK perpendiculaire à la proposée AB. Pl. VII, fig. 8.

PROBLEME XIII.

Mesurer une ligne sur la terre, accessible des deux côtés. Pl. VII, fig. 9.

Si la ligne AB, que je suppose accessible en A & en B, se pouvoit toute parcourir, il seroit facile de la mesurer avec un cordeau ou avec une chaîne. Mais si on ne peut pas la parcourir entiérement, à cause de quelque précipice, ou de quelqu'autre empêchement qui se rencontreroit entre ses deux extrêmités A, B, alors on la pourra mesurer avec l'instrument universel en cette sorte. Pl. VII, fig. 9.

Ayant choisi sur terre un point à volonté, comme C, mesurez avec la chaîne, ou autrement, la quantité des deux

lignes CA, CB. Nous ſuppoſerons la li-
Pl. VII, gne C A de 100 pieds, & la ligne C B
fig. 9. de 120, & parce que ces deux lignes ſont
preſque égales, il ſera bon d'arrêter le centre de l'alidade de l'inſtrument univerſel environ au milieu de la ligne de conduite, comme, par exemple, au point *c*.

Cette préparation étant faite, appliquez l'inſtrument univerſel comme il vous plaira, pourvu que néanmoins le point *c* réponde perpendiculairement au point C; & ayant tourné l'alidade vers le point A, tirez ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, la droite *ca*, longue de 100 parties égales de la ligne de foi pour les 100 pieds de la ligne CA.

Tournez auſſi l'inſtrument vers le point B, ſans en changer la ſituation, & tirez ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, la droite *cb*, longue de 120 parties égales de la ligne de foi, pour les 120 pieds de la ligne C B. Après quoi ſi vous portez avec un compas, ou autrement, la diſtance des deux points *a*, *b* ſur les parties égales de la ligne de foi, ou bien de la ligne de conduite, vous y trouverez le nombre des pieds de la ligne propoſée AB.

PROBLEME XIV.

Mesurer une ligne sur la terre accessible d'un côté. Pl. VI, fig. 5.

Pour mesurer sur terre la ligne AB, que je suppose accessible vers A, choisissez à volonté un point sur la terre un peu éloigné du point A, plus ou moins, selon la longueur de la ligne donnée AB, mais il vaudra mieux le prendre un peu plus éloigné que trop proche, pour empêcher que les rayons visuels ne se coupent trop obliquement sur la surface de l'instrument universel, comme H, & mesurez exactement la ligne AH, que nous supposerons de 200 pieds. Pl. VI, fig. 5.

Cette préparation étant faite, arrêtez le centre de l'alidade de l'instrument universel en quelque point de la ligne de conduite, comme en D, & appliquez l'instrument en telle sorte que ce point D réponde sur l'extrêmité A de la ligne donnée AB, & la ligne de conduite sur la ligne AH, après quoi l'alidade étant tournée vers l'autre extrêmité B, de la ligne donnée AB, vous tirerez sur la surface de l'instrument, le long de la ligne de foi, la droite DE.

Pl. VI, fig. 5. Après cela, avancez le centre de l'alidade de 200 parties égales de la ligne de conduite, pour les 200 pieds de la ligne AH, depuis D en I, & l'instrument étant appliqué ensorte que le point I réponde sur le point H, & la ligne de conduite DI, sur la ligne AH, tournez l'alidade vers la même extrêmité B de la ligne donnée AB, & tirez sur la surface de l'instrument, le long de la ligne de foi, la droite HL qui coupera la premiere DE en quelque point, comme en K.

Enfin portez la longueur de la ligne DK sur la ligne de conduite DI, pour sçavoir le nombre des parties égales qu'elle comprendra, & ce nombre donnera celui des pieds de la ligne donnée AB. Ou bien remettez le centre de l'alidade au point D: & l'alidade étant tournée vers le point B, ensorte que la ligne de foi tombe précisément sur la ligne DE, le point K vous montrera sur les parties égales de la ligne de foi, le nombre des pieds de la ligne proposée AB, parce que cette ligne AB se trouve représentée sur la surface de l'instrument par la ligne DK.

PROBLÊME

PROBLEME XV.

Mesurer une ligne inaccessible sur la terre.
Pl. VII, fig. 8.

Pour mesurer sur terre la ligne inaccessible AB, choisissez à volonté deux points éloignés entr'eux autant que vous pourrez, & autant proches de la ligne à mesurer AB qu'il vous sera possible, afin que les rayons visuels se coupent moins obliquement, & de peur que leurs intersections ne se fassent hors du plan de l'instrument universel: comme C, E, dont la distance CE doit être exactement connue, comme de 200 toises; & ayant arrêté le centre de l'alidade de l'instrument universel en un point commode de la ligne de conduite, comme en *c*, appliquez l'instrument en telle sorte que le point *c* réponde perpendiculairement sur le point C, & la ligne de conduite sur la ligne CE, & ayant tourné l'alidade vers les deux extrêmités A, B de la ligne à mesurer AB, tirez sur la surface de l'instrument, le long de la ligne de foi, les deux rayons visuels *c*F, *c*G. Pl. VII, fig. 8.

Après cela, faites une seconde sta-

Pl. VII, fig. 8. tion, mais auparavant avancez le centre de l'alidade de 200 parties égales de la ligne de conduite, pour les 200 toiſes de la ligne CE, depuis *c* en *e*, pour appliquer de nouveau l'inſtrument univerſel, en telle ſorte que le point *e* réponde ſur le point E, & la ligne de conduite *ec* ſur la ligne EC, après quoi l'alidade étant pareillement tournée vers les mêmes extrêmités A, B de la ligne donnée AB, on tirera ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, les deux rayons viſuels *e*H, *e*I, qui couperont les deux premiers *c*F, *c*G en deux points, comme *a*, *b*, dont la diſtance *ab* étant portée ſur la ligne de conduite, donnera, dans le nombre des parties égales qu'elle comprendra, le nombre des toiſes de la ligne propoſée AB.

Remarque.

En appliquant l'alidade ſur les lignes *ea*, *eb*, on trouve ſur les diviſions de la ligne de foi, la quantité des lignes EA, EB; de même en appliquant l'alidade ſur les lignes *ca*, *cb*, on trouve ſur les mêmes diviſions de la ligne de foi la quantité des lignes CA, CB. Ainſi vous voyez que par cette maniere on peut meſurer ſur terre pluſieurs lignes à la fois.

Pl. VII, fig. 8.

Si la ligne à meſurer étoit plus longue, comme AK, il faudroit prendre ſur terre la ligne CE auſſi plus grande à proportion, pour éviter la trop grande obliquité des rayons viſuels, & pour empêcher qu'ils ne ſe coupent hors de la ſurface de l'inſtrument univerſel.

Or comme dans ce cas il pourroit arriver que la ligne CE contiendroit plus de pieds ou de toiſes, que la ligne de conduite *ce* ne contiendroit de parties, ou que le point *e* de la ſeconde ſtation ſe trouveroit trop proche de l'extrêmité de la ligne de conduite, ce qui pourroit empêcher les rayons viſuels de s'entrecouper ſur la ſurface de l'inſtrument; il vaudra mieux meſurer la grande ligne AK en deux fois, ſçavoir, en meſurant ſéparément les parties AB, BK. Voilà ce que nous croyons le plus commode dans la pratique, laiſſant à chacun la liberté de travailler comme il entendra.

Si de chacun des deux points de ſtation C, E, on ne pouvoit pas voir les deux extrêmités A, B de la ligne à meſurer AB; comme ſi du point C on ne pouvoir voir que l'extrêmité A, & que du

Pl. VII, fig. 8. point E, on ne pût voir que l'autre extrêmité B, alors on mesurera (par Probl. XIV) les lignes CA, EB; & ayant pris la ligne *ca* d'autant de parties égales de la ligne de foi que la ligne CA contiendra de toises, & pareillement la ligne *eb* d'autant de parties égales de la ligne de foi que la ligne EB contiendra de toises, on aura, comme auparavant, les deux points *a b*, dont la distance étant portée sur la ligne de conduite ou sur la ligne de foi, fera connoître, dans le nombre des parties égales qu'elle comprendra, la quantité de la ligne proposée AB.

Pl. VII, fig. 10. Lorsqu'il sera permis de faire une station en ligne droite avec la ligne à mesurer AB, comme en C, on pourra mesurer cette ligne inaccessible AB plus facilement en cette sorte.

Ayant arrêté le centre de l'alidade de l'instrument universel en quelque lieu de la ligne de conduite, comme en *c*, & ayant choisi sur terre un point à volonté, comme D, éloigné du point C d'une quantité considérable & proportionnée à la longueur de toute la ligne CB, comme de 200 toises; appliquez l'instrument universel ensorte que le point *c* réponde perpendiculairement sur le point

C, & la ligne de conduite ſur la ligne CD ; & ayant tourné l'alidade vers le point B, enſorte que par les pinnules on voie tout le long de la ligne propoſée AB, tirez ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, la droite CE. Pl. VII, fig. 10.

Après cela tranſportez votre inſtrument vers D, après avoir avancé le centre de l'alidade de 200 parties égales de la ligne de conduite, depuis *c* en *d*, pour les 200 toiſes de la ligne CD, & appliquez l'inſtrument en telle ſorte que le point *d* réponde ſur le point D, & la ligne de conduite ſur la ligne CD, afin que l'alidade étant tournée vers les deux extrêmités A, B de la ligne à meſurer AB, vous tiriez ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, les droites *d*F, *d*G, qui rencontreront la premiere *c*E en deux points, comme *a*, *b*, dont la diſtance *a b* étant portée ſur la ligne de conduite *c d*, fera connoître, par le nombre des parties égales qu'elle comprendra, le nombre des toiſes de la ligne propoſée AB.

PROBLEME XVI.

Mesurer sur la terre une ligne accessible inclinée à l'horison. Pl. VII, fig. 11.

Pl. VII, fig. 11. La ligne AB représente le penchant d'une colline, & on la suppose accessible vers A, ensorte que quand on aura fait vis-à-vis deux stations aux points C, D, dont le premier C doit être un peu éloigné de la ligne à mesurer AB, & le second D, autant proche de la même ligne donnée AB qu'il sera possible, on puisse mesurer avec la chaîne, ou autrement, les lignes CA, DA, dont la premiere CA sera supposée de 200 toises, & la seconde DA de 10, pour avoir CD de 190.

Cette préparation étant faite, arrêtez le centre de l'alidade de l'instrument universel en un point commode de la ligne de conduite, comme en *d*, & l'instrument étant appliqué en telle sorte que ce point *d* réponde sur le point D, & la ligne de conduite sur la ligne CDA, & de plus que l'instrument soit élevé à angles droits sur l'horison, & l'alidade étant tournée vers l'extrêmité B de la ligne à mesurer AB, tirez sur la surface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, le rayon viſuel *d*E. Pl. VII, fig. 11.

Après cela avancez le centre de l'alidade de 190 parties égales, depuis *d* en *c*, pour les 190 toiſes de la ligne CD, & le centre de l'alidade étant arrêté en *c*, appliquez de nouveau l'inſtrument univerſel, enſorte que ce point *c* réponde ſur le point C, & la ligne de conduite ſur la ligne CD, & de plus que l'inſtrument ſoit élevé à plomb ſur le plan de l'horiſon, parce que la ligne CDA eſt ſuppoſée horiſontale, c'eſt-à-dire parallele à l'horiſon, afin que l'alidade étant tournée vers la même extrêmité B de la ligne à meſurer AB, on tire ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, le rayon viſuel *c*F, qui rencontrera le premier *d*F en quelque point, comme en *b*.

Enfin, prenez ſur la ligne de conduite *cd* la ligne *da* de dix parties égales, pour les 10 toiſes de la ligne DA, & tranſportez la diſtance des deux points *a*, *b* ſur la même ligne de conduite *cd*, pour avoir, dans le nombre des parties égales qu'elle comprendra, le nombre des toiſes de la ligne propoſée AB.

Remarque.

Pl. VII, fig. 11. Lorſque la ligne des ſtations CD ſera horiſontale, comme dans cette figure, la ligne de conduite doit être dans chaque ſtation parallele à l'horiſon, afin qu'elle ſoit auſſi parallele à la ligne CD, ce qui doit toujours être ainſi.

Si la ligne à meſurer AB étoit inacceſſible, ce qui empêcheroit de pouvoir connoître avec la chaîne la quantité des lignes CA, DA, il faudroit meſurer ces lignes CA, DA, comme il a été enſeigné au Probl. XIV, pour achever le reſte comme il vient d'être dit.

PROBLEME XVIII.

Meſurer une hauteur acceſſible. Pl. VIII, figure 12.

Pour meſurer la hauteur AB, que je Pl. VIII, fig. 12. ſuppoſe acceſſible, & dans un terrein égal & parallele à l'horiſon, faites ſur ce terrein une ſtation en quelque lieu commode un peu éloigné de la hauteur AB, comme C, & meſurez avec un cordeau ou autrement la ligne BC, que nous ſuppoſerons de 200 pieds.

Cette

Cette préparation étant faite, arrêtez le centre de l'alidade de l'instrument universel au point *c*, éloigné de l'extrêmité *b* de la ligne de conduite *c b* de 200 parties égales, pour les 200 pieds de la ligne BC, & appliquez l'instrument ensorte que le point *c* réponde sur le point C, & la ligne de conduite *c b* sur la ligne CB, & de plus que le plan de l'instrument soit perpendiculaire à l'horison, & la ligne de conduite *c b*, parallele au même horison, & par conséquent à la ligne CB, qui est supposée aussi parallele à l'horison. Pl. VIII, fig. 12.

Après cela, l'alidade étant tournée vers le sommet A, ensorte que par les pinnules vous voyiez ce sommet A, tirez sur la surface de l'instrument, le long de la ligne de foi, la droite *c a* qui donnera le point *a* sur le côté perpendiculaire de l'instrument, & portez la ligne *b a* sur la ligne *c b*, pour connoître le nombre des parties égales de cette ligne *b a*, & ce nombre fera connoître la hauteur AB qu'on cherche.

Remarque.

Pour faire que cette méthode réussisse toujours, il faut être éloigné de la hau-

Pl. VIII, fig. 12. teur AB, d'une quantité un peu plus grande que cette hauteur, c'est-à-dire, que la ligne BC doit être plus grande que la hauteur AB; autrement la ligne *ca* ne couperoit le côté perpendiculaire *b*D qu'au dehors de l'instrument, de sorte qu'on ne pourroit pas avoir le point *a*, ce qui empêcheroit de pouvoir connoître sans calcul la hauteur AB.

Si la ligne BC n'étoit pas horisontale, ensorte que l'angle ABC ne fût pas droit, la méthode précédente ne pourroit plus servir, & alors il faudroit mesurer la hauteur AB, en faisant deux stations, par une méthode tout-à-fait semblable à celle dont nous nous sommes servi au Problême XVI, pour mesurer une ligne inclinée.

PROBLEME XVIII.

Mesurer une hauteur inaccessible. Planche VIII, fig. 13.

Pl. VIII, fig. 13. Quoique la hauteur AB soit inaccessible, néanmoins si sa base B est visible, & que le terrein sur lequel on fait sa station en quelque point commode, comme en D, soit au niveau de la base B, ensorte que l'angle ABD soit droit, on pourra mesurer cette hauteur AB comme si elle étoit accessible, parce que la ligne BD se pourra mesurer (par Probl. XIV), & la hauteur AB (par Probl. XVII). Pl. VIII, fig. 13.

Mais si la base B de la hauteur à mesurer AB, n'est pas visible, comme si le point A représentoit le sommet d'une montage, ou d'une tour environnée de maisons, alors on ne pourra pas mesurer la ligne DB par les méthodes précédentes, parce que son extrêmité B ne sera pas visible, & on aura besoin de deux stations qui soient en ligne droite & au niveau de la base B, pour mesurer la hauteur AB en cette sorte.

Ayant arrêté le centre de l'alidade de l'instrument universel en quelque lieu commode de la ligne de conduite, comme en *c*, & ayant choisi sur le niveau de la campagne deux points qui soient en ligne droite avec la base B de la hauteur à mesurer AB, (ce qui sera facile, bien que cette base B ne soit pas visible) comme C, D, qui doivent être un peu éloignés entr'eux, comme de 200 pieds, plus ou moins, selon que la hauteur AB sera plus grande ou plus petite élevez à plomb l'instrument universel, ensorte que le point *c* réponde perpen-

Pl. VIII, fig. 13. diculairement ſur le point C, & que la ligne de conduite ſoit parallele à la ligne BC, & l'alidade étant tournée vers le ſommet A, tirez ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, la la droite CE.

Après cela avancez le centre de l'alidade de 200 parties égales de la ligne de conduite, depuis *c* en *d*, pour les 200 pieds de la ligne CD, & ayant élevé à plomb l'inſtrument univerſel, enſorte que le point *d* réponde perpendiculairement ſur le point D, & que la ligne de conduite *cd* ſoit parallele à la ligne CD, tournez l'alidade vers le ſommet A, & tirez ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, la droite *d*F qui coupera la premiere *c*E en quelque point, comme en *a*.

Enfin mettant un pied du compas ſur le point *a*, décrivez de ce point *a* comme d'un centre, un arc de cercle, qui touche & raſe la ligne de conduite *cd*, & portez l'ouverture du compas ſur la même ligne de conduite *cd*, pour ſçavoir de combien de parties égales ſera cette ouverture, parce que d'autant de pieds ſera la hauteur propoſée AB.

Remarque.

Comme l'inſtrument univerſel eſt toujours élevé au-deſſus de la terre de 3 ou de 4 pieds, étant ſoutenu par un pied qui eſt à peu près de cette hauteur, il eſt bien évident que la hauteur que l'on trouve, ne ſe prenant que depuis la ligne de conduite, qui eſt auſſi élevée au-deſſus de la terre d'environ 3 ou 4 pieds, eſt d'autant moindre que celle que l'on cherche, & qu'ainſi on lui doit ajouter ces 3 ou 4 pieds, pour avoir toute la hauteur propoſée au-deſſus de la terre.

PROBLEME XIX.

Meſurer d'en-haut une ligne inacceſſible.
Planche VIII, fig. 14.

Premierement, ſi la ligne inacceſſible eſt horiſontale, comme AB, au pied de laquelle il y ait une tour AC, enſorte que l'angle BAC ſoit droit, on pourra aiſément meſurer cette ligne AB par une ſeule ſtation faite au ſommet C de la hauteur AC, qui doit être connue; ce qui ſera facile; ſçavoir, en faiſant deſcendre un filet avec un plomb juſqu'à Pl. VIII, fig. 14.

Pl. VIII, fig. 14. ce qu'il rencontre la terre, & en mesurant la longueur de ce filet, laquelle donnera la hauteur AC, que nous supposerons de 100 pieds, par le moyen de laquelle on mesurera la ligne proposée AB en cette sorte.

Ayant arrêté le centre de l'alidade de l'instrument universel au point *c*, éloigné de l'extrêmité *a* de la ligne de conduite *ac*, de 100 parties égales, pour les 100 pieds de la hauteur AC, élevez à plomb l'instrument universel, ensorte que le point *c* réponde au point C, & que la ligne de conduite *ac* soit en ligne droite avec la hauteur AC, & tournez l'alidade vers l'extrêmité B de la ligne à mesurer AB, & tirez sur la surface de l'instrument, le long de la ligne de foi, la droite *cb* qui donnera le point *b* sur le côté *a*D, parallele à l'horison & à la ligne AB.

Enfin portez la longueur de la ligne *ab* sur la ligne de conduite *ac*, & le nombre des parties égales qui se trouveront comprises dans cette longueur, donnera le nombre des pieds de la ligne proposée AB.

Il peut arriver que la ligne *cb* coupera le côté *a*D au-dehors de l'instrument; sçavoir, lorsque la ligne à mesuter AB sera bien grande à l'égard de la hauteur AC, ce qui empêchera de pouvoir avoir le point *b* sur ce côté *a*D, & par conséquent de pouvoir connoître sans calcul la ligne proposée AB. Dans ce cas on mesurera cette ligne AB par deux stations faites dans la hauteur AC, par une méthode tout-à-fait semblable à celle que nous allons enseigner pour mesurer la même ligne AB, quand elle n'est pas horisontale ; c'est-à-dire, lorsque l'angle BAC n'est pas droit, ce qui arrive presque toujours. Pl. VIII, fig. 14.

Si la hauteur AC n'est pas précisément à l'extrêmité de la ligne horisontale à mesurer, comme seroit EB, on appliquera l'instrument universel comme auparavant, pour tirer sur la surface de l'instrument, non-seulement la ligne *cb*, mais encore la ligne *ce*, lorsque l'alidade sera tournée vers l'autre extrêmité E de la ligne à mesurer EB. Après quoi on portera la longueur de la ligne *eb* sur la ligne de conduire *ac*, & le nombre des parties égales qu'elle comprendra sera le nombre des pieds de la ligne proposée EB.

Secondement, si la ligne à mesurer n'est pas horisontale, mais inclinée à l'horison, comme EB, on la mesurera par Pl. VIII, fig. 15.

Pl. VIII, fig. 15. deux ſtations, que l'on fera dans la hauteur AC, comme C, D, dont la diſtance CD, qui doit être autant grande que l'on pourra, ſera ici ſuppoſée de 100 pieds, après quoi on travaillera en cette ſorte.

Ayant arrêté le centre de l'alidade en quelque lieu commode de la ligne de conduite de l'inſtrument univerſel, comme en *d*, il faut élever à plomb l'inſtrument, enſorte que ce point *d* convienne avec le point D, & la ligne de conduite avec la hauteur AD, & l'alidade étant tournée vers les deux extrêmités E, B de la ligne à meſurer EB, tirez ſur la ſurface l'inſtrument, le long de la ligne de foi, les droites *d*F, *d*G.

Après cela avancez le centre de l'alidade de 100 parties égales de la ligne de conduite, depuis *d* en *c*, pour les 100 pieds de la ligne CD : & ayant fait une ſeconde ſtation en C, enſorte que le point *c* convienne avec le point C, & la ligne de conduite *cd* avec la ligne CD, tournez l'alidade vers les mêmes extrêmités E, B, de la ligne donnée EB, & tirez ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, les droites *c*H, *c*I, qui couperont les deux premieres *d*F, *d*G en deux points, comme *e*, *b*.

Enfin portez la diſtance des deux points *e*, *b*, ſur la ligne de conduite, ou bien ſur la ligne de foi, pour ſçavoir le nombre des parties égales de cette diſtance *eb*, & ce nombre fera connoître le nombre des pieds de la ligne propoſée EB. Pl. VIII, fig. 15.

Corollaire.

C'eſt de la même maniere que l'on meſurera une ligne verticale, ou une hauteur, lorſqu'on verra les deux extrêmités, c'eſt à-dire, le ſommet & la baſe : & comme il ſe peut faire qu'on n'en verra que le ſommet, alors on la meſurera comme nous allons enſeigner dans le Problême ſuivant, après avoir dit que la méthode précédente ſuppoſe que la hauteur AC & la ligne à meſurer EB, ſont dans un même plan.

PROBLEME XX.

Meſurer d'en-haut une hauteur inacceſſible.
Planche. IX, fig. 16.

Pour meſurer de la hauteur AC la hauteur inacceſſible EB, dont le ſommet B eſt ſuppoſé ſeulement viſible, (autrement cette hauteur EB ſe pourroit Pl. IX, fig. 16.

Pl. IX, fig. 16. meſurer comme il a été enſeigné au Problême XIX.) on choiſira ſur la hauteur AC deux points commodes pour y faire deux ſtations, comme C, D, dont la diſtance CD doit être exactement connue, comme de 100 pieds, auſſi bien que la hauteur AD, que nous ſuppoſerons de 50 pieds. Cette hauteur ſe connoîtra par le moyen d'un filet avec un plomb que l'on fera deſcendre depuis le point D juſqu'à ce qu'il rencontre la terre : car la longueur de ce filet fera connoître la hauteur AD, comme nous avons déja dit ailleurs.

Cette préparation étant faite, arrêtez le centre de l'alidade de l'inſtrument univerſel au point *d*, éloigné de l'extrêmité *a* de la ligne de conduite de 50 parties égales, pour les 50 pieds de la hauteur AD; & ayant élevé à plomb l'inſtrument univerſel, enſorte que le point *d* convienne avec le point D, & la ligne de conduite *ad* avec la hauteur AD, & l'alidade étant tournée vers le ſommet B de la hauteur à meſurer EB, tirez ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, la droite *d*H.

Après cela changez, comme à l'ordinaire, le centre de l'alidade, en le hauſſant depuis *d* en *c*, enſorte que *cd* ſoit de 100 parties égales pour les 100 pieds de la ligne CD, & le centre de l'alidade étant arrêté en *c*, & l'inſtrument univerſel étant élevé à plomb, enſorte que le point *c* convienne avec le point C, & la ligne de conduite *a c* avec la hauteur AC, tournez l'alidade vers la même extrêmité E de la hauteur à meſurer EB, & tirez ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, la droite *c*F qui coupera la derniere *d*H en quelque point, comme en *b*. Pl. IX, fig. 16.

Enfin mettez la pointe d'un compas au point *b* pour en décrire avec l'autre pointe un arc de cercle qui raſe le côté *a g*, qui eſt perpendiculaire à la ligne de conduite *a c*, & portez l'ouverture du compas ſur la même ligne *a c*, & le nombre des parties égales qui ſe trouveront compriſes dans cette ouverture, donnera le nombre des pieds de la ligne propoſée EB.

Remarque.

Si vous voulez ſçavoir la diſtance AE des deux hauteurs AC, EB, décrivez du même point *b* un arc de cercle qui raſe la ligne de conduite *a c*, & portez l'ouverture du compas ſur la même ligne de conduite *a c*, & le nombre des parties égales qui ſe trouveront compriſes dans cette ouverture, donnera le nombre des pieds de la diſtance AE qu'on cherche.

PROBLEME XXI.

Meſurer une profondeur. Planche IX, figure 17.

Pl. IX, fig. 17. Pour meſurer la profondeur AB du foſſé BCDE, choiſiſſez ſur terre deux points commodes, comme F, G qui doivent être de niveau, & dont le premier F doit être autant proche du point B, & le dernier G autant éloigné du même point B, qu'il ſera poſſible, pour y faire deux ſtations, ce qui ne ſeroit pas néceſſaire ſi on ſçavoit la largeur CD du foſſé; mais comme on la ſuppoſe ici inconnue, il faudra faire deux ſtations aux points F, G, dont la diſtance FG ſera ici ſuppoſée de *60* pieds; après quoi on cherchera premierement la ligne BO, ou la hauteur de l'œil par deſſus le fond du foſſé, en cette ſorte.

Arrêtez le centre de l'alidade de l'inſtrument univerſel en un point commode de la ligne de conduite, comme en *f*; & ayant élevé à plomb l'inſtrument univerſel, enſorte que le point *f* réponde perpendiculairement ſur le point F, & la ligne de conduite ſur la ligne FG, tournez l'alidade vers le point B, enſorte que par les pinnules on voye ce point, & tirez ſur la ſurface de l'inſtrument le long de la ligne de foi la droite *f*H. Pl. IX, fig. 17.

Après cela, avancez le centre de l'alidade de 60 parties égales de la ligne de conduite depuis *f* en *g*, pour les 60 pieds de la ligne FG, & le centre de l'alidade étant arrêté en *g*, & l'inſtrument univerſel étant élevé à plomb, enſorte que le point *g* réponde ſur le point G, & la ligne de conduite *fg* ſur la ligne FG, tournez l'alidade vers le même point B, & tirez ſur la ſurface de l'inſtrument, le long de la ligne de foi, la droite *g*I qui rencontrera la premiere FH en un point, comme *b*.

Enfin mettant la pointe du compas au point *b*, décrivez de ce point *b* un arc de cercle qui raſe la ligne de conduite *fg*, & portez la même ouverture du compas ſur la même ligne de conduite *fg*, pour ſçavoir de combien de parties égales ſera cette ouverture, & ce nombre donnera le nombre des pieds de la ligne BO, de laquelle ôtant la longueur AO, ou la hauteur

Pl. IX, fig. 17.
de l'œil au deſſus du point B, laquelle ne peut être que de 3 ou de 4 pieds, le reſte donnera le nombre des pieds de la profondeur AB qu'on cherche.

Remarque.

Si vous voulez ſçavoir la longueur de la ligne AD, qui eſt égale à la largeur CD du foſſé, moins le talud AC, décrivez du même point *b* un arc de cercle qui raſe la ligne perpendiculaire *g*K, & portez l'ouverture du compas ſur la ligne de conduite *fg* pour avoir dans le nombre des parties égales qu'elle comprendra, le nombre des pieds de toute la ligne AG, de laquelle ôtant les 60 pieds de la ligne FG, & encore les pieds de la petite partie DF, le reſte donnera le nombre des pieds de la ligne AD, laquelle eſt auſſi égale à la largeur intérieure BE du foſſé, plus le talud AC.

PROBLEME XXII.

Tracer un plan ſur la terre. Planche IX, figure 18.

Pour tracer un plan ſur la terre, c'eſt-à-dire, pour décrire ſur la terre un plan qui ſoit ſemblable à un plan décrit ſur le papier, comme *bcde*, attachez ce plan *bcde* ſur la ſurface de l'inſtrument univerſel; & ayant choiſi un point commode ſur le terrein, que je ſuppoſe libre & délivré de tout empêchement, comme A, faites ainſi. Pl. IX, fig. 18.

Ayant arrêté le centre de l'inſtrument univerſel en un point commode de la ligne de conduite, comme en *a*, & l'inſtrument univerſel étant appliqué horiſontalement en telle ſorte que le point *a* réponde perpendiculairement ſur le point A, & que la ligne de conduite ſoit tournée à droite ou à gauche, ſelon que vous trouverez à propos, afin que le plan propoſé *bcde* ſe puiſſe tracer ſur la terre du côté qu'il vous plaira; arrêtez l'inſtrument univerſel dans cette ſituation, & faites ainſi.

Tournez l'alidade vers un des angles du plan propoſé *bcde*, comme vers

Pl. IX, fig. 18. l'angle *b*, enforte que la ligne de foi tombe exactement fur cet angle *b*, & voyez fur les divifions de la même ligne de foi, de combien de parties égales ce point *b* eft éloigné du point *a*, pour compter fur la terre en ligne droite autant de pieds depuis A jufques en B, & le point B repréfentera le point *b* du plan propofé *b c d e*.

Tournez enfuite l'alidade vers l'autre angle *c*, & travaillez pour cet angle C, comme il a été fait pour l'angle *b*, pour avoir de la même façon fur terre la repréfentation de l'angle *c* en C, où vous ferez planter un piquet. Si vous en faites autant pour les autres angles *d*, *e*, vous aurez fur terre leur repréfentation aux points D, E, & le plan propofé *b c d e* fe trouvera tracé fur la terre & repréfenté par le plan B C D E.

Remarque.

Si le lieu où l'on veut tracer le plan eft empêché, comme fi on vouloit tracer une fortification autour d'une ville, il faudroit connoître les angles & les côtés du plan propofé, faire fur terre les mêmes angles, (par Probl. III) & prendre

prendre les côtés d'autant de toises sur la terre qu'ils auront été trouvés sur le papier.

PROBLEME XXIII.

Lever le plan d'une place accessible sur la terre. Pl. IX, figure 18.

Par une opération contraire à celle du problême précédent, on levera aisément un plan sur la terre, quand il sera accessible, & qu'on pourra le voir & aller au-dedans, comme BCDE, en choisissant, comme auparavant, un point commode sur terre, comme A, & en appliquant l'instrument universel comme il a été dit, après quoi on travaillera en cette sorte. Pl. IX, fig. 18.

Tournez l'alidade vers les angles du plan proposé BCDE, comme vers l'angle B, ensorte que par les pinnules vous voyiez cet angle B, & marquez sur la surface de l'instrument, le long de la ligne de foi, le point *b*, éloigné du centre *a*, d'autant de parties égales de la ligne de foi que l'angle B sera éloigné du point A, & ce point *b* sur l'instrument sera la représentation du point B sur la terre.

Pl. IX, fig. 18. Tournez enſuite l'alidade vers l'un des autres angles du plan propoſé BCDE, comme vers l'angle E, & travaillez pour cet angle E comme il a été fait pour l'angle B, & vous aurez ſur la ſurface de l'inſtrument univerſel la repréſentation de l'angle E en *e*. Si vous en faites autant pour les autres angles D, C, vous aurez leur repréſentation *d*, *c*, & le plan propoſé BCDE ſe trouvera repréſenté ſur l'inſtrument par le petit plan ſemblable *bcde*.

PROBLEME XXIV.

Lever le plan d'une place inacceſſible ſur la terre. Pl. IX, fig. 19.

Pour lever le plan inacceſſible CDEF, c'eſt-à-dire pour décrire ſur le papier un plan plus petit & ſemblable au propoſé CDEF, qui eſt ſuppoſé inacceſſible, attachez le papier ſur la ſurface de l'inſtrument univerſel au-deſſous de l'alidade; & ayant choiſi ſur terre deux points commodes, comme A, B, qui doivent être autant proches du plan propoſé CDEF qu'il ſera poſſible, & autant éloignés entre eux que vous pourrez, comme de 200 toiſes, faites ainſi. Pl. IX, fig. 19.

Ayant arrêté le centre de l'alidade en quelque point de la ligne de conduite, comme en *a*, & ayant appliqué horiſontalement l'inſtrument univerſel en telle ſorte que le point *a* réponde perpendiculairement ſur le point A, & la ligne de conduite ſur la ligne AB, tournez ſucceſſivement l'alidade vers les angles C, D, E, F du plan propoſé CDEF, & tirez ſur le papier appliqué au-deſſous de l'alidade, le long de la ligne de foi, Pl. IX, fig. 19. de la même alidade, les rayons visuels *a*1, *a*2, *a*3, *a*4.

Après cela avancez le centre de l'alidade de 200 parties égales de la ligne de conduite de *a* en *b*, pour les 200 toises de la ligne AB, & le centre de l'alidade étant arrêté en *b*, & l'instrument universel étant appliqué en telle sorte que le point *b* réponde sur le point B, & la ligne de conduite *ab* sur la ligne AB, tournez pareillement l'alidade vers les angles C, D, E, F du plan proposé CDEF, & tirez sur le papier, le long de la ligne de foi, les rayons visuels *b*5, *b*6, *b*7, *b*8, qui rencontreront les premiers *a*1, *a*2, *a*3, *a*4 en des points, comme *c*, *d*, *e*, *f*, que vous joindrez par des lignes droites, pour avoir sur le papier le plan *cdef* plus petit, mais semblable au proposé CDEF.

Fin de l'usage de l'Instrument universel.

TRAITÉ
DE LA DIVISION
DES CHAMPS.

LA division des champs sert pour partager une piece de terre entre deux ou plusieurs personnes, ensorte que chacune en ait une portion égale, ou telle autre partie que l'on voudra. Pour procéder par ordre, nous commencerons par le triangle, qui est la premiere des figures, pour aller ensuite aux figures de quatre côtés, & après aux polygones, comme vous allez voir dans les chapitres suivans.

CHAPITRE PREMIER.

De la division des triangles.

PROBLEME I.

Diviser le triangle donné ABC *en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes tirées de l'angle donné* A. Pl. X, figure 1.

Pl. X, fig. 1. SI vous voulez le diviser en trois triangles égaux, par exemple, divisez le côté BC opposé à l'angle A en trois parties égales aux points D, E, & menez les droites AD, AE, & les trois triangles BAD, DAE, EAC seront égaux (par la 38. du 1).

Remarque.

Il est évident (par la 1. du 6.) que si on vouloit diviser le triangle donné ABC en plusieurs parties inégales selon une raison donnée, il faudroit diviser le côté BC, selon cette même raison, en autant de parties inégales.

PROBLEME II.

Diviser le triangle donné ABC *en autant de parties égales qu'on voudra par des lignes paralleles au côté* BC. Pl. X, fig. 2.

Si vous le voulez diviser en trois parties égales, par exemple, divisez l'un des deux autres côtés AB, AC, comme AC, en trois également aux deux points D, E, & coupez le même côté AC aux deux points F, G, ensorte que la partie AF soit moyenne proportionnelle entre AC & CD, & la partie AG moyenne proportionnelle entre AC & CE. Après cela tirez par les deux points F, G au côté BC les paralleles FH, GI, lesquelles diviseront le triangle proposé ABC en trois parties égales. Pl. X, fig. 2.

Démonstration.

Car puisque les deux triangles AHI, ABC sont semblables, ils sont dans la raison des quarrés AF, AC, qui est la même que celle des lignes CD, AC, à cause des trois proportionnelles GD, AF, AC; & parce que CD est le tiers de

Pl. X, fig. 2. AC, le triangle AHF eſt auſſi le tiers du triangle ABC.

Pareillement de ce que les triangles AIG, ABC ſont ſemblables, ils ſont dans la raiſon des quarrés AG, AC, qui eſt la même que celle des lignes CE, AC, à cauſe des trois proportionnelles CE, AG, AC, & parce que CE eſt les deux tiers de AC, le triangle AIG eſt auſſi les deux tiers du triangle ABC. D'où il eſt aiſé de conclure que les deux trapézoïdes BIGC, HIGF ſont chacun le tiers du même triangle ABC, & qu'ainſi le triangle propoſé ABC eſt diviſé en trois parties égales par les deux lignes GI, FH, qui ſont paralleles au côté BC. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

Remarque.

Si on vouloit diviſer le triangle ABC en deux fois plus de parties, il faudroit diviſer en deux également le triangle AHF par une ligne parallele au côté HF, comme il vient d'être enſeigné, & auſſi en deux également chacun des deux trapézoïdes HIGF, IBCG, par une ligne parallele au côté IG, *comme il ſera enſeigné au Problême X, Chapitre II.*

PROBLEME

PROBLEME III.

Diviser en deux également le triangle ABC, *par une ligne perpendiculaire au côté* AB. Planche X, figure 5.

Ayant divisé le côté AB en E, ensorte que le quarré BE soit égal à la moitié du rectangle sous le côté AB & le segment BD terminé par la perpendiculaire CD, tirez du point E au côté AB la perpendiculaire EF, qui divisera en deux également le triangle proposé ABC. Pl. X, fig. 5.

Démonstration.

Dans les triangles semblables CDB, FEB, on a cette analogie BD, CD :: BE, EF; c'est pourquoi si aux deux premiers termes BD, CD, on donne la hauteur commune AB, & aux deux derniers la hauteur commune BE, on aura celle-ci ABD, ABCD :: $\overline{BE}^2$, BEF, où l'on voit que puisque le rectangle ABD est double du quarré BE, il faut que le rectangle ABCD soit aussi double du rectangle BEF; & en prenant leurs moitiés, on connoîtra que le triangle ABC est double du triangle FEB;

Pl. X, *ce qu'il falloit faire & démontrer.*

fig. 3. Pour trouver le point E, divisez le segment BD en deux également au point G, & tirez par ce point G au même segment BD la perpendiculaire GH, qui sera terminée en H par un demi-cercle décrit à l'entour du côté AB, & il n'y aura plus qu'à faire BE égale à BH, dont le quarré ou le rectangle ABG est bien la moitié du rectangle ABD.

Remarque.

On peut de la même façon diviser le triangle donné ABC, en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes perpendiculaires au côté AB : comme si on le vouloit diviser, par exemple, en trois parties égales, il faudroit premierement prendre la ligne BG, égale au tiers du segment BD, pour avoir le quarré BE, égal au tiers du rectangle ABD, & par conséquent le triangle BEF égal au tiers du proposé ABC. Il faudroit ensuite prendre la ligne BG égale aux deux tiers du segment BD, &c. Mais il ne faut pas que le point F tombe au-delà du point C.

PROBLEME IV.

Diviser le triangle donné ABC *en deux également par une ligne tirée du point donné* D *sur le côté* BC. Planche X, figure 4.

Ayant tiré du point donné D, à l'angle opposé A, la droite AD, tirez par le point E, milieu de BC, à la ligne AD la parallele EF, & menez la droite DF, qui divisera le triangle proposé ABC en deux également. Pl. X, fig. 4.

Démonstration.

Car si on joint la droite AE, on connoîtra (par la 1 du *6*) que le triangle BAE est la moitié du triangle ABC, & parce que le trapeze ABDF est égal au triangle BAE (comme nous avons démontré dans notre géométrie pratique), il s'ensuit que le trapeze ABDF est aussi la moitié du triangle ABC, & qu'ainsi le triangle proposé ABC se trouve divisé en deux également par la droite DF : *ce qu'il falloit faire & démontrer.*

Remarque.

On peut par cette maniere divifer le triangle donné ABC en plufieurs parties égales par plufieurs lignes tirées du point D : comme fi on le vouloit divifer en trois parties égales, il faudroit faire BE égale au tiers de BC, pour avoir le trapeze ABDF égale au tiers du triangle ABC, & enfuite faire BE égale aux deux tiers de BC, &c. Mais cela fe concevra mieux dans le problême fuivant.

PROBLEME V.

Divifer le triangle donné ABC *en autant de parties égales que l'on voudra, par des lignes tirées du point donné* D, *fur le côté donné* BC. Pl. X, fig. 5.

Pl. X, fig. 5. Pour le divifer en trois parties égales, par exemple, divifez le côté donné BC auffi en trois parties égales aux deux points E, F; & ayant tiré la droite AD, tirez-lui par les deux points E, F, les paralleles EG, FH, pour avoir fur les côtés AB, AC les deux points G, H, par lefquels on tirera au point donné D les droites DG, DH, qui diviſeront le triangle propoſé ABC en trois parties égales. Pl. X, fig. 5.

Démonſtration.

Car ſi on mene les droites AE, AF, on connoîtra (par 1, 6) que chacun des deux triangles BAE, CAF, eſt le tiers du triangle ABC; & parce que le triangle BAE eſt égal au triangle BGD, à cauſe des triangles égaux GOA, DOE, parties des triangles égaux GAE, GDE, le triangle BGD ſera auſſi le tiers du triangle ABC. Par un ſemblable raiſonnement, on connoîtra que le triangle CAF eſt auſſi égal au triangle DHC, à cauſe des deux triangles égaux APH, DPF, parties des triangles égaux AFH, DFH, & que par conſéquent le triangle DHC eſt auſſi le tiers du triangle ABC. D'où il ſuit que le trapeze AGDH eſt auſſi le tiers du même triangle ABC, & qu'ainſi les deux lignes DG, DH, diviſent le triangle propoſé ABC en trois parties égales : *ce qu'il falloit faire & démontrer.*

Remarque.

Si on vouloit diviſer le triangle donné ABC en deux fois plus de parties, on devroit divifer (*par le probl. I*) chacun des deux triangles DGB, DHC en deux également par des lignes tirées de l'angle D, & auffi le trapeze AGDH en deux également par une ligne tirée du même angle D, *comme il fera enfeigné au problême VII du chap. II.*

PROBLEME VI.

Tirer du point donné D, *au-dedans du triangle donné* ABC, *trois lignes, enforte que l'une paffe par l'angle donné* A, *& que les trois divifent le triangle donné* ABC *en trois parties égales.* Planche X, fig. 6.

Ayant fait BE égal au tiers de BC, tirez à la ligne DE, par l'angle donné A, la parallele AF, & à la ligne DC par le point G, milieu de AF, la parallele GH. Enfin tirez du point donné D, par les trois points A, F, H, les lignes DA, DF, DH, qui diviferont le triangle propofé ABC en trois parties égales.

Pl. X, fig. 6.

Démonftration.

Car il eft déja bien évident que le trapeze ABFD eft le tiers du triangle ABC,

& nous démontrerons au *problême VII du chap. II*, que l'autre trapeze ACFD est divisé en deux également par la droite DH. D'où il suit que le triangle proposé ABC se trouve ainsi divisé en trois parties égales. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROBLEME VII.

Diviser le triangle donné ABC en trois parties égales, par trois lignes tirées aux trois angles A, B, C. Planche X, figure 7.

Ayant pris sur l'un des côtés, comme sur BC, sa troisieme partie BD, tirez par le point D, au côté adjacent AB, la parallele DE, & par son point de milieu F, tirez les trois lignes FA, FB, FC, qui diviseront le triangle proposé ABC en trois parties égales. Pl, X, fig. 7.

Démonstration.

Car il est déja bien évident que le triangle AFB est le tiers du triangle ABC, parce qu'il est égal au triangle ABD, qui est le tiers du triangle ABC, (par 1, 6.) Il est évident aussi que chacun des deux autres triangles AFC, BFC, eſt le tiers du même triangle ABC, parce qu'ils ſont égaux entr'eux, à cauſe des deux triangles égaux CFD, CFE, & des deux égaux AFE, BFD, (par la 38 du 1.) D'où il ſuit que les trois lignes FA, FB, FC, diviſent le triangle propoſé ABC en trois parties égales. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROBLEME VIII.

Retrancher du triangle donné ABC un triangle égal au donné CDE, & ayant un angle égal à l'un de ceux du triangle donné ABC. Planche X, figure 8.

Pl. X, fig. 8. Ayant fait au point D l'angle CDF égal à l'angle ACB, par la droite DF, qui ſera terminée en E par la ligne EF, parallele au côté CD, faites CI égale à DF, & CH égale à CD, & menez la droite HI, qui retranchera le triangle CIH, égal au triangle CDE.

Démonſtration.

Car on connoît (par la 4 du 1,) que le triangle CIH eſt égal au triangle CDF;

& parce que le triangle CDF est égal au triangle CDE, (par 37, 1,) il suit que le triangle CIH est aussi égal au triangle CDE. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROBLEME IX.

Retrancher du triangle donné ABC un triangle égal au donné CDE, par une ligne tirée de l'angle donné B. Pl. X, fig. 8.

Ayant fait une construction semblable à celle du problême précédent, & de plus ayant tiré par le point I, à la ligne BH, la parallele IG, menez la droite BG, qui retranchera le triangle CBG, égal au donné CDE. Pl. X, fig. 8.

Démonstration.

Car, à cause des deux paralleles CD, EF, le triangle DCF est égal au donné CDE, (par 37, 1;) & à cause des quatres proportionnelles CB, CH, CI, CG, ou CB, CD, DF, CG, & des deux angles égaux, BCG, CDF, le triangle BGC sera égal au triangle CFD, & par conséquent au donné CDE, (par 15, 6.) *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROBLEME X.

Retrancher du triangle donné ABC un triangle égal au donné CDE, par une ligne tirée par le point I donné sur le côté BC. Pl. X, fig. 8.

Pl. X, fig. 8. Ayant fait au point D l'angle CDE égal à l'angle ACB, par la droite DF terminée en F par la ligne EF, parallele au côté CD, cherchez aux trois lignes IC, CD, DF, une quatrieme proportionnelle CH, & menez la droite HI qui retranchera le triangle CHI égal au donné CDE, & la démonstration s'en fera comme au problême précédent.

PROBLEME XI.

Retrancher du triangle donné ABC un triangle égal au donné CDE, par une ligne parallele au côté donné BC. Pl. X, fig. 9.

Ayant trouvé entre la baſe BC & la hauteur AF une moyenne proportionnelle HI, & pareillement entre la baſe CD & la hauteur EG, une moyenne proportionnelle LM, cherchez aux trois lignes HI, LM, AB, une quatrieme proportionnelle AN, & tirez par le point N, au côté donné BC, la parallele NO, qui retranchera le triangle ANO, égal au donné CDE. Pl. X, fig. 9.

Démonſtration.

Car puiſque les quatres lignes HI, LM, AB, AN, ſont proportionnelles, on aura cette analogie $\overline{HI}^2, \overline{LM}^2 :: \overline{AB}^2, \overline{AN}^2$; & ſi à la place du quarré HI on met le rectangle AFBC, qui lui eſt égal à cauſe des trois proportionnelles AF, HI, BC, & à la place du quarré LM, le rectangle EGCD, qui lui eſt égal, parce

Pl. X, fig. 9. que la ligne LM, a été faite moyenne proportionnelle entre les deux EG, CD, & enfin qu'à la place des deux quarrés AB, AN, on mette les triangles semblables ABC, ANO, qui sont en même raison, (par la 19 du 6): on connoîtra que le rectangle AFBC est au rectangle EGCD, comme le triangle ABC, au triangle ANO; & encore si à la place des deux rectangles AFBC, EGCD, on met leurs moitiés ou les triangles ABC, CDE, on connoîtra que les quatre triangles ABC, CDE :: ABC, ANO, sont proportionnels, & que par conséquent le triangle ANO doit être égal au triangle donné CDE. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

Remarque.

Ce problême se peut resoudre autrement & plus facilement en cette sorte. Ayant trouvé à la hauteur CP, à la hauteur EG & à la base CD une quatrieme proportionnelle AQ, cherchez entre AB, AQ une moyenne proportionnelle AN, & tirez par le point N au côté donné BC la parallele NO, qui retranchera le triangle ANO, égal au donné CDE.

Démonstration.

Car puisque les quatre lignes CP, EG, CD, AQ sont proportionnelles, le rectangle CPAQ, sera égal au rectangle CDEG, c'est pourquoi leurs moitiés ou les triangles AQC, CDE seront aussi égaux ; & parce que les triangles semblables ABC, ANO sont dans la raison des quarrés AB, AN, qui est la même que celle des lignes AB, AQ, ou des triangles ABC, AQC, le triangle ANO sera égal au triangle AQC, & par conséquent au triangle donné CDE. Pl. X, fig. 9.

Nous pourrions ajouter ici plusieurs autres problêmes touchant la division des triangles par des lignes tirées d'un point donné au-dedans & au-dehors du triangle proposé : mais comme ces sortes de problêmes sont plus curieux qu'utiles, & que leur construction est plus embarrassée, nous les laisserons pour venir plutôt à la division des figures de quatre côtés.

CHAPITRE II.

De la diviſion des quadrilateres.

PROBLEME I.

Diviſer le parallelogramme donné ABCD en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes paralleles au côté donné AD ou BC. Pl. X, fig. 10.

Pl. X, fig. 10. SI vous le voulez diviſer en trois parties égales, par exemple, diviſez le côté AB, en trois également aux points E, F, par où vous tirerez à l'autre côté AD les paralleles EG, FH, qui diviſeront le parallelogramme propoſé ABCD en trois parties égales, comme il eſt évident, (par 36, 1.)

PROBLEME II.

Diviser le parallelogramme donné ABCD en trois parties égales, en commençant par l'angle donné A. Pl. 10, fig. 11.

Ayant fait les deux lignes CE, BF égales chacune au tiers du côté AB, menez les droites AE, EF, qui diviseront le parallelogramme proposé ABCD en trois parties égales. Pl. X, fig. 11.

Démonstration.

Car il est déja bien évident (par 1, 6), que le parallelogramme EFBC est le tiers du proposé ABCD, (par 34, 1), & que l'autre ADEF est divisé en deux également par la diagonale AE. Donc, &c.

Probleme III.

Diviser le parallelogramme donné ABCD en trois parties égales, en commençant par le point E donné sur le côté AB. Pl. X, fig. 12.

Pl. X, fig. 12. Ayant divisé le côté AB en trois parties égales aux points F, G, & ayant tiré par le point F, au côté AD, la parallele FH, faites DI égal à EG, & divisez IC en deux également au point K, & EB en deux également au point L, pour tirer les droites EI, KL, qui diviseront le parallelogramme proposé ABCD en trois parties égales.

Démonstration.

Car si on tire par le point F au côté AD la parallele FH, la ligne DH sera égale à la ligne AF, & par conséquent à la ligne FG; & si des deux lignes égales EG, DI, on ôte les deux égales FG, DH, il restera la ligne EF égale à la ligne HI, ce qui fait que les deux triangles équiangles OEF, OHI, sont égaux, (par 26, 1), & que par conséquent le trapézoïde AEID est égal au parallelogramme

gramme AFHD, & conſéquemment au tiers du parallelogramme propoſé ABCD : & parce que l'autre trapezoïde EBCI ſe trouve diviſé en deux également par la droite KL, *comme nous le démontrerons au problême VI* ; il s'enſuit que le parallelogramme propoſé ABCD eſt diviſé en trois parties égales par les lignes IE, KL. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROBLEME IV.

Diviſer le parallelogramme donné ABCD en trois parties égales, par deux lignes tirées de l'angle donné A. Planche X, figure 13.

Ayant fait la ligne CE égale au tiers du côté CD, & ayant tiré par le point F, milieu de la ligne BE, à la diagonale AC, la parallele FG, menez les deux lignes AE, AG, qui diviſeront le parallelogramme propoſé ABCD en trois parties égales. Pl. X, fig. 13.

Démonſtration.

Car il a été démontré au *problême II*, que le triangle ADE eſt égal au tiers du parallelogramme proposé ABCD, & il sera démontré au *Problême VII*, que la ligne AG divise le trapeze ABCE en deux également. D'où il suit, que les lignes AE, AG divisent le parallelogramme proposé ABCD en trois parties égales. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROBLEME V.

Diviser le parallelogramme donné ABCD en trois parties égales, par deux lignes tirées du point donné E sur le côté donné AB, Pl. X, fig. 14.

Pl. X, fig. 14. Ayant fait les lignes AF, DG égales chacune au tiers du côté AB, & la ligne GH égale à la ligne EF, tirez par le point I, milieu de la ligne BH, à la ligne EC, la parallele IK, & menez les deux lignes EH, EK qui diviseront le parallelogramme proposé ABCD en trois parties égales.

Démonstration.

Car il a été démontré au *problême III*, que le trapezoïde AEHD est le tiers du parallelogramme ABCD, & le reste se démontrera au *problême VII.*

PROBLEME VI.

Diviser le trapézoïde donné ABCD en autant de parties égales qu'on voudra. Pl. X, fig. 15.

Si vous le voulez diviser, par exemple, en trois parties égales, divisez chacun des côtés paralleles AB, CD, en trois parties égales, aux points E, F, G, H, & menez les droites EG, FH qui diviseront le trapezoïde proposé ABCD, en trois parties égales, puisque ces trois parties sont composées de triangles égaux, &c. Pl. X, fig. 15.

PROBLEME VII.

Diviser le trapeze donné ABCD en deux également, par une ligne droite tirée de l'angle donné D. Planche XI, fig. 16.

Ayant tiré par le point E, milieu de la diagonale AC, la droite EF, parallele à l'autre diagonale BD, menez la droite DF, qui divisera le trapeze proposé ABCD en deux parties égales. Pl. XI, fig. 16.

Démonstration.

Pl. XI, fig. 16. Car si aux triangles égaux DEA, DEC, on ajoute les triangles égaux AEB, CEB, on aura le trapeze ADEB, égale au trapeze CDEB, & à cause du trapeze ADEB égal au triangle ADF, & du trapeze CDEB égal au trapeze CD-FB, parce que les deux triangles DEO, BFO sont égaux, comme l'on connoîtra en ôtant des deux triangles égaux DEB, DFB, le triangle commun DOB, il s'ensuit que le triangle ADF est égal au trapeze CDFB, & qu'ainsi la ligne DF divise le trapeze donné ABCD en deux également. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROBLEME VIII.

Diviser le trapeze donné ABCD en deux également, par une ligne droite tirée du point E, milieu du côté AB. Pl. XI, fig. 17.

Pl. XI, fig. 17. Ayant tiré par l'angle D, au côté donné AB, la parallele DF, tirez par son point du milieu G à la ligne EC la parallele GH, & menez la droite EH qui divisera le trapeze proposé ABCD en deux également

Démonstration.

Car si aux deux trapezoïdes AEGD, BEGF, qui sont égaux, (par le problême VI), on ajoute les triangles GCD, GCF, qui sont aussi égaux, (par 38 1), on aura le pentagone AEGCD égal au trapeze EGCB, ou le trapeze AEHD égal au trapeze EHCB, à cause des deux triangles égaux EGO, CHO, comme l'on connoîtra, en ôtant des deux triangles égaux EGC, EHC, le triangle commun EOC, ou des deux égaux EGH, CGH, le commun GOH, &c.

Exemple.

Ce problême se peut résoudre autrement & très-facilement en cette sorte. Pl. XI, fig, 18.
Ayant tiré des deux points A, B, sur le côté CD les deux perpendiculaires AF, BG, cherchez aux trois lignes AF + BG, BG, CD une quatrieme proportionnelle DH, & menez la droite EH, qui divisera le trapeze proposé ABCD en deux parties égales.

Démonstration.

Car puisque, par la construction, nous avons cette analogie, AF+BG, BG :: CD, DH, en divisant on aura celle-ci AF, BG :: CH, DH, & le rectangle AFDH sera égal au rectangle BGCH, & par conséquent le triangle AHD au triangle BHC; & à cause de l'égalité des deux triangles AEH, BEH, il s'ensuit que le trapeze ADHE est égal au trapeze BCHE, & qu'ainsi la ligne EH divise le trapeze proposé ABCD en deux parties égales. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

Ce même problême se peut aussi résoudre par le moyen du suivant, qui est plus général.

PROBLEME IX.

Diviser le trapeze donné ABCD en deux également, par une ligne droite tirée du point E donné sur le côté CD. Pl. XI, fig. 19.

Pl. XI, fig. 19. Ayant tiré de l'angle C, à la diagonale DB, la parallele CF, qui rencontre le côté AB, prolongé en F, divisez AF en deux également au point G; & ayant tiré de l'angle D à la ligne EG, la parallele DH, menez la droite EH qui divisera en deux également le trapeze proposé ABCD. Pl. XI, fig. 19.

Démonstration.

Car, à cause du triangle ADF égal au trapeze ABCD, (comme nous avons démontré dans notre géométrie pratique), sa moitié ou le triangle ADG sera aussi la moitié du trapeze ABCD & parce que ce même triangle ADG, est égal au trapeze ADEH, à cause des paralleles EG, DH, il suit que ce trapeze ADEH est aussi la moitié du donné ABCD, & que par conséquent la ligne DG divise le trapeze donné ABCD en deux parties égales. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROBLEME X.

Diviser le trapeze donné ABCD en deux également, par une ligne parallele au point donné A D, Planche XI, figure 20.

Pl. XI, fig. 20. Ayant tiré par l'angle C à la diagonale DB, la parallele CE, qui rencontre ici le côté AB, prolongé en E, & ayant divisé AE en deux également au point F, prolongez le côté CD, jusqu'à ce qu'il rencontre le côté AB prolongé en G, & abaissez du point F sur AG la perpendiculaire FO, qui sera finie en O par un demi-cercle décrit à l'entour de AG. Faites enfin GH égale à GO, & tirez par le point H, au côté AD, la parallele HI, qui divisera le trapeze proposé ABCD en deux parties égales.

Démonstration.

Car à cause du triangle ADE égal au trapeze ABCD, (*comme nous avons démontré dans notre géometrie pratique*) sa moitié, ou le triangle ADF, sera égale au trapeze BCDF : & parce que le triangle AOG est rectangle, (par 31, 3,) les ſes deux triangles AOG, FOG ſeront ſemblables, (par 8. 6.) &. (par 4. 6.) la ligne GO, ou ſon égale GH, ſera moyenne proportionnelle entre les deux AG, GF; c'eſt pourquoi la raiſon de ces deux lignes AG, GF, ſera égale à celle des deux quarrés AG, GH, (par Coroll. 20. 6.) laquelle raiſon eſt la même que celle des triangles ſemblables ADG, HIG; (par 16. 6.) & comme la raiſon des mêmes lignes AG, GF, eſt auſſi égale à celle des deux triangles ADG, FDG, (par 1. 6.) on conclut aiſément que la raiſon des deux triangles ADG, HIG eſt égale à celle des deux triangles ADG, FDG, & par conſéquent le triangle HIO eſt égal au triangle FDG; c'eſt pourquoi ſi de chacun on ôte le triangle commun BCG, il reſtera le trapeze BCIH, égal au trapeze BCDF, ou à la moitié du trapeze donné ABCD. D'où il ſuit que la droite HI diviſe le trapeze propoſé ABCD en deux parties égales. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

Pl. XI; fig. 20.

Remarque.

Ce problême ſe peut réſoudre autrement & aſſez facilement, pourvu que l'on ſçache réduire un trapeze en trapé-

Pl. XI, fig. 21.

Pl. XI, fig. 22. zoïde, & diviser un trapézoïde en deux également par une ligne parallele à l'un des deux côtés paralleles. Ce que nous enseignerons ici briévement.

Pour réduire premierement le trapeze ABCD en trapézoïde, tirez de l'angle A au côté BC la parallele AE, qui sera finie en E par la ligne DE, parallele à la diagonale AC, & menez la droite EC, & le trapézoïde ABCE sera égal au trapeze proposé ABCD.

Démonstration.

Car si des deux triangles égaux AEC, ADC, (par la 37. du 1.) on ôte le triangle commun AFC, on aura le triangle AFE égal au triangle CFD; & si à chacun de ces deux triangles égaux AFE, CFD, on ajoute le trapeze ABCF, on aura le trapézoïde ABCE égal au trapeze donné ABCD. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

Quoique cette méthode soit courte & facile, néanmoins elle ne se trouve pas propre pour notre dessein, qui est de diviser un trapeze en deux également, parce que dans cette réduction il y a deux côtés qui changent. C'est pourquoi nous enseignerons ici une autre méthode pou réduire un trapézoïde, en changeant ſeulement un côté.

Pour donc réduire le trapeze ABCD en trapézoïde, prolongez les deux côtés AD, BC, juſquà ce qu'ils ſe rencontrent en E, & coupez le côté AE en F, enſorte que le côté BE ſoit au côté AE, comme le rectangle CED au quarré EF, ce qui eſt facile. Après cela menez la droite GF, & lui tirez par le point D la parallele DG. Enfin menez la droite FG qui ſera parallele au côté AB, & le trapézoïde ABGF ſera égal au trapeze propoſé ABCD. Pl. XI, fig. 22.

Démonſtration.

Car à cauſe des triangles ſemblables EFC, EDG, le rectangle FEG ſera égal au rectangle CED, & l'on pourra faire cette analogie FEG, $\overline{EF}^2$ :: CED, $\overline{EF}^2$, & à cauſe que EF eſt une hauteur commune aux deux premiers rectangles, on pourra faire celle-ci EG, EF :: $\overline{CED}$, $\overline{EF}^2$; & ſi au lieu des deux derniers termes $\overline{CED}$, $\overline{EF}^2$, on met les deux lignes BE, AE, qui ſont en même raiſon par la conſtruction, on aura cette

Pl. XI, fig. 22. derniere analogie EG, EF : : BE, AE, laquelle fait connoître (par 6. 6.) que le petit triangle EFG est semblable au grand EAB, & que par conséquent le côté FG est parallele au côté AB ; & qu'ainsi la figure ABGF est un trapézoïde, lequel est égal au trapeze proposé ABCD, à cause de l'égalité des deux triangles FDE, FGC, (par 37. 1.) desquels ôtant le triangle commun FOC, il restera le triangle FOD égal au triangle COG, c'est pourquoi si à chacun de ces deux triangles égaux FOD, COG, on ajoute le pentagone commun ABCOF, on aura le trapeze ABCD égal au trapézoïde ABGF. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

Il ne reste plus qu'à vous enseigner la maniere de diviser en deux également le trapézoïde ABGF, par une ligne parallele au côté AB, ce qui se fera en cette sorte.

Coupez le côté AE en H, ensorte que le quarré EH soit la moitié de la somme des deux EA, EF, & menez par le point H, à la ligne AB, la parallele HI, qui divisera le trapézoïde ABGF, & par conséquent le trapeze proposé ABCD en deux également.

Démonstration.

Car puisque la somme des quarrés EA, EF est double du quarré EH, par la construction, les trois quarrés EF, EH, EA, & par conséquent les triangles semblables EFG, EHI, EAB qui sont en même raison, (par 19. 6.) seront en proportion arithmétique : c'est pourquoi l'excès du second sur le premier, sçavoir, le trapeze HIGF sera égal à l'excès du troisieme sur le second, c'est-à-dire, au trapeze ABIH. Ainsi la ligne HI divise en deux parties égales le trapézoïde ABGF, & par conséquent le trapeze proposé ABCD. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.* Pl. XI, fig. 22.

Corollaire.

Il suit de la pratique de ce problême, & du problême VI, une maniere aisée pour diviser un trapézoïde donné en quatre parties égales par deux lignes perpendiculaires entr'elles.

PROBLEME XI.

Diviser le triangle donné ABCD *en trois parties égales, par deux lignes tirées de l'angle donné* D. Planche XI, figure 23.

Pl. XI, fig. 23. Ayant tiré de l'angle C à la diagonale BD, la parallele CE qui rencontre le côté AB, prolongé en E, divisez la ligne AE en trois parties égales aux points F, G, & menez les droites DF, DG, qui diviseront le trapeze proposé ABCD en trois parties égales, à cause du triangle ADE qui est égal au trapeze ABCD, & qui est divisé en trois également par les droites DF, DG : il faut prendre garde que le point G ne doit pas passer au-delà du point B.

PROBLEME XII.

Diviser le trapeze donné ABCD *en trois parties égales, par deux lignes tirées du point* E *donné sur le côté* CD. Pl. XI, fig. 24.

Pl. XI, fig. 24. Ayant tiré de l'angle C, à la diagonale DB, la parallele CF qui rencontre le côté AB prolongé en F, faites AG égale à un tiers de AF, & ayant tiré à la ligne GE la parallele DH, & à la ligne BE la parallele CI, faites HK égale à la moitié de HI, & menez les droites EH, EK, qui diviseront le trapeze proposé ABCD en trois parties égales. Pl. XI, fig. 24.

Démonstration.

Car puisque le triangle ADF est égal au trapeze ABCD, & que le triangle ADG en est le tiers, (par 1. 6.) à cause de la base AG égale au tiers de la base AF, (par la construction) le trapeze ADEH, qui est égal au triangle ADG, à cause de la ligne EG parallele à la diagonale DH, sera aussi le tiers du trapeze ABCD; & parce que le trapeze restant BCEH se trouve divisé en deux également, par la droite EK, parce qu'elle divise en deux également le triangle HEI, qui est égal au trapeze BCEH, il s'ensuit que les deux lignes EH, EK, divisent le trapeze proposé ABCD en trois parties égales. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROBLEME XIII.

Diviser le trapeze donné ABCD *en trois parties égales, par deux lignes paralleles au côté donné* AD. Planche XI, fig. 25.

Pl. XI, fig. 25. Ayant tiré par l'angle C, à la diagonale DB, la parallele CE qui rencontre ici le côté AB, prolongé en E, & ayant fait AF égale au tiers de AE, prolongez le côté CD jusqu'à ce qu'il rencontre le côté AB prolongé en G, & ayant cherché entre AG & GF une moyenne proportionnelle GH, tirez par le point H, au côté AD, la parallele HI. Après cela tirez par le même point C, à la ligne IB, la parallele CK ; & ayant divisé HK en deux également au point L, cherchez entre HG & GL une moyenne proportionnelle GM, pour tirer par le point M au même côté AD, la parallele MN, & le trapeze proposé ABCD se trouvera divisé en trois parties égales par les deux paralleles HI, MN.

Démonstration.

Car on démontrera, *comme dans la*

Problême X, que le trapeze ADIH est le tiers du proposé ABCD, & que la ligne MN divise en deux également le trapeze HBCI, qui est égal aux deux tiers du proposé ABCD. D'où il est aisé de conclure que les deux lignes HI, MN divisent le trapeze ABCD en trois parties égales. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROBLEME XIV.

Diviser le trapeze donné ABCD *en trois parties égales, par deux lignes tirées des deux angles opposés* B, D. Pl. XII, fig. 26.

Ayant tiré de l'angle C à la diagonale DB la parallele CE, qui rencontre le côté AB, prolongé en E, faites AF égale à un tiers de AE, & menez la droite DF, laquelle étant prolongée rencontrera la parallele CE aussi prolongée en G ; & ayant divisé la ligne FG en deux également au point H, menez la droite BH, & les deux lignes DF, BH, diviseront le trapeze proposé ABCD en trois parties égales. Pl. XII, fig. 26.

Démonstration.

Car puisque la base AF du triangle ADF est le tiers de la base AE du triangle ADE, qui est égal au trapeze ABCD, ce triangle ADF sera (par 1. 6.) le tiers du triangle ADE, & par conséquent du trapeze ABCD : pareillement, parce que la base FH du triangle FBH est la moitié de la base FG du triangle FBG, qui est égal au trapeze FBCD ou aux deux tiers du trapeze ABCD, ce triangle FBH est la moitié du triangle FBG ou du trapeze FBCD, & par conséquent le tiers du trapeze ABCD. D'où il suit que le trapeze proposé ABCD est divisé en trois parties égales par les deux lignes DF, BH. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROBLEME XV.

Diviser le trapeze donné ABCD *en deux parties, dont la raison soit égale à celle des deux lignes données* AG, GH. Pl. XII, fig. 27.

Pl. XII, fig. 27. Ayant tiré des angles A, C sur la diagonale DB, les perpendiculaires AF, CE, & ayant prolongé AF en I, enforte que FI soit égale à CE, divisez AI en L, enforte que les quatre lignes AH, AG, AI, AL soient proportionnelles; & parce que le point L tombe ici sur la perpendiculaire AF du triangle ADB, divisez son côté AB en M, enforte que les quatre lignes AF, AL, AB, AM soient proportionnelles, & menez la droite DM qui divisera le trapeze proposé ABCD, en deux parties ADM, BCDM, dont la raison est égale à celle des deux lignes données AG, GH. Pl. XII, fig. 27.

Démonstration.

Car puisque (par 1. 6.) le triangle ADM est au triangle BDM comme AM à BM, en composant, le triangle ADM sera au triangle ADB, comme AM à AB, ou comme AL à AF; & pareillement puisque le triangle ADB est au triangle CDB, comme AF à CE, ou FI, en composant, le triangle ADB sera au trapeze ABCD, comme AF à AI; & si à la place du triangle ADB & de la ligne AF, on met le triangle ADM, & la ligne AL, qui sont en même raison, (comme il vient d'être démontré) on connoîtra que le triangle ADM est au trapeze ABCD, Pl. XII, fig. 27. comme AL à AI ; c'eſt pourquoi, en diviſant, le triangle ADM eſt au trapeze BCDM, comme AL à LI, ou comme AG à GH. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

Remarque.

On voit aiſément que par le moyen de ce problême, on peut retrancher d'un trapeze donné telle partie que l'on voudra, & de plus réſoudre le Problême VII & diviſer un trapeze donné en autant de parties égales que l'on voudra.

PROBLEME XVI.

Retrancher d'un trapeze donné une figure égale à une autre figure donnée.

Si l'on réduit en triangle le trapeze propoſé, comme nous avons fait dans pluſieurs Problêmes de ce Chapitre, & que de ce triangle on retranche une figure égale à la donnée par les préceptes du Chapitre précédent, le problême ſera réſolu.

Ou bien on conſidérera la raiſon de la figure donnée au trapeze donné, & à l'aide du problême précédent on diviſera le trapeze donné ſelon cette raiſon.

CHAPITRE III.

De la division des Polygones.

PROBLEME I.

Diviser un polygone régulier en deux également par une ligne tirée du milieu de l'un de ses côtés. Pl. XII, fig. 28 & 29.

PREMIEREMENT, si le polygone régulier est composé d'un nombre pair de côtés, comme l'exagone ABCDEF, on divisera deux de ses côtés opposés & paralleles, comme AB, DE, chacun en deux également aux points G, H, par où l'on menera la droite GH, qui divisera en deux parties égales l'exagone proposé ABCDEF. Pl. XII, fig. 28.

Mais si le polygone proposé est composé d'un nombre impair de côtés, comme le pentagone ABCGE, on divisera l'un de ses côtés comme AB, en deux également au point F, par où on tirera à l'angle opposé G la droite GF, qui divisera le pentagone proposé ABCGE en deux parties égales. Pl. XII, fig. 29.

Nous ne donnons pas la démonstration de ces deux pratiques, parce qu'elle eſt évidente ; car on voit aiſément que chaque polygone ſe trouve diviſé en deux trapezes égaux, puiſque les angles & les côtés de l'un ſont égaux aux angles & aux côtés de l'autre.

LEMME.

Réduire un polygone propoſé en triangle. Planche. XII, fig. 30.

Pl. XII, fig. 30. Pour réduire en triangle un polygone, comme, par exemple, le pentagone ABCDE, tirez à l'une de ſes diagonales, comme à la diagonale DB, par l'angle voiſin C, la parallele CF, qui rencontre ici le côté oppoſé AB, prolongé en F, & menez la droite DF pour avoir le trapeze AEDF égal au pentagone propoſé ABCDE, à cauſe du triangle DOC égal au triangle BOF ; c'eſt pourquoi il n'y a qu'à réduire en triangle ce trapeze AEDF ce qui ſe fera en tirant à ſa diagonale EF par l'angle D la parallele DG, qui rencontre ici le côté AF prolongé en G, par où vous menerez la droite EG, & vous aurez le triangle AEG égal au trapeze AEDF ou au pentagone propoſé ABCDE, à cauſe du triangle EOD égal au triangle FOG.

Ainſi vous voyez que l'on peut aiſément réduire en triangle tel polygone que l'on voudra, parce qu'on le peut toujours réduire en une figure d'autant de côtés moins un, & cette autre figure en une autre d'autant de côtés moins un, & continuer ainſi juſqu'au triangle. Comme ici de la figure de cinq côtés ABCDE, nous en avons fait une de quatre AEDF, & de celle-ci une de trois AEG.

PROBLEME II.

Diviſer un polygone régulier en deux également par une ligne parallele à l'un de ſes côtés. Pl. XII, fig. 31 & 32.

Premierement ſi le polygone régulier eſt pair, comme l'exagone ABCDEF, & qu'on le veuille diviſer en deux également par une ligne parallele au côté donné AB, on tirera cette ligne par les deux angles F, C, qui ſont diamétralement oppoſés & également éloignés du côté donné AB. La démonſtration en eſt trop claire pour en parler ici davantage. *Pl. XII, fig. 31.*

Mais ſi le polygone propoſé eſt impair, comme le pentagone ABCDE, on le diviſera en deux également par une ligne parallele au côté donné AB, par une *Pl. XII, fig. 32.*

Pl. XII, fig. 23. méthode qui convient à toute ſorte de polygones, comme vous allez voir.

Ayant réduit, par le lemme précédent, le pentagone propoſé ABCDE au triangle FCH, comme ici par le moyen des deux lignes BF, DH, paralleles aux deux diagonales CA, CE, diviſez la baſe FH en deux également au point G, & menez la droite CG, pour avoir le triangle FGC égal à la moitié du triangle FCH, ou du pentagone propoſé ABCDE. Tirez enſuite par le point C, au côté donné AB, une ligne parallele, qui ſe trouve ici la même que la diagonale CE, parce que le pentagone propoſé ABCDE eſt régulier. Ainſi cette parallele donnera ſur le côté AE prolongé, quand il en ſera beſoin, le point E, & le côté BC, prolongé, donnera ſur le même côté AE, auſſi prolongé, le point I. C'eſt pourquoi vous chercherez entre les lignes IE, IG, une moyenne proportionnelle IN, & vous tirerez par le point N au côté donné AB la parallele NO, qui diviſera le pentagone propoſé ABCDE en deux parties égales.

Démonſtration.

Car à cauſe des triangles ſemblables ICE,

ICE, ION, on connoît (par 19. 6.) que la raiſon du triangle ICE au triangle ION, eſt égale à celle du quarré IE au quarré IN; & ſi à la place des deux quarrés IE, IN, on met les deux lignes IE, IG, qui ſont en même raiſon, à cauſe des trois proportionnelles IE, IN, IG, & encore ſi à la place des deux lignes IE, IG, on met les deux triangles ICE, ICG, qui ſont en même raiſon (par 1. 6.) on connoîtra que la raiſon du triangle ICE au triangle ION, eſt égale à celle du triangle ICE au triangle ICG, & que par conſéquent le triangle ICG eſt égal au triangle ION; & ſi de chacun on ôte le triangle commun IBA, il reſtera le trapeze ABCG égal au trapeze ABON, c'eſt-à-dire au triangle FCG, ou à la moitié du pentagone propoſé ABCDE. Pl. XII, fig. 32.

PROBLEME III.

Diviſer un polygone régulier en quatre parties égales par deux lignes perpendiculaires entr'elles. Planche XII, figures 33 & 34.

Premierement ſi le polygone régulier eſt pair, comme l'exagone ABCDEF, diviſez deux de ſes côtés oppoſés & pa- Pl. XII, fig. 32.

ralleles, comme AB, DE, chacun en deux également aux points G, H, & menez la droite GH, & le diametre CF. Il eſt évident que ces deux lignes CF, GH, ſont perpendiculaires entr'elles, & qu'elles diviſent l'exagone propoſé AB CDEF en quatre parties égales.

Pl. XII, fig. 34. Mais ſi le polygone propoſé eſt impair, comme le pentagone ABCDE, diviſez l'un de ſes côtés, comme AB, en deux également au point F, par lequel vous tirerez à l'angle oppoſé D la droite DF, qui ſera perpendiculaire au même côté AB, & diviſera le pentagone propoſé ABCDE en deux parties égales.

Après cela, diviſez (par le Probl. II.) le même pentagone ABCDE en deux également par la droite GH, parallele au même côté AB, ce qui fera que cette parallele GH ſera perpendiculaire à la ligne DF, & que ces deux perpendiculaires DF, GH, diviſeront le pentagone propoſé ABCDE en quatre parties égales.

PROBLEME IV.

Diviſer un polygone régulier en deux également, par une ligne tirée d'un point donné ſur l'un de ſes côtés. Pl. XII, fig. 35 & 36.

Premierement ſi le polygone régulier eſt pair, comme l'exagone ABCDEF, & qu'il le faille diviſer en deux également par une ligne tirée du point donné G ſur le côté DE, prenez ſur le côté parallele AB depuis l'angle A oppoſé à l'angle D la ligne AH égale à la ligne DG, ou depuis l'angle B oppoſé à l'angle E, la ligne BH égale à la ligne EH, & menez la droite GH qui diviſera le polygone propoſé ABCDEF en deux parties égales, comme il eſt aiſé à démontrer. Pl. XII, fig. 35.

Mais ſi le polygone propoſé eſt impair, comme le pentagone ABCDE, & qu'on le veuille diviſer en deux également par une ligne tirée du point donné O ſur le côté donné CD, ſuivez cette regle générale pour toutes ſortes de polygones. Pl. XII, fig. 36.

Ayant réduit le pentagone propoſé ABCDE au triangle FCG, & ayant diviſé ſa baſe FG en deux également au point H, tirez les lignes HC, HO, & à

Pl. XII, fig. 36. la ligne HO, la parallele CN, qui donnera sur la base AE le point N, par où tirant au point donné O la droite NO, elle divisera le polygone proposé ABCDE en deux parties égales.

Démonstration.

Car il est évident que le pentagone ABCON est égal au triangle FCH, à cause de la ligne OH, parallele à la diagonale CN, & de la ligne BF parallele à l'autre diagonale CA ; & parce que le triangle FCH est la moitié du triangle FCG, ou du pentagone proposé ABCDE, il s'ensuit que le pentagone ABCON est aussi la moitié du proposé ABCDE, & qu'ainsi le pentagone proposé ABCDE est divisé en deux également par la droite NO. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROBLEME V.

Diviser le polygone donné ABCDE *en trois parties égales, par deux lignes tirées du point donné* O, *sur le côté* CD. Pl. XII, fig. 37.

Pl. XII, fig. 37. Ayant réduit le polygone proposé ABCDE au triangle FCG, & ayant fait FH égale au tiers de FG, menez les droites HO, HC, & tirez à la droite HO par le point C, la parallele CN qui donnera sur la base AE, le point N, par lequel & par le point donné O vous menerez la droite NO. Pl. XII, fig. 37.

Après cela réduisez la figure NEDO au triangle NOI, & ayant divisé sa base NI en deux également au point M, menez par ce point M au point donné O, la droite OM, laquelle avec la précédente ON divisera le polygone proposé ABCDE en trois parties égales.

Démonstration.

Car on démontrera, comme dans le Probl. précédent, que le pentagone ABCON est le tiers du proposé ABCDE, & que le triangle NOM est la moitié du trapeze NEDO; d'où l'on conclut aisément que les deux lignes OM, ON, divisent le polygone proposé ABCDE en trois parties égales. *Ce qu'il fall. faire & démontrer.*

PROBLEME VI.

Diviser en trois parties égales le polygone donné ABCDE, *par deux lignes tirées de l'angle donné* D. Pl. XII, fig. 39.

Ayant réduit le polygone proposé ABCDE au triangle FDG, divisez sa base Pl. XII, fig. 39.

Pl. XII, fig. 39. FG en trois parties égales aux points H, I, & menez les deux lignes DH, DI, qui diviseront le polygone proposé ABCDE en trois parties égales.

Démonstration.

Car on démontrera, comme auparavant, que le trapeze AEDH est le tiers du polygone proposé ABCDE; & comme le triangle HDI en est aussi le tiers, il s'ensuit que le polygone proposé ABCDE se trouve divisé en trois parties égales par les deux lignes DH, DI. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROBLEME VII.

Diviser le polygone donné ABCDE *en trois parties égales, par deux lignes tirées des deux points* O, P, *donnés sur le côté* CD. Pl. XII, fig. 40.

Pl. XII, fig. 40. Ayant réduit le polygone proposé ABCDE au triangle FDG, & ayant fait FH égale au tiers de la base FG, tirez par le point D à la ligne HO la parallele DI, & menez la droite OI. De même ayant réduit le trapeze IBCO au triangle IOL, & ayant divisé la base IL en deux également au point M, tirez à la ligne

MP par le point O la parallele ON, & menez la droite PN, & le polygone proposé ABCDE se trouvera divisé en trois parties égales par les deux lignes OI, PN. Pl. XII, fig. 40.

Démonstration.

Car on démontrera, *comme dans le Probl. IV*, que le pentagone AEDOI est le tiers du proposé ABCDE, & que le trapeze IOPN est la moitié du trapeze IBCO, & par conséquent égal au tiers du polygone proposé ABCDE, & que par conséquent le trapeze restant NBCP est aussi le tiers du même polygone ABCDE; d'où il suit que ce polygone ABCDE est divisé en trois parties égales par les deux lignes OI, PN.

PROBLEME VIII.

Diviser le polygone donné ABCDE *en deux parties dans la raison des deux lignes données* AI, IL, *par une ligne tirée de l'angle donné* D. Pl. XII, fig. 38.

Ayant réduit le polygone proposé ABCDE au triangle FDG, divisez sa base FG dans la raison donnée AI, IL au point H, ensorte que les quatre lignes AI, IL, FH, GH soient proportion- Pl. XII, fig. 38.

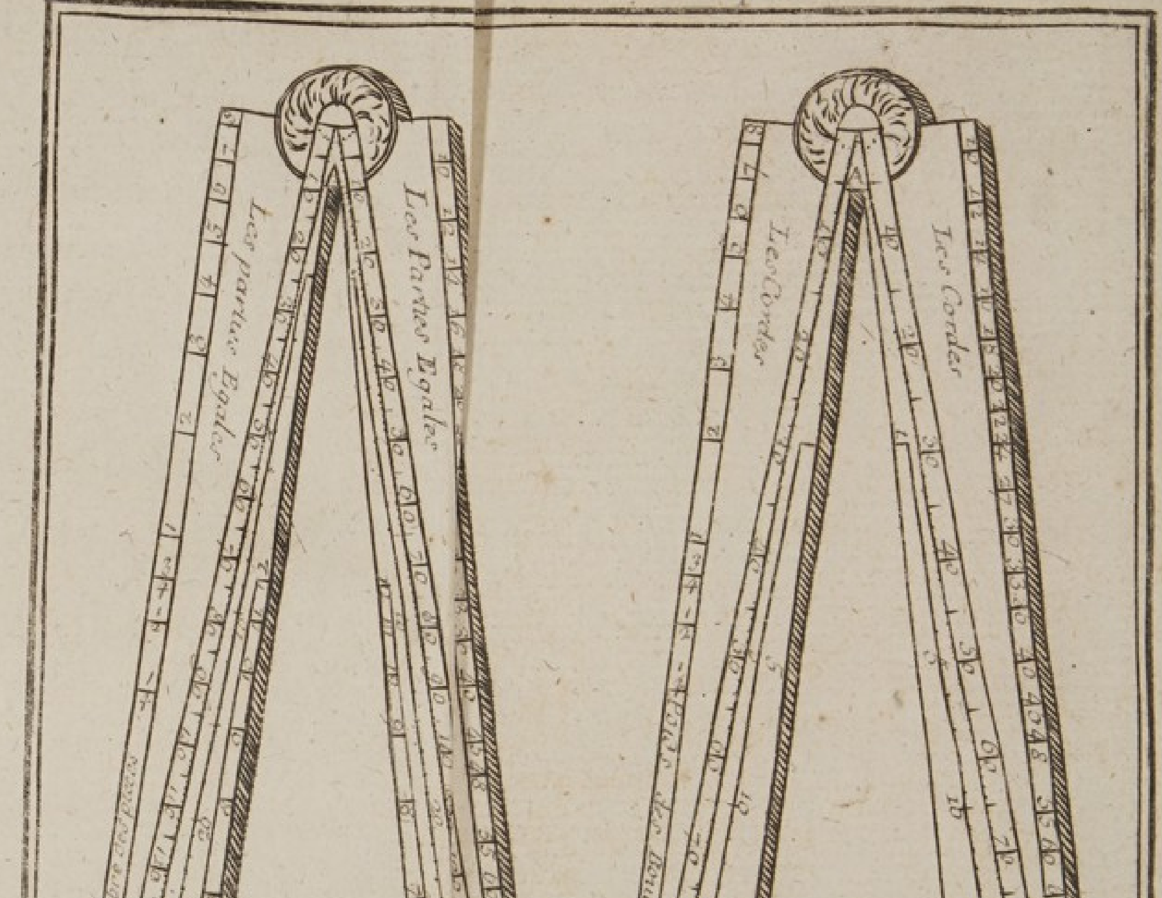
Pl. XII, fig. 38. nelles, & menez la droite DH, qui divisera le polygone proposé ABCDE en deux parties AEDH, BCDH, proportionnelles aux deux lignes données AI, IL.

Démonstration.

Car on connoîtra aisément que le trapeze AEDH est égal au triangle FDH, & que le trapeze BCDH est égal au triangle GDH, & comme les triangles FDH, GDH sont proportionnels aux deux lignes FH, GH ou aux deux données AI, IL, il s'ensuit que les deux trapezes AEDH, BCDH sont aussi proportionnels aux deux lignes données AI, IL. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

Les Problêmes que nous omettons ici, & qui ne peuvent être d'usage, se résoudront facilement à l'imitation des précédens. C'est pourquoi nous mettrons fin à ce Traité.

Fin du Traité de la Division des Champs.


Les parties Egales
Les Parties Egales
Les Cordes
Les Cordes
Calibre des pieces
Les Boulets
Les Metaux
Les Metaux
Les Plans
Les Polygones
Les Plans
Les Polygones
Les Solides
Les Solides

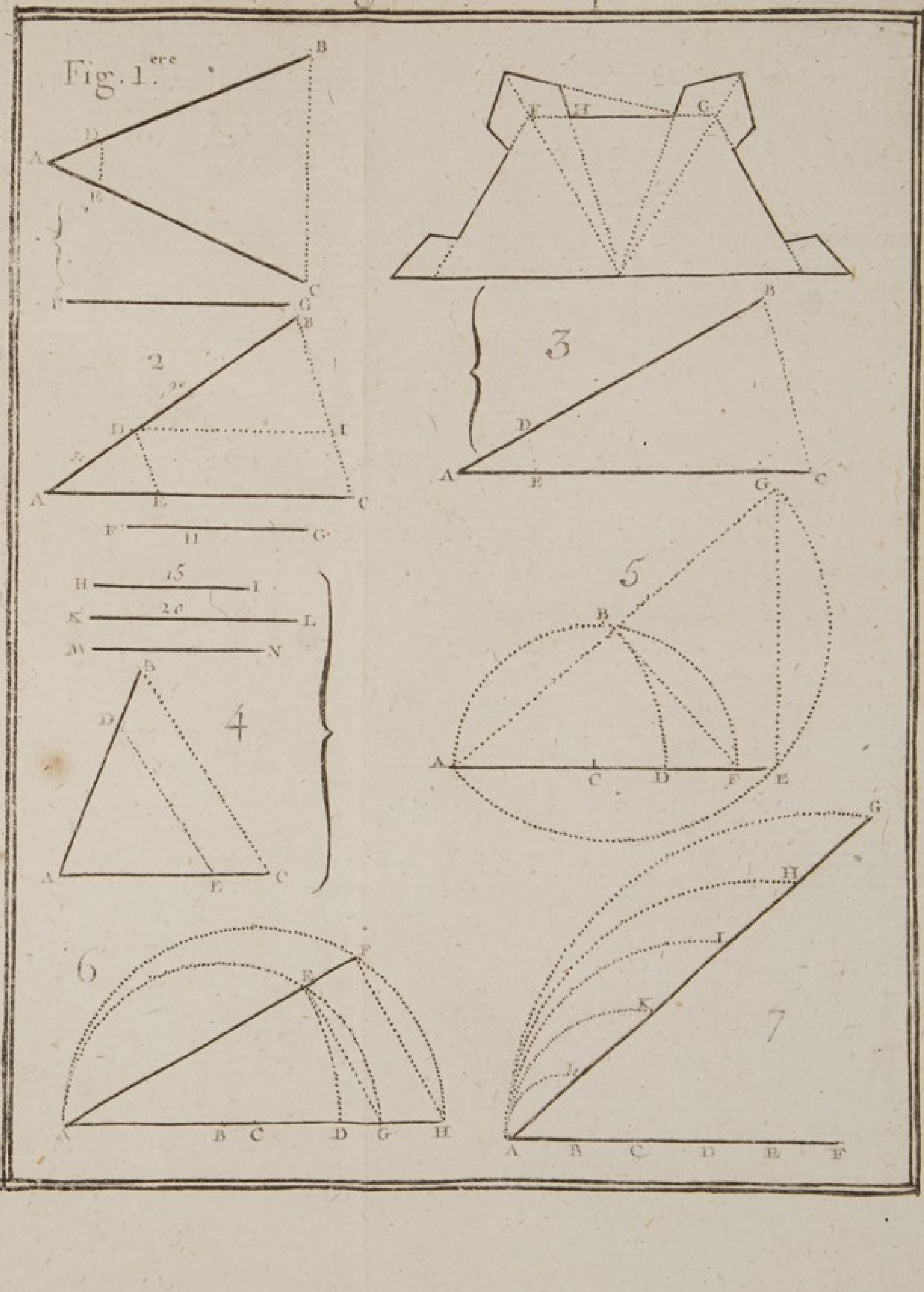
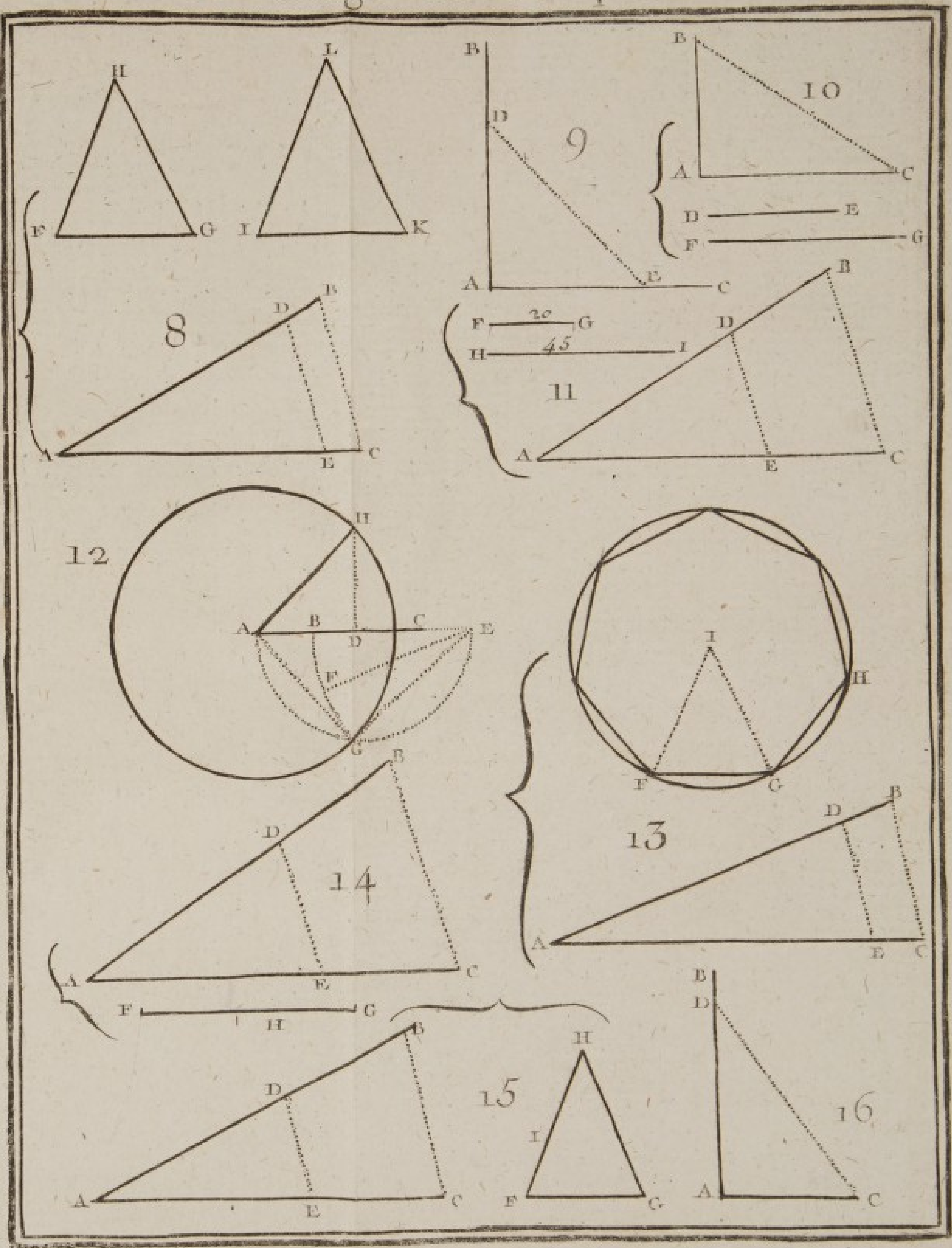
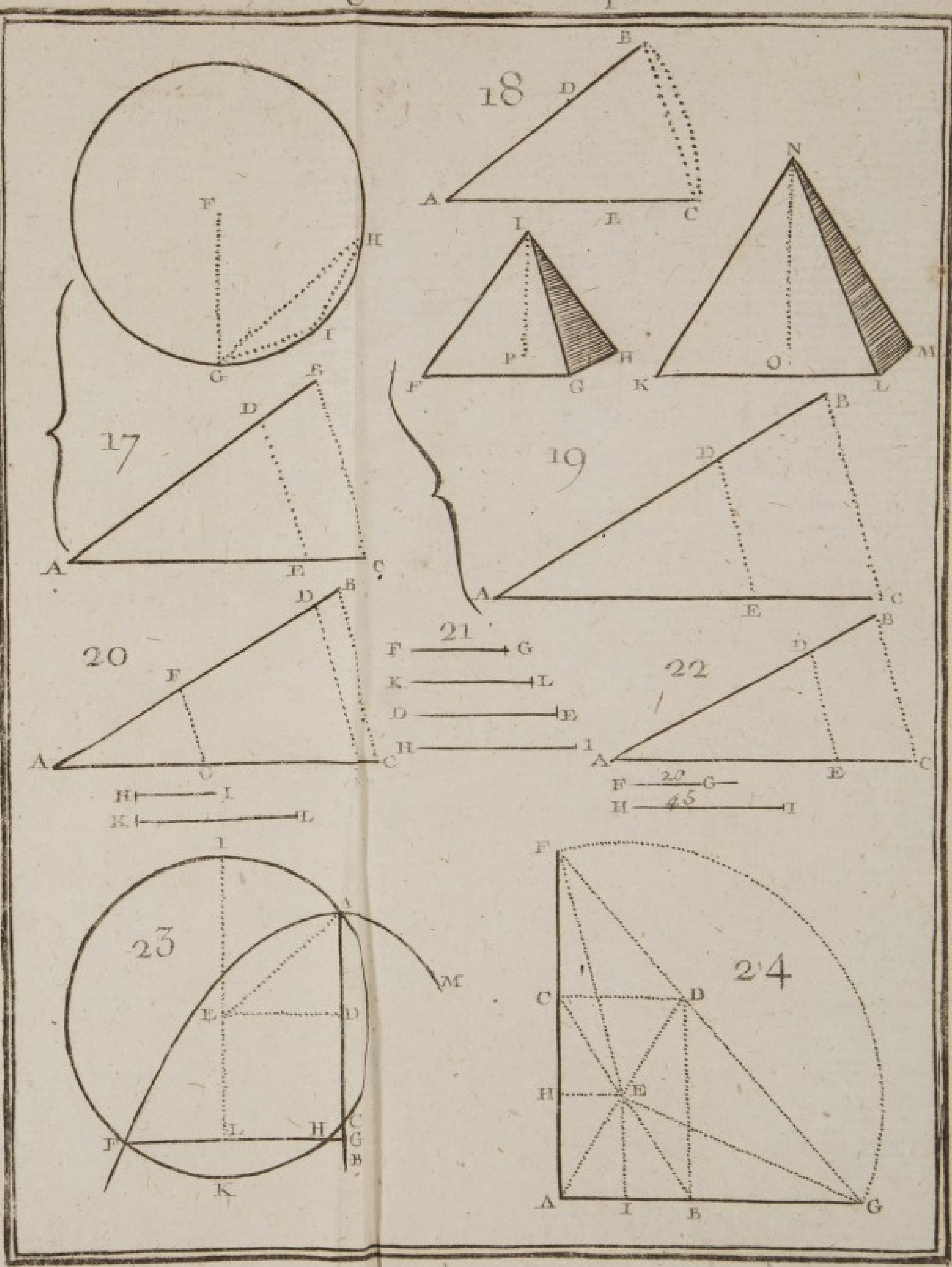
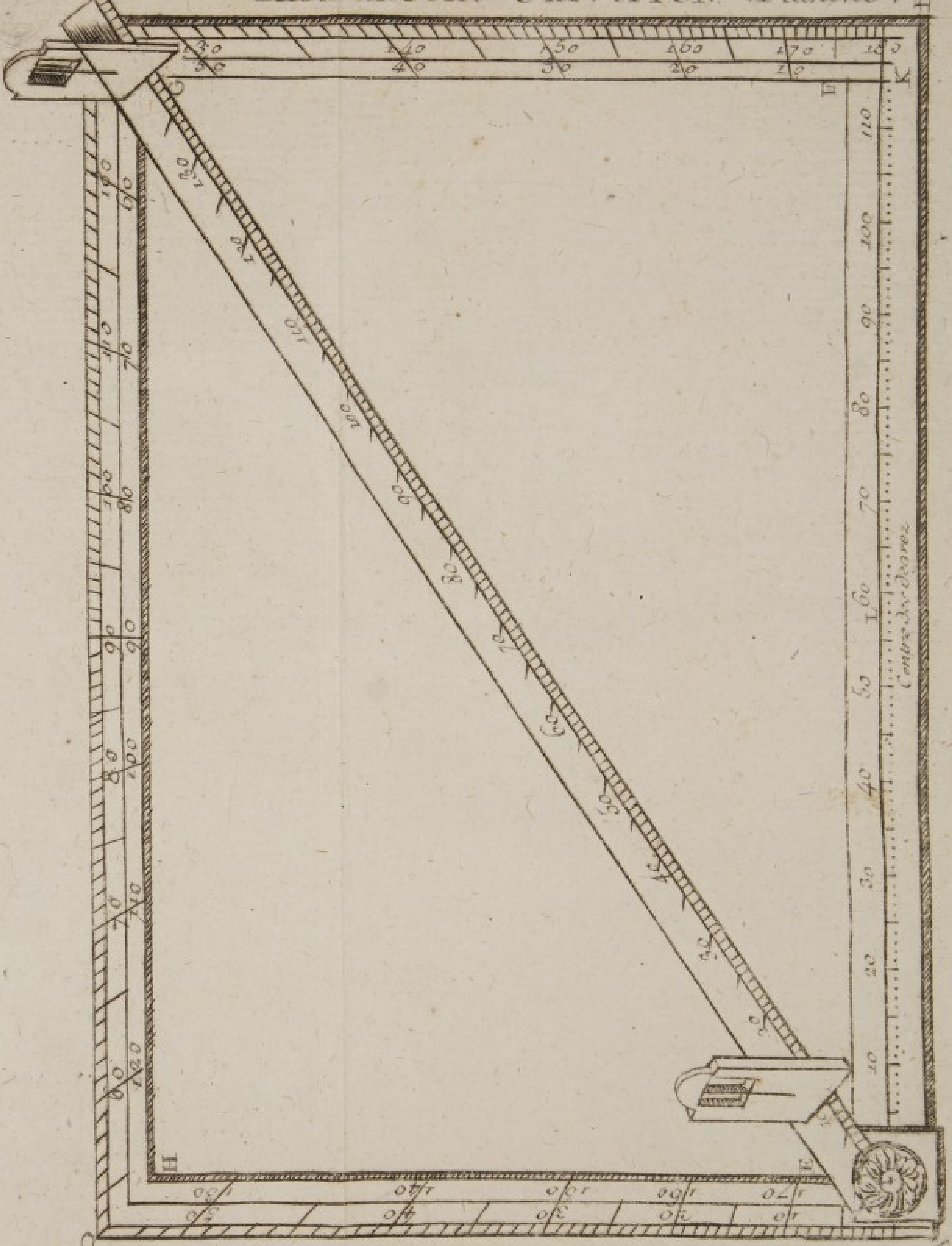


Fig. 1.ere
2
3
4
5
6
7


8
9
10
11
12
13
14
15
16
20
45


17
18
19
20
21
22
23
24

Instrument Universel. *Planche V.*



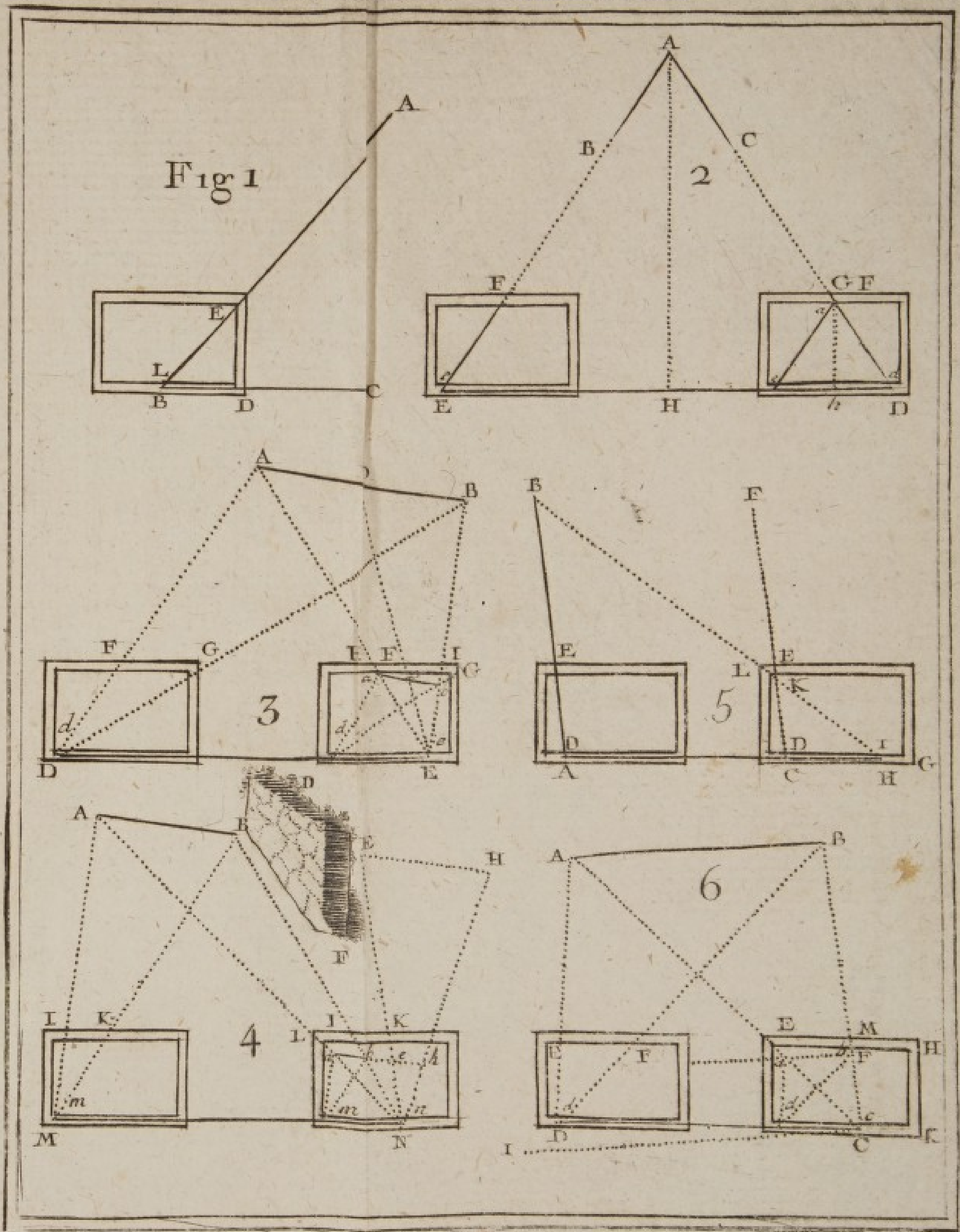
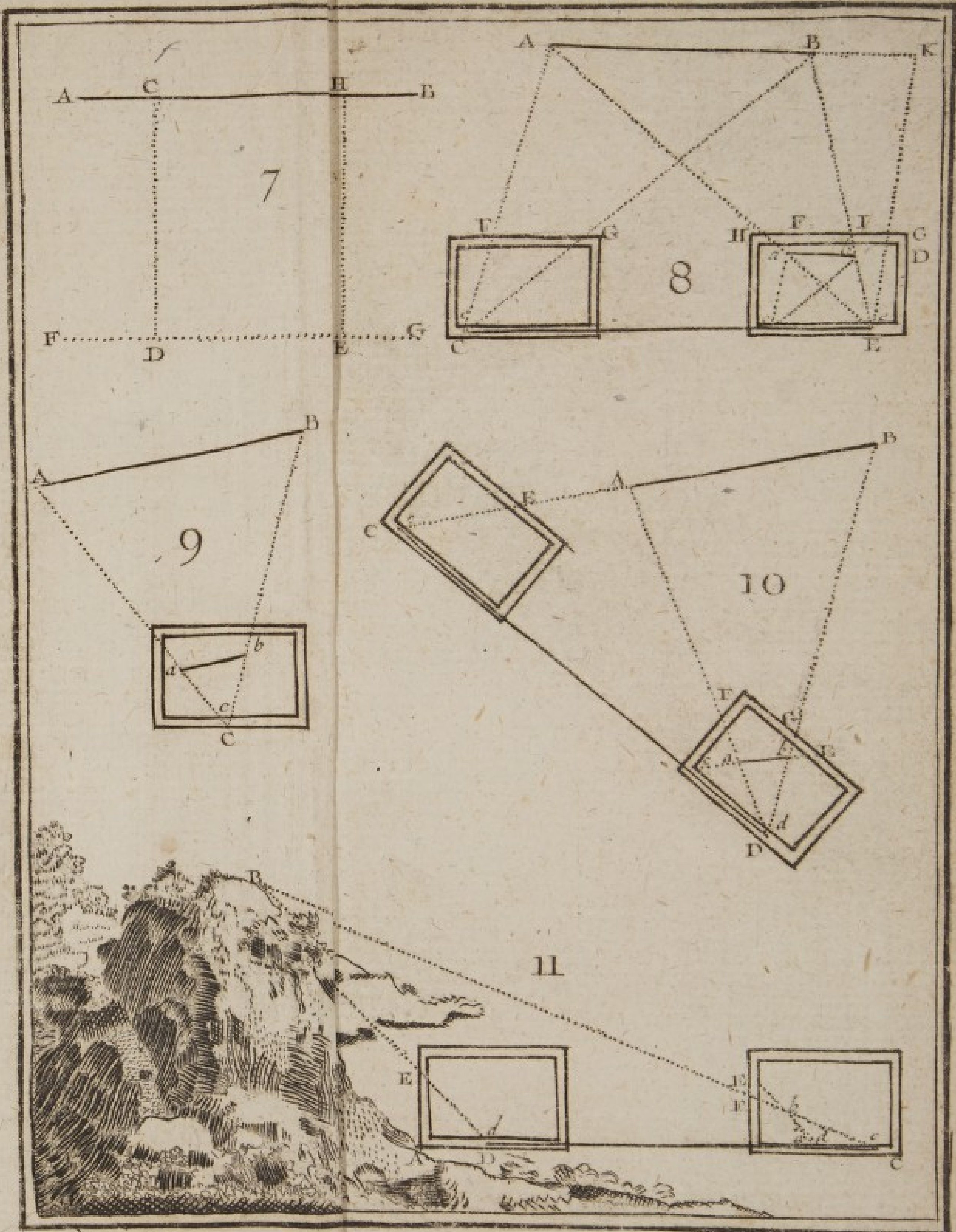
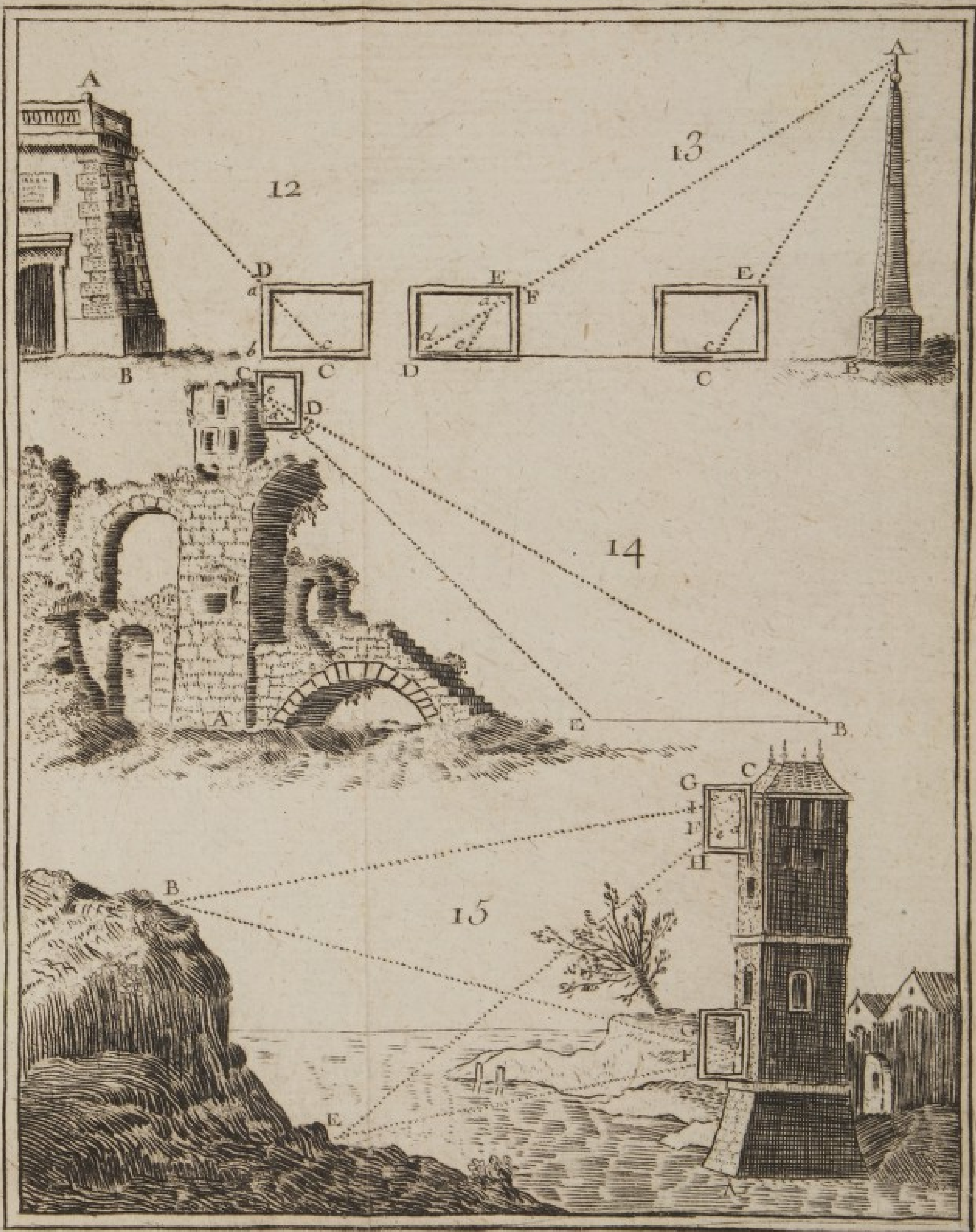
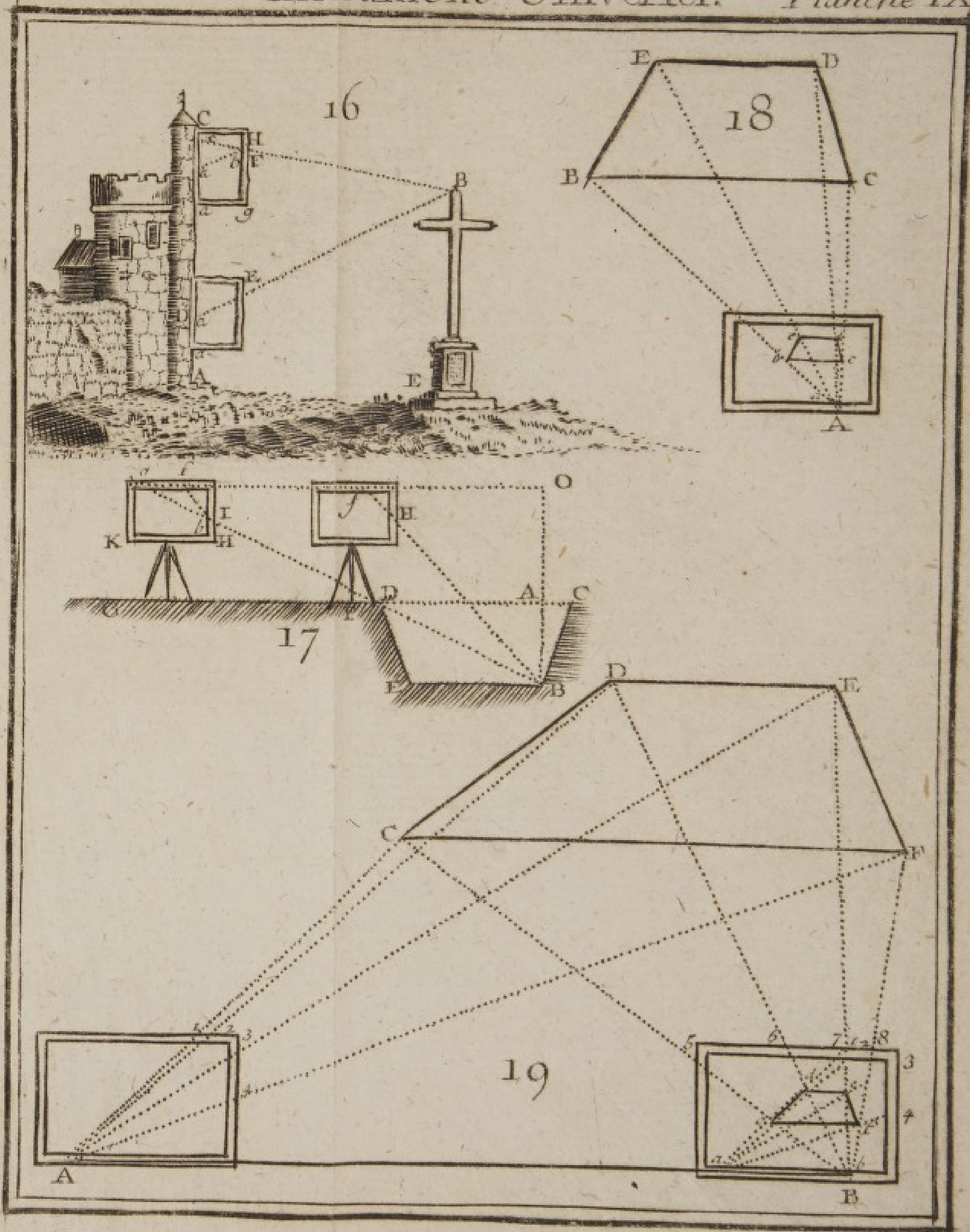


Fig 1
2
3
4
5
6


A
C
H
B
7
F
D
E
G
A
B
K
F
G
8
H
F
I
G
D
a
C
E
B
A
9
b
a
c
C
B
A
E
C
10
F
G
E
d
D
B
11
E
d
D
E
F
c
C


12
13
14
15


16
C
H
F
B
E
D
A
18
E
D
B
C
A
17
O
I
K
H
D
A
C
B
19
D
E
C
F
A
B

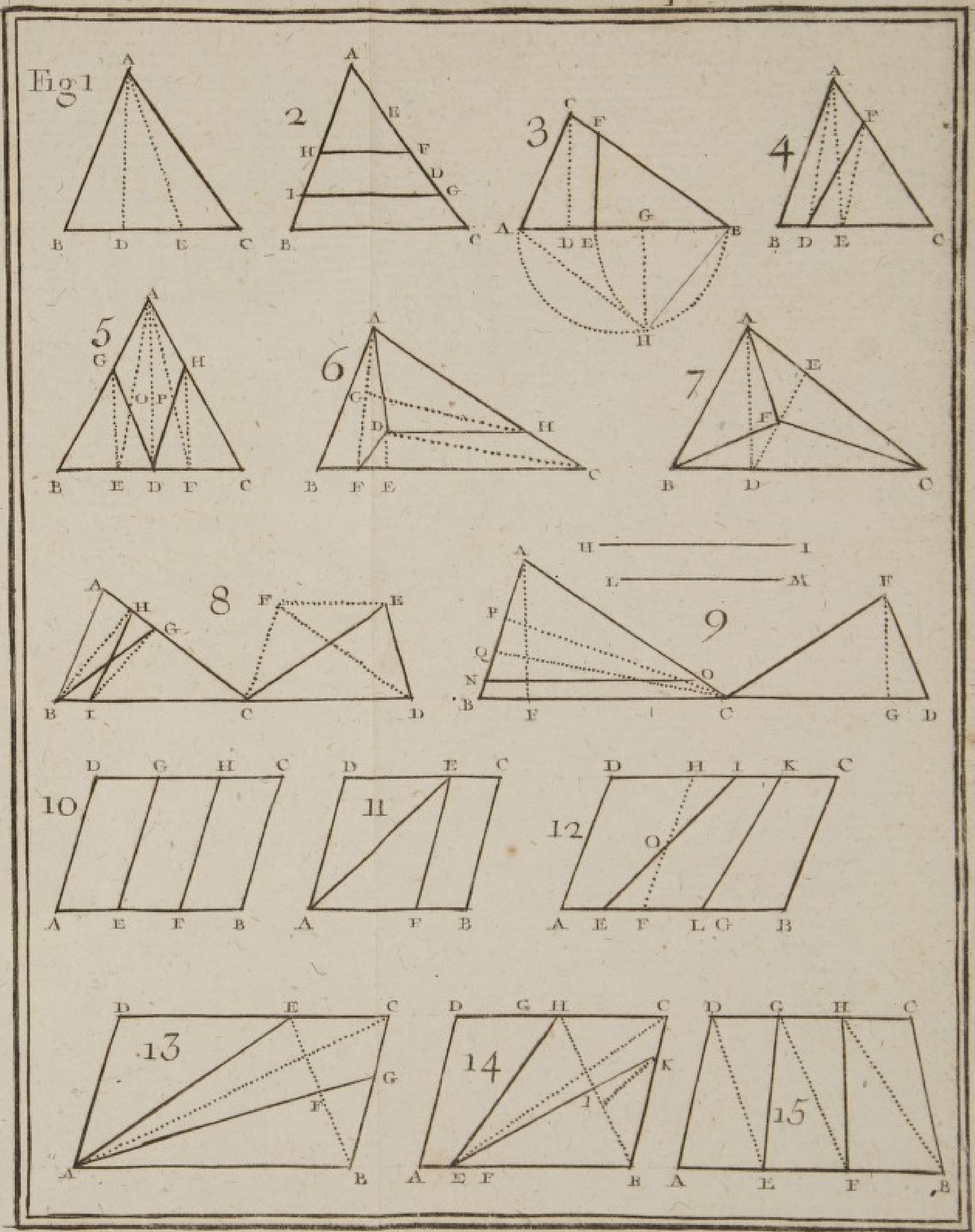
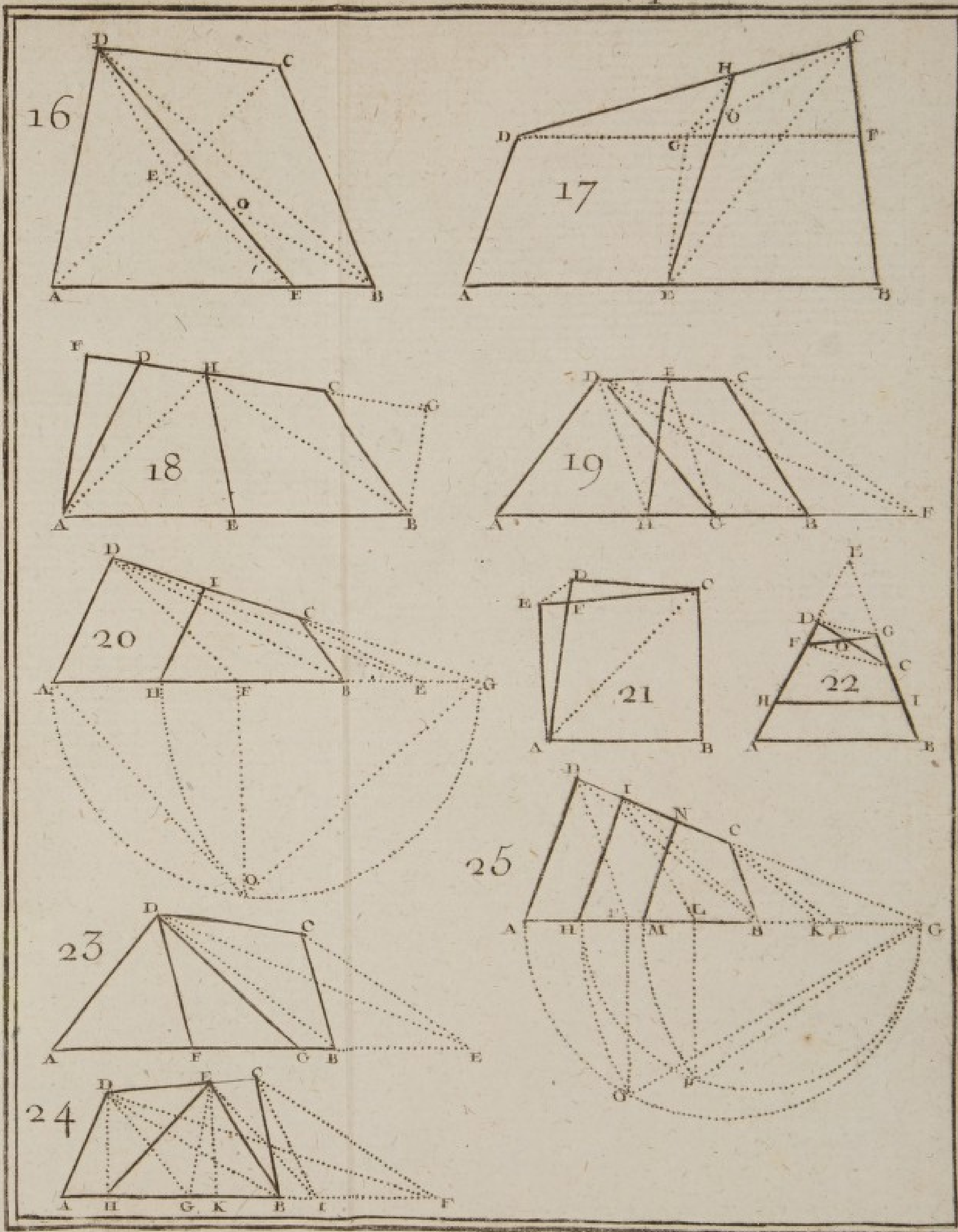
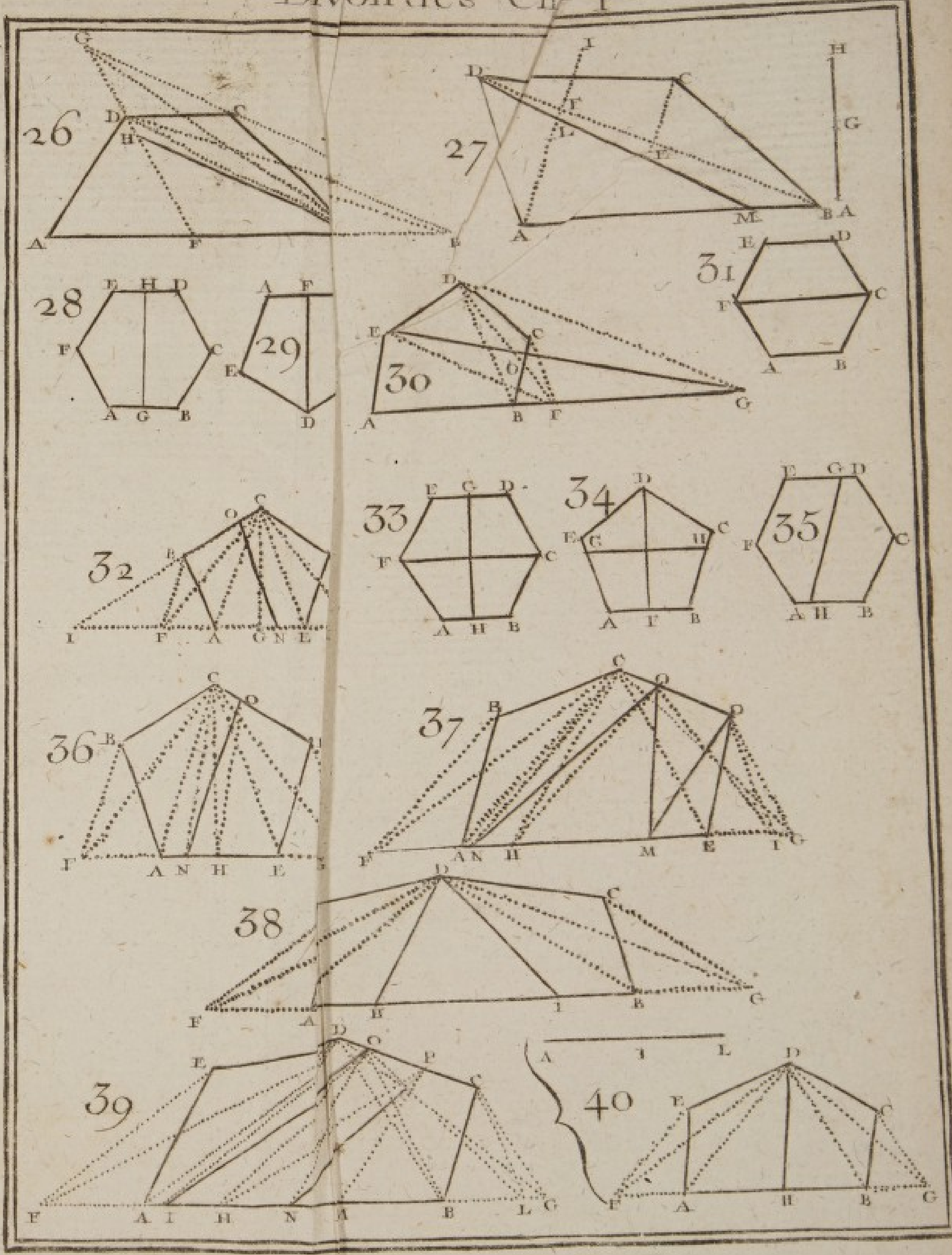


Fig 1
A B D E C
2
A E H F D I G B C
3
C F A D E G B H
4
A F B D E C
5
A G H O P B E D F C
6
A G D H B F E C
7
A E F B D C
8
A H G F E B I C D
9
H I L M A F P Q O N B F C G D
10
D G H C A E F B
11
D E C A F B
12
D H I K C O A E F L G B
13
D E C G F A B
14
D G H C K I A E F B
15
D G H C A E F B


16
17
18
19
20
21
22
23
24
25


26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40