

Theorie de la lune deduite du seul principe de l'attraction reciproquement proportionelle aux quarrés des distances / par M. Clairaut.

Contributors

Clairaut, M., 1713-1765.
Imperatorskaĭa`akademĭa`nauk" (Russia)

Publication/Creation

A St. Petersburg : Imprimerie de l'Acad. Imperiale des Sciences, 1752.

Persistent URL

<https://wellcomecollection.org/works/zv469nzk>

License and attribution

This work has been identified as being free of known restrictions under copyright law, including all related and neighbouring rights and is being made available under the Creative Commons, Public Domain Mark.

You can copy, modify, distribute and perform the work, even for commercial purposes, without asking permission.

3

P I E C E
QUI A REMPORTÉ
LE P R I X

DE L' ACADEMIE IMPERIALE
DES SCIENCES

DE St. PETERSBOURG

proposé
En M. D C C L.

SUR LA QUESTION

Si toutes les inégalités, qu' on a observées dans le mouvement de la Lune, s' accordent avec la Theorie Newtonienne ou non? & quelle est la vraie Theorie de toutes les inégalités, dont on peut deduire exactement pour un instant quelconque proposé le lieu de la Lune?

A St. P E T E R S B O U R G
de l' Imprimerie de l' Acad. Imperiale des Sciences

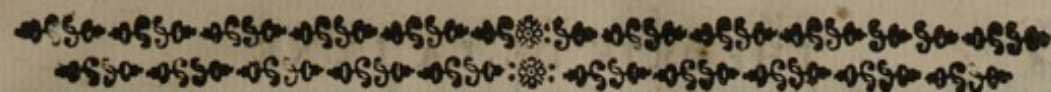
I 7 5 2.

Imprimatur

Cyrillus Comes de Rasumowsky.

THEORIE
DE LA LUNE
DEDUITE
DU SEUL PRINCIPE
DE L'ATTRACTION
RECIPROQUEMENT PROPORTIONELLE
AUX QUARRÉS DES DISTANCES.

Par M. CLAIRAUT,
des Academies Roiales de France, d' Angleterre , de Prusse
de Suede & de l' Institut de Bologne.



THEORIE DE LA LUNE.



*Qua causa argentea Phoebe
Passibus baud aequis graditur, cur subdita nulli
Haecenus astronomo numerorum fraena recuset:
Cur remeant nodi, curque auges progrediuntur.*
Edm. Halley.

DISCOURS PRELIMINAIRE.

MAlgré la quantité de belles recherches qui ont paru dans ces derniers tems sur la cause des irregularités de la Lune, il faut convenir que la Theorie de l'attraction, sur la quelle ces recherches sont toutes fondées, n'a pas encore reçu toute la lumiere qu'elle devoit tirer d'un sujet aussi important. Un des points les plus essen-

v. Journ. des sçav.
1754. p. 100, 496,
et 771. et Mem
de l'Acad. 1745
p. 329, et 1748
p. 421.
v. aussi Mem. 1743
p. 17 et s.
v. Recherches sur le
mouvement de l'apogée
lunaire, Journ. des sçav.
1750. p. 141.

tiels qu'il embrasse, la revolution de l'Apogée de la Lune, a causé des discussions très délicates & a donné l'occasion de proposer des suppléments à la Loi generale des Forces. A la verité l'un des Mathematiciens qui avoit eû recours à ces expédiens s'est retracté, & a annoncé qu'il avoit trouvé le moien de tirer de sa Theorie le vrai mouvement de l'Apogée sans employer d'autre force que celle qui suit la proportion inverse du quarré des distances. Mais outre que sa solution n'est pas publique l'examen des autres difficultés que renferme la Theorie de la Lune demande que toute la Question soit reprise en entier, si l'on veut repondre d'une maniere satisfaisante aux vuës qu'a eues l'Academie Impériale de Russie, en proposant le sujet qu'elle doit delivrer l'année prochaine. Animé par le desir de plaire à cette Scavante Compagnie j'ai traité la matiere aussi à fond qu'il m'a été permis de le faire dans le tems qu'elle a prescrit. Il m'a paru que la seule maniere

de faire connoître decisivement la justesse ou l'insuffisance des principes Newtoniens pour cette partie du système du Monde, étoit de tirer d'une solution generale, où le Probleme fut pris mathematiquement & sans employer que les données nécessaires, des formules generales, par les quelles on pût trouver le lieu de la Lune pour un instant quelconque proposé. J'ai taché de surmonter toutes les difficultés du calcul qu'exigeoit un tel projet, & j'y suis parvenu si heureusement que les Tables que j'ai tiré de ma Theorie s'accordent mieux avec les observations que toutes celles que les Astronomes ont employées jusqu'à present, quoiqu'elles fussent toutes fondées sur des recherches Astronomiques, qui étoient le fruit d'une longue suite d'observations.

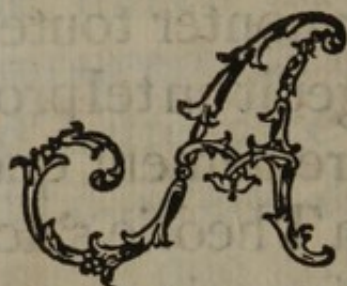
PREMIERE PARTIE.

Où l'on donne la maniere de trouver le lieu de la Lune dans son Orbite.

I.

LEMME I.

Fig. I.



TANT pris sur une droite quelconque deux parties infiniment petites & égales Mm , mn & tiré des points M , m , n à un point donné T , les droites TM , Tm , Tn , je dis que Tn sera égal à $TM + 2d(TM) + TM(MTm)^2$ & que $mTn = MTm - \frac{2d(TM)MTm}{TM}$.

Pour la démonstration V. mém. de l'acad. 1742 p. 24.

II.

PROBLEME I.

On demande l'équation d'une courbe $Mm\mu$ decrite par un corps jetté avec une vitesse & suivant une direction quelconque en supposant ce corps soumis à l'action de deux forces, l'une Σ tendante vers un centre T , l'autre Π perpendiculaire à cette direction.

Mm étant un petit coté quelconque de la courbe cherchée, mn la ligne égale à celle-là & placée sur son prolongement que le corps parcourreroit sans les forces Σ & Π , on prendra sur la droite nT tirée au centre des forces Σ , la petite par-

partie no pour exprimer l'effet de la force Σ vers ce centre, sur la perpendiculaire à nT , la petite partie $o\mu$ pour exprimer l'effet de la force Π ; par ce moyen μm sera le coté de la courbe cherchée subsequnt au coté Mm .

Cela fait, on nommera r le rayon vecteur TM ; v l'angle que ce rayon fait avec un axe TB donné de position; & dx le tems infiniment petit employé à parcourir chacun des cotés Mm , $m\mu$. Par le Lemme precedent on aura $Tn = r + 2dr + r dv^2$ & $mTn = dv - \frac{2dr dv}{r}$ & comme $T\mu = r + 2dr + ddr$ & $mT\mu = dv + ddr$, il est clair que la petite droite no aura pour expression $r dv^2 - ddr$, de même l'angle $oT\mu$ sera exprimé par $ddv + \frac{2dr dv}{r}$ & par conséquent la droite $o\mu$ par $r ddr + 2dr dv$. Or comme les espaces parcourus ont pour expressions les forces mêmes multipliées par les quarrés des tems, on aura les equations $r ddr + 2dr dv = \Pi dx^2$ & $r dv^2 - ddr = \Sigma dx^2$ pour determiner tant la courbe Mm que le tems employé à la parcourir.

III.

PROBLEME II.

Supposant que la premiere des deux forces acceleratrices celle qui pousse vers le centre T soit composée d'une partie $\frac{M}{rr}$ inversement proportionnelle au quarré de la distance & d'une autre partie quelconque Φ . On demande 1° d'exprimer la courbe Mm par une seule equation delivrée des dx . 2° que cette equation soit composée d'une partie où l'on reconnoisse la section conique que la seule force $\frac{M}{rr}$ feroit decrire & d'une autre partie

separée & sous une forme finie qui contienne la correction qu'il faut faire pour les forces Φ & Π . 3. L'expression du tems employé a parcourir une partie quelconque de la courbe.

§. 1. Par le Probl. précédent on a les deux equations $rddv + 2drdv = \Pi dx^2$ & $rdv^2 - ddr = (\frac{M}{rr} + \Phi) dx^2$. Je multiplie les termes de la 1^{ere} par r & je les divise par dx ce qui me donne $\frac{rrddv + 2rdvdr}{dx} = \Pi r dx$ donc l'integrale $\frac{rrdv}{dx} = f + \int \Pi r dx$. f étant une constante quelconque ajoutée en integrant. Multipliant ensuite les termes de cette equation par $\Pi r dx$ elle devient $\Pi r^3 dv = f \Pi r dx + \Pi r dx \int \Pi r dx$ donc l'integrale est $\int \Pi r^3 dv = f \int \Pi r dx + \frac{1}{2} (\int \Pi r dx)^2$ (il ne faut point ici de constante) d'où l'on tire $f + \int \Pi r dx = \sqrt{f^2 + 2 \int \Pi r^3 dv}$ & par conséquent $dx = \frac{rrdv}{\sqrt{f^2 + 2 \int \Pi r^3 dv}}$ d'où l'on voit que lorsque la courbe sera connue le tems le sera aussitôt.

§. 2. Reprenons maintenant l'equation $rdv^2 - ddr = (\frac{M}{rr} + \Phi) dx^2$ & donnons lui cette forme $\frac{rdv^2}{dx^2} - d(\frac{dr}{dx}) = \frac{M}{rr} + \Phi$ afin d'y pouvoir faire constante celle des differentielles qu'on voudra.

Choisissons dv pour constante & substituons à la place de $\frac{dv}{dx}$ & de $\frac{dr}{dx}$ leurs valeurs qui sont $f \frac{\sqrt{1+2\varrho}}{rr}$ & $f \frac{dr\sqrt{1+2\varrho}}{rrdv}$ en faisant $\varrho = \int \frac{\Pi r^3 dv}{f^2}$ on aura par ces substitutions $\frac{f^2(1+2\varrho)}{r^3} - \frac{f^2 ddr(1+2\varrho)}{r^4 dv} + \frac{2fdr^2(1+2\varrho)}{r^5 dv^2} - \frac{f^2 drd\varrho}{r^4 dv^2} = \frac{M}{rr} + \Phi$ que j'écris ainsi $\frac{f^2}{r^3} - \frac{f^2 ddr}{r^4 dv^2} + \frac{2f^2 dr^2}{r^5 dv^2} = \frac{M}{rr} + \Phi + \frac{f^2 drd\varrho}{r^4 dv^2}$ ou $\frac{\frac{M}{rr} + \Phi + \frac{\Pi dr}{rdv}}{1+2\varrho}$ en mettant à la place de $f^2 d\varrho$ sa valeur

$\Pi r^2 dv$. Je transforme en suite cette nouvelle equation en $\frac{f^2}{Mr} dv^2 - \frac{f^2}{Mr^2} ddr + 2 \frac{f^2 dr^2}{r^3 M} = 1 + \frac{\Phi rr}{M} + \frac{\Pi r dr}{M dv}$ ou

$$\frac{f^2}{Mr} dv^2 - d\left(\frac{f^2 dr}{Mr}\right) = 1 + \Omega \text{ en faisant } \Omega = \frac{\frac{\Phi rr}{M} + \frac{\Pi r dr}{M dv} - 2\varphi}{1 + 2\varphi}$$

Faisant alors $\frac{f^2}{Mr} = 1 - s$ l'equation se reduit à $s + \frac{d ds}{dv^2} + \Omega = 0$ que j'integre de la maniere suivante.

§. 3. Je la multiplie d'abord par $dv \cos. v$ & elle devient $\frac{d ds \cos. v}{dv} + s dv \cos. v + \Omega dv \cos. v$ dont l'integrale est $\frac{ds}{dv} \cos. v + s \sin. v + \int \Omega dv \cos. v = g$. g etant une constante quelconque. Je multiplie en-suite cette nouvelle equation par $\frac{dv}{\cos. v^2}$ (qui est la même chose que $d(\text{tang. } v)$) & j'ai $\frac{ds}{\cos. v} + \frac{s dv \sin. v}{(\cos. v)^2} + \frac{dv}{(\cos. v)^2} \int \Omega dv \cos. v = \frac{g dv}{(\cos. v)^2}$ dont l'integrale est $\frac{s}{\cos. v} + \text{tang. } v \int \Omega dv \cos. v - s \text{tang. } v$ $\int \Omega dv \cos. v = g \text{tang. } v + c$, ou $s + \sin. v \int \Omega dv \cos. v - \cos. v \int \Omega dv \sin. v = g \sin. v + h \cos. v$ laquelle en remettant à la place de s sa valeur devient $\frac{f^2}{Mr} = 1 - g \sin. v - c \cos. v + \sin. v \int \Omega dv \cos. v - \cos. v \int \Omega dv \sin. v$, & exprime l'equation cherchée de la courbe decrite par les forces $\frac{M}{rr} + \Phi$ & Π .

§. 4. La premiere partie $\frac{f^2}{Mr} = 1 - g \sin. v - c \cos. v$ de cette equation exprime la section conique qui seroit decrite par la seule force $\frac{M}{rr}$ & il est aisé de voir par cette equation en lui donnant cette forme $\frac{f^2}{Mr} = 1 - \sqrt{gg+cc}$ ($\frac{g}{\sqrt{gg+cc}} \sin. v + \frac{h}{\sqrt{gg+cc}} \cos. v$) que le foyer doit être en T, que $\frac{f^2}{M}$ est le $\frac{1}{2}$ parametre de son grand axe, $\sqrt{gg+cc}$ le raport de son excentricité au demigrand axe, & que son axe est placé dans la ligne TC déterminée en faisant l'angle CTB egal à celui dont le sinus est $\frac{g}{\sqrt{gg+cc}}$.

§. 5. Quant a la seconde partie de cette equation $\sin. v \int \Omega dv \cos. v - \cos. v \int \Omega dv \sin. v$ qui exprime la correction qu'il faut faire à la valeur $r - g \sin. v - c \cos. v$ de $\frac{f^2}{Mr}$ lorsqu'on veut avoir égard aux forces Π & Φ , il est evident qu'elle donnera tout de suite & sans rien negliger la correction cherchée lorsque Φ & Π seront exprimées de ma-

niere que Ω ou $\frac{\frac{Mr}{M} + \frac{\Pi r dr}{M dv} - 2 \int \frac{\Pi r^3 dv}{f^2}}{1 + 2 \int \frac{\Pi r^3 dv}{f^2}}$ ne dependra

que de l' angle v & qu'elle fournira un moien de connoître cette correction par approximation de constantes, & quelles que soient les valeurs de Π & Φ pour vû qu'on connoisse d'abord à peu près l'orbite, en substituant dans Ω à la place de r sa valeur tirée de la supposition faite pour la nature de cette orbite.

IV.

PROBLEME III.

Determiner f, g, h par ces conditions que le corps parte d'un lieu quelconque avec une vitesse & suivant une direction données.

Que r soit $= b$ lorsque v est $= a$ & qu'on ait en même tems q pour l'angle que fait le petit coté de la courbe avec le raïon, la vitesse au même lieu étant celle que le corps acquerroit en tombant de la hauteur i pendant qu'il seroit sollicité par la force constante $\frac{M}{bb}$ que le corps eprouve au point de depart lorsqu'on n'a point d'égard aux forces Π & Φ .

$\frac{\sqrt{2Mi}}{b}$ sera ainsi la vitesse du ceps au point de depart & par conséquent $\frac{\sqrt{2Mi}}{b} \sin q$ sera la vitesse dans la couche circulaire qui passeroit par le même point, ou ce qui revient au mê-

me $\frac{r dv}{dx}$ fera $\frac{\sqrt{2M}}{b} \sin. q$ ou $q \sqrt{2M}$. Pour determiner maintenant les deux lettres f & g il faut faire en sorte que v étant a , r soit $=b$, & $\frac{dr}{dv} = \cotang. q$ c'est à dire qu'il faut substituer dans les equations $2i \frac{(\sin. q)^2}{r} = 1 - g \sin. v - c \cos. v$ & $-2i \frac{(\sin. q)^2}{r \frac{dr}{dv}} dr = -g \cos. v + c \sin. v$ à la place de v , a ; à la place de r , b ; & à la place de $\frac{dr}{dv}$, $\cot. q$.

Par ce moyen elles donneront $\frac{2i(\sin. q)^2}{b} = 1 - g \sin. a - c \cos. a$ & $-\frac{2i(\sin. q)^2 \cot. q}{b}$ ou $-\frac{2i \sin. q \cos. q}{b}$ ou $-\frac{i}{b} \sin. 2q = -g \cos. a + c \sin. a$.

Tirant de la seconde $g = \frac{c \sin. a + \frac{i}{b} \sin. 2q}{\cos. a}$ & le substituant dans la première on aura

$$1 - \frac{2i}{b} (\sin. q)^2 - c \cos. a = \frac{c(\sin. a)^2 + \frac{i}{b} \sin. 2q \sin. a}{\cos. a} \text{ d'où}$$

l'on tire $c = \cos. a - \frac{i}{b} \cos. a + \frac{i}{b} (\cos. 2q \cos. a - \sin. 2q \sin. a)$ ou $c = (1 - \frac{i}{b}) \cos. a + \frac{i}{b} \cos. (2q + a)$ & remettant cette valeur de c dans celle de g on aura

$$g = \frac{(1 - \frac{i}{b}) \cos. a \sin. a + \frac{i}{b} \cos. (2q + a) \sin. a + \frac{i}{b} \sin. 2q}{\cos. a} \text{ ou}$$

$$g = (1 - \frac{i}{b}) \sin. a + \frac{i}{b} \sin. (2q + a)$$

V.

LEMME II.

La quantité $\sin. v \int \Omega \cos. v dv - \cos. v \int \Omega \sin. v dv$ (que nous nommerons désormais Δ pour abréger) est égale à $\frac{1}{m m - 1} \cos. v - \frac{1}{m m - 1} \cos. m v$ lorsque $\Omega = \cos. m v$ est le cosinus d'un multiple $m v$ de l'angle v .

Cette proposition est facile à démontrer en employant les valeurs si connues aujourd'hui $\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ et $\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$ du sinus & du cosinus d'un angle z .

Mais on y peut parvenir beaucoup plus simplement par les Theoremes suivans que tous les Geometres connoissent. A & B étant deux angles quelconques.

$$\text{Sin. } A \text{ sin. } B = \frac{1}{2} \cos. (A-B) - \frac{1}{2} \cos. (A+B)$$

$$\text{Sin. } A \cos. B = \frac{1}{2} \sin. (A+B) + \frac{1}{2} \sin. (A-B)$$

$$\cos. A \cos. B = \frac{1}{2} \cos. (A-B) + \frac{1}{2} \cos. (A+B)$$

$$d(\cos. A) = -dA \sin. A; d(\sin. A) = dA \cos. A$$

Le célèbre Mr. Euler, à qui les Mathematiques sont redevables de tant d'artifices de calcul, est le premier que je sache qui se soit passé des valeurs des sinus sous la forme imaginaire & qui ait pensé à avoir recours aux Theoremes que je viens de citer.

VI.

Il est aisé de voir par le Lemme que je viens de donner, combien le calcul peut être simplifié dans l'usage de la solution précédente, car si l'on réduit, ainsi que cela est toujours faisable dans la recherche des mouvemens des Planetes, la valeur de Ω à une suite de termes $A \cos. mv + B \cos. nv + \&c.$ la quantité Δ dans la quelle consiste la partie inconnue de l'équation de l'orbite sera aussitôt déterminée & sera une suite de même espece.

Delà il suit que lorsque l'on aura fixé le nombre de termes de la valeur de Ω , qui dans certains cas peut être assez considerable, on n'aura point à craindre que l'équation de l'orbite en acquiere un plus grand &

d' une autre nature , ce qui ne manqueroit gueres d' arriver en suivant d' autres methodes. Chaque espece de termes de la valeur de Ω n' introduira jamais dans l' equation de l' orbite qu' un terme semblable dont le coefficient sera très facile à determiner & de plus un terme affecté de $\cos. v$ qui se joindra à celui de même espece que contient la premiere partie de l' equation de l' orbite , celle qui exprime la section conique que l' on auroit eû sans les forces perturbatrices.

Pour rendre plus sensible ce que je viens de dire & pour avoir une formule à la quelle puissent se reduire tous les calculs de la même nature dont nous pourrons avoir besoin par la suite , nous supposons que $A \cos. m v + B \cos. n v + \&c.$ représente la valeur de Ω & nous reprendrons l' equation de l' orbite determinée Art. III. §. 3. dans la quelle 1°. nous mettrons p à la place de $\frac{f^2}{M}$ ou du demi-parametre de l' ellipse qui auroit été décrite sans les forces perturbatrices. 2°. Nous ferons $g = 0$ ce qui revient au même que de supposer l' orbite perpendiculaire à son rayon vecteur à son origine, supposition très permise, puisqu' on peut faire commencer le mouvement de quel point l' on veut.

Par ce moien l' equation générale de l' orbite, qui est alors $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{c}{p} \cos. v - \frac{1}{p} \Delta$ deviendra dans cette supposition de Ω $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} (c - \frac{A}{m^2-1} - \frac{B}{n^2-1} - \&c.) \cos. v - \frac{A \cos. m v}{p(m^2-1)} - \frac{B \cos. n v}{p(n^2-1)} - \&c.$

VII.

Si la valeur de Ω renfermoit des termes tels que $\cos. v$, on ne pourroit pas trouver par le Lemme precedent ceux qui en resulteroient dans la quantite Δ , parce-

que la formule $\frac{\cos. v - \cos. mv}{m-1}$ ne donne rien dans le cas de $m=1$. Mais en reprenant les quantités $\int \Omega \cos. v dv$ & $\int \Omega \sin. v dv$ qui sont en ce cas $\int (\cos. v)^2 dv$, & $\int \sin. v \cos. v dv$, ou $\int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2v) dv$ & $\int \frac{1}{2} \sin. 2v dv$ ou $\frac{1}{2} v + \frac{1}{4} \sin. 2v$, & $-\frac{1}{4} \cos. 2v + \frac{1}{4}$ on trouvera alors que Δa pour valeur $\frac{1}{2} v \sin. v + \frac{1}{4} \sin. v \sin. 2v + \frac{1}{4} \cos. v \cos. 2v - \frac{1}{4} \cos. v$, qui se réduit à $\frac{1}{2} v \sin. v$.

On voit par là que lorsque Ω renfermera des termes de cette espece, l'equation de l'orbite contiendra des angles v & quelques petits que soient les termes où ils entrent, ils peuvent donner les plus grandes corrections à la valeur de r , lorsqu'on supposera l'angle v d'un grand nombre de revolutions. Ainsi si l'on n'a rien négligé en determinant Ω on sera sûr que l'orbite s'écartera à la fin fort considérablement d'une Ellipse & changera entièrement de forme. Si on a négligé quelques quantités on ne pourra pas former la même assertion, mais il faudra au contraire ne compter sur l'exactitude de la solution précédente que pendant un petit nombre de revolutions. Heureusement dans la Theorie des Planetes on peut toujours se passer de tels termes, ainsi que l'on le verra par la suite de ce memoire.

VIII.

Lorsqu'il entrera dans Ω quelque cosinus d'un multiple de v très peu different de l'unité, il en resultera dans l'equation de l'orbite un terme dont le coefficient sera beaucoup plus considerable à cause du diviseur m^2-1 , il faudra donc avoir grande attention à tous les termes de cette nature & y porter bien plus de scrupule que dans les autres par rapport aux fractions qu'on negligera.

IX.

IX.

Les Cosinus de multiples de v exprimés par des nombres fort differens de l'unité permettront au contraire de negliger beaucoup de fractions dans les calculs.

X.

Quant aux Cosinus d'un très petit multiple de v , ils ne changeront presque pas en passant de Ω dans Δ mais ils demanderont cependant autant d'attention que ceux qui different peu de l'unité, à cause que quand on passera de la valeur de $\frac{1}{r}$ à celle du tems, ces termes qui en produiront toujours de même espece qu'eux, subiront dans l'integration une division par la même petite fraction du multiple de v , & ainsi ils y pourront encore donner des termes considerables dans l'expression du tems. La plus grande difficulté de la Theorie de la Lune roule sur l'examen de ces sortes de termes & en ce point elle me paroît surpasser celle de Saturne.

XI.

Nous avons vû article III. §. 5 que lorsque la valeur de Ω sera donnée exactement par une fonction de v on aura aussitôt la vraie equation de l'orbite cherchée. Nous ajouterons ici que dans plusieurs cas où Ω seroit composée d'autres quantités, on pourroit encore trouver cette equation sans rien negliger, pourvû qu'on soupçonnât seulement la forme de ces termes.

Pour en donner un exemple bien simple, nous prendrons le cas où la force Φ jointe à celle qui agit vers le centre en raison renversée du quarré des distances, est ex-

primée par $\frac{bM}{r^3}$ & où la force $\pi = 0$ ce qui, comme l'on fait, doit nous faire arriver à la même conclusion que Mr. Newton a trouvée dans la Prop. 45. du pr. liv. de ses principes, en traitant du mouvement des Apfides.

Dans cette supposition Ω se reduira simplement à $\frac{e r r}{M}$ & sera partant $\frac{b}{r}$, qu'il faut donc substituer dans la quantité Δ . Supposons maintenant que la valeur cherchée de $\frac{1}{r}$ soit $\frac{1}{k} - \frac{e}{k} \cos. m v$ qui renferme une généralisation de l'équation $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - c \cos. v$ par la quelle l'orbite seroit exprimée sans l'addition de la force $\frac{M b}{r^3}$. Et cherchons à déterminer les quantités k, e, m , par le moyen de ce qui a été enseigné dans l'Art VI. Ω ou $\frac{b}{r}$ étant alors $\frac{b}{k} - \frac{e b}{k} \cos. m v$. On n'aura qu'à faire $-\frac{e b}{k} = A$; $B = \frac{b}{k}$, $n = 0$ & l'équation generale de cet article deviendra $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + \frac{b}{k}) - \frac{1}{p} (c + \frac{b e}{k(m^2-1)} + \frac{b}{k}) \cos. m v + \frac{b e}{p k(m^2-1)} \cos. m v$.

Présentement il est clair que la supposition de $\frac{1}{r} = \frac{1}{k} - \frac{e}{k} \cos. m v$ sera justifiée & que l'orbite cherchée sera déterminée exactement si l'on peut identifier cette équation avec celle qu'on vient de trouver; or c'est ce qui ne demande autre chose que de faire $\frac{1}{p} (1 + \frac{b}{k}) = \frac{1}{k}$, $c + \frac{b e}{k(m^2-1)} + \frac{b}{k} = 0$, $\frac{b e}{p k(m^2-1)} = \frac{e}{k}$, ou ce qui revient au même $m^2 = 1 - \frac{b}{p}$, $k = p - b$, $e = \frac{c \cdot (p - b) + b}{p}$. Ainsi l'on voit que l'effet de la force $\frac{bM}{r^3}$ ajoutée à $\frac{M}{r^2}$ est de changer la section conique exprimée par $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - c \cos. v$ en une courbe dont les raons vecteurs r sont les mêmes que ceux d'une section conique exprimée par $\frac{1}{r} = \frac{1}{p-b} - \frac{c \cdot (p-b) + b}{p} \cos. v$ pendant que ces angles v sont aug-

mentés dans la raison de m ou $\sqrt{1 - \frac{b}{p}}$ à 1 ; ou ce qui revient au même que la force $\frac{b}{r^3}$, outre le changement de parametre & de l'excentricité de la section conique indiqués par les equations précédentes, donne à l'apside un mouvement qui est à celui de la Planete comme $\sqrt{1 - \frac{b}{p}} - 1$ à 1.

XII.

Au reste il faut avouer qu'on trouvera peu de cas où l'on parvient avec la même facilité à determiner la vraie Equation de l'orbite, & que l'on en est bien éloigné pour celle des Planetes. Mais la methode précédente n'en sera pas d'un usage moins réel en donnant une construction de ces orbites par une approximation aussi exacte qu'on voudra. Car cette methode est non seulement applicable lorsqu'on a la forme des termes de l'equation, mais elle est propre à determiner cette forme elle même.

En faisant usage de cette methode comme on n'a besoin d'abord que de connoître à peu près l'orbite pour determiner la quantité Ω il sembleroit qu'il suffiroit de prendre pour son Equation $\frac{r}{r} = \frac{r}{p} - \frac{e}{p} \cos. v$ qui est celle de l'Ellipse, qu'on auroit sans les forces perturbatrices Φ & Π . Mais il est aisé de voir que cette supposition est trop éloignée de la verité puisqu'elle exprime une Ellipse immobile fort différente de l'orbite réelle qui se meut & qui après une demie revolution de l'apside, s'ecarteroit assés de l'orbite immobile pour rendre le raion vecteur trop grand ou trop petit d'une quantité égale au double de l'excentricité.

Afin donc d'approcher du but, autant qu'il est possible du premier coup, il faudra en determinant Ω prendre pour $\frac{r}{r}$ une quantité comme $\frac{r}{k} - \frac{e}{k} \cos. m v$ qui

seroit sa valeur dans une ellipse mobile, telle que sont à peu près toutes les orbites des Planetes. Nous nous conduirons de la même maniere que dans l'Art. précédent pour identifier une semblable equation avec l'equation générale $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{e}{p} \cos. v + \Delta$. Nous rendrons les indéterminées de l'equation supposée telles que cette equation s'accorde avec l'equation générale dans tous les termes qui pourront s'y rapporter. Quant à ceux qui se rencontreront de plus, & qui prouvent que la supposition faite n'est pas exactement la vraie, ils servent à faire connoître lorsqu'ils sont affectés de plus petits coefficients que les premiers quelle est la nature des termes qu'on auroit dû ajouter à $\frac{1}{k} - \frac{e}{k} \cos. m v$ pour exprimer $\frac{1}{r}$.

Introduisant alors ces termes avec des coefficients indéterminés dans la valeur de Ω on formera une seconde equation, qui après l'identification de ses premiers termes avec ceux de l'Equation supposée, approchera infiniment plus de la vraie que la première & pourra même en tenir lieu absolument, si les nouveaux termes introduits par cette seconde equation ont des coefficients assez petits pour être négligés & si l'on a fait entrer dans la détermination des forces Φ & Π toutes les considérations qui doivent introduire les espèces de termes essentiels à considérer.

Comme ces considérations sont en grand nombres & qu'elles compliqueroient trop l'attention du Lecteur si l'on y avoit égard à la fois nous allons commencer par le cas le plus simple, celui où les deux orbites du Soleil & de la Lune sont dans le même plan, & où l'on suppose celle du Soleil sans excentricité. Nous n'aurons pas même attention d'abord à la parallaxe du Soleil.

XIII.

PROBLEME IV.

On demande l'orbite CL decrite par la Lune L autour Fig. 2.
de la Terre T, en supposant que le Soleil soit dans le
même plan de cette orbite & que son orbe apparent autour
de la Terre soit un cercle S γ dont le centre est T &
dont la description est uniforme.

§. 1. Supposons qu'au commencement du mouvement
les deux astres soient dans la ligne TC γ , & qu'après un tems
quelconque le Soleil se trouve en S & la Lune en L; nom-
mons en suite M la somme des masses de la Terre & de
la Lune, N celle du Soleil, f le raion supposé constant
de l'orbite du Soleil, r le raion variable TL de l'or-
bite de la Lune, t l'angle STL, ou la distance de la
Lune au Soleil, v l'angle CTL, z l'angle γ TS. La
Theorie des forces fera voir assés facilement que la Lune
qui seroit poussée vers la Terre par la seule force $\frac{M}{rr}$, sans
l'action du Soleil reçoit de plus à cause de cette action
une force $\frac{N}{sL^2}$ vers S pendant que la Terre est poussée
vers le même point par une force $\frac{N}{sT^2}$, & que l'action
resultante de ces deux forces pour troubler les mouvemens
de la Lune se reduit à une première force $N (\frac{sT}{sL^3} - \frac{1}{sT^2})$
qui pousse la Lune de L vers H dans la parallele LH à
TS, & à une seconde, $\frac{N \cdot LT}{sL^3}$ qui la pousse vers T. On
verra en suite en prenant SL pour la droite SK com-
prise entre S & la perpendiculaire LK à ST, & en ne-
gligeant les secondes puissances de $\frac{LT}{sT}$ qu'au lieu de
 $N (\frac{sT}{sL^3} - \frac{1}{sT^2})$ on peut se contenter de $\frac{3N \cdot TK}{sT^3}$ & de même
qu'au lieu de $\frac{N \cdot LT}{sL^3}$ on peut substituer $\frac{N \cdot LT}{sL^3}$.

Par ce moien les deux forces précédentes se reduiront à $\frac{3 N \cdot r \cos. t}{f^3}$ & $\frac{N r}{f^3}$ mais la force $\frac{3 N \cdot r \cos. t}{f^3}$ suivant LH se peut decomposer en $\frac{3 N r \cos. t}{f^3} \times \cos. t$ ou $\frac{3 N r}{2 f^3} (1 + \cos. 2 t)$ suivant LT & en $\frac{3 N \cdot r \cos. t}{f^3} \times \sin. t$ ou $\frac{3 N r \sin. 2 t}{2 f^3}$ suivant la perpendiculaire à LT.

Retranchant donc la 1^{re} de $\frac{N r}{f^3}$ il est evident qu'on aura la force totale $\Phi = -\frac{N r}{2 f^3} - \frac{3 N r \cos. 2 t}{2 f^3}$ par la quelle le Soleil tire la Lune vers T & que Π ou la force suivant la perpend. LO à cette direction sera $-\frac{3 N r \sin. 2 t}{2 f^3}$.

§. 2. Cela posé, il est clair que les quantités $\Phi = \int \frac{\pi r^3 dv}{p m}$ & $\Omega = \frac{a r r}{M} + \frac{\pi r dr}{M dv} - 2 \varrho$ de la solution généra-

le deviendront, ou $\varrho = -\frac{3 \alpha k}{2 p} \int \frac{r^4}{k^4} \sin. 2 t. dv$, $\Omega = -\frac{\frac{1}{2} \alpha r^3}{k^3} - \frac{3 \alpha r^3}{2 k^3} \cos. 2 t - \frac{3 \alpha r r dr}{2 k^3 dv} \sin. 2 t - 2 \varrho$ en supposant

que α ait été mis à la place de $\frac{N k^3}{M f^3}$.

§. 3. Il ne s'agit donc plus que de chasser r & t de ces expressions & de reduire Ω à une suite de cosinus de multiple de v afin d'employer le Lemme.

A l'égard de r rien ne sera plus facile si l'on prend comme nous l'avons indiqué Article XII. $\frac{1}{r} = \frac{1}{k} - \frac{e}{k} \cos. m v$; car l'on tirera aisément de cette valeur en faisant $a = 1 + 3 e^2$, $e' = e + \frac{5}{2} e^3$, $a' = 1 + 5 e e$, $e'' = e + \frac{35}{4} e^3$, $a'' = 1 + \frac{5}{2} e e$.

$\frac{r^3}{k^3} = a + 3 e' \cos. m v + 3 e e \cos. 2 m v$, $\frac{3 r^2 dr}{dv} = -3 e' m \sin. m v - 6 e e m \sin. 2 m v$
 $\frac{r^4}{k^4} = a' + 4 e' \cos. m v + 5 e e \cos. 2 m v$, $\frac{r^2}{k^2} = a (1 + 2 e \cos. m v + \frac{5}{2} e e \cos. 2 m v)$

§. 4. Quant à t , il sera un peu plus difficile à faire evanouir parce qu'il est la difference des angles z & v dont il faut trouver la relation pour un même instant.

Or cette relation sembleroit d'abord exiger qu'on connût l'orbite & l'expression du tems employé à parcourir un de ses arcs quelconques; c'est à dire la solution du Probleme même qu'on cherche; mais si l'on fait attention à ce que nous pouvons négliger en vertu de la petitesse des termes de Ω & de φ , nous verrons que dans cette détermination du tems il suffira de prendre la formule $\int \frac{rr dv}{\sqrt{M p}}$ au lieu de $\int \frac{rr du}{\sqrt{p M \times (1 + 2 \varphi)}}$ qu'elle est réellement, & que dans cette même formule $\int \frac{rr dv}{\sqrt{p M}}$ il suffira de faire $r = \frac{1}{k} - \frac{e}{k} \cos. m v$.

Par ce moyen on aura pour l'expression du tems par l'arc CL en négligeant les troisiemes puissances de e , $\frac{3}{2} \frac{k^2}{\sqrt{p M}} (v + \frac{2e}{m} \sin. m v + \frac{3ee}{4m} \sin. 2 m v)$ Mais le tems par l'arc γL décrit par le même tems par le Soleil seroit

$\frac{f^{\frac{3}{2}} z}{\sqrt{N}}$ ou $\frac{f^3 (v - t)}{\sqrt{N}}$. Egalant donc ces deux quantités &

nommant pour abréger $1 - \frac{1}{n}$ la constante $\frac{3}{2} \frac{k^2 \sqrt{N}}{p \sqrt{M} \cdot f \sqrt{f}}$, qui n'est autre chose que le rapport du mouvement du Soleil au mouvement moyen de la Lune, on aura l'équation $(1 - \frac{1}{n}) \times (v + \frac{2e}{m} \sin. m v + \frac{3ee}{4m} \sin. 2 m v) = v - t$, d'où l'on tire $t = \frac{v}{n} - \mathcal{E} \sin. m v - \delta \sin. 2 m v$, en faisant $\mathcal{E} = \frac{2e}{m} (1 - \frac{1}{n})$, $\delta = \frac{3ee}{4m} (1 - \frac{1}{n})$.

§. 5. Pour tirer maintenant de cette valeur de t celle de $\sin. 2 t$ & de $\cos. 2 t$ qui entrent dans les valeurs de φ & de Ω que nous venons de trouver, nous regarderons la valeur $\frac{2v}{n} - 2 \mathcal{E} \sin. m v - 2 \delta \sin. 2 m v$ de $2 t$ comme la somme d'un angle $\frac{2v}{n}$ & d'un autre $- 2 (\mathcal{E} \sin. m v + \delta \sin. n v)$ & alors la formule générale du sinus de la somme de deux angles donnés nous donera

$\sin. 2t = \sin. \frac{2v}{n} \times \cos. (2\varepsilon \sin. mv + \delta \sin. 2mv) - \cos. \frac{2v}{n} \times \sin. (2\varepsilon \sin. mv + \delta \sin. 2mv)$. Mais vu la petitesse de ε & de δ & les termes que nous pouvons nous permettre de negliger dans cette premiere approximation cette expression se reduira à $\sin. \frac{2v}{n} - \cos. \frac{2v}{n} \times (2\varepsilon \sin. mv + \delta \sin. 2mv)$ c'est à dire que l'on aura $\sin. 2t = \sin. \frac{2v}{n} + \varepsilon \sin. (\frac{2}{n} - mv) - \varepsilon \sin. (\frac{2}{n} + mv) + \delta \sin. (\frac{2}{n} - 2mv) - \delta \sin. (\frac{2}{n} + 2mv)$. De la même maniere on trouvera $\cos. 2t = \cos. \frac{2v}{n} + \varepsilon \cos. (\frac{2}{n} - mv) - \varepsilon \cos. (\frac{2}{n} + mv) + \delta \cos. (\frac{2}{n} - 2mv) - \delta \cos. (\frac{2}{n} + 2mv)$.

§. 6. Par ces valeurs & par celles des puissances de r qu'on vient de trouver §. 3 on aura facilement $\frac{r^4}{k^4} \sin. 2t = a \sin. \frac{2v}{n} + (2\varepsilon + a\varepsilon) \sin. (\frac{2}{n} - mv) + (3\varepsilon - a\varepsilon) \times \sin. (\frac{2}{n} + mv) + (5e^2 + a\delta + 2\varepsilon\varepsilon) \sin. (\frac{2}{n} - 2mv)$ & par consequent q ou $-\frac{3}{2} \frac{\alpha k}{p} \int \frac{r^4}{k^4} \sin. 2t dv = a \alpha \cos. \frac{2v}{n} + b \alpha \cos. (\frac{2}{n} - mv) + c \alpha \cos. (\frac{2}{n} + mv) - d \alpha \cos. (\frac{2}{n} - 2mv) - p \alpha$, en faisant $a = \frac{3k}{4p}$, $b = \frac{3k}{2p} (\frac{2\varepsilon + a\varepsilon}{\frac{2}{n} - m})$, $c = \frac{3k}{2p} (\frac{2\varepsilon - a\varepsilon}{\frac{2}{n} + m})$, $d = \frac{3k}{2p} (\frac{5e^2 + a\delta + 2\varepsilon\varepsilon}{2m - \frac{2}{n}})$. $p = a + b + c - d$.

La constante $p\alpha$ a été ajoutée en integrant & prise telle que la quantite q soit nulle à l'origine des v où l'on suppose qu'a commencé tout le mouvement. Quant aux termes affectés d'autres multiples de v , tels que $\frac{4v}{n}$, $(\frac{2}{n} + 2mv)$ &c. on les a negligés à cause qu'ils sont fort petits & que dans le passage de Ω à Δ ils diminueroient encore.

§. 7. Faisant de même

$$(a) = \frac{3}{2}a, (b) = \frac{3}{2}a\mathfrak{C} + \frac{3}{4}é, (c) = \frac{3}{4}é - \frac{3}{2}\mathfrak{C}a, (d) = \frac{3}{2}a\delta + \frac{3}{4}é\mathfrak{C} + \frac{3}{4}e e \\ [a] = \frac{3}{2}é m \mathfrak{C}, [b] = \frac{3}{4}é m, [c] = \frac{3}{4}é m, [d] = \frac{3}{4}é m \mathfrak{C} + \frac{3}{2}e e m$$

$$\text{on aura } - \frac{3r^3 \alpha \cos \frac{2}{n} t}{2k^3} = - (a) \alpha \cos \frac{2}{n} v - (b) \alpha \cos \left(\frac{2}{n} - mv \right) - \\ (c) \alpha \cos \left(\frac{2}{n} + mv \right) - (d) \alpha \cos \left(\frac{2}{n} - 2mv \right)$$

$$\& - \frac{3r^2 \alpha dr \sin \frac{2}{n} t}{2k^3 dv} = - [a] \alpha \cos \frac{2}{n} v + [b] \alpha \cos \left(\frac{2}{n} - mv \right) - \\ [c] \alpha \cos \left(\frac{2}{n} + mv \right) + [d] \alpha \cos \left(\frac{2}{n} - 2mv \right)$$

§. 8. Or toutes ces valeurs étant introduites dans l'expression générale de Ω , ou simplement dans celle de son numérateur, auquel on peut réduire cette quantité pour la 1^{re} approximation, à cause de la petitesse de $2g$ auprès de l'unité, & faisant de plus

$$A = 2a + [a] + (a), B = 2b - [b] + (b), C = 2c + [c] + (c) \\ D = 2d + [d] - (d), E = \frac{3}{2}é \quad P = 2p - \frac{a}{2}$$

Nous aurons

$$\Omega = -A \alpha \cos \frac{2}{n} v - B \alpha \cos \left(\frac{2}{n} - mv \right) - C \alpha \cos \left(\frac{2}{n} + mv \right) + \\ D \alpha \cos \left(\frac{2}{n} - 2mv \right) - E \alpha \cos mv + P \alpha.$$

La substitution de cette quantité faite dans la valeur générale de Δ donnée Art. VI. changera l'équation générale de l'orbite en

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \left(c + \frac{A \alpha}{\frac{4}{n} - 1} + \frac{B \alpha}{\left(\frac{2}{n} - m \right)^2 - 1} + \&c. \right) \cos v + \frac{A \alpha}{p \left(\frac{4}{n} - 1 \right)} \cos \frac{2}{n} v \\ + \frac{P \alpha}{p} - \frac{B \alpha}{p \left(1 - \left(\frac{2}{n} - m \right)^2 \right)} \cos \left(\frac{2}{n} - mv \right) + \frac{C \alpha}{p \left(\left(\frac{2}{n} + m \right)^2 - 1 \right)} \cos \left(\frac{2}{n} + mv \right) \\ + \frac{D \alpha}{p \left(1 - \left(2m - \frac{2}{n} \right)^2 \right)} \cos \left(\frac{2}{n} - 2mv \right) - \frac{E \alpha}{p \left(1 - m m \right)} \cos mv$$

qui en supposant que k, p, c, e, m , aient entr' elles la relation que demandent les equations

$$1 + P\alpha = \frac{p}{k}, \quad c + \frac{A\alpha}{\frac{4}{nn} - 1} - \frac{B\alpha}{1 - (\frac{2}{n} - m)^2} - \&c. = 0$$

$$e = \frac{E\alpha k}{p(1 - mm)}; \quad \& \text{ en faisant } \frac{A\alpha k}{p(\frac{4}{nn} - 1)} = \beta, \quad \frac{B\alpha k}{p(-(\frac{2}{n} - m)^2)} = \gamma$$

$$\frac{C\alpha k}{p((\frac{2}{n} + m)^2 - 1)} = \delta, \quad \frac{D\alpha k}{p(1 - (\frac{2}{n} - m)^2)} = \zeta$$

$$\text{se reduira à } \frac{k}{r} = 1 - e \cos. mv + \beta \cos. \frac{2v}{n} - \gamma \cos. (\frac{2}{n} - mv) + \delta \cos. (\frac{2}{n} + mv) - \zeta \cos. (\frac{2}{n} - 2mv)$$

dont les premiers termes sont les mêmes que ceux de l'equation supposée & dont les autres seront assez petis.

Ainsi que le calcul suivant va le prouver, pour convaincre de la bonté de la solution précédente & pour montrer ce qu'on peut espérer d'une seconde approximation dans la quelle on feroit entrer ces mêmes termes dans la valeur assignée à r .

XIV.

Application de la Solution du Probleme précédent.

§. 1. Il est question maintenant de passer aux nombres. Dans cette vuë soit fait $e = 0,05505$ ce qui est l'excentricité moienne que les Astronomes supposent à l'orbite de la Lune, soit mis en suite $0,0748$ à la place de $1 - \frac{2}{n}$ qui exprime le raport du mouvement moien du Soleil à celui de la Lune.

A l'égard de α ou $\frac{Nk^2}{Mf}$ qui ne peut pas s'ecarter beaucoup du raport qui est entre le quarré du tems peri-

odique moien de la Lune & celui du Soleil, nous le supposons d'abord égal à ce raport même, c'est-à-dire de 0,005595. Ces élemens que les observations donnent & qui sont des conditions du Probleme vont nous suffire pour determiner tout le reste.

§. 2. On voit d'abord que l'équation $c + \frac{A\alpha}{\frac{e}{n} - 1} - \&c. = 0$ qui donneroit la relation entre c & e est inutile à employer, parce que la valeur de c n'influe sur aucune des autres quantités du Probleme & qu'il n'importe pas de savoir la difference de l'excentricité réelle de l'orbite actuelle de la Lune à celle quelle auroit eu sans les forces perturbatrices du Soleil.

§. 3. Quant à l'équation $1 + P\alpha = \frac{p}{k}$ dont l'usage seroit de determiner le raport de k à p ou du parametre de l'Ellipse primitive qu'auroit été l'orbite de la Lune à celui de l'orbite réelle, elle ne seroit pas plus utile sous ce point de vue que la 1^{ere}, mais comme le raport $\frac{k}{p}$ entre dans toutes les valeurs, dont nous avons besoin, il nous faudra de toute nécessité faire usage de cette equation.

§. 4. La 3^{eme} Equation $e = \frac{E\alpha k}{p(1-m)} m$ contient un élément bien important de la Theorie de la Lune, la determination du mouvement de son apogée qui depend de la connoissance de m puisque $1-m$ a le même raport à 1 que le mouvement de l'apogée à celui de la Lune, mais il s'en faut bien que cette determination se puisse tirer ainsi d'une première operation; car quoique cette operation n'ecarte pas beaucoup du vrai pour les valeurs des lettres β , γ &c. elle conduit à peine à la moitié de ce qu'on devroit trouver pour le raport cherché $1-m$, heureusement m étant par elle-même très peu differente de 1

unité nous ne nous embarrasserons pas d'abord de la connoître exactement & nous nous contenterons de la faire $= 1$ dans la détermination de β, γ &c. remettant à corriger en suite les valeurs de ces quantités quand nous la connoîtrons mieux.

§. 5. De cette supposition & des valeurs qu'on vient d'assigner à $e, e - \frac{1}{n}, \alpha$ nous tirerons
 $\alpha = 1, 0091, \delta = 1, 0151, \epsilon = 0, 0555, \bar{e} = 0, 0557,$
 $\frac{2e(1 - \frac{1}{n})}{m}$ ou $\bar{e} = 0, 00824, ee = 0, 00303, \frac{3ee}{4m}(1 - \frac{1}{n})$ ou
 $\delta = 0, 00017$

$\{a\} = 1, 5136 \{b\} = 0, 1374 \{c\} = 0, 1124 \{d\} = 0, 00718.$
 $[a] = 0, 0007 [b] = 0, 0416 [c] = 0, 0416 [d] = 0, 00458.$

§. 6. Quant aux coefficients a, b, c, d , de la valeur de p comme ils renferment $\frac{k}{p}$ qui ne peut être connu qu'après la résolution de l'équation $1 + P\alpha = \frac{p}{k}$ dans laquelle P dépend lui même de $\frac{k}{p}$ nous ne pourrions les trouver qu'en profitant (ainsi que l'on a fait pour m) de ce que $\frac{k}{p}$ est peu différent de l'unité & nous le supposons d'abord $= 1$. Par ce moyen nous aurons

$a = 0, 8229, b = 0, 2107, c = 0, 0543, d = 0, 0869,$
 p ou $a + b + c + d = 1, 001$ & par conséquent
 $A = 3, 1595, B = 0, 5172, C = 0, 2627, D = 0, 1712,$
 $P = 1, 4975.$ Cette valeur de P étant substituée dans
 $1 + P\alpha = \frac{p}{k}$ donnera $\frac{p}{k} = 1, 00838$ & par conséquent
 $\frac{k}{p} = 0, 9917$; corrigeant donc a, b, c, d , dans la raison de 1 à 0, 9917 nous aurons plus exactement ces quantités & appliquant le double de leur correction à A, B &c. nous aurons pour leurs secondes valeurs

$A = 3, 1557; B = 0, 5162; C = 0, 2624; D = 0, 1708$

& par conséquent

$\beta = 0,00722$, $\gamma = 0,01035$, $\delta = 0,000205$, $\zeta = 0,00097$
 parmi les quelles γ & ζ seront celles où la substitution de r
 pour m au lieu de la vraie valeur produit la plus grande
 erreur à cause que les diviseurs $2m - \frac{2}{n}$ de d , & $1 - (\frac{2}{n} - m)^2$
 de B en sont le plus altérés, vû leur petitesse.

XV.

Remarques sur le mouvement de l'Apogée.

Voions maintenant ce que la 3^{ème} Equation $e =$
 $\frac{E \alpha k}{p(1 - mm)}$ ou $1 - mm = \frac{E \alpha k}{ep}$ donneroit par raport à la valeur
 de m , E étant parce que nous avons vû $= \frac{2}{3} e$ ou $0,0832$;
 $\frac{K \alpha}{p} = 0,005595 \times 0,9917$ ou $0,00555$, nous tirerons
 de cette equation $1 - mm = 0,008388$ ou $1 - m = 0,$
 004186 c'est-à-dire que le mouvement de l'apogée qui
 doit être à celui de la Lune comme $0,008455$ à 1 ne
 seroit que comme $0,004186$ à 1 . Donc ou l'attraction
 Newtonienne ne donne point ce vrai mouvement, ou la so-
 lution précédente n'est pas propre à la déterminer. Or
 un peu de reflexion sur les attentions que nous avons re-
 commandées Art : VIII. nous va montrer que l'on ne doit
 pas compter sur l'exactitude de l'operation précédente
 pour cet élément de la theorie de la Lune, & nous mon-
 trera qu'elle peut être corrigée tres facilement par l'ope-
 ration subsequente.

Car il est evident, que si la valeur de $\frac{k}{r}$ substituée
 dans g , dans $\frac{3rrdr \sin. 2t}{2k^2 dv}$, & $\frac{3r^2 \cos. 2t}{2k^2}$ avoit contenu com-
 me elle le doit, outre $1 - e \cos. mv$ les termes $\beta \cos.$
 $\frac{2v}{a} - \gamma \cos. (\frac{2}{a} - mv)$ &c. dont nous venons d'apprendre qu'

elle est composée, le produit des termes de cette espèce, sur tout ceux qui sont des multiples de $\cos. (\frac{2}{n} - mv)$ renfermés dans $\frac{r^3}{k^3}$, $\frac{r^4}{k^4}$, avec les $\sin. \frac{2}{n} v$ & $\cos. \frac{2}{n} v$ & autres termes de $\sin. 2t$ & $\cos. 2t$ auroit introduit d'autres termes que $\frac{3}{2} \epsilon$ dans la valeur de E.

Pour en donner une idée ne prenons que le terme $\gamma \cos. (\frac{2}{n} - mv)$ de $\frac{k}{r}$, qui est celui dont l'effet est sans comparaison le plus sensible. Ce terme ajoutant à peu près $4 \gamma \cos. (\frac{2}{n} - mv)$ à $\frac{v^4}{k^4}$ nous aurons pour le produit de $\frac{r^4}{k^4}$ par $-\frac{3}{2} \frac{k\alpha}{p} \sin. 2t$ & par conséquent pour accroissement à ϵ le terme $\frac{3}{2} \frac{k\alpha}{p m} \gamma \cos. mv$ dont le double pris en - devra être joint à Ω par cette correction. On aura de la même manière $\frac{2}{4} \gamma \alpha \cos. mv$ pour la correction de $\frac{3}{2} r^3 \alpha \cos. 2t$ due à la même attention, & $-\frac{3}{4} \gamma (\frac{2}{n} - m) \alpha$ pour celle de $\frac{3 r r a d r \sin. 2t}{2 d v}$; en sorte que Ω recevra par ces trois corrections le terme $-(\frac{6}{p m} k + \frac{2}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{n} - m) \alpha \gamma \cos. mv$ ou ce qui revient au même E souffrira le changement $+(\frac{6}{p m} k + \frac{2}{4} - \frac{3}{4} (\frac{2}{n} - m)) \gamma$ qui, en nombres, sera à peu près 0,0784 fort approchant de 0,0839 qu'il avoit pour unique valeur dans le calcul précédent.

Substituant donc maintenant la nouvelle valeur de E dans l'équation $1 - mm = \frac{E \alpha k}{p e}$ on en tirera $1 - m = 0,00836$ qui est assez proche de la vraie valeur pour une détermination dans la quelle on a négligé tant de petites quantités. On verra plus loin que ce rapport $1 - m$, ou le mouvement de l'apogée sera conforme à ce que les observations nous apprennent, lors qu'on aura eû égard à

toutes les circonstances que demande la question, & qu'on aura mis l'exactitude nécessaire dans les calculs; c'est à-dire lorsqu'on aura fait entrer l'inclinaison réciproque des orbites de la Lune & du Soleil, l'excentricité de l'orbite du Soleil, que l'on aura introduit dans la valeur de Ω , le diviseur $1 + 2g$ qui y doit être, que l'on aura substitué dans $\frac{k}{r}$ tous les principaux termes qui composent sa valeur, & mis à la place de t la valeur qui résulte de l'expression du tems corrigée par la connoissance exacte de r & de g .

XVI.

Correction aux valeurs de γ & ζ & observation sur la valeur qu'on doit donner à m .

Comme nous connoissons actuellement beaucoup mieux la vraie valeur de m , il est à propos de faire une correction aux quantités précédentes γ & ζ qui suivant ce que nous avons vu Art. XIV. §. 6. sont les plus altérées par la supposition de $m = 1$ que nous avons faite d'abord.

Mais pour ne pas revenir trop de fois au même calcul, & pour ne pas compliquer inutilement des opérations assez pénibles, nous observerons ici & dans la suite de prendre tout d'un coup pour m sa vraie valeur 0,991545 donnée par les observations. Il est clair qu'on en peut user ainsi, même pour quand l'on ne se seroit pas convaincu comme moi, que c'est aussi la valeur donnée par la Theorie, puisque si l'on parvient en suite dans la resolution de l'équation $1 - m m = \frac{E \alpha k}{p e}$ à retrouver cette même valeur de m , la supposition sera justifiée, &

que dans le cas ou elle ne le feroit pas, il auroit toujours fallu la faire pour trouver la correction que demanderoient les forces acceleratrices. Afin de trouver la correction de γ due à celle qu'on fait à m , en mettant $0,991545$ à sa place au lieu de 1 , qu'on avoit supposé d'abord être sa valeur, on commencera par corriger celle de b qui sera diminuée d'environ $\frac{1}{104}$ en rectifiant son denominateur $\frac{2}{n} - m$, ce qui changera B en $0,5122$ au lieu de $0,5162$ qu'il étoit auparavant & donnera le nouveau $\frac{B \alpha k}{p} = 0,0028427$. On divisera en suite cette valeur par $0,2624$ à quoi est égal $1 - (\frac{2}{n} - m)^2$ lorsque m a sa vraie valeur & l'on aura $0,01083$ pour le nouveau γ .

Corrigeant de même d dans la raison de son diviseur $m - \frac{2}{n}$ que l'on avoit supposé de $0,1496$ au lieu de $0,1327$ qu'il est par la vraie valeur de m , il deviendra $0,09797$ & D par conséquent $0,01791$, qui étant multiplié par $\frac{\alpha k}{p} = 0,00555$ & divisé par $0,982$ valeur de $1 - (2m - \frac{2}{n})^2$ donnera $0,00101$ pour le nouveau ζ .

XVII.

De l'expression du tems dans l'orbite précédente.

Après avoir ainsi déterminé la valeur de $\frac{2}{n}$ il faut passer à celle du tems non seulement par ce que c'est la considération la plus importante de la Theorie de la Lune, mais par ce qu'elle est nécessaire pour rectifier la valeur de α qui n'est pas exactement égal comme nous l'avons supposé dans le calcul précédent, au quarré du rapport

rapport qui est entre le tems periodique moien de la Lune & celui du Soleil. Car il est evident que l'expression générale du tems employé par la Lune à parcourir un angle v , seroit au tems employé par le Soleil pour parcourir le même angle comme $\frac{k^2}{\sqrt{pM}} \int \frac{rr dv}{kk\sqrt{(1+2e)}} \dot{\text{à}} \frac{f^2 v}{\sqrt{N}}$ & par conséquent que si T est le coefficient de l'angle v , après avoir intégré $\int \frac{rr dv}{kk\sqrt{(1+2e)}}$, $\frac{k^2 T}{\sqrt{pM}}$ sera à $\frac{f^2}{\sqrt{N}}$ comme le tems periodique moien de la Lune est à celui du Soleil, ou ce qui revient au même, que la fraction $\frac{k^4 T T N}{f^2 p M}$, ou $\frac{k T T}{p}$ & non pas simplement α fera ce raport.

Afin d'intégrer plus commodement $\frac{rr dv}{kk\sqrt{(1+2e)}}$ nous nous contenterons d'écrire à sa place $\frac{rr dv}{kk} (1-e)$ en negligéant les secondes puissances de e . Nous mettrons en suite à la place de $\frac{k}{r}$, la quantité $1 - e \cos. mv + \Xi$, dans la quelle Ξ est pris pour représenter les termes tels que $\beta \cos. \frac{2v}{n}$, $\gamma \cos. (\frac{2}{n} - mv)$ &c. qui entrent dans la valeur de $\frac{k}{r}$.

Par ce moien en negligéant les secondes puissances de Ξ & en gardant les mêmes dénominations a , $\dot{a}$ & $\ddot{a}$ que ci-dessus & en faisant de plus $\ddot{e} = e + \frac{3}{2}e^2$ nous aurons $\frac{r^2}{k^2} = \ddot{a} + 2\ddot{e} \cos. mv + \frac{3}{2}ee \cos. 2mv + e^3 \cos. 3mv - 2a\Xi - 6\dot{e}\Xi \cos. mv$ & partant

$$\frac{r^2}{k^2} (1-e) = \ddot{a} + 2\ddot{e} \cos. mv - 2a\Xi - \dot{a}e - (6\dot{e}\Xi + 2\ddot{e}e) \cos. mv + \frac{3}{2}ee \cos. 2mv + e^3 \cos. 3mv$$

Il ne faudra donc plus que substituer dans cette quantité pour Ξ et e leurs valeurs

$$\beta \cos. \frac{2v}{n} - \gamma \cos. (\frac{2}{n} - mv) + \delta \cos. (\frac{2}{n} + mv) + \zeta \cos. (\frac{2}{n} - 2mv) \text{ \& } a \alpha \cos. \frac{2v}{n} + b \alpha \cos. (\frac{2}{n} - mv) + c \cos. (\frac{2}{n} + mv) - d \cos. (\frac{2}{n} - 2mv) + p \alpha,$$

multiplier en suite le tout par $d v$ & integrer, afin d'avoir la valeur de la quantité cherchée $\int \frac{r r d v}{k^2} (1 - \varrho)$ qui sera par conséquent $(\ddot{a} + \ddot{a} p \alpha) v + (\frac{2 \ddot{e} + 2 p \alpha}{m}) \sin. m v + \frac{3 e e}{4 m} \sin. 2 m v + \frac{e^3}{3 m} \sin. 3 m v - (\frac{\ddot{a} \alpha + 2 a \beta - 3 e' \gamma + \ddot{e} b \alpha + 3 e' \delta + \ddot{e} c \alpha}{\frac{2}{n}}) \sin. \frac{2}{n} v + \frac{2 a \gamma - b \ddot{a} \alpha - 3 e' \beta - \ddot{e} a \alpha - 3 \zeta e' + \ddot{e} d \alpha}{\frac{2}{n} - m} \sin. (\frac{2}{n} - m v) - \frac{2 \delta \alpha + \ddot{e} c \alpha + 3 e' \beta + \ddot{e} a \alpha}{(\frac{2}{n} - m)} \sin. (\frac{2}{n} + m v) - \frac{3 e' \gamma + \ddot{e} d \alpha - 2 a \zeta - \ddot{e} b \alpha}{2 m - \frac{2}{n}} \sin. (\frac{2}{n} - 2 m v) + \frac{3 \zeta e' - \ddot{e} d \alpha}{3 m - \frac{2}{n}} \sin. (\frac{2}{n} - 3 m v) - \frac{3 \delta e' + \ddot{e} c \alpha}{\frac{2}{n} + 2 m} \sin. (\frac{2}{n} + 2 m v).$

Ainsi $\ddot{a} + \ddot{a} p \alpha$ est le coefficient T dont nous venons de voir que nous avons besoin pour determiner la valeur de α & l'équation qui la determinera sera $(\ddot{a} + \ddot{a} p \alpha) \times \frac{\alpha^k}{p} = 0$, 005595, dans la quelle faisant $\ddot{a} = 1,00456$, $p = 0,9879$, $\frac{k}{p} = 0,9917$, on trouvera $\alpha = 0,00553$ qui servira à corriger les valeurs précédentes de ϱ de Ξ qui lui sont proportionelles & donneront par conséquent $\alpha a = 0,004551$, $\alpha b = 0,001156$, $\alpha c = 0,000301$, $\alpha d = 0,000542$, $\alpha p = 0,005466$, $\beta = 0,007136$, $\gamma = 0,010704$, $\delta = 0,000203$, $\zeta = 0,00998$; substituant en suite ces valeurs dans l'expression qu'on vient de trouver du tems, elle se changera enfin en

$$0,0099 v + 0,112153 \sin. m v - 0,009352 \sin. \frac{2}{n} v + 0,021966 \sin. (\frac{2}{n} - m v) - 0,000757 \sin. (\frac{2}{n} + m v) - 0,00129 \sin. (\frac{2}{n} - 2 m v) + 0,002292 \sin. 2 m v + 0,000121 \sin. (\frac{2}{n} - 3 m v) - 0,000005 \sin. (\frac{2}{n} + 2 m v) + 0,000056 \sin. 3 m v$$

qui pourroit bien subir encore quelques corrections en employant la nouvelle valeur de α qu'on vient de trouver à rectifier $\frac{k}{p}$ & par conséquent a, b, c, d , & de même $A, B, C, D, \beta, \gamma$ &c. mais comme toutes ces corrections seroient inférieures à celles que fournit l'opération par la quelle on substitue dans Ω à la place de $\frac{k}{r}$, $1 - e \cos. mv + E$ (au lieu de prendre simplement comme nous avons fait $1 - c \cos. mv$) nous ne nous attacherons pas à pousser plus loin l'exactitude de cette solution & nous passerons à l'examen des autres circonstances que doit embrasser la vraie détermination de l'orbite de la Lune.

XVIII.

De la maniere d'avoir égard à l'excentricité de l'orbite du Soleil.

En reprenant la solution du Probleme précédent, on decouvre aisément deux points sur lesquels la considération de l'excentricité du Soleil doit apporter du changement & introduire de nouveaux termes dans l'équation de l'orbite de la Lune, l'une est la supposition de la distance ST égale à une constante f , l'autre l'uniformité de la description de l'angle z par le Soleil, qui donne Fig. 2.

noit pour l'expression du tems $\frac{f^{\frac{3}{2}} z}{\sqrt{N}}$. Ces deux suppositions n'étant plus permises lorsqu'on a égard à l'excentricité, il faut donner la maniere de les corriger.

On commencera par remettre sous le signe f de la valeur de φ la lettre f qui est comprise dans la valeur de α & l'on écrira ainsi cette valeur $-\frac{1}{2p} \int \frac{N k^2}{M f^2} \sin. 2 t dv$.

Mais pour simplifier également cette expression & nous rapprocher autant que nous pourrons du calcul précédent, nous garderons la constante f pour exprimer le demi-parametre de l'ellipse supposée decrite par le Soleil ; alors nommant l la distance variable $S T$ & supposant toujours

$$\alpha = \frac{Nk^6}{Mf^3} \text{ nous aurons } \varrho = -\frac{3k\alpha}{2p} \int \frac{r^4}{k^4} \frac{f^3}{l^3} \sin. 2t dv \quad \&$$

$$\Omega = -\frac{\frac{3}{2}\alpha \frac{r^3}{k^3} \cdot \frac{f^3}{l^3}}{1 + 2\varrho} - \frac{\frac{3}{2}\alpha r^3}{2k^3} \frac{f^3}{l^3} \cos. 2t - \frac{\frac{3}{2}\alpha r^2 dv}{2k^3} \frac{f^3}{l^3} \sin. (2t - 2\varrho)$$

Supposant en suite que if soit l'excentricité de l'orbite du Soleil, la valeur de l sera $\frac{f}{1-i} \cos. z$, d'où l'on tirera, en n'exigeant pas d'abord plus d'exactitude dans le calcul que l'on n'en a mis dans la solution du Probleme précédent, $\frac{f^3}{l^3} = 1 + 3i \cos. z$, $\frac{f^4}{l^4} = 1 + 4i \cos. z$, Tems par z

$$= \frac{f^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{N}} (z + 2i \sin. z). \text{ De là l'équation qui donne la}$$

valeur de t au lieu d'être comme dans le §. 4 du Probleme précédent $(1 - \frac{1}{n}) \times (v + \frac{2e}{m} \sin. mv + \frac{3e^2}{4m} \sin. 2mv)$

$$= v - t, \text{ sera } (1 - \frac{1}{n}) v \times (v + \frac{2e}{m} \sin. mv + \frac{3e^2}{4m} \sin. 2mv)$$

$$= v - t + 2i \sin. (v - t) \text{ ou simplement } = v - t + 2i \sin. (1 - \frac{1}{n}) v,$$

en mettant dans le terme $2i \sin. v - t$, en consequence de ce que la petitesse de i permet de negliger, $(1 - \frac{1}{n}) v$ à la place de z qui en differe peu.

Par ce moien, en gardant les mêmes denominations que ci-dessus, on aura

$$t = v - \mathcal{E} \sin. mv - \delta \sin. 2mv + 2i \sin. (1 - \frac{1}{n}) v, \text{ qui donneroit}$$

$$\sin. 2t = \sin. \frac{2v}{n} - \mathcal{E} \sin. (\frac{2v}{n} + mv) - \delta \sin. (\frac{2v}{n} + 2mv) - 2i \sin. (1 + \frac{1}{n}) v$$

$$+ \mathcal{E} \sin. (\frac{2v}{n} - mv) + \delta \sin. (\frac{2v}{n} - 2mv) + 2i \sin. (\frac{2v}{n} - 1) v \quad \&$$

$$\cos. 2t = \cos. \frac{2v}{n} - \mathcal{E} \cos. (\frac{2v}{n} + mv) - \delta \cos. (\frac{2v}{n} + 2mv) - 2i \cos. (1 + \frac{1}{n}) v$$

$$+ \mathcal{E} \cos. (\frac{2v}{n} - mv) + \delta \cos. (\frac{2v}{n} - 2mv) + 2i \cos. (\frac{2v}{n} - 1) v.$$

Se contentant de même dans les termes $3i \cos. z$ &

$4i \cos. z$ de faire, à cause de la petitesse de i , $z = (1 - \frac{1}{n})v$, on aura $\frac{f^3}{l^3} = 1 + 3i \cos. (1 - \frac{1}{n})v$ & $\frac{f^4}{l^4} = 1 + 4i \cos. (1 - \frac{1}{n})v$. Cela posé le calcul n'aura plus aucune difficulté & s'achevera comme celui de la solution précédente. Je n'en donne pas le détail non seulement par ce qu'il est inutile pour des juges aussi éclairés que ceux à qui se présente cet ouvrage, & qu'il est propre à exercer ceux qui ne seroient pas si au fait de la matiere, mais parce que le premier calcul n'a presque d'autre but que d'indiquer la nature des termes qui doit entrer dans la valeur de r que dans l'expression du tems & qu'il sera beaucoup plus utile de passer maintenant aux methodes qu'il faut suivre pour mettre dans le calcul toute l'exactitude necessaire & pour avoir égard aux autres conditions du Probleme.

XIX.

PROBLEME V.

Soit L représentant l'orbite de la Lune, NS celle du Soleil, $T \cap N$ la ligne qui passe par la Terre & ces deux astres à l'instant où l'on suppose que commence leur mouvement, S et L les lieux du Soleil et de la Lune après un tems quelconque. On demande les forces Φ et Π avec lesquelles le Soleil trouble les mouvemens de la Lune autour du centre T de la Terre. Fig. 3.

La force Φ étant toujours supposée comme ci-dessus tendante au centre T , l'autre perpendiculaire au raion vecteur, & placé sur le plan de l'orbite de la Lune

Soient joints les points S, L, T par les droites TS, TL, SL , abaissée SO perpendiculaire à NM , SS' perpendiculaire au plan de l'orbite de la lune, tracée la projection NS' de l'orbite du Soleil sur le plan de celle de la Lune, tirées $S'L, S'T$.

Soient en suite nommées comme ci - dessus

N , la masse du Soleil

M , la somme de celles de la Terre & de la Lune

l , le raion vecteur de l'orbite du Soleil

r , celui de l'orbite de la Lune

t , l'angle que l'on a en retranchant le lieu vrai du Soleil dans son orbite du lieu vrai de la lune dans la sienne, c'est-à-dire $NTL - NTS$

Enfin soit fait l'angle $STL = t$

l'angle $S'TL = t'$

$SL = s$

$TS' = l'$

La distance du Noeud au Soleil, ou l'angle $NTS = u$

Le cosinus de l'inclinaison reciproque des orbites $= \psi$

Maintenant il est aisé de voir que les forces avec lesquelles le Soleil trouble les mouvemens de la Lune sont l'une $\frac{Nr}{l^3}$, qui agit de L vers T , l'autre $N(\frac{l}{s^3} - \frac{1}{l^3})$ qui pousse suivant la parallele menée de L à TS .

Decomposant donc cette dernière en deux, dont l'une soit perpendiculaire au plan de l'orbite de la Lune, & dont l'autre soit dans la direction parallele à TS' , on aura pour cette seconde (l'autre étant inutile à considérer ici) $N(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{l^3}) \frac{l'}{l}$. Mais cette seconde force $N(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{l^3}) \frac{l'}{l}$ décomposée suivant LT & sa perpendiculaire dans le plan $\odot TL$ de l'orbite donnera les forces $N(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{l^3}) \frac{l'}{l} \cos. t$ & $N(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{l^3}) \frac{l'}{l} \sin. t$

Donc les forces cherchées seront $\Phi = \frac{Nr}{s^3} - N(\frac{l}{s^3} - \frac{1}{l^3}) \frac{l'}{l} \cos. t$ & $\Pi = -N(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{l^3}) \frac{l'}{l} \sin. t$.

Pour chasser s de ces quantités je remarque que sa valeur est $\sqrt{(l^2 - r^2 - 2rl \cos. t)}$ & qu'on en tire en négligeant ce qui peut l'être sans scrupule $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{l^3} + \frac{2r}{4l^5} + \frac{3r}{l^4} \cos. t + \frac{15r^2}{4l^5} \cos. 2t$,

substituant cette valeur dans les quantités précédentes & mettant à la place de $\cos. t$ la valeur $\cos. t \times \frac{l'}{l}$, ces expressions se changeront en

$$\Phi = -\frac{Nr}{2l^3} \left(\frac{l'l'}{l^2} - 2 \right) - \frac{3Nr}{2l^3} \times \frac{l'l'}{l^2} \cos. 2t - \frac{3r^2}{8l^4} \left(15 \left(\frac{l'}{l} \right)^3 - \frac{12l'}{l} \right) \cos. t - \frac{3r^2}{8l^4} \left(\frac{l'}{l} \right)^3 \times 5 \cos. 3t$$

$$\Pi = -\frac{3Nr}{2l^3} \frac{l'l'}{l^2} \sin. 2t - \frac{3Nr^2}{8l^4} \left(5 \left(\frac{l'}{l} \right)^3 - \frac{4l'}{l} \right) \sin. t - \frac{3r^2}{8l^4} \left(\frac{l'}{l} \right)^3 \times 5 \sin. 3t.$$

Des quelles il faut encore faire évanouir l' & t en déterminant leurs relations avec l & t .

$1 - \psi$ représentant comme nous l'avons déjà dit le cosinus de l'angle $S'OS$ que font ensemble les orbites, il ne sera pas difficile de voir qu'en négligeant seulement les troisièmes puissances de ψ on a

$$\frac{S'T}{ST} \text{ ou } \frac{l'}{l} = 1 - \frac{1}{2}\psi + \frac{1}{16}\psi^2 + \frac{1}{2}\psi \cos. 2u - \frac{1}{16}\psi^2 \cos. 4u$$

Et qu'en cherchant dans les mêmes suppositions la différence de l'angle NTS à NTS' on aura la valeur de

$$NTS' = u - \frac{1}{2}\psi \sin. 2u + \frac{1}{8}\psi^2 \cos. 4u - \frac{1}{4}\psi^2$$

Mais l'angle t a la même différence à l'angle t que NTS à NTS' donc $t' = t + \frac{1}{2}\psi \sin. 2u - \frac{1}{8}\psi^2 \cos. 4u - \frac{1}{4}\psi^2$

De ces valeurs de t' & de $\frac{l'}{l}$ on tirera facilement

$$\sin. 2t' = \left(1 - \frac{1}{4}\psi^2 \right) \sin. 2t + \frac{1}{4}\psi^2 \cos. 4u \sin. 2t + \left(\psi + \frac{1}{2}\psi^2 \right) \sin. 2u \cos. 2t - \frac{1}{4}\psi^2 \sin. 4u \cos. 2t$$

$$\cos. 2t' = \left(1 - \frac{1}{4}\psi^2 \right) \cos. 2t + \frac{1}{4}\psi^2 \cos. 4u \cos. 2t - \left(\psi + \frac{1}{2}\psi^2 \right) \sin. 2u \sin. 2t + \frac{1}{4}\psi^2 \sin. 4u \sin. 2t$$

$$\& \frac{l'l'}{l^2} = 1 - \psi + \frac{1}{2}\psi^2 + \left(\psi - \frac{1}{2}\psi^2 \right) \cos. 2u.$$

Et substituant ces valeurs dans $\frac{l'l'}{l^2} \cos. 2t'$ & $\frac{l'l'}{l^2} \sin. 2t'$ on aura, en faisant $\psi - \frac{1}{2}\psi^2 = \psi'$,

$$\frac{l''}{l^3} \cos. 2t = (1 - \psi + \frac{1}{4}\psi\psi) \cos. 2t + \psi' \cos. (2t + 2u) + \frac{1}{4}\psi^2 \cos. (4u + 2t)$$

$$\frac{l''}{l^3} \sin. 2t = (1 - \psi + \frac{1}{4}\psi\psi) \sin. 2t + \psi' \sin. (2t + 2u) + \frac{1}{4}\psi^2 \sin. (4u + 2t)$$

Quant à $(\frac{l''}{l})^3$ & à $\sin t$, $\sin. 3t$, $\cos. t$, $\cos. 3t$ à cause des termes où ces quantités entrent, il faudra un peu moins d'exactitude & on se contentera de faire

$$(\frac{l''}{l})^3 = 1 - \frac{3}{2}\psi + \frac{3}{2}\psi \cos. 2u$$

$$\sin. t = \sin. t + \frac{1}{2}\psi \sin. 2u \cos. t$$

$$\cos. t = \cos. t - \frac{1}{2}\psi \sin. 2u \sin. t$$

$$\sin. 3t = \sin. 3t + \frac{3}{2}\psi \sin. 2u \cos. 3t$$

$$\cos. 3t = \cos. 3t - \frac{3}{2}\psi \sin. 2u \sin. 3t$$

Nous n'avons donc plus maintenant qu'à mettre toutes les valeurs à la place des quantités qu'elles expriment, & nous aurons enfin, en faisant,

$$b = 1 - \psi + \frac{1}{4}\psi^2, p = 1 - \frac{3}{2}\psi, q = 1 - \frac{3}{2}\psi, \psi'' = \psi' - \frac{1}{8}\psi^2,$$

$$\Phi = -\frac{Nr}{2l^3}(b + 3b \cos. 2t) + \frac{Nr}{l^3}\psi'' - \frac{3Nr}{2l^3}\psi'(\cos. 2u + \cos. (2t + 2u)) - \frac{3r^2N}{8l^4}(3p \cos. t + 5q \cos. 3t)$$

$$\& \Pi = -\frac{3Nr}{2l^3} b \sin. 2t - \frac{3Nr}{2l^3} \psi' \sin. (2t + 2u) - \frac{3r^2N}{8l^4}(p \sin. t + 5q \sin. 3t)$$

Négligeant à la vérité dans Φ les termes $-\frac{3r^2N\psi^2}{8l^4} \cos. (4u + 2t)$

$$-\frac{27r^2\psi N}{8l^4} \cos. (2u + t) + \frac{45r^2N\psi}{16l^4} \cos. (2u - t) - \frac{45\psi N r^2}{16l^4} \cos.$$

$$(2u + 3t). \text{ Et dans } \Pi \text{ les termes } -\frac{9\psi r^2N}{8l^4} \sin. (2u + t)$$

$$+ \frac{15\psi r^2N}{16l^4} \sin. (2u - t) - \frac{45r^2N\psi}{16l^4} \sin. (2u + 3t) - \frac{3Nr\psi^2}{8l^3} \times$$

$\sin. (4u + 2t)$. Mais leur omission ne doit laisser aucun scrupule, tant à cause de la petitesse de ces termes en eux mêmes, que par la nature de ceux qu'ils introduiroient.

Il est bon d'observer que la quantité $1 - \psi$ qui est variable à la rigueur, puisqu'elle exprime le cosinus d'une incli-

inclinaison variable , peut être prise pour constante , & pour le cosinus de l'inclinaison moyenne de l'orbite de la Lune. Il y aura cependant un seul terme le premier de Φ qui est $-\frac{N r b}{2 l^3}$ où nous ferons une petite correction de quelques secondes due à la variation de cette inclinaison.

On voit par ces expressions des forces , & en se rappelant , tant la manière dont elles sont employées dans Ω que l'usage de cette quantité pour trouver Ξ jusqu'à quel point l'on peut considérer séparément les conditions de l'inclinaison de l'orbite & de la parallaxe du Soleil. Car 1° les premiers termes de Φ & de Π ne sont autre chose que ceux qu'on avoit dans le Probleme précédent, en negligant la parallaxe du Soleil & l'inclinaison , avec cette seule différence que tous les termes seront affectés du coefficient constant b qui est à peu-près le cosinus de l'inclinaison moyenne , & que l'on a de plus dans Ω le terme $\frac{N r^3 \psi''}{M l^3}$ qui n'a presque d'effet que dans la détermination du mouvement de l'apogée à l'expression du quel il donne une petite augmentation , mais bien moindre que celle que le coefficient b produit tant en affectant le coefficient E de $\cos. mv$ dans Ω , qu'en influant à peu-près proportionnellement sur γ dont l'effet est si considérable, ainsi que nous l'avons vu par rapport au mouvement de l'apogée.

2°. La partie des expressions précédentes qui donne la correction du mouvement de la Lune dependante de la position du noeud consistera dans les termes

$$-\frac{3 N r \psi'}{2 l^3} (\cos. 2u + \cos. (2t + 2u)) \text{ de } \Phi$$

$$\& -\frac{3 N r \psi'}{2 l^3} \sin. (2t + 2u) \text{ de } \Pi.$$

Leur effet sera d'introduire trois petites corrections ou equations au mouvement de la Lune & qui n'altere-

ront en aucune maniere sensible les autres termes trouvés précédemment par la 1^{ere} partie de Π .

3°. La partie des mêmes expressions qui donnera les termes dependans de la parallaxe du Soleil fera

$$- \frac{3 r^2 N}{8 l^4} (p \sin. t + 5 q \cos. 3 t) \text{ dans } \Pi \text{ \&}$$

$$- \frac{3 r^2 N}{8 l^4} (3 p \cos. t + 5 q \cos. 3 t) \text{ dans } \Phi.$$

Le calcul s'en fera séparément des deux autres parties & permettra beaucoup plus d'omissions dans le calcul que l'usage des premiers termes de Φ & Π .

XX.

Valeurs de Ω & de φ tirées des formules précédentes.

Pour preparer à la maniere d'emploier ces forces, nous commencerons par en tirer les quantités Ω & φ dont la première étant reduite en cosinus de multiples de v , donne aussitôt les termes de Ξ , c'est-à-dire du supplement de $1 - e \cos. m v$ dans la valeur de $\frac{k}{r}$ ou dans l'équation de l'orbite & dont la seconde sert à former l'expression du tems.

§. 1. Ne prenant d'abord que les 1^{ers} termes de Φ & de Π comme nous venons de dire qu'il suffisoit pour avoir exactement les termes les plus considerables des équations cherchées, nous verrons d'abord qu'en nommant

α' la constante $\frac{N k^3 b}{M f^3}$, c'est à dire le produit de b par la quantité nommée α ci-dessus nous aurons

$$\varphi = - \frac{3 \alpha' k}{p} \int \frac{r^4 f^3}{k^4 l^2} \sin. 2 t d v \text{ \& } \Omega = - \left(\left(\frac{1}{2} - \psi \frac{r^3 f^3}{k^3 l^2} - \frac{3 r^3 f^3}{2 k^3 l^2} \cos. 2 t \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3 r r d r f^3}{2 k^3 d v l^2} \sin. 2 t \right) \alpha + 2 \varphi \right) \times (1 - 2 \varphi + 4 \varphi^2)$$

Dans la quelle le facteur $1 - 2\varrho + 4\varrho^2$ est mis à la place du diviseur $1 + 2\varrho$ que devoit avoir la quantité Ω . Au reste le terme $4\varrho^2$ de ce facteur ne demandera d'être employé que pour les termes les plus considérables de Ω & il n' a presque d' effet que sur la constante qui fait le premier terme de ce facteur & la quelle differe très peu de l' unité. On verra aussi qu' en multipliant -2ϱ par Ω (j' appelle ainsi le premier facteur de Ω) il n' y aura qu' un petit nombre des termes de l' un & de l' autre des deux multiplicateurs qui se combineront ensemble, & qu' il ne faudra s' attacher qu' à ceux qui doivent donner des multiples de v petits ou peu differens de l' unité.

§. 2. Si l' on employe ensuite la seconde partie de Φ & de Π pour avoir les suppléments ϱ & Ω que les quantités ϱ & Ω trouvées précédemment reçoivent en vertu de l' inclinaison des orbites l' on trouvera

$$\varrho = -\frac{3ka\psi'}{2p} \int \frac{r^4}{k^4} \frac{f^3}{l^3} \sin. (2t + 2u) dv$$

$$\& \Omega = -(\psi' \alpha (\frac{3r^3}{k^3} \frac{f^3}{l^3} \cos. 2u + \cos. (2t + 2u)) - \frac{3\alpha\psi' r r dr f^3}{2k^3 l^3 v} \times \sin. (2t + 2u + 2\varrho) \times (1 - 2\varrho) + \Omega (1 - 2\varrho))$$

Dans la quelle on pourroit sans perdre que quelques secondes negliger le facteur $1 - 2\varrho$ & le terme $\Omega(1 - 2\varrho)$. Cependant comme l' usage des ces quantités ne demande que des substitutions grossieres dans les premiers termes de ϱ & de Ω trouvés anterieurement j' y ai eû égard.

§. 3. Enfin si l' on emploie la troisieme partie de l' expression des forces pour trouver les seconds suppléments de ϱ & de Ω on aura en nommant α la quantité $\frac{\alpha k}{f}$ c'est-à dire une partie de α proportionelle au rapport qui est entre les distances moyennes de la Lune & du Soleil à la Terre, on aura $\varrho = -\frac{3\alpha k}{2p} \int \frac{r^5}{k^5} \frac{f^4}{l^4} (p \sin t + 5q \sin. 3t) dv$

& $\Omega'' = -\frac{2}{3} \alpha \frac{r^4}{k^4} \frac{f^4}{l^4} (3p \cos. t + 5q \cos. 3t) - \frac{3\alpha}{3^2} \times \frac{4r^3 dr}{k^4 dv} \cdot \frac{f^4}{l^4} (p \sin. t + 5q \sin. 3t) - 2\varrho^2$. N' aiant point d'égard ici au second facteur de Ω qui est inutile.

XXI.

De la manière de former les valeurs des puissances de r qui doivent être substituées dans Ω & dans l'expression du tems.

Comme les valeurs de $\frac{r^2}{k^2}$, $\frac{r^3}{k^3}$ &c. ne font autre chose que les puissances -2 , -3 , de $1 - e \cos. mv + \Xi$ on trouvera aisément leurs valeurs par la formule du binome & par les Théoremes de sinus & de cosinus déjà employés dans ce memoire. On commencera par faire auparavant

$$\begin{aligned} a &= 1 + 3ee, \quad \grave{a} = 1 + 5ee, \quad \hat{a} = 1 + \frac{15ee}{2}, \quad \check{a} = 1 + \frac{3}{2}ee \\ &+ \frac{15e^4}{8}, \quad \acute{a} = 1 + \frac{21}{2}ee, \quad \acute{e} = e + \frac{5}{2}e^3, \quad \grave{e} = e + \frac{15e^3}{4}, \quad \hat{e} = e \\ &+ \frac{21e^3}{4}, \quad \check{e} = e + \frac{3}{2}e^3, \quad \check{\check{e}} = e + 7e^3 \end{aligned}$$

& l'on aura en suite

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{k^2} &= \check{a} + 2\check{e} \cos. mv - 2a\Xi - 6\acute{e}\Xi \cos. mv - 6e^2\Xi \cos. 2mv \\ &+ 3\grave{a}\Xi^2 + 12\grave{e}\Xi^2 \cos. mv \\ &+ \frac{3}{2}ee \cos. 2mv \\ &+ e^3 \cos. 3mv \\ &+ \frac{5}{8}e^4 \cos. 4mv \end{aligned}$$

$$\frac{r^3}{k^3} = a + 3\acute{e} \cos. mv + 3ee \cos. 2mv - 3\grave{a}\Xi + 12\check{e}\Xi \cos. mv$$

$$\begin{aligned} \frac{r^4}{k^4} &= \grave{a} + 4\grave{e} \cos. mv + 5e^2 \cos. 2mv - 4\hat{a} - 20\acute{e}\Xi \cos. mv \\ &- 30e^2\Xi \cos. 2mv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{r^5}{k^5} &= \hat{a} + 5\hat{e} \cos. mv + \frac{15}{2}ee \cos. 2mv - 5\acute{a}\Xi - 30\check{e}\Xi \cos. mv \\ &- \frac{105}{2}e^2\Xi \cos. 2mv. \end{aligned}$$

Quant à $\frac{3r^2 dr}{k^3}$ & à $\frac{4r^3 dr}{k^4}$ qui entrent aussi dans Ω , leurs

valeurs se trouveront en differentiant $\frac{r^3}{k^3}$ & $\frac{r^4}{k^4}$.

J'ai eû égard dans la valeur de $\frac{r^2}{k^2}$ aux quarrés de la petite quantité Ξ^2 à cause que l'expression du tems, dans la quelle entre r^2 , n'est point multipliée par la petite quantité α comme le sont les termes de la quantité Ω pour les quels on fait usage des autres puissances de $\frac{r}{k}$.

L'avantage de ces transformations des puissances de r c'est que la valeur de Ξ n'étant jamais que des assemblages de cosinus de multiples de v , aussitôt qu'on introduit un nouveau terme dans la valeur de $\frac{k}{r}$ on trouve dans le moment par les formules précédentes les termes de plus qu'il ajoute aux puissances de $\frac{r}{k}$.

XXII.

De l'expression générale du tems, ou ce qui revient au même de la relation entre la longitude moyenne de la Lune & la vraie.

On a eu dans la proposition fondamentale de cette Theorie pour l'expression exacte du tems employé à parcourir un arc quelconque v , la quantité $\frac{1}{pM} \int \frac{r r dv}{\sqrt{(1+2\varrho)}}$. Si l'on fait passer les ϱ au numérateur en reduisant $(1+2\varrho)^{-\frac{1}{2}}$ en suite on changera cette expression en $\frac{k^2}{\sqrt{pM}} \int \frac{r r dv}{k^2} \times (1 - \varrho + \frac{3}{2}\varrho^2 - \frac{5}{2}\varrho^3 + \&c.)$ dont non seulement on peut negliger les autres termes, mais dans la quelle on peut mettre le terme $\frac{3}{2}\varrho^2$ sans commettre aucune erreur sensible dans la Theorie de la Lune.

Substituant en suite dans cette quantité à la place de $\frac{r^2}{k^2}$ la valeur qu'on a trouvée dans l'art. précédent, elle deviendra

$$\frac{k^2}{\sqrt{PM}} \left\{ \begin{aligned} & \left[\ddot{v} + \frac{2\ddot{e}}{m} \sin. m v - f d v (2 a \ddot{\Omega} + \ddot{a} \varrho) - f (6 e^2 \ddot{\Omega} + \frac{3}{2} e e \varrho) \cos. 2 m v d v \right] \\ & + \frac{3 e e + \frac{5}{2} e^4}{4 m} \sin. 2 m v + f d v (3 a \ddot{\Omega}^2 + 2 a \varrho \ddot{\Omega} + \frac{3}{2} \ddot{a} \varrho^2) \\ & + \frac{e^3}{3 m} \sin. 3 m v + f d v \cos. m v (6 e^4 \varrho \ddot{\Omega} + 3 \ddot{e} \varrho^2 + 12 e \ddot{\Omega}^2) \\ & + \frac{5 e^4}{32 m} \sin. 4 m v \end{aligned} \right\}$$

& lorsque toutes les integrations seront faites & qu'on aura divisé tous les termes par le coefficient total de v , on aura une suite composée de l'arc v & d'un certain nombre de termes qui ne seront tous que des sinus de multiples de v pour les quels il seroit fort aisé de construire des Tables, au cas qu'on eût besoin de determiner le tems ou la longitude moyenne qui lui est proportionelle par le moien de la longitude v . Mais ce seroit une peine très inutile & c'est au contraire l'operation inverse dont on a besoin en Astronomie, celle qui donne la longitude vraie par la longitude moyenne,

Nous enseignerons plus loin le procedé que cette inverse demande par une methode d'un usage très facile, non seulement pour ce probleme, mais pour tous ceux de même espece. Au reste j'appelle ici longitude non la distance de la Lune prise sur l'Ecliptique au point d'*Aries*, mais la distance prise sur l'orbite même de la Lune, entre le lieu de cet astre & un point fixe d'où je suppose que partent tous les arcs circulaires qui mesurent les angles v fussent ils de cent mille circonferences.

XXIII.

Lors qu'on voudra savoir ce que contribue dans l'expression du tems quelque partie proposée de la valeur tant de ϱ que de Ω , soit que cette partie soit la cor-

rection de quelque terme précédemment calculé, ou de quelque terme nouvellement introduit par une combinaison qu'on n'avoit pas aperçue d'abord; rien ne sera plus aisé que d'y parvenir par la formule précédente, lorsque ces termes seront petits comme sont toujours ceux, que l'on a après les premières opérations. Dans ces cas si Ω & ϱ expriment ces parties dont on veut savoir l'effet, on aura d'abord par le Lemme II. sans aucune complication, le terme Ξ introduit par celui de Ω dont il sera question, & alors la formule $-\int 2 a \Xi + \ddot{a} \varrho d v - \int (6 \dot{e} \Xi + 2 \ddot{e} \varrho) \cos. m d v$ donnera la correction cherchée du tems.

XXIV.

De la manière de trouver les valeurs de $\sin. 2t$, $\cos. 2t$ &c. qui entrent dans les expressions des forces.

Nous avons déjà vû que la valeur de l'angle t se tiroit de la comparaison de l'arc que la Lune parcourt dans un tems donné, avec celui que le Soleil parcourt dans le même tems. Prenant toujours x pour exprimer la longitude moyenne de la Lune correspondante à la vraie v ; z pour l'angle parcouru par le Soleil dans le même tems que v l'est par la Lune, $1 - \frac{1}{n}$ pour le rapport qui est entre les moyens mouvements de ces deux astres & i pour l'excentricité de l'orbite du Soleil divisée par le demiparametre; on aura l'équation

$$z + 2i \sin. z + \frac{3}{4} i i \sin. 2z = (1 - \frac{1}{n})x \text{ ou } v - t + 2i \sin(v-t) + \frac{3}{4} i i \sin. (2v - 2t) = (1 - \frac{1}{n})x$$

en négligeant comme on le peut sans aucun scrupule les puissances plus élevées de i .

Il ne s'agit donc plus que de tirer t en v de cette equation ; pour y parvenir nous commencerons par faire $w = v - (1 - \frac{1}{n})x$ ce qui changera l'equation précédente en $t = w + 2i \sin. (v - t) + \frac{3}{4}ii \sin. (2v - 2t)$ de la quelle on tirera facilement

$$t = w + 2i \sin. (v - w) - \frac{3}{4}ii \sin. (2v - 2w) \text{ ou}$$

$$t = v - (1 - \frac{1}{n})x + 2i \sin. (1 - \frac{1}{n})x - \frac{3}{4}ii \sin. (2 - \frac{2}{n})x$$

qui donnera la valeur cherchée de t en v aussitôt qu'on aura celle de x ou l'expression du tems.

Comme nous avons déjà vû dans l'Art. xviii quelle étoit la forme (& même a peu près la valeur) des premiers termes de x , prenons ceux de $(1 - \frac{1}{n})x$ qui en resultent

$$(1 - \frac{1}{n})v + \epsilon \sin. m v - \epsilon \sin. \frac{2}{n}v + r \sin. (\frac{2}{n} - m v) - \lambda \sin. (1 - \frac{1}{n})v + \mu \sin. (\frac{3}{n} - 1)v + \delta \sin. 2 m v$$

les coefficients ϵ , δ &c. de cette quantité étant ceux de la valeur de x multipliés par la fraction $1 - \frac{1}{n}$.

On trouvera facilement par des methodes déjà employées dans ce memoire le sinus de cette quantité dont on a besoin pour la valeur de t . Et cette valeur multipliée par $2i$ donnera

$$2i(1 - \frac{1}{4}\epsilon^2) \sin. (1 - \frac{1}{n})v + \epsilon i \sin. (m + 1 - \frac{1}{4})v - i \epsilon \sin. (1 + \frac{1}{n})v + i r \sin. (1 + \frac{1}{n} - m)v + i \mu \sin. \frac{2}{n}v - i \lambda \sin. (2 - \frac{2}{n})v - \epsilon i \sin. (m + \frac{1}{n} - 1)v - i \epsilon \sin. (\frac{3}{n} - 1)v - i r \sin. (\frac{3}{n} - 1 - m)v + i \mu \sin. (\frac{4}{n} - 2)v$$

en negligéant quelques quantités dont l'effet seroit insensible.

Quant à la valeur de $\frac{3}{4}ii \sin. (2 - \frac{2}{n})x$ elle sera simplement $\frac{3}{4}ii \sin. (2 - \frac{2}{n})v$ en cette rencontre à cause de la petitesse de son coefficient. Cela posé si l'on n'admet dans l'expression du tems que les termes de l'espece de ceux qu'on vient d'admettre dans la valeur de x , on aura après avoir fait

$$\epsilon + \mu$$

$$\varepsilon + \mu = 9$$

$$i(1 - \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon) + \frac{1}{2}\lambda = \gamma$$

$$t = \frac{v}{n} - \varepsilon \sin. m v + 9 \sin. \frac{2v}{n} + 2\gamma \sin. (1 - \frac{1}{n})v - (\mu + i\varepsilon) \sin. (\frac{2}{n} - 1)v - \varepsilon i \sin. (m + 1 - \frac{1}{n})v \\ - \delta \sin. 2mv - (i\lambda + \frac{5}{4}ii) \sin. (2 - \frac{2}{n})v - i\varepsilon \sin. (1 + \frac{1}{n})v - \varepsilon i \sin. (m + \frac{1}{n} - 1)v \\ - r \sin. (\frac{2}{n} - m)v$$

$$- i r \sin. (1 + \frac{1}{n} - m)v + i r \sin. (\frac{2}{n} - 1 - m)v$$

de la quelle on tirera , en faisant $\ddot{a} = 1 - 4\ddot{z}\ddot{z} - \varepsilon^2 - r^2 - 9^2$,

$$\ddot{a} = \ddot{a} \sin. \frac{2v}{n} - \varepsilon(1-9) \sin. (\frac{2}{n} + m)v - (\delta - \frac{1}{2}\varepsilon^2) \sin. (\frac{2}{n} + 2m)v + (9 + \varepsilon r) \sin. \frac{4v}{n} + \mu \sin. (1 - \frac{1}{n})v + 2\gamma \sin. (1 + \frac{1}{n})v + (\frac{5}{2}ii + 2\gamma\gamma + i\lambda) \sin. (\frac{4}{n} - 2)v \\ + \varepsilon(1-9) \sin. (\frac{2}{n} - m)v + (\delta + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}r^2) \sin. (\frac{2}{n} - 2m)v - r(1-9) \sin. (\frac{4}{n} - m)v - 2\gamma \sin. (\frac{2}{n} - 1)v + (2\gamma\gamma - i\lambda - \frac{5}{4}ii) \sin. 2v \\ + r(1-9) \cos. m v \\ - (2\varepsilon\gamma - \varepsilon i) \sin. (1 + \frac{1}{n} + m)v + (2\varepsilon\gamma - \varepsilon i) \sin. (\frac{2}{n} - 1 + m)v + r i \sin. (m + \frac{1}{n} - 1)v \\ - (2\varepsilon\gamma - \varepsilon i) \sin. (\frac{2}{n} - 1 - m)v + (2\varepsilon\gamma - \varepsilon i) \sin. (1 + \frac{1}{n} - m)v + r i \sin. (m + 1 - \frac{1}{n})v \\ \ddot{a} \cos. \frac{2v}{n} - \varepsilon(1+9) \cos. (\frac{2}{n} + m)v - (\delta - \frac{1}{2}\varepsilon^2) \cos. (\frac{2}{n} + 2m)v + (9 + \varepsilon r) \cos. \frac{4v}{n} - 9 + (\mu + i\varepsilon) \cos. (1 - \frac{1}{n})v + 2\gamma \cos. (1 + \frac{1}{n})v + (\frac{5}{2}ii + 2\gamma\gamma + i\lambda) \cos. (\frac{4}{n} - 2)v \\ + \varepsilon(1+9) \cos. (\frac{2}{n} - m)v + (\delta + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}r^2) \cos. (\frac{2}{n} - 2m)v - r(1+9) \cos. (\frac{4}{n} - m)v - 2\gamma \cos. (\frac{2}{n} - 1)v + (2\gamma\gamma - i\lambda - \frac{5}{4}ii) \cos. 2v \\ + r(1+9) \cos. m v \\ - (2\varepsilon\gamma - \varepsilon i) \cos. (1 + \frac{1}{n} + m)v + (2\varepsilon\gamma - \varepsilon i) \cos. (\frac{2}{n} - 1 + m)v + r i \cos. (m + \frac{1}{n} - 1)v \\ - (2\varepsilon\gamma - \varepsilon i) \cos. (\frac{2}{n} - 1 - m)v + (2\varepsilon\gamma - \varepsilon i) \cos. (1 + \frac{1}{n} - m)v + r i \cos. (m + 1 - \frac{1}{n})v$$

A l'égard des autres termes de la valeur de x qu'on n'a pas employé ici pour déterminer t , on ne peut pas les négliger entièrement , mais il n'est pas nécessaire de recommencer le calcul précédent pour les y faire entrer parce qu'ils sont affés petits pour qu'on decouvre tout de suite ceux qu'ils produiront dans la valeur de $\sin. 2t$ & de $\cos. 2t$.

Que $q \sin. p v$ soit en général un des termes de x qui suivent ceux aux quels nous aurons eû égard

$q(1 - \frac{1}{n}) \sin. (\frac{2}{n} - p)v - q(1 - \frac{1}{n}) \sin. (\frac{2}{n} + p)v$ &
 $q(1 - \frac{1}{n}) \cos. (\frac{2}{n} - p)v - q(1 - \frac{1}{n}) \cos. (\frac{2}{n} + p)v$ seront ceux de la valeur de $\sin. 2t$ & de $\cos. 2t$ qui en resulteront.

G

On voit que dès qu'on aura trouvé par une première solution l'expression du tems, on pourra avoir assez exactement la valeur de $\sin. 2t$ & de $\cos. 2t$ à cause de la multiplication par la petite fraction $1 - \frac{2}{n}$ que tous les coefficients de x subissent en passant dans t . Et le dernier moien que nous venons de donner pour avoir égard aux termes non admis d'abord, rend en même tems aisé de rectifier les coefficients de tous les termes de $\sin. 2t$ & de $\cos. 2t$, aussitôt qu'on corrige ceux de l'expression du tems.

A l'égard des sinus & cosinus de t & de $3t$, qui entrent aussi dans les expressions de Ω , φ , ils demandent bien moins de précision pour être tirés de la valeur de t , à cause qu'ils sont tous multipliés par le coefficient α qui est aussi petit par rapport au coefficient α des premiers termes que la distance moyenne de la Lune l'est à l'égard de celle du Soleil.

XXV.

Je ne dirai rien ici de la maniere d'exprimer les angles u & $u + t$ dont l'un est la distance du Soleil au Noeud, & l'autre celle de la Lune au même point, mais la valeur de ces angles & des quantités qui leur appartiennent sera facile à trouver lors qu'on aura vû dans la seconde partie de ce memoire la determination du lieu du Noeud pour un instant quelconque donné.

XXVI.

De la maniere de faire disparoître les quantités $\frac{f^2}{13}$, $\frac{f^4}{14}$ qui entrent dans les valeurs de Ω & de φ .

L'orbite du Soleil étant toujours supposée une Ellipse dont le Parametre du demi axe est f , l'excentricité $f i$, &

dont l'équation est par conséquent $\frac{f}{l} = 1 - i \cos. z$ ou $\frac{f}{l} = 1 - i \cos. (v - t)$ on a $\frac{f^3}{l^3} = 1 - \frac{3}{2}ii - 3i \cos. (v - t) + \frac{3}{2}i i \cos. (2v - 2t)$ de la quelle il s'agit de chasser $\cos. (v - t)$ & $\cos. (2v - 2t)$.

Pour cela reprenant la valeur de t employée dans l'Art. XXIV on en tirera $v - t = (1 - \frac{1}{n})v + \epsilon \sin. m v - 2i \sin. (1 - \frac{1}{n})v - 2 \sin. \frac{2}{n} v$

$$+ 5 \sin. 2m v + \frac{5}{4}ii \sin. (2 - \frac{2}{n})v + r \sin. (\frac{2}{n} - m)v$$

en négligeant la petite différence entre i & i dans le terme $\sin. (1 - \frac{1}{n})v$ & le terme $i \lambda$ dans $\sin. (2 - \frac{2}{n})v$.

Or de cette expression on tirera en omettant quelques termes dont l'effet est insensible

$$\cos. (v - t) = 1 - \frac{9}{8}ii \cos. (1 - \frac{1}{n})v - \frac{1}{2}\epsilon \cos. (m - 1 + \frac{1}{n})v - \frac{1}{2}r \cos. (\frac{1}{n} - 1 - m)v \\ - i \cos. (2 - \frac{2}{n})v + \frac{1}{2}\epsilon \cos. (m + 1 - \frac{1}{n})v + \frac{1}{2}r \cos. (1 + \frac{1}{n} - m)v$$

Quant au cosinus de $(2v - 2t)$ on le prendra pour $\cos. (2 - \frac{2}{n})v$ vû la petitesse du terme où il entre.

Cela posé on aura

$$\frac{f^3}{l^3} = 1 - \frac{3}{2}ii + 3i(1 - \frac{9}{8}ii) \cos. (1 - \frac{1}{n})v + \frac{3}{2}\epsilon i \cos. (m - 1 + \frac{1}{n})v + \frac{3}{2}i r \cos. (\frac{1}{n} - 1 - m)v \\ + \frac{9}{2}ii \cos. (2 - \frac{2}{n})v - \frac{3}{2}\epsilon i \cos. (m + 1 - \frac{1}{n})v - \frac{3}{2}i r \cos. (1 + \frac{1}{n} - m)v$$

pour $\frac{f^4}{l^4}$ il suffira de mettre à sa place $1 - 4i \cos. (1 - \frac{1}{n})v$.

XXVII.

En réfléchissant sur les termes que doivent introduire dans Ω toutes les quantités précédentes on voit qu'il se peut glisser dans cette quantité des cosinus de l'angle v dont nous avons vû Art. VII le dangereux effet d'amener dans la valeur de r des arcs au lieu de leurs cosinus, de tels termes viendront par exemple de la combinaison des cosinus de $(1 - \frac{1}{n})v$ que contient $\frac{f^3}{l^3}$ avec des cosinus de $\frac{v}{n}$ donnés dans la valeur de $\frac{r^3}{k^3}$ ou dans celle de $\cos. t$ &c.

Pour éviter cet inconvénient qui ôteroit à la solution précédente l'avantage de convenir à un aussi grand nombre de revolutions que l'on voudroit, & la priveroit de la simplicité & de l'universalité si précieuse en Mathématique, il faut commencer par en chercher la cause. Or on decouvre facilement que ces termes ne viennent que de ce que l'on a supposé fixe l'apogée du Soleil, ce qui n'est pas permis en toute rigueur puisque quelque petite que soit, sur cet astre, l'action de la Lune, elle n'en est pas moins réelle & doit lui produire un mouvement d'apogée quoique très lent à la vérité. Voïons donc comment l'on auroit égard à ce mouvement. On y parviendroit en prenant pour équation de l'orbite du Soleil $\frac{f}{r} = 1 - i \cos. pz$ qui au lieu d'introduire des cosinus de $1 - \frac{1}{n}v$ introduiroit des cosinus de $p(1 - \frac{1}{n})v$ lesquels se mêlant avec les $\frac{v}{n}$ ne donneroient jamais des $\cos. v$, mais des $\cos. pv$.

A la vérité ces $\cos. pv$ auroient encore un inconvénient suivant ce que nous avons remarqué Art. VIII. celui de la petitesse extreme du diviseur $pp - 1$ qu'auroit le terme de même espece qui leur répondroit dans la valeur de $\frac{k}{r}$. Car il faudroit en conséquence de cette petitesse porter si loin le scrupule dans les différentes combinaisons qui produiroient ces sortes de termes & calculer avec tant de soin leurs coefficients que l'opération en seroit très fatigante pour ne pas dire impraticable. Mais on n'aura pas de regret de l'abandonner lors qu'on remarquera qu'après toutes les peines qu'on auroit prises pour ne rien négliger, l'opération manqueroit faute d'avoir la vraie valeur de p que l'on ne pourroit tirer ni du Probleme des trois corps à cause de l'action des

autres planetes, qu' on ne peut negliger en cette rencontre, ni des Phenomenes mêmes par l' incertitude des observations pour un mouvement aussi lent que celui de l'apogée du Soleil. Au reste loin d' entreprendre de si penibles calculs on voit un parti fort simple à prendre & beaucoup plus utile, c'est de calculer toutes les autres équations du mouvement de la Lune, sur les quelles celle du mouvement de l' Apogée du Soleil ne peut faire aucun effet, de comparer ensuite les lieux calculés avec la Theorie & de voir ce que les differences permettent de supposer par rapport à l' equation qui doit resulter des *cos. p v.* L' operation est alors fort facile.

AVERTISSEMENT.

Le peu de tems qui me reste d' ici au terme fixé par l' Academie Impériale de St. Petersbourg, pour l' admission des pieces, ne me permet pas de mettre en ordre d' un maniere suffisamment claire tous les calculs des substitutions aux quelles se reduit maintenant la determination des termes tant de l' équation de l' orbite que de l' expression du tems: Mais comme il n' est plus question que de la longueur des operations, donc j'ai vaincu ou diminué le dégoût à l' aide des préceptes donnés ci-dessus, & de quelques artifices faciles à imaginer à ceux qui ont travaillé sur la même matiere, j' espere qu' on me pardonnera de me contenter d' en donner simplement les resultats suivans.

XXVIII.

Equation de l'orbite.

$$\begin{aligned}
\frac{r}{r_0} = & 1 - 0,05505 \cos.mv + 0,0071624 \cos.\frac{2}{n}v - 0,0111000 \cos.(\frac{2}{n}-m)v + 0,0002024 \cos.(\frac{2}{n}+m)v + 0,0010825 \cos.(\frac{2}{n}-2m)v \\
& + 0,00007734 \cos.(1-\frac{1}{n})v + 0,0000541 \cos.(1+\frac{1}{n})v - 0,0004880 \cos.(\frac{3}{n}-1)v - 0,00009213 \cos.(1+\frac{1}{n}-m)v \\
& - 0,0000094 \cos.(2-\frac{2}{n})v \\
& + 0,00046492 \cos.(\frac{3}{n}-1-m)v + 0,00025049 \cos.(m+\frac{1}{n}-1)v - 0,00017479 \cos.(m+1-\frac{1}{n})v \\
& + 0,00000055 \cos.(1+\frac{1}{n}-2m)v - 0,00003761 \cos.(\frac{3}{n}-1-2m)v \\
& - 0,00025331 \cos.\frac{v}{n} + 0,00002004 \cos.(\frac{1}{n}-m)v + 0,000001158 \cos.(1-m)v \\
& + 0,0000220 \cos.(2+2\omega)v - 0,0000333 \cos.(2-\frac{2}{n}+2\omega)v + 0,00022835 \cos.(2-m+\omega)v - 0,0000209 \cos.(2-2m+\omega)v
\end{aligned}$$

XXIX.

Valeur générale de la longitude moyenne.

$$\begin{aligned}
\theta = & v + 0,1106996 \sin.mv + 0,0005359 \sin.\frac{1}{n}v - 0,0001934 \sin.(\frac{1}{n}-m)v - 0,0000215 \sin.(\frac{1}{n}+m)v \\
& + 0,0022679 \sin.2mv - 0,0093021 \sin.\frac{2v}{n} - 0,0004836 \sin.(\frac{2}{n}-2m)v - 0,0000298 \sin.(\frac{2}{n}+2m)v \\
& + 0,0000555 \sin.3mv \\
& + 0,022726 \sin.(\frac{2}{n}-m)v - 0,0007160 \sin.(\frac{2}{n}+m)v + 0,0000446 \sin.(\frac{2}{n}-3m)v \\
& - 0,0028091 \sin.(1-\frac{1}{n})v - 0,0000674 \sin.(1+\frac{1}{n})v + 0,000666 \sin.(\frac{3}{n}-1)v + 0,0001802 \sin.(1+\frac{1}{n}-m)v \\
& + 0,0001040 \sin.(2-\frac{2}{n})v \\
& - 0,0009810 \sin.(\frac{3}{n}-1-m)v - 0,0001074 \sin.(1+\frac{1}{n}-2m)v + 0,0000578 \sin.(\frac{3}{n}-1-2m)v - 0,0005333 \sin.(m+\frac{1}{n}-1)v \\
& + 0,0003267 \sin.(m+1-\frac{1}{n})v + 0,0000346 \sin.(\frac{3}{n}-1+m)v - 0,0001864 \sin.(1-m)v \\
& - 0,000490 \sin.(2+2\omega)v + 0,0003930 \sin.(2-\frac{2}{n}+2\omega)v - 0,0005456 \sin.(2-m+2\omega)v \\
& - 0,0003481 \sin.(2-2m+2\omega)v
\end{aligned}$$

XXX.

Les termes affectés de $\frac{1}{n}v$, $(\frac{1}{n}-m)v$, $(\frac{1}{n}+m)v$, $(1-m)v$ que renferment ces deux quantités sont ceux qui demandent la considération de la parallaxe du Soleil.

Les quatre derniers de l'une & de l'autre de ces quantités sont ceux qui résultent de la variation de la po-

fition de l'orbite de la Lune par rapport au Soleil. La lettre ω qui entre dans les termes exprime le rapport du moïen mouvement du Noeud à celui de la Lune.

La détermination de ces termes demande ainsi que nous l'avons déjà dit, quelque chose de plus que ce qui précède, mais on verra qu'ils se trouvent de la même manière que les premiers lorsqu'on aura appris dans la 2^{de} Partie à trouver le mouvement des Noeuds & la variation de l'Inclinaison.

Les seuls élémens astronomiques que j'aye employés pour parvenir aux quantités précédentes sont

1° l'excentricité e que je suppose de 0,05505, c'est-à-dire égale à la moïenne de celles qu'on prend dans la Theorie ordinaire.

2° Le rapport du mouvement moïen du Soleil à celui de la Lune que j'ai fait $= 0,0748011$.

3° L'excentricité de l'orbite solaire que j'ai pris de 0,01683.

4° La parallaxe du Soleil que j'ai supposé de 12''.

XXXI.

LE M M E III.

Dans une équation telle que $x = v + a \sin. mv$ où a est une quantité peu au dessus de 0,1 & où m n'est pas fort différent de l'unité, la valeur de v en x sera déterminée à moins de 2" ou 3" d'erreur par la formule

$$v = x - a \left(1 - \frac{m^2 a^2}{2} \right) \sin. mx + \frac{1}{2} a^2 m \sin. 2mx - \frac{3}{8} a^3 m^2 \sin. 3mx$$

XXXII.

LEMME IV.

Dans l'équation $x = v + a \sin. mv + b \sin. pv$ qui contient de plus que la précédente un terme dont le coefficient est restreint de même à ne jamais surpasser considérablement 0, 1 & où p est plutôt au dessous de 2 qu'au dessus, l'on aura avec une exactitude à peu près la même

$$\begin{aligned}
 x = & v - a \left(1 - \frac{m^2 a^2}{8} - \frac{m^2 b^2}{4} \right) \sin. mx + \frac{ab}{2} x(p+m) \sin. (p+m)x - \frac{1}{8} a^2 b (2m+p)^2 \sin. (2m+p)x \\
 & + \frac{1}{2} a^2 m \sin. 2mx - \frac{ab}{2} (p-m) \sin. (p-m)x + \frac{1}{8} a^2 b (2m-p)^2 \sin. (2m-p)x \\
 & - \frac{3}{8} a^3 m^2 \sin. 3mx \\
 & - \frac{1}{8} b^2 a (2p+m)^2 \sin. (2p+m)x \\
 & - b \left(1 - \frac{p^2 b^2}{8} - \frac{p^2 a^2}{4} \right) \sin. px \\
 & + \frac{1}{2} p b^2 \sin. 2px \\
 & - \frac{3}{8} p^2 b^3 \sin. 3px \\
 & + \frac{1}{8} b^2 a (2p-m)^2 \sin. (2p-m)x
 \end{aligned}$$

XXXIII.

LEMME V.

Enfin dans l'équation $x = v + a \sin. mv + b \sin. pv + c \sin. qv$
où le 3^{me} terme est soumis aux mêmes conditions on a

$$\begin{aligned}
 v = x - a \left(1 - \frac{m^2 a^2}{8} - \frac{m^2 b^2}{4} - \frac{m^2 c^2}{4} \right) \sin. mx &+ \frac{ab}{2} (p+m) \sin. (p+m)x - \frac{1}{8} a^2 b (2m+p)^2 \sin. (2m+p)x - \frac{1}{4} abc (q+p+m)^2 \sin. (q+p+m)x \\
 &+ \frac{1}{8} a^2 b (2m-p)^2 \sin. (2m-p)x + \frac{1}{4} abc (q+p-m)^2 \sin. (q+p-m)x \\
 &+ \frac{1}{2} a^2 m \sin. 2mx - \frac{ab}{2} (p-m) \sin. (p-m)x \\
 &- \frac{1}{8} ab^2 (2p+m)^2 \sin. (2p+m)x + \frac{1}{4} abc (q-p+m)^2 \sin. (q-p+m)x \\
 &- \frac{3}{8} a^3 m^2 \sin. 2mx + \frac{ac}{2} (q+m) \sin. (q+m)x \\
 &+ \frac{1}{8} ab^2 (2p-m)^2 \sin. (2p-m)x + \frac{1}{4} abc (m-q+p)^2 \sin. (m-q+p)x \\
 - b \left(1 - \frac{p^2 b^2}{8} - \frac{p^2 a^2}{4} - \frac{p^2 c^2}{4} \right) \sin. px &- \frac{ac}{2} (q-m) \sin. (q-m)x - \frac{1}{8} a^2 c (2m+q)^2 \sin. (2m+q)x \\
 &+ \frac{1}{2} b^2 p \sin. 2px + \frac{bc}{2} (p+q) \sin. (q+p)x + \frac{1}{8} a^2 c (2m-q)^2 \sin. (2m-q)x \\
 &- \frac{3}{8} p^2 b^2 \sin. 2px - \frac{bc}{2} (q-p) \sin. (q-p)x - \frac{1}{8} c^2 a (2q+m)^2 \sin. (2q+m)x \\
 &+ \frac{1}{8} c^2 a (2q-m)^2 \sin. (2q-m)x \\
 - c \left(1 - \frac{q^2 c^2}{8} - \frac{q^2 b^2}{4} - \frac{q^2 a^2}{4} \right) \sin. qx &- \frac{1}{8} b^2 c (2p+q)^2 \sin. (2p+q)x \\
 &+ \frac{1}{8} b^2 c (2p-q)^2 \sin. (2p-q)x \\
 &- \frac{1}{8} b c^2 (2p+q)^2 \sin. (2p+q)x \\
 &+ \frac{1}{8} b c^2 (2p-q)^2 \sin. (2p-q)x
 \end{aligned}$$

On trouveroit aisément d'après ces Lemmes la résolution des Equations qui contiendroient un plus grand nombre de termes.

XXXIV.

PROBLEME VI.

On propose de tirer de l'expression générale de l'Art.
XXIX. la valeur de la longitude vraie exprimée en lon-

H

gitude moyenne x , & l'on demande la maniere la plus simple de rectifier cette valeur de v lorsqu'on fera quelque correction, ou qu'on ajoutera quelques nouveaux termes à x .

§. 1. Nous ne prendrons d'abord que les quatre termes $v + 0$, $1106996 \sin.mv + 0$, $0227726 \sin.(\frac{2}{n} - m)v - 0$, $0093021 \sin.\frac{2}{n}v$ de la valeur de x & mettant a à la place de 0 , 1106996 ; α à la place de 0 , 0227726 & -8 à la place de 0 , 0093021 nous aurons par le Lemme précédent pour la resolution de cette équation en negligeant quelques uns des termes de ce Lemme à cause que α & 8 sont beaucoup plus petits qu'on n'avoit supposés b & c .

$$\begin{aligned}
 v = x - & \left\{ \begin{array}{l} a - \frac{m^2 a^2}{8} - \frac{m^2 \alpha^2}{4} \\ - \frac{m^2 a \alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2 m}{4} \end{array} \right\} \sin.mx - \left(\alpha - \frac{(\frac{2}{n} - m)^2 \alpha a^2}{4} - a \alpha (\frac{2}{n} - m) \right) \sin.(\frac{2}{n} - m)x + \left(8 - \frac{a^2 8}{nn} - 8 \alpha^2 + \frac{a \alpha}{n} \sin.\frac{2}{n} x \right. \\
 & + \left(\frac{1}{2} a^2 m - \alpha 8 a m^2 \right) \sin.2mx + \left(\frac{1}{2} \alpha^2 (\frac{2}{n} - m) - \alpha 8 a (\frac{2}{n} - m)^2 \right) \sin.(\frac{4}{n} - 2m)x + \left(\frac{1}{n} 8^2 + \frac{4 a \alpha}{nn} 8 \right) \sin.\frac{4}{n} x \\
 & - \frac{3}{8} a^2 m^2 \sin.3mx \\
 & - \alpha a (m - \frac{2}{n}) \sin.(2m - \frac{2}{n})x - \left(\frac{\alpha 8}{2} (\frac{2}{n} + m) + \frac{1}{8} a^2 \alpha (\frac{2}{n} + m)^2 \right) \sin.(\frac{2}{n} + m)x + \frac{1}{8} a^2 \alpha (3m - \frac{2}{n})^2 \sin.(3m - \frac{2}{n})x + \frac{1}{8} a \alpha^2 (\frac{4}{n} - 3m)^2 \sin.(\frac{4}{n} - 3m)x \\
 & + \frac{1}{8} a^2 8 (\frac{1}{n} + m)^2 \sin.(\frac{2}{n} + 2m)x - \left(\frac{\alpha 8}{2} (\frac{4}{n} - m) + \frac{1}{8} a \alpha^2 (\frac{4}{n} - m)^2 - \frac{1}{8} a 8^2 (\frac{4}{n} - m)^2 \right) \sin.(\frac{4}{n} - m)x - \frac{1}{8} 8^2 a (\frac{4}{n} + m)^2 \sin.(\frac{4}{n} + m)x
 \end{aligned}$$

§. 2. Quant aux autres termes de la même equation comme ils sont beaucoup plus petits que ces trois premiers on pourra trouver ce qu'ils ajoutent à la valeur de v par la formule suivante :

Que $+ d \sin. q v$ représente un de ces termes quelconques, ceux qu'il introduira dans la valeur de x seront exprimés par

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{1}{4} q^2 a^2\right) \sin. qx + \frac{1}{2} ad(m+q) \sin.(m+q)x + \frac{1}{2} a d \left(\frac{2}{n} - m + q\right) \sin.\left(\frac{2}{n} - m + q\right)x - \frac{1}{2} ad\left(\frac{2}{n} + q\right) \sin.\left(\frac{2}{n} + q\right)x \\
& - \frac{1}{2} a d(m-q) \sin.(m-q)x - \frac{1}{2} a d \left(\frac{2}{n} - m - q\right) \sin.\left(\frac{2}{n} - m - q\right)x + \frac{1}{2} ad\left(\frac{2}{n} - q\right) \sin.\left(\frac{2}{n} - q\right)x \\
& - \frac{1}{8} a^2 d(2m+q)^2 \sin.(2m+q)x \\
& + \frac{1}{8} a^2 d(2m-q)^2 \sin.(2m-q)x
\end{aligned}$$

§. 3. Mais cette valeur quoique beaucoup plus abrégée que celle que donne la methode des Lemmes précédens, sera encore d'une exactitude superflue dans les plus petits termes de la valeur de x tels que $0,0001802 \times \sin.\left(\frac{1}{n} + 1 - m\right)x$ &c. On pourra se contenter dans ces termes de la formule

$$-d \sin. qx + \frac{1}{2} ad(m+q) \sin.(m+q)x - \frac{1}{2} ad(m-q) \sin.(m-q)x$$

§. 4. Si l'on emploie maintenant toutes ces formules on trouvera la resolution de l'équation de l'Art. **XXIX** la quelle sera

$$\begin{aligned}
& -x - 0,1105337 \sin. mx - 0,0005462 \sin.\frac{1}{n}x - 0,0223318 \sin.\left(\frac{2}{n} - m\right)x + 0,0001954 \sin.\left(\frac{2}{n} - m\right)x + 0,0000340 \sin.\left(\frac{1}{n} + m\right)x \\
& + 0,0037518 \sin.2mx + 0,0116083 \sin.\frac{2}{n}x + 0,0002118 \sin.\left(\frac{4}{n} - 2m\right)x + 0,0006495 \sin.\left(\frac{2}{n} - 2m\right)x + 0,0000455 \sin.\left(\frac{2}{n} + 2m\right)x \\
& - 0,0001805 \sin.3mx + 0,0001301 \sin.\frac{4}{n}x - 0,0000896 \sin.\left(\frac{2}{n} - 3m\right)x - 0,0003308 \sin.\left(\frac{4}{n} - m\right)x \\
& + 0,028100 \sin.\left(1 - \frac{1}{n}\right)x + 0,0001016 \sin.\left(1 + \frac{1}{n}\right)x - 0,0007897 \sin.\left(\frac{3}{n} - 1\right)x - 0,0002145 \sin.\left(1 + \frac{1}{n} - m\right)x + 0,0009788 \sin.\left(\frac{3}{n} - 1 - m\right)x \\
& - 0,0001040 \sin.\left(2 - \frac{2}{n}\right)x + 0,0001411 \sin.\left(\frac{7}{n} - 1 + m\right)x + 0,0001075 \sin.\left(1 + \frac{1}{n} - 2m\right)x - 0,0000596 \sin.\left(\frac{3}{n} - 1 - 2m\right)x - 0,0000563 \sin.\left(2m + \frac{1}{n} - 1\right)x \\
& + 0,0006666 \sin.\left(m + \frac{1}{n} - 1\right)x - 0,0000354 \sin.\left(2m + 1 - \frac{1}{n}\right)x + 0,0000439 \sin.\left(\frac{5}{n} - 1 - m\right)x \\
& - 0,0004963 \sin.\left(m + 1 - \frac{1}{n}\right)x \\
& - 0,0003930 \sin.\left(2 - \frac{2}{n} + 2\omega\right)x + 0,0004356 \sin.\left(2 - m + 2\omega\right)x + 0,0003481 \sin.\left(2 - 2m + 2\omega\right)x
\end{aligned}$$

§. 5. Et lorsqu'on vaudra faire quelque changement à la valeur de x soit en introduisant de nouveaux termes, soit en diminuant ou augmentant les coefficients de

ceux qu'elle contient, rien ne sera plus facile par les formules qu'on vient de donner

XXXV.

De la maniere de construire des Tables pour trouver le lieu de la Lune dans son orbite.

Je remarque d'abord que l'angle $\frac{1}{n}x$ qui entre dans la composition de tous les termes de v n'est autre chose que la distance moyenne de la Lune au Soleil, que l'angle $(1 - \frac{1}{n})x$ est l'anomalie moyenne du Soleil, $m x$ l'anomalie moyenne de la Lune, je substitue ensuite t à la première de ces quantités, z à la seconde & y à la 3^{ème}. Observant encore de mettre à la place de $(1 - \frac{1}{n} + \omega)x$ qui exprime la distance moyenne du Soleil au Noeud, la lettre u .

Enfin je reduis tous les coefficients de l'équation précédente en minutes & secondes & j'ai

$$\begin{aligned} v = & 6^{\circ} 19' 57'' \sin. y - 1' 53'' \sin. t - 1^{\circ} 16' 55'' 8 \sin. (2t - y) + 40'' \sin. (t - y) \\ & + 2' 21'' \sin. 2y + 9' 54'' 2 \sin. 2t + 43'' 5 \sin. (4t - 2y) + 1' 4'' \sin. (2t - 2y) \\ & - 37'' 2 \sin. 3y + 26'' 8 \sin. 4t \\ & + 7'' \sin. (t + y) + 15'' 4 \sin. (2y - 2t) - 1' 8'' 2 \sin. (4t - y) - 1' 9'' 3 \sin. (2t + y) \\ & + 1'' 5 \sin. (2t + 2y) \\ & + 9' 9'' 6 \sin. (y - z) + 2' 17'' 5 \sin. (y - z) - 1' 42'' 3 \sin. (y + z) - 2' 4'' 8 \sin. (2t - z) \\ & - 2'' 1 \sin. 2z \\ & + 3' 2'' 8 \sin. (2t - z - y) + 20'' 9 \sin. (2t + z) - 44'' 2 \sin. (2t + z - y) + 29'' 1 \sin. (2t - z + y) \\ & - 12'' 1 \sin. (2t - z - 2y) - 11'' 6 \sin. (2y - z) + 22'' 1 \sin. (2t + z - 2y) \\ & - 1' 21'' \sin. 2u + 1' 29'' 8 \sin. (2u + 2t - y) + 1' 1'' 7 \sin. (2u + 2t - 2y) \end{aligned}$$

Dans la quelle v & x expriment, suivant les principes que nous avons suivies dans ce memoire, des angles qui se comptent depuis un axe où nous avons supposé que les deux astres étoient à la fois dans leur Apogée; mais comme il n'importe pas de savoir où est placé cet axe, à cause que la difference entre v & x sera la même toutes les fois que les angles t , y , z auront les mêmes sinus & affectés des mêmes signes, il est clair qu'on peut faire

commencer v & x de quel point l'on voudra, & que x exprimant la longitude moyenne prise de quelque époque fixe d'un lieu moien de la Lune, la formule précédente exprimera le lieu vrai de la Lune dans l'orbite. Cela posé je forme des Tables de mouvemens uniformes ou moiens, ainsi que l'on en use dans les Tables ordinaires; par leur secours j'ai pour les années, mois, jours, heures &c. le lieu moien de la Lune, son anomalie moyenne y , la distance moyenne de la Lune au Soleil t , l'anomalie moyenne du Soleil z , le double de la distance du Noeud au Soleil $2u$. Je fais suivre ces 1^{eres} Tables de 23 autres qui contiennent les equations dont les Argumens sont, $y, t, t-y, 2t-v, 4t-y; z, y-z, y+z, 2t-z, 2t+y, 2t-y-z, 2t-2y+z, 2t+z, 2t+z-y, 2t-z+y, 2t-z-2y, 2y-z, t+y, 3y-2t, 2u, 2u+2t-y, 2u+2t-2y$, les quelles sont données par les coefficients de la formule précédente.

Ces Tables étant donc faites, lorsque je veux calculer un lieu de la Lune pour un instant quelconque, je commence par trouver, à l'aide des premières, les angles t, y, z, u . Je forme ensuite les argumens y, t &c. sans faire entrer de secondes dans leurs valeurs que pour les premiers, & negligant même les minutes dans ceux qui ne conviennent qu'aux petites équations; l'ordre que je leur ai donné rend assez facile la détermination de tous ces argumens.

Ces argumens trouvés, je prends dans les secondes Tables les équations qui y répondent avec leurs signes, mettant toutes les positives d'un même côté & les negatives de l'autre. Je reduis ensuite toutes ces équations à une & l'appliquant au lieu moien de la Lune j'ai le lieu vrai dans l'orbite.

SECONDE PARTIE

Où l'on enseigne à trouver le mouvement des Noeuds de la Lune & la variation d'inclinaison de son orbite par rapport à l'Ecliptique.

I.

PROBLEME I.

Fig. 4.

$\infty BL \infty$ représentant l'orbite qu'un corps L décrit autour du centre T en vertu de forces quelconques qui agissent dans le plan de cette orbite ; on demande le mouvement donné à ce plan par une force Σ dont l'action est toujours parallèle à la droite TS tirée du centre T à un corps S placé sur le plan fixe $\infty B' L' \infty$ & dont la marche est connue.

Que le petit coté Ll soit celui que le corps L décrirait dans un instant quelconque donné, si la force vers S n'agissoit pas dans cet instant ; il est clair qu'en exprimant par dT cet instant & prenant la petite droite $l\sigma = \Sigma dT^2$, le petit coté $L\sigma$ sera celui que le corps L doit parcourir par l'effet combiné de toutes les forces à considérer dans le Probleme.

Prolongeant donc Ll & $L\sigma$ jusqu'à ce qu'elles rencontrent le plan $\infty B' L' \infty$, joignant les points d'intersection n , N par la droite nN parallèle à T, tirant Tn l'angle

nTN représentera le mouvement instantané que doit avoir autour de T la droite $\oslash TN$ qui fait l'intersection de l'orbite proposée avec le plan de la base $\oslash B'L'$.

Afin de trouver l'expression de cet angle nous remarquerons d'abord que nN doit avoir pour valeur $\frac{LN}{Ll} \times l\sigma$ ou $\frac{LN \times \Sigma dT^2}{Ll}$ et que par conséquent la petite perpendicu-

laire abaissée de n sur TN fera $\frac{LN \times \Sigma dT^2 \times \sin. ST\oslash}{Ll}$ la

quelle divisée par Tn ou TN donnera $\frac{LN}{TN} \times \frac{\Sigma dT^2}{Ll} \sin. ST\oslash$ pour le petit angle cherché nTN , & cette expression, en nommant r le rayon vecteur LT , & dv l'angle LTl (ce qui rend $Ll = \frac{r dv}{\sin. NLT}$) se change en $\frac{\Sigma dT^2}{r dv} \times \sin. LTN$ avec laquelle on trouvera le mouvement cherché de l'orbite $\oslash BL\oslash$, ou plutôt de la ligne des noeuds, aussitôt que la force Σ & les autres quantités indéterminées de cette expression seront fixées par les conditions particulières du problème.

II.

Modification de la formule précédente pour le cas où l'on suppose que l'orbite $\oslash BL$ est celle de la Lune.

On a alors pour la force Σ due au Soleil la quantité $\frac{3Nr}{l^3} \cos. STL$, en négligeant les termes où l seroit élevé à de plus hautes puissances, & en nommant toujours, comme dans la 1^{re} Partie, l la distance de la Terre au Soleil, N la masse de cet astre.

Il faut donc substituer cette valeur de Σ dans la formule précédente, ce qui la changera en $\frac{3NdT^2}{l^3 dv} (\cos. STL \times \sin. ST\oslash \times \sin. LT\oslash)$ ou $\frac{3v dx^2}{dv} \times \frac{f^3}{l^3} (\cos. STL \times \sin. ST\oslash \times \sin. LT\oslash)$ en nommant v le carré du rapport qu' a le

mouvement moien du Soleil au moien mouvement de la Lune, & x comme ci-dessus l'anomalie moienne de la Lune.

Reste maintenant à mettre à la place des angles STL , $ST\Omega$, $LT\Omega$, des valeurs dont nous puissions faire usage. Pour y parvenir soient nommés $(1-\psi)$ le cosinus de l'inclinaison des deux orbites, lequel peut être regardé ici comme constant, z l'angle $B'TS$ décrit par le Soleil dans le même tems que la Lune a décrit l'angle v , supposant toujours comme dans la 1^{re} Partie que ces deux angles se comptent d'un même axe où étoient d'abord les deux Astres. Soit de plus q l'angle $B'T\Omega$ décrit par le noeud pendant que la Lune & le Soleil ont décrit les angles v & z .

Cela posé, on verra facilement que l'angle $BT\Omega$ qui ne diffère que très peu de l'angle $B'\Gamma\Omega$, sera exprimé avec une exactitude suffisante par $q + \frac{1}{2}\psi \sin. 2q$ & que partant l'angle ΩTL le sera de même par $q + v + \frac{1}{2}\psi \sin. 2q$

Quant à l'angle $ST\Omega$ il n'est autre chose que $q + z$. Comme le cosinus de STL a été déjà trouvé dans la prop. V de la 1^{re} Partie il ne s'agit plus que d'en changer les denominations, ce qui ne demande autre chose que de mettre $z + q$ à la place de u .

Ainsi le cosinus en question de l'angle STL qui avoit pour valeur $\cos. t \times \frac{1}{l}$ ou $(\cos. t - \frac{1}{2}\psi \sin. 2v \sin. t) \times (1 - \frac{1}{2}\psi + \frac{1}{2}\psi \cos. 2u)$ ou $(1 - \frac{1}{2}\psi) \cos. t + \frac{1}{2}\psi \cos. (2u + t)$, sera maintenant exprimé par $1 - \frac{1}{2}\psi \cos. (v - z) + \frac{1}{2}\psi \cos. (2q + v + z)$.

Substituant ces trois valeurs dans la formule précédente, on aura en supprimant les termes qui augmenteroient inutilement le calcul

$$d q =$$

$dq = \frac{3}{4}v(1-\psi) \times \frac{f^3 dx^2}{l^3 dv} (1 + (1 + \frac{1}{2}\psi) \cosf.(2v-2z) - \cosf.(2q+2v) - \cosf.(2q+2z))$ ou
 $dq = \frac{3}{4}v' \frac{f^3 dx^2}{l^3 dv} (1 + \cosf.(2v-2z) - \cosf.(2q+2v) - \cosf.(2q+2z))$ en faisant $v' = v(1-\psi)$
 & en négligeant le terme $\frac{3}{8}v\psi \frac{f^3 dx^2}{l^3 dv} \cosf.(2v-2z)$ qui est en effet très négligeable.

III.

Resolution de l'équation précédente.

§. 1. Il s'agit maintenant de trouver la valeur de q dans l'équation $dq = \frac{3}{4}v' \frac{f^3 dx^2}{l^3 dv} (1 + \cosf.(2v-2z) - \cosf.(2q+2v) - \cosf.(2q+2z))$; Pour y parvenir il faudra commencer par chasser l, v & z de cette équation, en mettant leurs valeurs en x que l'on a trouvées, ou qui résultent de ce qui a été dit dans la I^{re} Partie.

Mais à cause de la petitesse du coefficient $\frac{3}{4}v'$ nous pourrons nous dispenser de prendre tous les termes qu'ont les valeurs de ces quantités, & il nous suffira par exemple de prendre pour la valeur de v les seuls termes affectés de $mx, 2mx, \frac{2}{n}x, (\frac{2}{n}-m)x, (1-\frac{1}{n})x$ nous écrirons ainsi cette valeur.

$$v = x - a \sin. mx + b \sin. 2mx + c \sin. \frac{2}{n}x - \alpha \sin. (\frac{2}{n}-m)x + \gamma \sin. (1-\frac{1}{n})x$$

Quant à z sa valeur depend de l'équation $z + 2i \sin. z + \frac{3}{4}ii \sin. 2z = (1-\frac{1}{n})x$ qui étant résolue, donne

$$z = (1-\frac{1}{n})x + 2i \sin. (1-\frac{1}{n})x + \frac{5}{4}ii \sin. (2-\frac{2}{n})x$$

De ces deux valeurs on tirera aisément après avoir fait

$$\tilde{z} = i + \frac{1}{2}\gamma$$

$$\begin{aligned} \cosf.(2v-2z) = & (1-aa) \cosf. \frac{2}{n}x + (\frac{1}{2}aa+b) \cosf. (\frac{2}{n}+2m)x + a \cosf. (\frac{2}{n}-m)x + c \cosf. \frac{4}{n}x + \alpha \cosf. mx - 2\tilde{z} \cosf. (\frac{2}{n}-1)x + \frac{5}{4}ii \cosf. 2z \\ & + (\frac{1}{2}aa-b) \cosf. (\frac{2}{n}-2m)x - a \cosf. (\frac{2}{n}+m)x - c \\ & - \alpha \cosf. (\frac{4}{n}-m)x + 2\tilde{z} \cosf. (1+\frac{1}{n})x - \frac{5}{4}ii \cosf. (\frac{4}{n}-2)x \end{aligned}$$

qui est l'une des principales quantités qui entrent dans la valeur cherchée.

§. 2. On verra ensuite que la valeur de $\frac{f^3}{l^3}$ sera suffisamment exacte en la prenant égale à $1 + 3ii - 3i \cos. (1 - \frac{1}{n})x + \frac{3}{2}ii \cos. (2 - \frac{2}{n})x$

§. 3. Quant à celle de $-\frac{d^2x}{dv^2}$ on commencera pour l'avoir, par différencier v & diviser sa différentielle par dx ce qui donnera :

$1 - am \cos. mx + 2bm \cos. 2mx + \frac{2}{n} \mathcal{E} \cos. \frac{2}{n}x - (\frac{2}{n} - m) \alpha \times \cos. (\frac{2}{n} - m)x + \gamma (1 - \frac{1}{n})x \cos. (1 - \frac{1}{n})x$ qui élevé à la puissance - 1 donnera

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dv^2} = & 1 + \frac{1}{2}a^2m^2 + 2b^2m^2 + \frac{\mathcal{E}\mathcal{E}}{nn} + (\frac{2}{n} - m)^2 \frac{\alpha^2}{2} + \frac{3}{2}a^2bm^2 + (am + \frac{3}{4}a^3m^3 - 2am^2b) \cos. mx - \frac{2}{n}(\mathcal{E} - (\frac{2}{n} - m)\alpha\alpha m + \frac{3a^2\mathcal{E}m^2}{n}) \cos. \frac{2}{n}x \\ & + (\frac{1}{2}a^2m^2 - 2bm) \cos. 2mx \\ & + ((\frac{2}{n} - m)\alpha - \frac{2}{n}m\mathcal{E} + (\frac{2}{n} - m)\alpha^3a^2m^2) \cos. (\frac{2}{n} - m)x + \gamma(1 - \frac{1}{n}) \cos. (1 - \frac{1}{n})x \end{aligned}$$

§. 4. Et ces valeurs de $\frac{f^3}{l^3}$ & de $\frac{d^2x}{dv^2}$ après avoir fait

$$\begin{aligned} \hat{1} &= 1 + \frac{1}{2}a^2m^2 + 2b^2m^2 + \frac{2\mathcal{E}^2}{nn} + (\frac{2}{n} - m)^2 \frac{\alpha^2}{2} + \frac{3}{2}ii - \frac{3}{2}i\gamma(1 - \frac{1}{n}) + \frac{3a^2bm^2}{2} \\ a' &= am + \frac{3}{4}a^3m^3 - 2am^2b + \frac{3}{2}ami \\ \frac{2}{n}\mathcal{E}' &= \frac{2}{n}\mathcal{E} - (\frac{2}{n} - m)\alpha\alpha m + \frac{3}{n}\mathcal{E}ii \\ (\frac{2}{n} - m)\alpha' &= (\frac{2}{n} - m)\alpha - \frac{2am\mathcal{E}}{n} + \frac{3}{2}ii\alpha(\frac{2}{n} - m) + \frac{2}{n} - m\alpha \cdot \frac{3}{2}a^2m^2 \\ 3j &= 3i - \gamma(1 - \frac{1}{n}) \end{aligned}$$

donneront pour leur produit

$$\begin{aligned} \frac{f^3 dx}{dv} = & \hat{1} + a' \cos. mx - \mathcal{E}' \cos. \frac{2}{n}x + (\frac{2}{n} - m)\alpha' \cos. (\frac{2}{n} - m)x - 3j \cos. (1 - \frac{1}{n})x \\ & + \frac{3}{2}ii \cos. (2 - \frac{2}{n})x \\ & + (\frac{1}{2}a^2m^2 - 2bm) \cos. (2 + n)x \end{aligned}$$

§. 5 L' on a présentement par cette valeur & par celle de $\cos. (2v - 2x)$ qu' on a trouvée §. 1, ce que demandent les termes de la valeur générale de dq qui ne renferment point la lettre q . Faisant donc

$$I = \tilde{r} - \tilde{r} \mathfrak{E} - \mathfrak{E}' \left(\frac{1-a\alpha}{n} \right) + \frac{1}{2} a' \alpha + \left(\frac{2}{n} - m \right) \alpha' \frac{a}{2}$$

$$\hat{a} = \acute{a} + \tilde{r} \alpha - \frac{1}{2} a \mathfrak{E}' + \left(\frac{2}{n} - m \right) \frac{\alpha'}{2} (1 - a\alpha)$$

$$\frac{3}{2} \hat{a} = a \tilde{r} + \frac{1}{2} \acute{a} (1 - a\alpha) + \left(\frac{2}{n} - m \right) \acute{a}$$

$$\frac{2}{3} \hat{r} = 2 \tilde{r} + \frac{2}{3} j (1 - a\alpha)$$

$$K = \frac{1}{2} a \acute{a} + \frac{1}{2} (a^2 - b.) \tilde{r} + \frac{1}{4} a^2 m^2 - bm + \left(\frac{2}{n} - m \right) \frac{\alpha'}{2}$$

On aura

$$\frac{f^2 dx^2}{l^3 dv} \left(1 + \cos f.(2v - 2z) \right) = \frac{3}{4} v' dx \left(I + \hat{a} \cos m x - \left(\frac{2}{n} \mathfrak{E}' - (1 - a\alpha) \frac{a}{2} \right) \cos \frac{2}{n} x + \frac{3}{2} \hat{a} \cos \left(\frac{2}{n} - m \right) x - 3 j \cos \left(1 - \frac{3}{n} \right) x - \frac{2}{3} \hat{r} \cos \left(\frac{2}{n} - 1 \right) x + K \cos \left(2m - \frac{2}{n} \right) x \right) \\ + \left(\frac{1}{2} a^2 m^2 - 2bm \right) \cos 2mx + \frac{3}{2} i \cos \left(2 - \frac{2}{n} \right) x$$

§. 6 Il ne s'agit donc plus que de passer aux termes qui contiennent l'inconnue cherchée q . La 1^{ère} chose que ce travail exige c'est de chasser z & v des quantités $\cos f.(2v + 2q)$ & $2z + 2q$ cette operation semblable à toutes celles que nous avons déjà tant de fois employées donnera tout de suite

$$\cos f.(2q + 2z) = (1 - 4ii) \cos \left(2 - \frac{2}{n} x + 2q \right) + \frac{3}{4} i i \cos 2q + 2i \cos \left(\left(1 - \frac{3}{n} \right) x + 2q \right) - 2i \cos \left(\left(3 - \frac{3}{n} \right) x + 2q \right)$$

$$\cos f.(2v + 2q) = (1 - a\alpha) \cos \left(2x + 2q \right) + \left(\frac{1}{2} a\alpha - b \right) \cos \left((2 - 2m)x + 2q \right) + a \cos \left((2 - m)x + 2q \right) - \frac{3}{2} \cos \left(\left(2 - \frac{2}{n} \right) x + 2q \right) + \alpha \cos \left(\left(2 - \frac{2}{n} + m \right) x + 2q \right) \\ - a \cos \left((2 + m)x + 2q \right)$$

Or ces deux quantités étant ajoutées & multipliées par $-\frac{3}{4} v' \frac{f^2 dx^2}{dv}$, dont nous avons déjà la valeur, donneront pour le reste de la valeur de dq dont nous avons déjà les premiers termes

$$\frac{f^2 dx^2}{l^3 dv} = -\frac{3}{4} v' dx \left(g \cos \left(2x + 2q \right) + h \cos \left(\left(2 - \frac{2}{n} \right) x + 2q \right) + \frac{5}{4} a a'' \cos \left((2 - 2m + 2\omega)x \right) + \left(\frac{3}{2} i - \frac{3}{2} j \mathfrak{E} \right) \cos \left(\left(1 - \frac{3}{n} + 2\omega \right) x \right) - \frac{3}{2} i \cos \left(\left(3 - \frac{3}{n} + 2\omega \right) x \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{2}{3} i + \frac{3}{2} i \mathfrak{E} \right) \cos \left(\left(3 - \frac{3}{n} + 2\omega \right) x \right) - \frac{3}{2} i \cos \left(\left(1 + \frac{1}{n} + 2\omega \right) x \right) \right. \\ \left. + \frac{3}{2} a'' \cos \left((2 - m + 2\omega)x \right) - \frac{3}{2} i i \cos 2q - \frac{1}{2} a^{IV} \cos \left((2 + m + 2\omega)x \right) + \frac{1}{2} a^V \cos \left(\left(2 - \frac{2}{n} + m + 2\omega \right) x \right) + \frac{1}{2} a' \cos \left(\left(2 - \frac{2}{n} - m + 2\omega \right) x \right) \right)$$

Après avoir fait auparavant

$$\frac{5}{4} a a'' = \frac{1}{2} a a \tilde{r} - b \tilde{r} + \frac{1}{2} a a' - bm + \frac{1}{4} a^2 m^2$$

$$\frac{3}{2} a a''' = a \tilde{r} + \frac{a'}{2} (1 - a\alpha) - \left(\frac{2}{n} - m \right) \frac{\alpha'}{2}$$

$$\frac{1}{2} a^{IV} = a \tilde{r} - \frac{a'}{2} (1 - a\alpha)$$

$$\frac{1}{2}a^v = \frac{1}{2}a' + a\frac{\mathfrak{E}'}{n} + \alpha\tilde{\Gamma} + (\frac{2}{n} - m)\frac{\alpha'}{2}(1 - aa) - a'\frac{\mathfrak{E}}{2}$$

$$g = \tilde{\Gamma}(1 - aa) - \frac{1}{n}\mathfrak{E}'$$

$$b = \tilde{\Gamma}(1 - 4ii) - \tilde{\Gamma}\mathfrak{E} + \frac{\alpha'\alpha}{2} - \mathfrak{E}'(1 - aa) + (\frac{2}{n} - m)\frac{\alpha'a}{2}$$

§. 7. Si la valeur de dq n'étoit composée que des premiers termes trouvés dans le §. 5 on l'auroit sans aucune peine, en intégrant ces termes. Quant aux seconds, l'intégration en est plus difficile, à cause qu'ils contiennent eux mêmes la lettre q ; on trouveroit à la vérité assez facilement une première valeur approchée de leur intégrale en supposant, dans tous ces termes, q égal à un multiple de x dont le coefficient seroit le nombre qui exprime le rapport entre le moyen mouvement du Noeud, & celui de la Lune. Mais pour ne pas trop multiplier nos opérations & pour parvenir du premier coup à la valeur de q nous n'emploierons cette remarque qu'à nous assurer que les termes les plus essentiels de la valeur de q doivent avoir cette forme

$$q = \omega x - \tilde{\sigma} \sin\left(1 - \frac{1}{n}\right)x - \lambda \sin\left(2 + 2\omega\right)x - \varpi \sin\left(2 - \frac{2}{n} + 2\omega\right)x \\ + \theta \sin\frac{2}{n}x + \mu \sin\left(2 - 2m + 2\omega\right)x + \nu \sin\left(3 - \frac{3}{n} + 2\omega\right)x$$

dans la quelle ω est cette constante qui exprime le rapport du mouvement moyen des Noeuds à celui de la Lune, & en partant de-là nous pourrions chasser q des expressions de cosinus où il entre.

A cause que la plupart des termes de la valeur de dq sont extrêmement petits, nous n'aurons besoin d'une expression aussi complète que la précédente que pour les seuls $\cos\left(2x + 2q\right)$ & $\cos\left(\left(2 - \frac{2}{n}\right)x + 2q\right)$ Dans tous les autres il suffira de faire $q = \omega x$.

Faisant donc pour ces deux termes la substitution des termes admis dans la valeur de q nous aurons

$$\begin{aligned}
\cos(2x+2q) &= \cos(2+2\omega)x - \delta \cos(2-\frac{1}{n}+2\omega)x + \lambda & + \omega \cos \frac{2}{n}x & - \mu \cos 2mx \\
& - \lambda \cos(4+4\omega)x - \omega \cos(4-\frac{2}{n}+4\omega)x \\
& - \theta \cos(2-\frac{2}{n}+2\omega)x & - \nu \cos(\frac{3}{n}-1)x \\
\cos((2-\frac{2}{n})x+2q) &= 1 - \omega^2 \cos(2-\frac{2}{n}+2\omega)x + \delta \cos(2-\frac{1}{n}+2\omega)x + \lambda \cos \frac{2}{n}x & + \omega & - \mu \cos(2m-\frac{2}{n})x \\
& - \delta \cos(2-\frac{2}{n}+2\omega)x & - \omega \cos(4-\frac{4}{n}+4\omega)x & - \nu \cos(\frac{3}{n}-1)x \\
& + \theta \cos(2+2\omega)x
\end{aligned}$$

§. 8. Nous avons maintenant l'expression de toutes les quantités qui entrent dans la valeur de dq , il ne faut plus qu'en faire la substitution & intégrer, ce qui donnera enfin pour q ou $\frac{3}{4}v' \int \frac{dx^2}{dv} (1 + \cos(2v-2z) - \cos(2q+2v) - \cos(2q+2z))$ la quantité

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{4}v' (1 - \omega b - \lambda g)x - \delta \sin(2-\frac{1}{n})x - \lambda \sin(2+2\omega)x - \omega \sin(4-\frac{2}{n}+2\omega)x + \theta \sin \frac{2}{n}x + \mu \sin(2-2m+2\omega)x + \nu \sin(2-\frac{3}{n}+2\omega)x \\
& + \frac{\omega b}{4-\frac{4}{n}+4\omega} \sin(4-\frac{4}{n}+4\omega)x \\
& + \frac{\delta}{n} \sin mx + \frac{\frac{3}{2}\delta}{2-\frac{2}{n}-m} \sin(\frac{2}{n}-m)x + \frac{K+\mu b}{2m-\frac{2}{n}} \sin(2m-\frac{2}{n})x - \frac{\frac{3}{2}\delta-\gamma}{\frac{3}{n}-1} \sin(\frac{3}{n}-1)x + \frac{\gamma}{4\omega} \sin 2\omega x - \frac{\frac{3}{2}\delta''}{2-m+2\omega} \sin(2-m+2\omega)x \\
& - \frac{\frac{3}{2}\delta+b\theta}{1-\frac{1}{n}+2\omega} \sin(1-\frac{1}{n}+2\omega)x - \frac{\frac{1}{2}\delta V}{2-\frac{2}{n}+m+2\omega} \sin(2-\frac{2}{n}+m+2\omega)x - \frac{\frac{1}{2}\delta}{m-2+\frac{2}{n}-2\omega} \sin(m-2+\frac{2}{n}-2\omega)x
\end{aligned}$$

pour vù que l'on prenne les lettres δ , λ &c. telles qu'exigent les équations

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{3j-\nu b}{1-\frac{1}{n}} \times \frac{3}{4}v' & \mu &= \frac{\frac{3}{4}aa''}{2-2m+2\omega} \times \frac{3}{4}v', & \theta &= \frac{(1-aa')\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\delta'-g\omega-b\lambda}{\frac{2}{n}} \times \frac{3}{4}v' \\
\lambda &= \frac{g(1-\omega^2)+b\theta}{2+2\omega} \times \frac{3}{4}v' \\
\omega &= \frac{b(1-\omega^2)-g\theta}{2-\frac{1}{n}+2\omega} \times \frac{3}{4}v'
\end{aligned}$$

que donne la comparaison de la valeur supposée

$$\omega x - \tilde{o} \sin\left(1 - \frac{1}{n}\right)x - \lambda \sin.(2 + 2\omega)x - \varpi \sin.\left(2 - \frac{2}{n} + 2\omega\right)x + \theta \sin.\frac{2}{n}x + \mu \sin.(2 - 2m + 2\omega)x \\ + \nu \sin.\left(3 - \frac{3}{n} + 2\omega\right)x$$

avec la partie analogue de celle qui arrive après les substitutions.

IV.

Du mouvement moien du Noeud.

A l'égard du coefficient $\frac{3}{4} v' (1 - \tilde{\omega}b - \lambda g)$ que x a dans cette valeur il doit être la même chose que ω , ou le rapport du mouvement moien du Noeud à celui de la Lune, si la Theorie de l'attraction répond aux Phénomènes.

J'ai trouvé en effet après toutes les substitutions numériques que la valeur de ce rapport donné par la formule précédente approche si considérablement de la vraie que la différence peut être négligée entièrement & doit être attribuée aux petites omissions qu'on a faites pour ne pas trop compliquer les calculs, omissions qui n'apportent presque aucune erreur sensible aux coefficients des équations du Noeud.

V.

Reduction de la valeur de q en nombres.

Les mêmes substitutions qui ne demandent pas d'autres nombres que ceux qu'on a trouvés dans la 1^{re} Partie convertissent l'équation précédente en

$$q = \omega x - 0,002048 \sin.(2 + 2\omega)x - 0,026132 \sin.\left(2 - \frac{2}{n} + 2\omega\right)x + 0,000595 \sin.mx + 0,002157 \sin.\frac{2}{n}x$$

$$+ 0,000331 \sin.\left(4 - \frac{4}{n} + 4\omega\right)x$$

$$- 0,000846 \sin.\left(\frac{2}{n} - m\right)x + 0,000276 \sin.\left(2m - \frac{2}{n}\right)x - 0,003019 \sin.\left(1 - \frac{1}{n}\right)x - 0,000147 \sin.\left(\frac{3}{n} - 1\right)x - 0,001262 \sin.(2 - 2m + 2\omega)x$$

$$- 0,000642 \sin.(2 - m + 2\omega)x - 0,000568 \sin.\left(1 - \frac{1}{n} + 2\omega\right)x + 0,001113 \sin.\left(3 - \frac{3}{n} + 2\omega\right)x - 0,000335 \sin.\left(2 - \frac{2}{n} + m + 2\omega\right)x$$

$$- 0,000276 \sin.(m - 2 + \frac{2}{n} - 2\omega)x$$

Dans la quelle je mets ensuite à la place des angles

$$\omega, (2+2\omega)x, (2-\frac{2}{n}+2\omega)x, mx, \frac{2}{n}x, (\frac{2}{n}-m)x, (2m-\frac{2}{n})x, (1-\frac{1}{n})x, (\frac{3}{n}-1)x, (2-2m+2\omega)x, \\ (2-m+2\omega)x, (1-\frac{1}{n}+2\omega)x \text{ \&c.}$$

leurs valeurs

$$2u+2t, 2u, y, 2t, 2t-y, 2y-2t, z, 2t-z, 2t-2y+2u, 2t-y+2u, 2u-z \text{ etc.}$$

en faisant comme dans la première Partie

$$t = \text{long. moi. } \odot - \text{longit. moi. } \odot$$

$$y = \text{long. moi. } \odot - \text{long. apog. } \odot$$

$$z = \text{long. moi. } \odot - \text{long. moi. apog. } \odot$$

$$u = \text{long. moi. } \odot - \text{long. moi. } \oslash$$

VI.

Formules qui donnent le lieu du Noeud.

Il suit de l'expression précédente de q qu'après avoir trouvé le lieu moien du Noeud on aura le lieu vrai en lui appliquant les équations

$$\begin{aligned} & -2'.3'' \sin y - 7'.21'' \sin 2t - 57'' \sin (t-y) - 2'.54'' \sin (2t-y) + 10'.23'' \sin z + 30'' \sin (2t-z) + 10'.29'.49'' \sin 2z \\ & \quad - 1'.8'' \sin 4u \\ & + 2'.12'' \sin (2u+2t-y) + 4'.20'' \sin (2u+2t-2y) + 7'.2'' \sin (2u+2t) - 3'.50'' \sin (2u+z) + 1'.56'' \sin (2u-z) + 1'.7'' \sin (2u+y) \\ & + 57'' \sin (2u-y) - 44'' \sin (2u-2z) \end{aligned}$$

L'usage des 15 tables que donne cette formule est d'autant plus facile que la plupart des argumens sont les mêmes que ceux qui sont employées pour le calcul du lieu de la Lune dans l'orbite, & que ceux qu'il faut faire de plus peuvent se former très facilement à l'aide des premières, & en négligeant, si l'on veut, les minutes & les secondes. On peut remarquer même qu'il y a plusieurs de ces équations telles que $30'' \sin 2t - z$, $44'' \sin 2u - 2z$ qui sont si petites qu'en les négligeant l'erreur qui en resulteroit pour la latitude seroit bien légère.

VII.

PROBLEME.

Fig. 4.

Les mêmes choses étant posées que dans le Prob. I. On demande la variation de l'inclinaison de l'orbite $\oslash B L \oslash$ sur le plan fixe $\oslash B' L' \oslash$.

Soit abaissée de L sur TN la perpendiculaire LF, il est clair qu'en tirant la ligne L'F qui rencontre Tⁿ en f, l'angle infiniment petit FLf sera la variation de l'inclinaison de l'orbite pendant que le projectile qui la décrit va de L en l. Donc si l'on prend une droite qui soit à Ff comme LF est à LL' & qu'on la divise ensuite par LF on aura la valeur de cette variation.

Quant à la valeur de Ff il est evident qu'elle n'est autre chose que le produit de Tf par l'angle infiniment petit dq ou nTN calculé dans le Prob. précédent. Donc en nommant I. l'inclinaison cherchée, on aura (pour cette figure) l'équation $dI = -\frac{TF}{LF} dq \sin. I$ ou $\frac{dI}{\sin. I} = -\cotang. LT \oslash dq$ pour déterminer la variation d'inclinaison cherchée.

VIII.

Application à la variation de l'inclinaison de l'orbite lunaire.

Si l'on met dans l'équation précédente à la place de dq sa valeur $\frac{3v dx^2}{dv} \times \frac{f^3}{l^3} (\cos. STL \times \sin. ST \oslash \sin. LT \oslash)$ trouvée Art. II. pour le cas où $\oslash L$ est l'orbite de la Lune

Lune. Cette équation se changera alors en $\frac{dI}{\sin. I} = -\frac{3}{4} \frac{v' dx^2}{dv} \times \frac{f^3}{I^3} (\cos. STL \sin. ST\oslash \cos. LT\oslash)$ de la quelle il faut faire evanouir les angles STL , $ST\oslash$, $LT\oslash$ ainsi qu'on a fait en cherchant le mouvement des Noeuds.

On aura encore comme dans l'Art. II. en gardant les mêmes denominations $\cos. STL = (1 - \frac{1}{2}\psi) \cos. (v-z) + \frac{1}{2}\psi \cos. (2q+v+z)$

$$LT\oslash = q + v + \frac{1}{2}\psi \sin. 2q$$

$$ST\oslash = q + z$$

Faisant donc les substitutions de ces quantités dans l'équation précédente elle deviendra après avoir negligé les termes dont l'effet est presque insensible

$$\frac{dI}{I} = \frac{3}{4} \frac{v' dx^2}{dv} \frac{f^3}{I^3} (-\sin. (2v-2z) + \sin. (2q+2z) + \sin. (2q+2v))$$

IX.

Integration de la quantité $\frac{3}{4} \frac{v' dx^2}{dv} \times \frac{f^3}{I^3} \times \&c.$

La valeur de $\sin. (2v-2z)$ se trouvera de la même maniere que celle de $\cos. (2v-2z)$ que nous avons employé Art. III. §. 1. & cette valeur sera $(1-aa) \sin. \frac{2}{n} x + (\frac{1}{2}aa-b) \sin. (\frac{2}{n}-2m)x + a \sin. (\frac{2}{n}-m)x - a \sin. (\frac{2}{n}+m)x + a \sin. mx - 2i \sin. (\frac{5}{n}-1)x + 2i \sin. (1+\frac{1}{n})x + \sin. (\frac{1}{n}-2)x$ la quelle étant multipliée par celle de $\frac{f^3}{I^3} \frac{dx^2}{dv}$ donnera en omettant les termes negligables

$$\begin{aligned} \frac{f^3 dx^2}{I^3 dv} \times \sin. (2v-2z) = & i (1-aa) \sin. \frac{2}{n} x + \frac{3}{2} a \sin. (\frac{2}{n}-m)x + \frac{2+\frac{3}{n}-m}{2} a \sin. mx - \frac{7}{2} i \sin. (\frac{5}{n}-1)x \\ & - \frac{1}{2} a \sin. (\frac{2}{n}+m)x + \frac{1}{2} i \sin. (1+\frac{1}{n})x \\ & + (\frac{5}{4} a^2 - 2i + (\frac{2}{n}-m) \frac{a^2}{2}) \sin. (\frac{2}{n}-2m)x - \frac{2}{n} i \sin. (1-\frac{1}{n})x \end{aligned}$$

Quant aux termes $\frac{f^3}{I^3} \frac{dx^2}{dv} (\cos. (2q+2z) + \cos. (2q+2v))$

K

leur valeur ne differera de celle de $\frac{f^3 d x}{d v} (\cos. (2 q + 2 z) + \cos. (2 q + 2 v))$ employée dans le Probleme précédent qu'en cela seulement que l'on aura ici des sinus par tout où l'on avoit des cosinus dans l'autre quantité. Aiant donc maintenant l'expression de toutes les parties dont est composée la valeur de $\frac{d I}{I}$ sans qu'elles renferment d'autres variables que x , on integrera sans peine cette quantité & gardant toujours les denominations précédentes l'on aura enfin

$$\begin{aligned} \int \frac{d I}{I} = & -\lambda \cos. (2 + 2 \omega) x - \omega \cos. (2 - \frac{2}{n} + 2 \omega) x - \mu \cos. (2 - 2 m + 2 \omega) x + \nu \cos. (3 - \frac{3}{n} + 2 \omega) x \\ & + \frac{3}{4} v' x \frac{b \omega}{4 - \frac{4}{n} + 4 \omega} \cos. (4 - \frac{4}{n} + 4 \omega) x \\ & + \frac{3}{4} v' \left(\frac{3 i i}{4 \omega} \cos. 2 \omega x - \frac{\frac{3}{2} a''' \cos. (2 - m + 2 \omega) x}{2 - \frac{2}{n} + m + 2 \omega} - \frac{\frac{1}{2} a V \cos. (2 - \frac{2}{n} + m + 2 \omega) x}{2 - \frac{2}{n} + m + 2 \omega} \right. \\ & \left. - \frac{b + \frac{1}{2} i \cos. (1 - \frac{1}{n} + 2 \omega) x}{1 - \frac{1}{n} + 2 \omega} - \frac{\frac{1}{2} a' \cos. (\frac{2}{n} + m + 2 \omega) x}{\frac{2}{n} + m + 2 \omega} + \frac{i(1 - a a) - \omega + \lambda}{2} \cos. \frac{2}{n} x \right) \\ & + \frac{3}{4} a \cos. (\frac{2}{n} - m) x + \frac{\frac{2}{n} + 2 - m}{2 m} a \cos. m x - \frac{\frac{3}{2} a - \nu}{2} \cos. (\frac{3}{n} - 1) x - \frac{\frac{5}{4} a^2 - 2 b - \mu}{2 m - \frac{2}{n}} \cos. (2 m - \frac{2}{n}) x - \frac{(2 \frac{3}{2} i + \nu)}{1 - \frac{1}{n}} \cos. (1 - \frac{1}{n}) x \end{aligned}$$

X.

Valeur de I dans l'équation précédente.

Soit nommée Ξ la quantité égale au second membre de l'équation précédente la quelle est toute donné en x , la question sera reduite a tirer I l'équation $\int \frac{d I}{I} = \Xi$ ou $\frac{d I}{I} = d \Xi$.

Pour y parvenir nous remarquerons que I qui exprime l'inclinaison cherchée n'est jamais qu'une fraction de l'unité

plus petite que 0, 1 & que par conséquent son sinus sera exprimé avec une exactitude plus que suffisante par $1 - \frac{1}{6}I^2 + \frac{1}{120}I^4$. Par ce moien l'équation précédente deviendra en négligeant les plus hautes puissances de I

$\frac{dI}{I} + \frac{1}{6}IdI + \frac{7}{360}I^3dI = d\Xi$ dont l'intégrale est
 $I + \frac{1}{12}I^2 + \frac{7}{1440}I^4 = \Xi + lb$ (lb étant une constante ajoutée dans l'intégration) qui en repassant aux nombres donné $I = bc^{\Xi - \frac{1}{12}f^2 - \frac{7}{1440}f^4}$.

Mais comme la quantité $c^{\Xi - \frac{1}{12}f^2 - \frac{7}{1440}f^4}$ a un exposant qui ne sauroit jamais être que très petit elle pourra être changée en

$1 + \Xi - \frac{1}{12}I^2 + \frac{1}{2}\Xi^2 - \frac{1}{720}I^4 - \frac{1}{12}I^2\Xi - \frac{7}{1440}I^4\Xi + \frac{\Xi^3}{6}$ ou simplement $1 + \Xi - \frac{1}{12}I^2 + \frac{1}{2}\Xi^2 - \frac{1}{12}b^2\Xi$ en négligeant les termes qui ne peuvent apporter que des corrections superflues.

Enfin mettant dans cette quantité à la place de $\frac{1}{12}I^2$, $\frac{1}{12}b^2 \times (1 + 2\Xi)$ qui peut lui être substituée sans erreur sensible dans cette occasion, on aura pour l'inclinaison cherchée
 $I = b(1 - \frac{1}{12}b^2) + b(1 - \frac{1}{4}b^2) \times (\Xi + \frac{1}{2}\Xi^2)$

XI.

Où l'on détermine en nombres les coefficients de la valeur de Ξ .

La valeur numérique de tous les coefficients des termes que contient l'expression générale de Ξ trouvée à l'Art. IX. ne demande presque aucune opération nouvelle lorsqu'on a les valeurs calculées précédemment pour la formule du Noeud, on trouvera facilement avec toutes ces valeurs que la quantité Ξ répondante à une longitude moienne quelconque x est

$$-0,002048 \cos(2 + 2\omega)x - 0,026132 \cos(2 - \frac{2}{n} + 2\omega)x - 0,001262 \cos(2 - 2m + 2\omega)x$$

$$+ 0,000331 \cos(4 - \frac{4}{n} + 2\omega)x$$

$$+ 0,001113 \cos(3 - \frac{3}{n} + 2\omega)x + 0,000214 \cos 2\omega x - 0,000642 \cos(2 - m + 2\omega)x$$

$$- 0,000335 \cos(2 - \frac{2}{n} + m + 2\omega)x - 0,000565 \cos(1 - \frac{1}{n} + 2\omega)x - 0,000276 \cos(\frac{2}{n} + m - 1 + 2\omega)x$$

$$+ 0,002199 \cos \frac{2}{n} x + 0,000805 \cos(\frac{2}{n} - m)x + 0,000137 \cos mx - 0,000147 \cos(\frac{3}{n} - 1)x$$

$$- 0,000198 \cos(2m - \frac{2}{n})x - 0,000086 \cos(1 - \frac{1}{n})x$$

XII.

Valeur générale de I en nombres.

Comme nous avons trouvé un terme affecté de Ξ^2 dans la valeur de I il faut quarrer la quantité précédente pour connoître exactement celle de I.

Mais cette operation à cause de la petitesse du coefficient Ξ^2 n'exige de prendre que les termes les plus considérables de Ξ^2 les quels sont $0,000174 + 0,000171x \cos(4 - \frac{4}{n} + 4\omega)x$.

Pour faire en suite usage de cette valeur de Ξ^2 ainsi que de celle de Ξ on a besoin de connoître la constante $(b - \frac{1}{4}b^2)$ qui multiplie $\Xi + \frac{1}{2}\Xi^2$ dans la valeur de I. & la détermination de cette constante exigeroit naturellement l'application du Probleme dont il est ici question à quelques observations, mais à cause qu'elle est petite en elle même & qu'elle ne multiplie que de petits termes, nous prendons à sa place l'inclinaison moyenne de l'orbite de la Lune telle que les Astronomes la supposent ordinairement de $5^\circ 8\frac{1}{2}'$ par ce qu'une minute d'erreur dans

la valeur de b ne produit pas une différence de plus de $2''$ dans la valeur de I .

Faisant maintenant usage de toutes ces valeurs, réduisant les decimales des coefficients en minutes & secondes, & substituant comme ci-dessus à la place des angles $(2 - \frac{2}{n} + 2\omega)x$, $(2 + 2\omega)x$ &c. leurs valeurs $2u$, $2u + 2t$ &c. la valeur générale de la vraie inclinaison de l'orbite se trouvera en appliquant à une inclinaison constante peu écartée de $5^\circ 8\frac{1}{2}'$ (& que nous trouverons facilement par les observations) les équations suivantes.

$$\begin{aligned} & 2'', 5 \cos. \gamma + 41'', 3 \cos. 2t - 3'', 3 \cos. (t - \gamma) + 14'', 9 \cos. (2t - \gamma) - 1'', 8 \cos. 2z - 2'', 7 \cos. (2t - z) \\ & - 8' 4'', 6 \cos. 2u - 11'', 8 \cos. (2u + 2t - \gamma) - 23'', 4 \cos. (2u + 2t - 2\gamma) - 38'', 5 \cos. (2u + 2t) \\ & + 8'', 3 \cos. 4u \\ & + 20'', 6 \cos. (2u + z) - 10'', 5 \cos. (2u - z) - 6'', 2 \cos. (2u + \gamma) + 5'', 1 \cos. (2u - \gamma) + 4'', \cos. (2u - 2z) \end{aligned}$$

Dont les Argumens étant exactement les mêmes que ceux qu'on calcule pour le Noeud, rendent l'opération fort facile puisqu'il ne s'agit que de parcourir avec ces argumens tous calculés 15 Tables d'équations dont les nombres sont si petits qu'ils n'exigent point de prendre aucune partie proportionnelle que de celles qu'on prend à l'œil, & que plusieurs d'entre ces équations peuvent même être entièrement négligées.

Scholie général.

Où l'on donne la comparaison de la Theorie précédente avec les observations.

Après avoir construit des Tables de toutes les équations calculées précédemment tant pour la détermination

du lieu de la Lune que pour la position du Noeud & la quantité de l'inclinaison, j'ai demandé à Mr. l'Abbé de la Caille, l'un des plus habiles observateurs que je connoisse, quelques positions de la Lune déterminées avec exactitude afin de pouvoir juger du degré de précision de ma Theorie.

Cet Academicien si zélé pour l'Astronomie & si propre à en avancer les progrès par ses travaux & par les secours qu'il prete à ceux qui la cultivent, m'a fourni une centaine d'observations bien discutées avec les longitudes & latitudes qui en resultent.

Il les a choisies dans toutes les principales positions de la Lune pendant l'espace d'environ dix années. Je les j'oins ici avec les quantités dont s'en écartent les longitudes & les latitudes calculées par mes Tables.

L'époque du mouvement moien de la Lune a été prise dans les Tables de Mr. Halley en la diminuant de $4^{\circ} 25' 1'' 27''$ que demande tant la différence des méridiens que celle des Stiles & en y ajoutant $1' 14''$ qui est la différence moienne entre toutes les erreurs des observations calculées par Mr. Halley.

Les époques de l'Apogée & du Noeud sont les mêmes que celles qu'a choisies Mr. Halley, à la différence près des stiles & des méridiens. L'époque du $\odot$ est pour 1746 de $9^{\circ} 9' 58' 56''$ & celle de son Apogée de $3^{\circ} 8' 35' 18''$ telles que Mr. l'Abbé de la Caille les a déterminées dans un memoire qu'il a donné cette année à l'Academie des Sciences de France.

Quant à la constante de l'Inclinaison, aiant choisi parmi les observations 6 ou 7 de celles ou la Lune est dans ses limites, afin de pouvoir tirer l'inclinaison de la seule latitude observée, j'ai trouvé par un milieu entre ces observations que cette constante étoit de $5^{\circ} 5' 9''$

C'est d'après ces seuls élémens que tous les lieux suivans ont été calculés. Les différences entre ces lieux & ceux qui resultent des observations serviront tant à rectifier l'excentricité supposée de 0,05505 (*) que les époques & par ce moien la Theorie en deviendra encore plus conforme aux observations.

(*) On corrigera assés exactement les lieux calculés d'après cette excentricité en changeant la somme des équations; qu'on applique au lieu moien, proportionnellement au changement fait dans l'excentricité. Aiant mis à part auparavant l'équation donnée par l'argument t qui n'est presque pas altérée par la correction faite à l'excentricité.

M. Clairaut pour faire approcher de ses Table's, le plus près qu'il étoit possible, les cont-observations qu'il y a comparées, a jugé à propos de diminuer l'excentricité et d'avancer le lieu moyen. ces deux corrections sont précisément opposées à celles que M. Le Monnier a conclues de son côté de ses propres observations, et qui consistent à augmenter l'excentricité et à reculer le lieu moyen.
Mémoire sept. 1757. p. 115 d'après M. D'Alembert.

THEORIE DE LA LUNE

TABLE

d' Observations choisies de la Lune pendant une revolution entière de son Apogée, avec la comparaison entre ces observations & les lieux calculés.

Circonstances où la Lune s'est trouvée le jour de l'Observation.	Moment des Observations réduit en tems moyen.	Longitude de la Lune observée.	Latitude de la Lune observée.	Erreurs des Tables tirées des formules precedentes
	I. H. M. S.	S. D. M. S.	D. M. S.	Longit. Latitude
En $\square$ avec l'apog. $\odot$	1737 Juin 7. 7. 36. 0	6 10 6 36	2 16 28 B	+1 8 +0 45
En octans avec $\odot$	Juil. 1. 2. 58. 5	4 22 22 35	1 37 11 A	+0 41 -0 58
Pres de son per. le pl. pres apog. En $\square$ avec $\odot$ et apo. $\odot$	7. 8. 11. 26	7 19 46 29	4 47 19 B	+3 3 -0 47
En $\square$ avec $\odot$	16. 15. 50. 33	11 24 24 14	1 17 44 A	-4 42 +0 14
Vers ses limites	22. 20. 26. 21	2 8 34 6	5 10 36 A	-2 52 -0 32
Dans sa dist. moy. de la ter.	{ Août 7. 9. 48. 12	9 12 48 45	4 21 57 B	+1 36 -0 45
	8. 10. 42. 8	9 26 40 43	3 32 55 B	+1 16 -1 3
Pres du vet de la $\square \odot$	Novemb. 29 6. 29. 36	11 14 28 7	0 52 52 A	+2 44 +1 54
En octans et pres de sa $\square$ avec l'apog. du $\odot$	Decemb. 2. 8. 38. 2	0 21 26 0	3 40 53 A	+3 10 +1 10
Apogee et vers ses limites.	{ 4. 10. 4. 15	1 15 49 54	4 45 54 A	+1 5 -0 37
	5. 10. 49. 15	1 28 9 8	4 57 57 A	+1 51 +0 3
Pres de l'opposition	{ 7. 12. 24. 17	2 23 11 51	4 41 30 A	+1 57 -0 25
	8. 13. 13. 57	3 5 57 14	11 39 A	-0 25 -0 20
Apog. et vers ses limites d'inclinaison moy.	1738 Janv. 1. 8. 44. 34	1 23 29 45	5 4 1 A	+3 6 -0 5
	2. 9. 30. 35	2 5 53 27	5 3 42 A	+2 1 -0 11
	3. 10. 18. 25	2 18 27 42	4 53 0 A	+1 17 -0 40
	4. 11. 8. 1	3 1 14 24	4 25 3 A	+1 6 -0 52
	7. 13. 42. 3	4 10 55 11	43 14 A	-3 13 -0 19
Pres de son Ω	Fevr. 5. 13. 17. 29	5 3 16 19	0 20 20 B	-0 47 -0 23
En $\square$ et vers ses limit.	26. 6. 2. 30	2 7 53 75	13 54 A	-0 21 -0 20
Vers son Ω	Mars 4. 11. 5. 21	4 26 40 55	0 17 6 A	-2 1 -0 8
Vers ses limites.	10. 16. 26. 16	7 26 13 45	15 35 B	+0 18 -2 35
	29. 7. 9. 15	3 22 58 39	3 3 47 B	-2 44 -0 9
	30. 8. 0. 6	4 6 8 21	2 1 29 B	-3 34 -0 3
Vers l'octans	31. 8. 51. 30	4 19 43 23	0 50 35 B	-3 18 +0 12
plus grande equat. du Ω	Avril 1. 9. 43. 28	5 3 48 26	0 25 56 A	-4 14 -0 31
Perig. vers l'octans	Juil. 27. 9. 4. 47	8 21 57 11	4 30 47 B	-1 41 -1 44
Dans vers sa $\square$	Nov. 17. 5. 26. 22	10 15 38 31	0 3 20 A	-2 35 +0 36
Vers sa dist. moy.	Decemb. 2. 17. 7. 3	4 25 55 19	1 6 8 B	-2 48 +0 59
Pres des limites	1739 Jan. 18. 7. 30. 5	1 21 18 3	5 11 8 A	+1 49 +0 20

THEORIE DE LA LUNE

81

Circonstances où la Lune s'est trouvée le jour de l'observation	Moment des observations réduit en tems moien	Longitude de la Lune observée	Latitude de la Lune observée	Erreurs des Tables tirées des formules précédentes
	I. H. M. S.	S. D. M. S.	D. M. S.	Longit. Latitud.
Pres du Ω	1739 Jan. 19. 8. 15. 10	2 3 36 27	4 52 18 A	+1' 55" +0' 22"
	25. 13. 2. 5	4 17 44 43	0 36 20 B	-2 27 +0 3
En $\square$ avec $\odot$	Fevr. 13. 4. 39. 31	1 3 34 50	5 13 46 A	+3 11 +0 13
Dans son Ω	15. 6. 9. 52	1 28 51 8	5 1 39 A	+2 20 -0 16
	21 10 56 22	4 12 57 36	0 8 53 B	+0 54 +0 11
Dans ses dist. moy.	22. 11. 44. 31	4 25 49 21	19 11 B	-0 52 +0 13
Vers l'octans	24. 13. 19. 20	5 22 16 53	3 26 56 B	-1 13 -0 5
	25. 14. 6. 38	6 5 54 04	16 55 B	-1 25 -0 29
	26. 14. 54. 26	6 19 46 04	52 40 B	-0 51 -0 16
	27. 15 43 34	7 3 51 35	5 12 4 B	-1 17 -1 5
Vers ses pl. gr. limites	28. 16. 34. 36	7 18 9 19	5 11 56 B	-0 34 -1 16
Dans son pl. gr. apog. et vers ses limites	Mars 14. 4 2 20	1 23 29 25	1 43 A	+3 41 -0 33
Vers son Ω	17. 6. 23. 17	3 0 38 03	18 14 A	+0 57 -0 34
apo. En $\square$ avec apo. $\odot$	21 9 35 30	4 20 19 44	0 53 45 B	-1 4 +0 10
	22 10 24. 16	5 3 20 38	2 0 48 B	-0 58 -0 1
Dans son plus pet. perig. pres de son opp. et de Ω	Juillet 18. 10. 18 36	9 0 51 22	2 46 10 B	-2 28 -1 14
En octans	19. 11. 20 23	9 16 39 55	1 25 35 B	-2 31 -0 47
En $\square$ dans son pl. gr. apog.	20. 12. 25 57	10. 2. 31. 40	0 47 A	-0 43 +1 29
	1740 Fev. 8. 9 19 53	3 7 38 41	23 38 A	+3 58 -1 10
	Mai. 3. 6 15 45	4 12 41 52	2 17 2 B	+4 46 +0 56
apo. En $\square$ avec apo. $\odot$	5. 7. 45 56	5 7 10 27	3 57 47 B	+3 47 +1 13
En octans et dans sa distan. moienne	6. 8. 32. 53	5 19 35 20	4 33 24 B	+5 59 +0 37
Dans sa dist. moy.	7. 9 12 13	6 2 15 38	4 56 10 B	+3 24 +0 20
Vers l'octans	Juillet 5. 8. 46. 0	7 26 59 39	3 53 44 B	-3 19 -1 45
En $\square$ pres du Ω et dans sa dist. moienne	1741 Janv. 26. 8. 13. 0	2 10 40 49	2 5 56 A	+2 23 -0 13
En g pres de son apog.	27. 9. 5. 31	2 24 2 0	0 56 30 A	+2 40 -0 42
Vers ses plus gr. limites et sa $\square$	Mars 23. 5. 49. 5	2 28 38 43	0 6 23 A	+4 6 -1 19
	31. 12. 1. 50	6 8 36 32	4 56 38 B	+3 18 -1 58
	Avril 24. 7. 54. 39	4 27 44 51	4 28 3 B	+4 48 -0 3
	Aout 3. 18. 1. 57	1 14 49 23	3 17 8 A	-2 2 -0 35
apo. En $\square$ avec apo. $\odot$	Decemb. 14. 5 26. 6	11 11 26 17	5 15 4 A	-2 28 +1 12
Pres du perigee	15. 6 15 31	11 25 49 31	5 20 40 A	-1 57 +0 38
Pres de son oppos.	1742 Jan. 15. 7 32. 30	1 20 0 47	2 13 35 A	+1 39 +0 57
	Fevr. 11. 5 29. 15	1 15 39 47	2 21 20 A	-1 4 +0 44
	18. 11. 54. 58	4 23 30 22	4 43 24 B	+0 51 -0 9

L

Circonstances où la Lune s'est trouvée le jour de l'observation	Moment des observations réduit en tems moyen	Longitude de la Lune observée	Latitude de la Lune observée	Erreurs des Tables tirées des formules précédentes
	I. H. M. S.	S. D. M. S.	D. M. S.	Longit. Latitud.
C dans sa plus pet. inclin.	1742 Mars 19. 11. 22. 58	5 14 52 30	5 0 21 B	+1 13 -0 36
C en opposition	20. 12. 5. 11	5 27 29 16	4 47 48 B	+0 46 -1 24
	21. 12. 46. 2	6 9 56 54	20 44 B	-0 54 -1 10
apo. C en ☿ avec ☉	Avril 29. 20. 18. 16	11 9 0 57	5 13 37 A	-2 5 -0 21
C dans son ☿	Juin 16. 10. 57. 37	8 11 1 45	0 20 36 A	-0 17 -1 18
C dans ses gr. limit. et sa dist. moy.	Decemb. 3. 4. 59. 2	10 22 54 45	5 15 29 A	-2 4 +0 2
C en ☐ avec ☉ et l'apo. ☉	1743 Jan. 3. 6. 2. 56	0 12 59 51	3 34 45 A	-0 11 +0 13
C perig. pres de ☿ et de ☐	Fevr. 2. 6. 26. 45	1 21 34 30	14 4 A	+0 54 +1 26
	3. 7. 22. 39	2 6 16 44	1. 3. 0 B	+2 1 -0 6
C perig. en ☐ avec ☉	Mars 3. 6. 16. 0	2 16 29 52	10. 26 B	+1 57 -0 50
	4. 7. 16. 56	3. 1. 12. 23	15 44 B	+2 53 -0 13
	5. 8. 18. 44	3 15 55 14	8 12 B	+2 17 +0 1
	6. 9. 19. 5	4 0 35 44	46 1 B	+4 32 -1 33
C dans ses limites	8. 11. 8 47	4 29 27 35	5 0 11 B	+4 58 -0 22
C dans sa dist. moy.	Mai 3. 8 37 18	5 17 49 9	4 38 21 B	+4 34 -1 23
C dans l'oct. son apo. en ☐ avec celui du ☉	Septembr. 29. 9 8. 40	10 21 12 6	5 5 47 A	-0 28 -0 9
apo. C en ☉. C dans sa dist. moy.	1744 Jan. 6. 18. 20. 18	6 22 24 13	1 18 59 B	+2 23 -2 57
apo. C en ☐ apo. ☉	Avril 22. 8. 55. 49	5 12 15 56	3 56 20 B	+3 56 -0 52
C dans l'oct. et sa dist. moy.	Mai 22. 9. 12. 13	6 19. 59 42	0 55 24 B	+4 13 -1 8
C pres de l'op. au ☉	26. 12. 25. 30	8 13 7 33	31 48 A	+0 49 +1 12
	Août 18. 8. 48. 5	9 8 27 6	4 53 19 A	+0 37 +1 42
C dans son plus gr. apo.	Novemb. 11. 5. 45. 37	10 13 34 26	4 49 10 A	+1 27 +0 14
C pres du perigee	Mai 10. 7. 50. 47	5 14 12 17	2 22 38 B	-4 6 -0 18
C perigee	Juin 7. 6. 36. 27	5. 24. 20. 25	1 21 9 B	+0 44 -1 39
C dans l'octans	1746 Jan. 3. 8. 41. 54	1 27 8 29	4 23 9 B	+1 8 -0 37
	14. 18. 26. 33	7 4 35 53	9 33 A	+4 40 +0 44
	15. 19. 19. 14	7 19 2 9	4 0 A	+1 36 +1 48
C en ☐ vers ses limites	Fevr. 28. 6. 3. 44	2 11 39 9	5 10 35 B	-2 28 -0 57
C dans l'octans.	Avr. 2. 9. 24. 0	4 28 51 12	11 56 B	-0 41 +0 33
C dans l'octans	Juin 6. 15. 16. 25	10 1 18 45	3 43 37 A	+1 33 0''
C vers ses pl. gr. limites	Juillet 28. 8. 47. 42	8 19 42 44	5 6 51 A	-3 28 +2 9
	29. 9. 49. 31	9 4 11 48	4 51 34 A	+0 56 -1 34
C en ☐ dans ses pl. gr. limit	Septembr 7. 17. 50. 50	2 16 37 55	5 17 4 B	-5 28 -1 28
C pres du ☿	1747 Mars 23. 9. 51. 35	4 26 20 17	0 48 23 B	-3 5 +0 16

Comme les differences que l'on vient d'appercevoir dans la liste précédente sont en elles mêmes assés peu considerables & qu'on pourra facilement faire la correction des elemens qui doit la diminuer j'en laisse le soin à ceux qui en voudront prendre la peine, le tems qui me reste ne me permettant pas d'achever les calculs que ces operations exigent, non plus que le detail annoncé dans l'Art. xxvii. de la I^{re} Partie & quelques legeres corrections dans mes coefficients, avec les quelles j'espere donner une précision à mes Tables qui les rendra de la plus grande utilité. Je me contente d'autant plus volontiers pour le présent des calculs que je viens de donner d'après mes Tables telles que je les ai construites avant d'en pouvoir rectifier les elemens, qu'outre que ces Tables approchent déjà plus de la nature qu'aucune de celles que je connoisse, qu'elles suffisent pour resoudre la question proposée par l'Academie Imperiale, en demontrant qu'il est inutile de chercher d'autre cause des inegalités du mouvement de la Lune que la seule attraction inversement proportionnelle aux quarrés des distances.

Le 6. Dec. 1750. n. st.

Remarques & additions.

I.

§. 1. En examinant les calculs des latitudes pour les cent lieux de la Lune contenus dans la liste précédente, je me suis apperçu d'une defectuosité des Tables sur lesquelles elles ont été calculées; c'est que l'équation $-2'.3'' \sin. y$ de celles qui donnent la position du Noeud, y avoit été entièrement oubliée, en sorte qu'il en peut resulter dans quelques unes des latitudes une erreur de 10 à 12". Cette omission peut être aisément réparée dans tous les lieux calculés sans les recommencer en entier. Mais si l'on fait attention aux erreurs dont les observations de la latitude sont susceptibles, on sera bien éloigné de croire que cette inadvertance ait pû faire un tort considerable aux calculs précédens.

§. 2. Je dois dire encore à l'occasion des Tables construites pour latitude qu'en determinant (2^{de} Partie Art. V & XI) les élémens des Tables qui les donnent, j'ai employé pour les coefficients de la valeur de v citée Art. III les valeurs suivantes z ou $i + \frac{1}{2} \gamma = 0,018623$; $a = 0,110059$; $b = 0,003801$; $\delta = 0,011755$; $\alpha = 0,022657$; $\gamma = 0,003407$ qui étoient les seules que j'eusse alors, aiant fait ces calculs beaucoup devant les resultats plus exacts dont j'ai fait usage dans la 1^{re} Partie; Et comme par ces resultats, on a plus exactement $z = 0,018403$; $a = 0,110534$; $b = 0,003792$; $\delta = 0,011608$; $\alpha = 0,022332$; $\gamma = 0,003147$. On pourroit faire quelque legere correction aux équations principales de la position du Noeud & de la variation de l'Ecliptique de la Lune; Calcul que je n'ai pas le tems d'achever avant la publi-

cation de cette Piece , quoi qu'il soit affés facile à faire par ce qu'il n'exige pas qu'on recommence toutes les substitutions.

Au reste on peut sans un grand scrupule negliger entierement cette correction par la même raison que nous venons de rapporter à l'occasion de la petite équation du Noeud qui avoit été oubliée dans mes Tables.

II.

On a vû , dans les Articles 8 , 9 & 10 de la I^{re} Partie , que ceux des termes de l'équation de l'orbite de la Lune qui sont proportionels à des cosinus d'un multiple de v , dont l'exposant étoit ou très petit ou très peu différent de l'unité , requieroient beaucoup plus d'attention que les autres dans la determination de leur coefficient. Cette attention doit même être poussée si loin en quelques cas que je suis obligé d'avouer ici qu'après avoir repeté plusieurs fois le même calcul pour fixer exactement toutes les équations qui donnent le lieu de la Lune dans son orbite je n'ai pas pû me satisfaire encore entierement sur quelques unes de ces équations. Mais il faut dire aussi que l'incertitude qui m'est restée à l'égard de ces équations ne roule que sur des differences affés legères dans le fond & qui toutes prises ensemble ne montent qu'à un très petit nombres de minutes , & que les Resultats les plus ecartés de celui qu'a été exposé ci - dessus sont toujours trop peu éloignés des observations pour jetter le moindre doute sur la solution que j'ai donné du Prob. proposé par l'Acad. Impér. de St. Petersbourg.

Mais afin que le lecteur soit en état de juger par lui même de ces differences de resultats dont je viens de parler , je vais mettre sous ses yeux celui de ces resultats

dont les nombres s'écartent le plus de ceux de l'Art. xxxv.
I^{ere} Partie.

Ce resultat que j'avois calculé avant celui de l'Art. xxxv. ne m'avoit pas paru devoir le balancer lorsque j'ai envoié la piece précédente, à cause d'une faute de calcul que j'y avois apperçue & dont je n'avois eu le tems de connoître qu'une partie de l'effet. J'étois même d'autant plus porté à croire que la faute dont je parle donnoit de l'infériorité au resultat où elle s'étoit trouvée & le devoit faire rejeter que je voyois le second plus près en général des observations que n'étoit le premier. J'ai decouvert depuis que la faute en question n'influoit point ou que d'une maniere insensible sur les termes qui differoient dans les deux resultats.

III.

Equations du mouvement de la Lune telles qu'elles resultoient de l'operation dont on vient de parler.

§. 1. Tous les termes affectés des sinus de y , $2y$, $3y$, $2t$, $4t$, $2t-y$, $4t-2y$, $3y-2t$, $2t-2y$, $2t+y$, $4t-y$ differoient si peu de ceux que j'ai trouvé dans l'operation subsequente, c'est-à-dire dans celle dont les resultats sont donnés Art. xxxv. de la I^{ere} Partie, que lors qu'il fut question d'employer ces derniers je ne crus pas necessaire de rien changer aux Tables dressées sur les premiers, puisque je n'avois par ma seconde operation que des corrections de deux ou trois secondes.

§. 2. Quant aux termes où z entre, voici ce qu'ils étoient dans ce premier calcul

$$\begin{aligned}
 &+10' 39'' \sin. z + 2' 25'' \sin. (y-z) + 2' 28'' \sin. (2t-y-z) - 2' 45'' \sin. (2t-z) + 20'' \sin. (2t-2y+2z) \\
 &- 1' 49'' \sin. (y+z) - 0' 27'' \sin. (2t-y+z) + 0' 23'' \sin. (2t+z) \\
 &+ 20'' \sin. (2t-z+y) - 12'' \sin. (2t-z-2y) - 11'' \sin. (2y-z)
 \end{aligned}$$

dans lesquels on voit que les plus grandes différences tombent 1° sur le terme affecté de $\sin. z$ qui s'écarte de celui de l'Art. xxxv. de près d'une minute. 2° Sur l'équation affectée de $2z$ qui s'est trouvée de $21''$ dans la seconde operation & qui avoit été négligée dans la 1^{re}. 3° sur le terme $+ 20'' \sin. (2t - 2y + 2z)$ qui n'a pas eu lieu dans la 2^{de} operation. 4° sur le terme $22'' \sin. (2t - 2y + z)$ qui est venu dans la 2^{de} operation & qui avoit été si petit dans la 1^{re} qu'on l'avoit entièrement négligé.

§ 3. Les termes où entre la parallaxe du Soleil c'est-à-dire ceux qui sont affectés de $\sin. t$, $\sin. (t - y)$, $\sin. (t + y)$, $\sin. (t - y + z)$ étoient $- 3' 41'' \sin. t - 52'' \sin. (t - y) + 15'' \sin. (t + y) - 3'' \sin. (t - y + z)$ dont le dernier terme avoit paru si petit qu'il avoit été entièrement négligé, & dont le premier différoit de près de 2 minutes de ce qu'il s'est trouvé dans la seconde operation.

§ 4. Pour les termes affectés de ω qui sont ceux où entre la position du Noeud, il n'ont pas été recommencés lorsque j'ai fait l'operation sur laquelle ont été fondées les formules de l'Art. xxxv. déjà cité. Mais comme par une ancienne operation antérieure encore à celle dont je viens d'exposer les résultats, les coefficients ne s'étoient trouvés qu'à 8 ou 10 secondes de ce qu'ils ont été calculés une seconde fois, & que même cette différence étoit venue en employant quelques termes auxquels je n'avois pas fait attention la 1^{re} fois, je crus surperflus de les calculer une troisième.

IV.

§ 1. Les erreurs des Tables calculées d'après ces formules sont en général un peu plus grandes que celles qui

resultent des secondes Tables & qui ont été exposées dans le Scholie général, ainsi qu'on peut s'en assurer en jettant les yeux sur la Table de ces erreurs placée dans cette addition à l'Art. VI.

Cependant après avoir remarqué que dans celle-ci les plus grandes erreurs se trouvoient dans les observations où l'anomalie moienne de la Lune étoit la plus grande, j'ai vu qu'elles pouvoient être diminuées assez sensiblement & même plus que celle de l'Art. xxxv. en rendant l'excentricité de l'orbite de la Lune un peu plus petite que je ne l'avois supposée.

§. 2. Pour déterminer plus facilement le changement à faire dans l'excentricité j'ai rangé toutes les observations que j'avois par l'ordre de leurs anomalies au lieu de celui des dates. J'ai mis dans une première colonne la somme de toutes les équations données dans chaque observation prises toutes avec leurs signes en observant seulement d'en retrancher les équations placées sous l'argument t qui ne dépendait point, ou du moins dépendait très peu de l'excentricité n'ont point de correction à subir par le changement qu'on peut faire à cet élément. Mettant ensuite dans une seconde colonne les erreurs de mes Tables, il étoit assez facile de voir la correction à faire à l'excentricité supposée, pour rendre les Tables plus conformes aux observations.

§. 3. Par ce moyen j'ai trouvé qu'une diminution de $\frac{1}{171}$ à l'excentricité & qui par conséquent la réduiroit de 0,05505 à 0,05472 étoit ce qui convenoit le mieux aux cent observations que j'avois à comparer avec les lieux calculés par mes Tables. Il m'a paru aussi que ces mêmes observations s'accorderoient mieux avec la Théorie en ajoutant 40'' à l'époque des lieux moiens de la Lune.

§. 4.

§. 4. Comme de toutes les équations rapportées dans l'Art. II. de cette addition, celles qui different le plus des équations données Art. xxxv. & sur lesquelles il est le plus difficile de ne se pas tromper dans les quantités negligées, sont celles qui dependent de la parallaxe du Soleil; j'ai examiné ces dernieres & j'ai trouvé qu'en faisant attention à quelques circonstances que j'avois oubliées parmi lesquelles sont l'introduction des termes affectés de $\sin. \frac{1}{n} v$, & $\sin. (\frac{1}{n} - m)v$ dans la valeur de $\frac{1}{n}$ & de t avant de les substituer dans Ω , & l'examen de ce que peut apporter la petite alteration à l'orbite de la terre causée par celle de la Lune, j'ai trouvé dis-je par toutes ces considerations, que l'équation $37'' \sin. (t + z - y)$ s'évanouissoit presque entièrement ainsi que l'équation $52'' \sin. t - y$ qui se reduisoit à $-4'' \sin. t - y$. Quant à l'équation proportionnelle au *sinus* de t elle m'a paru devoir être comme dans la I^{re} operation d'environ $3' 40''$. Mais j'avouerai cependant que je n'ai pas mis le même soin dans les calculs de cette dernière operation que dans celle que j'avois faite auparavant. Et ce n'est que la confirmation que les Observations semblent donner à ces équations qui m'engage à les publier sans en avoir recommencé les calculs, travail que je suis obligé de remettre à un autre tems.

V.

Equations du mouvement de la Lune de l'Art. II. de cette addition corrigées d'après les remarques de l'Art. précédent.

$$\begin{aligned}
 & -x-6^{\circ} 12' 44'' \sin. y - 3' 40'' \sin. t - 1^{\circ} 16' 19'' \sin. (2t-y) - 0' 4'' \sin. (t-y) + 15'' \sin. (t+y) - 1' 8'' \sin. (4t-y) - 3' 18'' \sin. (2t+y) \\
 & + 12' 58'' \sin. 2y + 39' 54'' \sin. 2t + 43'' \sin. (4t-2y) + 2' 13'' \sin. (2t-2y) + 9'' \sin. (2t+2y) - 18'' \sin. (2t-3y) \\
 & - 37'' \sin. 3y + 27'' \sin. 4t \\
 & + 10' 36'' \sin. z + 2' 24'' \sin. (y-z) - 2' 44'' \sin. (2t-z) + 3' 27'' \sin. (2t-y-z) + 20'' \sin. (2t-2y+z) \\
 & - 1' 48'' \sin. (y+z) + 0' 23'' \sin. (2t+z) - 0' 27'' \sin. (2t-y+z) \\
 & + 20'' \sin. (2t-z+y) - 12'' \sin. (2t-z-2y) - 1' 11'' \sin. (2y-z) - 1' 21'' \sin. 2u + 1' 29'' \sin. (2u+2t-y) + 1' 12'' \sin. (2u+2t-2y)
 \end{aligned}$$

M

VI.

Comparaison des differens resultats precedens avec les observations ci-dessus rapportées.

L'ordre de ces observations n'est plus ici celui des dattes, mais celui des anomalies moyennes de la Lune, on a eu soin seulement de mettre le jour de l'observation à coté afin de reconnoître chaque observation; à coté de la colonne des anomalies, on a placé celle de la somme des équations reduites en observant d'en retrancher celles qui sont sous l'argument t par la raison rapportée Art. IV. §. 2.

Les trois colonnes suivantes sont 1° les erreurs de la Theorie donnée dans la piece précédente, 2°. Les erreurs dont il est parlé Art. III. §. 1. c'est-à-dire celle des Tables que j'avois calculées avant celles dont il est fait mention dans le Scholie général du memoire précédent. 3°. Les erreurs des Tables fondées sur les formules de l'Art. précédent.

Dattes des Observations	Anomal. moyen. de la Lune	Equat. propor. al' Ex- centr.	Err. des Tab. de l'art. 35 1. Part.	Err. des Tab. de l'art. 3 preced.	Err. des Tab. de l'art. 5 preced.
S. D. M.	D. M.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
4 Dec. 1737	0 6 11	0 36	+1 5	-0 31	+0 23
1 Jan. 1738	0 11 17	0 8	+3 6	-0 39	+0 40
31 Mars 1741	0 15 5	-1 22	+3 18	-1 17	+0 3
5 Dec. 1737	0 19 39	-0 57	+1 51	+0 46	+2 13
5 Mai. 1740	0 21 19	-1 33	+3 47	-0 26	+1 34
26 Fev. 1738	0 21 27	-2 33	-0 21	-3 23	-1 4
2 Jan. 1738	0 24 46	-1 11	+2 1	-0 11	+1 34
16 Jun. 1742	0 29 13	-2 3	-0 17	-2 54	-1 0
6 Mai 1740	1 4 48	-2 36	+5 59	+1 45	+4 8
3 Jan. 1738	1 8 16	-2 27	+1 17	+0 54	+3 7
7 Sept. 1746	1 15 19	-4 49	-6 12	-0 47	+0 58
7 Dec. 1737	1 16 39	-8 50	+1 57	+1 33	+4 2
31 Fev. 1739	1 17 31	-3 25	+0 54	-1 34	+0 59
32 Juil. 1737	1 18 3	-3 35	-2 52	+1 10	-1 51
7 Mai 1740	1 18 14	-3 33	+3 24	-3 3	+1 39
29 Sept. 1743	1 18 47	-3 24	-0 28	-2 7	+0 36
4 Jan. 1738	1 21 47	-3 36	+1 6	-0 22	+1 40
21 Mars 1739	1 22 36	-3 57	-1 4	-4 36	-1 21
2 Jan. 1746	1 23 17	-3 57	+1 8	-0 50	+1 33
25 Jan. 1739	1 25 54	-4 45	-2 27	-2 13	+0 24
8 Dec. 1737	2 0 10	-5 0	-0 25	-0 38	+1 17
22 Fev. 1739	2 1 1	-4 26	-0 52	-3 0	-0 4
28 Fev. 1746	2 3 29	-6 23	-2 28	-4 56	-1 14
22 Mars 1739	2 6 6	-5 42	-0 58	-4 14	-0 47
29 Mars 1738	2 7 4	-6 18	-2 44	-6 10	-2 44
2 Dec. 1738	2 12 37	-7 7	-2 48	-1 17	+1 45
30 Mars 1738	2 20 36	-6 37	-3 34	-6 21	-2 40
3 Dec. 1742	2 27 1	-7 23	-2 4	-4 58	-1 51
24 Fev. 1739	2 28 0	-5 42	-1 13	-2 42	+0 40
7 Jan. 1738	3 2 22	-5 40	-3 13	-3 8	-0 48
31 Mars 1738	3 4 8	-6 36	-3 18	-6 34	-3 3
23 Mars 1747	3 4 46	-6 2	-3 5	-6 8	-2 43
5 Juil. 1740	3 8 49	-6 14	-3 19	-5 5	-2 43
25 Fev. 1739	3 11 30	-5 50	-1 25	-2 40	+0 46
4 Mars 1738	3 12 35	-5 30	-2 1	-4 6	-0 46
1 Avr. 1738	3 17 40	-6 13	-4 14	-7 10	-3 47
5 Fev. 1738	3 21 2	-5 1	-0 47	-1 44	+1 29
26 Fev. 1739	3 25 0	-5 39	-0 51	-1 54	+1 28
7 Juil. 1737	4 4 11	-4 46	+0 41	+1 26	+3 0
29 Avr. 1742	4 7 10	-6 25	-2 5	-1 59	-0 5
27 Fev. 1739	4 8 30	-5 9	-1 17	-2 17	+0 56
3 Jan. 1743	4 12 37	-6 3	-0 11	-2 39	-0 20
2 Avr. 1746	4 16 27	-5 32	-0 41	-2 19	+0 23
28 Fev. 1739	4 22 2	-4 21	-0 34	-1 11	+1 45
14 Dec. 1741	4 22 25	-4 28	+2 54	-4 7	-2 35
15 Dec. 1741	5 5 46	-3 30	-1 57	-3 38	-2 27
2 Fev. 1743	5 14 47	-2 44	+0 54	-1 16	-0 21
18 Juil. 1739	5 17 43	-2 3	-2 28	-1 45	-0 32
7 Juin 1737	5 23 9	-1 58	+5 8	+3 28	+4 5
3 Fev. 1743	5 28 21	-1 24	+2 1	+0 2	+0 22

Dattes des Observations	Anomal. moyen. de la Lune	Equat. propor. a l'Ex- centr.	Err. des Tab. de l'art. 35 1. Part.	Err. des Tab. de l'art. 3 preced.	Err. des Tab. de l'art. 5 preced.
S. D. M.	D. M.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
19 Juil. 1739	6 1 53	-0 12	-2 31	-2 4	+0 23
10 Mai 1745	6 3 21	-1 23	-4 6	+1 25	+1 49
3 Mars 1743	6 3 34	+0 9	+1 57	-0 13	-0 24
10 Mars 1738	6 3 53	+1 21	+0 18	-0 1	+0 53
7 Juin 1745	6 8 30	+0 49	+0 44	-0 5	-0 27
11 Fev. 1742	6 13 7	+2 7	-1 4	-2 55	-3 46
20 Juil. 1739	6 15 0	+1 39	-0 43	-0 2	-0 7
27 Juil. 1738	6 15 55	+0 3	-1 41	-0 17	-0 14
4 Mars 1743	6 17 11	+1 26	+2 53	+0 53	+0 15
15 Jan. 1742	6 21 29	+1 50	+1 39	+0 12	-0 22
14 Jan. 1746	6 22 18	+2 43	+4 40	+3 39	+4 8
7 Juil. 1737	6 25 25	+2 10	+3 3	+3 55	+3 1
5 Mars 1743	7 0 43	+2 35	+2 17	+0 22	-0 39
3 Aout 1741	7 1 28	+4 17	-2 2	-1 11	-0 19
15 Jan. 1746	7 5 51	+3 44	+1 36	+2 31	-1 51
22 Avr. 1744	7 10 3	+3 26	+3 56	+2 43	+1 22
6 Mars 1743	7 14 25	+3 36	+4 32	+3 2	-1 14
28 Juil. 1746	7 14 43	+4 26	-3 28	-1 58	-3 39
17 Nov. 1738	7 20 17	+6 32	-2 35	-1 55	-3 50
29 Juil. 1746	7 28 21	+4 52	+0 56	+2 53	+1 3
7 Aout 1737	8 11 18	+4 57	+1 36	+3 32	+1 43
8 Mars 1743	8 11 33	+4 48	+4 58	+4 16	+2 17
22 Mai 1744	8 12 9	+5 49	+4 13	+3 28	+1 24
26 Jan. 1741	8 16 51	+6 40	+2 23	+1 49	-0 37
3 Mai 1743	8 21 49	+6 43	+4 34	-1 5	-3 15
8 Aout 1737	8 24 51	+5 44	+1 16	+3 29	+1 24
23 Mars 1741	8 27 11	+7 22	+4 6	+1 8	-0 40
6 Jan. 1744	8 27 13	+7 36	+2 23	+4 54	+2 55
6 Juin 1746	8 28 52	+5 49	+1 23	+2 40	+0 47
27 Jan. 1741	9 0 23	+6 31	+2 40	+2 14	+0 7
18 Fev. 1742	9 18 4	+4 47	+0 51	+0 33	-3 1
29 Nov. 1737	9 28 55	+6 29	+2 44	+0 15	-0 57
13 Fev. 1739	9 29 34	+5 19	+3 11	-0 5	-0 32
26 Mai 1744	10 6 10	+3 47	+0 49	+1 39	+0 1
19 Mars 1742	10 6 40	+4 23	+1 13	+0 11	-1 9
14 Mars 1739	10 18 8	+3 15	+3 41	-0 20	+0 0
20 Mars 1742	10 20 7	+3 6	+0 46	-0 4	-0 53
18 Jan. 1739	10 21 26	+4 54	+1 47	-0 37	-1 13
18 Aout 1744	10 21 39	+5 0	+0 37	+0 22	-0 3
8 Fev. 1740	10 25 31	+3 42	+3 58	+1 43	+1 14
24 Avr. 1741	10 26 24	+4 0	+4 48	+1 54	+1 39
15 Fev. 1739	10 26 31	+3 48	+2 20	-0 49	-0 49
16 Juil. 1737	10 27 10	+2 35	-4 43	-1 3	-2 4
21 Mars 1742	11 3 33	+1 38	-0 54	-1 27	-1 46
29 Jan. 1739	11 4 54	+3 45	+1 55	-0 10	-0 30
2 Dec. 1737	11 9 16	+3 30	+3 10	+1 11	+1 4
25 Avr. 1741	11 9 51	+3 15	+5 4	+1 25	+1 29
11 Nov. 1744	11 20 31	+0 49	+1 27	-0 43	+0 28
3 Mai 1740	11 24 22	+0 39	+4 46	+0 32	-1 57
17 Mars 1739	11 28 36	+0 13	+0 57	-2 51	-1 27

VII.

On reconnoit facilement à la seule inspection des trois dernières colonnes de la Table précédente que les erreurs des Tables calculées d'après les formules de l'Art. V. de cette addition sont les moindres de toutes, enforte que si l'on s'en tenoit aux cent observations précédentes qui sont les seules que j'aie calculées on se décideroit en faveur de ces formules. Mais outre qu'il faudroit ce me semble un plus grand nombre d'observations pour être assuré que ces formules sont les plus proches de la Nature, & que l'excentricité est telle que je l'ai faite, je pecherois entièrement contre l'Esprit de la methode que je me suis prescrite jusqu'ici de n'emprunter des observations que les elemens nécessaires du probleme & de tirer tout le reste du seul principe de la Gravitation universelle; il n'y a donc pour chasser la legere incertitude qui reste sur quelques unes des équations précédentes qu'une nouvelle operation où l'on ait encore plus d'attention aux petites quantités negligées. Ce calcul que je me promets de refaire, si personne n'en prend la peine, peut être executé par tout Geometre qui aura lu la piece précédente. Mais je repeterai ici que le motif qui doit le faire entreprendre n'est pas la nécessité de se delivrer d'aucun doute sur la cause des mouvemens de la Lune qui est suffisamment reconnue et prouvée par ce qui précède; ce doit être le but d'arriver à des Tables plus exactes encore que les précédentes, & telles que l'Astronomie & la Navigation en pourroient retirer les plus grands secours.

FIN.

