DISSERTAZIONE

SOPRA IL QUESITO

Stabilire la vera teoria delle Acque uscenti da' fori aperti ne' vasi, e mostrare in quai circostanze possa ella applicarsi alle Acque correnti negli alvei naturali:

PRESENTATA

DAL SIG. DOMENICO COCOLI

PRIMARIO PROFESSORE DI FISICO-MATEMATICA NELLE SCUOLE PUBBLICHE, E PROFESSORE ONORARIO D' IDRAULICA NELL' ACCADEMIA AGRARIA DI BRESCIA,

AL CONCORSO DELL' ANNO MDCCLXXXI.

E CORONATA

DALLA REALE ACCADEMIA DI SCIENZE, E BELLE LETTERE DI MANTOVA.

In MANTOVA, 1783.

Per l' Erede di Alberto Pazzoni, Regio-Ducale Stampatore.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

. . . . *Et quae*
Desperat tractata nitescere posse, relinquit.
Horat. Art. Poet.

IL Problema riproposto dalla REALE ACCADEMIA DI MANTOVA per l'anno 1781 intorno al muovimento delle Acque è concepito ne' seguenti termini:

Stabilire la vera Teoria delle Acque uscenti da' fori aperti ne' vasi; e mostrare in quai circostanze possa ella applicarsi alle Acque correnti negli alvei naturali.

Per rispondere più adequatamente che mi fosse possibile alla richiesta, ho creduto bene di dividere questo Scritto in tre parti. Nella prima ho gettati i fondamenti di una Teoria generale del moto de' fluidi, affatto indipendente da Ipotesi particolari. Questa mi ha fornito delle conseguenze, che se non sono applicabili alla pratica, almeno sono tali, che spargono luce sopra questa difficile materia, e servono di base ad un'altra Teoria, che forma la seconda parte dell' Opera. Tale Teoria non è veramente una conseguenza immediata de' soli principj stabiliti nella prima parte; ma è fondata inoltre sopra alcune Ipotesi particolari, che limitano a dir vero la sua generalità. Esse sono però tali, che s' uniformano nel maggior numero de' casi all' esperienza; e quindi la Teoria, che deve applicarsi alla pratica, avrà sodo fondamento in natura. Questa seconda parte, che è la più lunga, è forse la più travagliata. Le formole generali, che sonovi stabilite, ed alcune applicazioni ne mostreranno la fecondità.

In seguito ho esposto una nuova Teoria, come Appendice alla seconda parte, fondata sul principio della conservazione delle for-

forze vive, principio, che traſmutato in quello dell' aſceſa potenziale, e della diſceſa attuale, ha ſervito di baſe all' Opera Idrodinamica del celebre Daniele Bernoulli. Quanto un tale aſpetto concilj di facilità, e d' eleganza alla teoria ſuddetta, non iſtà a me il giudicarlo.

Finalmente nella terza parte, ho cercato di fiſſare una Teoria delle diſpenſe de' fori laterali de' vaſi, migliore di quella uſata dagli altri Idraulici; ed in progreſſo ho tentato di ſtabilire la Teoria del moto delle Acque negli alvei naturali. Non ſi può dire quanto ſia complicata queſta materia. Ella ricuſa quaſi tutte le Teorie; e non ve n' ha che una, la quale poſſa abbracciarla. Io l' ho adoperata queſta Teoria. L' eſito ſi vedrà alla fine di queſta terza parte.

Avverto ſin dal principio di queſt' Operetta, che tratterò l' argomento propoſto da puro Matematico. Non conſidererò ne' fluidi altro che le palmari proprietà, che da tutti ſono accordate, cioè gravità, ed ugual preſſione in ogni lato. Abbandonerò le qualità fiſiche, come quelle che ſono fuori del noſtro aſſunto, e cercherò in eſſa meno di moſtrarmi dotto, che di ſeguire ſemplicemente quanto nel preſente argomento può illuminarci. Non mi ſarebbe impoſſibile eſporre ſin dal bel principio le molte qualità de' fluidi, diſſertarvi ſopra, apportare i varj ſiſtemi intorno alla fluidità, render conto de' paradoſſi, che ſi rincontrano nel confronto delle loro ſpecifiche gravità, e forſe produrre qualche nuovo ſiſtema, onde iſciogliere queſti paradoſſi; Ma ciò altro non ſarebbe che allungare l' Opera ſenza ſparger luce alcuna ſopra l' argomento propoſto dalla Reale Accademia. Tal penſiero mi ha fatto anche ommettere molte erudizioni, ch' avrebbono forſe ſervito di qualche ornamento a queſto Scritto, ſe un abbozzo informe e rapido, compoſto e raccolto in ſomma premura è ſuſcettibile d' ornamento. Avvertite queſte coſe, entriamo ſenza più in materia.

PAR-

PARTE PRIMA.

§. I.

PEr trattare quest' importante argomento colla massima generalità, suppongo una massa di fluido qualunque, di qualsivoglia figura; in questa massa immagino due assi, dati di posizione l' uno all' altro perpendicolare; per mezzo di tre coordinate x, y, e z fisso la posizione di una particella indeterminatamente: indi per mezzo del principio dell' equilibrio, principio di somma evidenza, ne cavo delle formole, che contengono le leggi della quiete, e del moto delle particelle componenti la massa tutta.

Sia questa rappresentata da $ASTVK$ (fig. 1.); e sieno i due assi AP, AD; e le coordinate $AP = x$, $PM = y$ ed $MN = z$; Pp, Mm, Nn gli elementi dx, dy e dz di queste coordinate. La Densità della particella $dxdydz$, che è all' estremità dell' ordinata MN, sia $= \Delta$, e suppongasi variabile. La massa della sunnominata particella sarà $= \Delta dxdydz$. Suppongasi di più, che le forze, che agitano la particella suddetta a seconda delle direzioni di x, di y e di z, sieno P', Q' ed R'. Mi pare chiaro, che per l' equilibrio di tutta la massa, basti che una particella così indeterminata sia in equilibrio. Imperciocchè essendo variabili x, y e z, l' equilibrio di una particella, data di posizione da queste variabili, deciderà dell' equilibrio di tutte l' altre.

tre. E per l'equilibrio di una baſtando che i canaletti componenti ſieno in equilibrio; quindi per l'equilibrio della maſſa tutta, baſterà che il fluido ſia generalmente in equilibrio ne' tre canaletti rientranti $Nnn'\nu$, $N\nu et$, $Nnst$ di una particella $dx\,dy\,dz$ qualunque. Ora, pei principj di Meccanica, la forza della parte Nn del primo canaletto ſarà $R'\Delta dz$; quella della parte nn' ſarà $\left(Q' + \left(\frac{dQ'}{dz}\right) dz\right)\left(\Delta + \left(\frac{d\Delta}{dz}\right) dz\right) dy$

$= Q'\Delta dy + Q'\left(\frac{d\Delta}{dz}\right) dz\,dy + \Delta\left(\frac{dQ'}{dz}\right) dz\,dy$. La parte $N\nu$ del ſuddetto canaletto avrà la forza $Q'\Delta dy$; e la forza del pezzo $\nu n'$ ſarà eſpreſſa da $\left(R' + \left(\frac{dR'}{dy}\right) dy\right)\left(\Delta + \left(\frac{d\Delta}{dy}\right) dy\right) dz$

$= R'\Delta dz + R'\left(\frac{d\Delta}{dy}\right) dy\,dz + \Delta\left(\frac{dR'}{dy}\right) dy\,dz$. Ed acciocchè il fluido ſia in equilibrio nel canale rientrante $Nnn'\nu$, dovendo eſſere la forza delle due parti Nn, nn' uguale alla forza delle due altre parti $N\nu$, $\nu n'$, ſarà perciò

$$R'\Delta dz + Q'\Delta dy + Q'\left(\frac{d\Delta}{dz}\right) dz\,dy + \Delta\left(\frac{dQ'}{dz}\right) dz\,dy$$

$$= Q'\Delta dy + R'\Delta dz + R'\left(\frac{d\Delta}{dy}\right) dy\,dz + \Delta\left(\frac{dR'}{dy}\right) dy\,dz;$$

ed eſpurgando l'equazione ſarà

$$Q'\left(\frac{d\Delta}{dz}\right) + \Delta\left(\frac{dQ'}{dz}\right) = R'\left(\frac{d\Delta}{dy}\right) + \Delta\left(\frac{dR'}{dy}\right),$$

ovvero $\frac{d(\Delta Q')}{dz} = \frac{d(\Delta R')}{dy}$; Formola di condizione acciocchè il fluido ſia in equilibrio nel canale rientrante $Nnn'\nu$.

Queſt' equazione non baſta però a ſtabilire l'equilibrio di tutta la maſſa; ma ne ſono neceſſarie altre due, che ſi ritroveranno

nella

nella medesima maniera. Per l'equilibrio del canale rientrante $NteyN$ si troverà l'equazion di condizione $\frac{d(\Delta P')}{dy} = \frac{d(\Delta Q')}{dx}$; e per l'equilibrio del terzo canale rientrante $NnstN$ l'equazion di condizione sarà $\frac{d(\Delta R')}{dx} = \frac{d(\Delta P')}{dz}$. Ed ecco trovate le tre equazioni di condizione per l'equilibrio della particella $\Delta dx dy dz$; Ora ripeterò, che per la variabilità delle tre coordinate x, y e z potendosi intendere la particella suddetta situata in qualunque luogo della massa, sarà chiaro, che le tre condizioni dell'equilibrio della particella, lo saranno anche di tutta la massa del fluido, quando esse sempre si verifichino.

§. II.

Rilevandosi nella figura altri tre canali rientranti, potrebbe taluno per avventura sospettare, che più di tre fossero le condizioni dell'equilibrio; ond'è ch'io mi vedo in necessità di dimostrare, che dai tre residui canali rientranti non si potranno ricavare che le tre già ritrovate equazioni di condizione. Ora veniamo al fatto. Sia da determinarsi l'equazione, che stabilisce la condizion dell'equilibrio nel canale rientrante $nn'rs$, che è uno dei tre summentovati. Procedendo come sopra, la forza del canale nn' è $= Q'\Delta dz + Q'\left(\frac{d\Delta}{dz}\right) dz dy + \Delta\left(\frac{dQ'}{dz}\right) dz dy$.

Quella del canaletto

nr è $= P'\Delta dx + P'\left(\frac{d\Delta}{dydz}\right) dy dz dx + \Delta\left(\frac{dP'}{dydz}\right) dy dz dx$.

Quella del canaletto

ns è $= P'\Delta dx + P'\left(\frac{d\Delta}{dz}\right) dz dx + \Delta\left(\frac{dP'}{dz}\right) dz dx$; e finalmente

Quel-

quella di sr è

$= Q'\Delta dy + Q'\left(\frac{d\Delta}{dzdx}\right) dz\,dx\,dy + \Delta\left(\frac{dQ'}{dzdx}\right) dz\,dx\,dy$. Ora per l'equilibrio dovendo le forze dei due canaletti nn', $n'r$ essere uguali alle forze degli altri due ns, sr, sarà, formando l'equazione, e levando da tutti due i membri $P'\Delta dx$, $Q'\Delta dy$; sarà dico

$$Q'\left(\frac{d\Delta}{dz}\right) dz\,dy + \Delta\left(\frac{dQ'}{dz}\right) dz\,dy + P'\left(\frac{d\Delta}{dydz}\right) dy\,dz\,dx$$

$$+ \Delta\left(\frac{dP'}{dydz}\right) dy\,dz\,dx = P'\left(\frac{d\Delta}{dz}\right) dz\,dx + \Delta\left(\frac{dP'}{dz}\right) dz\,dx$$

$$+ Q'\left(\frac{d\Delta}{dz\,dx}\right) dz\,dx\,dy + \Delta\left(\frac{dQ'}{dz\,dx}\right) dz\,dx\,dy.$$

Sembra a prima giunta, che questa equazione sia d' assai più complicata delle tre ritrovate nel (§. antec.), e perciò difficilmente riducibile a quelle. Tuttavolta ordinando i termini vedremo, ch'ella non è da una di quelle diversa. In fatti disponendola come segue $P'\left(\frac{d\Delta}{dydz}\right) dy\,dz\,dx - P'\left(\frac{d\Delta}{dz}\right) dz\,dx$

$$+ \Delta\left(\frac{dP'}{dydz}\right) dy\,dz\,dx - \Delta\left(\frac{dP'}{dz}\right) dz\,dy = Q'\left(\frac{d\Delta}{dzdx}\right) dz\,dx\,dy$$

$$- Q'\left(\frac{d\Delta}{dz}\right) dz\,dy + \Delta\left(\frac{dQ'}{dz\,dx}\right) dz\,dx\,dy - \Delta\left(\frac{dQ'}{dz}\right) dz\,dy$$; ed

avvertendo, 1.mo che $P'\left(\frac{d\Delta}{dydz}\right) dy\,dz\,dx - P'\left(\frac{d\Delta}{dz}\right) dz\,dx$ è

$= P'\left(\frac{d\Delta}{dy}\right) dy\,dx$; 2.do che

$\Delta\left(\frac{dP'}{dydz}\right) dy\,dz\,dx - \Delta\left(\frac{dP'}{dz}\right) dz\,dx$ è $= \Delta\left(\frac{dP'}{dy}\right) dy\,dx$; 3.zo

che $Q'\left(\frac{d\Delta}{dz\,dx}\right) dz\,dx\,dy - Q'\left(\frac{d\Delta}{dz}\right) dz\,dy$ è $= Q'\left(\frac{d\Delta}{dx}\right) dx\,dy$;

e finale finalmente, che $\Delta\left(\frac{d\,Q'}{dz\,dx}\right) dz\,dx\,dy - \Delta\left(\frac{d\,Q'}{d\,z}\right) dz\,dy$ è $= \Delta\left(\frac{d\,Q'}{d\,x}\right) dx\,dy$; l'equazione superiore per mezzo della sostituzione di tutti questi valori diverrà $P'\left(\frac{d\,\Delta}{d\,y}\right) dx\,dy + \Delta\left(\frac{d\,P'}{d\,y}\right) dx\,dy = Q'\left(\frac{d\,\Delta}{d\,x}\right) dx\,dy + \Delta\left(\frac{d\,Q'}{d\,x}\right) dx\,dy$, ovvero $P'\left(\frac{d\,\Delta}{d\,y}\right) + \Delta\left(\frac{d\,P'}{d\,y}\right) = Q'\left(\frac{d\,\Delta}{d\,x}\right) + \Delta\left(\frac{d\,Q'}{d\,x}\right)$: ovvero ancora $\frac{d\,(P'\Delta)}{d\,y} = \frac{d\,(Q'\Delta)}{d\,x}$, che è l'equazion di condizione per l'equilibrio del canale $N t e y N$ da noi ritrovata di sopra: Quindi sono le medesime le condizioni dei due canali opposti $NteyN$ ed $nn'rsn$. Applicando il medesimo metodo anche agli altri due canali si ritroveranno ancora le altre due equazioni di condizione di sopra stabilite. Per la qual cosa mi pare ora aver messo fuori di dubbio, che le condizioni dell' equilibrio dipendano unicamente dalle tre fissate formole, cioè che debba essere

1.mo $\frac{d\,(\Delta\,Q')}{d\,z} = \frac{d\,(\Delta\,R')}{d\,y}$;

2.do $\frac{d\,(\Delta\,P')}{d\,y} = \frac{d\,(\Delta\,Q')}{d\,x}$, e

3.zo $\frac{d\,(\Delta\,R')}{d\,x} = \frac{d\,(\Delta\,P')}{d\,z}$.

§. III.

Dovendo le tre equazioni superiori valere per qualunque particella $\Delta\,dx\,dy\,dz$, in qualunque luogo sia posta, e considerandosi questa di costante massa, qualunque luogo ella vada ad occupare, sarà sempre $d\,(\Delta\,dx\,dy\,dz) = o$; ovvero

$$\Delta dx\, dy\, \mathrm{d}dz + \Delta\, dx\, dz\, \mathrm{d}dy + \Delta dz\, dy\, \mathrm{d}dx + dx\, dy\, dz\, \mathrm{d}\Delta = o;$$

e dividendo per $\Delta dx\, dy\, dz$, sarà $\frac{\mathrm{d}.dz}{dz} + \frac{\mathrm{d}.dy}{dy} + \frac{\mathrm{d}.dx}{dx} + \frac{\mathrm{d}.\Delta}{\Delta} = o$.

Questa è un' altra equazion di condizione, che dovrà aver luogo anche quando la particella si muoverà attualmente; ed essa condizione dovrà accordarsi colle altre tre nominate di sopra. Mi sono servito della lettera d piuttosto che della solita *d* per la differenziazione, per non confondere gl' incrementi delle coordinate prodotti dal moto, dagl' incrementi che limitano la particella.

§. IV.

Le tre equazioni stabilite al (§. 2.) sembrano a prima vista risguardare le leggi della quiete della massa fluida, perchè nella loro formazione non si è considerata la particella del fluido muoversi in modo alcuno; ma dai numeri seguenti apparirà come le suddette formole sieno adattabili anche alle leggi del moto; se la scarsezza del tempo non ce l' impedisse, mostreremmo come si possano adattare, non solo a' fluidi incompressibili, ma anche agli elastici.

§. V.

Per dimostrare che le nostre formole contengono non solo le leggi della quiete, ma anche quelle del moto, supponiamo, che la nota particella si muova in una qualunque direzione. La sua velocità sarà sempre scomponibile in tre altre a seconda delle tre coordinate x, y e z; siano queste velocità p, q ed r, ed i loro elementi dp, dq e dr. Si osservi, che le particelle del fluido potranno essere mosse da doppio ordine di forze; cioè

cioè 1.mo dalle forze di gravità o tendenza verso qualche direzione; 2.do dalle forze d'inerzia delle particelle anteriori, esercitata da queste contro le contigue, in grazia che quelle sieno dotate di velocità maggiori o minori di queste. Ed avendo nei numeri superiori espresse le forze agenti sopra i canaletti per le lettere P', Q' ed R', e considerate queste forze astrattamente; potremo ora individuarle, e supporre che sia $P' = P - \pi$, considerando P come la forza di gravità o tendenza, e π quella, che esercita una particella sopra di un' altra contigua, in grazia della differenza delle loro velocità. Parimente la forza $Q' = Q - \chi$; e la forza $R' = R - \rho$.

Ora bisogna determinare le forze π, χ e ρ. Essendo gli elementi delle velocità espressi da dp, dq e dr; e le forze suddette nascendo in grazia della differenza delle velocità p, e $p - dp$ ec., sarà $\pi\, dt = dp$; $\chi\, dt = dq$, e $\rho\, dt = dr$, onde si ricaverà

$$\pi = \frac{dp}{dt}; \; \chi = \frac{dq}{dt} \text{ e } \rho = \frac{dr}{dt}.$$

§. VI.

Da ciò ch' abbiamo detto di sopra egli è chiaro, che se il fluido sarà in moto, le tre equazioni di condizione del (§. 1.)

saranno 1.ma $$\frac{d(\Delta(Q-\chi))}{dz} = \frac{d(\Delta(R-\rho))}{dy}$$

2.da $$\frac{d(\Delta(P-\pi))}{dy} = \frac{d(\Delta(Q-\chi))}{dx}$$

3.za $$\frac{d(\Delta(R-\rho))}{dx} = \frac{d(\Delta(P-\pi))}{dz}$$

Ed in queste sostituendo i già ritrovati valori di π, λ e ρ, le avremo cangiate nelle seguenti

$$1.^{ma}\quad \frac{d\left(\Delta\left(Q-\frac{dq}{dt}\right)\right)}{dz} = \frac{d\left(\Delta\left(R-\frac{dr}{dt}\right)\right)}{dy},$$

$$2.^{da}\quad \frac{d\left(\Delta\left(P-\frac{dp}{dt}\right)\right)}{dy} = \frac{d\left(\Delta\left(Q-\frac{dq}{dt}\right)\right)}{dx},$$

$$3.^{za}\quad \frac{d\left(\Delta\left(R-\frac{dr}{dt}\right)\right)}{dx} = \frac{d\left(\Delta\left(P-\frac{dp}{dt}\right)\right)}{dz}.$$

E' da avvertirsi, che dt significa l'elemento del tempo.

§. VII.

La quarta equazione, ritrovata al (§. 3.), cioè $\frac{\mathrm{d}.dz}{dz}+\frac{\mathrm{d}.dy}{dy}+\frac{\mathrm{d}.dx}{dx}+\frac{\mathrm{d}\,\Delta}{\Delta}=o$ si cangerà nella seguente $\frac{d.\mathrm{d}z}{dz}+\frac{d.\mathrm{d}y}{dy}+\frac{d.\mathrm{d}x}{dx}+\frac{\mathrm{d}\,\Delta}{\Delta}=o$, potendosi scrivere $\frac{d\,\mathrm{d}z}{dz}$ in luogo di $\frac{\mathrm{d}\,dz}{dz}$; $\frac{d\,\mathrm{d}y}{dy}$ in luogo di $\frac{\mathrm{d}\,dy}{dy}$; e $\frac{d\,\mathrm{d}x}{dx}$ in luogo di $\frac{\mathrm{d}\,dx}{dx}$. Ed essendo $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ e $\mathrm{d}z$ gli spazietti percorsi nell' elemento dt del tempo colle velocità p, q ed r, e per conseguenza $\mathrm{d}x = p\,dt$, $\mathrm{d}y = q\,dt$, $\mathrm{d}z = r\,dt$; sostituendo ora i valori di $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ e $\mathrm{d}z$, l'equazione si cangerà ancora in $\left(\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}\right)dt+\frac{\mathrm{d}\Delta}{\Delta}=o$; Equazione che più da presso conterrà le leggi del moto.

§. VIII.

Per maggior brevità si abbandonano tutte le conseguenze generali, che si potrebbono dedurre dalle formole superiori, per seguire più da vicino il soggetto proposto; e giacchè i fluidi, de' quali si deve trattare, non sono agitati che dalle forze di gravità, che operano nella direzion verticale, si potranno supporre nelle formole stabilite $Q = o$, $R = o$, e P costante; quindi le tre formole del (§. 6.) si ridurranno alle seguenti

1.ma $\dfrac{d\left(\frac{dq}{dt}\right)}{dz} = \dfrac{d\left(\frac{dr}{dt}\right)}{dy}$; 2.do $\dfrac{d\left(\frac{dp}{dt}\right)}{dy} = \dfrac{d\left(\frac{dq}{dt}\right)}{dx}$; e

3.za $\dfrac{d\left(\frac{dr}{dt}\right)}{dx} = \dfrac{d\left(\frac{dp}{dt}\right)}{dz}$. Si avverta, che in queste formole si è supposta Δ costante; imperciocchè dovendo noi trattare le leggi del moto delle acque, è superflua una maggiore generalità alla nostra ricerca; generalità, che potrebbe forse non poco imbarazzare i calcoli, senza farci meglio riuscire nel nostro argomento. Le sperienze fatte dall' Accademia del Cimento, e dall' altre più famose in Europa ci dispensano di provare l' incompressibilità dell' Acqua.

Posta Δ costante si avrà $d\Delta = o$, e quindi la 4.ta equazione si ridurrà alla $\left(\dfrac{dp}{dx} + \dfrac{dq}{dy} + \dfrac{dr}{dz}\right) dt = o$; che, per la costanza dell' elemento dt del tempo, relativamente a tutti gli elementi delle velocità e degli spazietti, si ridurrà ancora alla $\dfrac{dp}{dx} + \dfrac{dq}{dy} + \dfrac{dr}{dz} = o$. E le quattro equazioni, che conterranno le leggi del moto della massa fluida, saranno espresse dalle

quat-

quattro seguenti condizioni 1.^{ma} $\dfrac{d(dq)}{dz} = \dfrac{d(dr)}{dy}$

2.^{da} $\dfrac{d(dp)}{dy} = \dfrac{d(dq)}{dx}$

3.^{za} $\dfrac{d(dr)}{dx} = \dfrac{d(dp)}{dz}$

4.^{ta} $\dfrac{dp}{dx} + \dfrac{dq}{dy} + \dfrac{dr}{dz} = o$.

§. IX.

Si osservi che le tre prime potranno esprimersi anche nel seguente modo 1.^{ma} $d\left(\dfrac{dq}{dz}\right) = d\left(\dfrac{dr}{dy}\right)$

2.^{da} $d\left(\dfrac{dp}{dy}\right) = d\left(\dfrac{dq}{dx}\right)$

3.^{za} $d\left(\dfrac{dr}{dx}\right) = d\left(\dfrac{dp}{dz}\right)$

e di fatto $\dfrac{d(dq)}{dz}$ è $= d\left(\dfrac{dq}{dz}\right)$ ec.

Dunque le quattro equazioni saranno 1 ^{ma} $d\left(\dfrac{dq}{dz}\right) = d\left(\dfrac{dr}{dy}\right)$;

2.^{da} $d\left(\dfrac{dp}{dy}\right) = d\left(\dfrac{dq}{dx}\right)$; 3.^{za} $d\left(\dfrac{dr}{dx}\right) = d\left(\dfrac{dp}{dz}\right)$, e

4.^{ta} $\dfrac{dp}{dx} + \dfrac{dq}{dy} + \dfrac{dr}{dz} = o$.

Felicemente le tre prime, così preparate, riescono integrabili, quantunque sieno quattro le variabili, che possono contenere, cioè x, y, z e t, delle quali p, q ed r rappresentano le funzioni. Venendo al fatto gli integrali saranno, della

1.^{ma}

1.ma $\frac{dq}{dz} = \frac{dr}{dy}$; 2.da $\frac{dp'}{dy} = \frac{dq}{dx}$; 3.za $\frac{dr}{dx} = \frac{dp}{dz}$; a queste aggiunta la quarta $\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = o$, avremo le quattro nuove equazioni, delle quali le tre prime sono abbassate di un grado.

§. X.

Pare a prima vista, che le tre prime equazioni somministrino le tre condizioni necessarie, secondo i Teoremi di M.r Claireaut, per conchiudere, che $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ debba esse un differenziale completo; ma riflettendo, che p, q ed r sono funzioni delle quattro variabili x, y, z e t, si vede che rigorosamente non ha luogo questa conclusione. Però è mestieri considerare le quattro equazioni tali quali appariscono, senza dedurre delle conseguenze, che implicitamente limiterebbono il problema. Dunque la soluzione generalissima del problema Idrodinamico dipenderà dalla soluzione esatta delle quattro sumentovate equazioni.

§. XI.

Nelle formole suddette non avendo luogo l'elemento dt del tempo, pare che si possa ragionevolmente credere, che il tempo t affetti esse equazioni di una maniera uniforme. Di più se il fluido si muove in un vaso, le particelle che radono la parete hanno le velocità orizzontali, e la verticale date di rapporto; Questi rapporti saranno $= dx : dy : dz'$, intendendo per dy e dz' gli elementi delle due coordinate, che esprimono la natura della superficie o parete interna del vase; e siccome tali velocità devono essere espresse dalle funzioni delle tre coordinate e del tempo; quindi anche per tale cagione il tempo dovrà affettare di

una

una maniera uniforme le tre celerità; per ciò ottenere mi sembra, che una funzione del tempo debba essere multipla di una funzione delle tre coordinate ex. gr., chiamate V, v ed u tre funzioni delle indeterminate x, y e z, e θ la funzione del tempo, dovrà essere $p = \theta V$; $q = \theta v$, e $r = \theta u$. In questo supposto non entreranno funzioni di t nè rapporti delle velocità, e sarà 1.mo $p : q = V\theta : v\theta = V : v = dx : dy$; 2.do $q : r = v\theta : u\theta = v : u = dy : dz$; 3.zo $p : r = V\theta : u\theta = V : u = dx : dz$. E perciò sarà verificata alle pareti la condizione de' rapporti delle velocità indipendenti da qualsivoglia funzione θ del tempo.

§. XII.

Ciò supposto le quattro equazioni si cangeranno nelle seguenti 1.ma $\frac{\theta dv}{dz} = \frac{\theta du}{dy}$; 2.da $\frac{\theta dV}{dy} = \frac{\theta dv}{dx}$; 3.za $\frac{\theta du}{dx} = \frac{\theta dV}{dz}$; e 4.ta $\frac{\theta dV}{dx} + \frac{\theta dv}{dy} + \frac{\theta du}{dz} = o$.

Ed essendo θ comune a tutte le quantità, si potranno dividere tutte per θ; per questa divisione avremo 1.ma $\frac{dv}{dz} = \frac{du}{dy}$; 2.da $\frac{dV}{dy} = \frac{dv}{dx}$; 3.za $\frac{du}{dx} = \frac{dV}{dz}$; 4.ta $\frac{dV}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{du}{dz} = o$.

Ed essendo V, v ed u funzioni delle tre sole variabili x, y e z, sarà, in virtù delle tre prime condizioni, $Vdx + vdy + udz =$ ad un *differenziale completo*, e perciò avremo avanzato un altro passo, e la soluzione del problema dipenderà dallo sviluppo delle due formole, 1.ma $Vdx + vdy + udz =$ *diff. compl.*; 2.da $\frac{dV}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{du}{dz} = o$.

Per

§. XIII.

Per non dilungarsi in ricerche troppo astruse, e forse di nessun uso pel caso nostro, supponiamo che la particella, della quale si ricercano le leggi del moto, si muova in un piano, o diremo, descriva una curva a semplice curvatura, sarà $z = o$; $u = o$; e le due equazioni diverranno $Vdx + vdy =$ *differ. compl.* e $\frac{dV}{dx} + \frac{dv}{dy} = o$. Quest' ultima equazione, pei Teoremi di M.r Claireaut, darà $Vdy - vdx =$ *diff. compl.* Ecco dunque le due condizioni, cioè $Vdx + vdy =$ *diff. compl.*; $Vdy - vdx =$ *diff. compl.* Queste basteranno per farci conoscere la forma delle due funzioni V ed v, come vedremo in appresso.

§. XIV.

Non v' ha dubbio che il supposto di $p = V\theta$; $q = v\theta$, $r = u\theta$ non sia alquanto arbitrario. Da questo abbiamo ricavate le due formole $Vdx + vdy =$ *diff. compl.*; $Vdy - vdx =$ *diff. compl.* Quantunque tale ipotesi supplisca alle condizioni; tuttavolta, sia detto per amore della verità, essa non è l' unica ch' abbia la proprietà di soddisfarvi. In rigore però queste formole avranno luogo, se le particelle componenti la massa fluida descriveranno delle curve invariabili, e forse pel caso nostro basta, purchè possiamo svolgere le due equazioni. Si deve avvertire, che se le Ipotesi fatte ci daranno delle formole, che per lo meno contengano le leggi di un moto costante ed uniforme delle particelle, esse però non prenderanno di mira il caso generalissimo del moto in tutte le circostanze, che possono occorrere. Di fatto l' espressione del tempo può sparire dai rapporti $\frac{p}{q}$, $\frac{q}{r}$, $\frac{p}{r}$ ec., quando l' y od il z divengano uguali alle coordinate esprimenti la natura della superficie interna del vase, anche senza le fatte Ipotesi; imperciocchè non è impossibile imaginarsi una funzione delle quantità x, y, z e t in modo tale composta, che i rapporti $\frac{p}{q}$, $\frac{q}{r}$ ec. sieno dati indipendentemente dal tempo, quando y diviene y', e z diviene z'; cioè divengono le due coordinate della curva del vase. Quindi la soluzione generalissima del problema dipenderà sempre dalla soluzione delle quattro equazioni del (§. 9.)

§. XV.

Se non è affatto disperata tale soluzione, si può almeno asserire ch' ella sia tanto difficile e complicata, che i risultati non possono esserci di alcun soccorso nelle nostre ricerche, tendenti a fissare una Teoria applicabile alla pratica; e però in questa breve Dissertazione, in cui ci resta tanto a dire, ci asterremo di esporre i metodi che potrebbono scortarci alla soluzione delle equazioni suddette. Intanto cerchiamo col mezzo delle due formole stabilite se sia possibile qualche utile regola, confacente al caso nostro.

§. XVI.

I due *differenziali completi* del (§. 13.) si potranno trasmutare ne' seguenti 1.mo $Vdx + \frac{\sqrt{-1}\,.\,v\,dy}{\sqrt{-1}} = diff.\ compl.$

$$2.^{do}\ -v\sqrt{-1}\,.\,dx - \frac{V dy}{\sqrt{-1}} = diff.\ compl.\,;$$

tramutati così non cangeranno la natura di differenziali completi. Ora tanto la somma quanto la differenza degli stessi sarà diff. compl.

Quin-

Quindi avremo $Vdx + \sqrt{-1} . \frac{vdy}{\sqrt{-1}} - v\sqrt{-1} . dx - \frac{Vdy}{\sqrt{-1}} = diff. compl.$

$$\text{e} \quad Vdx + \sqrt{-1} . \frac{vdy}{\sqrt{-1}} + v\sqrt{-1} . dx + \frac{Vdy}{\sqrt{-1}} = diff. compl.,$$

ovvero 1.^{mo} $\overline{V - v\sqrt{-1}} \times \overline{dx - \frac{dy}{\sqrt{-1}}} = diff. compl.$,

e 2.^{do} $\overline{V + v\sqrt{-1}} \times \overline{dx + \frac{dy}{\sqrt{-1}}} = diff. compl.$;

E facendo per poco $dx - \frac{dy}{\sqrt{-1}} = dX$, e $dx + \frac{dy}{\sqrt{-1}} = dZ$, avremo

1.^{mo} $\overline{V - v\sqrt{-1}} \times dX = diff. compl.$,

e 2.^{do} $\overline{V + v\sqrt{-1}} \times dZ = diff. compl.$

Ma questi non possono essere *diff. compl.* se $V - \frac{v}{\sqrt{-1}}$ non sia una funzione della sola X ; e $V + v\sqrt{-1}$ una funzione della sola Z ; dunque $V - v\sqrt{-1} = funz.\ X$; e $V + v\sqrt{-1} = Funz.\ Z$. Ed essendosi supposto $dX = dx - \frac{dy}{\sqrt{-1}}$; e $dZ = dx + \frac{dy}{\sqrt{-1}}$, sarà integrando, $X = H + x - \frac{y}{\sqrt{-1}}$; e $Z = L + x + \frac{y}{\sqrt{-1}}$. Perciò sostituendo avremo le due seguenti formole $V - v\sqrt{-1} = funz. \left(H + x - \frac{y}{\sqrt{-1}} \right)$; e $V + v\sqrt{-1} = Funz. \left(L + x + \frac{y}{\sqrt{-1}} \right)$.

Da queste due equazioni, sommate insieme caveremo

$V = Funz. \left(L + x + \frac{y}{\sqrt{-1}} \right) + funz. \left(H + x - \frac{y}{\sqrt{-1}} \right)$, e sottraendo

 l'una

l' una dall'altra, $v = \dfrac{Funz.\left(L + x + \dfrac{y}{\sqrt{-1}}\right) - funz.\left(H + x - \dfrac{y}{\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}$.

Tale ſarà la forma delle due funzioni V ed v, che danno il rapporto delle due velocità verticale ed orizzontale di una qualunque particella.

§. XVII.

Avendoſi il rapporto delle due velocità indipendente dal tempo, poſſiamo ora ritrovare l' equazione delle curve particolari, deſcritte dalle particelle del fluido ne' loro muovimenti. Queſte curve ſaranno invariabili e dipenderanno da V ed v; avendoſi poi $p : q = \theta V : \theta v = V : v$; e per l' invariabilità delle curve eſſendo $p : q = dx : dy$, ſarà anche $p : q = V : v = dx : dy$; ſoſtituendo in queſta analogia i valori ritrovati di V ed v avremo

$$\frac{Funz.\left(L + x + \dfrac{y}{\sqrt{-1}}\right) + funz.\left(H + x - \dfrac{y}{\sqrt{-1}}\right)}{2} :$$

$$\frac{Funz.\left(L + x + \dfrac{y}{\sqrt{-1}}\right) - funz.\left(H + x - \dfrac{y}{\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}} = dx : dy;$$

e moltiplicando e riducendo ſarà

$$\left(dx + \frac{dy}{\sqrt{-1}}\right) \times Funz.\left(L + x + \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - \left(dx - \frac{dy}{\sqrt{-1}}\right) funz.\left(H + x - \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) = 0;$$

ed integrando, come al (§. 16.), avremo

$$'Funz.\left(L + x + \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - 'funz.\left(H + x - \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) = C^{te}.$$

Avvertaſi, che *'Funz.* indica una funzione ſuperiore di un grado a quella indicata da *Funz.*; come anche *'funz.* relativamente a *funz.* In modo che $d\,'Funz.(\alpha)$ ſi eſprimerebbe per $d\alpha\, Funz.(\alpha)$.

Per

§. XVIII.

Per determinare la coſtante aggiunta ſi oſſervi nel principio del moto, quanto ſia diſtante dall' aſſe delle ordinate della curva del vaſe la particella, di cui ſi ricerca la curva deſcritta, e ſia per noi queſta diſtanza $= \mathrm{d}$, e corriſponda alla $x = o$; avremo in queſto caſo $'Funz.\left(L + \frac{\mathrm{d}}{\sqrt{-1}}\right) - {}'funz.\left(H - \frac{\mathrm{d}}{\sqrt{-1}}\right) = C^{te}$;
e ſoſtituendo queſto valore nell' equazione anteriore, ſarà

$$'Funz.\left(L + x + \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - {}'funz.\left(H + x - \frac{y}{\sqrt{-1}}\right)$$

$$= {}'Funz.\left(L + \frac{\mathrm{d}}{\sqrt{-1}}\right) - {}'funz.\left(H - \frac{\mathrm{d}}{\sqrt{-1}}\right).$$

Eſſendo poi in arbitrio noſtro di prendere l' origine delle x, e delle y in quella ſituazione che ci è più comoda, potremo fare $H = L = o$; e l' equazione della curva ſarà

$$'Funz.\left(x + \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - {}'funz.\left(x - \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) = {}'Funz.\left(\frac{\mathrm{d}}{\sqrt{-1}}\right) - {}'funz.\left(-\frac{\mathrm{d}}{\sqrt{-1}}\right).$$

§. XIX.

Se l' aſſe delle ordinate del vaſe ſarà ſituato in modo che le divida tutte per metà, il filo del fluido, che ſcorre nella direzione dell' aſſe non avrà velocità alcuna orizzontale; dunque nelle formole delle velocità orizzontali e verticali, che ſono

$$p = \theta V = \theta\,\frac{\left(Funz.\left(x + \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) + funz.\left(x - \frac{y}{\sqrt{-1}}\right)\right)}{2},$$

$$q = \theta v = \theta\,\frac{\left(Funz.\left(x + \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - funz.\left(x - \frac{y}{\sqrt{-1}}\right)\right)}{2\sqrt{-1}},$$

fatto $y = o$, ſi dovrà verificare anche $q = o$; ciò non può effettuarſi

tuarsi se non sia *Funz.* $(x) = funz. (x)$; quindi la natura delle *funzioni*, *Funz.* e *funz.*, scritte da noi diversamente per maggior generalità, sarà la medesima. Avremo dunque

$Funz.(x + \frac{y}{\sqrt{-1}}) = funz.(x + \frac{y}{\sqrt{-1}})$; e le formole del (§.16.) si potranno

scrivere come segue, $V = \frac{funz.(x + \frac{y}{\sqrt{-1}}) + funz.(x - \frac{y}{\sqrt{-1}})}{2}$

$$v = \frac{funz.(x + \frac{y}{\sqrt{-1}}) - funz.(x - \frac{y}{\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}.$$

E parimenti l' equazione delle curve descritte dalle particelle, ritrovata al (§. 17.) sarà

$$'funz.(x + \frac{y}{\sqrt{-1}}) - 'funz.(x - \frac{y}{\sqrt{-1}}) = 'funz.(\frac{d}{\sqrt{-1}}) - 'funz.(\frac{-d}{\sqrt{-1}}).$$

§. XX.

Per determinare la natura della curva descritta da una particella, che rade la parete del vase, si sostituirà nell'ultima formola, in luogo di d la stessa lettera accentata d', ed in luogo di y, y' ; indicando per d' la distanza della particella dall'asse, ossia la prima ordinata, avanti il cominciamento del moto, e per y' l'espressione generale dell' ordinata della curva del vase. Fatta questa sostituzione avremo l'equazione seguente,

$$'funz.(x + \frac{y'}{\sqrt{-1}}) - 'funz.(x - \frac{y'}{\sqrt{-1}}) = 'funz.(\frac{d'}{\sqrt{-1}}) - 'funz.(\frac{-d'}{\sqrt{-1}}),$$

che esprimerà la natura della curva descritta. E' qui da avvertirsi, che dovendo questa particella muoversi necessariamente a seconda della parete, ne verrà di legittima conseguenza da quanto abbiamo stabilito e provato, che l'equazion della curva del

vase

vase dovrà avere la forma dell' equazione della curva descritta dalla particella suddetta; e che in caso diverso il problema non si potrà sciolgere per mezzo delle equazioni ritrovate. Ecco una nuova condizione, che limita il numero de' casi, ne' quali è possibile la soluzione del Problema.

§. XXI.

Volendosi l' equazione della curva descritta da una particella di fluido vicinissima all' asse, si dovrà fare nell' equazion generale $y =$ ad una quantità picciolissima, e parimenti anche d. In questo caso l' equazione del (§. 18.) diverrà $\frac{2\,y\ funz.\,(x)}{\sqrt{-1}} = {}'funz.\left(\frac{d}{\sqrt{-1}}\right) - {}'funz.\left(\frac{-d}{\sqrt{-1}}\right)$; Imperciocchè $'funz.\ \left(x + \frac{y}{\sqrt{-1}}\right)$ sarà (nel caso di y picciolissima) $= {}'funz.\ (x) + \frac{y}{\sqrt{-1}}\ funz.\ (x)$; e

$$'funz.\ \left(x - \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) = {}'funz.\,(x) - \frac{y}{\sqrt{-1}}\ funz.\ (x)\text{, e quindi}$$

$$'funz.\ \left(x + \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - {}'funz.\,\left(x - \frac{y}{\sqrt{-1}}\right)\ \text{sarà} = \frac{2\ y}{\sqrt{-1}}\ funz.\ (x)$$

E la formola della velocità verticale

$$p = \theta V = \theta\ \frac{\left(funz.\,\left(x + \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) + funz.\ \left(x - \frac{y}{\sqrt{-1}}\right)\right)}{2}$$

diverrà parimenti $p = \theta\ funz.\ (x)$.

§. XXII.

Dall' antecedente (§.) caveremo il seguente Teorema: che il fluido, che scorre vicino all' asse del vase si muove come in un tubo infinitamente ristretto, colle velocità, che sono in in ragion reciproca delle amplitudini y del tubo ſteſſo. Queſto Teorema viene dimoſtrato dalle due formolette, ritrovate nell' antecedente (§) ; cioè da $\frac{2\,y\,funz.\,(x)}{\sqrt{-1}}$

$= {}'funz.\left(\frac{d}{\sqrt{-1}}\right) - {}'funz.\left(\frac{-d}{\sqrt{-1}}\right)$, e da $p = \theta\,{}'funz.\,(x)$;

imperciocchè eſſendo ${}'funz.\left(\frac{d}{\sqrt{-1}}\right) - {}'funz.\left(\frac{-d}{\sqrt{-1}}\right)$

una quantità coſtante, ſarà

$$\frac{2\,y\,p}{\sqrt{-1}} = \theta\left({}'funz.\left(\frac{d}{\sqrt{-1}}\right) - {}'funz.\left(\frac{-d}{\sqrt{-1}}\right)\right) = \theta\,C.^{te}$$

§. XXIII.

Ritrovate le forme di V ed v, ci reſta a ritrovare p, e q, che ſono le velocità ; eſſendoſi ſuppoſto $p = \theta V$; $q = \theta v$, è chiaro che dipenderanno i valori di p e q dalla determinazione della *funzion* θ del tempo. Per avere queſto valore ſi rifletta, che il fluido ſi muove pel canaletto riſtrettiſſimo, che paſſa per l' aſſe, colla ſola velocità verticale ; perciò il ſuo moto ſi calcolerà facilmente pei metodi della ſeconda parte di queſta Diſſertazione, (metodi, che non dipendono da quanto ora ricercaſi) ; per mezzo di quelli ſarà ſempre poſſibile di ritrovare, dato pel tempo lo ſpazio che percorrerà la particella, che ſcorre a ſeconda dell' aſſe del vaſe, e che ſi muove per tutto il tempo t ; ſpazio che noi nomineremo α. Conoſceremo parimenti la natura o forma della $funz.\left(x + \frac{y}{\sqrt{-1}}\right)$, e conſeguentemente anche quella di ${}'funz.\left(x - \frac{y}{\sqrt{-1}}\right)$, indicanti la natura delle curve deſcritte dalle particelle ; perciocchè ſappiamo, che de-

ve

ve esservi un' analogia tra queste *funzioni* e quelle, che esprimono la natura della curvatura del vase, che deve esserci cognita. Quindi avremo dati per *funz.* (α) i valori delle *funzioni* suddette, e della quantità v. Ed inoltre avendo $dt = \frac{d\alpha}{\theta v}$; e $\theta = \frac{d\alpha}{v\,dt}$, perciò sostituendo il valore di $d\alpha$ dato per t, avremo la *funzione* di t, che sarà uguale a θ.

§. XXIV.

Quanto sia malagevole questa ricerca, è facile scorgerlo dal rapido dettaglio, ch' io ho dato delle operazioni da farsi per determinare i valori ricercati di sopra. Tali e tante sono le difficoltà da superarsi, che fanno disperare di mai poter giungere al caso d' applicare alla pratica questo rigoroso metodo.

§. XXV.

Queste tuttavolta non sono le sole difficoltà, che si presentano. L' aspetto generale, sotto il quale abbiamo preso a calcolare il muovimento de' fluidi, ne aggiunge delle altre, che non sono di minor peso. Di fatto non basta aver fissate le leggi delle velocità delle particelle, da cui risulta la curva, tanto della superficie superiore, quanto dell' inferiore; ma bisogna ancora, pel principio dell' equilibrio, che le forze medie, che agitano le particelle in queste due superficie, riescano perpendicolari alle superficie medesime; e di più che nella superficie superiore sieno dirette da su in giù, ed a rovescio nell' inferiore. Tutte condizioni nuove, che potrebbono in molti casi opporsi alle già fissate, e dare alle superficie suddette delle curvature diverse dalle già ritrovate per mezzo della legge delle velocità. Nel qual caso la soluzione del problema diverrebbe impossibile.

§. XXVI.

Prima d'abbandonare queſta difficile, e quaſi diſperata Teoria caviamone almeno qualche conſeguenza, che ci ſia utile in qualche modo a nuove ricerche.

Il principio della conſervazione delle forze vive ne' fluidi, ſuppoſto come vero da Daniele Bernoulli, e ſu di cui egli ha fondata tutta la ſua Teoria Idrodinamica, è ſuſcettibile di rigoroſa dimoſtrazione: ecco quella che caviamo da' principj ch' abbiamo premeſſo ne' numeri antecedenti.

Al (§. 6.) abbiamo le tre formole

1.ma $\dfrac{d\left(Q-\dfrac{dq}{dt}\right)}{dz}=\dfrac{d\left(R-\dfrac{dr}{dt}\right)}{dy}$; 2.da $\dfrac{d\left(P-\dfrac{dp}{dt}\right)}{dy}=\dfrac{d\left(Q-\dfrac{dq}{dt}\right)}{dx}$;

e 3.za $\dfrac{d\left(R-\dfrac{dr}{dt}\right)}{dx}=\dfrac{d\left(P-\dfrac{dp}{dt}\right)}{dz}$.

Nel ſuppoſto che le particelle deſcrivano delle curve invariabili, il tempo in p, q ed r ſi computerà per coſtante, e quindi le tre equazioni ſuddette ſaranno le tre condizioni richieſte dai Teoremi di M.r Claireaut acciocchè ſia $\left(P-\dfrac{dp}{dt}\right)dx+\left(Q-\dfrac{dq}{dt}\right)dy+\left(R-\dfrac{dr}{dt}\right)dz$ un differenziale completo. E conſiderando che i fluidi noſtri ſono moſſi dalla ſola gravità, ed in direzione verticale, perciò cambiando P in G, e facendo $Q=o$, $R=o$, avremo $Gdx-\dfrac{dp\,dx}{dt}-\dfrac{dq\,dy}{dt}-\dfrac{dr\,dz}{dt}$ $=$ *diff. compl.*, ed eſſendo $p=\dfrac{dx}{dt}$; $q=\dfrac{dy}{dt}$ ed $r=\dfrac{dz}{dt}$, ſarà, ſoſtituendo queſti valori, $Gdx-pdp-qdq-rdr=$ *diff. compl.*

Ora

Ora moltiplicando per $dx\,dy\,dz$, che è quantità coſtante, ſi otterrà $G\,dx\,.\,dx\,dy\,dz - p\,dp\,.\,dx\,dy\,dz - q\,dq\,.\,dx\,dy\,dz - r\,dr\,.\,dx\,dy\,dz$ $=$ *diff. compl.* Queſta condizione eſattamente ſi verifica, perchè evidentemente la quantità propoſta è differenziale completo. Dunque integrando ſarà

$$2\,Gx\,.\,dx\,dy\,dz - (p^2 + q^2 + r^2)\,dx\,dy\,dz + C.^{te}\,dx\,dy\,dz = 0,$$

ovvero $(p^2 + q^2 + r^2)\,dx\,dy\,dz = (2\,Gx + C.^{te})\,dx\,dy\,dz$; ed integrando un altra volta, ſarà

$$\int (p^2 + q^2 + r^2)\,dx\,dy\,dz = \int (2\,Gx + C.^{te})\,dx\,dy\,dz\,;$$

formola, che dimoſtra la conſervazione delle forze vive in uno de' canaletti curvi. E potendoſi dire lo ſteſſo di qualunque altro conſimile, componente la maſſa tutta, avremo, (ſommando due volte, in grazia degli altri due elementi)

$$\iiint (p^2 + q^2 + r^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint (2\,Gx + C^{te})\,dx\,dy\,dz,$$

cioè la ſomma delle forze vive conſervarſi in tutta la maſſa. La coſtante ſuddetta ſoddisferà al caſo in cui il fluido abbia qualche muovimento avanti il tempo, o l'iſtante, in cui ſupponeſi aver cominciato ad agire la gravità.

Eccoci alla fine di queſta prima parte, che può conſiderarſi come un tentativo preliminare: come una eſpoſizione delle idee più preciſe in queſt' argomento. Le difficoltà che ſonoſi incontrate ci avvertono di modificare il rigore col quale abbiamo cominciato a trattare queſta materia: ciò da noi ſi farà nella ſeguente.

PARTE SECONDA.

CAPO I.

NElla prima parte di questa Dissertazione ho mostrato, colla maggiore brevità che può permettere l' argomento, sino dove il Matematico, scortato dai calcoli i più fini, possa giungere volendo lavorare una Teoria sull' Ipotesi della Natura. Ora che abbiamo veduti privi di successo tutti que' metodi, per le conseguenze poco adattabili alla pratica, procureremo in questa seconda parte di rendere più particolare la Teoria suddetta, e ricaveremo delle nuove leggi, che per essere meno generali, non saranno per ciò meno applicabili a' casi di pratica, cui devono essere indirizzate, non solo le speculazioni de' Matematici, ma anche quelle di tutti i Filosofi.

Daniele Bernoulli fu il primo Matematico, che rese più generale la Teoria del moto de' Fluidi. Questa, sino al tempo in cui quest' illustre uomo pubblicò l' insigne sua Opera dell' Idrodinamica, erasi ridotta a considerare le velocità delle Acque uscenti da' fori de' vasi, uguali a quelle, che acquistano i corpi cadenti per tutta l' altezza viva del fluido sopra i fori stessi. Il celebre Matematico fondato sopra il principio dell' ascesa potenziale uguale alla discesa attuale, ritrovato dall' Eugenio (e ch' è lo stesso col principio della conservazione delle forze vive), calcò felicemente una via affatto nuova, che lo condusse ad una soluzione incomparabilmente più generale di quante esistessero per lo avanti. Egli dovette però supporre, che tutte le particelle componenti un medesimo strato orizzontale qualunque, di picciolissima grossezza, si muovano colla medesima celerità d' alto in basso, o viceversa (se i fluidi ascendono), e

gli

gli fu d' uopo parimenti ſupporre, che le particelle tutte non aveſſero muovimenti orizzontali. Due Ipoteſi, che a dir vero non ſono affatto quelle della natura, ma che vengono diſeſe da moltiſſimi ſperimenti, e che nel maggior numero de' caſi (e ſingolarmente in quelli di pratica) ſono conſone ad eſſa. Di fatti ne' vaſi, che per i loro forami diſpenſano Acqua, ſi oſſervano le ſuperficie de' fluidi diſcendenti conſervarſi ſenſibilmente piane ed orizzontali; coſa che ci fa credere, non ſenza qualche fondamento, che debbano fare lo ſteſſo anche gli ſtrati intermedj. Egli è bensì vero, che vicino al forame l' eſperienza dimoſtra, che il moto viene perturbato, ma quel tratto non è gran coſa ſenſibile (come lo ha rilevato il celebre Ab. Boſſut nelle ſperienze ch' egli ha fatte per corredare la ſua Opera Idrodinamica), onde in grazia di ciò abbiaſi a traſcurare una Teoria, che può darci molto lume nella ſcienza del muovimento de' fluidi. La bontà delle ſteſſe Ipoteſi viene comprovata anche a' poſteriori dalle ſperienze inſtituite intorno alle diſpenſe de' vaſi, le quali non s' allontanano gran fatto nelle quantità da quelle, che ſi rilevano dalla Teoria fondata ſopra le Ipoteſi ſuddette.

§. I.

Io non adotterò il principio del Bernoulli, ma in grazia della maggiore generalità, e dell' evidenza, che voglio conciliare alla preſente Teoria, mi fonderò ſopra il principio dell' equilibrio, evidentiſſimo per ſe, e ſtabilito nella Teoria della prima parte; anzi, fondato ſopra alcune delle formole già eſpoſte ne' primi numeri, farò che queſta non ſia che una delle conſeguenze un pò limitata di quella. E ſiccome il vero metodo di filoſofare è quello, che dal più ſemplice paſſa al compoſto; fondato ſopra il ſemplice principio dell' equilibrio, dimoſtrerò la verità del principio Bernoulliano, ed individuerò que' casi in cui si può usare con sicurezza; e finalmente darò come appendice a questa parte una Teoria del moto de' fluidi fondata sul principio della conservazione delle forze vive, e più generale d'assai di quella del citato Bernoulli. In questa farò uso delle Ipotesi sunnominate.

§. II.

Richiamandosi alla memoria quello che s'è detto nella prima parte di quest' Opera, riguardo al moto de' fluidi, e facendosi a considerare le formole primamente stabilite, scorgeremo, che, mediante le due fatte Ipotesi, nel caso presente, le due forze orizzontali Q ed R, che in quella Teoria si supponevano accelerare il fluido, non dovranno produrre alcun effetto; in conseguenza esse si potranno considerare come nulle; perciò nel caso nostro sarà $Q = o$, $R = o$. E considerati come nulli i moti orizzontali, l'equilibrio dovrà essere formato dalle forze verticali P. La forza verticale di un canaletto, la cui altezza è dx, s'è ritrovata al (§. I.) essere $\Delta P dx$; e ciascheduna colonna verticale facendo da per se l'equilibrio, dovrà questo dipendere dalla somma delle forze di tutti i canaletti componenti la colonna stessa. E' facile comprendere, che questa somma sarà espressa da $\int \Delta P dx$. Ora dovendo la colonna essere in equilibrio, la somma delle forze dovrà uguagliarsi al nulla; e perciò sarà $\int \Delta P dx = o$. Da ciò ch' abbiamo detto apparisce, che questa sommatoria si deve prender in modo ch' abbia principio alla superficie superiore, e fine al fondo del vase, ossia all'estremità del forame.

§. III.

Essendosi denominata Δ la densità, e trattandosi ora di fluidi omogenei o di costante densità, si dovrà considerare Δ come

co-

costante, ed in conseguenza (affettando essa ugualmente tutte le parti sommate e contenute sotto il segno), si potrà dividere la formola per Δ, come comune a tutti gli strati, che compongono la colonna totale; quindi la formola diverrà più semplice, e sarà $\int P\,dx = o$.

§. IV.

Egli è mirabile come questa picciola e semplice formoletta contenga tutte le leggi della quiete e del moto de' fluidi. Abbandoniamo le prime come fuori del nostro argomento, ed atteniamoci a sviluppare le seconde.

Supponendosi v la velocità di uno strato di fluido, che si muove in un vaso, e la cui posizione venga determinata dall' assissa x, e sia la sua altezza $= dx$; sarà la velocità dello strato contiguo, al quale corrisponde l' assissa $x + dx$, $= v + dv$. Dunque il primo strato passando nel luogo del secondo dovrà accelerarsi dell' elemento dv. E richiedendosi una forza per generare questa accelerazione, suppongasi per poco tale forza espressa dalla lettera φ. Per determinare il valore di questa forza abbiamo nelle formole di Meccanica $\varphi\,dt = dv$; e $\varphi = \frac{dv}{dt}$;

quindi $\frac{dv}{dt}$ sarà la forza necessaria ad accelerare lo strato suddetto nel tempo dt, della quantità dv. E chiamata p la gravità naturale, che preme all' ingiù una qualunque porzione della colonna, sarà questa quantità p agente tutta finchè il fluido è in precisa quiete; e tutta si dovrà calcolare per la nostra formola nel caso della quiete stessa; ma supponendo che il fluido si muova, e che in conseguenza gli strati cangino di luogo, ed in conseguenza ancora che cangino di velocità, una parte della

for-

forza p, che ſarà $\frac{dp}{dt}$ dovrà impiegarſi, come s' è detto, nell' accelerazione degli ſtrati. Quindi la forza reſidua, che agirà all' ingiù non ſarà più p, ma $p - \frac{dv}{dt}$, e perciò la quantità P della noſtra formola diverrà $p - \frac{dv}{dt}$, la quale ſoſtituita cangerà $\int P\,dx = 0$ in $\int \left(p - \frac{dv}{dt} \right) dx = 0$. Formola che conterrà le leggi del moto de' fluidi ne' vaſi di qualſivoglia figura, come ce lo dimoſtreranno le applicazioni ch' anderemo facendo in progreſſo.

§. V.

Queſta formola dedotta forſe con qualche eleganza, può dimoſtrarſi anche in altra maniera: porrò qui in grazia di maggior evidenza un' altra dimoſtrazione.

Sia $AKGH$ la metà di un vaſo nel quale ſi muova del fluido. Queſti dalla ſituazione $AKGH$ ſia paſſato, nel tempo t,
2. alla ſituazione $A'K'G'H'$. S' immagini il fluido diviſo in infiniti ſtraticelli, le cui altezze ſieno rappreſentate da dx, dx', dx'', dx''', dx'''' ec. E ſieno le ſeſſioni degli ſtrati ſuddetti, o le loro baſi y, y', y'', y''', y'''' ec.; e le corriſpondenti velocità ſieno v, v', v'', v''', v'''' ec., cioè la velocità dello ſtrato ydx ſia v; quella dello ſtrato $y'dx'$ ſia v' ec. Ora ſi conſideri nella colonna $K'G'$ una ſerie di corpicelli, i quali, per eſſere moſſi con diverſe velocità, ed agitati da forze diverſe agiranno mutuamente gli uni ſopra degli altri. Queſti corpicelli ſpinti dalla gravità naturale, che ſi è chiamata p, ſcorrerebbono i loro riſpettivi ſpazietti colle velocità $v + pdt$, $v' + pdt$, $v'' + pdt$, $v''' + pdt$, $v'''' + pdt$ ec., ſe foſſero liberi al moto e indipendenti

gli

gli uni dagli altri, e que' medeſimi corpicelli, ſuppoſti conneſſi tra di loro, ſi muoverebbono colle velocità v' v'', v''', v'''' ec. ſtantecchè, nel tempetto dt, dovendo lo ſtrato ydx paſſare nel luogo di $y'dx'$, cangerà la ſua velocità v in quella competente al luogo di $y'dx'$, cioè cangeralla in v'; e così degli altri.

Quindi i muovimenti de' corpicelli componenti la colonna ſuddetta, nel ſuppoſto che ſieno liberi e ſciolti, ſarebbono $(v + pdt)\,dx$; $(v' + pdt)\,dx'$; $(v'' + pdt)\,dx''$; $(v''' + pdt)\,dx'''$; $(v'''' + pdt)\,dx''''$ ec. Ed i muovimenti, nel caſo che ſi conſiderino conneſſi, ſono $v'dx$, $v''dx'$, $v'''dx''$, $v''''dx'''$ ec. Ora rendendo particolare il principio del Sig. D' Alembert, poſto al §. 60. della ſua Dinamica, cioè applicandolo ai muovimenti, che ſi eſercitano in linea retta, dedurremo, che la differenza di tutti queſti muovimenti non dovrebbe produrre moto alcuno ſopra tutto il ſiſtema, o ſopra i piccioli canaletti componenti la colonna; e perciò queſta differenza dovrà eſſere uguale a zero. Da quel principio ricaveremo dunque, che

$$\left.\begin{array}{l} vdx + pdtdx + v'dx' + pdtdx' + v''dx'' + pdtdx'' + v'''dx''' + pdtdx''' \text{ ec.} \\ - v'dx \qquad\quad - v''dx' \qquad\quad - v'''dx'' \qquad\quad - v''''dx''' \qquad\quad \text{ec.} \end{array}\right\} = 0 .$$

Ed eſſendo $v - v' = -dv$; $v' - v'' = -dv'$; $v'' - v''' = -dv''$; $v''' - v'''' = -dv'''$ ec., ſoſtituendo, le ſerie ſi ridurranno alle due

$$\left.\begin{array}{l} pdtdx + pdtdx' + pdtdx'' + pdtdx''' + pdtdx'''' \text{ ec.} \\ - dvdx - dv'dx' - dv''dx'' - dv'''dx''' - dv''''dx'''' \text{ ec.} \end{array}\right\} = 0 .$$

Dalla natura di queſte due ſerie è evidente ch' eſſe poſſono eſattamente rappreſentarſi dalle due ſommatorie $\int pdtdx - \int dvdx = 0$; ovvero da $\int (pdtdx - dvdx) = 0$, la quale diviſa per dt, che è coſtante per tutti gli ſtrati, darà $\int \left(pdx - \frac{dvdx}{dt}\right) = 0$. Formola già ritrovata al (§. 4.).

§. VI.

Queſt' ultimo metodo ci dà luogo di ſciolgere il medeſimo problema, concepito con più generalità; cioè nel caſo che ſieno due i vaſi comunicanti pei quali muovaſi il fluido. Sia il ſecondo vaſe aſcendente, cioè a dire, il fluido paſſi dal primo vaſe al ſecondo, ed in queſt' ultimo ſia obbligato ad aſcendere. Dovendo il fluido ſcorrere contro la direzione della gravità, la p, che eſprime queſta gravità, dovrà conſiderarſi come negativa; e quindi chiamate dz, dz', dz'', dz''', dz'''' ec. le altezze degli ſtrati aſcendenti; v, v', v'', v''' ec. le velocità degli ſteſſi, ritroveremo collo ſteſſo metodo, che la ſommatoria $\int\left(-pdz - \frac{dv\,dz}{dt}\right)$ eſprimerà la differenza de' muovimenti pel ſecondo vaſe. E ſommando inſieme la differenza de' muovimenti del primo colla differenza de' muovimenti del ſecondo vaſe, avremo $\int\left(pdx - \frac{dv\,dx}{dt}\right) + \int\left(-pdz - \frac{dv\,dz}{dt}\right) = 0$, acciocchè le forze del fluido, ne' due vaſi, ſieno in equilibrio.

§. VII.

Per rendere vie più la ſoluzione generale, ſupponiamo che ſopra la ſuperficie del fluido cada, a ciaſchedun iſtante dt, uno ſtrato di fluido, la cui altezza dq e baſe $'y$, ed avente la velocità eſpreſſa da V; e ſia la velocità della ſuperficie all' ingiù $= 'v$. E' facile accorgerſi, che, variate così le coſe, la formola ritrovata non ſarà più baſtevole a darci le leggi del moto; perchè eſſa riſguarda l' Acqua ſola de' due vaſi, e non quella che cade per di ſopra, nè l' impeto ch' eſſa fa contro la ſottogiacente, il quale romperebbe l' equilibrio ſtabilito dalla formola ſuperiore.

Per

Per rimediare a queſto inconveniente ſi conſideri che lo ſtrato $'ydq$ ſcorre, nel tempetto dt, lo ſpazio dq colla velocità $V+pdt$; e che perciò la quantità di muovimento, nel caſo che foſſe libero, ſarebbe $= (V+pdt)\,dq$; e nel caſo che foſſe obbligato a muoverſi colla ſuperficie dell' altro fluido ſottogiacente, la quantità di muovimento ſarebbe $= 'vdq$; Quindi la differenza di queſti muovimenti ſarà $Vdq+pdtdq-'vdq$, ovvero $= Vdq-'vdq$; a cagione che $pdtdq$ è incomparabilmente minore degli altri due. Ora, in conſeguenza dell' allegato principio, la ſomma de' muovimenti, che non devono produrre moto alcuno ſopra il ſiſtema, ſarà $\int\left(pdx-\frac{dvdx}{dt}\right)-\int\left(pdz+\frac{dvdz}{dt}\right)+(V-'v)\frac{dq}{dt}$; Che dovrà uguagliarſi a zero, come abbiamo detto di ſopra, acciocchè contenga le leggi del moto.

§. VIII.

Quantunque la formola del (§.) antecedente ſembri generaliſſima, ed atta a ſciolgere i problemi tutti di queſto genere; tuttavolta ſi oſſervi, ch' ella ſuppone tacitamente, (nel caſo de' due vaſi) che il foro del vaſe influente ſervi la legge di continuità colla bocca immediata del vaſe recipiente. In caſo diverſo la formola non ſoddisferebbe al problema. Acciocchè ella non manchi di tutta quella generalità, che comportano le Ipoteſi fatte dal bel principio di queſta ſeconda parte, conſidereremo anche il caſo in cui il forame non ſervaſſe la legge di continuità colla ſezione prima o bocca del ſecondo vaſo, immediatamente ſottopposto.

§. IX.

S' intenda il forame del primo vaſo eſpreſſo dalla lettera $''y$, ed $'y$ eſprima l' ampiezza della prima ſezione, o bocca del vaso inferiore, immediatamente sotto il forame $''y$. Essendo ydx la massa di uno strato, e dovendo passare per ciascheduna sezione ugual copia di fluido nel medesimo tempo dt; supposta dr l'altezza dello strato che passa pel forame $''y$, sarà $dr = \frac{ydx}{''y}$.

Parimente l'altezza dello strato medesimo, quando passerà per la sezione $'y'$, sarà $\frac{ydx}{'y'}$. E supponendo v la velocità del fluido in una sezione y, la velocità nella sezione $''y$ sarà $= \frac{vy}{''y}$; e nell'altra $'y'$ sarà $= \frac{vy}{'y'}$; Quindi il muovimento della particella, che sbuca dal foro, e la cui altezza $\frac{ydx}{''y}$, sarà $= \frac{vy}{''y} \cdot \frac{ydx}{''y} = \frac{vy^2dx}{''y^2}$; il muovimento della medesima particella, dopocchè sarà passata nella sezione $'y'$, $= \frac{vy^2dx}{'y'^2}$; e la differenza di questi muovimenti $= \frac{vy^2dx}{''y^2} - \frac{vy^2dx}{'y'^2}$; e per il noto principio unendo questa differenza alla formola ritrovata di sopra, avremo la formola generale seguente

$$\int\left(pdx - \frac{dvdx}{dt}\right) - \int\left(pdz + \frac{dvdz}{dt}\right) + (V - 'v)\frac{dq}{dt}$$

$$+ \left(\frac{vy}{''y^2} - \frac{vy}{'y'^2}\right)\frac{ydx}{dt} = 0,$$ fondata sopra il principio dell'equilibrio, la quale comprenderà anche il caso della discontinuità delle sezioni.

§. X.

Eccoci finalmente arrivati ad un'equazione, nella quale tutta si com-ſi comprende la Teoria Idrodinamica. Reſta che moſtriamo in qual modo queſta formola, che è ancora come aſtratta, ſi poſſa rendere applicabile a' caſi di pratica, onde ritrovare le velocità, ch' hanno i fluidi uſcenti da' fori aperti in fondo a' vaſi, le diſpenſe o quantità ſcaricate d' eſſi fluidi, ed i tempi relativamente all' acquiſto di certe velocità, od alle diſpenſe.

Io non voglio diſſimulare, che l' Inſigne M.r D' Alembert non abbia prima d' ora trattata queſta parte della Meccanica de' fluidi, ed inſegnate di belle formole; ciò non pertanto non temo di avanzare, che dal confronto di queſte due Teorie, avuto riguardo alla brevità del preſente ſcritto, ſi rileveranno nella mia delle generalità forſe deſiderabili nell' Opera di quell' Inſigne Matematico. Di più egli nella ſua fa uſo di certe aree, per eſprimere alcune ſommatorie, già adoperate dal Celebre Danielo Bernoulli nella ſua Idrodinamica; uſo che ha fatto ſoſpettare ad alcuno, che l' Autore aveſſe tolta la ſua Teoria da queſt' ultimo: Una taccia di tale natura a parer mio è poco fondata. Nel progreſſo di queſta Diſſertazione io non farò uſo alcuno di quelle aree, ſenza di eſſe ſpero d' arrivare a delle formole generaliſſime, tutte cavate dal ſolo calcolo, come da quello che è meno ſoggetto alle difficoltà delle applicazioni.

§. XI.

Volendoſi applicare alla pratica la formola generale da noi eſpoſta al (§. 9.), ſuppongaſi nel vaſe una ſezione coſtante b, nella quale la velocità del fluido, per un iſtante dt, ſia u, e queſta ſiaſi acquiſtata nel tempo t. Pel noto principio delle velocità in ragione reciproca delle ſezioni, principio dipendente dalle Ipoteſi fatte ſul cominciamento di queſta ſeconda parte, avremo $bu = yv = y'V$, e $bds = ydx = y'dz$ (ſuppoſta ds l' altezza dello strato, che nel tempetto dt passa per la sezione b, ed y' l'espressione generale di una sezione del secondo vase); ed avendosi dalle formole di Meccanica $\frac{dx}{dt} = v$; $\frac{dz}{dt} = V$, si potranno questi valori sostituire nella formola generale del (§. 9.) che si cangerà in $\int (p\,dx - v\,dv) - \int (p\,dz + V\,dV) + (V - 'v) \frac{dq}{dt} + \left(\frac{bu}{''y^2} - \frac{bu}{'y'^2} \right) \frac{y\,dx}{dt} = 0$. Ora volendo applicare questa formola, cominciamo, per maggior chiarezza, a ridurre la sola prima sommatoria $\int (pdx - vdv)$, ridotta la quale, nessuna difficoltà si opperrà alla riduzione dell' altra.

Dovendosi prendere (come abbiamo veduto al §. 2.) la sommatoria in modo, che cominci alla superficie del fluido, e termini al fondo del vase, si dovrà integrare la formola nell' Ipotesi di solo x ed y variabili, e di b ed u costanti.

E siccome abbiamo $vy = bu$, ed $v = \frac{bu}{y}$, sarà differenziando $dv = \frac{bdu}{y} - \frac{budy}{y^2}$; e $vdv = \frac{b^2udu}{y^2} - \frac{b^2u^2dy}{y^3}$, e sostituendo questo valore nella sommatoria suddetta, essa diverrà $\int \left(pdx - \frac{b^2u\,du}{y^2} + \frac{b^2u^2dy}{y^3} \right)$, e moltiplicando il secondo termine per $\frac{ydx}{bds}$, che è $= 1$, e che perciò non accresce, ne diminuisce la quantità moltiplicata, sarà la sommatoria espressa da $\int \left(pdx - \frac{b^2udu \,.\, dx}{byds} + \frac{b^2u^2dy}{y^3} \right) = \int \left(pdx - \frac{udu}{bds} \,.\, \frac{b^2dx}{y} + \frac{b^2u^2dy}{y^3} \right)$. Si osservi che la formola, preparata di questa maniera, ammette integrazione tutte le volte che y sia dato per x ; e l' integrale

grale sarà per ora $px - \frac{udu}{hds}\int\frac{h^2dx}{y} - \frac{h^2u^2}{2y^2} + C.^{te}$

La costante C si determinerà per mezzo della condizione, che fatta $x = o$, ed in conseguenza $y =$ alla sezione della superficie del fluido, che chiameremo $'y$, divenga la sommatoria $= o$. E giacchè isvaniscono i due primi termini, si avrà $-\frac{h^2u^2}{2'y^2} + C.^{te} = o$; e $C.^{te} = \frac{h^2u^2}{2'y^2}$. Quindi la sommatoria completa sarà $= px - \frac{udu}{hds}\int\frac{h^2dx}{y} + \frac{h^2u^2}{2'y^2} - \frac{h^2u^2}{2y^2}$; avvertendo che la sommatoria $\int\frac{h^2dx}{y}$ deve esser presa dalla superficie del fluido fino al fondo del vase; e che fatto $x = o$, tutto l' integrale divenga $= o$; e che in luogo di y si sostituisca y''; Parimenti si dovrà sostituire $''y$ nel ultimo termine in luogo di y, e l' altezza del fluido sopra il forame in luogo di x; supposte fatte le sostituzioni, ch' ora si possono fare, la formola si ridurrà per ora alla seguente $px - \frac{udu}{hds}\int\frac{h^2dx}{y} + \frac{h^2u^2}{2'y^2} - \frac{h^2u^2}{2''y^2}$.

§. XII.

Col medesimo metodo ritroveremo l' espressione della seconda sommatoria $-\int(pdz + vdv) = -pz - \frac{udu}{hds}\int\frac{h^2\,dz}{y'} + \frac{h^2u^2}{2'y'^2} - \frac{h^2u^2}{2''y'^2})$ intendendo per $''y'$ la superficie ascendente del fluido nel secondo vaso, e per z l' altezza del fluido in questo vaso, sopra il forame $''y$ del primo. E riunendo in somma le due espressioni ora ritrovate, e quelle che per poco abbiamo neglette, sarà la formola generale pel moto de' fluidi ne' due vasi

$px -$

$$px - \frac{udu}{hds}\int\frac{h^2dx}{y} + \frac{h^2u^2}{2'y^2} - \frac{h^2u^2}{2''y^2} - pz - \frac{udu}{hds}\int\frac{h^2dz}{y'} + \frac{h^2u^2}{2'y'^2} - \frac{h^2u^2}{2''y'^2}$$

$$+ (V - {}'v)\frac{dq}{dt} + \left(\frac{hu}{''y^2} - \frac{hu}{'y'^2}\right)\frac{ydx}{dt} = 0.$$ E sostituendo hds in luogo di ydx, e $\frac{ds}{u}$ in luogo di dt, la formola si cangerà ancora in

$$px - \frac{udu}{hds}\int\frac{h^2dx}{y} + \frac{h^2u^2}{2'y^2} - \frac{h^2u^2}{2''y^2} - pz - \frac{udu}{hds}\int\frac{h^2dz}{y'} + \frac{h^2u^2}{2'y'^2} - \frac{h^2u^2}{2''y'^2}$$

$$+ (V - {}'v)\frac{udq}{ds} + \left(\frac{h^2u^2}{''y^2} - \frac{h^2u^2}{'y'^2}\right) = 0;$$ trasponendo e ordinando sarà

$$\frac{udu}{ds}\times\overline{\int\frac{h^2dx}{y} + \int\frac{h^2dz}{y'}} + h\left(\frac{h^2u^2}{2''y^2} - \frac{h^2u^2}{2'y'^2}\right)$$

$$+ h\left(\frac{h^2u^2}{2''y'^2} - \frac{h^2u^2}{2'y^2}\right) - h(V - {}'v)\frac{udq}{ds} - h\left(\frac{h^2u^2}{''y^2} - \frac{h^2u^2}{'y'^2}\right)$$

$$+ hp(z - x) = 0,$$ equazione che ridurremo ancora alla

$$\frac{udu}{ds}\times\overline{\int\frac{h^2dx}{y} + \int\frac{h^2dx'}{y'}} + h\left(\frac{h^2u^2}{2''y'^2} - \frac{h^2u^2}{2'y^2}\right) - h(V - {}'v)\frac{udq}{ds}$$

$$- h\left(\frac{h^2u^2}{2''y^2} - \frac{h^2u^2}{2'y'^2}\right) + hp(x' - x) = 0,$$ supponendo $z = x'$.

Non manca altro se non che si determinino le figure de' vasi, perchè la formola si possa applicare alla soluzione de' problemi Idrodinamici di questo genere. Questa formola generale per due vasi diviene subito particolare per un solo vaso, mediante la supposizione di $x' = 0$, $'y' = 0$. Ma prima di venir all' applicazione, sì relativamente ad uno, come a due vasi, mostriamo la fecondità del presente metodo, generalizzando questa Teoria, ed applicandola a rintracciare le leggi del moto di un fluido, che scorre per un numero qualunque di vasi comunicanti.

Sie-

§. XIII.

Sieno tre, quattro ec. i vasi comunicanti; e suppongasi $'y''$ la prima sezione del terzo vaso, y'' una sezione qualunque dello stesso, x'' l' assissa corrispondente ed $''y''$ l'ultima sezione del vase stesso; parimenti sia $'y'''$ la prima sezione del quarto vaso, y''' l' espressione indeterminata di una sezione, x''' l'assissa corrispondente, e $''y'''$ l'ultima sezione del medesimo; e così si continui a denominare le altre parti del quinto e sesto vase ec. E ridotte le sommatorie come sopra, ommesso per brevità tutto quello, che abbiamo già detto, sarà la formola generalissima la seguente

$$\frac{udu}{bds} \times \overline{\int \frac{b^2dx}{y} + \int \frac{b^2dx'}{y'} + \int \frac{b^2dx''}{y''} + \int \frac{b^2dx'''}{y'''} + \text{ec.}}$$

$$+ \left(\frac{b^2u^2}{2\,''y^2} - \frac{b^2u^2}{2\,'y^2}\right) + \left(\frac{b^2u^2}{2\,''y'^2} - \frac{b^2u^2}{2\,'y'^2}\right) + \left(\frac{b^2u^2}{2\,''y''^2} - \frac{b^2u^2}{2\,'y''^2}\right) + \left(\frac{b^2u^2}{2\,''y'''^2} - \frac{b^2u^2}{2\,'y'''^2}\right) + \text{ec.}$$

$$+ \left(\frac{b^2u^2}{'y'^2} - \frac{b^2u^2}{''y^2}\right) + \left(\frac{b^2u^2}{'y''^2} - \frac{b^2u^2}{''y'^2}\right) + \left(\frac{b^2u^2}{'y'''^2} - \frac{b^2u^2}{''y''^2}\right) + \text{ec.}$$

$$+ ('v - V)\frac{udq}{ds} - p \times \overline{x \pm x' \pm x'' \pm x''' \pm \text{ec.}} \,. = 0$$

Si avverta, che i segni positivi, in questa formola, serviranno al caso che i vasi sieno tutti in linea verticale l' uno sotto all' altro, a seconda della direzione della gravità; ed i negativi avranno uso nel caso che i vasi tutti, eccetto il primo, sieno ascendenti. L' alternativa de' segni potrà servire a' varj casi, ne' quali alcuni fossero ascendenti, altri discendenti.

§. XIV.

In questa breve Memoria non è il luogo di proporci tutti i problemi, che possono essere sciolti col mezzo di questa formola, che forse parrà complicata a' leggitori. Mi basterà aver dimostrata la fecondità della Teoria qui esposta. Sceglierò solo alcuni casi di pratica cui applicarla. In tanto per quanto spetta alla sua complicazione si rifletta, che dovendo questa formomola rispondere a tutte le quistioni Idrodinamiche, essa non può essere più semplice. Applichiamola ora al caso de' due vasi, per dare un esempio, ed osservare nel medesimo tempo una spezie di paradosso, che nasce riguardo al forame del primo vase, e che forma la comunicazione col secondo.

Supposti due soli vasi, x'' e x''' saranno nulle, e parimente $\int\frac{h^2dx''}{y''}$ e $\int\frac{h^2dx'''}{y'''}$ nella nostra formola; e svaniranno anche tutti i termini dipendenti da queste sommatorie, e la formola resterà $\frac{udu}{hds}\,X\,\overline{\int\frac{h^2dx}{y}+\int\frac{h^2dx'}{y'}+\left(\frac{h^2u^2}{2''y'^2}-\frac{h^2u^2}{2'y^2}\right)+\left(\frac{h^2u^2}{2'y'^2}-\frac{h^2u^2}{2''y^2}\right)}$ $-(V-{}'v)\frac{udq}{ds}-p\,(x\pm x')=0$.

E supponendo che il forame $''y$ sia uguale ad $'y'$; cioè che fra le sezioni siavi la legge di continuità; oppure che la natura vi supplisca per mezzo del gorgo, come lo vuole il Celebre Giovanni Bernoulli, la formola diverrà più semplice, cioè

$$\frac{udu}{hds}\,X\,\overline{\int\frac{h^2dx}{y}+\int\frac{h^2dx'}{y'}+\left(\frac{h^2u^2}{2''y'^2}-\frac{h^2u^2}{2'y^2}\right)}-(V-{}'v)\frac{udq}{ds}$$
$$-p\,(x\pm x')=0.$$

Per ora non procediamo più oltre, ma fermiamoci per poco a considerare un bel paradosso, che ci presenta la nostra formola. Di fatti osservasi, che nelle leggi del moto del fluido, che scorre pei due vasi e pel forame di mezzo $''y$, poco o nulla influisce quest' ultimo; lo che appare chiaramente dall' essere affatto isvanita dalla formola medesima l' espressione $''y$.

E se

E ſe qualche poco v'ha che fare, egli influiſce ſolo nella ſommatoria $\int \frac{b^2 dx}{y}$, che poco altera quanto abbiamo aſſerito. E ne' vaſi cilindrici affatto ſi perde il ſuo influſſo. Molto più s'avvalora l'opinione, che la conſeguenza di queſta formola ſia paradoſſa dall'oſſervare, che l'eſperienza ci dimoſtra eſſere più pronti i muovimenti de' fluidi, nel caſo che il forame ſia grande, che quando egli è picciolo. Ora ſarà ella falſa la noſtra Teoria? Oppure tale paradoſſo dileguaſi da ſodi rifleſſi? Io aſſerirò francamente, che la Teoria è vera e giuſtiſſima, poſte vere le Ipoteſi fatte al (§. 1.), ſebbene abbia luogo il paradoſſo; e rifſonderò la cauſa nella poca uniformità delle Ipoteſi ſuddette colla natura del muovimento de' fluidi. E a dir vero noi abbiamo ſempre ſuppoſto, in queſta ſeconda parte, che non abbiano luogo i moti orizzontali delle particelle, che tutti gli elementi di uno ſtrato diſcendano con uguali velocità. Queſte Ipoteſi hanno luogo per un gran tratto del vaſe, ma vicino al forame s'allontanano dall'eſattezza, e tanto più ſe ne allontanano, quanto più ſono convergenti i moti delle particelle; cioè a dire, quanto più è picciolo il forame relativamente all'amplitudine del vaſe. E che ne ſia la verità, oſſerviamo che, in queſto caſo, i fili d'Acqua accoſtandoſi al forame devono convergere verſo di queſto, e paſſati che ſieno devono divergere per guadagnare tutta l'amplitudine del ſecondo vaſe: muovimenti tutti e due, che non ſi poſſono eſeguire ſenza che v'abbiano luogo i moti orizzontali delle particelle, i quali vengono a diſtruggere le Ipoteſi fatte, ed a render vana, in queſti caſi, la noſtra Teoria. Non è da meravigliarſi, che la formola noſtra non contenga l'eſpreſſione del foro; perchè, quantunque egli ci raſſembri un punto ſingolare, o una ſezione marcata,

 ella

ella non lo è di fatto. E non è egli il forame una sezione come le altre, quando esista frammezzo a quelle? Dunque egli non deve nemmeno nella formola aver maggior luogo delle sezioni intermedie. Ed un' altra formola, che contenesse particolarmente l' espressione $''y$, e non inchiusa nella sommatoria, come è nella nostra, sarebbe erronea, come lo è quella che ci diede, per un caso appresso a poco simile, il Celebre P. Scarella nella sua Fisica particolare, e che in seguito di questo Scritto ci daremo la briga d' esaminare. Questi ultimi riflessi possono valere anche contro la soluzione del Celebre Daniele Bernoulli, di un problema risguardante il moto de' fluidi, che scorrono per vasi interrotti da varj Diafragmi.

§. XV.

La formola del (§. 13.) ci fornisce una bella dimostrazione del seguente TEOREMA:

Per qualunque numero di vasi si muova il fluido, purchè siavi la legge di continuità nelle sezioni, e che superiormente non cada fluido, con diversa velocità di quella della superficie, sempre si conservano le forze vive del fluido stesso.

DIMOSTRAZIONE.

Per non allungare di troppo il calcolo mi servirò della formola del (§. 11.) in luogo di quella del (§. 13.), che compette al caso generalissimo: ciò non leverà niente della sua generalità alla Dimostrazione.

La formola citata è $\int(pdx - vdv) - \int(pdz + Vdv) + (V - 'v)\frac{dq}{dt} = 0$, nella quale, per l' espressa condizione di $V = 'v$, isvanisce il termine $(V - 'v)\frac{dq}{dt}$. Si moltiplichino tutti i termini per hds,

che

che deve considerarsi, in quest' integrazione, quale costante, come si può rilevare dal (§. citato); si avrà $\int (pdx - vdv)\, hds$ $- \int (pdz + \text{V}d\text{V})\, hds = 0$, ed integrando, giacchè si può; sarà $\left(px - \frac{v^2}{2}\right) hds - \left(pz + \frac{\text{V}^2}{2}\right) hds = 0$; ovvero $(2px - v^2)\, hds$ $- (2pz + \text{V}^2)\, hds = 0$, e trasponendo, sarà $v^2 hds + \text{V}^2 hds$ $= (2px - 2pz)\, hds$; e sostituendo ydx, e $y'dz$ in luogo di hds, giacchè è $hds = ydx = y'dz$, si avrà $v^2 ydx + \text{V}^2 y'dz = (2px - 2pz)\, hds$; ed integrando nuovamente, sarà $\int v^2\, ydx + \int \text{V}^2\, y'\, dz$ $= 2p \int (x - z)\, hds = 2p \int (x - z)\, ydx$, formola che mostra evidentemente la conservazione delle forze vive.

§. XVI.

Levando una delle condizioni esposte nell' enunziazione del Teorema, non avrebbe più luogo la conservazione delle forze vive; Di fatto supponendo la velocità V maggiore o minore di v, s'avrebbe, oltre l' espressione già ritrovata, anche un altro termine, che rompendo l' uguaglianza tra $\int v^2\, ydx + \int \text{V}^2 y' dz$ e $2p \int (x - z)\, ydx$, distruggerebbe il Teorema; succederebbe la stessa cosa se le sezioni de' vasi non avessero la legge di continuità.

Quin-

§. XVII.

Quindi la Teoria del Sig. Daniele Bernoulli, fondata sopra il principio dell'uguaglianza tra l'ascesa potenziale, e la discesa attuale (che è la stessa cosa col principio della conservazione delle forze vive), può avere sodo fondamento in Meccanica, tutte le volte, che vi sieno le condizioni da noi stabilite nei numeri antecedenti. In caso diverso, questa Teoria non sarà mai atta a fissare le Leggi del moto de' fluidi. Questo dotto Autore non ha però temuto d'applicarla anche a que' casi, in cui ora è dimostrato, che non si conservano le forze. Il Celebre P. Scarella commentatore dell' Opera di questo insigne Matematico pretende, che in ogni caso sia vera la Teoria del Bernoulli; cioè conservarsi, anche ne' casi da noi notati, l'ascesa potenziale in ragion d'eguaglianza colla discesa attuale; e ciò stabilito sul fondamento, che le particelle dell' Acqua sono elastiche. Ma egli è facile di rilevare quanto sia debole questo fondamento. Le sperienze fatte da varie Accademie per comprimere l'Acqua, provano bensì, che ad una gran forza non cedono le sue particelle; ma non già mai ch'esse sieno elastiche: oltredicchè mi pare che, anche concesso che lo sieno, non si potrebbe ricavare, che i moti delle particelle acquee si facessero nella stessa maniera e si comunicassero come quelli delle palle elastiche, che si urtano. Pare che la regolarità di queste, e la maniera cognita nella quale si comunicano il moto, non ci possa gran fatto illuminare sopra quello delle particelle acquee, che ci sono affatto incognite di figura, e di proprietà. Ma abbandoniamo le critiche, e passiamo ad applicare le nostre formole.

PROBLEMA.

Sieno due vasi (le cui figure abbiansi per mezzo de' rapporti di x ad y, e di x' ad y') ne' quali muovasi del fluido, la cui quantità sia espressa dalla lettera M; ritrovare le Leggi del moto, nel supposto che fra le sezioni siavi la continuità.

RISOLUZIONE.

L'altezza del fluido nel vase influente sia, prima del moto, $= a$, e quest'altezza divenga x passato il tempo t; l'altezza del fluido nel secondo vaso, avanti il moto, sia $= b$, e dopo il tempo t sia $= x'$. La formola del (§. 13.) ci darà la soluzione. Essendoci data la quantità M del fluido contenuto ne' due vasi, avremo $\int y dx + \int y' dx' = M$; e parimente essendo dato y per x, ed y' per x', avremo un' equazione di questa natura $funz.(x) + Funz.(x') = M$; e conseguentemente si caverà $x' = Funz.(M, x)$; Quindi le due sommatorie $\int \frac{b^2 dx}{y}, \int \frac{b^2 dx'}{y'}$, si ridurranno all'espressione $Funz.(M, b, x)$, che pongasi $= X$; parimente avremo $''y' = Funz.(b, x)$, onde il termine $\left(\frac{b^2u^2}{2''y'^2} - \frac{b^2u^2}{2'y^2}\right) y'$ si esprimerà per b^2u^2X'; ed essendo $'v = \frac{bu}{'y}$, anche il termine $(V - 'v)\frac{udq}{ds}$ si ridurrà a $\frac{Vudq}{ds} - \frac{bu^2X''dq}{ds}$; e $(x' - x) y'$ si potrà esprimere per X'''. Sostituendo nella citata formola $- y'dx$ in luogo di bds, giacchè y' è la sezione della superficie, e $- dx$ si può considerare per il decremento dell'altezzza, l'equazione si muterà in $\frac{udu}{-'ydx} X \overline{\int \frac{b^2 dx}{y} + \int \frac{b^2 dx'}{y'}}$

$$+ b^2 \left(\frac{1}{2''y'^2} - \frac{1}{2'y^2}\right) u^2 + (V - 'v)\frac{budq}{'ydx} + bp(x' - x) = 0;$$

ovve-

ovvero in $udu \times \overline{\int\frac{b^2dx}{y} + \int\frac{b^2dx'}{y'} - b^2u^2dx\left(\frac{y'}{2''y'^2} - \frac{y'}{2'y^2}\right)}$

$$-\left(V - 'v\right)hudq - hp\left(x' - x\right)y'dx = 0\ .$$

E sostituendo i valori in X, X', X'', ec. si cangerà ancora in $Xudu - b^2u^2X'dx - bVudq + b^2u^2X''dq - hpX'''dx = 0$; Equazione in cui non avranno luogo che le due indeterminate x, ed u, e che potrà conseguentemente integrarsi o algebraicamente, o per le quadrature.

E' da notarsi, che dq dovrà essere dato per dx e per x; e che la quantità d'Acqua caduta nel vase nel tempo t sarà espressa da $\int y'dx = Funz.(x)$. Perciò nel supposto che al vase sia somministrata altra acqua, in luogo di porre $\int ydx + \int y'dx' = M$, si dovrà fare $\int ydx + \int y'dx' + \int 'ydq = M$. Questa mutazione non apporterà alcun cangiamento nelle operazioni superiori essendoci data dq per x e dx.

§. XIX.

Se il fluido si muovesse in un vaso solo, la formola a questo problema inserviente si ridurrebbe a quella, ch'ora abbiamo maneggiata; solo che bisognerebbe avvertire se il fluido resti nel vase, o se esca per un qualche forame; in quest' ultimo caso, ella avrebbe bisogno di qualche leggier cangiamento.

§. XX.

Abbandoniamo i vasi curvilinei, come quelli che non hanno gran luogo nella pratica, ed applichiamo la nostra formola al caso di due vasi cilindrici l'uno influente nell' altro. Sopra di che sia il seguente.

PROBLEMA:

Ritrovare le Leggi del moto di un fluido, che si muove in due vasi cilindrici, comunicanti per mezzo di un forame orizzontale.

RISOLUZIONE.

Sia la sezione del vaso superiore $= m$, e l' inferiore abbia sezione $= n$. Supponiamo che sia costante la quantità del fluido, che si muove ne' due vasi; cioè che non ne cada superiormente; e che la continuità sia servata fra le sezioni de' due vasi o dalla natura per mezzo del gorgo, o dall' arte. Fatte queste supposizioni la nostra formola generale si ridurrà

a $\frac{udu}{ds} \times \int \frac{b^2dx}{m} + \int \frac{b^2dx'}{n} + \frac{b^3u^2}{2n^2} - \frac{b^3u^2}{2m^2} + bp\,(x' - x) = 0$;

ovvero a $\frac{udu}{ds}\left(\frac{b^2x}{m} + \frac{b^2x'}{n}\right) + \frac{b^3u^2}{2n^2} - \frac{b^3u^2}{2m^2} + bp\,(x' - x) = 0$,

nella quale x e x' indicano le altezze de' fluidi ne' due vasi, Qui si può vedere provato quello ch' abbiamo asserito al (§. 14.) intorno allo sparire, che fa interamente dalla formola il forame $''y$.

Ora conoscendo lo stato del fluido prima del moto, o, più generalmente, prima di un dato moto, si potrà determinare x' per x nel seguente modo.

Sia (fig. 3.) la metà del vase superiore rappresentata da $BEDA$, la cui altezza sia $= a$, e si supponga pieno di fluido, ed immerso nell' altro vaso $NMHC$, in cui il fluido arriva solo in KL; e sia $KE = b$. Di più suppongasi la superficie del fluido nel primo vaso discesa fino in P, ed ascesa quella dell' inferiore fino in Q. Si denomini $DP = x$; $EQ = x'$; sarà $KQ = x' - b$, ed $AP = a - x$; ed il fluido contenuto in KQ dovendo essere uguale di volume al fluido ch' era in AP, sarà $(x' - b)\,n = (a - x)\,m$; e conseguentemente $x' = \frac{ma - mx + nb}{n}$.

Ri-

Ritrovato così il valore di x', e ſoſtituito, eccoci alla formola, che conterrà due ſole indeterminate, ed eſprimerà le Leggi del moto come ſegue,

$$\frac{udu}{ds}\left(\frac{b^2x}{m}+\frac{b^2}{n}\left(\frac{ma-mx+nb}{n}\right)\right)+\frac{b^2u^2}{2n^2}-\frac{b^2u^2}{2m^2}+bp\left(\left(\frac{ma-mx+nb}{n}\right)-x\right)$$

$=0$. Ed eſſendo $ds=-\frac{mdx}{b}$; ſarà ſoſtituendo e moltiplicando,

$$2b^2x\,udu\left(\frac{n^2-m^2}{mn^2}\right)+b^2\left(\frac{n^2-m^2}{mn^2}\right)u^2dx+2\left(\frac{ma+nb}{n^2}\right)b^2\,udu$$

$=2mp\left(\frac{ma+nb}{n}\right)dx-2mp\left(\frac{m+n}{n}\right)xdx$; ed integrando ſarà

$$b^2xu^2\left(\frac{n^2-m^2}{mn^2}\right)+b^2\left(\frac{ma+nb}{n^2}\right)u^2=2mp\left(\frac{ma+nb}{n}\right)x-mp\left(\frac{m+n}{n}\right)x^2$$

$+C^{te}$. La coſtante ſi troverà $=-2mp\left(\frac{ma+nb}{n}\right)a+mp\left(\frac{m+n}{n}\right)a^2$, mediante la condizione che ſia $u=0$, quando $x=a$; aggiunta queſta, ſarà l'integrale completo

$$b^2xu^2\left(\frac{n^2-m^2}{mn^2}\right)+b^2\left(\frac{ma+nb}{n^2}\right)u^2=2mp\left(\frac{ma+nb}{n}\right)(x-a)$$

$+mp\left(\frac{m+n}{n}\right)(a^2-x^2)$. Queſta è l'equazion generale, che ci darà la ſoluzione del problema in tutti i caſi di queſto genere; per ora applichiamola al caſo in cui i due cilindri hanno il medeſimo diametro; cioè $n=m$; che ſarà lo ſteſſo che fiſſare le Leggi del moto del fluido in un tubo recurvo. Soſtituito m in luogo di n, la formola ſi cangerà in $u^2=2p(x-a)\frac{n^2}{b^2}$ $+\frac{2pn^2}{b^2}\left(\frac{a^2-x^2}{a+b}\right)$, ovvero (per eſſere $b=m=n$) in $u^2=2p(x-a)$ $+2p\left(\frac{a^2-x^2}{a+b}\right)=\frac{2p}{a+b}((a+b)x-ab-x^2)$.

Ma

§. XXI.

Ma prendiamo l' equazione sotto un altro punto di vista. Sostituiscasi nell' equazion differenziale, $a-x$, in luogo di x, acciocchè s' abbia l' altezza dell' Acqua nel vase $= a-x$, e la discesa della superficie $= x$; l' equazione diverrà

$$2b^2udu\left(\frac{m^2-n^2}{mn^2}\right)x+2b^2\left(\frac{mb+na}{mn}\right)udu+b^2\left(\frac{m^2-n^2}{mn^2}\right)u^2dx$$

$$+2mp\left(\frac{m+n}{n}\right)xdx+2mp\left(b-a\right)dx=0,$$ ed integrando, sarà

$$b^2u^2x\left(\frac{m^2-n^2}{mn^2}\right)+b^2\left(\frac{mb+na}{mn}\right)u^2+mp\left(\frac{m+n}{n}\right)x^2+2mp\left(b-a\right)x=0,$$

la quale non abbisogna di costante.

Si avverta, che b esprime la sezione cui compette la velocità u; e perciò, volendosi che b esprima il forame, sarà u la velocità nel forame.

§. XXII.

Volendosi la velocità della superficie, cioè della sezione m, non si avrà che a cangiare b in m, e l' equazione diverrà

$$u^2x\left(\frac{m^2-n^2}{n^2}\right)+u^2\left(\frac{mb+na}{n}\right)+p\left(\frac{m+n}{n}\right)x^2+2p\left(b-a\right)x=0,$$ ovvero

$$u^2=\frac{2p(a-b)x-p\left(\frac{m+n}{n}\right)x^2}{\left(\frac{m^2-n^2}{n^2}\right)x+\frac{mb+na}{n}};\ \text{ed } u=\sqrt{\frac{2p(a-b)x-p\left(\frac{m+n}{n}\right)x^2}{\left(\frac{m^2-n^2}{n^2}\right)x+\frac{mb+na}{n}}}$$

$$=n\sqrt{\frac{2p\,(a-b)\,x-p\left(\frac{m+n}{n}\right)x^2}{(m^2-n^2)\,x+mnb+n^2a}}.$$

§. XXIII.

Per avere il punto in cui la velocità della ſuperficie diviene nulla, ſi farà $u = 0$, e l'equazione $2p(a-b)x - p\left(\frac{m+n}{n}\right)x^2 = 0$ ci darà $x = \frac{2n}{m+n}(a-b)$; cioè ci farà conoſcere lo ſpazio della diſceſa, che deve fare la ſuperficie acciocchè la velocità divenga nulla.

Supponendo i cilindri di uguale diametro, cioè $m = n$, ſarà $x = a - b$; che indicherà dover diſcendere la ſuperficie ſuperiore ſino al livello della ſuperficie dell'Acqua nel ſecondo vaſe, avanti che cominciaſſe il moto.

§. XXIV.

Per ritrovare il punto in cui la velocità del fluido ſia la maſſima, ſi farà nell'equazione differenziale $du = 0$, ed avremo $u^2\left(\frac{m^2-n^2}{n^2}\right) = 2p(a-b) - 2p\left(\frac{m+n}{n}\right)x$; e ſoſtituendo il valore di u^2, già determinato nel (§. 22.), l'equazione ſi cangerà in $\left\{\frac{2p(a-b)x - p\left(\frac{m+n}{n}\right)x^2}{\left(\frac{m^2-n^2}{n^2}\right)x + \frac{mb+na}{n}}\right\}\left(\frac{m^2-n^2}{n^2}\right) = 2p(a-b) - 2p\left(\frac{m+n}{n}\right)x$, ovvero in $\left(\frac{m^2-n^2}{n^2}\right)x^2 + 2\left(\frac{mb+na}{n}\right)x = 2\left(\frac{mb+na}{m+n}\right)(a-b)$, che riſolta darà $x = -\left(\frac{mb+na}{m^2-n^2}\right)n \pm \sqrt{\frac{2(mb+na)(a-b)n^2}{(m+n)^2(m-n)} + \frac{(mb+na)^2n^2}{(m+n)^2(m-n)^2}}$; Formola un poco complicata, e che è di neſſun uſo al caſo che i cilindri abbiano il medeſimo diametro, cioè ſia $m = n$.

Per

Per riparare a tale inconveniente ſerviamci della formola del (§. 22.), avvertendo di negligentare il primo termine del denominatore, che ha il coeficiente $\frac{m^2 - n^2}{n^2} = 0$. Differenziandola, avremo $2udu = \frac{2p(a-b)dx - 2p\left(\frac{m+n}{n}\right)xdx}{\frac{mb+na}{n}}$; e, pel metodo de' maſſimi e minimi, fatto $du = 0$, avremo $0 = 2p(a-b) - 2p\left(\frac{1+1}{1}\right)x$, ed $x = \frac{a-b}{2}$; Formoletta che indica dovere la ſuperficie diſcendere per la metà della differenza verticale delle due altezze, acciocchè giunga ad acquiſtare la maſſima celerità.

§. XXV.

Moltiſſime applicazioni a' caſi particolari ci fornirebbe la noſtra formola del (§. 24.), ma la brevità di queſta Memoria non comporta ch' io ſcenda a dettagliare tutte le conſeguenze che ſe ne potrebbono ritraere. Mi contenterò d' applicarla al caſo in cui $m = n$; caſo già trattato da molti inſigni Matematici, donde hanno ricavato, che le oſcillazioni del fluido ſieno grandi ſieno picciole, per queſta maniera di vaſi, ſono iſocrone, o di uguale durata. La ſuddetta formola nell' Ipoteſi di $m = n$, ſi traſmuterà in $u^2 = \frac{2p(a-b)x - 2px^2}{a+b}$; e conſeguentemente $u = \sqrt{\frac{2p}{a+b}}\sqrt{(a-b)x - x^2}$; che indica eſſere la ſcala delle velocità eſpreſſa dalle ordinate dell' eliſſi. E volendoſi il tempo impiegato nella diſceſa del fluido per lo ſpazio x, avremo dalla Mecca-

cani-

canica la formoletta $dt = \frac{dx}{u}$, nella quale ſoſtituendo il valore ritrovato di u, ſarà $dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2p}{a+b}}\sqrt{(a-b)x-x^2}}$; ovvero $\frac{a-b}{2}\sqrt{\frac{2p}{a+b}}.\ dt = \frac{(a-b)\,dx}{2\sqrt{(a-b)x-x^2}}$; ed integrando ſarà $\left(\frac{a-b}{2}\right)\sqrt{\frac{2p}{a+b}}.\ t =$ *Arc. circol. di rag.* $\frac{a-b}{2}$, ed il cui ſeno verſo $= x$; in queſta integrazione è ſuperflua l' aggiunta della coſtante.

Per avere il tempo totale dell' oſcillazione, cioè ſino al punto ove il fluido perde tutta la ſua velocità, ſi dovrà fare $x = a-b$; e l'equazione ſarà $\frac{a-b}{2}\sqrt{\frac{2p}{a+b}}.\ t =$ *ſemicirconf. di rag.* $\frac{a-b}{2}$, e dividendo, $t = \frac{\textit{ſemicirconf. di rag. } \frac{a-b}{2}}{\frac{a-b}{2}\sqrt{\frac{2p}{a+b}}}$; e preſo $1 : P$ il rapporto del raggio alla circonferenza, ſarà $t = \frac{1}{2}P\sqrt{\frac{a+b}{2p}}$; eſpreſſione che moſtra dover eſſere coſtante il tempo dell' oſcillazione totale, qualunque ſia $a-b$, cioè qualunque ſia lo ſpazio che la ſuperficie del fluido traſcorre oſcillando, ovvero la differenza delle altezze del fluido ne' due tubi comunicanti. Da queſta formoletta ſi può ricavare un bel Teorema, cioè: che i tempi delle oſcillazioni de' fluidi nei tubi recurvi ſono in ragione diretta ſuddupplicata delle quantità de' fluidi, dì, ed in ragione parimente ſuddupplicata, ma reciproca delle gravità.

§. XXVI.

Queſta parte di Teoria, che il Sig. Daniele Bernoulli non ha trattata nella ſua Opera, e che noi da' principj generali di ſopra ſtabiliti abbiamo felicemente dedotta, viene contraddetta da quello che ſcriſſe il ſuo Commentatore l' Inſigne P. Scarella nel tomo ſecondo della ſua Fiſica particolare (§. 139.), nella quale oltre i dotti Commenti fatti all' Opera del Bernoulli, egli ha aggiunta la ſoluzione del problema de' due vaſi di finita grandezza, ſoluzione che mancava nell' Opera di quel Matematico. Mi vedo però neceſſitato, tanto per difendere la Teoria ch' io ho eſpoſta, quanto per avvertire quelli che ſtudiando il Libro del P. Scarella, incontraſſero il luogo citato, a dimoſtrare 1.mo con alcune applicazioni della formola del P. S. l' inconſeguenza che naſce da eſſa; e 2.do ad indagare quale ſia la ſviſta, che ha potuto indurre in errore un così attento Matematico.

§. XXVII.

Per confrontare la noſtra colla formola del P. S. ſi dovrà porre $a-x$ in luogo di x, n in luogo di m, 1 in luogo di b, r in luogo di n, e in vece di u^2, $2v$. Fatte queſte ſoſtituzioni la formola del (§. 22.) ſi muterà

in $v = \dfrac{(a-b)(a-x)-\left(\dfrac{n+r}{2r}\right)(a-x)^2}{\left(\dfrac{n^2-r^2}{r^2}\right)(a-x)+\dfrac{nb+ra}{r}}$. Ora confrontando queſta colla ſeguente, che è quella che ſi trova al (§. citato) dell' Opera

del

del P. S., cioè $v = \frac{-(r+n)}{r(2-n^2)} \left\{ \frac{a^{n^2-1} x - a x^{n^2-1}}{a^{n^2-1}} \right\}$

$+ \frac{(rb+na)}{r(1-n^2)} \left\{ \frac{a^{n^2-1} - x^{n^2-1}}{a^{n^2-1}} \right\}$ manifeſtamente ſi vedono in diſcrepanza.

Mettiamo la formola Scarelliana alla prova nel caſo dei due vaſi dello ſteſſo diametro: caſo in cui ſi ſuppone il cilindro interamente aperto e della medeſima amplitudine del vaſo recipiente, nel quale il fluido deve muoverſi come in un ſifone recurvo; caſo finalmente in cui le oſcillazioni dell' Acqua devono eſſere iſocrone, come lo hanno dimoſtrato il Cav. Newton, Giovanni Bernoulli, ed altri., e come viene evidentemente dimoſtrato al (§. 25.) dalla noſtra formola. Non v' ha dubbio che ſe la formola del P. S. è vera, dovrà dare i riſultati dei teſtè citati Autori. Per chiarirſene non s' avrà che a fare nella formola Scarelliana $n = r = 1$. Fatte le ſoſtituzioni eſſa diviene $v = x - a + \frac{b+a}{1-1}(1-1)$, riſultato affatto inconcludente ed incongruo a ſvelarci quanto ricerchiamo: anzi riſultato, che ci laſcia ſoſpettare qualche errore di principio o di calcolo nella formola.

§. XXVIII.

Ma perchè le formole integrate non ſempre riſpondono a tutti que' caſi, che ſono compreſi ſotto le formole differenziali, ſoſpettiamo ancora per poco, che il valore fornitoci dalla formola del P.S. ſia così incongruo, ſolo perchè le ſuppoſizioni, che ſonoſi fatte nella formola già integrata, doveſſero farſi prima nella differenziale; e giacchè l' Autore ſembra averlo ſoſpettato, e

che

che nel N. 12.mo del paragrafo citato ricorre alla formola differenziale per risolvere il Problema del Cilindro totalmente aperto, seguiamolo anche in questa ricerca; e per maggior brevità prendiamo ad esaminare la formola ch' egli ha ritrovata. La formola è la seguente $v = \left(\frac{r+n}{r}\right)(a-x) + \left(\frac{rb+na}{r}\right)(lx - la)$; nella quale è da avvertirsi che l' Autore mette l' unità in luogo di n, perchè nel caso suo è la stessa cosa. Per vedere se questa formola corrisponda a quanto abbiamo detto di sopra, facciasi $r = n$, e si avrà $v = 2\ (a-x) + (b+a)\ (lx - la)$; equazione, che per avere le quantità logaritmiche, non potrà mai dare l' Isocronismo delle oscillazioni, come si richiederebbe, e come lo hanno dimostrato gli Autori citati.

Se avanti di passare all' integrazione si facesse $n = r$, si avrebbe lo stesso risultato, come si può rilevare facendo attualmente il calcolo; quindi è forza credere, che la formola differenziale sia erronea. Esaminiamola ne' suoi principj.

§. XXIX.

L' Autore non iscioglie direttamente il problema propostosi; ma adopera una formola già usata dal Sig. Daniele Bernoulli, e su di quella fonda la sua soluzione. Io supporrò che i miei leggitori abbiano sott' occhio il Libro del P. S., e ciò per non allungare fuor di proposito questi riflessi. L' Autore dopo aver determinato l' incremento dell' altezza del fluido nel vase sopra il foro del cilindro, sostituisce nella formola del Bernoulli l' espressione dell' altezza suddetta in luogo di b, che è la lettera la quale, nella formola, esprimeva la parte del cilindro immersa nel fluido, e ch' erasi supposta costante a cagione dell' amplitudine infinita del vase. In seguito egli non fa alcun cangiamento al primo membro dell'equazione, vale a dire non accresce, ne diminuisce la quantità dell'ascesa potenziale, avendo cangiata quella della discesa attuale. L'equazione ritrovata dall'Autore è la seguente $\pm vdx + (n^2 - 1)\, xdv = \frac{rxdx - rbdx - nadx + nxdx}{r}$, nella quale è da osservarsi, che il primo membro altro non è che l'espressione dell'ascesa potenziale dell'Acqua che si muove nel cilindro e nel vaso d'infinita amplitudine, moltiplicata per la massa del fluido; quale espressione è giusta e vera, quando si conservi la condizione d'amplitudine infinita al vase; ma è erronea e falsa, quallora il vase sia di finita grandezza, come lo è nel problema, che erasi proposto da risolvere il P. S. Il secondo membro poi cangiato dall'Autore, è l'espressione della discesa attuale del centro di gravità della massa del fluido contenuto nel vase e nel cilindro. Ora ecco dove s'è introdotto l'errore: Il dotto P. S. ha posto in ragion d'uguaglianza l'ascesa potenziale dell'Acqua del solo cilindro colla discesa attuale dell'Acqua del cilindro e del vase; in luogo di porre l'ascesa potenziale dell'Acqua del cilindro e del vase unita, uguale alla discesa attuale dell'Acqua di tutti e due. L'uguaglianza fatta dal lodato P. S. è perciò erronea riguardo all'uso del principio, e non può dare che delle strane conseguenze.

Ecco dunque svelata la causa per la quale le formole del P. S. non convenivano con le nostre, e non erano atte a reggere alle particolari applicazioni, che ne abbiamo fatte.

Avendo mostrato così di volo e come incidentemente la causa della discrepanza delle nostre formole e di quelle del citato Autore, passeremo ad altro argomento, contentandoci solo di avvertire, che nel Libro citato del P. S. devono tutte correggersi le applicazioni della sua formola a' casi particolari.

CAPO

CAPO II.

Del moto de' Fluidi in un vaso solo.

LA formola generale ed integrata, che stabilisce le Leggi del moto de' Fluidi, in due vasi comunicanti, non può somministrarci la soluzion de' problemi, ove si tratti di ritrovare le Leggi per un solo vaso. Nelle integrazioni le quantità si confondono e si alterano; dopo di che non si conosce più quale sia quella che deve cangiarsi; ed oltre di ciò, nelle formole differenziali la mancanza di un qualche termine cangia affatto il metodo delle integrazioni, e spesse volte anche la loro natura. Nel caso presente si potrebbe osservare, che la mancanza di un termine nell' equazion differenziale rende l' integrazione quasi impossibile, senza il sussidio di un fattor comune, per cui è mestieri moltiplicarla; mentre l'equazione per i due vasi è stata, senza preparazione alcuna, co' metodi ordinarj integrata.

§. XXX.

PROBLEMA:

Ritrovare le Leggi del moto di un fluido, che esce dal forame di un vase cilindrico.

RISOLUZIONE.

Supponendo il vase cilindrico, il cui forame $= n$; ed amplitudine $= m$; potremo applicare la formola generale del (§. 20.), nella quale si farà $b = n$, ed $\frac{na - mx + nb}{n} = 0$. Poste le quali cose la formola pel caso nostro sarà $\frac{udu}{ds} \cdot \frac{n^2 x}{m}$

$+ \frac{n^3 u^2}{2n^2} - \frac{n^3 u^2}{2m^2} - npx = 0.$

 Si

Si rifletta che x essendo l' altezza residua del fluido nel vase, e ds l' altezza dello strato, che a ciaschedun tempetto dt passa per la sezione b ovvero n, sarà $ds = -\frac{m\,dx}{n}$; qual valore sostituendosi nella formola in luogo di ds, avremo $2xudu + \left(\frac{n^2-m^2}{n^2}\right)u^2dx = -\frac{2m^2pxdx}{n^2}$; Equazione che non può integrarsi senza che prima si moltiplichi pel fattore comune $x^{\frac{m^2-n^2}{n^2}}$; dunque per questo moltiplicata, ed in seguito integrandola, avremo $x^{\frac{n^2-m^2}{n^2}}u^2 = -\frac{2m^2p}{2n^2-m^2}\left\{x^{\frac{2n^2-m^2}{n^2}} + C^{te}\right\}$.

La costante C si determinerà $= -a^{\frac{2n^2-m^2}{n^2}}$ colla condizione, che fatta $x = a$, divenga $u = o$; quindi l' equazione completa sarà

$$x^{\frac{n^2-m^2}{n^2}}u^2 = \frac{2m^2p}{2n^2-m^2}\left\{a^{\frac{2n^2-m^2}{n^2}} - x^{\frac{2n^2-m^2}{n^2}}\right\};$$ ed

$$u^2 = \frac{2m^2p}{2n^2-m^2}\left\{a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2-n^2}{n^2}} - x\right\};$$ Formola che ci darà la velocità nel forame per mezzo dell' altezza del fluido sopra il fondo del vase.

§. XXXI.

Sia ora il foro n picciolissimo in confronto dell' amplitudine m del vase; la formola si cangerà in $u^2 = \frac{2m^2}{-m^2}p\left\{a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2}{n^2}} - x\right\}$.

Avver-

Avvertendo che $\frac{x}{a}$ è una frazione ; e che è alzata alla podestà quasi infinita $\frac{m^2}{n^2}$, si rileverà che $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m^2}{n^2}}$ è $= 0$ in confronto di x. Conseguentemente la formola si ridurrà ad $u^2 = -2p(-x) = 2px$; Che indica dover essere la velocità dell' acqua uscente dal foro del vase, uguale a quella che acquisterebbe un corpo, che cadesse per tutta l' altezza viva dell' Acqua, accelerato dalla gravità p.

Da questo (§.) si rileva manifestamente, che il Cannone adoperato da quasi tutti gli Autori d' Idraulica è limitato alla condizione, che i fori de' vasi sieno imparagonabili in grandezza colle amplitudini.

§. XXXII.

Se il vaso non avrà fondo, vale a dire, se sarà $m = n$, la formola superiore si cangerà in $u^2 = 2p(a-x)$; che indica, il fluido, in questo caso, discendere come un solido, cioè colla quiete relativa di tutte le sue particole, ed acquistare la velocità in ragione suddupplicata della discesa $a-x$.

§. XXXIII.

Se il rapporto del forame all' amplitudine del vase fosse determinato dall' equazione $m^2 = 3n^2$, le Leggi del moto sarebbono elegantemente espresse dal seguente

Teorema.

La scala delle velocità della superficie del fluido sarà rappresentata dall' elissi, il cui massimo asse è l' altezza primitiva a del fluido nel vaso, e l' asse minimo $= \sqrt{2pa}$; ed il tempo impiegapiegato nella discesa della superficie per lo spazio $a - x$, sarà proporzionale all' arco di cerchio descritto col diametro uguale all' altezza del vaso, e compreso fra l' estremità superiore del medesimo e la prolungazione dell' ordinata dell' elissi, che indica la velocità della superficie in quel istante.

Per dimostrare queste due verità, si sostituisca nella formola precedente (§. 30.) in luogo di m^2 il supposto valore $3n^2$, e quella formola sarà cangiata in $u^2 = \frac{6p}{-1}\left(a\left(\frac{x}{a}\right)^2 - x\right)$ $= \frac{6p}{a}\left(ax - x^2\right)$; ed avendosi che u è la velocità nel forame, quella della superficie sarà $\frac{nu}{m}$, ed il suo quadrato $= \frac{n^2 u^2}{m^2} = \frac{u^2}{3}$; sostituendo sarà per la velocità della superficie $\frac{n^2 u^2}{m^2} = \frac{2p}{a}\left(ax - x^2\right)$, che è l' equazione all' elissi, il cui asse massimo $= a$, ed il minimo $= \sqrt{2pa}$. Q. E. P.

Il tempo impiegato dalla superficie a discendere per lo spazio $a - x$, si troverà nel seguente modo.

Dalla Meccanica avendosi $dt = \frac{ds}{v}$, sarà pel caso nostro $dt = \frac{-dx}{\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{ax - x^2}}$, e $dt\sqrt{\frac{2p}{a}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{-adx}{2\sqrt{ax - x^2}}$, ed integrando sarà $t\sqrt{\frac{2p}{a}} \cdot \frac{a}{2} = cost.^{te} -$ *arco di cerchio*, il cui *sin. vers.* x; e fatto $x = a$, dovendo essere $t = 0$, sarà la $cost.^{te} = \frac{c}{2}$

$=$ alla

$=$ alla *semicirconferenza di raggio* $\frac{a}{2}$; quindi

$$t = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2ap}} - \frac{arc.\ di\ sin.\ vers.\ x}{\frac{1}{2}\sqrt{2ap}} = \frac{ANH - HN}{\frac{1}{2}\sqrt{2ap}} = \frac{AN}{\frac{1}{2}\sqrt{2ap}}$$ nella

(fig. 4.). Egli è osservabile, che il tempo impiegato dal fluido a discendere da A in P è uguale a quello, che impiegherebbe un mobile a percorrere l' arco di cerchio $2\,AN$, colla velocità acquistata nella caduta per l' altezza AH ; cioè per l' altezza primitiva del fluido.

§. XXXIV.

Il tempo che il vaso impiegherà a svuotarsi sarà espresso da $t = \frac{ANH}{\frac{1}{2}\sqrt{2ap}} = \frac{c}{\sqrt{2ap}}$; e quello ch' impiegherebbe un altro vaso simile sarà espresso dalla formola analoga $t' = \frac{c'}{\sqrt{2pa'}}$;

quindi sarà $t : t' = \frac{c}{\sqrt{2pa}} : \frac{c'}{\sqrt{2pa'}} = \frac{c}{\sqrt{a}} : \frac{c'}{\sqrt{a'}} = \sqrt{a} : \sqrt{a'}$;

cioè i tempi delle evacuazioni saranno in ragione suddupplicata delle altezze de' vasi.

§. XXXV.

Ritornando alla formola generale del primo problema, si ritroverà la massima velocità della superficie del fluido, o quella del forame, differenziando la formola, e facendo in essa $du = 0$; eseguite queste cose, si avrà il luogo, cui compette

la

la celerità maſſima determinato da $x = a\left(\frac{n^2}{m^2-n^2}\right)^{\frac{n^2}{m^2-2n^2}}$ $= \frac{a\,n^{2n^2 : (m^2-2n^2)}}{(m^2-n^2)^{n^2 : (m^2-2n^2)}}$. Ora per un caſo particolare facendo $m = n$, ſarà l'altezza del fluido, corriſpondente alla maſſima velocità, $x = \frac{a\,(n^2)^{-1}}{n^2 \,.\, 0^{1:0}}$; eſpreſſione che niente importa di deciferare, per un caſo di neſſun conto.

E ſupponendo il rapporto del forame all' amplitudine del vaſe regolato da $m^2 = 3n^2$; ſi avrà $x = \frac{a\,.\,n^{2n^2 : n^2}}{(2n^2)^{n^2 : n^2}} = \frac{a}{2}$, riſultato confermato anche dalla coſtruzione del (§. 23.).

Se poi ſarà $m^2 = 4n^2$; avremo $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, che eſprimerà la diſtanza dal fondo del vaſe del punto, in cui la celerità diviene la maſſima. Ommetto molti altri eſempli in grazia della brevità, che mi ſono propoſto, e della facilità con la quale ciaſcheduno può applicare le formole già eſpoſte a' caſi particolari.

CAPO III.

Del moto de' Fluidi ne' vasi, che si mantengono sempre pieni, per mezzo di nuovo fluido, che s' infonde superiormente.

ACcade nella pratica il più delle volte, che i vasi sieno tenuti pieni da altro fluido, che sopra si versa con qualche velocità; e talvolta anche s' introduce lateralmente, senza velocità alcuna verticale. Rendesi dunque necessario di adattare le nostre formole generali, e ridurre a calcolo le Leggi de' fluidi, che si muovono in queste circostanze.

§. XXXVI.

La nostra formola generale del (§. 13.) ci darà la soluzione di tutti i casi proposti, i quali anderemo in seguito ad uno ad uno considerando.

Supponendo che il fluido si muova per un solo vaso cilindrico (in questo caso nessuna difficoltà aggiungesi; se il vaso sia curvilineo) la formola del predetto (§.) si ridurrà ad $\frac{udu}{ds} \cdot \frac{b^2 a}{m} + \left(\frac{b^2u^2}{2n^2} - \frac{b^2u^2}{2m^2}\right) b + ('v - V)\, b \frac{udq}{ds} - bpa = 0$, in cui si è sostituita a in luogo di x, a cagione che il vase si mantiene sempre pieno per condizione. La velocità $'v$, che è quella della superficie sarà $= \frac{bu}{m}$; ed $b = n$, acciocchè u esprima la velocità del fluido nel foro n; si osservi poi che il vaso non può mantenersi sempre pieno, se lo strato, che cadrà sopra, cioè mdq non sia uguale a quello nds, che si scarica pel foro. Ora dunque facendo tutte queste sostituzioni, e per brevità riducendo; la formola delle Leggi del moto sarà

 $ds =$

$$ds = \frac{2mna}{m^2+n^2} \times \frac{udu}{\frac{2m^2pa}{m^2+n^2} + \frac{2mn}{m^2+n^2}Vu - u^2}$$; e passando co' debiti metodi all' integrazione, si otterrà facilmente

$$= \frac{mna}{(m^2+n^2)^2} \times \frac{-nV}{\sqrt{\frac{2pa}{m^2+n^2}+\frac{n^2V^2}{(m^2+n^2)^2}}} \times log.\left\{\frac{m\sqrt{\frac{2pa}{m^2+n^2}+\frac{n^2V^2}{(m^2+n^2)^2}}+\frac{mnV}{m^2+n^2}-u}{m\sqrt{\frac{2pa}{m^2+n^2}+\frac{n^2V^2}{(m^2+n^2)^2}}-\frac{mnV}{m^2+n^2}+u}\right\}$$

$$-\frac{mna}{m^2+n^2}\,log.\left\{\frac{2m^2pa}{m^2+n^2}+\frac{2mn}{m^2+n^2}Vu-u^2\right\}+C^{te}$$. Il valore della costante dovendosi fissare per mezzo della condizione che fatto $u = 0$, divenga anche $s = 0$, sarà

$$C^{te} = -\frac{mna}{(m^2+n^2)^2} \times \frac{-nV}{\sqrt{\frac{2pa}{m^2+n^2}+\frac{n^2V^2}{(m^2+n^2)^2}}}\,log.\left\{\frac{m\sqrt{\frac{2pa}{m^2+n^2}+\frac{n^2V^2}{(m^2+n^2)^2}}+\frac{mnV}{m^2+n^2}}{m\sqrt{\frac{2pa}{m^2+n^2}+\frac{n^2V^2}{(m^2+n^2)^2}}-\frac{mnV}{m^2+n^2}}\right\}$$

$$+\frac{mna}{m^2+n^2}\,log.\left\{\frac{2m^2pa}{m^2+n^2}\right\}$$, quale aggiunta, si avrà la formola integrale completa e ridotta come segue,

$$= \frac{mna}{(m^2+n^2)^2} \times \frac{-nV}{\sqrt{\frac{2pa}{m^2+n^2}+\frac{n^2V^2}{(m^2+n^2)^2}}} \times log.\left\{\frac{1-\frac{u}{m\sqrt{\frac{2pa}{m^2+n^2}+\frac{n^2V^2}{(m^2+n^2)^2}}+\frac{mnV}{m^2+n^2}}}{1+\frac{u}{m\sqrt{\frac{2pa}{m^2+n^2}+\frac{n^2V^2}{(m^2+n^2)^2}}-\frac{mnV}{m^2+n^2}}}\right\}$$

$$+\frac{mna}{m^2+n^2}\,log.\left\{\frac{2m^2pa}{2m^2pa+2mnVu-(m^2+n^2)u^2}\right\}$$; Formola generalissima,

ſima, pei caſi nominati di ſopra, e dal cui ſviluppo dipende tutta la Teoria di queſto genere. Noi per brevità non iſvilupperemo che qualche caſo particolare.

§. XXXVII.

Si voglia per eſempio adattare la formola ritrovata al caſo in cui il vaſe reſti continuamente pieno per l' Acqua che s' infonde lateralmente, e ſenza alcuna velocità. Egli è chiaro, che per queſta condizione dovrà farſi nella noſtra formola, $V = 0$; per lo che iſvanirà da eſſa il primo termine, che è il più complicato, ed avremo la formola più ſemplice come ſegue, $s = \frac{mna}{m^2+n^2} \, log. \left\{ \frac{2m^2pa}{2m^2pa - (m^2+n^2)u^2} \right\}$; eſpreſſione che incontreremo anche nel (§.) ſeguente, ove più particolarmente comprenderemo due caſi; cioè del vaſe mantenuto ſempre pieno dal fluido ſenza alcuna velocità infuſo; e del vaſe, che ſi mantiene pieno con del fluido, che ha la velocità della ſuperficie.

§. XXXVIII.

Per non dilungarmi troppo nell' applicare la formola ad altri caſi particolari, paſſo a dirittura, a trattare i due notati in fine dell' antecedente (§.). La noſtra formola differenziale ci darà le formole particolari per tutti e due queſti caſi. Pel primo ſi oſſervi che non ſarà di meſtieri altro, ſe non iſcancellare V dalla formola, il quale deve eſſere $= 0$; e quindi la formola differenziale ſarà $ds = \frac{2mna}{m^2+n^2} \, X \, \frac{udu}{\frac{2m^2pa}{m^2+n^2} - u^2}$. E pel ſecondo caſo, dovendo eſſere $V = {}'v$, e queſta (acciocchè il vaſe reſti

 coſtan-

coſtantemente pieno) $= \frac{nu}{m}$; per la noſtra condizione dovremo ſoſtituire nella formola differenziale, $\frac{nu}{m}$ in luogo di V; quale ſoſtituzione la cangerà in $ds = \frac{2\,mna}{m^2 - n^2} \mathrm{X} \frac{u\,d\,u}{\frac{2\,m^2pa}{m^2 - n^2} - u^2}$; quindi tutti due i caſi ſaranno compreſi ſotto la formola $ds = \frac{2\,mna}{m^2 \pm n^2} \mathrm{X} \frac{u\,d\,u}{\frac{2\,m^2pa}{m^2 \pm n^2} - u^2}$, integrata la quale avremo le Leggi del moto de' fluidi nelle due Ipoteſi. Ora integrando, giacchè l'equazione è bella e preparata, ſarà $s = -\frac{m\,n\,a}{m^2 \pm n^2} \log. \left\{ \frac{2m^2pa}{m^2 \pm n^2} - u^2 \right\} + C^{te}$. La coſtante C ſi determinerà $= \frac{m\,n\,a}{m^2 \pm n^2} \log. \left\{ \frac{2m^2pa}{m^2 \pm n^2} \right\}$, mediante la condizione, che fatta $u = 0$, ſia anche $s = 0$; Dunque la formola completa ſarà $s = \frac{m\,n\,a}{m^2 \pm n^2} \log. \left\{ \frac{2\,mmpa}{2m^2pa - (\,m^2 \pm n^2\,)\,u^2} \right\}$; queſta formola ci darà il rapporto della quantità d' Acqua uſcita dal foro, alla velocità da eſſa acquiſtata in tutti due i caſi di ſopra indicati.

§. XXXIX.

Se ſi voleſſe il rapporto della velocità al tempo, non s' avrebbe che a ſoſtituire udt nella formola $ds = \frac{2\,mna}{m^2 \pm n^2} \mathrm{X} \frac{u\,d\,u}{\frac{2m^2pa}{m^2 \pm n^2} - u^2}$, in luogo di ds, come ſi ha dagli elementi della Meccanica; e dividendo la formola per u, ſi avreb-

avrebbe $dt = \frac{2\,mna}{m^2 \pm n^2} \times \frac{du}{\frac{2\,m^2pa}{m^2 \pm n^2} - u^2}$; ed integrando, sarebbe

$$t = \frac{n\,a}{\sqrt{2pa}\sqrt{m^2 \pm n^2}}\, log. \left\{ \frac{\sqrt{\frac{2\,m^2\,p\,a}{m^2 \pm n^2}} + u}{\sqrt{\frac{2\,m^2\,p\,a}{m^2 \pm n^2}} - u} \right\}$$, in cui non abbisogna aggiugnere costante. Ed in fatti posta $u = o$, anche t diviene $= o$; come lo richiede la condizione, del cominciamento della velocità nel principio del tempo t.

§. XL.

Per mezzo di quest' equazione ritroveremo facilmente la velocità data pel tempo. Moltiplicandola per $\sqrt{2pa}\sqrt{m^2 \pm n^2}$ e dividendola per na; indi il primo membro moltiplicandosi per $log.e$, ed il secondo per l' unità, si avrà $\frac{t\sqrt{2pa}\sqrt{m^2 \pm n^2}\; log.e}{na}$

$$= log. \left\{ \frac{\sqrt{\frac{2\,m^2\,p\,a}{m^2 \pm n^2}} + u}{\sqrt{\frac{2\,m^2\,p\,a}{m^2 \pm n^2}} - u} \right\}$$; e passando dai logaritmi ai numeri,

si avrà $$e^{\frac{t\sqrt{2\,p\,a}\sqrt{m^2 \pm n^2}}{n\,a}} = \frac{\sqrt{\frac{2\,m^2pa}{m^2 \pm n^2}} + u}{\sqrt{\frac{2\,m^2pa}{m^2 \pm n^2}} - u}$$; e finalmente

ridu-

riducendo, $u = \left\{ \dfrac{e^{\frac{t\sqrt{2pa}\sqrt{m^2 \pm n^2}}{na}} - 1}{e^{\frac{t\sqrt{2pa}\sqrt{m^2 \pm n^2}}{na}} + 1} \right\} \sqrt{\dfrac{2m^2 pa}{m^2 \pm n^2}}$. Questa formola, che dà la velocità pel tempo, ci servirà molto per ritrovare la quantità di t, acciocchè la velocità si possa, dopo quella parte di tempo, considerare come equabile. Per ora ce ne serviremo a rilevare il rapporto della quantità della dispensa al tempo della durata dell'efflusso, che è un rapporto di grande necessità.

§. XLI.

Nella formola $s = \dfrac{mna}{m^2 \pm n^2} \log. \left\{ \dfrac{2m^2 pa}{2m^2 pa - (m^2 \pm n^2)\, u^2} \right\}$, che può anche esprimersi per $s = \dfrac{mna}{m^2 \pm n^2} \log. \left\{ \dfrac{1}{1 - \dfrac{(m^2 \pm n^2)\, u^2}{2m^2 pa}} \right\}$, sostituendo il valore di u ritrovato nel (§.) antecedente, si avrà

$$s = \frac{mna}{m^2 \pm n^2} \log. \left\{ \frac{1}{1 - \left(\dfrac{m^2 \pm n^2}{2m^2 pa}\right) \left\{ \dfrac{e^{\frac{t\sqrt{2pa}\sqrt{m^2 \pm n^2}}{na}} - 1}{e^{\frac{t\sqrt{2pa}\sqrt{m^2 \pm n^2}}{na}} + 1} \right\}^2 \left(\dfrac{2m^2 pa}{m^2 \pm n^2}\right)} \right\};$$

che ridotta diviene

$$s = \frac{m n a}{m^2 \pm n^2} \log. \left\{ \frac{\left(e^{\frac{t}{n} \sqrt{\frac{2p}{a}} \sqrt{m^2 \pm n^2}} + 1 \right)^2}{4 e^{\frac{t}{n} \sqrt{\frac{2p}{a}} \sqrt{m^2 \pm n^2}}} \right\}$$; Formola della quale faremo uso nel capo seguente, in cui tratteremo in particolare del tempo, delle velocità, e delle dispense.

§. XLII.

Prima di passare al quarto Capo mi piace di porre qui la soluzione del seguente problema, la quale ci dà luogo di applicare le formole generali e particolari già stabilite.

Problema.

Sia un vaso cilindrico *ADLB* (fig. 5.), al cui foro n sia annesso il tubo parimente cilindrico *SQ*, che abbia l'apertura uguale a quella del foro, cioè $= n$; e sia il primo cilindro ripieno fino in *AB*, ed arrivi il fluido a riempiere una sola parte del tubo annesso, cioè fino in $b\,l$; Ritrovare le Leggi del moto del fluido, quando sortirà dal forame *Q*.

Risoluzione.

Questo problema è più complicato di quello che apparisce da bella prima. Avanti però d'accingersi alla soluzione rendesi necessario di considerare, che non sarebbe mai possibile di stabilir niente di certo intorno alle Leggi del moto di questo fluido, se il problema non si consideri sotto doppio aspetto. In fatti il fluido dovendosi muovere per un dato tempo, tutto entro del vase composto, fin che arrivi al forame *Q*; indi poi sortire da esso e cangiare le circostanze, ne verrà di necessaria faria conseguenza, che una sola formola non potrà comprendere sotto di se questo caso complicato. Le formole algebraiche sono soggette alla Legge di continuità; e questo problema, preso come di un sol colpo, non la ammette, quando bene non si divida in due parti, alle quali separatamente non sarà difficile applicare le nostre formole.

Si consideri dunque in primo luogo il fluido come mosso tutto dentro del vase composto, e si determinino le Leggi del moto; ritrovate queste si rinvenga la velocità al momento che il fluido arriva al foro Q; indi si consideri questa velocità come una costante, della quale faremo uso in seguito.

In secondo luogo suppongasi, che il fluido abbia già comminciato a scaricarsi pel foro Q, e si adattino a questo caso le formole differenziali convenienti; a queste, integrate, aggungasi la costante, che sia tale, che fatto $Qb = 0$, la velocità divenga quella che si è determinata di sopra. Dettagliate così queste regole mettiamole in pratica.

La prima parte del Problema è bella e sciolta dalle formole del (§. 22.), avvertendo solo di cangiare $+b$ in $-b$; imperciocchè considerando il fluido come muoventesi pei due vasi comunicanti e discendenti, l'altezza b dovrà prendersi in senso opposto a quello in cui si è presa nel (§. citato). Perciò sarà la formola della velocità

$$u^2 = \frac{2p\left((a+b)\,x - \left(\frac{m+n}{2n}\right)x^2\right)n^2}{(m^2-n^2)\,x + nmb + n^2a};$$ ed x rappresentando in questa formola l'abbassamento della superficie al di sotto di AB, avremo $mx = n \,.\, bb'$, ed $x = \frac{n \,.\, bb'}{m}$. Ora volendosi la velocità del fluido, quando arriva al forame Q, si sostituirà il

valo-

valore di $x = \frac{n \,.\, bg}{m}$, e la formola della velocità ſarà

$$u^2 = \frac{2p\left(\left(a+b\right)\frac{n}{m}\,.\,bg - \left(\frac{m+n}{2n}\right)\frac{n^2}{m^2}\,.\,\overline{bg}^2\right)n^2}{\left(m^2 - n^2\right)\frac{n}{m}\,.gh + mnb + n^2 a}$$; e queſta ſarà

la coſtante velocità, che ſi dovrà conſiderare come la coſtante da aggiungerſi alla formola integrata nella ſeconda parte di queſto problema, che anderemo eſponendo.

Suppongaſi ora uſcita dal forame Q una data quantità di fluido, in modo che l'altezza dell'Acqua nel vaſo ſuperiore, (che al momento in cui la ſuperficie inferiore è arrivata in Q, era $= a - \frac{n}{m}\,.\,bg$) divenga $= a - \frac{n}{m}\,.\,bg - z$. Queſta nuova circoſtanza del fluido riviene ſotto la formola del (§. 20.), ſolo che ſi avverta di ſoſtituire in luogo di x la quantità z, ed in luogo di $\frac{ma - mx + nb}{n}$, la quantità $b + bg$; Fatte queſte ſoſtituzioni e ſuppoſta la lunghezza del tubo anneſſo $= L$, la citata formola ſi cangerà in $\frac{budu}{mdz} \times \left(b^2 \left(a - \frac{n}{m}\,.\,bg - z\right) + \frac{b^2 L}{n}\right) + \frac{b^3 u^2}{2n^2} - \frac{b^3 u^2}{2m^2}$

$+ bp \times \overline{-L - a + \frac{n}{m}\,.\,bg + z} = 0$.

Per integrarla ſi faccia $b = m$, indi ſuppongaſi $a - \frac{n}{m}\,.\,bg - z + m\frac{L}{n} = q$, ſarà $dz = -dq$; e ſoſtituendo e riducendo, avremo la formola $2qudu + \left(\frac{n^2 - m^2}{n^2}\right) u^2 dq$

$+ 2pdq\left(L + q - \frac{mL}{n}\right) = 0$; e moltiplicandola pel fattore $q^{\frac{n^2 - m^2}{n^2} - 1}$,

 accioc-

acciocchè divenga integrabile, ed attualmente paſſando all' integrazione, ſarà

$$q^{\frac{n^2-m^2}{n^2}-1} u^2 = -2\frac{2n^2pL}{n(n+m)} \cdot q^{\frac{n^2-m^2}{n^2}} - \frac{2n^2p}{2n^2-m^2} \cdot q^{\frac{2n^2-m^2}{n^2}} + C^{te};$$

e ſoſtituendo il valore di q ed il valore di $hg = L-b$,

ſarà $\left(a-\frac{n}{m}(L-b)+\frac{Lm}{n}-z\right)^{\frac{n^2-m^2}{n^2}} u^2$

$$= -\frac{2n^2pL}{n(n+m)}\left(a-\frac{n}{m}(L-b)+\frac{Lm}{n}-z\right)^{\frac{n^2-m^2}{n^2}}$$

$$-\frac{2n^2p}{2n^2-m^2}\left(a-\frac{n}{m}(L-b)-\frac{Lm}{n}-z\right)^{\frac{2n^2-m^2}{n^2}}$$ $+C^{te}$. Ora per determinare la coſtante biſogna avvertire, che fatto $z=0$, la velocità u deve eſſere eſpreſſa dalla formola

$$u^2 = \frac{2p\left((a+b)\frac{n}{m}\cdot hg-\left(\frac{m+n}{2n}\right)\frac{n^2}{m^2}\cdot \overline{hg}^2\right)n^2}{(m^2-n^2)\frac{n}{m}\cdot hg+mnb+n^2a}$$, nella quale

ſi deve ſoſtituire $L-b$ in luogo di hg. Dunque aggiungendo la coſtante con tal legge determinata ed ordinando, otterremo finalmente la formola

$$u^2 = \frac{2n^2p\left((a+b)(L-b)\frac{n}{m}-\left(\frac{m+n}{2n}\right)(L-b)^2\frac{n^2}{m^2}\right)}{(m^2-n^2)(L-b)\frac{n}{m}+nmb+n^2a}\left(\frac{a+\left(\frac{m^2-n^2}{nm}\right)L+\frac{nb}{m}}{a+\left(\frac{m^2-n^2}{mn}\right)L+\frac{nb}{m}-z}\right)^{\frac{n^2-m^2}{n^2}}$$

+

$$+\frac{2n^2pL}{m(m+n)}\left\{\left[\frac{a+\left(\frac{m^2-n^2}{mn}\right)L+\frac{nb}{m}}{a+\left(\frac{m^2-n^2}{mn}\right)L+\frac{nb}{m}-z}\right]^{\frac{n^2-m^2}{n^2}}-1\right\}$$

$$+\frac{2n^2p}{2n^2-m^2}\left\{\left(a+\left(\frac{m^2-n^2}{mn}\right)L+\frac{nb}{m}\right)\left\{\frac{a+\left(\frac{m^2-n^2}{mn}\right)L+\frac{nb}{m}}{a+\left(\frac{m^2-n^2}{mn}\right)L+\frac{nb}{m}-z}\right\}^{\frac{n^2-m^2}{n^2}}\right.$$

$$\left.-\left(a+\left(\frac{m^2-n^2}{mn}\right)L+\frac{nb}{m}-z\right)\right\}.$$

Questa è la formola generale per questo complicatissimo caso, e tale è anch' essa; ma non è sperabile di meglio ridurla, volendosi ch' ella esprima tutte le affezioni de' movimenti contemplati nel nostro problema.

§. XLIII.

Applichiamola ad un caso particolare, giacchè non è fattibile di trarne così di volo tutte le conseguenze.

Suppongasi $L = 0$, e parimenti b; e fatte le debite riduzioni, la formola nostra diverrà $u^2 = \frac{2n^2p}{2n^2-m^2}\left\{a\left(\frac{a}{a-z}\right)^{\frac{n^2-m^2}{n^2}}-a+z\right\}$, che è la stessa con quella ritrovata al (§. 30.), purchè si sostituisca x in luogo di $a-z$, e si avverta, che qui u esprime la velocità della superficie, mentre in quello l' esprimeva nel forame.

CAPO IV.

Del tempo ch' impiega il Fluido, che si muove ne' vasi suddetti ad acquistare una data velocità.

Giacchè ai (§.§. 39. 40.) abbiamo ritrovate le formole esprimenti i rapporti delle velocità a' tempi impiegati ed agli spazj, ci sembra ora a proposito di cavare alcune conseguenze intorno ai tempi che spendono i fluidi ad acquistare le massime velocità. Questa ricerca è di grandissima importanza, tanto per rilevare le quantità d' Acqua, che in un dato tempo escono da' fori ne' vasi, quanto per ben dirigere le sperienze, che ci possono instruire riguardo alle dispense. Imperciocchè se le velocità costanti e stabili non s' acquistassero dal fluido, se non dopo un tempo finito e sensibile, molti errori potrebbono rincontrarsi nelle conseguenze, che sonosi ricavate da varj sperimentatori riguardo alle Leggi del moto de' fluidi. Ricercheremo dunque la quantità del tempo, che spende il fluido per un vaso qualunque ad acquistare ad una costante e stabile celerità; oltre il qual tempo le velocità si possano considerare come equabili; ed indi potrà ciascheduno ritrarre la supputazione delle dispense per qualunque sorta di vasi, mantenuti sempre pieni.

§. XLIV.

Per due vasi che vengono mantenuti sempre pieni, o per Acqua infusa lateralmente o senza velocità; o colla velocità della superficie s' è ritrovata al (§. 40.) la formola

$$u = \left\{ \frac{e^{\frac{t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}} - 1}{e^{\frac{t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}} + 1} \right\} \sqrt{\frac{2\,m^2\,p\,a}{m^2 \pm n^2}}$$

. Ora ricerchiamo cosa divenga u, dopo un certo tempo; ex. gr. dopo un minuto secondo. Avendosi dalle sperienze ripetute, che un mobile, in un minuto secondo, accelerato dalla naturale gravità, percorre quindici piedi Parigini; chiamisi questo spazio $= A$, ed avremo per le formole meccaniche $1'' = \sqrt{\frac{2A}{p}}$, (supposta p la gravità naturale). E sostituendo questo valore nella formola in luogo di t (giacchè vogliamo la celerità dopo un minuto secondo), avremo

$$u = \left\{ \frac{e^{\frac{2}{n}\sqrt{\frac{A}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}} - 1}{e^{\frac{2}{n}\sqrt{\frac{A}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}} + 1} \right\} \sqrt{\frac{2\,m^2 pa}{m^2 \pm n^2}}$$

; ed isviluppando la frazione, sarà

$$u = \sqrt{\frac{2\,m^2 pa}{m^2 \pm n^2}} \times \left(1 - \frac{2}{e^{\frac{2}{n}\sqrt{\frac{A}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}}} + \frac{2}{e^{\frac{4}{n}\sqrt{\frac{A}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}}} - \frac{2}{e^{\frac{6}{n}\sqrt{\frac{A}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}}} + \text{ec.} \right)$$

Supponiamo per primo esempio, che il foro n sia imparagonabile con m; e che l' altezza del vase sia $= \frac{15 \text{ pied.}}{4} = \frac{A}{4}$; Sostituendo questo valore, e cancellando quello che si richiede per la prima supposizione, si avrà

$u =$

$$u = \sqrt{2pa} \times \overline{1 - \frac{2}{e^{\frac{4m}{n}}} + \frac{2}{e^{\frac{8m}{n}}} - \frac{2}{e^{\frac{12m}{n}}} + \text{ec.}}$$

Ora essendo $le = 1$; e conseguentemente $e = 2,7$ per lo meno; chi non vede che $e^{\frac{4m}{n}}$ sarà, nell' Ipotesi n picciolissimo, una quantità infinita; e conseguentemente il secondo termine della serie $= 0$; e molto più i susseguenti? Dunque nel caso di n picciolissimo avremo, che la velocità, dopo un minuto secondo di tempo, sarà espressa da $u = \sqrt{2pa}$; cioè quella, che compette al mobile che è caduto dall' altezza a.

Sia ora il forame $n = \frac{m}{100}$. Negligentando n^2 in confronto di m^2 ci potremo ancora servire della formola superiore, la quale, fatte le sostituzioni, si ridurrà ad

$$u = \sqrt{2pa} \times \overline{1 - \frac{2}{e^{400}} + \frac{2}{e^{800}} - \text{ec.}}$$; e sostituendo in luogo di e il valore 2 (minore anche del vero, acciocchè più chiaramente si vegga la conseguenza che vogliamo cavare), sarà

$$u = \sqrt{2pa} \times \overline{1 - \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{799}} - \frac{1}{2^{1199}} + \text{ec.}}$$ Ed essendo $\frac{1}{2^{99}}$ quantità picciolissima, e conseguentemente negligibile, ne verrà che dovremo far conto del solo primo termine rappresentato dall' unità; che però darà $u = \sqrt{2pa}$; cioè ancora la velocità debita all' altezza a. Canone cognito, anzi unico per gli Idrometri, ma che non era ben certo per loro se avesse luogo anche in principio del moto.

Egli

§. XLV.

Egli è ben da considerarsi qui un elemento, che è contenuto dalla nostra formola. Questi è l'altezza viva dell' Acqua, cioè a. La formola superiore fa dipendere il valore della velocità acquistata in un minuto secondo, non solo dal tempo; ma anche dall' altezza a, che entra nell' esponente di e, com' è chiaro dall' inspezione della formola (ch' io scriverò qui con due soli termini, stantecchè gli altri possono negligentarsi a motivo che vanno rapidissimamente diminuendo)

$$u = \sqrt{2pa} \times \overline{1 - 2e^{-\frac{2m}{n}\frac{\sqrt{A}}{a}} + \text{ec.}}$$

Tale elemento può influire nel ritardar od accrescere la velocità, che si va acquistando dal fluido in un tempo determinato; E vaglia il vero, supponendosi l'altezza a del vase quadrupla di quella ch' abbiamo stabilita di sopra; cioè supponendo $a = A$, si dovrà anche supporre, che il tempo impiegato ad acquistare la velocità fissata di sopra, sia doppio, cioè $t = 2''$.

Di fatto acciocchè la formola resti la medesima, bisognerà quadruplicare anche la quantità A, se deve essere $\frac{\sqrt{A}}{a}$ costante; ma lo spazio quadruplo di A richiede doppio tempo a percorrersi; quindi la formola non resterà la medesima, nel caso che il vase abbia quadrupla altezza, se non supposto, che il fluido spenda doppio tempo di quello di prima; cioè $2''$. Dunque se il fluido di un vaso, la cui altezza $= a$, spende un minuto secondo ad acquistare una celerità sensibilmente uguale a $\sqrt{2pa}$; in un vase di altezza $= 4a$ spenderà due seconde di tempo ad acquistare la competente velocità $2\sqrt{2pa}$.

In un vaſe nove volte più alto, per la medeſima cauſa ſpenderà tre ſeconde; ed uno ſedici volte più alto ne ſpenderà quattro, e così degli altri ec. Quindi ſi può ricavare il ſeguente Teorema generale: Se il fluido in un vaſe di quattro piedi d' altezza richiede un ſecondo di tempo ad acquiſtare la maſſima celerità; in una ſerie di vaſi, le cui altezze ſieno in proporzione de' quadrati dei numeri naturali, s' impiegheranno de' tempi ad acquiſtare le maſſime celerità, che creſceranno in ragione de' numeri naturali 1, 2, 3, 4 ec.

§. XLVI.

Dal caſo del forame picciolisſimo paſſiamo a quelli in cui i forami abbiano qualche ſenſibile ragione all' amplitudine del vaſe; e per non perdere il tempo in eſtrazioni di radici, che renderebbono colle molte cifre imbarazzato il calcolo, ſenza riſchiarare la materia; ſupponiamo in primo luogo $m^2 = 3n^2$, pel vaſe che ſi mantiene ſempre pieno dall' Acqua che s' infonde ſenza celerità, e per cui abbiamo detto al (§. 38.), che deeſi far uſo del ſegno $+$. Per queſto caſo la formola citata diviene

$$u = \left(\frac{e^{2t\sqrt{\frac{2p}{a}}} - 1}{e^{2t\sqrt{\frac{2p}{a}}} + 1} \right) \sqrt{\frac{3pa}{2}};$$ ed in luogo di t ſoſtituendo

un ſecondo di tempo, ovvero $\sqrt{\frac{2A}{p}}$, avremo

$$u = \left\{\frac{e^{4\sqrt{\frac{A}{a}}} - 1}{e^{4\sqrt{\frac{A}{a}}} + 1}\right\}\sqrt{\frac{3pa}{2}}$$; e ſupponendo l' altezza del vaſe $a = \frac{A}{4}$, e nel medeſimo tempo ponendo 2 in luogo di e ; ſarà la velocità dopo un minuto ſecondo di tempo,

$$u = \left\{\frac{2^8 - 1}{2^8 + 1}\right\}\sqrt{\frac{3pa}{2}} = \frac{255}{257}\sqrt{\frac{3pa}{2}}.$$ Si avverta, che $\sqrt{\frac{3pa}{2}}$ è la maſſima velocità, che il fluido può acquiſtare in queſto caſo; perciò dopo un ſolo ſecondo di tempo, la velocità, in queſto rapporto di forame e d' amplitudine del vaſe, è minore di ſole due 257^{me} parti della maſſima poſſibile.

§. XLVII.

Eſaminiamo la velocità nel caſo antecedente dopo due ſeconde di tempo; ſia dunque $t = 2''$; ſoſtituendo come ſopra, ſarà $u = \left\{\frac{2^{16} - 1}{2^{16} + 1}\right\}\sqrt{\frac{3pa}{2}} = \frac{65535}{65537}\sqrt{\frac{3pa}{2}}$; cioè, dopo 2'', minore di ſole due 65537^{me} parti della maſſima velocità, in conſeguenza ſi potrà riguardare la velocità del fluido, dopo 2'', come equabile ed $= \sqrt{\frac{3pa}{2}}$.

§. XLVIII.

Se l' altezza del vaſe foſſe quadrupla, ſi richiederebbono due ſeconde di tempo per acquiſtare la velocità $u = \frac{255}{257} \sqrt{\frac{3pa}{2}}$ indicata di ſopra; lo che fa vedere, anche in queſto caſo, doverſi avere riguardo alle altezze de' vaſi, come abbiamo notato al (§. 45.).

§. XLIX.

Sia $m^2 = 8n^2$; ſarà, ſoſtituendo nella formola,

$$u = \left\{\frac{e^{2 \cdot 3 \sqrt{\frac{A}{a}}} - 1}{e^{2 \cdot 3 \sqrt{\frac{A}{a}}} + 1}\right\} \sqrt{\frac{16pa}{9}}$$

; e ſupponendo ancora l' altezza del vaſe $a = \frac{A}{4}$, ed $e = 2$, ſarà

$$u = \left\{\frac{2^{12} - 1}{2^{12} + 1}\right\} \sqrt{\frac{16pa}{9}} = \frac{4095}{4097} \sqrt{\frac{16pa}{9}}$$

; cioè minore della maſſima, che può acquiſtare il fluido in queſto rapporto di forame ed amplitudine, di ſole due 4097^{me} parti.

Dopo due ſeconde, ſarebbe $u = \left\{\frac{2^{24} - 1}{2^{24} + 1}\right\} \sqrt{\frac{16pa}{9}}$ $= \frac{16777215}{16777217} \sqrt{\frac{16pa}{9}}$; cioè minore di due ſole 16777217^{me}

parti

parti della massima velocità; quindi dopo 2" si potrà considerare il fluido come pervenuto alla velocità costante ed equabile $\sqrt{\frac{16pa}{9}}$.

§. L.

Supponendosi $m^2 = 24n^2$; $a = \frac{A}{4}$, e $t = 1''$, sarebbe

$$u = \left\{\frac{2^{20} - 1}{2^{20} + 1}\right\} \sqrt{\frac{48 . pa}{25}} = \frac{1048575}{1048577} \sqrt{\frac{48pa}{25}},$$ che fa

vedere, la velocità divenir sensibilmente equabile, solo dopo un secondo di tempo; imperciocchè non differisce dalla massima che di due 1048577^{me} parti della medesima, quantunque il forame sia poco meno di una quinta parte dell' amplitudine del vase.

Anche in questo caso si richiederebbono 2", acciocchè il fluido giungesse ad acquistare la suddetta velocità equabile, se il vase fosse di quadrupla altezza; 3" se fosse nove volte più alto; e così degli altri.

§. L I.

Dalla nostra formola si possono ritrarre molte altre verità, che per brevità si tralasciano; passiamo ora a considerare la formola applicata al vase, che si mantiene sempre pieno con Acqua che s' infonde colla velocità della superficie, al qual caso soddisfa la medesima formola, preso il segno negativo che affetta n^2; cioè

$$u = \left\{ \frac{e^{\frac{t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2-n^2}} - 1}{e^{\frac{t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2-n^2}} + 1} \right\} \sqrt{\frac{2m^2 pa}{m^2-n^2}}.$$

§. LII.

Sia ora il rapporto del forame all' amplitudine del vaſe eſpreſſo da $m^2 = 5n^2$; ſarà $u = \left\{ \frac{e^{2t\sqrt{\frac{2p}{a}}} - 1}{e^{2t\sqrt{\frac{2p}{a}}} + 1} \right\} \sqrt{\frac{10pa}{4}}$; e volendoſi la celerità dopo un minuto ſecondo di tempo, e per un vaſo di altezza $a = \frac{A}{4}$, ſarà $u = \left\{ \frac{e^8 - 1}{e^8 + 1} \right\} \sqrt{\frac{10pa}{4}}$ $= \left\{ \frac{2^8 - 1}{2^8 + 1} \right\} \sqrt{\frac{10pa}{4}} = \frac{255}{257} \sqrt{\frac{10pa}{4}}$; cioè differiſce ſolo di due 257^{me} parti della maſſima $= \sqrt{\frac{10pa}{4}}$; che è maggiore di quella, che ſi può acquiſtare da un mobile, che è caduto per un' altezza più grande di quella dell' Acqua.

Ma perchè la differenza ritrovata non è tanto inſenſibile da poterſi negligentare, ritroviamo l' eſpreſſione della ſuddetta velocità dopo due ſeconde. Facendo come ſopra le debite ſoſtituzio-

tuzio-

tuzioni, avremo $u = \left\{\frac{2^{16} - 1}{2^{16} + 1}\right\} \sqrt{\frac{10pa}{4}} = \frac{65535}{65537} \sqrt{\frac{10pa}{4}}$; che è minore della massima di sole due 65537^{me} parti della medesima. Quindi, anche in questo caso, la velocità dopo due seconde si potrà considerare come equabile.

§. LIII.

Sia, per ultimo esempio, $m^2 = 26n^2$; $A = 4a$; $t = 1'' = \sqrt{\frac{2A}{p}}$; sarà sostituendo questi valori nella formola,

$$u = \left\{\frac{e^{20} - 1}{e^{20} + 1}\right\} \sqrt{\frac{52pa}{25}} = \left\{\frac{2^{20} - 1}{2^{20} + 1}\right\} \sqrt{\frac{52pa}{25}}$$

$= \frac{1048575}{1048577} \cdot \sqrt{\frac{52pa}{25}}$; velocità che differisce in meno dalla massima $\sqrt{\frac{52pa}{25}}$ di sole due 1048577^{me} parti. Quindi anche in questo caso il fluido si potrà considerare come avente la celerità costante, dopo un solo secondo di tempo dal principio dell' efflusso.

§. LIV.

Le formole de' (§. §. 39. 40.), e le applicazioni testè fatte ci hanno fornite delle conseguenze, per quanto a noi consta, inosservate dagli Scrittori d' Idraulica; e che possono esserci utili negli usi della pratica. Il canone delle velocità debite alle altezze de' fluidi sopra i fori s' era già dimostrato, ma sopra prin-

principj vaghi ed inesatti; e s'era adattato a' fori di qualunque rapporto colle amplitudini, ed a qualunque circostanza nella quale potesse essere il vase, sia che si mantenesse pieno per Acqua senza velocità, o con velocità. Questo non conviene, come abbiamo dimostrato, se non se al caso in cui i fori sieno imparagonabili colle ampiezze de' vasi. Le velocità massime che possono acquistare i fluidi uscenti da' fori poteansi dedurre dalla seconda Teoria; ma non constava ancora la quantità del tempo, che questi spendessero ad acquistare queste massime velocità. Rigorosamente parlando questo tempo è infinito, come si può dimostrare colle nostre formole; ma intendendo per massima velocità quella che tanto si accosta alla velocità determinata dalle formole con rigore geometrico, che la differenza, per la sua picciolezza sia sprezzabile, il tempo suddetto si è da noi determinato picciolissimo. Fissate e stabilite così queste verità credo sarà facil cosa il ritrovare le quantità de' fluidi, che escono in un dato tempo da' fori de' vasi, ne' varj casi, ch' abbiamo dettagliati, ed anche in altri, che potrebbono venire proposti.

Quantunque abbiamo tanto in mano, ne' principj stabiliti delle velocità, per fondare una regola sicura e generale per le dispense di qualunque vase, null' ostante avendo noi fissate delle formole generali, dalle quali più direttamente possiamo ricavare tutte le verità di questo genere, preferiremo questo a quel metodo; come più diretto e più generale.

CA-

CAPO V.

Delle quantità de' Fluidi dispensate da' fori aperti ne' vasi.

Quantunque dalle formole già dimostrate nel Cap. antecedente consti, che le velocità delle Acque uscenti da' fori de' vasi, che hanno anche rapporti finiti alle amplitudini de' medesimi, dopo alcun secondo di tempo, si possano considerare come costanti; e che in conseguenza da esse formole si potessero dedurre le quantità de' fluidi, che escono da' fori, in un determinato tempo; tuttavia stimiamo bene cavare le verità di tanta importanza da principj più diretti.

§. LV.

La formola del (§. 41.) ci dà la lunghezza della colonna di fluido, ch' esce da un dato forame n, pel tempo t, che dura l' efflusso; questa lunghezza è rappresentata da

$$s = \frac{mna}{m^2 \pm n^2} \, log. \left\{ \frac{\left(e^{\frac{t}{n} \sqrt{\frac{2p}{a}} \sqrt{m^2 \pm n^2}} + 1 \right)^2}{4 e^{\frac{t}{n} \sqrt{\frac{2p}{a}} \sqrt{m^2 \pm n^2}}} \right\}.$$ Si osservi che

moltiplicando per $m^2 \pm n^2$, e dividendo per mna; e moltiplicando il primo membro per $le = 1$, e passando dai logaritmi ai numeri, potrà cangiarsi nella seguente

$$e^{s \frac{(m^2 \pm n^2)}{mna}} = \frac{1}{4} \left\{ e^{\frac{t}{n} \sqrt{\frac{2p}{a}} \sqrt{m^2 \pm n^2}} + 2 + \frac{1}{e^{\frac{t}{n} \sqrt{\frac{2p}{a}} \sqrt{m^2 \pm n^2}}} \right\}.$$

E pren-

E prendendo ancora i logaritmi, ſarà $s\frac{(m^2 \pm n^2)}{m n a}$

$$= \log.\left\{ e^{\frac{t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}} + 2 + \frac{1}{e^{\frac{t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}}} \right\} + \log.\frac{1}{4}$$

$$= \log. e^{\frac{t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}} + \log.\left\{ 1 + \frac{2}{e^{\frac{t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}}} + \frac{1}{e^{\frac{2t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}}} \right\}$$

$+ \log.\frac{1}{4}$. Ed eſſendo l' eſponente $\frac{t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}$ aſſai ſenſibile, anche nel ſuppoſto di $t = 1''$; molto più lo ſarà facendo $t = 3''$, $o = 4''$, $o = 6''$, nel qual caſo l' unità, che è ſotto il ſegno logaritmico ſarà aſſai maggiore, e direi quaſi imparagonabile coi due termini ſuſſeguenti

$\frac{2}{e^{\frac{t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}}} + \frac{1}{e^{\frac{2t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}}}$. Quindi ſi potrà ſviluppare il logaritmo $\log.\left\{ 1 + \frac{2}{e^{\frac{t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}}} + \frac{1}{e^{\frac{2t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}}} \right\}$;

e la formola ſarà $s\frac{(m^2 \pm n^2)}{m n a} = \frac{t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2 \pm n^2}$

+

$$+\frac{2}{e^{\frac{t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2\pm n^2}}}-\frac{1}{e^{\frac{2t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2\pm n^2}}}+\frac{2}{3e^{\frac{3t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2\pm n^2}}}+\text{ec.}$$

$+ \log.\frac{1}{4}$. Nella quale tutti i termini ſono piccioliſſimi eccetto i due primi; gli altri ſi potranno conſiderare come le equazioni da aggiungerſi al primo del ſecondo membro, per riſpondere a que' caſi in cui ſi voleſſero le quantità di fluido ſcaricate da' fori in tempi aſſai brevi; e che ſi dovranno conſiderare come nulle, quando i tempi ſieno ſenſibili. La brevità che mi ſono propoſto in queſto Scritto, che è non poco tradita dalla ubertà della materia, mi limiterà a conſiderare ſolamente il primo termine, giacchè quello è il ſolo importante per la pratica. Negletti dunque gli altri termini, la formola ſarà cangiata in $s\frac{(m^2\pm n^2)}{mna}=\frac{t}{n}\sqrt{\frac{2p}{a}}\sqrt{m^2\pm n^2}$; e conſeguentemente

$$sn = tn\sqrt{\frac{2pam^2}{m^2\pm n^2}}.$$

Ed eſſendo sn il volume del fluido uſcito dal foro n nel tempo t, ſarà dunque la diſpenſa del vaſe in ragione compoſta del tempo t, della velocità $\sqrt{\frac{2pam^2}{m^2\pm n^2}}$, e del foro n. Lo che è evidente anche per quanto abbiamo avanzato nel Cap. antecedente.

§. LVI.

Ora riduciamo a quantità cognite le diſpenſe, che ſin a queſto punto non conoſciamo che in aſtratto.

La formola $ns = nt\sqrt{\frac{2pam^2}{m^2\pm n^2}}$ ſi moltiplichi per l' equazione $1'' = \sqrt{\frac{2A}{p}}$, (intendendo per A lo ſpazio percorſo da un grave, accelerato dalle gravità p, in un minuto ſecondo), ſarà $ns\,(1'') = nt\sqrt{\frac{2\,pam^2}{m^2 \pm n^2}}\sqrt{\frac{2A}{p}}$, e riducendo,

$ns = 2n\left(\frac{t}{1''}\right)\sqrt{\frac{aA\ m^2}{m^2 \pm n^2}}$, che ſarà la formola, la quale darà in miſure cognite le diſpenſe di un vaſo qualunque, mantenuto ſempre pieno da Acqua verſata ſuperiormente, o ſenza velocità alcuna, o con quella che ha la ſuperficie.

Riſchiariamo il tutto con alcuni eſempli. Suppongaſi il forame n piccioliſſimo riguardo all' amplitudine del vaſe, ed uguale ad un pollice quadrato; il tempo t ſia uguale ad un minuto primo, ovvero a $60''$, e l' altezza a del vaſe ſia $= \frac{A}{4}$; ſarà ns (che chiameremo D) ſarà dico

$D = 2\left(\frac{60''}{1''}\right)\frac{A}{2}$. 1 *poll. quad.* $= 60 . A .$ 1 *poll. quad.*

$= 60 . 15$ *pied. parig.* $\times$ 1 *poll. quad.* $= 60 . 15 . 12$ *poll. cub.* $=$ 60 volte un ſolido d' Acqua la cui baſe è un pollice quadrato, e l' altezza 15 piedi Parig.; ovvero

$D = 10800$ *poll. cub.* d' Acqua.

§. LVII.

Sia per ſecondo eſempio il vaſe trattenuto pieno dal fluido infuſo ſenza velocità verticale; nel quale l' efluſſo duri un minuto primo; l' altezza $a = \frac{A}{4}$; ed il rapporto dell' amplitudine del vaſe al forame ſia eſpreſſa da $m^2 = 3n^2$; ſarà

$D =$

$D = 2n \cdot \frac{60''}{1''} \cdot \frac{A}{4} \sqrt{3}$; e supposto $n = 1$. *poll. quad.*, avremo

$D = 60 \cdot \frac{A}{2} \times 1{,}73 \times 1$. *poll.quad.* $= 30 \cdot 15$ *pied.* $\times 1$.*poll.quad.* $\times 1{,}73$.

$= 30 \cdot 180$ *poll. cub.* $\times 1{,}73 = 9342$ *poll. cub.* d' Acqua. Nota, che in questo caso $m : n = 2{,}83 : 1$, ovvero, $= 283 : 100$.

Per terzo esempio sia $m^2 = 24n^2$, ed il resto come sopra, sarà $D = 2n \cdot \frac{60''}{1''} \cdot \frac{A}{2.5} \sqrt{24} = n \cdot 60 \cdot 3 \cdot 12$ *poll. cub.* $\sqrt{24}$ $= 60 \cdot 3 \cdot 12 \cdot \sqrt{24} \cdot 1$ *poll. cub.* $= 60 \cdot 3 \cdot 12 \times 4{,}9$ *poll. cub.* $= 10584$ *poll. cub.* d' Acqua, dispensata in un minuto primo.

§. LVIII.

Da questi esempli si può prendere norma per ritrovare le quantità d' Acqua in altri casi a questi analoghi. Per ora passiamo a considerare le dispense de' vasi, ne' quali l' Acqua s' infonde colla velocità uguale a quella della superficie.

La formola che serve al presente uopo è

$$D = 2n \left(\frac{t}{1''}\right) \sqrt{\frac{A a m^2}{m^2 - n^2}} .$$

Per applicarla supponiamo, che il rapporto fra il foro, e l' amplitudine del vaso sia espressa da $m^2 = 3n^2$, come nel primo caso; ed il tempo dell' efflusso sia $t = 60''$; $n = 1$ *poll. quad.*; $a = \frac{A}{4}$. La formola si cangerà in $D = 2 \cdot 60 \cdot \frac{A}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \times 1$ *poll.quad.*

$= 2 \cdot 30 \cdot 15 \cdot 12$ *poll. cub.* $\sqrt{\frac{3}{2}} = 2 \cdot 30 \cdot 15 \cdot 12 \times 1{,}225$ *poll. cub.*

$= 13230$ *poll. cub.* d' Acqua; Dispensa che è maggiore di 3888 *poll. cub.* di quella scaricata dal medesimo vase, quando l' Acqua si versava sopra senza velocità.

§. LIX.

Sia ancora il vase nominato al (§. 57.); cioè il forame sia all' amplitudine determinato dal rapporto $m^2 = 24\,n^2$ (il resto supposto come sopra), sarà $D = 2 . 60 . 15 . 12$ *poll. cub.* $\sqrt{\frac{24}{23}}$ $= 11124$ *poll. cub.* d' Acqua; Cioè soli 540 *poll. cub.* di più, che nel caso in cui l' Acqua infusa non aveva alcuna velocità.

§. LX.

Nel corso di tutta questa Dissertazione non s' è fatto cenno alcuno del restringimento delle vene, che escono da' fori de' vasi. Si è proceduto senza farne parola per non imbarazzare le formole più di quello che lo fossero naturalmente, giacchè si può in un solo (§.) riformarne tutti i risultati. E' dunque da avvertirsi, che la spezie n, la quale da noi s' è adoperata per esprimere l' apertura dei fori, deve, in tutte le formole ritrovate considerarsi come la sezione della vena ristretta, presa in senso orizzontale. Ciò posto ci sarà facile, dato che sia il rapporto della vena al foro del vase, determinare quest' ultimo. Il restringimento della vena suddetta non può rilevarsi per mezzo di alcuna Teoria; quindi gli Autori di questa Scienza hanno creduto di poterlo fissare per mezzo delle sperienze a questo uopo instituite. L' Immortale Cav. Newton determinò il rapporto della vena al forame $= 1 : \sqrt{2} = 100 : 141$ circa. Il Signor Abb. Bossut, dopo varie sperienze eseguite con vasi piccioli e grandi, ne' quali i fluidi erano a varie altezze, ha stabilito fra la vena ed il foro un altro rapporto, che è $= 100 : 150$.

Essendo ancora poco certo un tale rapporto, noi ne assumeremo uno generale ed indeterminato, e sarà $= 1 : f$, che si potrà accomodare a qualunque risultato, che possa in avvenire

in-

insegnar l' esperienza; Quindi avremo $1:f=n:fn$; ed fn esprimerà il forame, quando n esprima la vena. Nelle nostre formole non si cangerà nessun elemento, purchè si avverta, che in luogo di dire $m:n$ il rapporto dell' amplitudine al forame, si dica il rapporto dell' amplitudine alla vena; ed il rapporto dell' amplitudine al foro si esprima per $m:nf$. Se avessimo voluto sin da principio considerare il restringimento della vena, sarebbe stato necessario maneggiare continuamente la spezie f, fuori di necessità; e che sia vero; il forame de' vasi riducendosi alla vena non cade in considerazione alcuna, se non se per determinare quest' ultima; e non ha che fare per altro co' nostri calcoli.

§. LXI.

Non essendoci proposti di fare tutte le applicazioni delle nostre formole alla pratica, ma solo di esporre una Teoria fondata sopra principj sodi; perciò non abbiamo nè anche creduto necessario di mostrare la uniformità delle nostre formole colle sperienze fatte sin ora. Crederemmo d' aver impiegato male il tempo a mostrare questa uniformità; perchè quasi tutte le sperienze essendosi fatte col mezzo di vasi, i cui forami picciolissimi, non avremmo avuto luogo che ripetere quello, che è stato detto le mille e mille volte. E nel caso del forame picciolissimo la nostra Teoria dando il medesimo risultato della Teoria ordinaria, che è confermato dalle sperienze di quasi tutti gli Idrometri sperimentatori, era superfluo dirne di più. Ben volentieri avremmo fatto il confronto delle nostre formole co' risultati di sperienze fatte sopra vasi di ampio forame; ma infelicemente, o queste sono imperfette, o si desiderano ancora. Il Celebre Sig. Domenico Michellotti Professore d' Idraulica di S. M. Sarda ha, per dir vero, nella sua Opera, intitolata *Sperimenti Idraulici* ec., consegnate delle sperienze in grande, ese-

quite

quite con tutto il corredo, e l'attenzione necessaria all'importanza della materia; ma esse non concernono che i casi, in cui il forame sia picciolissimo, riguardo all'amplitudine del vase; e si può dire, che non confermino che una picciolissima parte della nostra Teoria. I maggiori forami de' quali egli si è servito, non hanno all'amplitudine del vase che il rapporto di 1 : 107, come egli si esprime alla pag. 32. della seconda parte della sua Opera.

§. LXII.

Questo celebre Sperimentatore credendo la Teoria ordinaria verissima, perchè confermata dalle sue sperienze, e qualunque altra falsa, attacca una formola (nell' Opera citata pag. 7.ma) del Gran Giovanni Bernoulli, che si uniforma alla celebre prop. 36.ta del Libro de' Principj Matematici del Cav. Newton; e che dà i medesimi risultati di una mia formola, in questa Teoria stabilita. Tale critica mi mette in necessità di rispondere in breve a questo Celeb. Matematico, acciò non si pensi, che i di lui riflessi distruggano la Teoria fissata in questa Dissertazione.

La formola, ch' egli crede di abbattere, è quella posta al (§. 10.) dell' Idraulica del Gran Giovanni Bernoulli così espressa, $u^2 = \sqrt{\dfrac{2\,b^2\,a}{b^2 - m^2}}$, nella quale b esprime l'amplitudine del vase, m il foro, a l'altezza del fluido ed u la velocità. Una formola uguale si può ricavare dalla nostra Teoria al (§. 40.), solo che si cangi b in m; m in n; e che si prenda il segno $-$, obbliando il segno $+$, che serve al caso dell' influente senza velocità.

Il lodato Sig. Michellotti fa un rilievo al Sig. Bernoulli, perchè quest' ultimo dice: che la velocità anderà aumentandosi a misura che m diventerà maggiore; e che nel caso di $m = b$,

la

la velocità diventerà infinita. Dai riflessi che fa il Sig. Michellotti pare, che il Bernoulli abbia ignorato, che il vase dovesse esser mantenuto pieno; quale cosa non è di fatto; perchè questo Matematico nel citato Teorema (§. 10.) dice espressamente: *Sit item tam vas quam tubus Aqua jugiter plenus, ut nimirum tantum Aquæ, eadem velocitate quam habet Aqua in vase, continuo suppeditetur per AE, quantum effluit per lumen BC; dico ec.*

Il Sig. Michellotti non si ferma però qui per abbattere la formola sunnominata; ma dice un poco più sotto. „ Inoltre „ se fosse generalmente vero, che la celerità dell' efflusso uni- „ forme debba sempre corrispondere ad un' altezza $\frac{bba}{b^2-m^2}$, „ dove a sia invariabile, ciò dovrebbe verificarsi anche nel caso „ in cui gli efflussi uniformi per luci disuguali M, m dovessero „ essere uguali; e quindi le celerità reciproche alle medesime „ M, m di sorta che $M\sqrt{\frac{bba}{b^2-M^2}} = m\sqrt{\frac{bba}{b^2-m^2}}$; e quadrando „ $M^2\ (b^2-m^2) = m^2\ (b^2-M^2)$, ed ancora $M^2 : m^2$ „ $= b^2-M^2 : b^2-m^2$; cioè se M sia maggiore o minore di m, „ dovrà essere b^2-M^2 maggiore o minore di b^2-m^2. Dunque „ nella fatta e possibile supposizione scopresi evidentemente im- „ possibile codesta legge della celerità corrispondente ad un' al- „ tezza $\frac{bba}{b^2-m^2}$, dove a sia invariabile “.

Io confesso di non aver mai potuto intendere come si possa supporre legitimamente la differenza de' fori M, m; l' uguale altezza del fluido, e gli scarichi o dispense uguali, restando la medesima l' amplitudine o sezione b del vase; come non ho ancora potuto penetrare la conseguenza ch' egli ricava dalla formola $M^2 : m^2 = b^2-M^2 : b^2-m^2$.

Ho

Ho bene inteſo, che queſta formola ci dà $M = m$, conſeguenza legittima degli ſcarichi uguali, e che ſvela, che queſti non ſi poſſono mai ſupporre uguali, ſe uguali non ſono anche i fori; conſeguenza in fine che avverte chi ha fatta una tale Ipoteſi averla fatta in aria.

§. LXIII.

La natura di queſto Scritto non mi permette di dilungarmi troppo per ribattere tutto ciò che avanza il Sig. Michellotti intorno alle velocità ſtabilite per ogni caſo in ragione ſudduplicata delle altezze vive; però mi reſtringerò a moſtrare, che le ſperienze ch' egli ha fatto per comprovare il ſuo aſſunto non contraddicono punto alle formole noſtre, nè a quella del Bernoullio. E di fatto i maggiori forami ch' egli ha uſati ſono riguardo all' amplitudine del vaſe $= 1 : 107$. Soſtituendo ora queſti valori nella formola citata, ſi avrebbe la velocità

$$u = \sqrt{2a \cdot \frac{\overline{107}^2}{\overline{107}^2 \pm 1}} = \sqrt{2a}\sqrt{1 \pm \frac{1}{\overline{107}^2}}$$

$$= \sqrt{2a} \times \overline{1 \pm \frac{1}{2 \cdot \overline{107}^2}} = \sqrt{2a} \pm \frac{1}{27897}\sqrt{2a}$$; cioè

la velocità, data dalla formola noſtra pei due caſi notati di ſopra, (e che in uno d' eſſi conviene con quella del Bernoulli) maggiore o minore di una 17898ma parte di quella, che ſi avrebbe calcolando le velocità debitamente alle altezze; Differenza tanto picciola, che può isfuggire a qualunque accurato ſperimentatore. Se niente conchiude queſta ſperienza, molto meno conchiuderanno le altre, che ſono ſtate fatte con forami aſſai minori.

Per

§. LXIV.

Per non lasciare alcun dubbio intorno alla falsità del canone ordinario d' Idrodinamica, non dirò già alla Reale Accademia di Mantova (che abbastanza ella mostra d' essere persuasa colla proposizione ch' ha fatto a' Matematici del Problema, che forma il soggetto di questa Dissertazione), ma a quelli, che ancora si ostinassero a volerne sostenere la verità, esporrò qui una dimostrazione di quel canone, forse delle più forti; e v' aggiungerò alcuni riflessi, che mi pajono giusti, e che limitano il canone suddetto a' casi de' forami imparagonabili colle amplitudini o sezioni de' vasi.

DIMOSTRAZIONE.

Sieno due vasi le cui altezze A ed a; forami F ed f. Questi due vasi sieno pieni, e l' acqua abbia già cominciato a fluire; dicansi le velocità V ed v. Le picciole masse che usciranno dai fori F, f, nel tempetto dt, saranno espresse da $FVdt$, $fvdt$; le potenze agenti saranno FA, fa. Ed avendosi dalla Meccanica, che le velocità sono in ragione diretta delle potenze motrici, e nell' inversa delle masse accelerate, saranno in proporzione $V : v = \frac{FA}{FVdt} : \frac{fa}{fvdt}$; Quindi supposta dt comune, avremo $V : v = \frac{A}{V} : \frac{a}{v}$; ed $V^2 : v^2 = A : a$; Formola che dimostra il canone ordinario. Quantunque questa dimostrazione sembri esatta, ed abbastanza generale per estendersi a qualunque vaso, il cui forame abbia quella grandezza che più si vuole; tuttavolta ella è particolarissima e vera soltanto ne' casi, che i fori F, f sieno picciolissimi ed imparagonabili colle amplitudini de' vasi. Ma mi si dirà: che v' ha che fare l' amplitudine del vaso, mentre essa non entra per niente nella formola? Al che io rispondo; che s'ella non v'entra, ciò succede perchè la Dimostrazion superiore non è abbastanza esatta. Ed in fatti le potenze motrici sonosi assunte come proporzionali alle altezze de' fluidi, senza considerare che queste colonne essendo in attual movimento esercitano delle forze, che non si possono assumere come proporzionali alle masse, se non nel caso, che le velocità di esse colonne sieno uguali. Io non credo che alcuno possa rivocare in dubbio questa verità, perciò non m' intertengo a dimostrarla. Ciò supposto, la disuguaglianza de' forami darà una disuguaglianza nelle velocità delle potenze, e questa renderà le potenze sproporzionate alle altezze; dal che si deduce, che in questo caso il canone ordinario sarà stabilito sopra vacillanti princìpj. Per rendere palmare questa verità, supponiamo le altezze de' fluidi uguali, cioè $A = a$; ed il foro $F = 4f$; egli è certo, pel canone ordinario, che le due velocità saranno uguali; e che pel foro F uscirà un corpo d'Acqua quattro volte maggiore di quello che esce da f; per conseguenza la velocità dell' Acqua nel primo vase sarà quadrupla della velocità dell' Acqua nel secondo. Ora io non credo che alcuno vorrà sostenere, che la colonna sovrincombente al forame, la quale si muove con quadrupla celerità, e che è della medesima altezza di quella, che sovrincombe al forame f, debba esercitare uguale forza a quella che esercita quest' ultima. Pure, per mantenere le supposte velocità uguali, dovrebbono essere uguali le forze delle due colonne suddette. La cosa non va del pari quando le amplitudini de' vasi sono imparagonabilmente più grandi de' forami. Allora quantunque le velocità delle due colonne servino la medesima proporzione; tuttavia esse velocità sono così picciole, che si possono considerare le colonne come in quiete, e perciò come esercitanti la loro energia proporzio-

nal-

nalmente alle loro altezze ; cosa che non si può dire de' gran forami, perchè allora, essendo sensibili le velocità, sono molto variate le forze delle colonne.

Per fine di questa Seconda Parte darò la seguente Appendice, che contiene un'altra Teoria del moto de' Fluidi, fondata sul principio della conservazione delle forze vive ; Teoria che non è tanto generale quanto la già esposta; ma che accordasi in quasi tutti i casi con quella ; e che mi pare dottata di singolare eleganza.

APPENDICE.

Teoria del moto de' Fluidi stabilita sopra il principio della conservazione delle forze vive.

Essendosi dimostrato nella Prima Parte, e nella Seconda di questo Scritto il principio della conservazione delle forze vive ne' Fluidi, che scorrono ne' vasi, e che hanno le indicate condizioni ai (§.§.26. par. 1.ma, e 15.p. 2.da) mi parrebbe di mancare al problema proposto dalla Reale Accademia, se così di volo non dassi per modo d'Appendice un breve saggio di una generale Teoria, fondata sopra il già dimostrato principio : Teoria, che lascierò giudicare ad altri, se sia più generale, e più evidente di quella, che sopra il principio dell'ascesa potenziale, e discesa attuale ha stabilito il Celeb. Sig. Daniele Bernoulli ; Teoria in fine che si uniforma quasi interamente a quella ch' abbiamo esposta nella Seconda Parte.

§. LXV.

La forza viva di uno strato di fluido, la cui base y, ed altezza $= dx$, velocità v, sarà espressa da $v^2 y dx$; e la forza viva di tutti gli ſtrati, che riempiono il vaſe, ſi eſprimerà eſattamente da $\int v^2\, y\, dx$; avvertendo che la ſommatoria deve cominciare alla ſuperficie del fluido, e terminare al forame del vaſe.

§. LXVI.

Eſſendo in maggior numero i vaſi comunicanti le cui ſezioni in aſtratto ſieno eſpreſſe da y, y', y'', y''', y'''' ec., le altezze degli ſtrati da dx, dx', dx'', dx''', dx''''; e le velocità da v, v', v'', v''', v'''' ec.; ſarà la forza viva di tutto il fluido che riempie queſti vaſi eſpreſſa dalla formola

$$\int v^2 y dx + \int v'^2 y' dx' + \int v''^2 y'' dx'' + \int v'''^2 y''' dx''' + \int v''''^2 y'''' dx'''' + \text{ec.}$$

Queſta verità mi ſembra abbaſtanza evidente per non trattenermi ora a dimoſtrarla.

§. LXVII.

Se il fluido ſi ſupponeſſe non avere alcun peſo o gravità, caſo veramente fuori di natura, ſi avrebbe per le Leggi del moto di queſto fluido la ſeguente formola,

$$\int v^2 y dx + \int v'^2 y' dx' + \int v''^2 y'' dx'' + \int v'''^2 y''' dx''' + \int v''''^2 y'''' dx'''' + \text{ec.} = C^{te}$$

; nella quale è da avvertirſi, che la coſtante C ſarà una funzione delle ſezioni, delle altezze e delle velocità del fluido in uno ſtato cognito.

§. LXVIII.

Ma così non anderebbe la faccenda in caſo che il fluido foſſe dotato di gravità, come lo è di fatto: allora in luogo di fare l'uguaglianza fra la ſomma delle forze vive già ritrovata, e la coſtante, ſarebbe meſtieri uguagliare la ſomma ſuddetta alla ſomma della coſtante medeſima, e della quantità delle forze vive acquiſtate dagli ſtrati per la loro particolare caduta.

Con-

§. LXIX.

Consideriamo dunque accuratamente le cose. Siccome lo strato qualunque ydx, nel tempetto dt, passa dalla sezione y alla sezione immediatamente prossima $y + dy$, e trascorre a seconda della verticale lo spazietto qdx (uso qdx in luogo del solo dx, per comprendere anche il caso in cui l'asse del vase non è verticale), avremo per l'espressione della forza viva $2\,qdx\,.\,ydx$ acquistata in quella caduta. E ciascheduno strato del fluido del medesimo vase facendo una simile caduta, sarà $\int 2\,qdx\,.\,ydx$ la forza viva acquistata da tutti gli strati nel tempetto dt. Ma dovendosi formare l'uguaglianza fra l'espressione della forza viva del fluido data per la velocità, e quella data per la caduta, che fa il fluido pel tempo t, si renderà necessario di prendere ancora la somma delle forze vive acquistate nelle cadute degli strati ne' varj elementi del tempo. Questa somma sarà $S\!\int 2\,q\,.\,ydx\,.\,dx$. Mi sono servito di un segno sommatorio diverso dal primo per ben distinguere le due somme l'una dall'altra. Potendosi esprimere poi $S\!\int 2\,qydx\,.\,dx$ per $\int\! S\, 2\,qydx\,.\,dx$ senza pericolo d'errare, sarà la somma delle forze vive acquistate per la caduta ne' diversi vasi, espressa da $\int\! S\, 2\,qydx.dx \pm \int\! S\, 2\,q'y'dx'.dx' \pm \int\! S\, 2\,q''y''dx''.dx'' \pm \int\! S\, 2\,q'''y'''dx'''.dx'''$ $\pm$ ec.

§. LXX.

Determinata così l'espressione della forza viva acquistata dal fluido per la caduta, ecco come facilmente si passa alla formola, che contiene tutte le Leggi del moto de' fluidi.

Essendosi dimostrato ai (§.§. 26. 15.) che le forze vive si conservano, sarà necessario, che le forze vive attuali del fluido sieno uguali a quelle ch'egli aveva in uno stato cognito, ed a quelle ancora, che può avere acquistate per la caduta fatta nel

tem-

tempo t. Quindi ecco sopra questo principio la formola seguente

$$\int v^2 y dx + \int v'^2 y' dx' + \int v''^2 y'' dx'' + \int v'''^2 y''' dx''' + \int v''''^2 y'''' dx'''' + \text{ec.} = C^{te}$$
$$+ \int S\, 2qydx.dx \pm \int S\, 2q'y'dx'.dx' \pm \int S\, 2q''y''dx''.dx'' \pm \int S\, 2q'''y'''dx'''.dx''' \pm \text{ec.}$$

E' da avvertirsi, che in questa formola le sommatorie devono prendersi in modo che comincino alla superficie, e termino al fondo del vase.

§. LXXI.

Questa formola diverrà più semplice, se i vasi intermedi non avranno fori particolari che scarichino il fluido. Supponendo che di mano in mano un vase scarichi nel sotto posto tutta la quantità di fluido ricevuta dal superiore, gli strati che passano per le varie sezioni y, y', y'', y''', y'''' ec. saranno uguali di massa tra di loro; e perciò avremo
$ydx = y'dx' = y''dx'' = y'''dx''' = y''''dx'''' =$ ec., per conseguenza ydx si potrà, per le superiori integrazioni, considerare quale costante, e quindi potremo effettuare una delle integrazioni de' termini del secondo membro dell' equazione. Fatta la qual cosa, l' equazione diverrà

$$\int v^2 ydx + \int v'^2 y'dx' + \int v''^2 y''dx'' + \int v'''^2 y'''dx''' + \int v''''^2 y''''dx'''' + \text{ec.} = C^{te}$$
$$+ 2 S\, qx.ydx \pm 2 S\, q'x'.y'dx' \pm 2 S\, q''x''.y''dx'' \pm 2 S\, q'''x'''.y'''dx''' \pm \text{ec.}$$

Formola più semplice della superiore, nella quale resta però ancora un segno sommatorio.

§. LXXII.

Quantunque la formola del (§.) antecedente sia più semplice della prima; con tutto ciò non si può ridurre ad uso a cagione de' segni sommatorj, che contiene, e delle quantità v, v', v'' ec. y, y', y'', y''' ec., delle quali sarebbe mestieri conoscere i rapporti; e di più ancora, perchè i segni sommatorj comprendono tutta l' estensione de' vasi. Non

§. LXXIII.

Non potendosi effettuare le integrazioni, ed v che si ricerca essendo vincolata sotto i segni suddetti, sarà mestieri prendere i differenziali, onde passare dall' equazione che forma l' uguaglianza delle forze vive totali a quella che contiene l' uguaglianza tra gli elementi delle forze vive, acquistati nel tempetto dt.

Per effettuare questa differenziazione senza tema d' errore, si consideri in primo luogo, che il segno sommatorio $\int$ del primo membro risguarda la somma degli strati, e che per conseguenza in questa differenziazione non deve perdersi; in secondo, che non è così del segno S, che affetta il secondo membro, segno che indicando la somma delle forze vive acquistate per la caduta nel tempo t, in questa differenziazione deve sparire; ed in terzo finalmente, che ydx, $y'dx'$, $y''dx''$, $y'''dx'''$, $y''''dx''''$ ec. nel caso presente devonsi considerare come quantità costanti, ciò che abbiamo avvertito anche di sopra.

Fatte tutte queste considerazioni, e su di esse prendendo i differenziali, avremo la seguente formola,

$$\int vdv.\,ydx + \int v'dv'.\,y'dx' + \int v''dv''.\,y''dx'' + \int v'''dv'''.\,y'''dx''' + \text{ec.}$$

$= \overline{qx \pm q'x' \pm q''x'' \pm q'''x''' \pm \text{ec.}} \times ydx$, che è più semplice dell' antecedente, ma che può essere ancora ridotta.

§. LXXIV.

Non sarà mai possibile di separare le indeterminate v, y; v', y'; v'', y''; v''', y''' ec., nè di ritrovare il valore delle velocità se prima non si riducono queste ad una sola. Per ciò fare, si consideri, che nel caso in cui la quantità d' Acqua, che passa pei vasi intermedi, non viene alterata, sarà facile di ridurre la formola ad avere una sola v, od altra quantità che se le voglia sostituire. Per giungere a questa meta si assuma una se-

ſezione cognita, e ſi denomini h; e la velocità con la quale per eſſa paſſa uno ſtrato di fluido, dopo il tempo t dal principio dell' effluſſo, ſi chiami u; avremo per un ovvio Teorema d'Idraulica $vy = hu$; $v'y' = hu$; $v''y'' = hu$; $v'''y''' = hu$; $v''''y'''' = hu$, ec. e $v = \frac{hu}{y}$; $v' = \frac{hu}{y'}$; $v'' = \frac{hu}{y''}$; $v''' = \frac{hu}{y'''}$; $v'''' = \frac{hu}{y''''}$, ec.; e differenziando, $dv = \frac{hydu - hudy}{y^2}$; $dv' = \frac{hy'du - hudy'}{y'^2}$;

$dv'' = \frac{hy''du - hudy''}{y''^2}$; $dv''' = \frac{hy'''du - hudy'''}{y'''^2}$, ec.

E ſoſtituendo nella formola in luogo di v, v', v'', v''', v'''' ec. e di dv, dv', dv'', dv''', dv'''', ec. i ritrovati valori, eſſa ſi cangerà

$$\text{in} \int\left(\frac{h^2yudu\,.\,ydx - h^2u^2dy\,.\,ydx}{y^3}\right) + \int\left(\frac{h^2y'udu\,.\,y'dx' - h^2u^2dy'\,.\,y'dx'}{y'^3}\right)$$

$$+ \int\left(\frac{h^2y''udu\,.\,y''dx'' - h^2u^2dy''\,.\,y''dx''}{y''^3}\right) + \int\left(\frac{h^2y'''udu\,.\,y'''dx''' - h^2u^2dy'''\,.\,y'''dx'''}{y'''^3}\right)$$

$+$ ec. $= (qx \pm q'x' \pm q''x'' \pm q'''x''' \pm$ ec.$)\, ydx$. Supponendo ora ds l' altezza dello ſtrato, che paſſa nel tempetto dt, per la ſezione h, ſarà $hds = y'dx' = y''dx'' = y'''dx'''$, ec.; e ſoſtituendo hds ne' ſecondi termini delle ſommatorie, in luogo di ydx, $y'dx'$, $y''dx''$, ec. avremo

$$+ \int\left(udu\,.\,\frac{h^2dx}{y} - \frac{h^2u^2dy}{y^3}\,.\,hds\right) + \int\left(udu\,.\,\frac{h^2dx'}{y'} - \frac{h^2u^2dy'}{y'^3}\,.\,hds\right)$$

$$+ \int\left(udu\,.\,\frac{h^2dx''}{y''} - \frac{h^2u^2dy''}{y''^3}\,.\,hds\right) + \int\left(udu\,.\,\frac{h^2dx'''}{y'''} - \frac{h^2u^2dy'''}{y'''^3}\,.\,hds\right)$$

$+$ ec. $= \overline{qx \pm q'x' \pm q''x'' \pm q'''x''' \pm \text{ec.}} \times ydx$. E ſiccome hds è coſtante, ſi potrà fare l' integrazione di una parte del primo membro, avvertendo che $\int$ non affetta u, ma ſolo

y,

y, y', y'', y''' ec. dx, dx', dx'', dx''' ec., dunque diſponendo i termini, ed integrando quello che ſi può integrare, ſarà

$$udu\int\frac{b^2dx}{y} + udu\int\frac{b^2dx'}{y'} + udu\int\frac{b^2dx''}{y''} + udu\int\frac{b^2dx'''}{y'''} + \text{ec.}$$

$$b^2u^2 . bdq \times \overline{\frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2y'^2} + \frac{1}{2y''^2} + \frac{1}{2y'''^2} + \text{ec.} + C^{te}}$$

$$= \overline{qx \pm q'x' \pm q''x'' \pm q'''x''' \pm \text{ec.}} \times ydx .$$

Per determinare adequatamente la coſtante C aggiunta, è meſtieri eſaminare quale ne ſia la condizione neceſſaria. Io oſſervo, che, ſe il fluido foſſe di neſſuna maſſa, nulla dovrebbe eſſere la forza viva; dunque in queſto caſo, il fluido non avendo altezza veruna in alcuno de' vaſi, ſarebbono nulli tutti i termini della formola, eccetto

$$b^2u^2 . bdq \times \overline{\frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2y'^2} + \frac{1}{2y''^2} + \frac{1}{2y'''^2} + C^{te}}\text{, nel qual}$$

termine y, y', y'', y''' ec. dovrebbono cangiarſi nelle ſezioni ſuperiori de' vaſi; che eſprimeremo per $'y$ $'y'$, $'y''$, $'y'''$ ec. Quindi per determinare la coſtante faremo

$$b^2u^2 . bdq \times \overline{\frac{1}{2'y^2} + \frac{1}{2'y'^2} + \frac{1}{2'y''^2} + \frac{1}{2'y'''^2} + \text{ec.} + C^{te}} = o,$$

donde ſi ricaverà $C^{te} = -\frac{1}{2'y^2} - \frac{1}{2'y'^2} - \frac{1}{2'y''^2} - \frac{1}{2'y'''^2} - \text{ec.}$

E cangiando nel termine così compoſto

$$- b^2u^2 . bdq \times \overline{\left(\frac{1}{2'y^2} - \frac{1}{2y^2}\right) + \left(\frac{1}{2'y'^2} - \frac{1}{2y'^2}\right) + \left(\frac{1}{2'y''^2} - \frac{1}{2y''^2}\right) + \left(\frac{1}{2'y'''^2} - \frac{1}{2y'''^2}\right) + \text{ec.}}$$

le y, y', y'', y''' ec. nelle $''y$, $''y'$, $''y''$, $''y'''$ ec., acciocchè eſprimano le inferiori ſezioni de' vaſi, ed ordinando, l'equazione,

ſarà $udu \times \overline{\int\frac{b^2dx}{y} + \int\frac{b^2dx'}{y'} + \int\frac{b^2dx''}{y''} + \int\frac{b^2dx'''}{y'''} + \text{ec.}}$

$$- b^2u^2 . bdq \, X \left(\frac{1}{2'y^2} - \frac{1}{2''y^2}\right) + \left(\frac{1}{2'y'^2} - \frac{1}{2''y'^2}\right) + \left(\frac{1}{2'y''^2} - \frac{1}{2''y''^2}\right) + \left(\frac{1}{2'y'''^2} - \frac{1}{2''y'''^2}\right) + \text{ec.}$$

$= (qx \pm q'x' \pm q''x'' \pm q'''x''' \pm \text{ec.})\, ydx$; Queſta formola darà le Leggi del moto per qualunque numero di vaſi aſcendenti o diſcendenti; ed è la ſteſſa di quella ch' abbiamo ritrovata anche al (§. 13.), fondata ſopra altri principj.

§. LXXV.

Col mezzo di queſta formola ſi poſſono ſciogliere tutti i problemi propoſti e ſciolti nell' altra Teoria. E' però da avvertirſi, che non vale per quelli, in cui le ſezioni de' vaſi non ſieno continue, come anche ne' caſi in cui i vaſi ſono mantenuti pieni d' Acqua, che cade con velocità diverſa da quella della ſuperficie. Abbiamo già notato di ſopra, che in queſti caſi le forze vive non ſi conſervano, e che applicando ad eſſi queſto principio ſono caduti in errore il Celebre Daniele Bernoulli, ed il ſuo Commentatore l' eſimio P. Scarella.

Terminiamo oramai queſta Seconda Parte, che la ricchezza dell' argomento ha reſa troppo lunga; e che lo ſarebbe anche di più, ſe aveſſimo colle applicazioni voluto moſtrare la generalità delle formole ſtabilite. Io non ſo bene ſe ſia per ſoddisfare alle mire della Reale Accademia riguardo alla Prima Parte del Problema propoſto; cioè, ſe contenga *la vera Teoria delle Acque uſcenti da' fori de' vaſi*; qualunque ne poſſa eſſere il ſucceſſo, io ne ſarò contento, ſolo penſando che la preſente occaſione mi ha eccitato a ſcrivere ſopra un argomento di tanta importanza. Paſſiamo ora alla Terza Parte, e procuriamo d' indagare, ſe le Teorie ritrovate poſſano applicarſi a ſtabilire le Leggi del moto delle Acque correnti negli alvei naturali.

PAR-

PARTE TERZA.

§. LXXVI.

STabilite, come abbiamo fatto di sopra, le Leggi del moto delle Acque uscenti da' fori de' vasi, ci resta la parte più difficile, e la più importante per l'utilità, ch' ella può apportare. Per una sfortunata combinazione, le cose le più utili sono per l'ordinario le più circondate da tali e tante difficoltà, che ci fanno perdere la speranza di giammai arrivare a penetrarle. Non v' ha dubbio, che una buona Teoria delle Leggi del moto delle Acque correnti ne' vasi naturali non si desideri ancora dagli intendenti; e non sia per esser utilissima quando venga scoperta. Castelli, Galileo, Viviani, Grandi, Guglielmini sono nomi rispettabilissimi per coloro che studiano la Scienza delle Acque: tuttavia pensando a sistemi prodotti, ed adottati sin ora, risguardanti il presente argomento, non dubito di rivocare in dubbio le Leggi tutte sin ad ora stabilite. Per dubitare scientemente di queste Teorie, mi sembra che basti considerarle ne' loro fondamenti. Le velocità de' fili d'Acqua ne' canali o fiumi, si calcolano da quasi tutti gli Architetti d'Acque, sulla scorta de' testè citati Autori, come debite alle altezze vive. Questa Teoria ha per unico fondamento il canone adottato nelle Acque, ch' escono da' fori de' vasi; canone da noi limitato a' casi in cui i fori sieno picciolissimi. Se le mie dimostrazioni non sono paralogismi, certamente nelle aperture che hanno qualche sensibile grandezza rispetto alle amplitudini, questo canone non si può usare senza tema d'errore. Molto più dobbiamo temere al caso che adoperarlo si voglia per fissare le velocità de' fluidi, che scorrono negli alvei; impercioccciocchè allora il canone suddetto diviene ancora più difettoso, a motivo, che in tale circostanza viene adattato assai impropriamente. Di fatto anche supposto che si verificasse ne' fori orizzontali, ne viene egli per conseguenza che debba verificarsi ne' verticali? E dovrà egli essere sodo e stabile quand' anche i fori abbiano grandezza sensibile? Egli è però vero, che quando i fori verticali sono picciolissimi può aver luogo la verità del canone suddetto, ma questa condizione fa, ch' egli non abbia uso alcuno rapporto alle Acque correnti negli alvei naturali. Tralascio di notare, che i fili d' Acqua pei fori verticali uscendo con diverse celerità si accelerano, e si ritardano a vicenda, a cagione degli fregamenti, e dell' addesione delle particelle. Questi non sono tutti i riflessi Teoretici, che possono infirmare l' ordinaria Teoria del corso delle Acque, molti altri se ne potrebbon fare, ma questi soli mi pajono bastevoli a mettere in ragionevole dubbiezza chiunque voglia, anche leggermente abbadarvi. La pratica, e l' osservazione, che deve servirci di maestra ne' soggetti complicati, mi fornirebbe de' fatti per confermare questi dubbj. Le sperienze fatte in quest' ultimi tempi dal Sig. Gennetè, col mezzo del suo canale artefatto, credute anche solo per metà, verrebbono in conferma di quanto abbiamo avanzato.

§. LXXVII.

Ma non faremo noi altro che distruggere senza riedificare? Io non lo vorrei certamente. Temo però, e non senza fondamento, che sia difficile il ritrovare un canone generale, che spieghi tutti i fenomeni delle Acque correnti. Non mancherò di cavare il miglior partito che mi sarà possibile dalle verità esposte nelle due parti anteriori; ed in seguito vedremo quali ne saranno le conseguenze ed i risultati.

Ma

Ma prima d'accingersi a trattare del corso delle Acque ne' canali naturali, rendesi necessario il fare parola del moto delle Acque, che escono pei fori laterali de' vasi. Questa ricerca, che sembra appartenere alla parte precedente, è stata da me a bello studio trasportata in questa; perchè essendo più immediata possiamo meglio ricavarne delle conseguenze utili al presente uopo.

§. LXXVIII.

Il moto de' fluidi, che escono da' fori verticali o laterali de' vasi porta conseco delle difficoltà, che non sono così facilmente superabili, come lo furono quelle del moto pei fori orizzontali. In questi le Acque escono per strati paralelli all' orizzonte; ciascheduna particella è dottata della medesima celerità verticale. Ne' forami laterali pel contrario, escono degli strati verticali; ma le particelle componenti questi strati variano per mille leggi nelle loro velocità. Qualora i fori abbiano picciole altezze verticali, è facile cosa stabilire le vere Leggi del moto, perchè stante le picciole altezze de' fori, possiamo considerare come costanti le velocità delle particelle tutte componenti un medesimo strato; ed in questo caso, per determinare le velocità costanti e massime ha luogo la formola $u = \sqrt{\frac{2m^2pa}{m^2 \pm n^2}}$, tanto pei vasi mantenuti pieni da Acqua, lateralmente infusa, quanto per quelli, in cui l'Acqua supponesi infusa colla velocità della superficie.

§. LXXIX.

Ma non sempre i forami verticali, sono di altezza sprezzabile, in confronto dell' altezza de' fluidi sopra i fori stessi. Il più

più delle volte i fori verticali hanno una sensibile altezza; e quindi le nostre formole non sono interamente applicabili a questi casi.

Se nel caso de' fori picciolissimi si possono considerare gli strati orizzontali che riempiono il vase, come tutti discendenti con moto paralello all'orizzonte, come vuole la Teoria superiore; in quello de' forami di qualche altezza non si possono senza tema d' errore supporre gli strati muoversi solo orizzontalmente; ma piuttosto si devono considerare come inclinantisi verso il foro. Se ci fosse possibile di conoscere il grado d' inclinazione, e che questo si rilevasse costante in tutti, forse avremmo qualche dato di più per risolvere il problema; ma v' ha tutta l' apparenza, che nè il grado d' inclinazione si possa rilevare, nè la costanza di questa abbia luogo. Dunque le Ipotesi fatte nella Teoria superiore, che in que' casi erano conformi alla natura, nel presente non hanno verun luogo.

§. LXXX.

Dai riflessi ch' abbiamo fatti, pare, che il problema non possa essere sciolto con qualche esattezza, se non per mezzo della prima generalissima Teoria: poichè in essa non s' è fatta Ipotesi di sorte alcuna riguardo agli strati, e non si è fondata che sul principio dell' equilibrio. Ma se ci faremo risovvenire delle tante condizioni necessarie e requisite acciocchè per mezzo di quella sciogliere si possa il problema, non tarderemo ad accorgerci, che ella non ci può essere di alcun sussidio. Riducendoci bene alla memoria ciò che si è detto a' (§. §. 24. 25. par. pr.) vedremo, che il caso presente è anche più complicato e difficile di quello che in allora ci eravamo proposti. In così difficili circostanze ove si volgeremo noi per avere una qualche soluzioluzione del propoſto problema ? Per ora io crederei, che altro mezzo non vi ſia che ricorrere all'approſſimazione, giacchè non è poſſibile, co' lumi ch' abbiamo, di ritrovare l' eſattezza.

§. LXXXI.

Gli Autori, che hanno ſciolto queſto problema col canone ordinario delle velocità debite alle altezze vive del fluido, conſiderano i fori verticali come compoſti da tanti fori picciolisſimi ed orizzontali ſu cui il fluido abbia varie altezze vive; e quindi ricavano la formola della velocità media; e non hanno verun riguardo a' varj caſi dell' Acqua verſata o con velocità o ſenza, nè all' amplitudine de' forami; perciò hanno rinchiuſi tutti queſti caſi ſotto la medeſima formola, ſenza abbadare, che la diverſità delle circoſtanze doveva produrre diverſità ne' riſultati. La ſoluzione, che noi daremo del medeſimo problema, ſe non potrà denominarſi affatto eſatta e ſcrupoloſa, non mancherà almeno di contemplare e diſtinguere queſti caſi diverſi; e con ciò di accoſtarſi più alla natura.

§. LXXXII.

Sieno da ritrovarſi le Leggi del moto di un fluido, che ſi ſcarica pel forame laterale di un vaſe. (*Fig. 6.*)

Per maggior facilità e chiarezza, ſia queſto forame di figura rettangolare la cui baſe b, ed altezza $HL = b$. L' Acqua abbia ſopra l' eſtremità del foro l' altezza $= A$. Queſto vaſe ſia mantenuto pieno da Acqua, che s' infonde o ſenza velocità, o con velocità uguale a quella della ſuperficie diſcendente.

Avendoſi dai numeri del Cap. IV. Parte II., che la velocità converge celeremente alla maſſima, che è eſpreſſa da

$u = \sqrt{\frac{2m^2pa}{m^2 \pm n^2}}$; ne verrà, che la ſcala delle velocità dei varj fili d' Acqua, che ſi ſcaricano dal forame, ſi potrà conſiderare ſenſibilmente eſpreſſa dalla parabola AGK, il cui vertice comincia al pelo dell' Acqua ; e l' altezza media dell' Acqua ſopra il foro ſarà $= \frac{4}{9}\left(\frac{AL\sqrt{AL} - AH\sqrt{AH}}{HL}\right)^2$. Ora ſupponendo il forame HL orizzontale, avremo ridotto queſto caſo alla noſtra formola $u^2 = \sqrt{\frac{2m^2pa}{m^2 \pm n^2}}$, nella quale ſoſtituiremo in luogo di a il valore or' ora determinato. Lo che fatto ſi otterrà

$$u = \sqrt{\frac{2m^2p}{m^2 \pm n^2}\left(\frac{4}{9}\left(\frac{AL\sqrt{AL} - AH\sqrt{AH}}{HL}\right)^2\right.}$$

$= \frac{2}{3}\left(\frac{AL\sqrt{AL} - AH\sqrt{AH}}{HL}\right)\sqrt{\frac{2m^2p}{m^2 \pm n^2}}$; e ſoſtituendo i valori di AH, AL, HL, ſarà $u = \frac{2}{3}\left(\frac{\overline{A+b}\sqrt{A+b} - A\sqrt{A}}{b}\right)\sqrt{\frac{2m^2p}{m^2 \pm n^2}}$; Formola che ſervirà a' tre caſi ſoprannominati. Queſta ſi cangia ancora in $u = \frac{2}{3}\left(\frac{(A+b)\sqrt{A+b} - A\sqrt{A}}{b}\right)\sqrt{\frac{2m^2p}{m^2 \pm b^2b^2}}$ per eſſere $n = bb$.

Nel ſuppoſto del forame infiniteſimo, ſia l' Acqua infuſa con velocità o ſenza, avremo ſempre la velocità media $u = \frac{2}{3}\left(\frac{(A+b)\sqrt{A+b} - A\sqrt{A}}{b}\right)\sqrt{2} = \sqrt{2A}$, quando ſia b picciolisſimo.

§. LXXXIII.

Se A ſarà $= o$, avremo $u = \frac{2}{3}\sqrt{b}\sqrt{\frac{2m^2p}{m^2 \pm b^2b^2}}$; e ſe in queſto caſo l' Acqua foſſe infuſa colla velocità della corrente, ed il forame bb foſſe $= \frac{m}{8}$; ſarebbe $u = \frac{2}{3}\sqrt{2.\frac{64\,bp}{63}}$; ſe l'Acqua poi foſſe infuſa ſenza velocità, ſarebbe $u = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{128}{65}bp}$. Abbandono altri eſempli, che ſi ponno fare a piacere, in grazia della brevità e della premura.

§. LXXXIV.

Ecco, ſe non perfezionata, almeno migliorata di molto la Teoria delle Acque uſcenti da' fori laterali; Teoria di ſomma importanza, perchè applicabile al corſo delle Acque negli alvei naturali. Reſta ora, che diamo un ſaggio della ſua applicazione. Per farlo colla maggior brevità lo daremo in maniera teoretica.

§. LXXXV.

Teorema.

Se dal medeſimo ſtagno o conſerva ſi deriveranno due canali d' Acqua, le cui ſoglie ſieno a livello, e la larghezza del primo canale ſia $= b$, quella del ſecondo b', ſaranno le velocità medie dell' Acqua derivata $= \frac{1}{\sqrt{m^2 \pm b^2b^2}} : \frac{1}{\sqrt{m^2 \pm b^2b'^2}}$.

Corollario.

Quindi ſe le aperture o ſezioni de' canali ſaranno picciolisſime riguardo alle ſezioni dello ſtagno o conſerva; le velocità medie ſaranno uguali.

§. LXXXVI.

Teorema.

Se da due ſtagni o conſerve diverſe ſi deriveranno due canali orizzontali, od ugualmente inclinati; e ſieno le ſezioni degli ſtagni m, m'; le altezzze dell' Acqua ſulle ſoglie de' canali b, b'; le larghezze b, b'; ſaranno le velocità medie

$$= \sqrt{\frac{2\,m^2\,b}{m^2 \pm b^2 b^2}} : \sqrt{\frac{2\,m'^2\,b'}{m'^2 \pm b'^2 b'^2}} .$$

§. LXXXVII.

Corollario.

Se nel primo ſtagno l' Acqua ſarà naſcente dal fondo, e nell' altro ſarà introdotta colla velocità della ſezione dello ſtagno; ſaranno le velocità medie $= \sqrt{\frac{2\,m^2\,b}{m^2 + b^2\,b^2}} : \sqrt{\frac{2\,m'^2\,b'}{m'^2 - b'^2 b'^2}}$.
E' da avvertirſi, che in queſta formola ſi ſuppongono le amplitudini degli ſtagni in ragione finita colle ſezioni de' canali di derivazione.

Corollario.

Se poi il primo ſtagno ſarà infinito, relativamente alla ſezione del ſuo canale di derivazione, ſaranno le velocità medie

$$= \sqrt{2\,b} : \sqrt{\frac{2\,m'^2\,b'}{m'^2 - b'^2 b'^2}} .$$

§. LXXXVIII.

Mi parrebbe un allungare ſenza propoſito queſto Scritto, che ſi è tenuto più riſtretto poſſibile nelle altre Teorie, ſe voleſſi cavare tutte le conſeguenze di queſte formole. Ci baſti averne indicate alcune, che potranno ſervire d' eſempli ad altre.

Si avverta però, ch' io non le do come matematicamente certe. Io lo avverto ancora per l' amore della verità, quantunque abbia in altri luoghi esposti de' ragionevoli dubbj, che possono fare la mia apologia, in caso che le mie formole venissero attaccate. Tuttavia se queste formole non hanno quel grado di certezza, che si richiederebbe, non mancano però di accostarsi più alla verità, di quelle che cavano gli Scrittori d' Idraulica dal canone delle velocità debite alle altezze vive de' fluidi.

Sopra questi principj potremmo stabilire le Leggi del moto de' fluidi, che si muovono pei canali derivati da conserve o stagni; e ne caveremmo delle formole analoghe a quelle degli altri Autori, ma più regolate e più adattabili a' casi di pratica; e più atte a spiegare i fenomeni delle Acque correnti.

Ma siccome il problema per questo mezzo sarebbe, per così dire, limitatò nella sua soluzione, perciò stimo meglio fare un ultimo tentativo. Egli è manifesto, che il moto dell' Acque negli alvei naturali è complicato oltre misura; e si può dire senz' esitanza, che il problema del moto de' fluidi pei fori orizzontali de' vasi sia, rispetto a quello, come semplicissimo. Di fatto nelle Acque correnti ciascheduno strato non solo, ma ciaschedun punto del medesimo strato è dottato di varia celerità. Gli strati variano di grossessa, di curvatura, e di forze; tutti agiscono sopra uno, e questo sopra di tutti; perciò se è possibile venire a capo della soluzione esatta di questo genere di problemi, non v' ha luogo di sperarlo senza il sussidio di una sublime Teoria, che riduca ad un solo principio tutte le varietà ch' abbiamo fatto osservare or' ora. A quest' effetto credendo di poter giungere alla desiderata soluzione ho esposta questa sublime Teoria nella Parte Prima; ben sicuro, che l' Idraulica ordinaria e limitata, per la natura delle Ipotesi di cui ella abbisobiſogna, non poteſſe comprendere ſotto di ſe un sì gran numero d'elementi, in apparenza tanto diſparati. Alcuni riſultati di quella Teoria ſono conſegnati negli ultimi numeri della parte citata; dopo di eſſi abbiamo fiſſate anche le condizioni, che, a dir vero, altro non hanno fatto che levarci la ſperanza di riuſcire nella ſoluzione del problema intorno al moto de' fluidi ne' vaſi, concepito nel ſenſo della natura. Non ſo per ora, ſe ſia ugualmente diſperato il problema del moto delle Acque correnti negli alvei naturali: per chiarircene applicheremo la Teoria della Prima Parte anche a queſto caſo; ſe queſta non rieſce, io do per diſperata la ſoluzione, e penſo, ch'egli poſſa ſervire di limite alle forze, non dirò già dell'analiſi poſſibile, ma almeno dell'analiſi ſin ad ora conoſciuta.

§. LXXXIX.

Sia *DVKHRN* (*Fig.* 7.) un canale le cui ſponde paralelle, ed abbia il fondo *VKH* di figura data. Scorra per eſſo del fluido; e per maggior facilità della ſoluzione, ſia queſti giunto ad uno ſtato di permanenza. Sia *GL* un'orizzontale. Chiamiſi $GQ = y = PM$, $GP = x$; e ſia *CMT* la curva deſcritta dalla particella *C*. La velocità verticale della particella *M* chiamiſi P, quella orizzontale ed a ſeconda di $PM, = Q$. Avremo $Mr : rm = P : Q = -dx : dy$; e perciò $Pdy + Qdx = o$ eſprimerà l'equazione della curva.

Ora per lo ſtato permanente del fluido, P e Q ſaranno funzioni delle ſole x ed y; e perciò avremo $Pdx + Qdy$, e $Qdx - Pdy$ due differenziali completi, come al (§. 13. par. pr.) e pei (§. §. 16. 19., e 21.) avremo ancora

$$P = \frac{funz.\left(x + \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) + funz.\left(x - \frac{y}{\sqrt{-1}}\right)}{2}\text{; e}$$

$Q =$

$$Q = \frac{funz.\left(x+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - funz.\left(x-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}$$; e sostituendo questi valori nell' equazione $Pdy + Qdx = o$ ed integrando, avremo $'funz.\left(x+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - 'funz.\left(x-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) = C^{te}$, in cui si avverta, che la natura della $'funz.$ è tale che $d\,'funz.\, X$ è $= d\,X\, funz.\, X$.

§. XC.

La particella K che rade il fondo dell' alveo deve descrivere la sua particolar curva. Questa sarà espressa dalle funzioni $'funz.\left(x'+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - 'funz.\left(x'-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) = C^{te}$, nelle quali x' indica QK; e siccome è necessario ch' ella continui a radere il fondo del canale; perciò ne verrà che anche la curvatura del fondo dovrà essere espressa da un' equazione della forma delle funzioni suddette. In caso diverso il problema non potrà essere isciolto.

Ecco la prima necessaria condizione, che limita la possibilità della soluzione a que' soli casi, in cui la curva del fondo è espressa da un' equazione dottata della forma esposta di sopra.

§. XCI.

Di più ancora: Esprimendo la formola $'funz.\left(x+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - 'funz.\left(x-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) = C^{te}$ in generale la natura delle curve descritte, ne viene di conseguenza; che sostituendo z in luogo di y (esprimendo z la distanza della superficie N dalla linea GL), la formola si cangerà in $'funz.\left(z+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - 'funz.\left(z-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) = C^{te}$, che dovrà esprimere l'equazione della curva della superficie *DNR*. Ma *DNR* essendo la superficie dell'Acqua nello stato permanente, dovrà esser tale, che la forza composta della particella *N*, cioè la composta dalla forza orizzontale, e dalla verticale, riesca perpendicolare alla curva dellla superficie nel punto *N*. Ed essendo $G + \frac{dP}{dt}$ la forza verticale, $+ \frac{dQ}{dt}$ l' orizzontale, dovrà essere $G + \frac{dP}{dt} : + \frac{dQ}{dt} = dy : + dz$; e $Gdz = \frac{dQdy}{dt} + \frac{dPdz}{dt}$; e sostituendo P in luogo di $\frac{dz}{dt}$, e Q in luogo di $\frac{dy}{dt}$, la formola si cangerà in $Gdz = PdP + QdQ$, che integrata sarà $A + 2Gz = P^2 + Q^2$. Questa è l'equazione alla curva della superficie, data per le velocità P e Q, e cavata dal principio della perpendicolarità della forza media alla superficie del fluido; e perciò è anch' essa legittima, come quella espressa da $'funz.\left(z + \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) + 'funz.\left(z - \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) = C^{te}$, a cui deve assolutamente uniformarsi, se il problema è solubile per mezzo de' principj del calcolo cognito. Si osservi che la medesima equazione ci fa vedere, che la particella di fluido discende lungo la superficie, o curva acquea, come farebbe sopra una curva solida.

§. XCII.

Ecco dunque un' altra condizione senza la quale inutile sarebbe tentare la soluzion del problema. Per esprimere in netto questa condizione ritrovinsi le celerità, verticale ed orizzontale del punto *N* posto alla superficie, che saranno, come al (§. 89.)

$P =$

$$P = \frac{\text{funz.}\left(z+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) + \text{funz.}\left(z-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)}{2},$$

$$Q = \frac{\text{funz.}\left(z+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - \text{funz.}\left(z-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}};$$ e sostituite queste nell' equazione $A + 2Gz = P^2 + Q^2$, la cangeranno in

$$A + 2Gz = \left(\frac{\text{funz.}\left(z+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) + \text{funz.}\left(z-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)}{2}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{\text{funz.}\left(z+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - \text{funz.}\left(z-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}\right)^2,$$ la quale dovrà esprimere la medesima curva, che ci dà l' equazione

$$'\text{funz.}\left(z+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - '\text{funz.}\left(z-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) = C^{te}.$$

§. XCIII.

Riducendo la prima equazione si ricaverà

$\text{funz.}\left(z+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) \times \text{funz.}\left(z-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - 2Gz - A = 0$; quindi tutte le volte che questa non è riducibile precisamente a

$'\text{funz.}\left(z+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - '\text{funz.}\left(z-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right) - C^{te} = 0$, il problema è insolubile, ed è vano ogni sforzo, sin che non si scoprono de' nuovi principj di calcolo adattati a queste ricerche.

§. XCIV.

Mi sembra inutile ora il proseguire questa intralciata materia più a lungo: perciò do fine a queste mie ricerche, e conchiudo, che

che pochiſſimi ſono i caſi a' quali la Teoria delle Acque uſcenti da' fori aperti ne' vaſi ſi poſſa applicare al moto delle Acque negli alvei naturali. Queſta riſpoſta negativa ſembrerà forſe a taluno poco appagante; rifletta però queſti, che avendo io col mezzo di alcuni principj di una irrefragabile Teoria moſtrati i limiti di queſta Scienza ho formata con ciò la mia difeſa. E di fatto conceſſe che ſieno le mie dimoſtrazioni, coſa poteva fare un Matematico per riſpondere all' ultima parte del problema propoſto dalla REALE ACCADEMIA? Se il problema è acceſſibile, iſcioglierlo; s' egli non lo è, per la mancanza degli amminicoli neceſſarj, moſtrare ch' egli non potrà mai eſſere iſciolto. Talvolta le cognizioni negative apportano vantaggi uguali a quelli che ſi ricavano dalle poſitive; ſe non fanno altro, ci riſparmiano molti inutili sforzi e ci arricchiſcono di quel tempo, che ſarebbeſi impiegato ſenza pro nello indagare delle coſe relativamente impoſſibili, ed avvertono chi ſtudia di battere altre ſtrade per conſeguire l' intento. Nel caſo noſtro la dimoſtrazione dell' impoſſibilità di ottenere una completa ſoluzion del problema ci obbligherà, perfino che l' *Analiſi* non abbia fatti de' nuovi progreſſi, a ricorrere all' eſperienza. Queſta ſola infatti ci può ſvelare i miſteri naſcoſti della Natura, e condurci gradatamente a conoſcere queſta gran madre univerſale, almeno nelle coſe che ſono all' uomo le più neceſſarie. Mi pare oramai tempo di dar fine a queſto mio imperfetto Scritto: s' egli contiene una ſola verità nuova ed utile, io crederò di non avere in tutto perduto il mio tempo nel comporlo.

IL FINE.

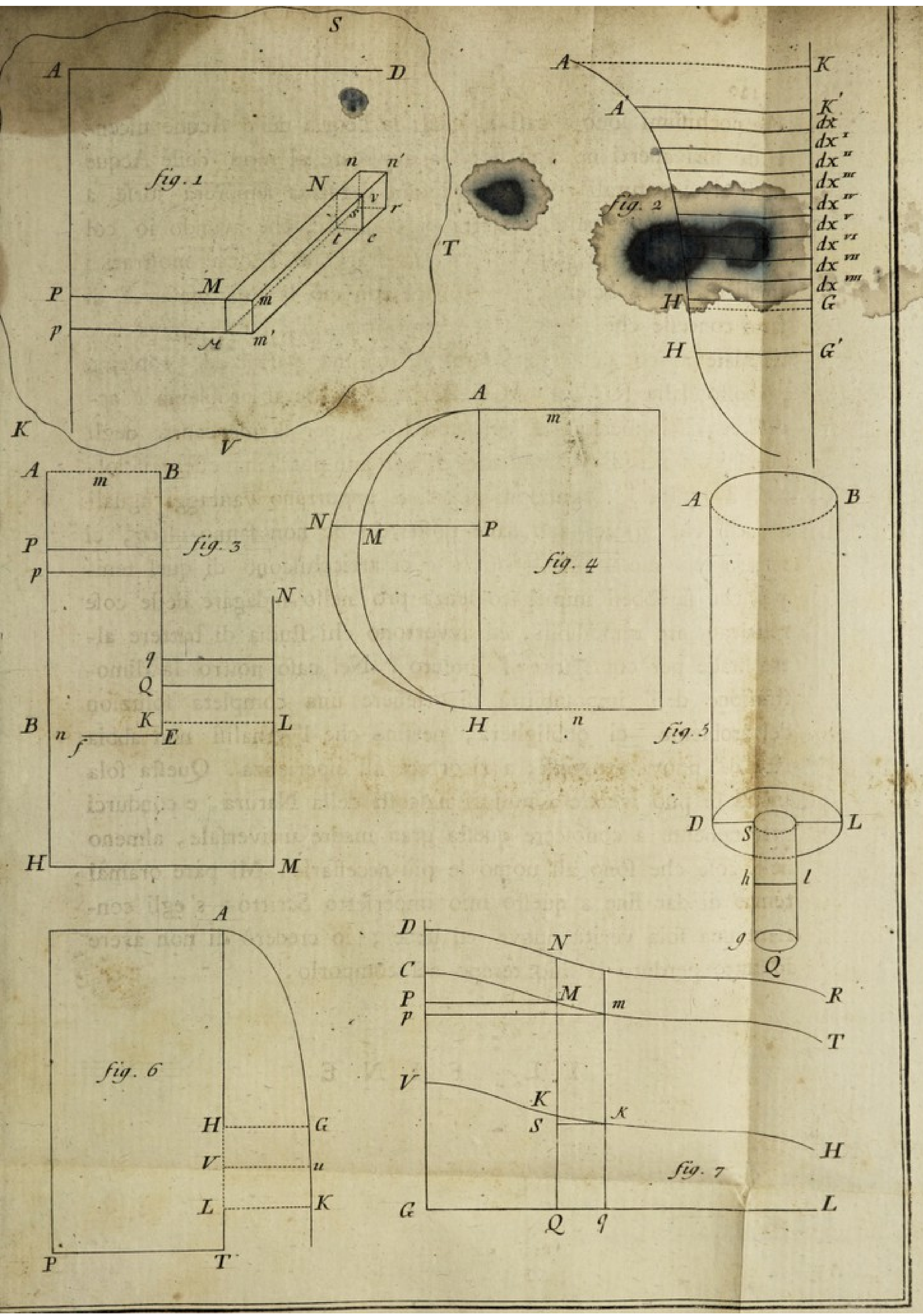

fig. 1
fig. 2
fig. 3
fig. 4
fig. 5
fig. 6
fig. 7