[illegible]

# ASTRONOMIE NAUTIQUE:

OU

# *E'LE'MENS D'ASTRONOMIE,*

Tant pour un Obſervatoire fixe, que pour un Obſervatoire mobile.

*Par M.* DE *MAUPERTUIS.*

Præceps, aerii ſpecula de montis, in undas
Deferar.

*Virgil. Eclog.* VIII.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCXLIII.

# PRE'FACE.

TOut l'Art du Navigateur consiste à pouvoir connoître à chaque instant le point de la surface de la Mer où il est ; & l'on peut réduire sous deux genres tous les moyens qu'il a pour cela : on peut appeller *Moyens Géographiques*, ceux qui consistent dans la direction & la longueur de la route : les autres, que j'appellerai *Moyens Astronomiques*, comprennent tous ceux qu'on peut tirer de l'observation des Astres.

Malgré cette division, on ne doit pas regarder ces différens moyens comme absolument indépendans les uns des autres. Ceux que l'Astronomie fournit, dépendent à la vérité fort peu des moyens géographiques: mais ces derniers ne ſçauroient atteindre à leur perfection ſans le ſecours de l'Aſtronomie. La direction de la route indiquée par la Bouſſole, n'eſt pas toûjours la véritable direction: cette Aiguille admirable qui montre le Nord au Navigateur, ne le lui montre pas conſtamment ni exactement: l'obſervation des Aſtres le fait appercevoir de ſes variations, & le met à portée d'y remédier. Dès qu'il a perdu de vûe les Terres, qu'il ne voit plus que le Ciel & la Mer, les Aſtres ſont les ſeuls flambeaux qui puiſſent le conduire avec ſûreté.

Si l'on fait l'énumération de tous les moyens qu'on a, ou qu'il ſemble qu'on ait, pour trouver le point du Globe où l'on eſt, & qu'on conſidère le Problème ſpéculativement ; on croira qu'il y a plus de choſes données qu'il n'eſt néceſſaire pour le réſoudre, & qu'il eſt un de ces Problèmes que les Géomètres appellent *plus que déterminés :* mais ſi l'on conſidère que la plûpart de ces moyens ne ſont donnés qu'aſſés imparfaitement, & que chacun a beſoin d'être corrigé ou confirmé par les autres, on verra que tous réunis enſemble, ſuffiſent à peine.

On ne ſçauroit donc trop s'appliquer à perfectionner chacun des moyens. Ce ſeroit un grand avantage ſi les uns n'étoient jamais néceſſaires que lorſque les circonſtances empêcheroient de ſe ſervir des autres : ou ſi au lieu des corrections que ces différens moyens ſe procurent, ils ne ſervoient jamais qu'à ſe confirmer.

Dans mes *Elémens de Géographie*, & dans les Mémoires de l'Académie*, j'ai expoſé les Moyens Géographiques ; ceux qui dépendent de la grandeur des Degrés de la Terre, de la direction de la route, & de la longueur des Arcs que le Vaiſſeau trace ſur la ſurface de la Mer.

Les Moyens Aſtronomiques ſe réduiſent à deux principaux : l'un eſt *la Latitude ;* l'autre, *la Longitude.*

J'ai expliqué dans le *Diſcours ſur la Parallaxe de la Lune,* l'uſage qu'on peut faire de cet Aſtre pour connoître la Longitude ſur Mer ; & comme cette méthode m'a paru celle qui juſqu'ici eſt le plus à notre portée, je me ſuis attaché à la perfectionner.

* *Mémoires de l'Acad. année 1742.*

Je viens maintenant à la Latitude; à ce point principal de l'Art du Pilote, qui lui fait connoître à quelle diſtance il eſt de l'E'quateur.

Lorſque j'ai commencé cette partie de la Navigation, je n'ai pas prévû toute l'étendue qu'elle devoit avoir. En effet, ſi je ne deſtinois ce que j'ai à dire ſur la Latitude que pour l'uſage ordinaire des gens de Mer, l'ouvrage ne ſeroit pas long. La hauteur méridienne du Soleil, ou de quelqu'E'toile, dont la déclinaiſon ſoit connue, leur ſuffit pour déterminer cette Latitude: & ils ſont ſi bornés à cette méthode, que ſi quelque nuage les empêche de voir le Soleil ou l'E'toile au moment de leur paſſage par le Méridien, ils ne connoiſſent guère d'autre moyen aſtronomique pour y ſuppléer.

Mais quand j'ai voulu parcourir toutes les reſſources que le Navigateur peut tirer de l'obſervation des Aſtres, j'ai trouvé tant de choſes utiles ou curieuſes, que j'ai vû que l'ouvrage méritoit beaucoup plus d'étendue que je n'avois penſé : j'ai vû que quoique l'Aſtronomie ordinaire des gens de Mer fût fort bornée, une ſcience beaucoup plus vaſte leur ſeroit utile : que quoique leurs obſervations fuſſent aſſés ſimples, on pouvoit leur en enſeigner de plus ſimples encore : enfin j'ai trouvé des méthodes qui ne ſuppoſent ni adreſſe, ni même preſque d'Inſtrumens.

La recherche de tous les moyens par leſquels on peut trouver la Latitude, m'a jetté dans une Théorie aſſés étendue, & m'a conduit à un ouvrage qu'on peut appeller *Des E'lémens d'Aſtronomie, tant pour un Obſervatoire fixe, que pour un Obſervatoire mobile.*

En effet, on peut conſidérer le Navigateur comme un Aſtronome: qui ne diffère de l'Aſtronome ordinaire; qu'en ce que celui-ci fait ſes obſervations dans un lieu fixe, & que celui-là fait les ſiennes dans un Obſervatoire entraîné par les vents, & continuellement agité. Et ſi la préciſion qu'on exige de celui qui ſe trouve dans toutes les circonſtances favorables, rend ſon art difficile; on peut dire que le défaut de ces circonſtances rend l'art de l'autre plus difficile encore, & l'oblige d'avoir recours à des méthodes plus ſubtiles.

Il eſt vrai qu'on n'exige pas de l'*Aſtronome Navigateur* le même degré de préciſion qu'on exige de l'*Aſtronome ſédentaire.* Celui-ci appliqué à perfectionner l'Aſtronomie, ne doit négliger aucun des moyens qui peuvent donner ou augmenter la préciſion, quelque pénibles qu'ils puiſſent être : celui-là, content de bien diriger ſa route, doit ſouvent faire céder une préciſion ſcrupuleuſe à la facilité & à la commodité de ſes opérations. Une quantité de quelques ſecondes eſt importante pour l'Aſtronome : le Pilote peut impunément négliger quelques minutes : c'eſt au Géomètre à calculer les cas où cette préciſion eſt néceſſaire, & ceux où l'on peut uſer de cette licence. Enfin quelquefois le Navigateur ſeroit heureux de connoître ſa Latitude d'une maniére encore moins exacte.

J'ai eu tous ces cas en vûe dans les 40 Problèmes qui compoſent l'ouvrage ſuivant.

Dans les uns, je ſuppoſe l'Aſtronome dans l'Obſervatoire le plus ſtable, le plus commode, & le mieux muni d'Inſtrumens: & je lui propoſe des moyens pour perfectionner l'Aſtronomie.

D'autres Problèmes ſont deſtinés pour un Aſtronome dont l'Obſervatoire ſeroit bien pourvû d'Inſtrumens, mais continuellement agité; & je lui propoſe les moyens que cette agitation rend néceſſaires, & laiſſe poſſibles.

Enfin on trouvera des Problèmes dans leſquels je ne ſuppoſe plus un

Aſtronome; mais un Navigateur ſans ſcience, ſans induſtrie, dénué d'Inſtrumens, tel qu'il peut ſe trouver après un Naufrage: & je lui offre les derniéres reſſources qu'un état auſſi malheureux lui permet.

Ces différentes ſortes de Problèmes ſembloient exiger qu'on les diſtinguât, & qu'on en formât différentes parties de l'ouvrage: mais ſi les uſages différens auxquels ils ſont deſtinés, exigeoient un tel ordre, la nature de la choſe ne l'a point permis, & j'ai cru devoir ſuivre la connexion que ces Problèmes avoient les uns avec les autres, plûtôt que de les aſſujettir aux circonſtances où ſe peut trouver celui qui s'en ſert.

On ne doit donc pas s'attendre à trouver ici un ouvrage qui ſoit à la portée de tous les Pilotes. J'ai voulu présenter l'Art dans toute son étendue : proposer ce que les Astronomes pourroient entreprendre dans des Observatoires stables & commodes : ce que pourroient exécuter d'habiles Pilotes sur leurs Vaisseaux : enfin ce qui resteroit à faire pour les Navigateurs les plus bornés, & dans les occasions les plus fâcheuses.

Cet ouvrage est, comme on voit, fort différent de tous les Traités d'Astronomie qui ont paru jusqu'ici ; plus différent encore de tous les Traités de Navigation. Dans les uns on ne s'est attaché qu'aux méthodes qui supposent des Observatoires fixes ; & il s'en faut bien qu'on les ait toutes épuisées : dans les autres on s'est contenté de donner quelques Problèmes astronomiques des plus simples. Et l'on a réduit ainsi l'Astronomie ordinaire à ne pouvoir guère être utile au Navigateur ; ou l'Astronomie du Navigateur à n'être qu'une petite partie de l'autre Astronomie.

On trouvera au contraire dans notre *Astronomie Nautique* une science supérieure à l'Astronomie ordinaire. En effet, l'Astronomie qui s'exerce dans un Observatoire continuellement agité, & dont le lieu sur le Globe de la Terre, change continuellement, est beaucoup plus difficile, & a besoin d'une plus grande industrie que celle qui jouit du repos.

Je ne puis mieux faire sentir la différence de ces deux Astronomies, que par la considération de quelques-uns des Problèmes qu'on trouvera dans l'ouvrage ſuivant.

De toutes les obſervations qu'on peut faire ſur Mer, la plus facile & la plus exacte, c'eſt celle du lever & du coucher du Soleil. On n'a beſoin d'aucun Inſtrument. Tout le monde ſçait que lorſque cet Aſtre eſt dans l'horiſon, l'épaiſſeur de l'Atmoſphère interceptant une grande partie de ſes rayons, nous permet de voir ſon Diſque ſans avoir beſoin d'armer l'œil d'aucun Verre coloré, & ſans crainte d'en être éblouis. La ligne qui termine l'horiſon ſenſible, eſt ſi éloignée de l'Obſervateur par rapport aux petites différences que l'agitation des Flots cauſe à la hauteur où il ſe trouve, qu'il peut prendre les momens où il obſerve l'émerſion &

l'immerſion du Soleil dans l'horiſon, pour les mêmes qu'ils ſeroient ſi le Vaiſſeau reſtoit immobile.

Mais cette obſervation ſi ſimple & ſi ſûre, ſi l'on en veut faire l'uſage qui ſe préſente d'abord à l'eſprit pour trouver la Latitude, ſuppoſe qu'on ſçache l'heure à laquelle elle ſe fait : & l'on ne peut avoir l'heure ſur la Mer, que par des obſervations qui n'ont ni la même ſimplicité, ni la même exactitude.

J'ai donc cherché une méthode pour trouver la Latitude par les obſervations du lever & du coucher du Soleil, qui fût indépendante de l'heure vraie ; & dans laquelle on n'auroit à conſidérer que l'intervalle de tems écoulé entre ces obſervations; intervalle qu'on peut connoître

par

par une ſimple Montre, qui n'a pas beſoin d'être réglée ſur le Soleil, pourvû ſeulement que ſon mouvement ſoit aſſés uniforme pendant 24 heures.

J'ai penſé que réduiſant le Problème à des obſervations qu'on peut faire dans un Vaiſſeau avec autant de préciſion que dans un Obſervatoire inébranlable, j'aurois une méthode qui donneroit la Latitude ſur Mer auſſi exactement qu'elle la pourroit donner ſur Terre.

Mais je ne puis diſſimuler qu'en réduiſant le Problème à une ſi grande ſimplicité pour l'Obſervateur, il devient difficile pour le Géomètre qui le veut réſoudre. Il ſemble qu'il y ait dans la ſcience que nous traitons, une fatale compenſation entre la ſimplicité des opérations, & la difficulté des calculs.

Pour faire connoître cette difficulté, il faut donner une idée du Problème dans toute ſon étendue.

On ſçait que pour tous les peuples de la Terre, chaque jour de l'année a ſa durée particuliére : d'autant plus longue pour chacun pendant ſon été, & d'autant plus courte pendant ſon hiver, qu'il habite une région plus éloignée de l'E'quateur. Il y a donc pour chaque lieu un jour qui eſt le plus long de tous les jours de l'année, & un jour qui eſt le plus court. Et le plus long jour eſt d'autant plus long, & le plus court eſt d'autant plus court, que le lieu eſt plus près du Pole : dès qu'on atteint le Cercle polaire, le plus long jour ne finit plus ; le Soleil au

Solstice d'été ne se couche plus pour les habitans des Zones glacées; il ne se lève plus pour eux lorsqu'il est au Solstice d'hiver.

On peut donc par la durée du plus long jour, connoître la distance où l'on est du Pole, qui est le complément de la Latitude.

C'est ainsi que les anciens Géographes avoient déterminé les Latitudes de plusieurs Villes des trois parties du Monde connues de leur tems. Et Ptolémée, qui nous a laissé ces Latitudes, préféroit cette méthode à toutes les autres.

Plusieurs causes cependant rendoient ces déterminations peu exactes. Les Anciens ne connoissoient ni la Réfraction, ni la Parallaxe du Soleil, ni assés exactement l'Obliquité de l'E'cliptique ; & ils n'avoient point de meſure du tems aſſés préciſe.

Ce ſont-là les cauſes des erreurs qu'on trouve dans les Latitudes déterminées par les Anciens. Les connoiſſances qu'on a aujourd'hui, nous mettent à portée de les corriger : mais le Problème, tel qu'ils ſe le ſont propoſé, demeure ſujet à une grande limitation. C'eſt que dépendant de l'obſervation de la durée du plus long ou du plus court jour, il n'y a que deux jours dans l'année où l'on puiſſe le réſoudre.

Voici pourquoi juſqu'ici l'on s'eſt aſtreint à cette condition.

La durée du jour dépend de deux cauſes : 1.° du lieu que l'Obſervateur occupe ſur le Globe de la Terre : 2.° du lieu du Soleil dans l'E'cliptique.

Dans chaque lieu de la Terre, plus le Soleil s'approche du Tropique voisin, plus le tems de son séjour sur l'horison est long; plus il s'éloigne du Tropique, plus ce tems est court.

Mais le changement continuel de déclinaison du Soleil qui, pendant le cours de l'année, rend dans chaque lieu les jours inégaux, altère la durée même de chaque jour, rend inégaux son soir & son matin : rend chaque jour plus long ou plus court qu'il ne seroit si le Soleil à son coucher avoit conservé la même déclinaison qu'il avoit à son lever.

Dans deux points seuls de l'Ecliptique, la déclinaison du Soleil demeure assés constamment la même pour ne causer à la durée du jour aucune altération sensible : ces points ſont ceux où le Soleil, après s'être éloigné de l'E'quateur, ceſſe de s'en éloigner, & s'en rapproche. Et ces points, qui ſont les points ſolſticiaux, répondent au plus long & au plus court jour de l'année.

Voilà pourquoi juſqu'ici l'on s'eſt fixé à ces jours, pour trouver la Latitude par leur durée. Mais on voit par-là combien cette reſtriction rend le Problème peu utile pour le Navigateur, qui chaque jour a beſoin de connoître ſa Latitude.

D'autres cauſes encore ſemblent lui refuſer l'uſage de ce Problème. Nous avons vû que l'agitation des Flots ne changeoit point l'inſtant du lever & du coucher du Soleil : mais il n'en eſt pas ainſi du tranſport du Vaiſſeau d'un lieu à l'autre. Selon la plage vers laquelle il navigue, il va trouver un jour plus long ou plus court que celui que le lieu du matin lui promettoit : & quoique les momens de l'émerſion & de l'immerſion du Soleil dans l'horiſon ſoient les mêmes qu'ils ſeroient ſi l'Obſervateur n'éprouvoit aucune agitation, ils ne ſont pas ſéparés par le même intervalle qu'ils le ſeroient ſi l'Obſervateur étoit demeuré au même lieu. Pour m'expliquer plus briévement, l'agitation n'apporte aucun trouble à l'obſervation du lever ni du coucher du Soleil, mais le mouvement progreſſif du Vaiſſeau, éloigne ou rapproche ces deux inſtans, & change pour le Navigateur la durée qui les ſépare.

J'ai voulu vaincre toutes ces difficultés; & rendre praticable ſur la Mer,

& tous les jours de l'année, une méthode qui a ſur toutes les autres de ſi grands avantages, par le genre d'obſervations qu'elle demande.

Mais le Problème ſimple & facile lorſqu'on le réſout comme les Anciens l'ont réſolu, dans un Obſervatoire fixe, ſans avoir égard à la Réfraction, ni à la Parallaxe, & qu'on l'aſtreint au jour du Solſtice, devient difficile lorſqu'on veut le réſoudre pour tous les jours de l'année, & dans toutes les circonſtances où le Navigateur ſe trouve.

Car 1.° la Réfraction faiſant paroître le Soleil avant qu'il ſe lève, & le faiſant paroître encore après qu'il eſt couché, rend le jour plus long qu'il n'eſt réellement.

2.° En tout autre tems qu'aux Solſtices, le changement continuel de déclinaiſon du Soleil altère la durée du jour, & l'allonge ou la raccourcit ſelon que le Soleil s'approche ou s'éloigne du Tropique.

3.° L'Obſervatoire ſe mouvant lui-même, fait voir au Navigateur un jour plus long ou plus court ſelon le lieu où il dirige ſa route.

Je ne parle point de l'effet de la Parallaxe du Soleil, parce qu'il eſt trop peu conſidérable pour qu'on y doive faire attention dans les Problèmes Nautiques. Si cependant on y vouloit avoir égard, on ſçait que l'effet de cette Parallaxe étant de faire voir le Soleil plus bas qu'il n'eſt par rapport au centre de la Terre, pendant que la Réfraction le fait voir plus haut ; il n'y a qu'à retrancher la Parallaxe de la Réfraction, & prendre le reste pour la quantité dont le Soleil paroît plus élevé qu'il n'est.

Pour résoudre le Problème dans toutes ses circonstances; il faut donc apprécier ce que chacune contribue à rendre le jour plus long ou plus court : & chercher quelle seroit sa durée pour un Observateur : qui depuis le lever du Soleil jusqu'à son coucher seroit demeuré à la même place : qui seroit sur une Terre qui n'auroit point d'Atmosphère, ou dont l'Atmosphère ne causeroit aux rayons de lumiére aucune réfraction : enfin qui observeroit un Soleil qui depuis son lever jusqu'à son coucher conserveroit toûjours la même déclinaison.

Le calcul est compliqué : mais la peine ne sera que pour le Géomètre. Il pourra donner au Pilote des Tables par le moyen desquelles il aura sa Latitude, en observant seulement la durée apparente du jour ; & à peu-près la route qu'il aura tenue du matin au soir.

Il n'y a plus à ce Problême qu'une restriction ; mais une restriction qui est attachée à la nature de la chose, & qui ne peut guére nuire dans l'usage qu'on en veut faire. Deux seuls jours de l'année la méthode des Anciens étoit praticable : il n'y a que deux jours dans l'année où l'on ne puisse pas pratiquer la nôtre ; qui sont les jours de l'Equinoxe. Lorsque le Soleil est à ces points, les jours étant égaux dans tous les lieux de la Terre, il est évident qu'on ne sçauroit déterminer la Latitude d'aucun lieu par leur durée. Hors de ces tems, notre méthode est universelle.

Quelques Aſtronomes ont propoſé un autre Problème qui ſemble d'abord être d'une grande utilité pour les Navigateurs : c'eſt de déterminer la Latitude par l'obſervation de deux E'toiles qui ſe lèvent ou qui ſe couchent au même inſtant.

Il eſt évident que pour deux E'toiles dont les lieux ſont donnés dans les Cieux, n'y ayant qu'une ſeule poſition de l'axe de la Terre qui les faſſe ſe trouver enſemble dans l'horiſon, cette circonſtance détermine la poſition de l'axe ſur l'horiſon, ce qui eſt la hauteur du Pole.

Mais cette méthode ſi ſpécieuſe au premier aſpect, ne ſçauroit être d'aucun uſage ; c'eſt parce qu'on ne ſçauroit voir les E'toiles dans l'horiſon. Leur lumiére eſt tellement éteinte ou obſcurcie par l'Atmoſphère, qu'il faut des circonſtances fort rares de ſérénité dans l'air pour qu'on puiſſe ſuivre juſque vers l'horiſon quelques E'toiles des plus brillantes du Ciel.

Si l'on veut donc déterminer la Latitude par des émerſions & des immerſions dans l'horiſon ; il faut abandonner les E'toiles fixes, & ſe tourner vers des Aſtres qui conſervent aſſés de lumiére dans l'horiſon pour y être apperçus. Mais alors comme il y a peu de ces Aſtres, il ſeroit bien rare de ſe trouver dans une poſition de la Sphère qui en fiſt voir deux ſe lever ou ſe coucher en même tems: & cette méthode praticable dans cette ſeule circonſtance, ne pourroit être utile que pour quelques lieux & pour quelques jours.

J'ai cherché une méthode pour trouver la Latitude par les émerſions & les immerſions de deux Aſtres dans l'horiſon, mais qui ne fût point aſtreinte à la condition qu'ils ſe trouvaſſent dans l'horiſon au même inſtant. On eſt alors maître du choix des Aſtres: & aucun après le Soleil ne m'a paru ſi propre pour la réſolution de ce Problème que la Planète de *Vénus*. Elle répand aſſés de lumiére pour qu'on la voie facilement dans l'horiſon : & la régularité de ſon cours fait connoître fort exactement ſon lieu dans le Ciel. Compagne fidelle du Soleil, elle le précède, ou le ſuit toûjours d'aſſés près; & c'eſt par le tems écoulé entre le lever ou le coucher de ces deux Aſtres, que j'enſeigne à trouver la Latitude.

Les deux méthodes précédentes peuvent être fort utiles. Je parlerai maintenant d'une autre, qui ne donne qu'une exactitude fort bornée, mais qui mérite d'être connue par sa singularité, & par la simplicité de l'observation qu'elle exige. Elle feroit *trouver la Latitude par le seul tems que le Soleil ou la Lune emploient à s'élever de tout leur Disque au dessus de l'horison, ou à se plonger au dessous.*

Ce tems en général dépendant de la grandeur du diamètre de l'Astre, de sa déclinaison, & de la hauteur du Pole dans le lieu de l'observation; pour un jour de l'année donné, ne dépend donc plus que de la hauteur du Pole. Plus l'axe de la Terre est élevé, plus l'Equateur & ses Cercles parallèles sont coupés obliquement par l'horiſon, plus le tems de l'émerſion & de l'immerſion du Diſque eſt long : & ſa durée détermine la hauteur du Pole.

Quelque facile que ſoit cette méthode : que le Navigateur ne ſoit pas tenté de s'y arrêter lorſqu'il en pourra pratiquer d'autres plus exactes. Je ne la lui offre que pour des cas malheureux où il n'auroit point d'autre reſſource.

Après l'obſervation du lever & du coucher des Aſtres, il n'y en a pas de plus ſimple, ni de plus facile, que celle du moment où ils ſe trouvent dans un même vertical. Dans un Obſervatoire ſtable, une Lunette fixée à angles droits ſur un axe horiſontal, & mobile autour de cet axe, donne ces obſervations avec une grande précision.

précision ; sur la Mer un fil chargé d'un plomb suffit : & si l'on se vouloit contenter d'une moindre exactitude, on pourroit à la vûe simple juger assés juste si la ligne qui joint deux Etoiles est verticale, sur-tout si l'on choisissoit deux Etoiles assés éloignées l'une de l'autre.

Je donne pour trouver la Latitude par des observations de cette espèce, une méthode qui peut être fort utile sur Terre & sur Mer.

J'ai déja dit que l'ouvrage suivant n'étoit pas destiné uniquement pour les gens de Mer : on y trouvera plusieurs Problèmes pour la perfection de l'Astronomie.

Tout le monde sçait, du moins tous les Astronomes sçavent, que lorsqu'on veut déterminer la hauteur du

Pole, on ſuppoſe connue la déclinaiſon de l'Aſtre qu'on emploie à cette recherche ; & que lorſqu'on veut déterminer la déclinaiſon d'un Aſtre, on ſuppoſe connue la hauteur du Pole. La plûpart des méthodes pour trouver l'une ou l'autre de ces deux choſes, ſont dans le cas de ce cercle vicieux. On trouvera dans l'ouvrage ſuivant un Problème par lequel on l'évite; on aura la hauteur du Pole indépendamment de la déclinaiſon des Aſtres; la déclinaiſon des Aſtres indépendamment de la hauteur du Pole : & le tout ſe fera ſans la meſure actuelle d'aucun angle.

M. Mayer, auteur de cette belle méthode*, lui attribuoit encore une prérogative qu'il ſeroit à ſouhaiter

* *Comment. Acad. Petrop. Tom. V.*

qu'elle eût ; ce ſeroit d'être à l'abri de la Réfraction.

Depuis qu'on connoît cette propriété qu'a l'Atmoſphère de rompre les rayons de la Lumiére, & de nous faire voir les Aſtres dans des lieux où ils ne ſont point, tous les Aſtronomes ſe ſont appliqués à déterminer la hauteur du Pole par des méthodes qui évitaſſent l'effet de cette illuſion; quoiqu'il paroiſſe que juſqu'ici ce n'ait pas été avec grand ſuccès. Les unes de ces méthodes ſuppoſent qu'on connoiſſe la déclinaiſon des E'toiles qu'on emploie à cette recherche ; & c'eſt cette déclinaiſon qu'il eſt difficile de trouver exemte des erreurs de la Réfraction. D'autres ſuppoſent l'obſervation d'une E'toile au Zénith, ce qui les limite extrêmement, On trouvera dans l'ouvrage suivant* une méthode délivrée de toutes ces suppositions, & entiérement à l'abri des effets de la Réfraction. Et l'on aura par elle également la hauteur du Pole, & la déclinaison des Etoiles.

Enfin nous nous sommes attachés à des Questions de pure spéculation, comme au fameux Problème du plus court crépuscule. On s'étonnera qu'après qu'il a été si long-tems l'objet des recherches des plus habiles Mathématiciens, la solution en fût demeurée jusqu'ici imparfaite. La généralité de ma méthode m'a fait découvrir & résoudre une difficulté que les autres Astronomes n'avoient pas apperçue : mais qui vraisemblablement

* *Problème XXV.*

avoit été remarquée par deux des plus grands Géomètres du ſiécle *, qui avouent qu'ils avoient été occupés de ce Problème pendant cinq ans, ſans en pouvoir venir à bout.

Je dois maintenant parler de la méthode que j'ai ſuivie dans tout cet ouvrage.

Pour réſoudre les Problèmes aſtronomiques, on a d'ordinaire recours à une ſcience ſecondaire : on les réduit à des Triangles tracés ſur la ſurface de la Sphère, que cette ſcience apprend à réſoudre. Je parle de la Trigonométrie Sphérique : elle offre d'abord de grandes facilités. On trouve ſes régles à la tête de pluſieurs Livres ; & ſouvent on réſout des Queſtions importantes de l'Aſtrono-

* *Johan. Bern. oper. Tom. 1. pag. 64.*

mie par une application aveugle de ces régles. Par elles on eſt diſpenſé de pénétrer dans la nature de la queſtion; & par elles l'Aſtronome ſe croiroit diſpenſé d'être Géomètre, s'il pouvoit méconnoître la ſcience à laquelle elles doivent leur origine.

J'admire l'art des premiers Géomètres qui nous ont donné la Trigonométrie Sphérique: mais je crois que les Eſprits géométriques préféreront, pour les Problèmes d'Aſtronomie, des ſolutions immédiates à celles qu'on emprunte d'une autre ſcience; & auxquelles on ne parvient qu'en pratiquant des régles dont l'origine n'eſt guére préſente à l'eſprit, & dont l'application eſt ſouvent ambigue.

J'ai voulu délivrer l'Aſtronomie du beſoin de cette ſcience ſecondaire;

& la faire dépendre immédiatement de l'analyse dont toutes les Sciences Mathématiques dépendent.

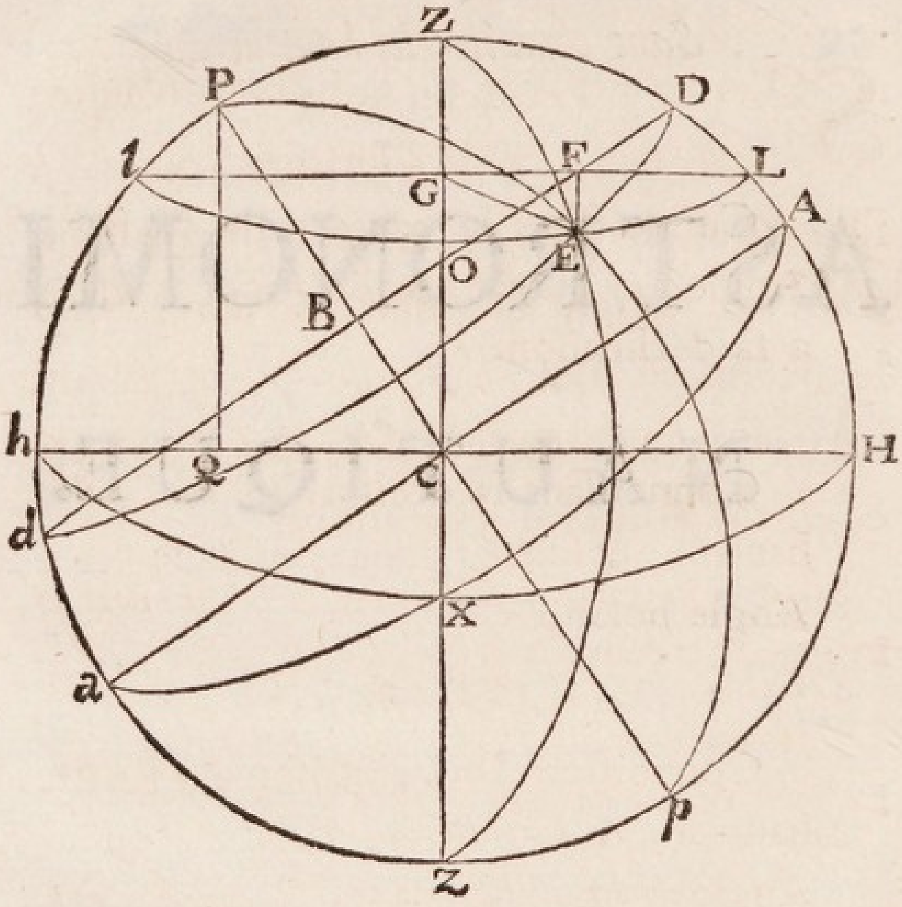
Je dois avouer qu'on trouvera dans la méthode que j'ai suivie, l'inconvénient qui se rencontre dans toutes les méthodes générales : c'est de donner pour quelques cas particuliers des solutions moins simples & moins commodes que celles auxquelles on parviendroit par des routes indirectes. Mais je ne crois pas qu'on insiste sur ce reproche, lorsqu'on fera attention à l'avantage d'avoir tous les Problèmes qui composent l'ouvrage suivant, résolus par une même méthode & par un même calcul.

Après le grand nombre de choses que j'ai annoncées, je crains de dire que tout est contenu dans quelques lignes d'Algèbre. Ai-je le tort d'avoir préſenté l'ouvrage d'une manière trop avantageuſe? ou l'Algèbre a-t-elle le mérite d'avoir en effet réduit dans un ſi petit volume une ſcience très-vaſte? c'eſt à ceux qui examineront l'ouvrage à en juger.

# TABLE
## DES PROBLEMES
### Contenus dans cet ouvrage.

ASTRONOMIE

# ASTRONOMIE
# NAUTIQUE.


Z
P
D
l
F
L
G
A
E
O
B
h
♎
C
H
d
X
a
p
Z

## *PRÉPARATION pour tout le Livre, ou Dénomination des principaux élémens de la Sphère.*

SOient $Pp$ l'Axe de la Sphère céleste; $PZAHpzahP$ le Méridien, & $HXh$ l'Horison du lieu ; $AXa$ l'Equateur, $DEd$ le Cercle que décrit l'Astre, $PEp$ le Méridien qui passe au point $E$ où l'Astre se trouve, $ZEz$ son Vertical, & $LEl$ son Almicantarath.

| | | |
|---|---|---|
| SOIT le Rayon.... | $CP = r$ | On aura |
| Le Sinus de la déclinais. de l'Astre ........ | $CB = x$ | $EF = \frac{yt}{r}$ |
| Son Co-sinus... | $DB = y$ | |
| | | $BF = \frac{yu}{r}$ |
| Le Sinus de la hauteur du Pole ......... | $PQ = s$ | |
| Son Co-sinus ... | $CQ = c$ | $EF = \frac{mk}{r}$ |
| Le Sinus de la hauteur de l'Astre......... | $CG = h$ | |
| Son Co-sinus... | $GE = k$ | $GF = \frac{nk}{r}$ |
| Le Sinus de l'Angle horaire............. | $= t$ | |
| Son Co-sinus ...... | $= u$ | $CO = \frac{rx}{s}$ |
| Le Sinus de l'Angle azymuthal ........... | $= m$ | |
| Son Co-sinus...... | $= n$ | $BO = \frac{cx}{s}$ |

## PROBLEME I.

*TROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon d'un Aſtre, ſa hauteur, & ſon Angle horaire!*

$$GO = GC - CO = \frac{hs - rx}{s}\text{; \&}$$

les Triangles ſemblables $QCP$, $GOF$, donnant

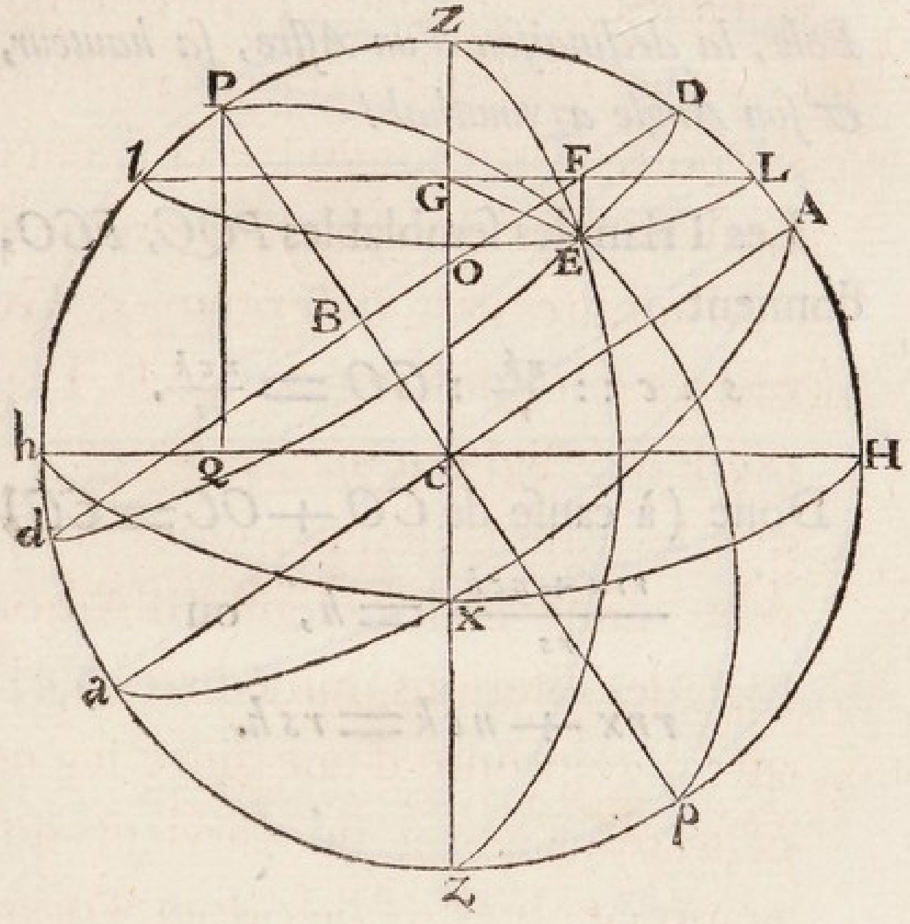
$$c : r :: \frac{hs - rx}{s} : OF = \frac{rhs - rrx}{s}.$$

On a (à cauſe de $BO + OF = BF$)

$$\frac{ccx + rhs - rrx}{cs} = \frac{yu}{r}\text{: ou}$$

$$rrh - rsx = cyu.$$

*Ici, & dans les Problèmes ſuivans les ſignes ſont différens, lorſque l'Almicantarath coupe* CZ *au deſſous du point* B.


Z
P
D
l
F
L
G
A
E
O
B
h
Q
C
H
d
X
a
p
Z

## PROBLEME II.

*TROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon d'un Aſtre, ſa hauteur, & ſon Angle azymuthal!*

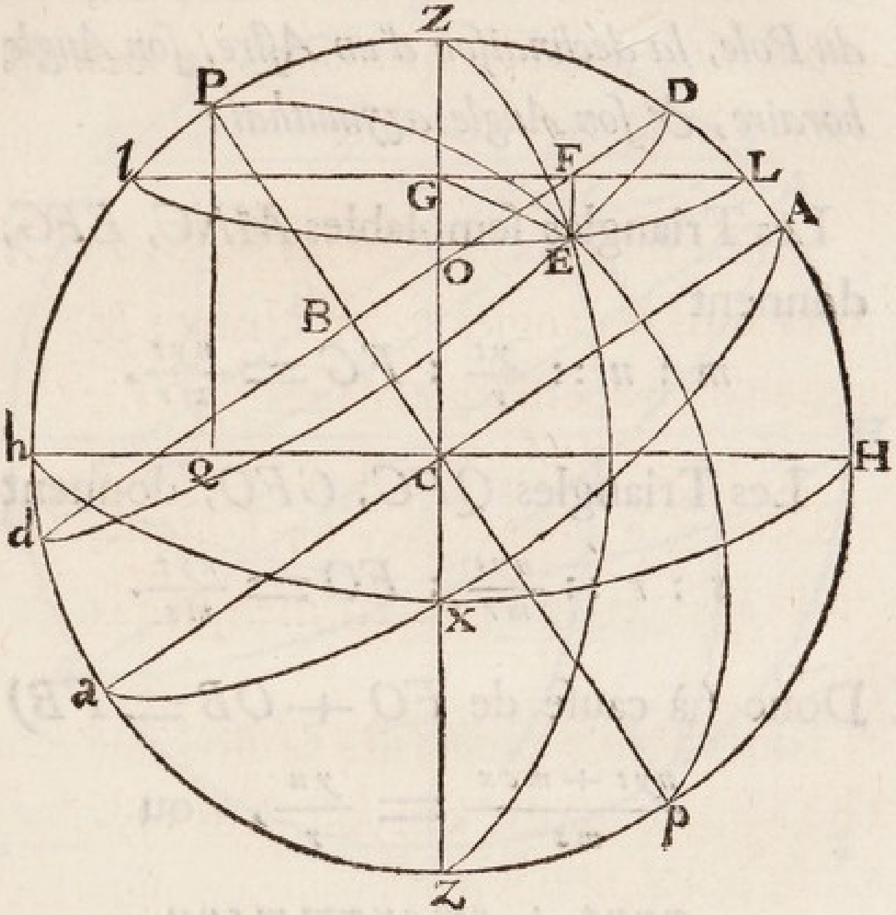
Les Triangles ſemblables *PQC, FGO,* donnent

$$s : c :: \frac{nk}{r} : GO = \frac{nck}{rs}.$$

Donc (à cauſe de $CO + OG = CG$)

$$\frac{rrx + nck}{rs} = h, \quad \text{ou}$$

$$rrx + nck = rsh.$$


Z
P
D
l
F
L
G
A
E
O
B
h
H
Q
C
d
X
a
p
Z

## PROBLEME III.

*Trouver la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon d'un Aſtre, ſon Angle horaire, & ſon Angle azymuthal!*

Les Triangles ſemblables *MNC, EFG,* donnent

$$m : n :: \frac{yt}{r} : FG = \frac{nyt}{mr}.$$

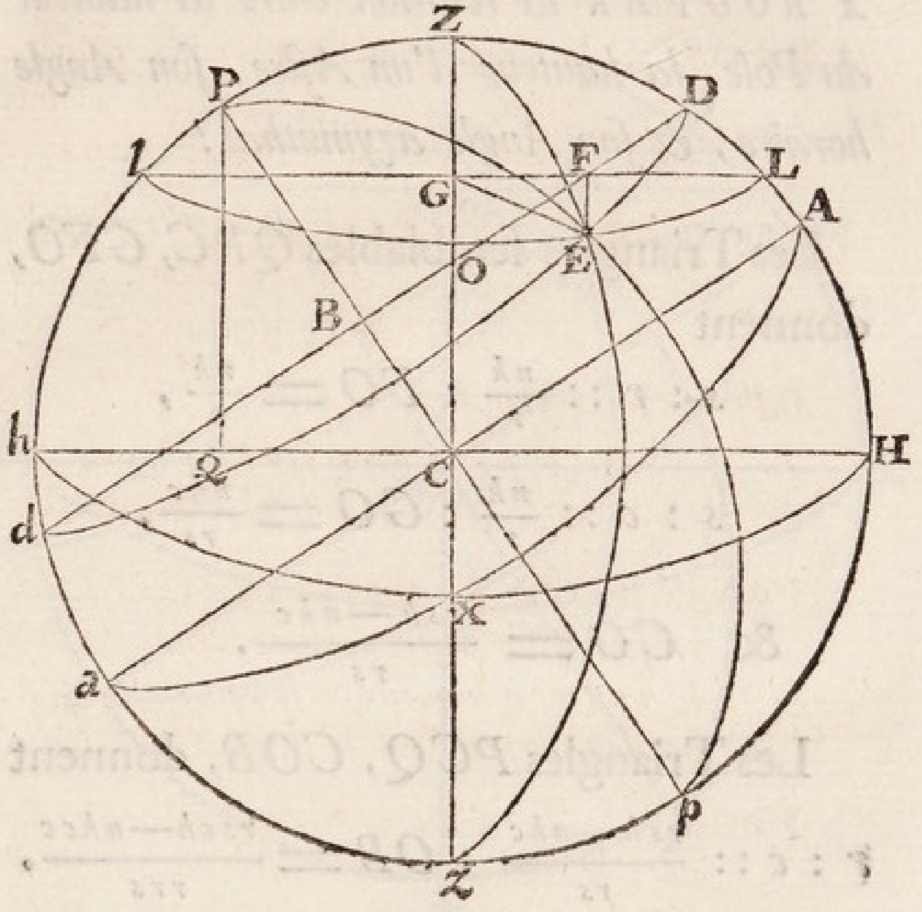
Les Triangles *QPC, GFO,* donnent

$$s : r :: \frac{nyt}{mr} : FO = \frac{nyt}{ms}.$$

Donc (à cauſe de $FO + OB = FB$)

$$\frac{nyt + mcx}{ms} = \frac{yu}{r}, \text{ ou}$$

$$rnyt + rmcx = msyu.$$


Z
P
D
l
F
L
G
A
E
O
B
h
Q
C
H
d
X
a
p
z

## PROBLEME IV.

*TROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la hauteur d'un Aſtre, ſon Angle horaire, & ſon Angle azymuthal?*

Les Triangles ſemblables $QPC$, $GFO$, donnent

$$s : r :: \frac{nk}{r} : FO = \frac{nk}{s},$$

$$s : c :: \frac{nk}{r} : GO = \frac{nkc}{rs},$$

$$\& \quad CO = \frac{rsh - nkc}{rs}.$$

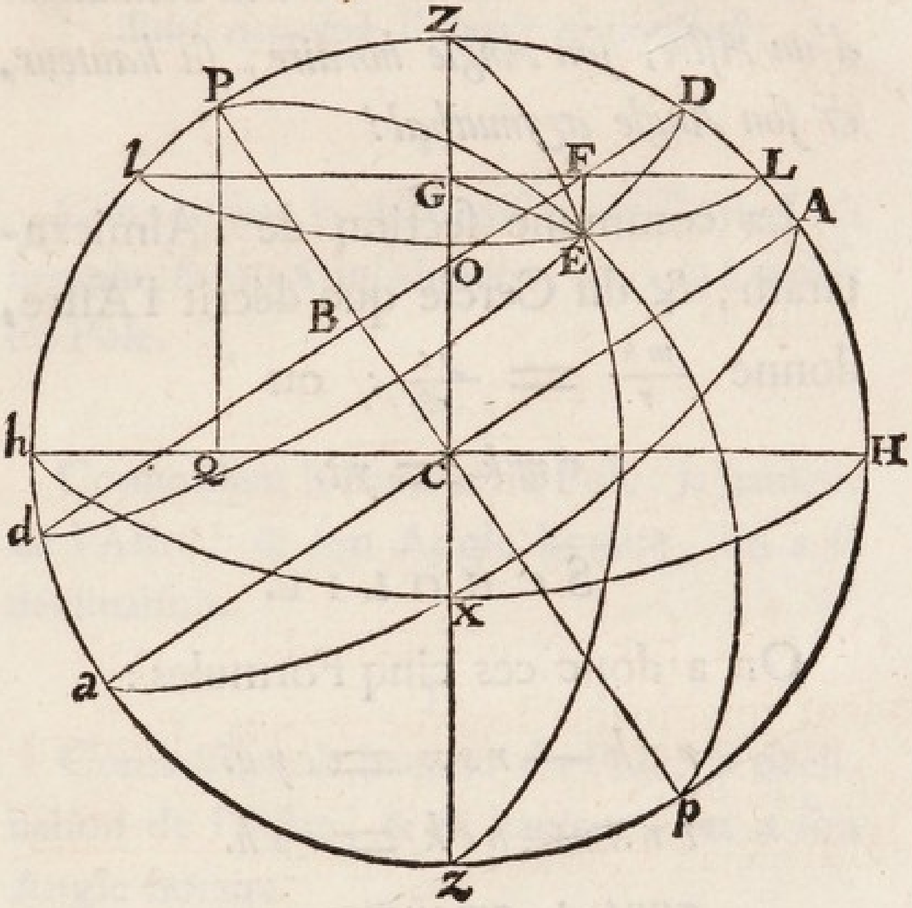
Les Triangles $PCQ$, $COB$, donnent

$$r : c :: \frac{rsh - nkc}{rs} : OB = \frac{rsch - nkcc}{rrs}.$$

Or $FO + OB : EF$, ou

$$\frac{nkrr + rsch - nkcc}{rrs} : \frac{mk}{r} :: u : t. \text{ Donc}$$

$$rcht + nskt = rmku.$$


Z
P
D
l
F
L
G
A
E
O
B
h
Q
C
H
d
X
a
p
z

## PROBLEME V.

*Trouver la relation entre la déclinaison d'un Astre, son Angle horaire, sa hauteur, & son Angle azymuthal!*

La commune section de l'Almicantarath, & du Cercle que décrit l'Astre, donne $\frac{mk}{r} = \frac{yt}{r}$; ou

$$mk = yt.$$

### Scholie.

On a donc ces cinq Formules :

$$rrh - rsx = cyu.$$

$$rrx + nck = rsh.$$

$$rnyt + rmcx = msyu.$$

$$rcht + nkst = rmku.$$

$$mk = yt.$$

Qui contiennent les vingt Problèmes suivans.

## PAR LA 1.re FORMULE:

$$rrh - rsx = cyu.$$

*Sans connoître l'Angle azymuthal.*

1.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'Aſtre, ſa hauteur, & ſon Angle horaire, on a la hauteur du Pole.

2.

Connoiſſant la hauteur du Pole, la hauteur de l'Aſtre, & ſon Angle horaire, on a ſa déclinaiſon.

3.

Connoiſſant la hauteur du Pole, la déclinaiſon de l'Aſtre, & ſa hauteur, on a ſon Angle horaire.

4.

Connoiſſant la hauteur du Pole, la déclinaiſon de l'Aſtre, & ſon Angle horaire, on a ſa hauteur.

## PAR LA 2.de FORMULE:

$$rrx + nck = rsh.$$

*Sans connoître l'Angle horaire.*

1.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'Aſtre, ſa hauteur, & ſon Angle azymuthal, on a la hauteur du Pole.

2.

Connoiſſant la hauteur du Pole, la hauteur de l'Aſtre, & ſon Angle azymuthal, on a ſa déclinaiſon.

3.

Connoiſſant la hauteur du Pole, la déclinaiſon de l'Aſtre, & ſa hauteur, on a ſon Angle azymuthal.

4.

Connoiſſant la hauteur du Pole, la déclinaiſon de l'Aſtre, & ſon Angle azymuthal, on a ſa hauteur.

## Par la 3.$^{me}$ Formule:

*rnyt + rmcx = msyu.*

*Sans connoître la hauteur de l'Astre.*

I.

Connoissant la déclinaison de l'Astre, son Angle horaire, & son Angle azymuthal, on a la hauteur du Pole.

2.

Connoissant la hauteur du Pole, l'Angle horaire, & l'Angle azymuthal de l'Astre, on a sa déclinaison.

3.

Connoissant la hauteur du Pole, la déclinaison de l'Astre, & son Angle azymuthal, on a son Angle horaire.

4.

Connoissant la hauteur du Pole, la déclinaison de l'Astre, & son Angle horaire, on a son Angle azymuthal.

## PAR LA 4.$^{me}$ FORMULE:

$$rcht + nkst = rmku.$$

*Sans connoître la déclinaiſon de l'Aſtre.*

1.

Connoiſſant la hauteur de l'Aſtre, ſon Angle azymuthal, & ſon Angle horaire, on a la hauteur du Pole.

2.

Connoiſſant la hauteur du Pole, la hauteur de l'Aſtre, & ſon Angle azymuthal, on a ſon Angle horaire.

3.

Connoiſſant la hauteur du Pole, la hauteur de l'Aſtre, & ſon Angle horaire, on a ſon Angle azymuthal.

4.

Connoiſſant la hauteur du Pole, l'Angle azymuthal de l'Aſtre, & ſon Angle horaire, on a ſa hauteur.

## PAR LA 5.me FORMULE;

$$mk = yt.$$

*Sans connoître la hauteur du Pole.*

1.

Connoiſſant la hauteur de l'Aſtre, ſon Angle azymuthal, & ſon Angle horaire, on a ſa déclinaiſon.

2.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'Aſtre, ſa hauteur, & ſon Angle azymuthal, on a ſon Angle horaire.

3.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'Aſtre, ſa hauteur, & ſon Angle horaire, on a ſon Angle azymuthal.

4.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'Aſtre, ſon Angle azymuthal, & ſon Angle horaire, on a ſa hauteur.

## PROBLEME VI.

*Le tems qu'un Aſtre emploie à traverſer un angle donné, étant donné ; trouver la déclinaiſon de l'Aſtre !*

Soit la corde de l'angle donné $= 2p$ pour le rayon $= r$ ; & ſuppoſons qu'on obſerve l'Aſtre à deux hauteurs égales avant & après ſon paſſage au Méridien : on aura $r : m :: k : p$ & $mk = rp$ ; ou (à cauſe de la 5.$^{me}$ formule $mk = yt$) $yt = rp$.

Or, à quelque hauteur qu'on obſerve l'Aſtre traverſer l'angle donné, le tems qu'il y emploie, ſera le même; à la différence près qu'y apportera la réfraction, dont nous faiſons juſqu'ici abſtraction. On aura donc toûjours l'Equation

$$y = \frac{rp}{t}.$$

*Coroll.* Si pluſieurs Etoiles traverſent un même angle, les co-ſinus de leurs déclinaiſons ſont en raiſon inverſe des ſinus des angles des tems qu'elles y emploient.

## PROBLEME VII.

*La hauteur du Pole, & la déclinaiſon d'un Aſtre, étant données ; trouver ſon Arc ſemi-diurne !*

Dans la 1.re formule

$$rrh - rsx = cyu,$$

ou (Note de la page 4.)

$$rsx - rrh = cyu.$$

Faiſant $h = 0$, puiſque l'arc qu'on cherche, eſt terminé par l'horiſon ; l'on a pour le co-ſinus de l'angle horaire

$$u = \frac{rsx}{cy}.$$

Ou (faiſant la tangente de la hauteur du Pole $= S = \frac{rs}{c}$, & la tangente de la déclinaiſon de l'Aſtre $= X = \frac{rx}{y}$) on a

$$u = \frac{SX}{r}.$$

Or l'arc de l'Equateur, terminé par l'horiſon & par le Méridien, eſt l'arc ſemi-diurne de l'Aſtre qu'on a par cette Equation.

## PROBLEME VIII.

*La hauteur du Pole, & la déclinaiſon du Soleil, étant données ; trouver ſon Amplitude ortive ou occaſe.*

Prenant la 2.^de^ formule

$$rrx + nck = rhs,$$

ou plûtôt (Note de la page 4.)

$$rrx - nck = rhs.$$

Et faiſant $h = 0$, parce que l'Aſtre eſt dans l'horiſon, l'on a pour le co-ſinus de l'angle azymuthal, qui eſt l'amplitude, ou la portion de l'horiſon terminée par le Méridien & le point où l'Aſtre ſe lève ou ſe couche,

$$n = \frac{rx}{c}.$$

Ce Problème ſert à trouver la déclinaiſon de la Bouſſole.

## PROBLEME IX.

*La hauteur du Pole, & la déclinaiſon du Soleil, étant données ; trouver la réfraction horiſontale !*

Par la 1.re formule, & la note de la page 4,

$$rsx - rrh = cyu;$$

on a donc pour l'heure à laquelle le Soleil ſe lève,

$$u = \frac{rsx}{cy}, \quad \text{ou } u = \frac{SX}{r}.$$

Dans ce moment le Soleil eſt dans l'horiſon ; obſervant donc alors ſa hauteur apparente, on a la quantité dont la réfraction moins la parallaxe élève l'Aſtre : & ajoûtant à cette quantité la parallaxe, on a la réfraction.

## *Inſtrument Azymuthal.*

SI l'obſervation des Angles verticaux qui donnent les hauteurs des Aſtres, eſt d'un uſage qui paroît indiſpenſable dans l'Aſtronomie, l'obſervation des Angles horiſontaux qui donnent la projection des Aſtres ſur le plan de l'horiſon, n'eſt pas moins utile.

Tous les Obſervatoires ſont pourvûs de Quart-de-cercles ou d'autres Secteurs avec leſquels on obſerve les hauteurs ; mais des Inſtrumens azymuthaux qui donnent les lignes de la projection des Cercles verticaux ſur le plan de l'horiſon, ſont d'une conſtruction ſi difficile, que leur uſage eſt peu fréquent. Je ne ſçais ſi l'on a jamais conſtruit aucun Inſtrument de cette eſpèce, qui donnât une préciſion ſuffiſante, ou ſur laquelle on pût compter.

On en auroit un, & le plus parfait de

tous, ſi prenant le lieu de l'Obſervateur pour le centre, & l'horiſon ſenſible pour la circonférence d'un Cercle, on regardoit les différens objets qui le terminent, comme les diviſions de cette circonférence: & qu'on connût bien les Angles que forment entre ces objets les rayons qui partent du lieu de l'Obſervateur. Car mettant dans ce lieu une Lunette fixée à angles droits ſur un axe horiſontal, & mobile autour de cet axe dans des plans verticaux, les points de l'horiſon qui ſe rencontreroient au centre de la Lunette, détermineroient les projections des verticaux, & les angles entre ces points ſeroient les meſures des Azymuths.

Pour former ce grand Inſtrument, dont le limbe eſt l'horiſon ſenſible; & pour en marquer les diviſions par des meſures plus ſûres que celles des Quart-de-cercles, qui apporteroient à cet Inſtrument toutes les erreurs de leur conſtruction : il suffit d'avoir la hauteur du Pole du lieu où on le veut construire, la déclinaison de quelques Etoiles qui puissent être vûes dans tous les verticaux, & d'observer les angles horaires de ces Etoiles. Car la 3.$^{me}$ formule

$$\frac{n}{m} = \frac{syu - rcx}{ryt}$$

donnera tous les angles azymuthaux : & plongeant la Lunette dans l'horison, on y rencontrera quelqu'objet qui servira comme le point qu'on grave sur le limbe des Quart-de-cercles pour en marquer la division.

Si l'on choisit, pour faire la division de l'horison, un Astre qui soit dans l'Equateur, le calcul devient beaucoup plus simple ; car on a

$$\frac{n}{m} = \frac{su}{rt}.$$

Cet Instrument une fois construit, l'Astronome qui en sera muni, pourra se passer des observations des hauteurs des

Aſtres, & réduire tout aux obſervations de la Lunette & de la Pendule. Car par les angles azymuthaux & les tems, nos calculs déterminent les hauteurs & ſuppléent à toutes les autres obſervations.

Il eſt vrai que quelquefois les calculs en ſeront moins ſimples : mais c'eſt, ce me ſemble, une méthode avantageuſe que celle qui rejettant ſur le calcul les plus grandes difficultés de l'Aſtronomie, en rendra la pratique plus facile, & moins dépendante de l'exercice & de l'adreſſe des obſervateurs.

## *Des points où les Aſtres tombent ou s'élèvent perpendiculairement à l'horiſon.*

TOUS les Aſtres qui paſſent entre le Zénith & le Pole ont deux momens, l'un avant, l'autre après leur paſſage par le Méridien, où leur cours eſt perpendiculaire à l'horiſon, où les arcs qu'ils décrivent ſont communs au cercle parallèle à l'Equateur, & au Cercle azymuthal. Voici la maniére de trouver ces points.

## PROBLEME X.

*La hauteur du Pole, & la déclinaiſon d'un Aſtre, étant données ; trouver la hauteur à laquelle on le voit s'élever ou s'abaiſſer perpendiculairement à l'horiſon!*

L'Angle azymuthal qui répond à chaque point du cercle que décrit l'Aſtre, croît juſqu'à ce qu'il ſoit parvenu à cette partie qui eſt commune au Cercle parallèle & au Cercle azymuthal ; & cet angle décroît auſſi-tôt après. L'Angle azymuthal qui convient à cette partie du cours de l'Aſtre, eſt donc alors le plus grand qu'il puiſſe être.

Prenant donc la 2.[de] formule

$rrx + nck = rsh$ ; ou plûtôt

$rrx - rsh = nck$, pour ce cas où l'Etoile paſſe entre le Pole & le Zénith, on a

$$n = \frac{rrx - rsh}{ck};$$

Et ( faiſant $=$ o la différence de cette quantité, en ſuppoſant $c$ & $x$ conſtans) on a pour la hauteur à laquelle on voit l'Aſtre s'élever & s'abaiſſer perpendiculairement

$$h = \frac{rs}{x}.$$

Et pour l'Angle azymuthal qui eſt le plus grand,

$$n = \frac{r\sqrt{(xx - ss)}}{c}.$$

SCHOLIE.

On voit par cette valeur de $n$, qui devient imaginaire lorſque $s > x$, qu'il n'y a que les Aſtres qui paſſent entre le Zénith & le Pole, qui s'élèvent & retombent perpendiculairement à l'horiſon dans quelque partie de leur cours.

On tire de-là une méthode pour déterminer la réfraction.

## PROBLEME XI.

*La déclinaiſon d'un Aſtre étant donnée, ſa hauteur apparente dans le point où il décrit la partie verticale de ſon Cercle, & ſon Angle horaire pour l'inſtant de cette hauteur; trouver la réfraction qu'il éprouve!*

La réfraction élevant l'Aſtre verticalement, pendant qu'il décrit la partie verticale de ſon Cercle, elle ne change que ſa hauteur. L'inſtant qui termine cet angle, eſt le même que s'il n'y avoit point de réfraction.

Prenant donc la 1.re formule

$$rrh - rsx = cyu,$$

& y ſubſtituant pour $s$ & $c$ leurs valeurs tirées de la condition que l'arc que décrit l'Aſtre ſoit vertical, c'eſt-à-dire, tirées de $h = \frac{rs}{x}$, on a

$$h = \frac{rru}{\sqrt{(rryy + xxuu)}},$$

Qui, $x$ & $u$ étant donnés, eſt une quantité tout-à-fait donnée. Comparant cette $h$ à la hauteur obſervée au même inſtant, la différence de ces hauteurs donnera la réfraction.

*Correction du Midi déterminé par des hauteurs correſpondantes.*

ON peut par nos calculs trouver facilement la ſolution d'un Problème de grand uſage dans l'Aſtronomie, mais dont les ſolutions que quelques Auteurs nous ont données, ſont remplies de longueurs & d'embarras : c'eſt de trouver la correction qu'il faut faire au Midi déterminé par des hauteurs du Soleil correſpondantes.

Pour régler leur Pendule les Aſtronomes obſervent quelques hauteurs du Soleil avant midi, & les inſtans de ces hauteurs : après midi ils obſervent les mêmes hauteurs, & les inſtans où le Soleil s'y trouve. Si la déclinaiſon du Soleil demeuroit toûjours la même, en partageant en deux également les intervalles du tems écoulé entre chacune des hauteurs correſpondantes, le milieu ſeroit l'inſtant où le Soleil auroit paſſé au Méridien, ſeroit l'inſtant du Midi. On trouve ainſi l'inſtant de la culmination des Étoiles fixes, car le changement de déclinaiſon qu'elles éprouvent dans l'intervalle des obſervations, eſt trop peu de choſe pour qu'on y doive faire attention.

Il n'en eſt pas ainſi du Soleil ; ſa déclinaiſon change aſſés conſidérablement dans l'intervalle des obſervations, pour que l'inſtant auquel il paſſe au Méridien, ne ſoit pas également éloigné des inſtans des hauteurs correſpondantes.

Dans ces climats, lorſque le Soleil revient dans les Signes aſcendans, c'eſt-à-dire, s'approche de notre Zénith, il arrive après midi à la même hauteur où il a été vû le matin, plus tard qu'il n'auroit fait ſi ſa déclinaiſon n'avoit pas changé ; & s'il retourne dans les Signes deſcendans, il y arrive plûtôt. Le milieu

du

du tems écoulé entre les obſervations ne répond donc pas exactement à midi. Il faut, lorſque le Soleil s'approche de notre Zénith, en retrancher quelque choſe; & lorſque le Soleil s'en éloigne, il faut y ajoûter quelque choſe, pour que cette moitié réponde à l'inſtant du Midi.

Ce qu'il faut ici retrancher ou ajoûter, eſt le petit intervalle entre l'inſtant où le Soleil ſe trouve à la hauteur obſervée, & celui où il ſeroit à la même hauteur ſi ſa déclinaiſon n'avoit pas changé.

## PROBLEME XII.

*La hauteur du Pole étant donnée ; la déclinaiſon du Soleil, le tems écoulé entre deux hauteurs égales du Soleil, & le changement du Soleil en déclinaiſon pendant le tems écoulé entre ces deux hauteurs : trouver de combien l'inſtant du Midi diffère du milieu de ce tems !*

Soit la 1.re formule

$$rrh - rsx = cyu,$$

dont je cherche la petite variation, pendant que la hauteur du Pole & la hauteur du Soleil demeurent les mêmes, & j'ai

$$-rsdx = cydu + cudy, \text{ ou}$$

$$rysdy - cxudy = cxydu.$$

Pour réduire les différences des ſinus $dy$, $du$, aux petits arcs du Méridien $dD$, & de l'Equateur $dE$, l'on a

$$dy = \frac{xdD}{r} \;\&\; du = \frac{tdE}{r};$$

qui ſubſtitués dans l'Equation précédente, donnent pour le petit arc de l'Equateur qui répond au tems que l'on cherche,

$$dE = \left(\frac{rs}{ct} - \frac{xu}{yt}\right) dD.$$

Ou, prenant pour la tangente de la hauteur du Pole $\frac{S}{r} = \frac{s}{c}$ ; pour la tangente de la déclinaiſon $\frac{X}{r} = \frac{x}{y}$ ; & pour la tangente de l'Angle horaire, $\frac{T}{r} = \frac{t}{u}$, la formule devient plus ſimple, & eſt

$$dE = \left(\frac{S}{t} - \frac{X}{T}\right) dD.$$

La formule de cette correction donne le Problème ſuivant, qui eſt l'inverſe de celui-ci.

## PROBLEME XIII.

*La hauteur du Pole étant donnée ; la déclinaiſon du Soleil, le tems écoulé entre deux hauteurs égales, & la différence entre l'inſtant du Midi & le milieu de ce tems : trouver le changement du Soleil en déclinaiſon pendant le tems écoulé entre les obſervations.*

L'Equation précédente donne

$$dD = \left(\frac{cyt}{rsy - cxu}\right) dE, \text{ ou}$$

$$dD = \left(\frac{tT}{ST - tX}\right) dE.$$

### SCHOLIE.

Comme pour une même déclinaiſon du Soleil, & un même intervalle entre les obſervations, la correction du Midi varie ſuivant la hauteur du Pole, on peut par cette correction déterminer la hauteur du Pole du lieu où ſe font les obſervations.

## PROBLEME XIV.

*La déclinaison du Soleil étant donnée ; le tems écoulé entre deux hauteurs égales, le changement du Soleil en déclinaison pendant le tems écoulé entre ces hauteurs, & la différence entre l'instant du Midi & le milieu de ce tems : trouver la hauteur du Pole ?*

L'Equation précédente donne

$$\frac{rs}{c} = \frac{xu}{y} + t\frac{dE}{dD}, \text{ ou}$$

$$S = \frac{uX}{r} + t\frac{dE}{dD}.$$

### Scholie.

Je ne propose pas ceci comme un moyen pour trouver la hauteur du Pole avec une grande précision : c'est une méthode de Théorie plûtôt que de pratique.

## PROBLEME XV.

*La hauteur du Pole étant donnée ; & l'abaiſſement du Cercle crépuſculaire : trouver le jour du plus court crépuſcule !*

Le Cercle crépuſculaire eſt un Almicantarath que les Aſtronomes placent 18 degrés au deſſous de l'horiſon.

La durée du crépuſcule eſt le tems qui s'écoule depuis que le Soleil a quitté le Cercle crépuſculaire juſqu'à ce qu'il ait atteint l'horiſon.

Et il eſt évident que ce tems eſt égal à celui qui s'écoule depuis que le Soleil a quitté l'horiſon, juſqu'à ce qu'il ſoit parvenu à la hauteur de 18 degrés.

On a donc pour la durée du crépuſcule, l'arc de l'Equateur terminé par deux co-ſinus, dont l'un $u$ eſt le co-ſinus de l'angle horaire pour le moment où le Soleil eſt à l'horiſon, & l'autre $u'$ eſt le co-ſinus de l'angle horaire pour le moment où le Soleil est élevé de 18 degrés.

On a donc pour l'arc de l'Equateur qui répond à la durée du crépuscule

$$\int \frac{r\,du}{\sqrt{(rr-uu)}} - \int \frac{r\,du'}{\sqrt{(rr-u'u')}}$$

Qui (puisque le crépuscule doit être un *Minimum*) donne

$$\frac{du}{\sqrt{(rr-uu)}} - \frac{du'}{\sqrt{(rr-u'u')}} = 0.$$

Prenant donc dans la 1.re formule $cyu = rsx - rrh$, les valeurs de $u$ & de $u'$, & les substituant dans cette Equation, l'on a

$$\frac{d\left(\frac{rsx}{cy}\right)}{\sqrt{\left[rr - \frac{rrssxx}{ccyy}\right]}} - \frac{d\left(\frac{rsx-rrh}{cy}\right)}{\sqrt{\left[rr - \left(\frac{rsx-rrh}{cy}\right)^2\right]}} = 0.$$

Et différenciant ces quantités, en faisant $s$ & $h$ constantes ; l'on trouve

$$\frac{rdx}{yy}\left(\frac{s}{\sqrt{(cc-xx)}} + \frac{hx-rs}{\sqrt{(rrcc-rrxx+2rhsx-rrhh)}}\right)$$

$= 0$. D'où l'on tire

$$x = \left(\frac{r \pm k}{h}\right) s.$$

## SCHOLIE.

On trouve ici deux déclinaiſons du Soleil : celle dont le ſinus eſt $x=(\frac{r-k}{h})s$ donne, pour trouver le jour du plus court crépuſcule, l'Analogie que de célèbres Géomètres ont donnée ; ſçavoir, comme le rayon, eſt à la tangente de la moitié de l'abaiſſement du Cercle crépuſculaire ; ainſi le ſinus de la hauteur du Pole, eſt au ſinus de la déclinaiſon du Soleil pour le jour du plus court crépuſcule.

Mais la déclinaiſon dont le ſinus eſt $x=(\frac{r+k}{h})s$, que donne-t-elle ?

Il y a ici une difficulté que la limitation des autres Solutions de ce Problème avoit tenu cachée, & que découvre la généralité de la nôtre.

Lorſque le Pole eſt plus élevé que le Cercle crépuſculaire n'eſt abaiſſé, l'arc de l'Equateur écoulé pendant le crépuſcule, eſt la différence de deux arcs, dont les co-ſinus ſont d'un même côté par rapport au centre de la Sphere : l'une des déclinaiſons du Soleil qu'on trouve, donne le *Minimum* de la différence des deux arcs, ou le *Minimum* des crépuſcules ; l'autre déclinaiſon eſt imaginaire.

Mais lorſque le Pole eſt moins élevé que le Cercle crépuſculaire n'eſt abaiſſé, l'arc de l'Equateur écoulé pendant le crépuſcule, eſt la ſomme de deux arcs, dont les co-ſinus ſe trouvent de différens côtés par rapport au centre de la Sphere : & des deux déclinaiſons du Soleil, l'une donne le *Minimum* de la ſomme de ces deux arcs, qui eſt le *Minimum* des crépuſcules ; ce que l'autre donne, eſt le *Minimum* de la différence des deux arcs. C'eſt ce dernier cas qui étoit embarraſſant, mais il étoit important de le connoître. Sans cela ceux qui cherchoient le plus court crépuſcule, étoient exposés à prendre pour lui le crépuscule où les deux arcs qui forment l'arc de l'Equateur écoulé pendant sa durée, ont la plus grande différence : crépuscule qui n'est cependant ni le plus court ni le plus long.

## PROBLEME XVI.

*La hauteur du Pole, & la déclinaiſon du Soleil étant données ; trouver le tems que le Soleil emploie à s'élever au deſſus de l'horiſon, ou à s'abaiſſer de tout ſon Diſque !*

Dans la 1.re formule

$$rsx - rrh = cyu,$$

je fais varier $h$ & $u$, pendant que toutes les autres quantités demeurent conſtantes (car il ſeroit inutile de conſidérer ici le changement en déclinaiſon du Soleil pendant un ſi court eſpace de tems) & j'ai (à cauſe que $h$ croiſſant, $u$ diminue)

$$rrdh = cydu.$$

Rapportant maintenant ces différentielles de ſinus aux petits arcs de l'Equateur $dE = \frac{tdu}{t}$ & du vertical $dH = dh =$ au diametre du Soleil,

$$rrdH = (\frac{cyt}{r})\, dE,$$

ou (à cauſe qu'à l'horiſon $t = \frac{rr\sqrt{(yy-ss)}}{cy}$)

$$dE = \left(\frac{r}{\sqrt{(yy-ss)}}\right) dH.$$

Il faut obſerver que dans les lieux voiſins du Pole où le Soleil emploie un tems trop long à ſe lever & ſe coucher, ce calcul ſeroit défectueux ; parce qu'il ſuppoſe que $dH$ & $dE$ ſont des quantités fort petites.

## PROBLEME XVII.

*La hauteur du Pole, & la déclinaiſon du Soleil étant données; trouver le diamètre du Soleil par le tems qu'il emploie à s'élever ſur l'horiſon, ou à s'abaiſſer de tout ſon Diſque!*

L'Equation précédente donne

$$dH = \left(\frac{\sqrt{(yy - ss)}}{r}\right) dE.$$

## PROBLEME XVIII.

*TROUVER la hauteur du Pole, par le tems que le Soleil emploie à s'élever ſur l'horiſon, ou à s'abaiſſer de tout ſon Diſque!*

L'Equation précédente donne

$$s = \surd(yy - \frac{rrdH^2}{dE^2}).$$

### SCHOLIE.

Il eſt évident que la réfraction horiſontale, quelque grande qu'elle ſoit, n'apporte ici aucune erreur, pourvû ſeulement qu'elle demeure la même pendant l'obſervation, ce qu'on peut prendre pour vrai, vû le peu de tems que dure cette obſervation; car la réfraction ne fait ici que tranſporter l'horiſon un peu plus haut qu'il n'eſt, ou le change dans un Almicantarath fort peu élevé; & la durée du lever ou du coucher du Soleil eſt le tems qu'il emploie à s'élever de tout ſon diſque au deſſus de cet Almicantarath, ou à s'abaiſſer au deſſous, qui ne differe pas ſenſiblement du tems qu'il emploie à s'élever de la même quantité au deſſus du véritable horiſon, ou à s'abaiſſer.

On pourroit en quelque ſorte par ce Problème connoître ſur Mer la Latitude, ſi l'on s'y trouvoit dénué de tous Inſtrumens, par l'obſervation la plus ſimple de toutes. Quoique je ne donne pas ceci comme une méthode à employer, lorſqu'on peut en pratiquer de plus exactes, il arrive dans la Navigation des accidens ſi étranges, qu'on pourroit être heureux d'y avoir recours ; & il eſt toûjours utile au Navigateur de connoître toutes les reſſources de ſon art, chacune avec le degré de ſûreté qu'elle comporte, afin qu'il puiſſe s'en ſervir ſelon l'occaſion & le beſoin.

## PROBLEME XIX.

*La hauteur du Pole étant donnée ; la déclinaiſon d'un Aſtre, & ſa hauteur : trouver le tems qu'il emploie à s'élever ou à s'abaiſſer d'une petite quantité donnée !*

Dans la premiére formule

$$rrh - rsx = cyu;$$

faiſant varier $h$ & $u$, pendant que tout le reſte demeure conſtant, on a

$$rrdh = cydu.$$

Ou ſubſtituant les petits arcs de l'Equateur $dE = \frac{rdu}{t}$, & du vertical $dH = \frac{rdh}{k}$, on a

$$rrkdH = cytdE.$$

Subſtituant maintenant la valeur de $t = \frac{r\sqrt{(2rhsx + rrkk - rrss - rrxx)}}{cy}$, on a

$$dE = \left(\frac{rk}{\sqrt{(2rhsx + rrkk - rrss - rrxx)}}\right) dH.$$

PROBLEME

## PROBLEME XX.

*La hauteur du Pole étant donnée ; la déclinaison d'un Astre, & sa hauteur : trouver la petite hauteur dont il s'est élevé ou abaissé, par le tems qu'il y a employé!*

L'Equation précédente donne

$$dH = \frac{\sqrt{(2rhsx + rrkk - rrss - rrxx)}}{rk} dE.$$

## PROBLEME XXI.

*Trouver la hauteur du Pole, par le tems qu'un Aſtre, dont la déclinaiſon, & la hauteur ſont connues, emploie à s'élever ou à s'abaiſſer d'une petite quantité donnée!*

L'Equation précédente donne

$$s = \frac{hx}{r} \pm \frac{k}{r} \sqrt{(yy - \frac{rrdH^2}{dE^2})}.$$

### SCHOLIE.

Je n'ai propoſé ces moyens de déterminer la Latitude par les petits changemens d'élévation des Aſtres, & les tems écoulés pendant ces changemens, que comme des reſſources dans des cas extraordinaires, ou comme des ſuites de l'Analyſe que j'ai ſuivie dans cet ouvrage.

Le défaut des moyens que je viens de propoſer pour déterminer la Latitude, vient de ce qu'on la fait dépendre de trop petites quantités; ſur leſquelles une petite erreur commiſe, en cauſe une conſidérable ſur la Latitude.

Le défaut de la méthode ordinaire pour déterminer la Latitude, eſt que cette méthode dépendant de l'obſervation des Aſtres lorſqu'ils paſſent au Méridien, un nuage qui ſurvient dans ce moment, fruſtre le Navigateur de ſa Latitude.

La méthode ſuivante eſt exempte de ces défauts. Elle dépend de deux hauteurs quelconques d'un Aſtre, & du tems écoulé entre les obſervations de ces hauteurs.

## PROBLEME XXII.

*DEUX hauteurs d'un Aſtre, dont la déclinaiſon eſt connue, étant données, avec le tems écoulé entre les obſervations : trouver la hauteur du Pole, & l'heure des obſervations!*

Soient les ſinus des deux hauteurs $h$ & $h'$; les co-ſinus des angles horaires qui leur répondent, $u$, & $u'$: le ſinus de l'angle du tems écoulé entre les obſervations $= p$, ſon co-ſinus $= q$, ſon ſinus verſe $= o$.

L'on a $u' = \frac{qu - p\sqrt{(rr - uu)}}{r}$.

Et mettant dans cette E'quation les valeurs de $u$ & de $u'$, priſes dans la 1.re formule

$u = \frac{rrh - rsx}{cy}$, & $u' = \frac{rrh' - rsx}{cy}$; on a

$$\left.\begin{array}{l} ooxx \\ rrpp \end{array}\right\} ss \left\{\begin{array}{l} -2rrohx \\ -2rroh'x \end{array}\right\} s = \left\{\begin{array}{l} +rrppyy \\ +2r^3qhh' \\ -r^4hh \\ -r^4h'h' \end{array}\right.$$

Et prenant $A = ooxx + rrpp$, $B = rrohx + roh'x$, & $C = rrppyy + 2r^3qhh' - r^4hh - r^4h'h'$; on a pour le ſinus de la hauteur du Pole

$$s = \frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{(BB + AC)}.$$

Ayant la hauteur du Pole, il eſt évident qu'on aura les angles horaires par les Equations $u = \frac{rrh - rsx}{cy}$ ou $u' = \frac{rrh' - rsx}{cy}$, & l'heure des obſervations par l'aſcenſion droite de l'Aſtre.

SCHOLIE.

Si l'Aſtre qu'on obſerve, changeoit de déclinaiſon dans l'intervalle des obſervations, aſſés pour qu'on y dût faire attention, il faudroit faire à la ſeconde hauteur obſervée une correction : c'eſt-à-dire, il faudroit pour $h'$, mettre la hauteur à laquelle on auroit obſervé l'Aſtre, ſi la déclinaiſon étoit demeurée la même.

Pour trouver cette correction, il faut remonter à l'Equation $u' = \frac{rrh' - rsx}{cy}$, & y chercher la variation de $h'$, pendant que $x$ & $y$ varient d'une quantité donnée, & que $r, c, s,$ & $u'$, demeurent constantes. On a donc $d(\frac{rh' - sx}{y}) = \frac{rydh' - sydx - rh'dy + sxdy}{yy} = 0$, ou $dh' = \frac{rs - h'x}{yy} dx$; & $dx$ étant donné par le changement de déclinaison de l'Astre, on a la correction qu'il faut faire à la seconde hauteur observée, afin que l'$x$ & l'$y$ soient les mêmes dans l'Equation, qu'ils étoient au moment de la première observation.

Il est évident que ce Problème contient cet autre.

## PROBLEME XXIII.

*La hauteur d'un Aſtre, dont la déclinaiſon eſt connue, étant donnée ; & le tems écoulé entre l'obſervation, & le moment de ſon coucher : trouver la hauteur du Pole !*

Car alors il n'y a qu'à faire dans l'Equation précédente $h' = 0$, & l'on a

$$\left.\begin{matrix} ooxx \\ rrpp \end{matrix}\right\} ss - 2rrohxs = \left\{\begin{matrix} rrppyy \\ - r^4 hh. \end{matrix}\right.$$

Mais la réfraction horiſontale faiſant paroître l'Aſtre ſur l'horiſon plus longtems qu'il n'y eſt réellement, ce dernier Problème ne donneroit la hauteur du Pole que peu exactement ; à moins qu'on ne retranchât du tems écoulé, ce que la réfraction apporte de retardement au coucher de l'Aſtre. On trouvera ci-deſſous (Problème XXXIV.) le moyen de faire cette correction.

## SCHOLIE.

Notre Analyſe nous conduit à trouver la hauteur du Pole par un calcul beaucoup plus ſimple, ſi l'on veut ajoûter une condition qui ne rend pas l'opération plus difficile. C'eſt de choiſir quelqu'Etoile qui ſoit dans l'Equateur : & ſi elle en eſt ſeulement aſſés voiſine, on aura la hauteur du Pole aſſés exactement pour les uſages maritimes.

## PROBLEME XXIV.

*DEUX hauteurs d'un Astre qui est dans l'E'quateur, ou fort près de l'E'quateur, étant données, avec le tems écoulé entre; trouver la hauteur du Pole exactement, ou à peu-près!*

Faisant $x = 0$ dans l'Equation du Problème XXII, on a

$$ppss = r^2pp + 2rqhh' - r^2hh - r^2h'h';$$

ou

$$s = \frac{1}{p}\sqrt{(rrpp + 2rqhh' - rrhh - rrh'h')}.$$

## PROBLEME XXV.

*Deux passages d'une Etoile à deux verticaux, étant donnés par les Angles azymuthaux, & par les Angles horaires; trouver la hauteur du Pole, & la déclinaison de l'Etoile!*

Dans la 3.me formule

$$rnyt + rmcx = msyu.$$

Mettant pour la tangente de la déclinaison de l'Etoile $X = \frac{rx}{y}$; pour la co-tangente du premier angle azymuthal $N = \frac{rn}{m}$: on a

$$cX = su - Nt.$$

Prenant de même $N'$ pour la co-tangente du second angle azymuthal; & $t'$ & $u'$ pour les sinus & co-sinus du second angle horaire, on a les deux Equations

$$cX = su - Nt$$
$$cX = su' - N't'.$$

D'où l'on tire

$$su - su' = Nt - N't' : \text{ ou}$$

$$s = \frac{Nt - N't'}{u - u'}.$$

Et la hauteur du Pole étant ainsi trouvée, on a la déclinaison de l'Etoile par l'Equation

$$X = \frac{su - Nt}{r} = \frac{Ntu' - N't'u}{\sqrt{[(ru - ru')^2 - (Nt - N't')^2]}}.$$

## PROBLEME XXVI.

*La hauteur du Pole étant connue ; & deux Aſtres, dont les déclinaiſons, & les aſcenſions droites ſont données, étant vûs dans un même vertical : trouver l'heure de l'obſervation !*

La 3.$^{me}$ formule

$$rnyt + rmcx = msyu.$$

Mettant pour $\frac{rx}{y}$, $X$ tangente de la déclinaiſon de l'Aſtre, devient

$$cX = su - \frac{rnt}{m}.$$

Et prenant $X'$ pour la tangente de la déclinaiſon de l'autre Aſtre ; & $t'$ & $u'$ pour les ſinus & co-ſinus de ſon angle horaire : on a pour l'inſtant où les deux Aſtres paſſent au même vertical,

$$\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}, \text{ ou}$$

$$su't - sut' = cX't - cXt'.$$

Ou ( prenant $a$ pour le ſinus de l'arc qui répond à la différence d'aſcenſion droite des deux Aſtres, $b$ pour ſon coſinus ; ce qui donne $u't - ut' = ra$, & $t' = \frac{bt - a\sqrt{(rr - tt)}}{r}$)

$$rras = rcX't - bcXt + acX\sqrt{(rr - tt)}.$$

Ou ( prenant $A$ pour $rras$ ; $B$ pour $rcX' - bcX$ ; & $C$ pour $acX$)

$$t = \frac{AB}{BB + CC} \pm \frac{C}{BB + CC}\sqrt{(rrBB + rrCC - AA)}.$$

Ayant ainſi l'Angle horaire, ou le tems écoulé depuis le paſſage d'un des Aſtres par le Méridien, la différence de l'aſcenſion droite de cet Aſtre & du Soleil donne l'heure. Mais voici une maniére beaucoup plus facile de la trouver.

## PROBLEME XXVII.

*TROUVER l'heure de la nuit, indépendamment de la hauteur du Pole, par l'obſervation de deux Aſtres dans un même vertical ?*

Si l'on a deux Aſtres dont l'aſcenſion droite ſoit connue, & ſoit la même, ou à peu-près la même : lorſqu'ils ſeront dans un même vertical, ils ſeront au Méridien du lieu de l'obſervation ; & l'on aura l'heure par la différence entre leur aſcenſion droite & celle du Soleil.

Cette opération ſe peut faire facilement ſur Mer, & n'a beſoin d'aucun inſtrument. Car on ne peut pas appeller un inſtrument, un fil chargé d'un plomb, qui eſt tout ce qu'il faut pour la faire.

## PROBLEME XXVIII.

*Connoissant l'heure à laquelle on voit dans un même vertical deux Aſtres, dont les déclinaiſons, & les aſcenſions droites ſont données ; trouver la hauteur du Pole !*

La 3.$^{me}$ formule donne ici, comme dans le Problème XXV,

$$\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}.$$

Et l'heure étant connue, & les aſcenſions droites des deux Aſtres, les ſinus de leurs angles horaires au moment de l'obſervation ſont donnés : & l'on a pour la tangente de la hauteur du Pole,

$$\frac{rs}{c} = \frac{rX't - rXt'}{u't - ut'}.$$

## PROBLEME XXIX.

*Connoissant l'heure à laquelle on voit dans un même Almicantarath deux Aſtres, dont les déclinaiſons, & les aſcenſions droites ſont données ; trouver la hauteur du Pole !*

La 1.re formule donne

$$rrh = rsx + cyu$$

$$\& \quad rrh = rsx' + cy'u'.$$

On a donc

$$rsx - rsx' = cy'u' - cyu.$$

Et l'heure étant connue, & les aſcenſions droites des deux Aſtres ; les ſinus de leurs angles horaires au moment de l'obſervation, ſont donnés : & l'on a

$$\frac{rs}{c} = \frac{y'u' - yu}{x - x'}.$$

PROBLEME

## PROBLEME XXX.

*CONNOISSANT les déclinaiſons & les aſcenſions droites de trois E'toiles ; & l'intervalle de tems entre les momens où l'une des trois ſe trouve dans un même vertical que chacune des deux autres : trouver l'heure, & la hauteur du Pole !*

Soient les tangentes des déclinaiſons des trois E'toiles $X, X', X''$. Les ſinus & co-ſinus des angles horaires de la 1.re & de la 2.de, lorſqu'elles ſont dans un même vertical, $t, t'; u, u'$. Les ſinus & co-ſinus des angles horaires de la 1.re & de la 3.me, lorſqu'elles ſont dans un même vertical, $\vartheta, \vartheta'; \upsilon, \upsilon'$.

On aura par la 3.me formule

$$\frac{rn}{m} = \frac{su - cX}{t} = \frac{su' - cX'}{t'}$$

$$\frac{rn'}{m'} = \frac{s\upsilon - cX}{\vartheta} = \frac{s\upsilon' - cX''}{\vartheta'}; \quad \text{ou}$$

$$\frac{s}{c} = \frac{X't - Xt'}{u't - ut'} = \frac{X''\vartheta - X\vartheta'}{\upsilon'\vartheta - \upsilon\vartheta'}.$$

Ou (le ſinus de la différence d'aſcenſion droite de la 1.re & de la 2.de Etoile étant $= a$, ſon co-ſinus $= b$; & le ſinus de la différence d'aſcenſion droite de la 1.re & de la 3.me étant $= \alpha$, & ſon co-ſinus $= \beta$)

$$\frac{X't - Xt'}{a} = \frac{X''\vartheta - X\vartheta'}{\alpha}; \text{ ou}$$

$$\alpha Xt' - \alpha X't = aX\vartheta' - aX''\vartheta.$$

Ou (à cauſe de $t' = \frac{bt - au}{r}$ & $\vartheta' = \frac{\beta\vartheta - \alpha v}{r}$)

$$\alpha bXt - a\alpha Xu - r\alpha X't = a\beta X\vartheta - a\alpha Xv - raX''\vartheta.$$

Mais $t$ & $\vartheta$ étant les ſinus des angles horaires de la 1.re Etoile aux momens des deux obſervations ; & l'intervalle entre ces momens étant donné ; & le ſinus de l'arc qui lui répond étant $= p$, & ſon co-ſinus $= q$: l'on a $\vartheta = \frac{qt - pu}{r}$ & $v = \frac{pt + qu}{r}$. Et mettant ces valeurs de $\vartheta$ & de $v$, dans l'Equation précédente : on trouve pour la co-tangente de l'angle horaire de la 1.re Etoile au moment de la 1.re observation,

$$\frac{ru}{t} = r\left(\frac{r\alpha bX + a\alpha pX - a\beta qX - rr\alpha X' + raqX''}{ra\alpha X - a\beta pX - a\alpha qX + rapX''}\right).$$

Ayant ainsi l'angle horaire de la 1.re Etoile au moment de la première observation, on a l'heure de cette observation : on a aussi l'angle horaire de la 2.de Etoile au même instant par l'Equation $t' = \frac{bt - au}{r}$ : & la hauteur du Pole, en substituant les valeurs de $t$ & de $t'$ dans l'Equation

$$\frac{s}{c} = \frac{X't - Xt'}{ar}.$$

*Coroll.* Si l'on prend la 1.re Etoile dans l'Equateur, $X = 0$ : & tout le calcul devient beaucoup plus simple : car la co-tangente de l'angle horaire de cette Etoile au moment de la première obſervation, ſe réduit à

$$\frac{ru}{t} = r\left(\frac{q}{p} - \frac{r\alpha X'}{apX''}\right).$$

Et l'on trouve beaucoup plus ſimplement la hauteur du Pole.

## SCHOLIE.

Ce Problème peut être d'une grande utilité ſur Terre & ſur Mer, parce qu'il n'y a point d'obſervation plus facile ni plus ſûre que celle du paſſage des Aſtres par un vertical, & qu'on évite ici entiérement l'effet de la réfraction qui apporte tant de troubles aux autres obſervations.

## PROBLEME XXXI.

*Trois hauteurs d'un Aſtre étant données avec les deux intervalles de tems écoulé entre : trouver la déclinaiſon de l'Aſtre ; & la hauteur du Pole !*

I. Soient les trois hauteurs $= h, h', h''$.

Les co-ſinus des angles horaires $= u, u', u''$.

Les ſinus des intervalles des tems écoulés $= p, p'$ ; & leurs co-ſinus $= q, q'$.

Par la 1.re formule, on a

$$rsx = rrh - cyu$$
$$rsx = rrh' - cyu'$$
$$rsx = rrh'' - cyu''.$$

D'où l'on tire

$$cy = \frac{rr(h-h')}{u-u'} = \frac{rr(h-h'')}{u-u''};$$

Ou (faiſant $h - h' = D$, $h - h'' = D'$)

$$D'u - D'u' = Du - Du''.$$

Mais on a $u' = \frac{qu - pt}{r}$, & $u'' = \frac{q'u - p't}{r}$; qui étant ſubſtitués dans l'Equation précédente, donnent

$$D'ru - D'qu + D'pt = Dru - Dq'u + Dp't.$$

Ou (mettant pour $r - q$, & $r - q'$, les ſinus verſes des tems écoulés $o$, $o'$)

$$D'ou + D'pt = Do'u + Dp't.$$

D'où l'on tire pour la tangente de l'Angle horaire de l'Aſtre au moment de la premiére obſervation,

$$\frac{rt}{u} = r\left(\frac{Do' - D'o}{D'p - Dp'}\right).$$

Connoiſſant ce 1.er angle horaire; on a le 2.d & le 3.me en remontant aux Equations $u' = \frac{qu - pt}{r}$ & $u'' = \frac{q'u - p't}{r}$. Et l'on a leurs trois co-ſinus, $u$, $u'$, $u''$, dont deux ſuffiſent pour le reſte de la ſolution du Problème.

Car la 1.re formule donnant

$$rrh - rsx = cyu$$

$$rrh' - rsx = cyu'.$$

On a

$$cy = \frac{rr(h-h')}{(u-u')}; \text{ \&}$$

$$sx = \frac{r(h'u-hu')}{(u-u')}.$$

Ou (faisant $u - u' = \Delta$, & $h'u - hu' = rA$)

$$cy = \frac{rrD}{\Delta}, \text{ \&}$$

$$sx = \frac{rrA}{\Delta}; \text{ ou}$$

$$(rr - xx)\,cc = \frac{r^4 DD}{\Delta\Delta}, \text{ \&}$$

$$rrxx - ccxx = \frac{r^4 AA}{\Delta\Delta}.$$

Et chassant $cc$ de ces Equations, on a

$$\Delta\Delta x^4 + \left\{\begin{matrix} -rr\Delta\Delta \\ -rrAA \\ +rrDD \end{matrix}\right\} xx + r^4 AA = 0.$$

Ou (faisant $\Delta\Delta + AA - DD = BB$)

$$xx = \frac{rrBB}{2\Delta\Delta} \pm \frac{rr}{2\Delta\Delta}\sqrt{(B^4 - 4AA\Delta\Delta)}.$$

On a ainſi la déclinaiſon de l'Aſtre.

2. Ayant la déclinaiſon de l'Aſtre; il eſt facile d'avoir la hauteur du Pole. Car il eſt évident que dans les deux Equations $cy = \frac{rrD}{\Delta}$, & $sx = \frac{rrA}{\Delta}$, les ſinus & les co-ſinus de la déclinaiſon de l'Aſtre, & de la hauteur du Pole, ſe trouvant combinés de la même maniére; on trouvera pour le ſinus de la hauteur du Pole, la même expreſſion qu'on vient de trouver pour le ſinus de la déclinaiſon de l'Aſtre

$$ss = \frac{rrBB}{2\Delta\Delta} \mp \frac{rr}{2\Delta\Delta} \sqrt{(B^4 - 4AA\Delta\Delta)}.$$

Equivoque attaché à la nature de ce Problème. Si l'on veut donc s'en ſervir, il faudra choiſir quelqu'Aſtre dont la déclinaiſon differe aſſés de la hauteur du Pole, pour que l'une ne puiſſe pas être priſe pour l'autre.

## SCHOLIE.

C'eſt ce fameux Problème auquel les Géomètres & les Aſtronomes de l'Académie de Ruſſie ſe ſont tant appliqués, & dont ils ont donné pluſieurs belles ſolutions.

Je crois cependant ce Problème plus curieux qu'utile ; car ſur la Terre on a trop d'autres moyens de trouver la déclinaiſon des Etoiles & la hauteur du Pole, pour avoir recours à celui-ci. Sur la Mer, dès qu'on connoît l'Etoile qu'on obſerve, on a par les catalogues d'Etoiles la déclinaiſon avec plus de préciſion qu'il n'eſt néceſſaire, pour la Latitude Nautique. Et ſi l'on vouloit ſe ſervir d'une Etoile qu'on ne connût pas, ou obſerver entre des nuages une Etoile qu'on croiroit être la même que celle qu'on auroit obſervée aux premiéres hauteurs, on ſeroit expoſé à des mépriſes bien dangereuſes.

## PROBLEME XXXII.

*L'OBLIQUITÉ de l'Ecliptique, & la durée du plus long ou du plus court jour dans quelque lieu, étant données : trouver la hauteur du Pole, en négligeant la réfraction, & la parallaxe!*

La 1.re formule, lorsque le jour commence ou finit, que $h = 0$, donne

$$\frac{s}{c} = \frac{yu}{rx}.$$

Ou (prenant $S$ pour la tangente de la hauteur du Pole, & $Y$ pour la co-tangente de la plus grande déclinaison du Soleil) on a

$$S = \frac{uY}{r}.$$

## PROBLEME XXXIII.

*L'OBLIQUITÉ de l'Écliptique, & la hauteur du Pole, étant données : trouver la durée du plus long ou du plus court jour, s'il n'y avoit point de réfraction, ni de parallaxe!*

L'on a par la 1.re formule

$$u = \frac{rsx}{cy}.$$

Ou (prenant comme dans le Problème précédent $S$ pour la tangente de la hauteur du Pole, & $X$ pour la tangente de la plus grande déclinaison du Soleil)

$$u = \frac{SX}{r}.$$

### SCHOLIE.

C'est ainsi, ou du moins dans ces circonstances, que les Anciens déterminoient la hauteur du Pole. Et Ptolémée qui nous a laissé les hauteurs du Pole pour un grand nombre de Villes, préféroit cette méthode à toutes les autres.

Ils ignoroient les effets de la Réfraction & de la Parallaxe, & choisissoient le jour du Solstice, parce que dans ce jour le Soleil ne changeant pas sensiblement en déclinaison, le Problème est plus facile à résoudre.

Cependant l'ignorance où ils étoient sur la Réfraction & la Parallaxe, leur peu d'exactitude sur l'obliquité de l'Ecliptique & sur la mesure du tems, rendoient toutes leurs Latitudes défectueuses.

Dans les Problèmes suivans, non seulement je corrige les erreurs que causent la Réfraction & la Parallaxe, mais encore je délivre le Problème de la restriction au jour du Solstice.

Enfin je le délivre même de la condition de Stabilité pour l'Observateur; & j'apprends à le résoudre sur la Mer, quel que soit le jour de l'année, & quelle que soit la route du Navigateur.

## PROBLEME XXXIV.

*L'OBLIQUITÉ de l'E'cliptique, la durée du jour solsticial, & la réfraction horisontale & la parallaxe, étant données : trouver l'altération causée à la durée du jour par la réfraction & la parallaxe !*

Dans la 1.re formule

$$rsh - rrh = cyu,$$

Prenant la petite variation, en faisant $s$ & $x$ constans ; & observant que $h$ croissant, $u$ diminue ; l'on a

$$rrdh = cydu.$$

Ou ( substituant le petit arc de l'E'quateur $dE = \frac{rdu}{t}$)

$$rrdH = \frac{cyt}{r} dE,$$

ou (à cause de $c = \frac{rrx}{\sqrt{(rrxx + yyuu)}}$)

$$dE = \frac{r\sqrt{(rrxx + yyuu)}}{xyt} dH.$$

## SCHOLIE.

Ayant ainſi le petit arc de l'Equateur qui répond à la quantité dont la réfraction, moins la parallaxe, allonge le jour ſolſticial : réduiſant cet arc en tems, & le retranchant de la durée obſervée ; l'on a la durée telle qu'elle ſeroit ſans la réfraction & la parallaxe ; & corrigeant ainſi la durée du jour ſolſticial, on a la hauteur du Pole par le Problème XXXII.

## PROBLEME XXXV.

*L'OBLIQUITÉ de l'Ecliptique, & la durée du jour ſolſticial, étant données : trouver l'erreur que la réfraction & la parallaxe cauſent ſur la hauteur du Pole !*

Ce Problème ſe réduit à chercher la différence en Latitude de deux Obſervateurs, pour leſquels la durée du jour ſolſticial ſeroit la même, mais dont l'un verroit le Soleil comme on le voit, ſes rayons briſés par l'Atmoſphere, & l'autre le verroit ſans réfraction.

Je prends donc la petite variation de la 1.re formule

$$rsx - rrh = cyu,$$

en ſuppoſant $r$, $x$, & $u$, conſtans ; & j'ai

$$rrdh - rxds + yudc = 0.$$

Ou (ſubſtituant les petits arcs du Méridien $dL = \frac{rds}{c} = \frac{-rdc}{s}$ pour $ds$ & $dc$, & $dH$ pour $dh$)

$$r^3 dH - rcxdL - syudL = 0.$$

Ou ( à cauſe qu'à l'horiſon l'on a $rxs = cyu$, & que $c = \frac{rrx}{\sqrt{(rrxx+yyuu)}}$)

$$r^3dH - \frac{rccxdL - rssxdL}{c} = 0, \text{ ou}$$

$$dL = \frac{c}{x} dH, \quad \text{ou}$$

$$dL = \frac{rr}{\sqrt{(rrxx+yyuu)}} dH.$$

SCHOLIE.

Ce qu'on ſuppoſe ici, que $rxs = cyu$, n'approche de la vérité qu'autant que les ſinus de la déclinaiſon du Soleil, de la hauteur du Pole, & de ſon complément, ſont beaucoup plus grands que la réfraction horiſontale. Si donc on veut chaſſer $c$ & $s$ de l'Equation précédente, ou des Equations ſuivantes, lorſque $s$, $c$, ou $x$, ſont petits, il faut recourir à l'Equation entiére de la 1.re formule

$$rsx - rrh = cyu,$$

& y prendre les valeurs de $c$, ou de $s$, qu'on veut ſubſtituer.

PROBLEME

## PROBLEME XXXVI.

*L'OBLIQUITÉ de l'Ecliptique, la durée du jour solsticial, & la hauteur du Pole, étant données : trouver la différence de la réfraction horisontale & de la parallaxe !*

Par le Problème XXXIII. on a la durée du jour solsticial tel qu'il seroit sans réfraction & sans parallaxe.

Par l'observation, l'on a la durée de ce même jour, telle qu'elle est, augmentée par la différence de la réfraction & de la parallaxe.

La différence de ces deux durées donne $dE$.

Et l'on a par le Problème XXXIV. pour la réfraction horisontale, moins la parallaxe,

$$dH = \frac{xyt}{r\sqrt{(rrxx + yyuu)}}\, dE.$$

## PROBLEME XXXVII.

*La durée du jour étant donnée ; la déclinaison du Soleil, & son changement en déclinaison : trouver l'altération causée à la durée du jour par ce changement !*

Prenant la petite variation dans la 1.re formule, $rsx - rrh = cyu$ : lorsque $h = 0$, & que $s$ est constant ; on a

$$rsdx = cudy + cydu.$$

Ou (substituant le petit arc du Méridien $dD = \frac{rdx}{y} = - \frac{rdy}{x}$, & le petit arc de l'Equateur $dE = \frac{rdu}{t}$, & pour $s$, sa valeur prise dans l'Equation $rsx = cyu$)

$$dE = \frac{rru}{xyt} dD.$$

## PROBLEME XXXVIII.

*Trouver sur Mer la hauteur du Pole par la durée du jour!*

Je cherche d'abord toutes les altérations que causent à la durée du jour, la réfraction & la parallaxe; le changement du Soleil en déclinaison; & le changement de lieu du Vaisseau.

Prenant la 1.re formule

$$rsx - rrh = cyu;$$

j'y fais tout varier; & j'ai

$$rxds + rsdx - rrdh = yudc + cudy + cydu.$$

Ou (mettant pour la différence du sinus de déclinaison le petit arc $dD = \frac{rdx}{y} = - \frac{rdy}{x}$; pour la différence du sinus de la hauteur du Pole, le petit arc du Méridien $dL = \frac{rds}{c} = - \frac{rdc}{s}$;

pour la différence du ſinus de l'angle horaire, le petit arc de l'Equateur $dE = \frac{rdu}{t}$; laiſſant $dH$ pour le petit arc du vertical, dont la réfraction moins la parallaxe élève le Soleil à l'horiſon ; & nommant $dF$ le petit arc de l'Equateur qui répond au chemin du vaiſſeau en longitude) on aura pour le petit arc de l'Equateur qui répond au tems de toutes les altérations,

$$dE = \frac{r^3}{cyt} dH \pm \frac{rru}{xyt} dD \pm \frac{r^3 x}{ccyt} dL \pm dF.$$

Ou (mettant pour $\frac{rx}{y}$ la tangente $X$ de la déclinaiſon du Soleil, & pour $\frac{ru}{t}$ la co-tangente $V$ de l'angle horaire)

$$dE = \frac{r^3}{cyt} dH \pm \frac{rV}{xy} dD \pm \frac{rrX}{cct} dL \pm dF.$$

Faiſant à la durée du jour obſervée, toutes ces corrections ; on a la durée, telle qu'elle ſeroit, s'il n'y avoit ni réfraction, ni parallaxe ; ni changement du Soleil en déclinaiſon; ni changement de lieu du Vaiſſeau.

Et l'on a par la 1.re formule $rsx = cyu$, pour la tangente de la hauteur du Pole, $\frac{rs}{c} = \frac{Yu}{r}$.

## SCHOLIE.

Dans cette expreſſion les ſignes des altérations cauſées par le changement de déclinaiſon du Soleil, le changement de lieu du Vaiſſeau en latitude, & ſon changement en longitude, ſont ambigus ; parce que chacune de ces trois altérations peut allonger ou accourcir la durée du jour. Il n'y a que l'altération cauſée par la différence de la réfraction & de la parallaxe, qui l'allonge toûjours.

J'ai laiſſé, dans cette expreſſion des altérations, le co-ſinus de la hauteur du

Pole, qui eſt ce qu'on cherche. On pourroit le faire diſparoître, en prenant ſa valeur dans la 1.re formule ; mais comme le calcul deviendroit fort compliqué, & qu'il n'eſt pas ici queſtion d'une exactitude trop ſcrupuleuſe, il vaut mieux prendre d'abord la hauteur du Pole groſſiérement déterminée, telle que la 1.re formule la donne, en la concluant par la durée du jour, ſans y faire aucune correction ; & s'en ſervir pour chaſſer $c$ de l'expreſſion des altérations.

Quant aux quantités $dH$, $dD$, $dL$, $dF$; il eſt évident que $dH$ eſt la quantité de la réfraction diminuée de la Parallaxe : que $dD$ eſt la quantité dont la déclinaiſon du Soleil a changé depuis ſon lever, qui eſt donnée dans les Tables : que $dL$ eſt la quantité dont le Vaiſſeau s'eſt élevé ou abaiſſé en latitude pendant la durée du jour, qui eſt donnée par la route du Vaiſſeau : qu'enfin *dF,* différence en longitude, eſt auſſi donnée par la route, en ſuppoſant qu'on connoiſſe la latitude à peu-près.

Cette méthode, malgré tout ce que j'ai fait pour la rendre univerſelle, a encore quelques reſtrictions à quoi la nature de la choſe la borne.

On voit, par exemple, qu'au tems où le Soleil eſt dans l'Equateur, la durée du jour étant la même par toute la Terre, on ne ſçauroit connoître par elle la hauteur du Pole.

On voit encore que ſi les altérations cauſées à la durée du jour par quelques-unes des cauſes que nous avons expliquées, étoient trop grandes, la méthode ſeroit défectueuſe, parce qu'elle ſuppoſe que ces altérations ſont fort petites par rapport aux quantités qui entrent dans le calcul.

Il y a une remarque à faire, qui peut

faciliter cette méthode de trouver la hauteur du Pole, ſans lui faire perdre beaucoup de ſa préciſion. C'eſt que négligeant les petites différences des grandeurs apparentes du diamètre du Soleil, on peut aſſés exactement ſtatuer ſon diamètre égal à la quantité dont la réfraction élève les Aſtres à l'horiſon.

En ſorte qu'au lever du Soleil, lorſqu'on obſerve ſon bord inférieur toucher l'horiſon, ſon bord ſupérieur ne fait réellement que l'atteindre ; & ſi l'on ajoûte à l'heure de l'émerſion apparente du bord inférieur, la moitié du tems que le Soleil emploie à s'élever de tout ſon Diſque, on aura le moment de l'émerſion du centre. De même au coucher du Soleil, l'inſtant où le bord ſupérieur du Soleil paroît dans l'horiſon, peut être pris pour l'inſtant où le bord inférieur s'y trouve réellement. Si donc on ſouſtrait de l'heure de l'immerſion apparente du bord ſupérieur, la moitié du tems que le Soleil emploie à cacher entiérement ſon Diſque, on aura le moment de l'immerſion du centre.

Cette pratique peut diſpenſer de la correction que nous avons donnée pour la réfraction. Et c'eſt une choſe aſſés heureuſe pour le Navigateur, que la grandeur du Diſque du Soleil ſoit une meſure de la réfraction, & qu'elle puiſſe lui ſervir à en éviter les effets.

## PROBLEME XXXIX.

*Connoissant la déclinaiſon & l'aſcenſion droite de deux Aſtres, & le tems écoulé entre leur lever ou leur coucher : trouver la hauteur du Pole !*

Puiſqu'on obſerve les deux Aſtres dans l'horiſon, l'on a par la 1.re formule

$$rsx = cyu, \; \& \; rsx' = cy'u'.$$

Ou ( mettant pour $\frac{rx}{y}$ & $\frac{rx'}{y'}$ les tangentes $X$ & $X'$ des déclinaiſons des deux Aſtres) on a

$$sX = cu, \; \& \; sX' = cu';$$

D'où l'on tire

$$\frac{s}{c} = \frac{u}{X} = \frac{u'}{X'}, \text{ ou } \frac{u'}{u} = \frac{X'}{X}.$$

Or puiſque l'aſcenſion droite des deux Aſtres eſt donnée ; & la différence des tems de leur immerſion dans l'horiſon, ou de leur émerſion : on a la différence de leurs angles horaires qui conviennent à ces momens : & ſoit le ſinus de l'angle, qui eſt cette différence $=p$, & ſon coſinus $=q$. Et l'on aura ( à cauſe de $u'=\frac{qu-p\sqrt{(rr-uu)}}{r}$)

$$\frac{u'}{u}=\frac{qu-p\sqrt{(rr-uu)}}{ru}=\frac{X'}{X}.$$

D'où l'on tire

$$uu=\frac{rrppXX}{rrXX+rrX'X'-2rqXX'},\ \&$$

$$\frac{rs}{c}=\frac{ru}{X}=\frac{rp}{\sqrt{(rrXX+rrX'X'-2rqXX')}}.$$

Juſqu'ici nous n'avons point eu d'égard à la réfraction, ni à la parallaxe. Pour en corriger l'effet, il faut chercher combien elles accélerent l'apparition, ou retardent la diſparition de chaque Aſtre.

Pour cela, je prends la petite variation de la 1.re formule, en ſuppoſant $s$ & $x$ conſtans : & j'ai

$$rrdh=cydu,\ \&\ rrdh'=cy'du'.$$

Ou (ſubſtituant les petits arcs de l'Equateur $dE=\frac{rdu}{t}$, $dE'=\frac{rdu'}{t'}$)

$$dE = \frac{r^3 dH}{cyt},\ dE' = \frac{r^3 dH'}{cy't'}.$$

Ou ( à cauſe de $c = \frac{rrx}{\sqrt{(rrxx + yyuu)}}$ )

$$dE = \frac{r\sqrt{(rrxx + yyuu)}}{xyt} dH,\ \&$$

$$dE' = \frac{r\sqrt{(rrxx + yyuu)}}{xy't'} dH'.$$

Ces deux quantités, réduites en tems, ſont les corrections qu'il faut faire au tems écoulé entre les apparitions & les diſparitions des deux Aſtres, pour avoir l'intervalle écoulé entre leurs véritables émerſions ou immerſions dans l'horiſon : & c'eſt de cet intervalle ainſi corrigé, réduit en arc de l'Equateur, que $p$ & $q$ doivent être les ſinus & co-ſinus.

## SCHOLIE.

Il eſt évident que ce Problème en contient un autre, que quelques Aſtronomes ont propoſé comme pouvant être fort utile ſur Mer. Celui-là conſiſte à *Trouver la hauteur du Pole par l'obſervation* *de deux E'toiles, dont les déclinaiſons & les aſcenſions droites ſoient connues, & qui ſe trouvent au même inſtant dans l'horiſon.* Mais ce Problème ne ſçauroit être d'aucune utilité ni ſur Mer, ni ſur Terre, parce que cette condition, que les deux E'toiles ſe lèvent ou ſe couchent en même tems, reſtreint pour chaque latitude le Problème à un fort petit nombre d'E'toiles, & qu'on ne peut d'ordinaire voir dans l'horiſon les E'toiles, même les plus brillantes.

J'ai étendu ce Problème, en l'affranchiſſant de la condition du lever & du coucher ſimultané ; & comme alors on peut choiſir tels Aſtres qu'on voudra, on aura une méthode fort facile pour trouver la hauteur du Pole ſur Mer par les obſervations du Soleil, de la Lune, de Vénus, ou de Jupiter dans l'horiſon.

*Méthode pour trouver la déclinaiſon des E'toiles, & la hauteur du Pole, indépendamment l'une de l'autre, & ſans ſe ſervir d'aucun angle meſuré par des arcs de Cercle.*

CETTE méthode, l'une des plus belles & des plus utiles de l'Aſtronomie, puiſque les déclinaiſons des E'toiles ſervent de baſe à cette ſcience, eſt dûe à M. Mayer, à qui l'Aſtronomie doit pluſieurs autres excellentes choſes. On peut dire cependant qu'il l'a plûtôt indiquée que donnée. Elle eſt compliquée; mais elle eſt ſi belle & ſi utile, que je me ſuis appliqué à la déduire de mes Formules, d'où elle découle fort naturellement. La voici.

## PROBLEME XL.

*Les passages de deux E'toiles par le Méridien, par deux Verticaux, & par deux Almicantaraths inconnus, mais constans, étant donnés : trouver la déclinaison de ces E'toiles, & la hauteur du Pole !*

Soient les sinus & les co-sinus des déclinaisons des deux E'toiles $x$, $y$, & $x'$, $y'$. Les co-sinus des angles horaires, lorsqu'elles passent au 1.er Almicantarath $v$ & $v'$; & les co-sinus lorsqu'elles passent au 2d, $v''$ & $v'''$.

La 1.re formule donne pour le passage au 1.er Almicantarath

$$rrh - rsx = cyv$$

$$rrh - rsx' = cy'v', \quad \text{ou}$$

$$\frac{s}{c} = \frac{y'v' - yv}{rx - rx'}.$$

Pour le passage au 2.d Almicantarath

$$\frac{s}{c} = \frac{y'v''' - yv''}{rx - rx'}.$$

On a donc

$$\frac{y'}{y} = \frac{v - v''}{v' - v'''}.$$

Nommant $t$, $t'$, & $u$, $u'$, les ſinus & co-ſinus des angles horaires des Etoiles, lorſqu'elles paſſent au 1.^er vertical : & $t''$, $t'''$, & $u''$, $u'''$, les ſinus & co-ſinus, lorſqu'elles paſſent au 2.^d ;

La 3.^me formule donne pour le paſſage au 1.^er vertical

$$\frac{n}{m} = \frac{syu - rcx}{ryt}$$

$$\frac{n}{m} = \frac{sy'u' - rcx'}{ry't'}.$$

Ou $syy't'u - rcxy't' = syy'tu' - rcx'yt$,

ou $\frac{s}{c} = \frac{rxy't' - rx'yt}{yy't'u - yy'tu'}$.

Pour le paſſage au 2.^d vertical

$$\frac{s}{c} = \frac{rxy't''' - rx'yt''}{yy't'''u'' - yy't''u'''}.$$

On a donc

$$\frac{xy't' - x'yt}{t'u - tu'} = \frac{xy't''' - x'yt''}{t'''u'' - t''u'''}.$$

Ou (nommant $a$ le ſinus de la différence

des

des arcs horaires terminés par les ſinus $t$ & $t'$ : & $a'$ le ſinus de la différence des arcs terminés par les ſinus $t''$ & $t'''$; ce qui donne $ar = t'u - tu'$, & $a'r = t'''u'' - t''u'''$; on a

$$a'xy't' - a'x'yt = axy't''' - ax'yt'',$$

$$\& \ \frac{x'y}{xy'} = \frac{at''' - a't'}{at'' - a't},$$

$$\text{ou } \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \times \frac{at''' - a't'}{at'' - a't}.$$

Ou ( mettant pour $\frac{y'}{y}$ ſa valeur $\frac{v - v''}{v' - v'''}$ priſe dans l'Equation des paſſages aux Almicantaraths )

$$\frac{x'}{x} = \frac{v - v''}{v' - v'''} \times \frac{at''' - a't'}{at'' - a't}.$$

L'Equation des paſſages aux Almicantaraths donne

$$y'y' = \left(\frac{v - v''}{v' - v'''}\right)^2 yy = \frac{(v - v'')^2}{(v' - v''')^2}(rr - xx).$$

Celle des paſſages aux verticaux, donne

$$x'x' = \left(\frac{v - v''}{v' - v'''}\right)^2 \times \left(\frac{at''' - a't'}{at'' - a't}\right)^2 xx.$$

On a donc

$$\frac{(v - v'')^2\, rr}{(v' - v''')^2} - \frac{(v - v'')^2\, xx}{(v' - v''')^2} +$$

$$\frac{(v - v'')^2 \times (at''' - dt')^2\, xx}{(v' - v''')^2\, (at'' - dt)^2} = rr, \text{ ou}$$

$$x = \frac{r(at'' - dt)\, \sqrt{[(v' - v''')^2 - (v - v'')^2]}}{(v - v'') \times \sqrt{[(at''' - dt')^2 - (at'' - dt)^2]}}.$$

Ayant ainsi la déclinaison d'une des Etoiles, on trouve facilement la déclinaison de l'autre ; & l'on a la hauteur du Pole par l'Equation

$$\frac{s}{c} = \frac{y'v' - yv}{rx - rx'}.$$

**FIN.**