

Traité de dynamique, dans lequel les loix de l'équilibre & du mouvement des corps sont réduites au plus petit nombre possible. Et démontrées d'une manière nouvelle, & où l'on donne un principe général pour trouver le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres, d'une manière quelconque / par M. d'Alembert.

Contributors

Alembert, Jean Le Rond d', 1717-1783.

Publication/Creation

A Paris : Chez David l'aîné, libraire ..., 1743.

Persistent URL

<https://wellcomecollection.org/works/fx63496v>

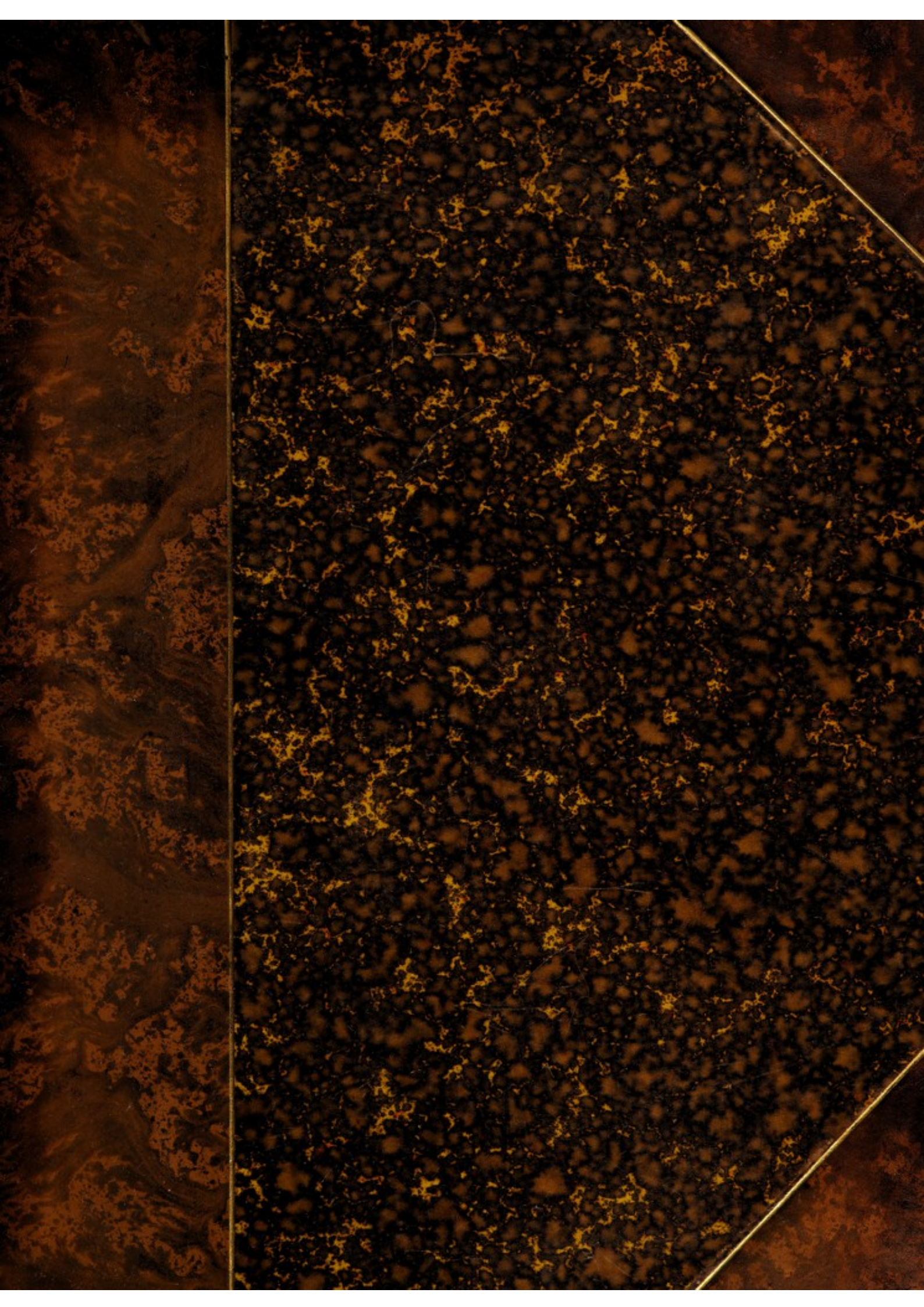
License and attribution

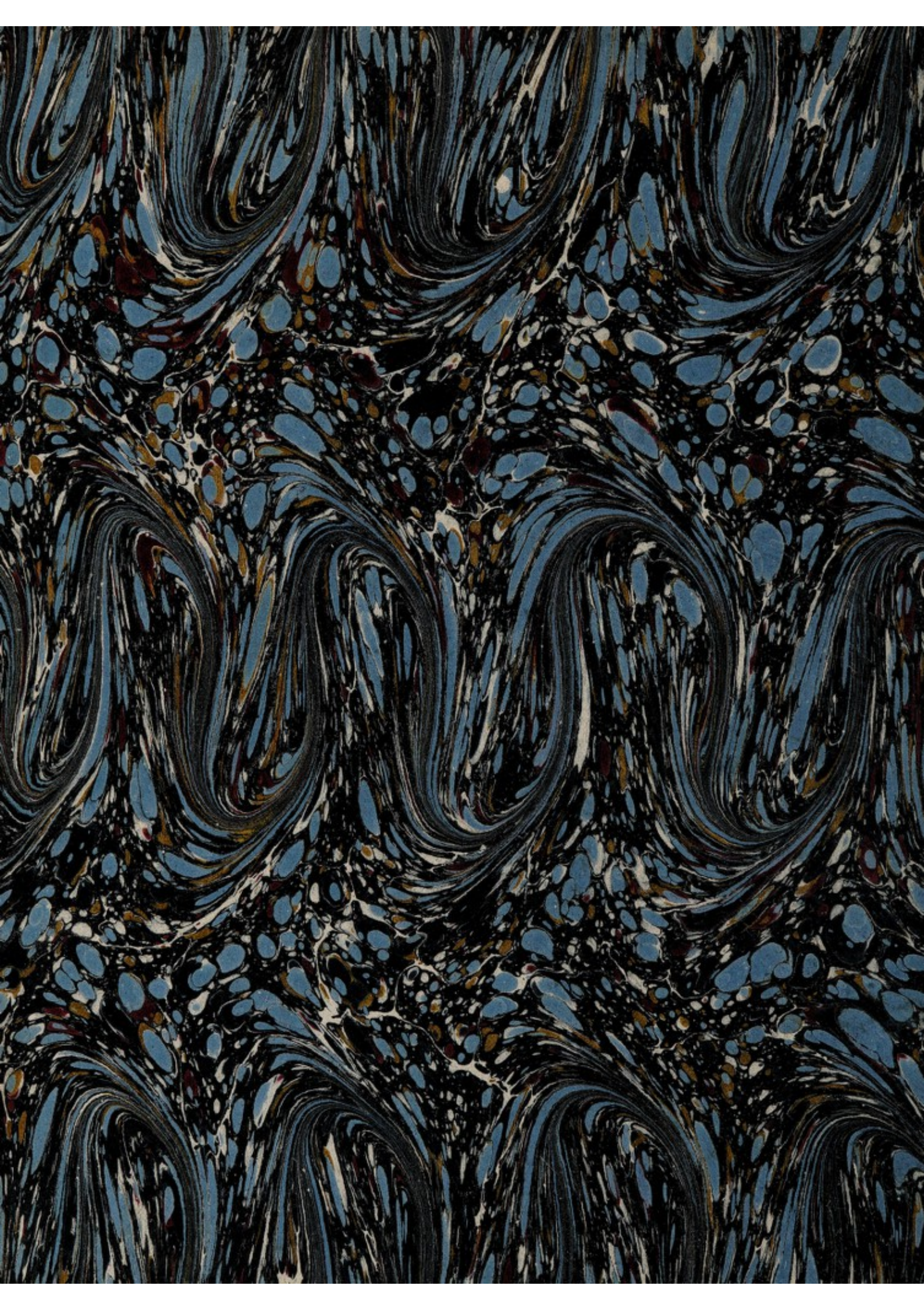
This work has been identified as being free of known restrictions under copyright law, including all related and neighbouring rights and is being made available under the Creative Commons, Public Domain Mark.

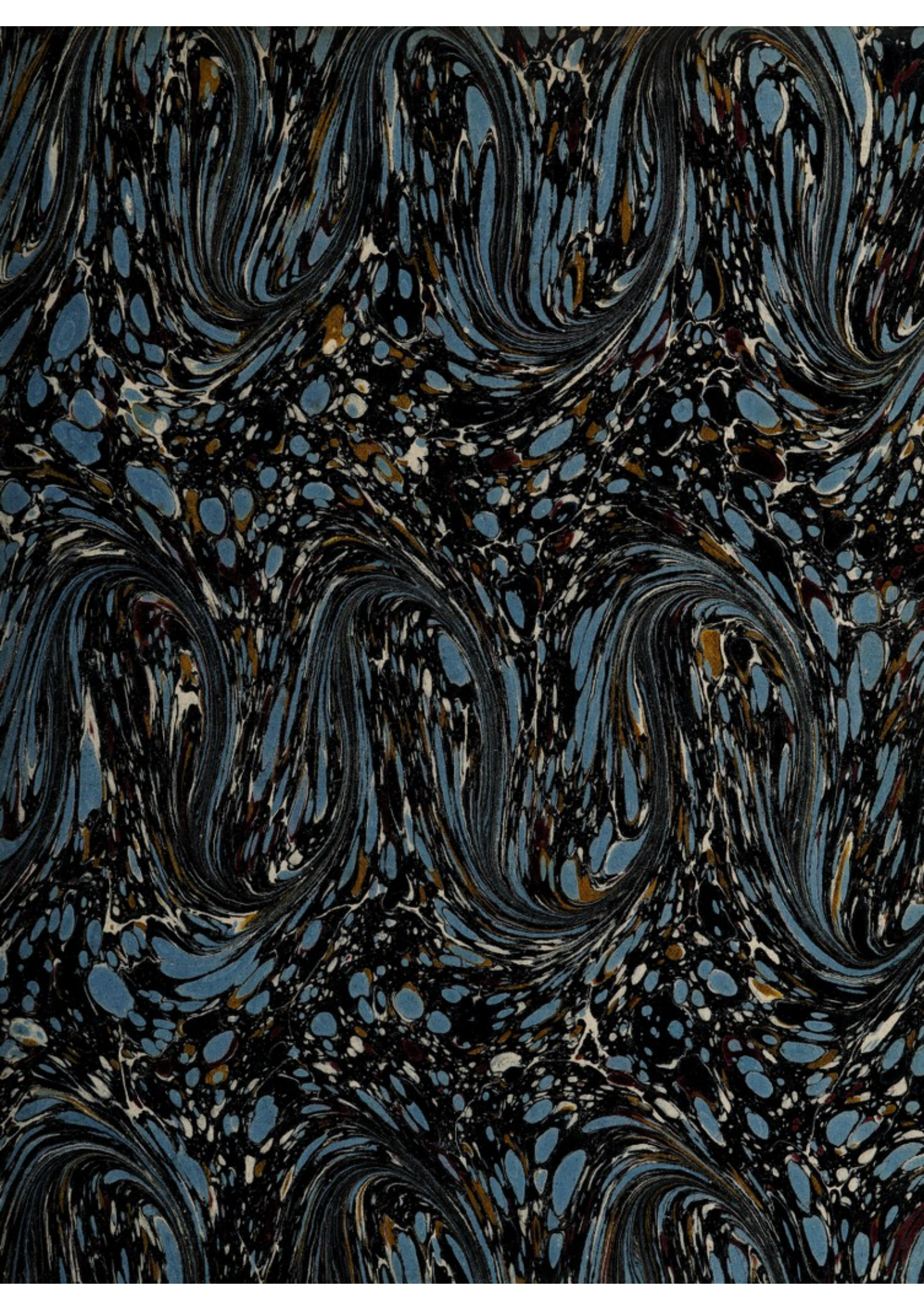
You can copy, modify, distribute and perform the work, even for commercial purposes, without asking permission.



Wellcome Collection
183 Euston Road
London NW1 2BE UK
T +44 (0)20 7611 8722
E library@wellcomecollection.org
<https://wellcomecollection.org>







10578/13/1
K

N III t₁₈





Digitized by the Internet Archive
in 2018 with funding from
Wellcome Library

<https://archive.org/details/b30530593>

TRAITÉ DE DYNAMIQUE,

DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE
& du Mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une manière nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres, d'une manière quelconque.

Par M. d'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences.



A PARIS,

Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.

MDCCXLIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.





A MONSEIGNEUR
LE COMTE DE MAUREPAS,
Ministre & Secrétaire d'Etat de la Marine ,
Commandeur des Ordres du Roi.

MONSEIGNEUR,

*Persuadé qu'un homme de Lettres ne peut mieux
vous faire sa cour que par ses travaux , je me suis
proposé de contribuer à la perfection de la Méchanique ,
en la réduisant à un petit nombre de Principes simples*

E P I T R E.

Et féconds , d'applanir entièrement les routes qui étoient déjà frayées dans cette Science , de porter même la lumière dans celles qui jusqu'à présent ont été le moins connues ; en un mot , d'éclaircir Et d'étendre tout à la fois la partie la plus utile des Mathématiques. Si l'exécution répondoit à mon projet , je me flatterois, MONSEIGNEUR, que cet Ouvrage pourroit n'être pas indigne de paroître sous vos auspices : mais quel que doive être le succès de ce premier fruit de mon travail , j'espère que vous voudrez bien le regarder comme une marque de mon zèle pour l'avancement des Sciences , Et de l'intérêt que j'ose prendre à la gloire du Ministre qui les protege. Je suis avec un profond respect ,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéissant
Serviteur D'ALEMBERT.



P R É F A C E.

LA certitude des Mathématiques est un avantage que ces Sciences doivent principalement à la simplicité de leur objet. Il faut avouer même, que comme toutes les parties des Mathématiques n'ont pas un objet également simple, aussi la certitude proprement dite, celle qui est fondée sur des Principes nécessairement vrais & évidens par eux-mêmes, n'appartient ni également, ni de la même manière à toutes ces parties. Plusieurs d'entr'elles, appuyées sur des Principes Physiques, c'est-à-dire sur des vérités d'Expériences, ou sur de simples hypothèses, n'ont, pour ainsi dire, qu'une certitude d'Expérience, ou même de pure supposition. Il n'y a, à parler exactement, que celles qui traitent du calcul des grandeurs, & des propriétés générales de l'étendue, c'est-à-dire l'Algèbre, la Géométrie & la Mécha-

nique , qu'on puisse regarder comme marquées au sceau de l'évidence. Encore y a-t'il dans la lumière que ces Sciences présentent à notre esprit , une espece de gradation , & , pour ainsi dire , de nuance à observer. Plus l'objet qu'elles embrassent est étendu , & considéré d'une manière générale & abstraite , plus aussi leurs Principes sont exempts de nuages & faciles à saisir. C'est par cette raison que la Geométrie est plus simple que la Méchanique , & l'un & l'autre moins simples que l'Algèbre. Ce Paradoxe ne paroîtra point tel à ceux qui ont étudié ces Sciences en Philosophes : les notions les plus abstraites , celles que le commun des hommes regarde comme les plus inaccessibles , sont néanmoins celles qui portent avec elles une plus grande lumière : l'obscurité semble s'emparer de nos idées à mesure que nous les appliquons à des objets particuliers , & que nous examinons leurs propriétés sensibles ; & si nous voulons pénétrer plus avant dans la nature de ces objets , nous trouvons presque toujours , que leur existence , appuyée sur le témoignage douteux de nos sens , est ce que nous connoissons le moins imparfaitement en eux.

Il résulte de ces réflexions , que pour traiter suivant la meilleure Méthode possible quelque par-

tie des Mathematiques que ce soit (nous pourrons même dire quelque Science que ce puisse être) il est nécessaire nonseulement d'y introduire & d'y appliquer autant qu'il se peut , des connoissances puisées dans des Sciences plus abstraites , & par conséquent plus simples , mais encore d'envisager de la manière la plus abstraite & la plus simple qu'il se puisse , l'objet particulier de cette Science ; de ne rien supposer , ne rien admettre dans cet objet , que les propriétés que la Science même qu'on traite y suppose. Delà résultent deux avantages : les Principes reçoivent toute la clarté dont ils sont susceptibles : ils se trouvent d'ailleurs réduits au plus petit nombre possible , & par ce moyen ils ne peuvent manquer d'acquérir en même tems plus d'étendue , puisque l'objet d'une Science étant nécessairement déterminé , les principes en sont d'autant plus féconds , qu'ils sont en plus petit nombre.

On a pensé depuis long-tems , & même avec succès , à remplir dans les Mathematiques , une partie du plan que nous venons de tracer : on a appliqué heureusement , l'Algèbre à la Geométrie , la Geométrie à la Méchanique , & chacune de ces trois Sciences à toutes les autres , dont elles sont la base & le fondement. Mais on n'a pas

été si attentif , ni à réduire les Principes de ces Sciences au plus petit nombre , ni à leur donner toute la clarté qu'on pouvoit desirer. La Méchanique surtout , est celle qu'il paroît qu'on a négligé le plus à cet égard : aussi la plûpart de ses Principes , ou obscurs par eux-mêmes , ou énoncés & démontrés d'une manière obscure , ont-ils donné lieu à plusieurs questions épineuses. En général , on a été plus occupé jusqu'à présent à augmenter l'édifice qu'à en éclairer l'entrée ; & on a pensé principalement à l'élever , sans donner à ses fondemens toute la solidité convenable.

Je me suis proposé dans cet Ouvrage de satisfaire à ce double objet , de reculer les limites de la Méchanique , & d'en applanir l'abord ; & mon but principal a été de remplir en quelque sorte un de ces objets par l'autre , c'est-à-dire , non-seulement de déduire les Principes de la Méchanique des notions les plus claires , mais de les appliquer aussi à de nouveaux usages ; de faire voir tout à la fois , & l'inutilité de plusieurs Principes qu'on avoit employés jusqu'ici dans la Méchanique , & l'avantage qu'on peut tirer de la combinaison des autres pour le progrès de cette Science ; en un mot , d'étendre les Principes en les réduisant. Telles ont été mes vûes dans le Traité que je

metts au jour. Pour faire connoître au Lecteur les moyens par lesquels j'ai tâché de les remplir, il ne fera peut-être pas inutile d'entrer ici dans un examen raisonné de la Science que j'ai entrepris de traiter.

Le Mouvement & ses propriétés générales, sont le premier & le principal objet de la Méchanique; cette Science suppose l'existence du Mouvement, & nous la supposons aussi comme avouée & reconnue de tous les Physiciens. A l'égard de la nature du Mouvement, les Philosophes sont au contraire fort partagés là-dessus. Rien n'est plus naturel, je l'avoue, que de concevoir le Mouvement comme l'application successive du mobile aux différentes parties de l'espace indéfini, que nous imaginons comme le lieu des Corps: mais cette idée suppose un espace dont les parties soient pénétrables & immobiles; or personne n'ignore que les Cartesiens (Secte à la vérité fort affoiblie aujourd'hui) ne reconnoissent point d'espace distingué des Corps, & qu'ils regardent l'étendue & la matière comme une même chose. Il faut convenir qu'en partant d'un pareil Principe, le Mouvement seroit la chose la plus difficile à concevoir, & qu'un Cartésien auroit peut-être beaucoup plutôt fait d'en nier l'é-

xistence, que de chercher à en définir la nature. Au reste, quelque absurde que nous paroisse l'opinion de ces Philosophes, & quelque peu de clarté & de précision qu'il y ait dans les Principes Métaphysiques sur lesquels ils s'efforcent de l'appuyer, nous n'entreprendrons point de la réfuter ici : nous nous contenterons de remarquer, que pour avoir une idée claire du Mouvement, on ne peut se dispenser de distinguer au moins par l'esprit deux sortes d'étendue : l'une, qui soit regardée comme impénétrable, & qui constitue ce qu'on appelle proprement les Corps ; l'autre, qui étant considérée simplement comme étendue, sans examiner si elle est pénétrable ou non, soit la mesure de la distance d'un Corps à un autre, & dont les parties envisagées comme fixes & immobiles, puissent servir à juger du repos ou du Mouvement des Corps. Il nous sera donc toujours permis de concevoir un espace indéfini comme le lieu des Corps, soit réel, soit supposé, & de regarder le Mouvement comme le transport du mobile d'un lieu dans un autre.

La considération du Mouvement entre quelquefois dans les recherches de Geométrie pure ; c'est ainsi qu'on imagine souvent les lignes, droites ou courbes, engendrées par le Mouvement

continu d'un point , les surfaces par le Mouvement d'une ligne , les solides enfin par celui d'une surface. Mais il y a entre la Méchanique & la Geométrie cette différence , nonseulement que dans celle - ci , la génération des Figures par le Mouvement est , pour ainsi dire , arbitraire , & de pure élégance , mais encore que la Geométrie ne considère dans le Mouvement que l'espace parcouru , au lieu que dans la Méchanique on a égard de plus au tems que le mobile employe à parcourir cet espace.

On ne peut comparer ensemble deux choses d'une nature différente , telles que l'espace & le tems : mais on peut comparer le rapport des parties du tems avec celui des parties de l'espace parcouru. Le tems par sa nature coule uniformément , & la Méchanique suppose cette uniformité. Du reste , sans connoître le tems en lui-même & sans en avoir de mesure précise , nous ne pouvons représenter plus clairement le rapport de ses parties , que par celui des portions d'une ligne droite indéfinie. Or l'analogie qu'il y a entre le rapport des parties d'une telle ligne , & celui des parties de l'espace parcouru par un Corps qui se meut d'une manière quelconque , peut toujours être exprimée par une Équation : on peut donc imaginer une

Courbe, dont les abscisses représentent les portions du tems écoulé depuis le commencement du Mouvement, les ordonnées correspondantes désignant les espaces parcourus durant ces portions de tems : l'Equation de cette Courbe exprimera, non le rapport des tems aux espaces, mais, si on peut parler ainsi, le rapport du rapport que les parties de tems ont à leur unité, à celui que les parties de l'espace parcouru ont à la leur. Car l'Equation d'une Courbe peut être considérée, ou comme exprimant le rapport des ordonnées aux abscisses, ou comme l'Equation entre le rapport que les ordonnées ont à leur unité, & le rapport que les abscisses correspondantes ont à la leur.

Il est donc évident que par l'application seule de la Geométrie & du calcul, on peut, sans le secours d'aucun autre Principe, trouver les propriétés générales du Mouvement, varié suivant une loi quelconque. Mais comment arrive-t'il que le Mouvement d'un Corps suive telle ou telle loi particulière ? c'est sur quoi la Geométrie seule ne peut rien nous apprendre, & c'est aussi ce qu'on peut regarder comme le premier Problème qui appartienne immédiatement à la Méchanique.

On voit d'abord fort clairement, qu'un Corps ne peut se donner le Mouvement à lui-même. Il
ne

ne peut donc être tiré du repos , que par l'action de quelque cause étrangère. Mais continue-t'il à se mouvoir de lui-même , ou a-t'il besoin pour se mouvoir de l'action répétée de la cause ? Quelque parti qu'on pût prendre là-dessus , il sera toujours incontestable , que l'existence du Mouvement étant une fois supposée sans aucune autre hypothèse particulière , la loi la plus simple qu'un mobile puisse observer dans son Mouvement , est la loi d'uniformité , & c'est par conséquent celle qu'il doit suivre , comme on le verra plus au long dans le premier Chapitre de ce Traité. Le Mouvement est donc uniforme par sa nature : j'avoue que les preuves qu'on a données jusqu'à présent de ce Principe , ne sont peut-être pas fort convaincantes : on verra dans mon Ouvrage les difficultés qu'on peut leur opposer , & le chemin que j'ai pris pour éviter de m'engager à les résoudre. Il me semble que cette loi d'uniformité essentielle au Mouvement considéré en lui-même , fournit une des meilleures raisons sur lesquelles la mesure du tems par le Mouvement uniforme puisse être appuyée. Aussi j'ai cru devoir entrer là-dessus dans quelque détail , quoique au fond cette discussion puisse paroître étrangère à la Méchanique.

La *force d'inertie* , c'est - à - dire , la propriété
b

qu'ont les Corps de persévé rer dans leur état de repos ou de Mouvement, étant une fois établie, il est clair que le Mouvement, qui a besoin d'une cause pour commencer au moins à exister, ne sauroit non plus être accéléré ou retardé que par une cause étrangère. Or quelles sont les causes capables de produire ou de changer le Mouvement dans les Corps? Nous n'en connoissons jusqu'à présent que de deux sortes : les unes se manifestent à nous en même-tems que l'effet qu'elles produisent, ou plutôt dont elles sont l'occasion : ce sont celles qui ont leur source dans l'action sensible & mutuelle des Corps, résultante de leur impénétrabilité : elles se réduisent à l'impulsion & à quelques autres actions dérivées de celle-là : toutes les autres causes ne se font connoître que par leur effet, & nous en ignorons entièrement la nature : telle est la cause qui fait tomber les Corps pesans vers le centre de la Terre, celle qui retient les Planetes dans leurs Orbites, &c.

Nous verrons bientôt comment on peut déterminer les effets de l'impulsion, & des causes qui peuvent s'y rapporter : pour nous en tenir ici à celles de la seconde espece, il est clair que lorsqu'il est question des effets produits par de telles causes, ces effets doivent toujours être donnés in-

dépendamment de la connoissance de la cause, puisqu'il ne peuvent en être déduits : c'est ainsi que sans connoître la cause de la pesanteur, nous apprenons par l'Expérience que les espaces décrits par un Corps qui tombe, sont entr'eux comme les quarrés des tems. En général, dans les Mouvements variés dont les causes sont inconnues, il est évident que l'effet produit par la cause, soit dans un tems fini, soit dans un instant, doit toujours être donné par l'Equation entre les tems & les espaces : cet effet une fois connu, & le Principe de la force d'inertie supposé, on n'a plus besoin que de la Géométrie seule & du calcul, pour découvrir les propriétés de ces sortes de Mouvements. Pourquoi donc aurions-nous recours à ce Principe dont tout le monde fait usage aujourd'hui, que la force accélératrice ou retardatrice est proportionnelle à l'Elément de la vitesse ; principe appuyé sur cet unique axiôme vague & obscur, que l'effet est proportionnel à sa cause. Nous n'examinerons point si ce Principe est de vérité nécessaire ; nous avouerons seulement que les preuves qu'on en a données jusqu'ici, ne nous paroissent pas fort convaincantes : nous ne l'adopterons pas non plus, avec quelques Géomètres, comme de vérité purement contingente, ce qui ruineroit

la certitude de la Méchanique , & la réduiroit à n'être plus qu'une Science expérimentale : nous nous contenterons d'observer , que vrai ou douteux , clair ou obscur , il est inutile à la Méchanique , & que par conséquent il doit en être banni.

Nous n'avons fait mention jusqu'à présent , que du changement produit dans la vitesse du mobile par les causes capables d'altérer son Mouvement : & nous n'avons point encore cherché ce qui doit arriver , si la cause motrice tend à mouvoir le Corps dans une direction différente de celle qu'il a déjà. Tout ce que nous apprend dans ce cas le Principe de la force d'inertie , c'est que le mobile ne peut tendre qu'à décrire une ligne droite , & à la décrire uniformément : mais cela ne fait connoître ni sa vitesse ni sa direction. On est donc obligé d'avoir recours à un second Principe , c'est celui qu'on appelle la composition des Mouvements , & par lequel on détermine le Mouvement unique d'un Corps qui tend à se mouvoir suivant différentes directions à la fois avec des vitesses données. On trouvera dans cet Ouvrage une démonstration nouvelle de ce Principe , dans laquelle je me suis proposé , & d'éviter toutes les difficultés auxquelles sont sujettes les démonstrations qu'on en donne communément , &

en même-tems de ne pas déduire d'un grand nombre de propositions compliqués, un Principe qui étant l'un des premiers de la Méchanique, doit nécessairement être appuyé sur des preuves simples & faciles.

Comme le Mouvement d'un Corps qui change de direction, peut être regardé comme composé du Mouvement qu'il avoit d'abord & d'un nouveau Mouvement qu'il a reçu, de même le Mouvement que le Corps avoit d'abord peut être regardé comme composé du nouveau Mouvement qu'il a pris, & d'un autre qu'il a perdu. Delà il s'ensuit que les loix du Mouvement changé par quelques obstacles que ce puisse être, dépendent uniquement des loix du Mouvement détruit par ces mêmes obstacles. Car il est évident qu'il suffit de décomposer le Mouvement qu'avoit le Corps avant la rencontre de l'obstacle, en deux autres Mouvements, tels, que l'obstacle ne nuise point à l'un, & qu'il anéantisse l'autre. Par-là, on peut nonseulement démontrer les loix du Mouvement changé par des obstacles insurmontables, les seules qu'on ait trouvées jusqu'à présent par cette Méthode; on peut encore déterminer dans quel cas le Mouvement est détruit par ces mêmes obstacles. A l'égard des loix du Mouvement changé

par des obstacles qui ne sont pas insurmontables en eux-mêmes, il est clair par la même raison, qu'en général il ne faut pour déterminer ces loix, qu'avoir bien constaté celles de l'équilibre.

Or quelle doit être la loi générale de l'équilibre des Corps ! Tous les Geomètres conviennent, que deux Corps dont les directions sont opposées, se font équilibre quand leurs masses sont en raison inverse des vitesses avec lesquelles ils tendent à se mouvoir ; mais il n'est peut-être pas facile de démontrer cette loi en toute rigueur, & d'une manière qui ne renferme aucune obscurité ; aussi la plupart des Geomètres ont-ils mieux aimé la traiter d'axiôme, que de s'appliquer à la prouver. Cependant, si l'on y fait attention, on verra qu'il n'y a qu'un seul cas où l'équilibre se manifeste d'une manière claire & distincte ; c'est celui où les masses des deux Corps sont égales, & leurs vitesses égales & opposées. Le seul parti qu'on puisse prendre, ce me semble, pour démontrer l'équilibre dans les autres cas, est de les réduire, s'il se peut, à ce premier cas simple & évident par lui-même. C'est aussi ce que j'ai tâché de faire ; le Lecteur jugera si j'y ai réussi.

Le Principe de l'équilibre joint à ceux de la force d'inertie & du Mouvement composé, nous

conduit donc à la solution de tous les Problèmes où l'on considère le Mouvement d'un Corps, en tant qu'il peut être altéré par un obstacle impénétrable & mobile, c'est-à-dire en général par un autre Corps à qui il doit nécessairement communiquer du Mouvement pour conserver au moins une partie du sien. De ces Principes combinés, on peut donc aisément déduire les loix du Mouvement des Corps qui se choquent d'une manière quelconque, ou qui se tirent par le moyen de quelque Corps interposé entr'eux, & auquel ils sont attachés : loix aussi certaines & de vérité aussi nécessaire, que celles du Mouvement des Corps altéré par des obstacles insurmontables, puisque les unes & les autres se déterminent par les mêmes Méthodes.

Si les Principes de la force d'inertie, du Mouvement composé, & de l'équilibre, sont essentiellement différens l'un de l'autre, comme on ne peut s'empêcher d'en convenir ; & si d'un autre côté, ces trois Principes suffisent à la Méchanique, c'est avoir réduit cette Science au plus petit nombre de Principes possible, que d'avoir établi sur ces trois Principes toutes les loix du Mouvement des Corps dans des circonstances quelconques, comme j'ai tâché de le faire dans ce Traité.

A l'égard des démonstrations de ces Principes en eux-mêmes , le plan que j'ai suivi pour leur donner toute la clarté & la simplicité dont elles m'ont paru susceptibles , a été de les déduire toujours de la considération seule du Mouvement , envisagé de la manière la plus simple & la plus claire. Tout ce que nous voyons bien distinctement dans le Mouvement d'un Corps , c'est qu'il parcourt un certain espace , & qu'il emploie un certain tems à le parcourir. C'est donc de cette seule idée qu'on doit tirer tous les Principes de la Méchanique , quand on veut les démontrer d'une manière nette & précise ; ainsi on ne sera point surpris qu'en conséquence de cette réflexion , j'ai , pour ainsi dire , détourné la vûe de dessus les *causes motrices* , pour n'envisager uniquement que le Mouvement qu'elles produisent ; que j'aie entièrement proscrit les forces inhérentes au Corps en Mouvement , êtres obscurs & Métaphysiques , qui ne sont capables que de répandre les ténèbres sur une Science claire par elle-même.

C'est par cette raison que j'ai cru ne devoir point entrer dans l'examen de la fameuse question des *forces vives*. Cette question qui depuis vingt ans partage les Geomètres , consiste à savoir , si la force des Corps en Mouvement est proportionnelle

au produit de la masse par la vitesse, ou au produit de la masse par le quarré de la vitesse : par exemple, si un Corps double d'un autre, & qui a trois fois autant de vitesse, a dix-huit fois autant de force ou six fois autant seulement. Malgré les disputes que cette question a causées, l'inutilité parfaite dont elle est pour la Méchanique, m'a engagé à n'en faire aucune mention dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui : je ne crois pas néanmoins devoir passer entièrement sous silence une opinion, dont *Leibnitz* a cru pouvoir se faire honneur comme une découverte ; que le grand *Bernoulli* a depuis si sagement & si heureusement approfondie * ; que *Mac-Laurin* a fait tous ses efforts pour renverser ; & à laquelle enfin les écrits d'une Dame illustre par son esprit & par son savoir ont contribué à intéresser le Public. Ainsi, sans fatiguer le Lecteur par le détail de tout ce qui a été dit sur cette question, il ne sera pas hors de propos d'exposer ici très-succinctement les Principes qui peuvent servir à la résoudre.

Quand on parle de la force des Corps en Mou-

* Voyez le Discours sur les loix de la communication du Mouvement, qui a mérité l'Eloge de l'Académie en l'année 1726. où le *P. Maziere* remporta le prix.

vement, ou l'on n'attache point d'idée nette au mot qu'on prononce, ou l'on ne peut entendre par-là en général, que la propriété qu'ont les Corps qui se meuvent, de vaincre les obstacles qu'ils rencontrent, ou de leur résister. Ce n'est donc ni par l'espace qu'un Corps parcourt uniformément, ni par le tems qu'il employe à le parcourir, ni enfin par la considération simple, unique & abstraite de sa masse & de sa vitesse qu'on doit estimer immédiatement la force, c'est uniquement par les obstacles qu'un Corps rencontre, & par la résistance que lui font ces obstacles. Plus l'obstacle qu'un Corps peut vaincre, ou auquel il peut résister, est considérable, plus on peut dire que sa *force* est grande, pourvû que sans vouloir représenter par ce mot un prétendu être qui réside dans le Corps, on ne s'en serve que comme d'une manière abrégée d'exprimer un fait, à peu près comme on dit, qu'un Corps a deux fois autant de *vitesse* qu'un autre; au lieu de dire qu'il parcourt en tems égal deux fois autant d'espace, sans prétendre pour cela que ce mot de *vitesse* représente un être inhérent au Corps.

Ceci bien entendu, il est clair qu'on peut opposer au Mouvement d'un Corps trois sortes d'ob-

stacles ; ou des obstacles invincibles qui anéantissent tout-à-fait son Mouvement , quel qu'il puisse être ; ou des obstacles qui n'ayent précisément que la résistance nécessaire pour anéantir le Mouvement du Corps , & qui l'anéantissent dans un instant , c'est le cas de l'équilibre ; ou enfin des obstacles qui anéantissent le Mouvement peu à peu , c'est le cas du Mouvement retardé. Comme les obstacles insurmontables anéantissent également toutes sortes de Mouvements , ils ne peuvent servir à faire connoître la force : ce n'est donc que dans l'équilibre , ou dans le Mouvement retardé qu'on doit en chercher la mesure. Or tout le monde convient qu'il y a équilibre entre deux Corps , quand les produits de leurs masses par leurs vitesses virtuelles , c'est-à-dire par les vitesses avec lesquelles ils tendent à se mouvoir , sont égaux de part & d'autre. Donc dans l'équilibre le produit de la masse par la vitesse , ou , ce qui est la même chose , la quantité de Mouvement , peut représenter la force. Tout le monde convient aussi que dans le Mouvement retardé , le nombre des obstacles vaincus est comme le quarré de la vitesse , en sorte qu'un Corps qui a fermé un ressort , par exemple , avec une cer-

taine vitesse , pourra avec une vitesse double fermer , ou tout à la fois , ou successivement , non pas deux , mais quatre ressorts semblables au premier , neuf avec une vitesse triple , & ainsi du reste. D'où les partisans des forces vives concluent que la force des Corps qui se meuvent actuellement , est en général comme le produit de la masse par le quarré de la vitesse. Au fond , quel inconvénient pourroit-il y avoir , à ce que la mesure des forces fût différente dans l'équilibre & dans le Mouvement retardé , puisque , si on veut ne raisonner que d'après des idées claires , on doit n'entendre par le mot de *force* , que l'effet produit en surmontant l'obstacle ou en lui résistant ? Il faut avouer cependant , que l'opinion de ceux qui regardent la force comme le produit de la masse par la vitesse , peut avoir lieu nonseulement dans le cas de l'équilibre , mais aussi dans celui du Mouvement retardé , si dans ce dernier cas on mesure la force , non par la quantité absolue des obstacles , mais par la somme des résistances de ces mêmes obstacles. Car on ne sauroit douter que cette somme de résistances , ne soit proportionnelle à la quantité de Mouvement , puisque , de l'aveu de tout le monde , la quantité de Mou-

vement que le Corps perd à chaque instant , est proportionnelle au produit de la résistance par la durée infiniment petite de l'instant , & que la somme de ces produits , est évidemment la résistance totale. Toute la difficulté se réduit donc à savoir si on doit mesurer la force par la quantité absolue des obstacles , ou par la somme de leurs résistances. Il me paroîtroit plus naturel de mesurer la force de cette dernière manière ; car un obstacle n'est tel qu'en tant qu'il résiste , & c'est , à proprement parler , la somme des résistances qui est l'obstacle vaincu : d'ailleurs , en estimant ainsi la force , on a l'avantage d'avoir pour l'équilibre & pour le Mouvement retardé une mesure commune : néanmoins comme nous n'avons d'idée précise & distincte du mot de *force* , qu'en restreignant ce terme à exprimer un effet , je crois qu'on doit laisser chacun le maître de se décider comme il voudra là-dessus ; & toute la question ne peut plus consister , que dans une discussion Métaphysique très-futile , ou dans une dispute de mots plus indigne encore d'occuper des Philosophes. Aussi n'auroit-elle pas sans doute enfanté tant de volumes , si on se fut attaché à distinguer ce qu'elle renfermoit de clair & d'obscur. En s'y

prenant ainsi , on n'auroit eu besoin que de quelques lignes pour décider la question : seroit-ce là ce que la plupart de ceux qui ont traité cette matière , auroient voulu éviter ?

Après avoir donné au Lecteur une idée générale de l'objet que je me suis proposé dans cet Ouvrage , il ne me reste plus qu'un mot à dire sur la forme que j'ai cru devoir lui donner. J'ai tâché dans ma première Partie de mettre , le plus qu'il m'a été possible , les Principes de la Méchanique à la portée des commençans ; je n'ai pu me dispenser d'employer le calcul différentiel dans la Théorie des Mouvements variés ; c'est la nature du sujet qui m'y a contraint. Au reste , j'ai fait en sorte de renfermer dans cette première Partie un assez grand nombre de choses dans un fort petit espace , & si je ne suis point entré dans tout le détail que la matière pourroit comporter , c'est qu'uniquement attentif à l'exposition & au développement des Principes essentiels de la Méchanique , & ayant pour but de réduire cet Ouvrage à ce qu'il peut contenir de nouveau en ce genre , je n'ai pas crû devoir le grossir d'une infinité de propositions particulières que l'on trouvera aisément ailleurs.

La seconde Partie, dans laquelle je me suis proposé de traiter des loix du Mouvement des Corps entr'eux, fait la portion la plus considérable de l'Ouvrage : c'est la raison qui m'a engagé à donner à ce Livre le nom de *Traité de Dynamique*. Ce nom, qui signifie proprement la Science des puissances ou causes motrices, pourroit paroître d'abord ne pas convenir à cet Ouvrage, dans lequel j'envisage plutôt la Méchanique comme la Science des effets, que comme celle des causes : néanmoins comme le mot de *Dynamique* est fort usité aujourd'hui parmi les Savans, pour signifier la Science du Mouvement des Corps, qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque ; j'ai cru devoir le conserver, pour annoncer aux Geomètres par le titre même de ce Traité, que je m'y propose principalement pour but de perfectionner & d'augmenter cette partie de la Méchanique. Comme elle n'est pas moins curieuse qu'elle est difficile, & que les Problèmes qui s'y rapportent composent une classe très-étendue, les plus grands Geomètres s'y sont appliqués particulièrement depuis quelques années : mais ils n'ont résolus jusqu'à présent qu'un très-petit nombre de Problèmes de ce genre, & seulement dans des

cas particuliers : la plûpart des solutions qu'ils nous ont données sont outre cela appuyées sur des Principes que personne n'a encore démontrés d'une manière générale ; tels, par exemple , que celui de la conservation des forces vives. J'ai donc cru devoir m'étendre principalement sur ce sujet , & faire voir comment on peut résoudre toutes les questions de Dynamique par une même Méthode fort simple & fort directe , & qui ne consiste que dans la combinaison dont j'ai parlé plus haut , des Principes de l'Equilibre & du Mouvement composé. J'en montre l'usage dans un petit nombre de Problèmes choisis , dont quelques-uns sont déjà connus , d'autres sont entièrement nouveaux , d'autres enfin ont été mal résolus même par de très-grands Geomètres.

L'élégance dans la solution d'un Problème, consistant surtout à n'y employer que des Principes directs & en très-petit nombre , on ne sera point surpris que l'uniformité qui regne dans toutes mes solutions , & que j'ai eu principalement en vûe , les rende quelquefois un peu plus longues , que si je les avois déduites de Principes moins directs. La démonstration que j'aurois été obligé de faire de ces Principes , ne pouvoit d'ailleurs
que

que m'écarter de la briéveté que j'aurois cherché à me procurer par leur moyen ; & la portion la plus considérable de mon Livre , n'auroit plus été qu'un amas informe de Problèmes peu digne de voir le jour , malgré la variété que j'ai tâché d'y répandre , & les difficultés qui sont particulières à chacun d'eux.

Au reste , comme cette seconde Partie est destinée principalement à ceux , qui déjà instruits du calcul différentiel & intégral , se seront rendus familiers les Principes établis dans la première , ou seront déjà exercés à la solution des Problèmes connus & ordinaires de la Méchanique ; je dois avertir que pour éviter les circonlocutions , je me suis souvent servi du terme obscur de *force* , & de quelques autres qu'on employe communément quand on traite du Mouvement des Corps ; mais je n'ai jamais prétendu attacher à ces termes d'autres idées que celles qui résultent des Principes que j'ai établis , soit dans cette Préface , soit dans la première Partie de ce Traité.

Enfin , du même Principe qui me conduit à la solution de tous les Problèmes de Dynamique , je déduis aussi plusieurs propriétés du centre de gravité , dont les unes sont entièrement nouvel-

les , les autres n'ont été prouvées jusqu'à présent que d'une manière vague & obscure , & je termine l'Ouvrage par une démonstration du Principe appelé communément , *la conservation des forces vives*.

Si ce premier essai est reçu favorablement du Public , il ne tardera pas à être suivi d'un autre Ouvrage , dans lequel ce qui concerne le Mouvement & l'équilibre des Fluides sera traité suivant la même Méthode , & par les mêmes Principes.





TABLE DES TITRES

Contenus en cet Ouvrage.

<i>PRE'FACE.</i>	page j
<i>Définitions & Notions préliminaires.</i>	page i

PREMIERE PARTIE.

Loix générales du Mouvement & de l'équilibre des Corps.

CHAPITRE I. D <i>E la force d'inertie , & des propriétés du Mouvement qui en résultent.</i>	page 3
<i>Du Mouvement uniforme.</i>	p. 8
<i>REMARQUE sur la mesure du tems.</i>	p. 9
<i>Du Mouvement accéléré ou retardé.</i>	p. 13
<i>REMARQUE I. Sur les forces accélératrices.</i>	p. 16
<i>REMARQUE II. Sur la comparaison des forces accélératrices entr'elles.</i>	p. 20
CHAP. II. <i>Du Mouvement composé.</i>	p. 22

TABLE DES TITRES.

<i>Du Mouvement en ligne courbe , & des forces centrales.</i>	page 27
CHAP. III. <i>Du Mouvement détruit ou changé par des obstacles.</i>	p. 31
<i>Du Mouvement d'un Corps le long d'une surface Courbe.</i>	p. 34
<i>De l'Equilibre.</i>	p. 37.

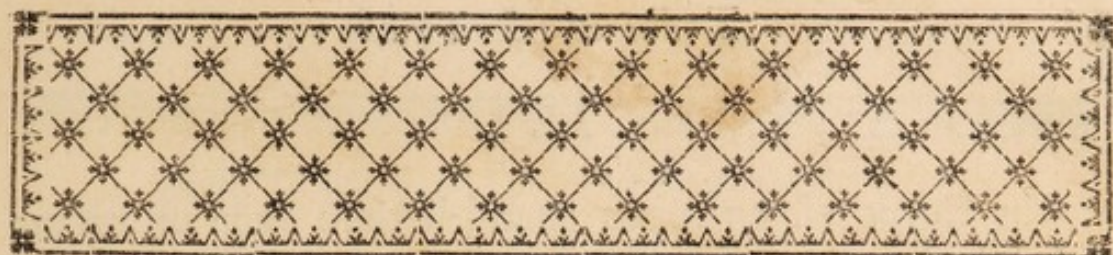
SECONDE PARTIE.

Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque , avec plusieurs applications de ce Principe.

CHAPITRE I. E <i>Xposition du Principe.</i>	page 49
CHAP. II. E <i>Propriétés du centre de gravité commun de plusieurs Corps , déduites du Principe précédent.</i>	p. 52
CHAP. III. <i>Problèmes où l'on montre l'usage du Principe précédent.</i>	p. 69
CHAP. IV. <i>Du Principe de la conservation des forces vives.</i>	p. 169

Fin de la Table des Titres.

TRAITE'



TRAITÉ D E DYNAMIQUE.

Définitions & Notions préliminaires.

I.



Si deux portions d'étendue semblables & égales entr'elles sont *impénétrables*, c'est-à-dire, si elles ne peuvent être imaginées unies & confonduës l'une avec l'autre, de manière qu'elles ne fassent qu'une même portion d'étendue moindre que la somme des deux, chacune de ces portions d'étendue sera ce qu'on appelle un *Corps*. L'impenétrabilité est la propriété principale par laquelle nous distinguons les Corps des parties de l'espace indéfini, où nous imaginons qu'ils sont placés.

Le *lieu* d'un Corps est la partie de l'espace qu'il occupe, c'est-à-dire la partie de l'espace avec laquelle l'étendue du Corps est coïncidente.

A

II.

Un Corps est en repos quand il reste dans un même lieu ; il est en mouvement quand il passe d'un lieu dans un autre , c'est-à-dire , quand il occupe successivement & sans interruption des parties de l'espace immédiatement contigues les unes aux autres.

III.

Comme un Corps ne peut occuper plusieurs lieux à la fois , il ne peut arriver d'un lieu à un autre dans le même instant : le mouvement ne peut donc se faire que durant un certain *tems*.

IV.

L'espace parcouru par un Corps qui se meut est divisible à l'infini ; le tems est donc aussi divisible à l'infini. On conçoit de plus , que si un Corps se meut en ligne droite , sans subir à chaque instant d'autre changement que le changement de place , il ne peut manquer de parcourir des espaces égaux en tems égaux. Dans ce cas , on dit que le Corps se meut *uniformément*. Si les espaces parcourus en tems égaux sont croissans ou décroissans , le mouvement est dit *accélééré* ou *retardé*.



PREMIERE PARTIE.*Loix générales du mouvement & de l'équilibre
des Corps.*

1. **O**N peut réduire tous les Principes de la Mécanique à trois, la force d'inertie, le mouvement composé, & l'équilibre. Au moins j'espère faire voir par ce Traité, que toute cette science peut être déduite de ces trois Principes. Je traiterai de chacun d'eux en particulier dans chacun des Chapitres suivans.

CHAPITRE PREMIER.

*De la force d'inertie, & des propriétés du mouvement
qui en résultent.*

2. **J'**APPELLE avec M. Newton *force d'inertie*, la propriété qu'ont les Corps de rester dans l'état où ils sont : or un Corps est nécessairement dans l'état de repos ou dans celui de mouvement ; ce qui fournit les deux Loix suivantes.

I. LOI.

3. Un Corps en repos y persistera, à moins qu'une cause étrangère ne l'en tire. Car un Corps ne peut se déterminer de lui-même au mouvement.

COROLLAIRE.

4. Delà il s'ensuit, que si un Corps reçoit du mouvement par quelque cause que ce puisse être, il ne pourra de lui-même accélérer ni retarder ce mouvement.

5. On appelle en général *puissance* ou *cause motrice*, tout ce qui oblige un Corps à se mouvoir.

II. L O I.

6. Un Corps mis une fois en mouvement par une cause quelconque, doit y persister toujours uniformément & en ligne droite, tant qu'une nouvelle cause, différente de celle qui l'a mis en mouvement, n'agira pas sur lui, c'est-à-dire, qu'à moins qu'une cause étrangère & différente de la cause motrice, n'agisse sur ce Corps, il se mouvra perpétuellement en ligne droite, & parcourra en tems égaux des espaces égaux.

Car, ou l'action Indivisible & instantanée de la cause motrice au commencement du Mouvement, suffit pour faire parcourir au Corps un certain espace, ou le Corps a besoin pour se mouvoir de l'action continuée de la cause motrice.

Dans le premier cas, il est visible que l'espace parcouru ne peut être qu'une ligne droite décrite uniformément par le Corps mû. Car (*hyp.*) passé le premier instant, l'action de la cause motrice n'existe plus, & le Mouvement néanmoins subsiste encore : il fera donc nécessairement uniforme, puisque (*Art. 4*) un Corps ne peut accélérer ni retarder son Mouvement de lui-même. De

plus, il n'y a pas de raison pour que le Corps s'écarte à droite plutôt qu'à gauche. Donc dans ce premier cas, où l'on suppose qu'il soit capable de se mouvoir de lui-même pendant un certain tems, indépendamment de la cause motrice, il se mouvra de lui-même pendant ce tems uniformément & en ligne droite.

Or un Corps qui peut se mouvoir de lui-même uniformément & en ligne droite pendant un certain tems, doit continuer perpétuellement à se mouvoir de la même manière, si rien ne l'en empêche. Car supposons le Corps partant de *A*, (Fig. 1^{re}) & capable de parcourir de lui-même uniformément la ligne *AB*; soient pris sur la ligne *AB* deux points quelconques *C*, *D*, entre *A* & *B*. Le Corps étant en *D* est précisément dans le même état que lorsqu'il est en *C*, si ce n'est qu'il se trouve dans un autre lieu. Donc il doit arriver à ce Corps la même chose que quand il est en *C*. Or étant en *C* il peut (*hyp.*) se mouvoir de lui-même uniformément jusqu'en *B*. Donc étant en *D* il pourra se mouvoir de lui-même uniformément jusqu'au point *G*, tel que $DG = CB$, & ainsi de suite.

Donc si l'action première & instantanée de la cause motrice est capable de mouvoir le Corps, il fera mû uniformément & en ligne droite, tant qu'une nouvelle cause ne l'en empêchera pas.

Dans le second cas, puisqu'on suppose qu'aucune cause étrangère & différente de la cause motrice n'agit sur le Corps, rien ne détermine donc la cause motrice à aug-

menter ni à diminuer ; d'où il s'ensuit que son action continuée fera uniforme & constante , & qu'ainsi pendant le tems qu'elle agira , le Corps se mouvra en ligne droite & uniformément. Or la même raison qui a fait agir la cause motrice constamment & uniformément pendant un certain tems , subsistant toujours tant que rien ne s'oppose à son action , il est clair que cette action doit demeurer continuellement la même , & produire constamment le même effet. Donc &c.

Donc en général un Corps mis en mouvement par quelque cause que ce soit , y persistera toujours uniformément & en ligne droite , tant qu'aucune cause nouvelle n'agira pas sur lui.

La ligne droite qu'un Corps décrit ou tend à décrire , est nommée *sa direction*.

R E M A R Q U E.

7. Je me suis un peu étendu sur la preuve de cette seconde Loi , parce qu'il y a eu & qu'il y a même encore quelques Philosophes qui prétendent que le mouvement d'un Corps doit de lui-même se ralentir peu à peu , comme il semble que l'Expérience le prouve. Il faut convenir , au reste , que toutes les preuves qu'on a données jusqu'ici de la conservation du mouvement , n'ont point le degré d'évidence nécessaire pour convaincre l'esprit ; elles sont presque toutes fondées , ou sur une force qu'on imagine dans la matière , par laquelle elle résiste à tout changement d'état , ou sur l'indifférence de la matière au mou-

vement comme au repos. Le premier de ces deux Principes , outre qu'il suppose dans la matière un Etre dont on n'a point d'idée nette , ne peut suffire pour prouver la Loi dont il est question. Car un Corps qui se meut même uniformément , se trouve à chaque instant dans un nouvel état , à parler exactement ; il ne fait , pour ainsi dire , continuellement que commencer à se mouvoir , & on pourroit croire qu'il tendroit sans cesse à retomber dans le repos , si la même cause qui l'en a tiré d'abord , ne continuoit en quelque sorte à l'en tirer toujours.

A l'égard de l'indifférence de la matière au Mouvement ou au repos , tout ce que ce Principe présente , ce me semble , de bien distinct à l'esprit , c'est qu'il n'est pas essentiel à la matière de se mouvoir toujours , ni d'être toujours en repos ; mais il ne s'ensuit pas de cette Loi , qu'un Corps en Mouvement ne puisse tendre continuellement au repos , non que le repos lui soit plus essentiel que le mouvement , mais parce qu'il pourroit sembler qu'il ne faudroit autre chose à un Corps pour être en repos , que d'être un Corps , & que pour le Mouvement il auroit besoin de quelque chose de plus , & qui devroit être , pour ainsi dire , continuellement créé en lui.

La démonstration que j'ai donnée de la conservation du Mouvement , a cela de particulier , qu'elle a lieu également , soit que la cause motrice doive toujours être appliquée au Corps , ou non. Ce n'est pas que je croye l'action continuée de cette cause , nécessaire pour mouvoir le Corps ; car si l'action instantanée ne suffisoit pas , quel

feroit alors l'effet de cette action ? & si l'action instantanée n'avoit point d'effet , comment l'action continuée en auroit-elle ? Mais comme on doit employer à la solution d'une question le moins de Principes qu'il est possible , j'ai cru devoir me borner à démontrer que la continuation du Mouvement a lieu également dans les deux hypothèses ; il est vrai que notre démonstration suppose l'existence du Mouvement , & à plus forte raison sa possibilité ; mais nier que le Mouvement existe , c'est se refuser à un fait que personne ne révoque en doute.

Du Mouvement uniforme.

8. Nous venons de voir qu'un Corps se meut uniformément & en ligne droite , quand aucune cause étrangère n'agit sur lui. D'où il s'ensuit que ce même Corps peut encore se mouvoir uniformément , lorsque deux causes étrangères agissent en même-tems & également , l'une pour accélérer , l'autre pour retarder son Mouvement , (c'est ainsi , pour le dire en passant , que les Corps qui tombent parviennent à se mouvoir uniformément , lorsque la résistance du Fluide où ils se meuvent tend à diminuer leur mouvement , autant que leur pesanteur tend à l'augmenter). Dans tout autre cas , le Mouvement est nécessairement accéléré ou retardé.

9. Si deux parties quelconques AB , AC (Fig. 2) d'une ligne indéfinie AO représentent deux portions du tems écoulé depuis le commencement du Mouvement , & les lignes BD , CE , les espaces parcourus durant ces
tems

tems par un Corps dont le Mouvement est uniforme, les points D, E , seront à une ligne droite ADE .

Car, puisqu'un Corps qui se meut uniformément parcourt des espaces égaux en tems égaux, les points D, E , doivent être à une ligne telle, que si on prend AB, BC égales entr'elles & quelconques, on ait toujours $BD = FE$. Or cette propriété n'appartient qu'à la ligne droite. Donc &c.

COROLLAIRE.

10. $BD . CE :: AB . AC$. C'est-à-dire, que dans le Mouvement uniforme, les espaces sont entr'eux comme les tems employés à les parcourir.

REMARQUE sur la mesure du tems.

11. Comme le rapport des parties du tems nous est inconnu en lui-même, l'unique moyen que nous puissions employer pour découvrir ce rapport, c'est d'en chercher quelqu'autre plus sensible & mieux connu, auquel nous puissions le comparer; on aura donc trouvé la mesure du tems la plus simple, si on vient à bout de comparer de la manière la plus simple qu'il soit possible, le rapport des parties du tems, avec celui de tous les rapports, que l'on connoît le mieux. Delà il résulte que le Mouvement uniforme est la mesure du tems la plus simple. Car d'un côté, le rapport des parties d'une ligne droite est celui que nous saisissons le plus facilement; & de l'autre, il

n'y a point de rapports plus aisés à comparer entr'eux, que des rapports égaux. Or dans le Mouvement uniforme, le rapport des parties du tems est égal à celui des parties correspondantes de la ligne parcourue. Le Mouvement uniforme nous donne donc tout à la fois le moyen, & de comparer le rapport des parties du tems au rapport qui nous est le plus sensible, & de faire cette comparaison de la manière la plus simple; nous trouvons donc dans le Mouvement uniforme, la mesure la plus simple du tems.

Je dis, outre cela, que la mesure du tems par le Mouvement uniforme, est, indépendamment de sa simplicité, celle dont il est le plus naturel de penser à se servir. En effet, comme il n'y a point de rapport que nous connoissions plus exactement que celui des parties de l'espace, & qu'en général un Mouvement quelconque dont la loi seroit donnée, nous conduiroit à découvrir le rapport des parties du tems, par l'analogie connue de ce rapport avec celui des parties de l'espace parcouru; il est clair qu'un tel Mouvement seroit la mesure du tems la plus exacte, & par conséquent celle qu'on devroit mettre en usage préféablement à toute autre. Donc, s'il y a quelque espece particulière de Mouvement, où l'analogie entre le rapport des parties du tems & celui des parties de l'espace parcouru, soit connue indépendamment de toute hypothese, & par la nature du Mouvement même, & que cette espece particulière de Mouvement soit la seule à qui cette propriété appartienne, elle sera nécessairement

rement la mesure du tems la plus naturelle. Or il n'y a que le Mouvement uniforme qui réunisse les deux conditions dont nous venons de parler. Car (*art. 6*) le Mouvement d'un Corps est uniforme par lui-même : il ne devient accéléré ou retardé qu'en vertu d'une cause étrangère , & alors il est susceptible d'une infinité de loix différentes de variation. La loi d'uniformité , c'est-à-dire l'égalité entre le rapport des tems & celui des espaces parcourus , est donc une propriété du Mouvement considéré en lui-même. Le Mouvement uniforme n'en est par-là que plus analogue à la durée , & par conséquent plus propre à en être la mesure , puisque les parties de la durée se succèdent aussi constamment & uniformément. Au contraire, toute loi d'accélération ou de diminution dans le Mouvement , est arbitraire , pour ainsi dire , & dépendante de circonstances extérieures. Le Mouvement non uniforme ne peut être par conséquent la mesure naturelle du tems ; car en premier lieu , il n'y auroit pas de raison pourquoi une espece particulière de Mouvement non uniforme , fut la mesure première du tems plutôt qu'une autre : en second lieu , on ne pourroit mesurer le tems par un Mouvement non uniforme , sans avoir découvert auparavant par quelque moyen particulier l'analogie entre le rapport des tems & celui des espaces parcourus , qui conviendrait au Mouvement proposé. D'ailleurs , comment connoître cette analogie autrement que par l'Expérience , & l'Expérience ne supposeroit-elle pas qu'on eût déjà une mesure du tems fixe & certaine ?

Mais le moyen de s'affurer, dira-t'on, qu'un Mouvement soit parfaitement uniforme? je réponds d'abord, qu'il n'y a non plus aucun Mouvement non uniforme dont nous fassions exactement la Loi, & qu'ainsi cette difficulté prouve seulement que nous ne pouvons connoître exactement & en toute rigueur le rapport des parties du tems; mais il ne s'ensuit pas delà, que le Mouvement uniforme n'en soit par sa nature seule, la première & la plus simple mesure. Aussi ne pouvant avoir de mesure du tems précise & rigoureuse, c'est dans les Mouvements à peu près uniformes, que nous en cherchons la mesure au moins approchée. Nous avons deux moyens de juger qu'un Mouvement est à peu près uniforme; ou quand nous savons que l'effet de la cause accélératrice ou retardatrice ne peut être qu'insensible; ou quand nous le comparons à d'autres Mouvements, & que nous observons la même Loi dans les uns & les autres. Ainsi, si plusieurs Corps se meuvent, de manière que les espaces qu'ils parcourent durant un même tems soient toujours entr'eux, ou exactement, ou à peu près dans le même rapport, on juge que le Mouvement de ces Corps est ou exactement, ou au moins à très-peu près uniforme.

12. Un Corps qui se meut uniformément est dit se mouvoir d'autant plus *vîte*, que l'espace BD qu'il parcourt dans un même tems AB , est plus grand; desorte que si BD , Bd sont les espaces parcourus uniformément par deux Corps dans le même tems AB , on dit que les *vitesse*s de ces deux Corps sont entr'elles comme BD à Bd .

COROLLAIRE.

13. BD est à $Bd :: \frac{BD}{AB} \cdot \frac{Bd}{AB} :: \frac{BD}{AB} \cdot \frac{Ce}{AC}$. donc en général les vitesses de deux Corps sont entr'elles comme les espaces BD , CE qu'ils parcourent dans des tems quelconques, ces espaces étant divisés par les tems employés à les parcourir.

La vitesse d'un Corps mû uniformément, est donc en général comme l'espace divisé par le tems.

Du Mouvement accéléré ou retardé.

14. Si les lignes BD , CE , (Fig. 3 & 4.) représentant les espaces parcourus pendant les tems AB , AC , ne sont pas à une ligne droite, mais à une Courbe ADE , alors le Mouvement n'est plus uniforme, mais il est accéléré ou retardé, selon que la Courbe ADE est convexe ou concave vers AC , & cette variation continuelle ne peut provenir que de quelque cause étrangère qui agit sans cesse, pour accélérer ou retarder le Mouvement.

La vitesse du Corps mû change alors à chaque instant, & ne peut avoir, comme dans le Mouvement uniforme, une quantité constante pour mesure. On conçoit seulement que son expression pour un instant donné, doit être la même qu'elle feroit, si dans cet instant le Mouvement cessoit d'être accéléré ou retardé. Supposons donc qu'à l'instant même où le Corps finit de parcourir la ligne BD , il vienne à se mouvoir uniformément

avec la vitesse qu'il a en D ; il est clair , en tirant la Tangente DN , que PN seroit l'espace qu'il parcoureroit dans le tems BC au lieu de PE . Dans ce cas (*art.* 13)

$\frac{PN}{DP}$ exprimeroit sa vitesse ; or le rapport de PN à DP , est le même que celui de l'Elément de AB à l'Elément de BD , parce que DN est tangente. Donc si on nomme en général t le tems , e l'espace correspondant parcouru par le Corps , u la vitesse à la fin du tems t , on aura $u = \frac{de}{dt}$.

Si on prolonge la Tangente DN jusqu'à ce qu'elle rencontre AB en F ; il est clair que BF exprimera le tems que le Corps employeroit à parcourir uniformément BD avec la vitesse qu'il a au point D . Donc si par le point A on tire Ad parallèle à FD ; Bd sera l'espace que ce même Corps parcoureroit uniformément avec cette même vitesse dans le tems AB .

On voit par-là (*Fig.* 3) que si ADE par exemple est une parabole , c'est-à-dire , si les espaces BD , CE sont entr'eux comme les quarrés des tems , on aura $AB = 2BF$; & $Bd = 2BD$.

C O R O L. I.

15. Les espaces NE , ne , sont les espaces que le Corps parcourt pendant les tems BC , Bc , de plus ou de moins que les espaces PN , pn qu'il eût parcouru uniformément avec la vitesse qu'il a en D . Or si on suppose les tems

BC , Bc , infiniment petits, les lignes NE , Ne , sont entr'elles comme le quarré de BC au quarré de Bc . Car l'arc DE à cause de sa petitesse infinie, peut être regardé comme un arc de cercle; or soit DN (Fig. 5) la portion infiniment petite de la Tangente d'un arc de cercle, & par le point N , & un autre point n quelconque de cette partie, soient tirées à volonté les parallèles NQ , nq , on aura par la propriété du cercle $NE \times NQ = DN^2$; $ne \times nq = Dn^2$; & à cause que les lignes nq , NQ doivent être regardées comme égales, on aura $NE . ne :: DN^2 . Dn^2$. Or (Fig. 3 & 4) DN , $Dn :: BC$, Bc , & par conséquent en général $NE . ne :: BC^2 . Bc^2$.

COROL. II.

16. Il est clair que les espaces NE , ne , feroient ceux que la cause accélératrice feroit parcourir au Corps, dans les instans BC , Bc , si au commencement de ces instans il n'avoit aucune vitesse. Donc les espaces parcourus par un Corps en vertu d'une puissance accélératrice quelconque, sont au commencement du Mouvement comme les quarrés des tems.

COROL. III.

17. Si on suppose $BC = dt$ & constant, & qu'on regarde la Courbe ADE comme un polygone d'une infinité de côtés, qui prolongés deviennent ses Tangentes, NE sera la différence seconde de l'espace parcouru BD ,

& en général on peut supposer que l'Equation différentielle de la Courbe ADE est $\phi dt^2 = \pm dde$ ϕ exprimant une fonction quelconque de e & de t , ou même de ces grandeurs & de leurs différences; le signe $+$ étant pour le cas où le Mouvement est accéléré, c'est-à-dire, où la Courbe ADE est convexe vers AC , & le signe $-$ pour le cas où le Mouvement est retardé, c'est-à-dire, où la Courbe ADE est concave vers AC .

C O R O L. IV.

18. Puisque (art. 14) $u = \frac{de}{dt}$, on aura à cause de dt constant, $dde = du dt$; donc l'Equation précédente $\phi dt^2 = \pm dde$ se changera en celle-ci $\phi dt = \pm du$, ou $\phi de = \pm u du$.

R E M A R Q U E I.

Sur les forces accélératrices.

19. Le Mouvement uniforme d'un Corps ne peut être altéré que par quelque cause étrangère. Or de toutes les causes, soit occasionnelles, soit immédiates, qui influent dans le Mouvement des Corps, il n'y a tout au plus que l'impulsion seule dont nous soyons en état de déterminer l'effet par la seule connoissance de la cause, comme on le verra dans la seconde partie de cet Ouvrage. Toutes les autres causes nous sont entièrement inconnues; elles ne peuvent par conséquent se manifester à nous, que par l'effet qu'elles produisent en accélérant ou retardant le Mouvement

vement du Corps, & nous ne pouvons les distinguer les unes des autres que par la Loi & la grandeur connue de leurs effets, c'est-à-dire, par la Loi & la quantité de la variation qu'elles produisent dans le Mouvement. Donc, lorsque la cause est inconnue, ce qui est le seul cas dont il soit question ici, l'Equation de la Courbe *ADE* doit être donnée immédiatement, ou en termes finis, ou en quantités différentielles. L'Equation est donnée ordinairement en différences, lorsque le Mouvement est accéléré ou retardé suivant une loi arbitraire & de pure hypothèse. Elle est au contraire donnée ordinairement en termes finis, quand la Loi du rapport des espaces aux tems est découverte par l'Expérience. Ainsi supposons que la puissance qui accélère, soit telle que le Corps reçoive continuellement dans des instans égaux des degrés égaux de vitesse; alors dt étant constant, du le sera aussi, & par conséquent ϕ sera une quantité constante. L'Equation $\phi dt = du$ sera en ce cas donnée immédiatement par hypothèse. Supposons, au contraire, que dans un cas particulier on découvre par l'Expérience que les espaces finis parcourus depuis le commencement du Mouvement, sont comme les quarrés des tems employés à les parcourir, l'Equation de la Courbe *ADE* sera $e = \frac{t^2}{a}$, d'où l'on tire

$$dde = \frac{2dt^2}{a} \text{ \& } du = \frac{2dt}{a}. \text{ On voit par-là que dans cette } \\ \text{supposition les accroissemens de vitesse à chaque instant} \\ \text{sont égaux, \& les Equations différentielles } \phi dt^2 = \pm dde$$

C

$\phi dt = \pm du$, se tirent de l'Equation donnée de la Courbe ADE en termes finis.

Il est donc évident que quand la cause est inconnue, l'Equation $\phi dt = \pm du$ est toujours donnée.

La plupart des Geomètres présentent sous un autre point de vûe l'Equation $\phi dt = du$ entre les tems & les vitesses. Ce qui n'est, selon nous, qu'une hypothese, est érigée par eux en Principe. Comme l'accroissement de la vitesse est l'effet de la cause accélératrice, & qu'un effet, selon eux, doit être toujours proportionnel à sa cause, ces Geomètres ne regardent pas seulement la quantité ϕ comme la simple expression du rapport de du à dt ; c'est de plus, selon eux, l'expression de la force accélératrice, à laquelle ils prétendent que du doit être proportionnel, dt étant constant; delà ils tirent cet axiôme général, que le produit de la force accélératrice par l'Elément du tems est égal à l'Elément de la vitesse. M. *Daniel Bernoulli* (*Mém. de Petersb. to. 1.*) prétend que ce Principe est seulement de verité contingente, attendu qu'ignorant la nature de la cause & la manière dont elle agit, nous ne pouvons savoir si son effet lui est réellement proportionnel, ou s'il n'est pas comme quelque puissance ou quelque fonction de cette même cause. M. *Euler*, au contraire, s'est efforcé de prouver fort au long dans sa Mécanique, que ce Principe est de verité nécessaire. Pour nous, sans vouloir discuter ici si ce Principe est de verité nécessaire ou contingente, nous nous contenterons de le prendre pour une définition, & d'entendre seulement par le mot de

force accélératrice, la quantité à laquelle l'accroissement de la vitesse est proportionnel. Ainsi au lieu de dire que l'accroissement de vitesse à chaque instant est constant, ou que cet accroissement est comme le quarré de la distance du Corps à un point fixe, ou &c. nous dirons simplement pour abreger & pour nous conformer d'ailleurs au langage ordinaire, que la force accélératrice est constante, ou qu'elle est comme le quarré de la distance; ou &c. & en général, nous ne prendrons jamais le rapport de deux forces que pour celui de leurs effets, sans examiner si l'effet est réellement comme sa cause, ou comme une fonction de cette cause : examen entièrement inutile, puisque l'effet est toujours donné indépendamment de la cause, ou par expérience, ou par hypothèse.

Ainsi nous entendrons en général par la force motrice le produit de la masse qui se meut par l'Elément de sa vitesse, ou ce qui est la même chose par le petit espace qu'elle parcourroit dans un instant donné en vertu de la cause qui accélère ou retarde son Mouvement; par force accélératrice, nous entendrons simplement l'Elément de la vitesse. Après de pareilles définitions, il est aisé de voir que tous les problèmes qu'on peut proposer sur le Mouvement des Corps mûs en ligne droite, & animés par des forces qui tendent vers un centre, ou exerçant les uns sur les autres une Attraction mutuelle suivant une Loi quelconque, sont des problèmes qui appartiennent pour le moins autant à la Geométrie qu'à la Mécanique, &

dans lesquels la difficulté n'est que de calcul, pourvu que le mobile soit regardé comme un point.

On imagineroit peut-être que l'Equation $\phi dt = \pm du$ regardée, non comme hypothèse, mais comme Principe, feroit au moins nécessaire pour calculer les effets dont les causes sont connues, comme l'impulsion, surtout quand cette impulsion consiste en de petits coups réitérés. J'espère qu'on verra dans la seconde Partie de cet Ouvrage, que non-seulement ce Principe y est inutile, mais que l'application en est insuffisante & pourroit même être fautive.

R E M A R Q U E II.

Sur la comparaison des forces accélératrices entr'elles.

20. Si dans un Cercle quelconque PQD (Fig. 5) on tire les cordes égales & infiniment petites PD , DE , & qu'on prolonge PD en O , enforte que $DO = PD$; qu'enfin on mene par les points O , E la ligne OQ , & par le point D la Tangente DN qui rencontre OQ en N , on aura par la propriété du Cercle $DN^2 = NE \times NQ$; $OD \times OP$ ou $2DO^2 = OE \times OQ$. * Donc à cause que les lignes DN & DO , NQ & OQ doivent être

* Lorsque les lignes PD , DE , DO sont égales, on peut démontrer rigoureusement que $OE = 2NE$. Car le Triangle DOE est isocèle, l'Angle ODE a pour mesure la moitié de l'Arc PDE , & l'Angle NDE la moitié de l'Arc DE . D'où il s'ensuit que DN divise l'Angle ODE en deux également, & qu'ainsi à cause de $DO = DE$, on a $OE = 2NE$.

Mais la démonstration que nous avons donnée s'étend encore au cas où PD , DE , DO ne seroient pas exactement égales, & où leur différence seroit infiniment petite par rapport à elles.

regardées comme égales, on aura $OE = 2NE$.

Donc si on considère l'Elément DE d'une Courbe quelconque ADE comme un petit Arc de cercle, ce qu'on peut supposer sans erreur; il s'ensuit que la différence seconde NE de l'espace parcouru, est double de l'espace réel que la puissance accélératrice feroit parcourir au Corps dans l'instant BC , quoiqu'elle paroisse lui être égale dans la Courbe considérée comme Polygone, parce que la Tangente DN n'est alors que le prolongement du petit côté de la Courbe.

Nous avons vû ci-dessus (*art.* 13) que quand les espaces parcourus sont comme les tems correspondans, un Corps qui parcourt un espace E dans le tems T , parcourroit uniformément dans le même tems l'espace $2E$ avec la vitesse qu'il a à l'extrémité de l'espace E . D'où il s'ensuit que dans la Courbe polygone, NE considérée comme l'effet de la puissance accélératrice ou retardatrice, doit être regardée comme parcourüe d'un Mouvement uniforme avec la vitesse infiniment petite que le Corps a acquis à la fin de l'instant BC . En effet, dans la Courbe Polygone, les lignes NE, ne ne sont plus entr'elles comme les quarrés des tems, mais comme les tems simples. On voit par-là de quelle manière on peut réduire à un Mouvement uniforme l'effet instantané de la puissance qui accélère ou qui retarde le Mouvement.

Il faut, au reste, bien prendre garde à cette distinction des Courbes polygones & des Courbes rigoureuses, dans

l'estimation des effets des forces accélératrices & dans la comparaison de ces effets entr'eux. Si un des effets est calculé dans l'hypothese de la Courbe rigoureuse, il faut calculer l'autre dans la même hypothese; autrement on courroit risque de faire le rapport des forces, c'est-à-dire de leurs effets, double de ce qu'il est réellement. Voyez l'Hist. de l'Acad. de 1722.

C H A P I T R E II.

Du Mouvement composé.

T H E O R È M E.

21. **S**I deux puissances quelconques agissent à la fois sur un Corps ou point A (Fig. 6) pour le mouvoir, l'une de A en B uniformément pendant un certain tems, l'autre de A en C uniformément pendant le même tems, & qu'on acheve le parallélogramme ABCD; je dis que le Corps A parcourra la Diagonale AD uniformément, dans le même tems qu'il eut parcouru AB ou AC.

Soit Ag la ligne inconnue parcourue par le Corps A; il est certain (art. 6) que cette ligne sera une ligne droite, & que le Corps A la parcourra uniformément. Il n'est pas moins évident qu'elle sera dans le plan des lignes AB, AC, puisqu'il n'y a pas de raison pourquoi elle s'écarte de ce plan plutôt d'un côté que de l'autre. De plus, si lorsque le Corps est arrivé à un point quelcon-

que g de cette ligne, on supposoit que deux puissances vinssent à agir sur lui, dont l'une tendît à le mouvoir suivant gc parallèle à AC avec la même vitesse qu'il a en A suivant AC , & en sens contraire, & l'autre tendit à lui faire parcourir la ligne go égale & parallèle à AB , & en sens contraire, dans le même tems qu'il auroit parcouru AB , il est clair que le Corps resteroit en repos au point g . Car sa vitesse & sa direction au point g est précisément la même, que s'il étoit animé en ce point par deux puissances égales & parallèles aux puissances suivant AB & AC , & par conséquent égales & contraires aux puissances suivant go , gc .

Cela posé, imaginons que le Corps A qui décrit la ligne Ag , soit sur un plan $CLMH$ qui puisse glisser librement entre les deux coulisses KL , IM parallèles à AC . Qu'on fasse mouvoir ce plan entre les deux coulisses, de manière que tous ses points g décrivent des lignes gc égales & parallèles à AC , dans le même tems que le Corps A eut décrit la ligne AC , & qu'en même tems les deux coulisses se meuvent en emportant le plan parallèlement à AB , & en sens contraire, avec une vitesse égale à celle que le Corps A auroit en suivant AB ; il est évident que tous les points g du plan décriront uniformément des lignes ga , égales & parallèles à la Diagonale AD du parallélogramme BC . Il est de plus évident que le point g , tiré continuellement en cet état par quatre puissances contraires & égales deux à deux, doit rester en repos dans l'espace absolu. D'où il s'ensuit, que quand

il est arrivé à un point g du plan, ce point g doit se trouver à la place que le Corps occupoit quand il a commencé de se mouvoir. Ce qui ne fauroit être, à moins que la ligne Ag ne tombe sur la Diagonale AD . De plus, si on prend $gc = AC$, $go = AB$, on verra que le point g doit tomber sur le point D , parce que $ga = AD$, & que le point a doit tomber sur le point A . Donc &c. Ce $Q. F. D.$

R E M A R Q U E.

22. La démonstration qu'on apporte d'ordinaire du Theorème précédent, consiste à imaginer que le point A se meuve uniformément sur une regle AB avec la vitesse qu'il a reçu suivant AB , & qu'en même tems la ligne ou regle AB se meuve suivant AC avec la vitesse que le Corps A a reçu suivant AC . On prouve très-bien dans cette supposition, que le point mobile A décrit la Diagonale AD . En général la plupart des démonstrations communes de cette proposition sont fondées sur ce qu'on regarde les deux puissances suivant AB & AC , comme agissant sur le Corps A pendant tout le tems de son Mouvement, ce qui n'est pas précisément l'état de la question. Car l'hypothese est, que le Corps A tend à se mouvoir au premier instant suivant AB & AC à la fois, & l'on demande la direction & la vitesse qu'il doit avoir en vertu du concours d'action des deux puissances. Dès qu'il a pris une direction moyenne AD , les deux tendances suivant AB & AC n'existent plus ; il n'y

n'y a plus de réel que sa tendance suivant AD .

J'ai donc cru devoir prévenir cette difficulté , & faire voir que le chemin du Corps A est le même, soit que les deux puissances n'agissent sur lui que dans le premier instant, soit qu'elles agissent continuellement toutes deux à la fois sur le Corps. C'est à quoi je crois être parvenu dans la démonstration que j'ai donnée ci-dessus.

COROLLAIRE I.

23. Si un Corps parcourt ou tend à parcourir une ligne droite AC (Fig. 7) avec une vitesse quelconque , & qu'on prenne un point B partout où l'on voudra sur cette ligne AC prolongée ou non, la vitesse AC pourra être regardée comme composée de la vitesse AB & de la vitesse BC . Car AC peut être regardée comme la Diagonale d'un parallélogramme, dont AB , BC sont les côtés. Donc &c.

REMARQUE.

24. Quelques Lecteurs pourront être surpris de ce que je tire la démonstration d'une proposition si simple en apparence , d'un cas général beaucoup plus composé ; mais on ne peut , ce me semble , démontrer autrement la proposition dont il s'agit ici , qu'en regardant comme un axiôme incontestable , que l'effet de deux causes conjointes est égal à la somme de leurs effets pris séparément , ou que deux causes agissent conjointement comme elles agiroient séparément ; principe qui ne me paroît pas assez évident , ni assez simple , qui tient d'ailleurs de trop près

D

à la question des forces vives, & au Principe des forces accélératrices dont nous avons parlé ci-dessus *art.* 19. C'est la raison qui m'a obligé à éviter d'en faire usage, ayant d'ailleurs pour but dans ce Traité de réduire la Mécanique au plus petit nombre de Principes possible, & de tirer tous ces Principes de la seule idée du Mouvement, c'est-à-dire, de l'espace parcouru & du tems employé à le parcourir, sans y faire entrer en aucune façon les puissances & les causes motrices.

C O R O L. II.

25. Si un Corps est poussé suivant AB & AC (Fig. 8) par deux puissances accélératrices quelconques, sa direction sera la Diagonale d'un parallélogramme fait sur des côtés AB , AC , proportionnels aux forces accélératrices suivant AB & AC , & sa force accélératrice suivant AD sera à chacune des deux suivant AB & AC , comme AD est à AB & AC . Car soient Ab & Ac les espaces que le Corps A eût parcouru dans le commencement de son Mouvement en vertu de chacune des puissances, on aura (*art.* 19.) $Ab \cdot Ac :: AB \cdot AC$. donc les lignes bd , cd , parallèles à AC , AB concourront au point d de la Diagonale AD . De même si $A\beta$, Ax , sont les espaces parcourus en tems égaux en vertu de ces mêmes puissances, on aura $Ab \cdot A\beta ::$ le quarré du tems par Ab ou par Ac au quarré du tems par $A\beta$ ou par Ax , c'est-à-dire, comme Ac est à Ax ; donc le point de concours δ des lignes $\beta\delta$, $x\delta$, sera encore sur la Diago-

nale AD . Donc si on suppose que le Corps A se meuve sur la règle AB au premier instant, avec la force accélératrice qu'il a suivant AB , & que la puissance accélératrice suivant AC , agisse en même-tems sur la règle pour la porter de A vers C , le point A décrira la Diagonale Ad , dans le même-tems qu'il auroit décrit Ab ou Ac , & sa force accélératrice suivant AD , fera à chacune des forces suivant les côtés, comme la Diagonale à chacun de ces mêmes côtés.

Delà on voit, comment à une force accélératrice quelconque, on peut en substituer d'autres, en tel nombre qu'on voudra.

Au reste, comme nous avons vû ci-dessus (*art. 20*) de quelle manière on peut réduire à un Mouvement uniforme l'effet instantané d'une puissance quelconque; il est clair que la combinaison des effets de tant de puissances qu'on voudra, & la recherche de l'effet unique qui en résulte, se réduit par-là fort aisément aux Loix du Mouvement composé uniforme.

Du Mouvement en ligne courbe, & des forces centrales.

26. Comme un Corps tend de lui-même à se mouvoir en ligne droite, il ne peut décrire une ligne Courbe, qu'en vertu de l'action d'une puissance qui le détourne continuellement de sa direction naturelle. On peut déduire de l'article précédent, les Principes du Mouvement d'un Corps sur une Courbe.

Il est démontré qu'un Arc infiniment petit d'une Courbe quelconque, peut être pris pour un Arc de cercle, dont le rayon feroit égal au rayon de la développée de cet Arc de la Courbe. On réduit par ce moyen le Mouvement d'un Corps sur une Courbe quelconque, au Mouvement de ce même Corps sur un cercle dont le rayon change à chaque instant.

La puissance qui retient un Corps sur une Courbe, est appelée particulièrement *force centrale*, quand elle est toujours dirigée vers un point fixe; mais nous la nommerons ici, *force centrale* en général, soit qu'elle tende vers un point fixe ou non. Cette puissance n'est par sa nature qu'une puissance accélératrice ou retardatrice, dont la direction est différente de celle du Corps. On peut, par tout ce qui a été dit ci-dessus, (*art. 24 & 25*) réduire à un Mouvement uniforme l'effet instantané de cette puissance, en regardant comme un Polygone d'une infinité de côtés la Courbe qu'elle fait décrire au Corps, & cet effet est double de celui que la force centrale produiroit dans la Courbe considérée exactement comme Courbe. Ainsi, supposons qu'un Corps décrive un Arc de cercle infiniment petit PDE , (*Fig. 5*) en vertu d'une puissance, qui, au point D le détourne de la ligne droite suivant une direction donnée: si on regarde le cercle comme un Polygone, la petite corde PD sera la ligne qu'il aura décrite dans l'instant précédent, & DO égale & en ligne droite avec PD , celle qu'il tend à décrire l'instant suivant. Donc tirant OE parallèle à la direction de la force

centrale en D , OE fera l'effet instantané de cette puissance ; au contraire, si on considéroit le cercle comme cercle rigoureux , la Tangente DN feroit la ligne que le Corps tendroit à décrire , & NE l'effet de la puissance qui le retiendrait sur la Courbe.

La ligne NE divisée par le quarré du tems employé à la parcourir , est (*art.* 17. 18 & 19) l'expression de la force accélératrice en vertu de laquelle le Corps décrit la Courbe ; or cette ligne NE est égale au quarré de la ligne DN ou de l'Arc DE ou PD , divisé par NQ , & NQ est au diamètre du cercle , comme le Sinus de l'angle que fait la force centrale avec la Courbe , est au Sinus total ; de plus , la ligne DE divisée par le tems employé à la parcourir , est (*art.* 14) l'expression de la vitesse du Corps. Donc , dans une Courbe quelconque , l'effet de la force centrale est comme le quarré de la vitesse divisé par le rayon de la développée , & multiplié par le rapport qu'il y a entre le Sinus de l'angle que fait cette force avec la Courbe , & le Sinus total.

En général , l'Elément du tems étant supposé constant , la force centrale est représentée par la ligne OE dans la Courbe Polygone , & par NE dans la Courbe rigoureuse. Il faut , par conséquent , avoir égard à cette différence d'expression dans la comparaison des effets de deux forces centrales , & pour ne pas faire l'un des effets double de ce qu'il est par rapport à l'autre , il faut considérer les deux Courbes , ou toutes deux comme Polygones , ou toutes deux comme rigoureuses.

Les forces centrales, & en général toutes les forces accélératrices (si par le mot de *forces* nous n'entendons que les effets) font entr'elles comme les petits espaces qu'un Corps parcourt dans un même instant en vertu de ces forces. On a coutume de comparer toutes ces forces à la force accélératrice constante que nous connoissons le mieux, je veux dire à la pesanteur. Si E est l'espace qu'un Corps pesant parcourt dans un tems fini T , $\frac{E dt^2}{T^2}$ fera l'espace qu'il parcourra dans le tems dt , & si l'Arc DE est supposé parcouru dans le même-tems dt , la force centrale fera à la pesanteur, comme la ligne NE à $\frac{E dt^2}{T^2}$, ou comme OE à $\frac{2 E dt^2}{T^2}$.

Or soit r le rayon de la développée de la Courbe en N , S le Sinus de l'angle que fait la direction de la force centrale avec la Courbe, A le Sinus total, e l'espace que le Corps parcourroit uniformément dans le tems T avec la vitesse qu'il a en D , on aura $DE = \frac{e dt}{T}$; $OE = \frac{DE^2}{r} \times \frac{S}{A} = \frac{e^2 dt^2 \cdot S}{T^2 Ar}$. Donc l'effet instantané de la pesanteur est à celui de la force centrale, comme $2 E$ à $\frac{e^2 S}{Ar}$ & ainsi le rapport de ces deux effets, que la plupart des Géomètres prennent pour celui des causes même, est exprimé en termes finis.

CHAPITRE III.

Du Mouvement détruit ou changé par des obstacles.

27. **U**N Corps qui se meut, peut rencontrer des obstacles qui altèrent, ou même qui anéantissent tout-à-fait son Mouvement; ces derniers sont, ou invincibles par eux-mêmes, ou n'ont précisément de résistance, que ce qu'il en faut pour détruire le Mouvement imprimé au Corps.

Un obstacle invincible peut être tel, qu'il ne permette au Corps aucun Mouvement, comme quand un Corps tire une verge droite attachée à un point fixe; ou l'obstacle pourroit être de telle nature, qu'il n'empêchât pas le Corps de se mouvoir dans une autre direction que celle qu'il a, comme quand un Corps rencontre un plan inébranlable.

28. Si l'obstacle, invincible ou non, que le Corps rencontre, ne fait qu'altérer & changer son Mouvement sans le détruire, en sorte que le Corps ayant, par exemple, la vitesse a avant de rencontrer l'obstacle, il soit obligé de prendre une vitesse b dont la quantité & la direction soit différente de la première; il est évident qu'on peut regarder la vitesse a que le Corps a lorsqu'il rencontre l'obstacle, comme composée de la vitesse b & d'une autre vitesse c , & qu'il n'y a que la vitesse c qui ait été détruite par l'obstacle.

29. Delà il s'ensuit, qu'un Corps sans ressort qui vient choquer perpendiculairement un plan immobile & impénétrable, doit s'arrêter après ce choc, & rester en repos. Car il est visible que si ce Corps a du Mouvement après la rencontre du plan, ce ne peut être qu'en arrière, & dans la direction de la perpendiculaire; soit u sa vitesse avant le choc, v sa vitesse en arrière, que je suppose $= mu$, m exprimant un nombre inconnu quelconque, on aura donc (art. 28) $u = -mu + u + mu$. Donc $u + mu$ est la vitesse perdue par le Corps à la rencontre du plan. Mais il n'y a point de raison pourquoi m soit plutôt tel nombre que tel autre. Car la seule condition par laquelle on puisse déterminer la vitesse $u + mu$, est qu'elle doit être détruite par le plan: or puisque (hyp.) le plan est inébranlable, il n'y a point de raison pourquoi il anéantiroit plutôt la vitesse $u + mu$, qu'une autre vitesse $u + nu$. Donc le nombre m ne peut être plutôt tel nombre que tel autre, donc il sera zero. Donc mu , & par conséquent v sera $= 0$. D'ailleurs, si la vitesse $u + mu$ est anéantie par la rencontre du plan, à plus forte raison la vitesse u pourra être détruite par la rencontre de ce même plan. Donc &c.

C O R O L. I.

30. Si on suppose qu'un Corps A (Fig. 9) mû suivant AB , rencontre le plan immobile & impénétrable BD sur lequel il soit forcé de se mouvoir, sa vitesse suivant BD sera à sa vitesse suivant AB ou BC , comme
le

le Sinus du complément de l'angle CBD au Sinus total. Car il faudra regarder la vitesse BC , comme composée de deux autres, dont l'une BE soit perpendiculaire au plan BD , & l'autre BD soit dans ce même plan : or la vitesse BE étant détruite par le plan, le Corps A n'aura plus que la vitesse BD qui fera à BC :: le Sinus de l'angle BCD , complément de CBD , au Sinus total.

C O R O L. II.

31. Si un Corps se meut le long de plusieurs plans AB , BC , CD , &c. (Fig. 10 & 11) qu'on prolonge AB , & BC indéfiniment en F & en E ; qu'ensuite d'un rayon arbitraire GL on décrive l'Arc LM , & qu'on fasse l'angle $LGM = CBF$; qu'ayant après cela abaissé la perpendiculaire MK , on décrive du rayon GK l'Arc NK , tel que l'angle $NGK = DCE$, & qu'on mene la perpendiculaire NI , & ainsi de suite ; je dis que si on prend GL pour représenter la vitesse suivant AB ; GI exprimera la vitesse suivant CD . Cela suit évidemment du Cor. précédent.

C O R O L. III.

32. Donc la somme des vitesses perdues de A en D est égale à LI , c'est-à-dire, à la somme des Sinus versés des angles DCE , CBF , &c. en prenant successivement GL & GK pour Sinus totaux.

C O R O L. IV.

33. Donc en prenant GL pour Sinus total commun à tous les Sinus versés, la vitesse perdue sera moindre que la somme de ces mêmes Sinus versés.

Du Mouvement d'un Corps le long d'une surface Courbe.

L E M M E.

34. Si dans une Courbe $ABCDR$ (Fig. 12) après avoir tiré les Tangentes AY, RY , on inscrit un Polygone $ABCDR$ dont les angles extérieurs $BAY, CBF, DCE, \&c.$ soient égaux entr'eux ; je dis qu'on peut imaginer ce Polygone d'un si grand nombre de côtés, que la somme des Sinus versés des angles $BAY, CBF, DCE, RDS, \&c.$ soit moindre qu'une grandeur donnée.

Car la somme des angles $BAY, CBF, DCE, \&c.$ est égale à l'angle RYZ fait par les Tangentes RY, AY de la Courbe. Donc si on fait l'angle ryz (Fig. 13) $= RYZ$, l'angle $ryn =$ à un des angles BAY ou CBF , & qu'on nomme n le nombre des angles ; on aura, $arc. rn \times n = arc. rz$, & $\frac{cord. rn^2}{rh} \times n =$ à la somme des Sinus versés.

Mais $\frac{cord. rn^2}{rh} \times n < \frac{arc. rn^2 \cdot n}{rh} = \frac{arc. rz^2}{n \cdot rh}$: soit l'Arc $\frac{rz^2}{rh} = \pi \cdot rl$ (π étant un nombre donné, puisque les lignes rh, rl , & l'Arc rz sont donnés) la somme des Sinus versés

fera donc $< \frac{\pi \cdot r l}{n}$. Or puisque π & rl sont des quantités constantes, on peut rendre n si grand, que $\frac{\pi \times r l}{n}$ soit moindre qu'une grandeur donnée; donc à plus forte raison, la somme des Sinus versés sera moindre que cette même grandeur donnée.

THEORÈME.

35. Si un Corps mû suivant une droite XA (Fig. 12) rencontre la surface Courbe AR , touchée en A par XA , & sur laquelle il soit obligé de se mouvoir; je dis qu'il ne perdra de A en R aucune partie de sa vitesse.

Car on peut inscrire dans la Courbe un Polygone $ABCDR$ d'un si grand nombre de côtés, que la somme des Sinus versés de ses angles extérieurs, soit toujours (art. 34) moindre qu'une grandeur donnée, & qu'ainsi à plus forte raison (art. 33) la vitesse perdue de A en R soit toujours aussi petite qu'on voudra. Donc si ce Polygone se confond avec la Courbe, la vitesse perdue de A en R sera zero.

COROLLAIRE.

36. Il résulte delà, que quand un Corps se meut sur une Courbe, sa vitesse à chaque point de la Courbe est précisément altérée de la même manière, toutes choses d'ailleurs égales, que s'il se mouvoit sur la Tangente de la Courbe en ce point.

37. On démontre d'ordinaire ce dernier Theorème, en regardant la Courbe comme un Polygone $ABCDR$ d'une infinité de côtés, dont les angles extérieurs CBF sont infiniment aigus; les Sinus versés de ces angles étant infiniment petits du second ordre, on en conclut qu'un Corps ne perd à chaque instant qu'une partie de vitesse infiniment petite du second genre, desorte que la perte totale de A en R n'est qu'infiniment petite du premier.

La démonstration que j'ai donnée, quoique peut-être un peu longue, me paroît aussi plus lumineuse, d'autant que la vitesse perdue de A en R est réellement & exactement nulle ou zero, & non pas infiniment petite; quand on veut démontrer en toute rigueur les propriétés des Courbes, on tombe nécessairement dans des démonstrations un peu longues; la méthode des infiniment petits abrége beaucoup ces démonstrations, mais elle n'est pas si rigoureuse. Elle a de plus un autre inconvénient, c'est que les commençans qui n'en pénètrent pas toujours l'esprit, pourroient s'accoutumer à regarder ces infiniment petits comme des réalités; c'est une erreur contre laquelle on doit être d'autant plus en garde, que de grands hommes y sont tombés, & qu'elle-même a donné occasion à quelques mauvais Livres contre la certitude de la Geométrie. La méthode des infiniment petits, n'est autre chose que la méthode des raisons premières & dernières, c'est-à-dire des rapports des quantités qui naissent

ou qui s'évanouissent. * Quand on a bien conçu l'esprit & les Principes de cette Méthode, alors il est utile de la mettre en usage pour parvenir à des solutions plus élégantes,

De l'Equilibre.

38. Si les obstacles que le Corps rencontre dans son Mouvement, n'ont précisément que la résistance nécessaire pour empêcher le Corps de se mouvoir ; on dit alors qu'il y a équilibre entre le Corps & ces obstacles.

THEOREME.

39. Si deux Corps dont les vitesses sont en raison inverse de leurs masses, ont des directions opposées, de telle manière que l'un ne puisse se mouvoir sans déplacer l'autre, il y aura équilibre entre ces deux Corps.

Premier cas.

1°. Si les deux Corps sont égaux & leurs vitesses égales, il est évident qu'ils resteront tous deux en repos. Car il n'y a point de raison pourquoi l'un se meuve plutôt que l'autre dans la direction qu'il a ; d'ailleurs il est clair par

* Voyez la Section I. du 1. liv. des Principes de M. Newton, & surtout l'Ouvrage nouveau de M. Mac-Laurin, qui a pour titre : *A Treatise of fluxions*. L'occasion de ce Traité de M. Mac-Laurin, a été un Livre Anglois intitulé, *The Analyst*. &c. contre la certitude des Mathématiques, & dont la plupart des argumens sont contre la Méthode des infiniment petits.

l'article 29, qu'ils ne peuvent se mouvoir dans une direction contraire. Donc &c.

Second cas.

Si l'un de ces Corps restant dans le même état, on augmente du double la masse de l'autre, & qu'on diminue sa vitesse de la moitié, il y aura encore équilibre. Car on peut regarder (art. 23.) la vitesse du petit Corps comme composée de deux vitesses, égales chacune à la vitesse du grand; & la masse du grand, comme composée de deux masses égales, animée chacune de la même vitesse. Donc à la place de chacune des masses proposées, on peut imaginer de chaque côté deux masses égales animées de vitesses égales. Or dans cette dernière hypothèse il y auroit équilibre (Cas 1.). Donc &c.

Troisième cas.

Si les deux masses sont entr'elles comme deux nombres rationnels quelconques, soient M, m , ces deux masses, V, u , leurs vitesses, μ la masse qui est la mesure commune des deux masses M, m , v la vitesse qui est la mesure commune des deux vitesses, V, u , on aura $m = \mu p$, $M = \mu P$; $u = v P$, $V = v p$, P , & p exprimant deux nombres entiers. Cela posé, on prouvera, comme on a fait dans le Cas précédent, qu'à chacune des masses animée de sa vitesse, on peut substituer un nombre $P \times p$ de masses μ animées de la vitesse v , & qui par conséquent feront équilibre de part & d'autre. Donc &c.

Quatrième cas.

Supposons enfin que les masses M, m , soient incommensurables, de manière que $m = \mu p$ & $M = \mu P + z$, P & p étant deux nombres entiers, & $z < \mu$; je dis que si $m \times u = M \times V$. Il y aura encore équilibre.

Car supposons qu'il n'y eut point équilibre, & qu'il fallut pour cela ajouter ou retrancher de la masse M une quantité t ; la masse $\mu P + z \pm t$ animée de la vitesse V , feroit donc en équilibre avec la masse m ou μp animée vitesse u . Or la quantité t doit être nécessairement plus petite que μ . Car si elle étoit plus grande, on auroit $\mu P + z + t > \mu P + \mu$. De plus, cette dernière masse $\mu P + \mu$, devroit pour faire équilibre à la masse m , être ani-

mée de la vitesse $\frac{mu}{\mu P + \mu} < \frac{mu}{\mu P + z}$, c'est-à-dire $< V$. Mais on suppose que la masse $\mu P + z + t$ animée de la vitesse V , fasse équilibre à la masse m animée de la vitesse u . Donc il est impossible que la masse $\mu P + \mu$ animée d'une vitesse plus petite que V fasse aussi équilibre à m . Donc t doit nécessairement être $< \mu$, & comme μ peut être aussi petit qu'on voudra, il s'ensuit que $t = 0$. Donc &c.

Si la quantité t étoit une quantité qu'il fallut retrancher, on auroit en supposant $t > \mu$; $\mu P + z - t < \mu P$ & $V < \frac{mu}{\mu P}$. Donc &c. Ce *Q. F. D.*

Le produit de la masse d'un Corps par sa vitesse est appelé *quantité de Mouvement*. De là naît cet axiôme, que

les Corps qui ont des quantités de Mouvement égales & directement opposées, se font équilibre.

C O R O L. I.

40. Si trois Corps A, B, C , (Fig. 14) sont attachés à une verge indéfinie MN , ou à un fil, & qu'ils reçoivent suivant AM, BM, CN des vitesses telles que la somme des quantités de Mouvement du Corps A & du Corps B , soit égale à celle du Corps C seul, il y aura équilibre. Car on peut (art. 23) regarder la vitesse du Corps C comme composée de deux vitesses quelconques, dont la somme soit égale à la vitesse totale; & par conséquent on peut considérer dans le Corps C deux quantités de Mouvement, dont l'une soit égale & contraire à celle de B , l'autre égale & contraire à celle de A . Donc &c.

Donc en général, quel que soit le nombre des Corps il y aura équilibre, quand la somme des quantités de Mouvements de ceux qui tirent en un sens, sera égale à la somme des quantités de Mouvement de ceux qui tirent en sens contraire.

C O R O L. II.

41. Supposons que trois Corps B, C, F , (Fig. 15) attachés aux fils ou verges AB, AC, AF , soient en équilibre, & qu'on cherche le rapport des quantités de Mouvement de ces trois Corps entr'elles. On remarquera d'abord que l'action des Corps B , & C sur le point A est la même, que si ces Corps B & C étoient en A ; on supposera que AH & AP soient entr'elles comme les vitesses

ses des Corps B & C ; on décomposera chacune de ces vitesses AH , AP en deux autres AG , AN ; & AL , AQ ; dont les deux AG , AQ aient des directions contraires ; & les deux autres AN , AL soient dirigées suivant AF prolongée.

Maintenant , puisqu'il y a équilibre , il s'ensuit que $B \times AG = C \times AQ$; de plus , la quantité de Mouvement du Corps F doit être égale à $B \times AN + C \times AL$. Or si par un point quelconque E de la ligne AF prolongée , on tire EK parallèle à AC , & ED parallèle à AB ; je dis que les lignes AE , AD , AK seront entr'elles comme les quantités de Mouvement des Corps F , C , B ; c'est-à-dire que $AE \cdot \left(\frac{AK}{AD}\right) :: C \times AL + B \times AN \cdot \left(\frac{B \times AH}{C \times AP}\right)$.

Car $AE \cdot \left(\frac{AK}{AD}\right) :: AO + AM \cdot \left(\frac{AK}{AD}\right) :: \frac{AL \times OD}{PL} + \frac{AN \times KM}{AG}$.

$\left\{ \frac{\frac{AH \times KM}{AG}}{\frac{AP \times OD}{PL}} \right\}$ (à cause de $OD = KM$) $:: \frac{AL}{PL} + \frac{AN}{AG}$.

$\left\{ \frac{\frac{AH}{AG}}{\frac{AP}{PL}} \right\}$ (mettant pour AG & PL leurs proportionnelles

C & B) $:: AL \times C + AN \times B \cdot \left(\frac{AH \times B}{AP \times C}\right)$. Ce $Q. F. D.$

COROL. III.

42. Tout ce que nous venons de dire sur l'équilibre dans les propositions précédentes , sera vrai encore , si au lieu

F

des vitesses finies imprimées aux Corps qui sont en équilibre, on leur suppose des forces accélératrices qui soient entr'elles comme étoient ces vitesses finies, ou, suivant les définitions données *art. 19*, des forces motrices qui soient entr'elles comme étoient leurs quantités de Mouvement. L'équilibre subsistera encore, il ne faudra que se servir pour la démonstration, du Coroll. 2. Chap. 2. au lieu du Coroll. 1. du même Chapitre.

R E M A R Q U E

Sur l'usage du mot de Puissances dans la Statique.

43. Les puissances ou causes qui meuvent les Corps, ne peuvent agir les unes sur les autres que par l'entremise des Corps même qu'elles tendent à mouvoir. D'où il s'ensuit que l'action mutuelle de ces puissances, n'est autre chose que l'action même des Corps animés par les vitesses qu'elles leurs donnent. On ne doit donc entendre par l'action des puissances, & par le terme même de *puissances* dont on se sert communément dans la Statique, que le produit d'un Corps par sa vitesse ou par sa force accélératrice. De cette définition, & des articles précédens, on conclut aisément que deux puissances égales & directement opposées se font équilibre, que deux puissances qui agissent en même sens produisent un effet égal à la somme de chacune; que si trois puissances agissant sur un point commun sont en équilibre, & qu'on fasse sur les directions de deux de ces puissances un pa-

parallélogramme , la Diagonale de ce parallélogramme sera dans la direction prolongée de la troisième puissance, & que les rapports des trois puissances seront ceux de la Diagonale aux côtés &c , & plusieurs autres Theorèmes semblables que l'on démontre dans la Statique , peut-être avec moins de précision que nous le faisons ici , parce qu'on n'y donne pas communément une notion du mot de *puissance* aussi nette , que celle que nous venons d'en donner.

COROL. IV.

44. Supposons que deux puissances égales appliquées aux extrémités A , B (Fig. 16) d'une verge droite & inflexible AB , agissent en sens contraire dans la direction de cette même verge, & se fassent par conséquent équilibre. Si on imagine une autre verge quelconque ABC , fixe même, si l'on veut, en un point quelconque C , il est évident que l'équilibre subsistera. De plus, si les puissances au lieu de demeurer appliquées en A & en B , étoient appliquées par tout où l'on voudroit dans AB prolongée vers A & vers B , il est clair que l'équilibre subsisteroit encore. Donc si on suppose la verge AB anéantie, & que la seule verge ACB subsiste, les puissances appliquées en A & en B étant égales & de directions contraires, se feront équilibre.

Qui contient le principe du Levier.

45. Soient AH & BE les directions de deux puissances en équilibre sur le Levier ACB , & que AH & BE soient entr'elles comme ces puissances; je décompose la puissance AH en deux autres, dont les directions AK & AG prolongées, passent, l'une par B , l'autre par C , & de même la puissance BE en deux autres, dont les directions BP & BF passent par A & par C . En menant les perpendiculaires CM , CV , CL , sur AH , BE , AB , j'ai $AK = \frac{AH \times CM}{CL}$ & $BP = \frac{BE \times CV}{CL}$. mais à cause de l'équilibre $AK = PB$. Donc $CM \times AH = BE \times CV$. donc les puissances AH , BE sont entr'elles en raison inverse des distances de leurs directions au point fixe.

C O R O L. VI.

46. Si le point C n'étoit pas fixe, alors il faudroit se servir du Coroll. II. ci-dessus, pour savoir quelle puissance il faudroit appliquer en C pour résister aux puissances AG , BF . Or comme les puissances AG , BF peuvent être regardées comme composées des puissances AH & Ak , BE & Bp , & que les puissances Ak , Bp sont égales & se détruisent, il s'ensuit que la puissance capable de faire équilibre aux puissances AG , BF , sera la même que celle qu'on trouveroit, si au lieu de ces puis-

fances AG, BF , on imaginoit les puissances AH, BE , appliquées en C avec leurs directions propres.

REMARQUE sur le cas où le Levier est droit.

47. La démonstration précédente du principe du Levier, suppose que les lignes AC & CB fassent un angle, & il semble par conséquent qu'elle ne puisse s'appliquer au cas où le Levier est droit, & les directions des puissances parallèles. Cependant comme la proposition est vraie, quelque obtus que soit l'angle ACB ; il est clair qu'elle doit être vraie encore, lorsque l'angle ACB est de 180 degrés. Voici, au reste, une démonstration plus rigoureuse du cas dont il s'agit.

Soient AP, AR (Fig. 17) les bras de Levier; PD, RS les directions des deux puissances, que je suppose en équilibre; il est évident en premier lieu, que si les bras de Levier sont égaux, les puissances P, R doivent être égales. Mais si les bras AP, AR sont inégaux, alors ayant tiré à volonté la ligne AS , imaginons que cette ligne représente une verge inflexible, à l'extrémité S de laquelle soient appliquées deux puissances égales & opposées, dans la même ligne que la puissance R : supposons, de plus, que la seule puissance S qui tire en embas, soit capable de faire équilibre avec la puissance P sur le Levier PAS . Il est constant que la puissance S opposée à celle-ci, doit faire équilibre à la puissance R ; c'est-à-dire (art. 44) qu'elle doit lui être égale. Donc $R = S =$

(art. 45) $\frac{P \times AP}{AR}$. Ce *Q. F. D.* Donc $R. P :: AP. AR$.

Je ne suis pas le seul qui ait déduit les propriétés du Levier droit de celles du Levier courbe. *M. Newton* en a usé de la même manière dans ses Principes, quoiqu'il ait suivi une route différente de la nôtre, & il y a lieu de croire que ce grand Geomètre sentoît la difficulté qu'il y auroit eu à s'y prendre autrement. J'ai tiré les propriétés du Levier courbe, de l'équilibre entre deux puissances égales & opposées en ligne droite; mais comme ces deux puissances s'évanouissent dans le cas du Levier droit, la démonstration pour ce cas n'a pu être tirée qu'indirectement du cas général.

On peut démontrer les propriétés du Levier droit, dont les puissances sont parallèles, en imaginant toutes ces puissances réduites à une seule, dont la direction passe par le point d'appui: c'est ainsi que *M. Varignon* en a usé dans sa Mécanique. Cette Méthode entre plusieurs avantages, a celui de l'élégance & de l'uniformité; mais n'a-t'elle point aussi, comme les autres, le défaut d'être indirecte, & de n'être pas tirée des vrais Principes de l'équilibre? Il faut imaginer que les directions des puissances prolongées concourent à l'infini, les réduire ensuite à une seule par la décomposition, & démontrer que la direction de cette dernière passe par le point d'appui. Doit-on s'y prendre de cette manière pour prouver l'équilibre de deux puissances égales, appliquées suivant des directions parallèles à des bras égaux de Levier? il me sem-

ble que cet équilibre est aussi simple & aussi facile à concevoir, que celui de deux puissances opposées en ligne droite, ou d'une puissance retenue par un point fixe, & que nous n'avons aucun moyen direct de réduire l'un à l'autre : or si la Méthode de M. *Varignon* pour démontrer l'équilibre du Levier est indirecte dans un cas, elle doit l'être aussi nécessairement dans l'application au cas général.

COROL. VII.

48. Toutes choses demeurant les mêmes que dans la Remarque précédente ; si on suppose au lieu du point fixe *A* une puissance qui fasse équilibre aux puissances *P* & *R*, il est évident que sa direction sera parallèle & contraire à celle de ces puissances, & qu'elle sera égale à leur somme. Car en supposant qu'elle fasse équilibre aux puissances *P*, *S*, elle fera $= P + S$. Donc puisque $S = R$, elle fera aussi $= P + R$.

49. Je ne m'étendrai pas davantage sur les Loix de l'équilibre dans cette première partie. J'aurai occasion d'en parler encore dans la seconde partie de cet Ouvrage. La Loi générale de l'équilibre, est que les puissances soient entr'elles réciproquement comme les vitesses, estimées suivant la direction de ces puissances. C'est de cette Loi générale, dont M. *Newton* fait mention en peu de mots au commencement de ses Principes, que dépend la démonstration de la conservation des forces vives, comme on le verra dans la seconde Partie de cet Ouvrage.

Pour ce qui concerne le détail des différentes Machines dont on fait mention d'ordinaire dans la Statique, comme la Poulie, le Treuil &c, je me contente, n'ayant là-dessus rien de nouveau à dire, de renvoyer mes Lecteurs aux Livres qui en traitent, & particulièrement à l'Ouvrage de M. *Trabaud* qui a paru l'année dernière, & qui a pour titre : *Principes sur le Mouvement & l'Equilibre*; Ouvrage où cette matière & plusieurs autres sont traitées avec exactitude & avec clarté.



SECONDE PARTIE.

Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, avec plusieurs applications de ce Principe.

CHAPITRE PREMIER.

Exposition du Principe.

LES Corps n'agissent les uns sur les autres que de trois manières différentes qui nous soient connues : ou par impulsion immédiate , comme dans le choc ordinaire , ou par le moyen de quelque Corps interposé entr'eux , & auquel ils sont attachés , ou enfin par une vertu d'attraction réciproque , comme font dans le système Newtonien le Soleil & les Planetes. Les effets de cette dernière espece d'action ayant été suffisamment examinés , je me bornerai à traiter ici du Mouvement des Corps qui se choquent d'une manière quelconque , ou de ceux qui se tirent par des fils ou des verges inflexibles. Je m'arrêterai d'autant plus volontiers sur ce sujet , que les plus grands Géomètres ne nous ont donné jusqu'à présent qu'un très-petit nombre de Problèmes de ce genre , &

que j'espère, par la Méthode générale que je vais donner, mettre tous ceux qui sont au fait du calcul & des Principes de la Mécanique, en état de résoudre les plus difficiles Problèmes de cette espece.

DEFINITION.

J'appellerai dans la suite *Mouvement* d'un Corps, la vitesse de ce même Corps considérée en ayant égard à sa direction, & par *quantité de Mouvement*, j'entendrai à l'ordinaire le produit de la masse par la vitesse.

PROBLÈME ^A GENERAL.

50. Soit donné un système de Corps disposés les uns par rapport aux autres d'une manière quelconque ; & supposons qu'on imprime à chacun de ces Corps un Mouvement particulier, qu'il ne puisse suivre à cause de l'action des autres Corps, trouver le Mouvement que chaque Corps doit prendre.

Solution.

Soient $A, B, C, \&c.$ les Corps qui composent le système, & supposons qu'on leur ait imprimé les Mouvements $a, b, c, \&c.$ qu'ils soient forcés, à cause de leur action mutuelle, de changer dans les Mouvements $a, b, c, \&c.$ Il est clair qu'on peut regarder le Mouvement a imprimé au Corps A comme composé du Mouvement a qu'il a pris, & d'un autre Mouvement α ; qu'on peut de même regarder les Mouvements $b, c, \&c.$ comme

composés des Mouvements $b, \ell; c, x; \&c.$ d'où il s'enfuit que le Mouvement des Corps $A, B, C, \&c.$ entr'eux auroit été le même, si au lieu de leur donner les impulsions a, b, c , on leur eût donné à la fois les doubles impulsions $a, a; b, \ell; c, x, \&c.$ Or par la supposition, les Corps $A, B, C, \&c.$ ont pris d'eux-mêmes les Mouvements $a, b, c; \&c.$ Donc les Mouvements $a, \ell, x \&c.$ doivent être tels qu'ils ne dérangent rien dans les Mouvements $a, b, c \&c.$ c'est-à-dire, que si les Corps n'avoient reçu que les Mouvements $a, \ell, x \&c.$ ces Mouvements auroient dû se détruire mutuellement, & le système demeurer en repos.

Delà résulte le Principe suivant, pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres. *Décomposés les Mouvements $a, b, c \&c.$ imprimés à chaque Corps, chacun en deux autres $a, a; b, \ell; c, x; \&c.$ qui soient tels, que si l'on n'eût imprimé aux Corps que les Mouvements $a, b, c \&c.$ ils eussent pu conserver ces Mouvements sans se nuire réciproquement; & que si on ne leur eût imprimé que les Mouvements $a, \ell, x, \&c.$ le système fut demeuré en repos; il est clair que a, b, c seront les Mouvements que ces Corps prendront en vertu de leur action. Ce Q. F. Trouver.*



C H A P I T R E II.

Propriétés du centre de gravité commun de plusieurs Corps, déduites du Principe précédent.

D É F I N I T I O N I.

J'APPELLERAI dans la suite *centre de gravité* de deux Corps, un point pris dans la ligne droite qui joint ces Corps, & dont les distances à chacun de ces Corps, soient en raison inverse de leurs masses ; & en général, j'entendrai toujours par le mot de *centre de gravité de plusieurs Corps*, ce qu'on entend d'ordinaire par ce mot en Mécanique, c'est-à-dire, un point tel, que si on fait passer par ce point un plan de position quelconque, la somme des produits des masses qui se trouveront d'un côté de ce plan, multipliées chacune par sa distance à ce même plan, soit égale à la somme des produits des masses qui se trouveront de l'autre côté, multipliées de même chacune par sa distance au plan.

S C O L I E,

§ 1. Lorsque les pesanteurs des Corps sont comme leurs masses, le centre de gravité, tel que nous venons de le définir, est aussi le point par lequel le système devrait être suspendu pour rester en équilibre, si tous les Corps étoient unis l'un à l'autre par des Leviers inflexibles. II

n'en est pas de même , lorsque les forces motrices ou pesanteurs des Corps ne sont pas comme leurs masses. Ce que nous appelons ici *centre de gravité* , devroit plutôt s'appeller alors *centre de masses*. * Nous nous servirons cependant du terme de *centre de gravité* , pour nous conformer à l'usage reçu.

DÉFINITION II.

Lorsque plusieurs puissances agissent ensemble , j'appellerai *force résultante du concours d'action de ces puissances* , ou simplement *force résultante de ces puissances* , une puissance égale & directement opposée , à celle qui seroit capable de leur faire équilibre.

Ainsi , par exemple , si AM (Fig. 17) est la direction de la puissance qui fait équilibre aux puissances P, R sur le Levier PAR , AN fera la direction de la force résultante des puissances P, R , & cette force résultante sera égale à la force suivant AM .

COROLLAIRE.

§ 2. Si plusieurs puissances se font équilibre d'une manière quelconque , la force résultante sera nulle , s'il n'y a pas de point fixe ; & s'il y en a un , la direction de la force résultante passera par le point fixe.

Car dans le premier Cas , puisque toutes les puissances

* Ce terme de *centre de masse* a été imaginé par M. Daniel Bernoulli ; Traité du flux & reflux , Chap. 1.

se font équilibre par elles-mêmes les unes aux autres, la puissance capable de faire seule équilibre à toutes ces puissances est donc zero, & par conséquent aussi (*déf. précéd.*) la force résultante.

Dans le second Cas, il est visible que le point fixe fait l'effet d'une puissance qui soutient l'effort de toutes les autres ; donc si on détruit le point fixe, & qu'on cherche une puissance capable de faire équilibre à toutes les puissances données, la direction de cette puissance passera nécessairement par le point fixe. Donc la direction de la force résultante y passera aussi.

J'entends au reste ici, & j'entendrai dans les Lemmes suivans par le mot de point fixe, non-seulement un point Mathématique (comme l'appui d'un Levier, le point de suspension d'une verge ou d'un fil) ; mais en général tout obstacle insurmontable, qui par sa résistance soit capable de détruire l'effet commun des puissances, & de produire l'équilibre entr'elles.

L E M M E I.

53. Si tant de Corps qu'on voudra se meuvent uniformément suivant des directions parallèles, dans le même plan ou dans des plans différens, la direction de leur centre de gravité commun sera parallèle aux directions de ces Corps, & sa vitesse sera égale à la somme des quantités de Mouvement de chaque Corps, divisée par la somme des masses. Cette proposition est démontrée dans plusieurs Ouvrages.

L E M M E II.

54. Soient un même plan trois Corps A, a, α , (Fig. 18) ou en général tant de Corps qu'on voudra, & G leur centre de gravité. Soit GM la ligne droite parcourue par le centre de gravité de ces Corps, dans le tems qu'ils parcourent uniformément les lignes quelconques $AC, ac, \alpha x$. Je dis, que si on décompose les vitesses $AC, ac, \alpha x$, chacune en deux autres $AB, AD; ab, ad; \alpha \epsilon, \alpha \delta$, telles que les lignes $AB, ab, \alpha \epsilon$ soient parallèles entr'elles aussi-bien que les lignes $BC, bc, \epsilon x$; & qu'on cherche la ligne GN que parcourroit le centre de gravité G , si les Corps A, a, α , avoient les vitesses & les directions $AB, ab, \alpha \epsilon$, & de même la ligne GO que parcourroit ce même centre, si les Corps A, a, α , avoient les vitesses & les directions $AD, ad, \alpha \delta$: la Diagonale du parallélogramme fait sur les lignes GN, GO , sera la ligne même GM que parcourt le centre, lorsque les Corps A, a, α , ont les vitesses & les directions $AC, ac, \alpha x$.

Car supposons, que lorsque les Corps A, a, α , sont parvenus en B, b, ϵ , & que par conséquent (*hyp.*) le centre G est en N , on leur donne suivant $BC, bc, \epsilon x$, des vitesses égales & parallèles aux vitesses suivant $AD, ad, \alpha \delta$, il est clair qu'ils arriveront aux points C, c, x des lignes $AC, ac, \alpha x$. Or, par la supposition, lorsque les Corps A, a, α sont en C, c, x , le centre G est en M ; donc tandis que les Corps A, a, α , parcourent les lignes $BC, bc, \epsilon x$, le centre de gravité parcourra la ligne

NM. Cette ligne *NM* fera (*Lem. 1*) parallèle aux lignes *BC*, *bc*, *cx*, & $= \frac{A \cdot BC + a \cdot bc + \alpha \cdot cx}{A + a + \alpha}$. Mais la ligne

GO que parcourroit le centre de gravité *G*, tandis que les Corps *A*, *a*, *α*, décriroient les lignes *AD*, *ad*, *αδ*, parallèles & égales à *BC*, *bc*, *cx*, cette ligne *GO* seroit parallèle à ces mêmes lignes *AD*, *ad*, *αδ*, & seroit $=$

$$\frac{A \cdot AD + a \cdot ad + \alpha \cdot \alpha\delta}{A + a + \alpha} = \frac{A \cdot BC + a \cdot bc + \alpha \cdot cx}{A + a + \alpha} = NM.$$

Donc la ligne *GO* est égale & parallèle à *NM*: donc *MG* est la Diagonale du parallélogramme fait sur les côtés *NG*, *GO*. Ce *Q. F. D.*

S C O L I E.

55. Il est visible que cette démonstration peut s'étendre à tel nombre de Corps qu'on voudra, & qu'ainsi la proposition est générale.

L E M M E III.

56. Si *GM* (*Fig. 18 & 19*) est la ligne parcourue par le centre de gravité *G* des Corps *A*, *a*, *α*, tandis que ces Corps décrivent uniformément les lignes quelconques *AC*, *ac*, *αx*, & qu'ayant transporté ces Corps en d'autres endroits *F*, *f*, *φ* du même plan, de manière qu'ils soient disposés l'un par rapport à l'autre comme on voudra, & que *γ* soit leur centre de gravité, on suppose qu'ils décrivent les lignes *FH*, *fh*, *φn*, égales & parallèles à *AC*, *ac*, *αx*, chacune à sa

sa correspondante, je dis que la ligne $\gamma\mu$ décrite par le centre de gravité, sera égale & parallèle à GM .

Car, soient $FL, fl, \phi\lambda$ égales & parallèles à $AB, ab, a\epsilon$; $FP, fp, \phi\pi$, égales & parallèles à $AD, ad, a\delta$, chacune à sa correspondante, & $\gamma\nu$ le chemin du centre γ , lorsque les Corps décrivent les lignes $FL, fl, \phi\lambda$; $\gamma\omega$ le chemin du même centre, lorsqu'ils décrivent $FP, fp, \phi\pi$. Il est clair que $\gamma\nu$ sera égale & parallèle à GN , & $\gamma\omega$ égale & parallèle à GO . Donc $\gamma\mu$ sera aussi égale & parallèle à GM : mais (Lem. précéd.) ces deux lignes sont celles que décrivent les centres de gravité G, γ , quand les Corps A, a, α & F, f, ϕ , parcourent les lignes AC, ac, ax , & $FH, fh, \phi\eta$. Donc &c. Ce Q. F. D.

LEMME IV.

57. Les mêmes choses étant supposées que dans le Lem. II. ci-dessus, avec cette différence que $AB, ab, a\epsilon$, & $AD, ad, a\delta$, (Fig. 20) ne soient point parallèles: si GM est le chemin du centre de gravité, lorsque les Corps A, a, α , décrivent uniformément les lignes AC, ac, ax ; GN le chemin de ce même centre, lorsque ces Corps décrivent les lignes $AB, ab, a\epsilon$; & GO le chemin du centre, lorsque les Corps A, a, α , décrivent les lignes $AD, ad, a\delta$; je dis que GM sera la Diagonale du parallélogramme fait sur les côtés GM, GO .

Car l'on prouvera comme dans le Lem. II. que NM est le chemin du centre, lorsque les Corps A, a, α , décrivent les lignes $BC, bc, \epsilon x$. Mais à cause que $AD,$

ad , ad sont égales & parallèles à BC , bc , cx , chacune à chacune ; il s'ensuit (*Lem. 3*) que GO est égale & parallèle à NM . Donc &c.

C O R O L. I.

58. Si on avoit décomposé les Mouvements AC , ac , ax chacun en trois autres quelconques , ou en général en tant d'autres qu'on eût voulu , le chemin GM du centre de gravité auroit toujours été la dernière Diagonale des parallélogrammes , qui auroient eu pour côtés les lignes particulières que le centre de gravité auroit parcouru , si les Corps A , a , a , avoient eu séparément & successivement chacun des Mouvements composans. Cela est clair par le *Lem. précédent*.

C O R O L. II.

59. La même proposition seroit encore vraie , si les Mouvements composans n'étoient pas en nombre égal dans tous les Corps ; par exemple , si le Mouvement de l'un étoit décomposé en trois , le Mouvement d'un autre en deux , &c. Car le *Lemme précédent* n'en seroit pas moins véritable , quand on supposeroit par exemple $AD = 0$, c'est-à-dire , que le Mouvement AC n'eût point été décomposé.

L E M M E V.

60. Si tant de Corps A , B , C &c. qu'on voudra sont liés ou joints ensemble d'une manière quelconque , sans néan-

moins qu'il y ait dans le système aucun point fixe ; & qu'on leur imprime les Mouvements $M, N, P, \&c.$ tels qu'en vertu de ces Mouvements ils soient en équilibre. Je dis que si les Corps, A, B, C , pouvoient suivre librement les Mouvements $M, N, P, \&c.$ le centre de gravité demeureroit en repos.

Car si on décompose les Mouvements $M, N, P, \&c.$ chacun en deux autres $m, \mu; n, \nu; p, \pi; \&c.$ parallèles à deux lignes données de position quelconque, que j'appelle $K \& Q$; il faudra pour trouver le chemin du centre de gravité en vertu des Mouvements $M, N, P, \&c.$ chercher le chemin de ce même centre en vertu des Mouvements m, n, p , qui fera (*Lem. 1*) parallèle à K , & $= \frac{A.m + B.n + C.p + \&c.}{A + B + C. \&c.}$; & le chemin de ce même centre

en vertu des Mouvements, $\mu, \nu, \pi \&c.$ qui fera parallèle à Q , & $= \frac{A.\mu + B.\nu + C.\pi + \&c.}{A + B + C + \&c.}$. La Diagonale du pa-

rallélogramme fait sur ces deux lignes, fera (*Lem. 2*) le chemin du centre de gravité. Il faut donc prouver que chacune de ces deux lignes fera zero, pour faire voir que le chemin du centre de gravité est $= 0$, ou, ce qui est la même chose, il faut démontrer que $A.m + B.n + C.p + \&c. = 0$, & $A.\mu + B.\nu + C.\pi + \&c. = 0$.

Or, puisque (*hyp.*) les Corps $A, B, C, \&c.$ animés des Mouvements $M, N, P, \&c.$ sont en équilibre, & qu'il n'y a dans le système aucun point fixe, la force résultante des puissances $A.M, B.N, C.P \&c.$ doit être $= 0$.

H ij

mais comme les puissances $A.M$, $B.N$, $C.P$ &c. se décomposent dans les puissances $A.m$, $A.\mu$; $B.n$, $B.v$; $C.p$, $C.\pi$; &c. la force résultante de ces puissances, est celle qui provient de la force résultante des puissances $A.m$; $B.n$; $C.p$; &c. & de la force résultante des puissances $A.\mu$; $B.v$; $C.\pi$ &c. mais ces deux dernières forces résultantes sont parallèles à deux lignes différentes K & Q . Donc pour que la force qui en provient soit zero, chacune en particulier doit être $= 0$. Or la première est $A.m + B.n + C.p + \&c.$ la seconde $A.\mu + B.v + C.\pi + \&c.$ donc chacune de ces deux quantités est $= 0$. Ce $Q. F. D.$

L E M M E VI.

61. *Les mêmes choses étant supposées que dans le Coroll. précédent, si ce n'est que les Mouvements M, N, P , &c. soient quelconques, c'est-à-dire tels que les Corps A, B, C &c. animés de ces Mouvements, se fassent équilibre ou non, & qu'il y ait de plus, si l'on veut, un point fixe dans le système: je dis que si l'on supposoit que les Corps A, B, C , &c. suivissent les Mouvements M, N, P &c, abstraction faite de leur action mutuelle, le chemin du centre de gravité seroit parallèle à la direction de la force résultante des puissances $A.M$; $B.N$; $C.P$; &c.*

Car pour avoir la direction de cette force, il faut (les mêmes choses étant posées que dans la démonstration du Lem. précédent) tirer la Diagonale d'un parallélogramme dont les côtés, parallèles à K & à Q , soient en-

tr'eux comme $A.m + B.n + C.p + \&c.$ à $A.\mu + B.v + C.\pi + \&c.$ Mais pour avoir le chemin du centre de gravité en vertu des Mouvements $M, N, P, \&c.$ il faut (Lem. 2) tirer la Diagonale d'un parallélogramme dont les côtés, parallèles à K & à Q , soient entr'eux comme $\frac{A.m + B.n + C.p + \&c.}{A + B + C + \&c.}$ à $\frac{A.\mu + B.v + C.\pi + \&c.}{A + B + C + \&c.}$

donc les côtés de ces deux parallélogrammes seront parallèles chacun à son correspondant, & seront l'un à l'autre dans le même rapport. Donc les Diagonales seront parallèles. Donc &c. Ce $Q. F. D.$

COROLLAIRE.

62. Si les Corps $A, B, C, \&c.$ avoient les Mouvements — $M, — N, — P, \&c.$ le chemin du centre de gravité seroit parallèle à la direction de la force résultante, mais en sens contraire.

S C O L I E.

63. Tous les Lemmes démontrés ci-dessus sont encore vrais, lorsque les Corps sont supposés dans des plans différens. Car 1°. le Lem. 1. est vrai dans ce cas comme dans les autres, 2°. La démonstration du Lem. 2. ne suppose pas à la rigueur que les Corps A, a, α , soient dans le même plan; elle suppose seulement que les Mouvements $AC, ac, \alpha x$ puissent se décomposer chacun en deux autres parallèles à deux lignes données. D'où

il s'ensuit que le Lem. 3. fera vrai, lors même que les Corps sont dans des plans différens, au moins dans la supposition que les Mouvements imprimés à chaque Corps puissent se décomposer chacun en deux autres parallèles à deux lignes données de position. Or lorsque les Corps sont dans des plans différens, on peut décomposer les Mouvements imprimés, chacun en deux autres, dont l'un soit parallèle à une ligne donnée de position, & le second puisse derechef se décomposer en deux autres aussi parallèles chacun à deux autres lignes données de position. D'où il s'ensuit que le Lem. 3. est vrai dans tous les cas, & qu'ainsi les Lemmes 4, 5 & 6 qui ne sont appuyés que sur les trois premiers, & qui ne demandent point que les Corps soient dans un même plan, sont aussi vrais dans tous les cas.

Au reste, nous avons supposé dans les Lemmes précédens, la proposition démontrée par M. *Newton*, que le centre de gravité de plusieurs Corps qui se meuvent uniformément & en ligne droite, sans agir les uns sur les autres, se meut aussi uniformément & en ligne droite. Cependant il est facile de voir que par la Méthode de la décomposition des Mouvements en d'autres parallèles à des lignes données, on pourroit aussi démontrer très-facilement cette proposition, & qu'ainsi notre Méthode a cet avantage, qu'on peut s'en servir pour démontrer que le centre de gravité de plusieurs Corps, se meut uniformément & en ligne droite, soit que ces Corps agissent, soit qu'ils n'agissent pas les uns sur les autres.

THEORÈME I.

64. *L'état de Mouvement ou de repos du centre de gravité de plusieurs Corps, ne change point par l'action mutuelle de ces Corps entr'eux, pourvu que le système soit entièrement libre, c'est-à-dire qu'il ne soit assujéti à se mouvoir autour d'aucun point fixe.*

Car (art. 50) les Mouvements a, b, c &c. étant composés des Mouvements $a, \alpha; b, \epsilon; c, x; \&c.$ les Mouvements a, b, c , peuvent être regardés comme composés des Mouvements $a, -\alpha; b, -\epsilon; c, -x$; d'où il s'ensuit que le chemin du centre de gravité quand les Corps sont animés des Mouvements $a, b, c, \&c.$ est le même (Lem. 4) que si on les supposoit animés d'abord des Mouvements a, b, c , & ensuite des Mouvements $-\alpha, -\epsilon, -x$. Or puisque par l'hypothèse, il n'y a dans le système aucun point fixe, & que le système demeureroit en repos, si les Corps n'avoient reçu que les Mouvements $\alpha, \epsilon, x; \&c.$ Il s'ensuit (Lem. 5. & Corol. Lem. 6) qu'en vertu des Mouvements $-\alpha, -\epsilon, -x, \&c.$ le chemin du centre de gravité est zero. Donc le chemin du centre de gravité est le même quand les Corps ont les Mouvements a, b, c , que s'ils suivoient les Mouvements a, b, c , qu'on leur a imprimés.

REMARQUE.

65. S'il y a dans le système quelque point fixe, alors les Corps animés des Mouvements $\alpha, \epsilon, x, \&c.$ peuvent se faire équilibre, sans que la force résultante de ces Mou-

vemens soit zero : il suffit que la direction de la force résultante de ces Mouvements passe par le point fixe ; dans ce cas, le chemin du centre de gravité en vertu des Mouvements $-a$, $-c$, $-x$ fera (Cor. Lem. 6) parallèle à la direction de cette force & en sens contraire, & par conséquent ne fera point $= 0$. Donc alors l'action mutuelle des Corps changera l'état du centre de gravité.

THEORÈME II.

66. *Les mêmes choses étant supposées que dans le Theor. I. si la pesanteur ou une force accélératrice, constante pour chaque Corps, & différente, si l'on veut, pour chacun d'eux, agit sur ces Corps suivant des lignes parallèles, le centre de gravité ou plutôt le centre de masse commun décrira la même Courbe qu'il auroit décrite, si ces Corps eussent été libres.*

Pour le démontrer, ne prenons que deux Corps A , B , (Fig. 21) & supposons que Aa , Bc , soient les petites lignes qu'ils parcourroient naturellement en vertu des vitesses primitivement imprimées Aa , Bb , & de la force accélératrice suivant aa , bc ; soit C le centre de masse des Corps A & B , c'est-à-dire un point dont les distances aux points A & B soient en raison inverse des masses A & B , (& non pas des poids A & B qui peuvent ici n'être pas comme les masses,) & que les Corps A & B , au lieu de parcourir les lignes Aa , Bc , parcourent les lignes Aa , Bb ; il est clair (art. 64) que le chemin Cx du centre de gravité au premier instant, sera le même que si les Corps A & B , eussent décrit les lignes Aa , Bc .

Dans

Dans l'instant suivant, les Corps tendent à décrire $a\varepsilon = Aa$ & $b\delta = Bb$, & le centre C tend à parcourir la droite $xK = Cx$, la même qu'il eût parcouru, si les Corps eussent continué à se mouvoir suivant Aa , Bb ; mais comme, en vertu de la force accélératrice, les Corps A & B , décriroient les lignes parallèles ef , dg dans ce dernier cas, & dans l'autre cas les lignes $\varepsilon\phi$, $\delta\gamma$ qui leur sont égales & parallèles chacune à chacune, il s'ensuit que le chemin xk du centre de masse fera le même, soit que les Corps décrivent af , bg , soit qu'ils décrivent les lignes $a\phi$, $b\gamma$. Mais quelque autre ligne que les Corps A , B parcourent au lieu de $a\phi$, $b\gamma$, à cause de leur action mutuelle, le chemin du centre C fera toujours le même (*Theor. 1*). Donc &c. On voit aisément que la démonstration s'étend aux cas où il y auroit un plus grand nombre de Corps.

R E M A R Q U E.

67. Cette démonstration n'auroit pas lieu, si la force accélératrice n'étoit pas constante pour chaque Corps, & n'agissoit pas suivant des lignes parallèles. Car alors on ne pourroit pas supposer ef égale & parallèle à $\varepsilon\phi$; dg égale & parallèle à $\delta\gamma$; & par conséquent le chemin xk du centre ne feroit pas le même dans les deux cas.

C O R O L L A I R E.

68. Les deux Theorèmes précédens fournissent des moyens très-simples de trouver le Mouvement des Corps

inflexibles. Nous pourrons en donner quelques usages dans la suite.

T H E O R È M E III.

69. *Si tant de Corps qu'on voudra sont liés ensemble d'une manière quelconque, & qu'un ou plusieurs de ces Corps soient forcés de se mouvoir sur un plan ou sur des plans parallèles, je dis que le chemin du centre de gravité parallèlement à ces plans sera uniforme.*

[*Ainsi, par exemple, & pour fixer l'imagination, si un Corps P, (Fig. 29) forcé de se mouvoir dans la rainure droite PS dont il ne puisse sortir, traîne après lui un autre Corps M par le moyen d'une verge PM, le centre de gravité g de ces deux Corps décrira une Courbe telle, que les parties de la ligne KS répondantes aux Arcs parcourus par le centre g en tems égaux, seront égales.*]

Car en général, si on réduit en une seule force tous les Mouvements perdus par ces Corps à chaque instant, il est clair qu'à cause de l'équilibre de ces Mouvements, la direction de la force résultante sera nécessairement perpendiculaire aux plans. Donc le centre de gravité fera continuellement écarté de la ligne droite par une force dont la direction sera (Lem. 6. & art. 65) perpendiculaire à ces plans, & dont par conséquent l'action fera toujours parallèle à une ligne donnée. Donc &c.

C O R O L L A I R E.

70. La même proposition seroit encore vraie, si les

Corps étoient animés de forces accélératrices quelconques, constantes ou non, mais de directions perpendiculaires à ces plans. D'où il s'ensuit, que si les Corps se mouvoient par la seule action de ces forces sans aucune impulsion primitive, le centre de masse décriroit une ligne droite perpendiculaire à ces plans. Car dans ce dernier cas, si les Corps étoient libres, le centre de gravité décriroit une droite perpendiculaire à ces plans; or son Mouvement ne sera altéré que par une force dont la direction sera perpendiculaire à ces plans: donc le centre de gravité ne sortira jamais de la perpendiculaire.

S C O L I E I.

71. Les propositions qu'on a démontrées *art. 64 & 66.* sont également vraies, quand les Corps agissent les uns sur les autres par une force d'Attraction mutuelle. Car les chemins qu'ils feroient les uns vers les autres en vertu de cette Attraction, étant réciproques à leurs masses, la somme des Mouvements de même part seroit zero; par conséquent le chemin du centre de gravité ne seroit point changé par l'action réciproque de ces Corps les uns sur les autres. On peut d'ailleurs appliquer ici la démonstration donnée du Theor. 1, en imaginant tous ces Corps joints les uns aux autres par des verges inflexibles. Car alors en n'ayant égard qu'à leur Attraction mutuelle, il est clair qu'ils resteroient en équilibre. Donc &c.

S C O L I E II.

72. Il me semble que par les Principes établis jusqu'ici, on peut démontrer cette fameuse Loi de Mécanique ; que dans un système de Corps pesans en équilibre , le centre de gravité est le plus bas qu'il est possible. Car supposons le système dans un état *B* infiniment proche de l'état d'équilibre ; il est certain qu'il y aura dans chaque Corps un petit Mouvement pour se remettre à l'état d'équilibre , & l'effort de la pesanteur de chaque Corps doit être regardé comme composé de ce petit Mouvement, & d'un autre qui est détruit. Or comme l'état *B* est infiniment proche de l'état d'équilibre, les Mouvements détruits sont infiniment peu différens de l'effort total de la pesanteur, qui est détruit dans l'état d'équilibre, & par conséquent les Mouvements réels de chaque Corps infiniment petits par rapport à ceux qu'ils auroient eus, s'ils avoient pû se mouvoir librement par leur pesanteur, & le Mouvement du centre de gravité infiniment moindre, que si les Corps se fussent mûs librement. Cela ne seroit pas ainsi, si des deux états infiniment proches que l'on considère ici, l'un n'étoit pas l'état d'équilibre. D'où il s'ensuit, qu'on peut regarder le centre de gravité comme n'ayant point changé de place depuis l'état *B* jusqu'à l'état d'équilibre ; c'est-à-dire qu'entre ces deux états la descente du centre de gravité est $= 0$. Donc dans l'état d'équilibre la descente du centre de gravité est un *Maximum*.

CHAPITRE III.

Problèmes où l'on montre l'usage du Principe précédent.

§. I.

Des Corps qui se tirent par des fils ou par des verges.

PROBLÈME I.

73. **T**ROUVER la vitesse d'une verge CR fixe en C , (Fig. 22) & chargée de tant de Corps A, B, R , qu'on voudra, en supposant que ces Corps, si la verge ne les en empêchoit, décrivissent dans des tems égaux les lignes infiniment petites AO, BQ, RT , perpendiculaires à la verge.

Toute la difficulté se réduit à trouver la ligne RS parcourue par un des Corps R , dans le même tems qu'il eut parcouru RT ; car alors les vitesses BG, AM de tous les autres Corps seront connues. Or regardons les vitesses imprimées RT, BQ, AO , comme composées des vitesses $RS, ST; BG, -GQ; AM, -MO$; par notre Principe, le Levier CAR seroit demeuré en repos, si les Corps R, B, A n'avoient reçu que les Mouvements $ST, -GQ, -MO$. Donc $A.MO.AC + B.GQ.BC = R.ST.CR$, c'est-à-dire qu'en nommant AO, a , BQ, b , RT, c , CA, r , CB, r , CR, ρ , & RS, x ,

on aura $R \cdot c - x \cdot \rho = Ar \left(\frac{xr}{\rho} - a \right) + Br \left(\frac{xr}{\rho} - b \right)$; par

conséquent $x = \frac{Aar\rho + Bbr\rho + Rcpp}{Arr + Brr + Rpp}$.

C O R O L. I.

74. Soient F, f, ϕ , les forces motrices des Corps A, B, R , & on trouvera pour la force accélératrice du Corps R , $\frac{Fr + fr + \phi\rho}{Arr + Brr + Rpp} \times \rho$, en mettant pour a, b, c , leurs valeurs $\frac{F}{A}, \frac{f}{B}, \frac{\phi}{R}$. Donc si on prend ds pour l'Elément de l'Arc décrit du rayon CR , & u pour la vitesse du Corps R ; on aura en général $\frac{Fr + fr + \phi\rho}{Arr + Brr + Rpp} \cdot \rho ds = u du$. quelles que soient les forces F, f, ϕ . Il est aisé par ce moyen de résoudre le Problème des centres d'oscillation dans une hypothèse quelconque.

C O R O L. II.

75. De ce que $A \cdot OM \cdot AC + B \cdot QG \cdot CB = R \cdot ST \cdot CR$, il s'ensuit que $A \cdot \overline{AM} - AO \cdot CA + B \cdot \overline{BG} - BQ \cdot CB = R \cdot \overline{RT} - RS \cdot CR$, & qu'ainsi $A \cdot \overline{AM} \cdot CA + B \cdot \overline{BG} \cdot CB + R \cdot \overline{RS} \cdot CR = A \cdot AO \cdot CA + B \cdot BQ \cdot CB + R \cdot RT \cdot CR$, c'est-à-dire que les puissances $A \cdot \overline{AM}$, $B \cdot \overline{BG}$, $R \cdot \overline{RS}$, doivent être équipollentes aux puissances $A \cdot AO$, $B \cdot BQ$, $R \cdot RT$. On pourroit donc encore résoudre le Problème précédent, en

cherchant la ligne RS telle que $R.RS.CR + B.\frac{RS.CB^2}{CR} + A.\frac{RS.CA^2}{CR}$ fût égale à $R.RT.CR + B.BQ.CB + A.AO.CA$.

Le Principe de cette dernière solution revient au même que celui de M. *Bernoulli* pour les centres d'oscillation, qui consiste à substituer en un point quelconque P de la verge un Corps, dont la masse soit $\frac{R.CR^2}{CP^2} + \frac{B.CB^2}{CP^2} + \frac{A.CA^2}{CP^2}$, & qui soit animé d'une force accélératrice, en vertu de laquelle le *moment* de ce poids soit égal aux *momens* des poids A, B, R , animés de leurs pesanteurs naturelles AO, BQ, RT , & sa vitesse, celle du point P de la verge. D'où il s'ensuit, que cette force accélératrice fera $\frac{RS.CP}{CR}$, & qu'ainsi on aura $RS.\frac{CP}{CR} (\frac{R.CR^2}{CP^2} + \frac{B.CB^2}{CP^2} + \frac{A.CA^2}{CP^2}) \times CP = A.AO.CA + B.BQ.CB + R.RT.CR$. Il est visible que le premier membre de cette égalité, n'est autre chose que la somme des *momens* $A.AM.CA + B.BG.CB + R.RS.CR$.

On voit par-là que sans avoir recours au point P , & sans faire aucune substitution de masses, on peut par le Principe fondamental de la solution de M. *Bernoulli*, résoudre, plus simplement encore qu'il ne l'a fait, le Problème des centres d'oscillation.

C'est de cette dernière manière que j'avois imaginé d'abord de résoudre ce Problème, & c'est aussi ce qu'a fait M. *Euler* dans un Mémoire imprimé depuis peu, *To. 7. des Comm. de Petersb.* & où il se fert de ce dernier Principe, que les puissances $R.RS$, $B.BG$, $A.AM$ doivent être équivalentes aux puissances $R.RT$, $B.BQ$, $A.AO$. Mais M. *Euler* n'a point démontré ce Principe, qui, présenté de cette manière, n'est peut-être pas, en effet, si facile à démontrer. Au reste, l'Auteur l'a appliqué dans ce même Mémoire à la solution de quelques Problèmes touchant les oscillations des Corps, flexibles ou inflexibles. Nous aurons occasion dans la suite de faire quelques remarques sur un de ces Problèmes.

L E M M E VII.

76. Si deux lignes infiniment petites Pp , Mm , (Fig. 23) sont jointes par les lignes PM , pm , & qu'on fasse $p\pi = Pp$, & $m\mu = Mm$. Je dis 1°. que l'excès de PM sur $\pi\mu$ est égal à deux fois la différence de PM à pm , moins le quart de l'angle fait entre PM & pm , multiplié par PM .

2°. Que l'angle de $\pi\mu$ avec pm est égal à l'angle de PM avec pm , multiplié par $1 + \frac{2 \cdot PM - pm}{PM}$.

Car ayant mené les lignes Ma , πe , μf parallèles à pm , & Mb , aPd , $C\pi f$, μeg , perpendiculaires à pm , on aura $Mb = \mu g$; $Pd = \pi C$. Donc μe ou $\pi f = Pa$. Donc les angles aMP , $e\pi\mu$ sont égaux, à une différence seconde

de près. Or $PM - pm = PM - Ma + Ma - pm =$
 $\frac{Pa^2}{2PM} + mb - dp$; & on trouvera de même $pm - \pi\mu =$
 $-\frac{\pi f^2}{2\pi\mu} + mg - cp$. Donc en négligeant les différences
troisièmes, on a $PM - \pi\mu = 2 \cdot \overline{bm - dp} = 2 \cdot \overline{PM - pm}$
 $-\frac{Pa^2}{PM} = 2 \cdot \overline{PM - pm} - \text{angl. } aMP^2 \times PM$.

2°. L'angle $e\pi\mu$ ou l'angle de pm avec $\pi\mu = \frac{\mu e}{\pi e} =$

$$\frac{Pa}{pm - (bm - dp)} = \frac{Pa}{Ma - 2(bm - dp)} = \frac{Pa}{Ma} + \frac{2 \cdot \overline{bm - dp}}{Ma} \times$$

$$\frac{Pa}{Ma} = \text{en négligeant les différences troisièmes, à l'angle}$$

$$aMP \left(1 + \frac{2 \cdot \overline{PM - pm}}{PM}\right). \text{ Ce Q. F. D.}$$

COROL. I.

77. Si les lig. PM, pm sont égales, alors $PM - \pi\mu =$
 $-(\text{angl. } aMP)^2 \cdot PM$, & l'angle $e\pi\mu = aMP$. Ces
deux derniers Theorèmes ont été démontrés par M. Clai-
raut. *Mem. Acad.* 1736.

COROL. II.

78. Si les lignes $Mm, m\mu$ (Fig. 24) sont $= 0$, alors
 $M\pi - PM = + 2pO + \frac{pO^2}{PM}$, & l'angle $pM\pi - PMp =$
 $-\frac{2pO}{PM} \cdot PMp$,

P R O B L È M E II.

79. Supposons qu'une verge GA fixe en G (Fig. 25) & située sur un plan horizontal, soit chargée de deux Corps A, D , dont l'un A soit fixement attaché à la verge, l'autre D puisse couler librement le long de la verge par le moyen d'un anneau ; on demande la vitesse de chacun de ces Corps à chaque instant, & la Courbe décrite par le Corps D .

Soient AB, DE les petites lignes décrites par les Corps A, D , durant un même instant ; si l'on fait l'Arc $BC = AB$, & la ligne $Ei = ED$ & dans la même direction, il est clair que ces lignes BC, Ei feroient parcourues par les deux Corps dans l'instant suivant, si la verge ne les en empêchoit. Le Corps A qui décrit nécessairement l'Arc BC , ne décrira donc plus cet Arc dans un instant égal au premier : or que la ligne ou Arc BQ infiniment peu différente de BC , soit celle que le Corps A auroit parcouru uniformément avec la vitesse qu'il a en B , dans l'instant qu'il parcourt BC par son Mouvement contraint, & que Eo soit la ligne que le Corps D eut aussi décrit uniformément dans le même tems, & au lieu de laquelle il décrive la ligne Ep à cause de la résistance de la verge ; il est clair qu'en regardant les Mouvements BQ & Eo , comme composés des Mouvements BC, CQ , & Ep, El , le Levier GB eût été en équilibre, si les Corps A, D , n'avoient eu que les Mouvements CQ, El . Or comme (*hyp.*) le Corps E peut glisser le long de

la verge, il est nécessaire pour l'équilibre, que El soit perpendiculaire au Levier GA ; & de plus, il faut que $A.CQ.CA = D.El.GE$. Cela posé.

Soit $GA = a$, $AB = dx$, $GD = y$, $FD = \frac{y dx}{a}$,

$FE = dy$, $CQ = \alpha$, on aura (à cause que les lignes BQ , AB ; Eo , DE sont entr'elles comme les tems employés à les parcourir) $BC.CQ :: DE.io$. Donc $io = \frac{CQ.DE}{BC}$; de plus $A.CQ.CA = D.El.GE$ donne

El ou $po = \frac{Aaa}{Dy}$. Or l'angle iGE (*art.* 78) $= EGD \times 1 - \frac{2FE}{GD} = EGD - \frac{2dy dx}{ay}$; & si à l'angle iGE on ajoute

l'angle $iGo = \frac{io}{Gi} \times \frac{DF}{DE} = \frac{CQ.DF}{Gi.BC} = \frac{CQ}{GD} \times \frac{DF}{AB} = \frac{CQ}{GA} = \frac{\alpha}{a}$,

& l'angle oGp ou $\frac{po}{GD} = \frac{Aaa}{Dyy}$, on aura l'angle $pGE = EGD$

$- \frac{2dy dx}{ay} + \frac{\alpha}{a} + \frac{Aaa}{Dyy}$, & comme cet angle pGE est égal

à l'angle EGD (*constr.*) on a $- \frac{2dy dx}{ay} + \frac{\alpha}{a} + \frac{Aaa}{Dyy} = 0$,

Donc $\alpha = \frac{2Dydy dx}{Aaa + Dyy}$.

Présentement, la différence de Gi sur GD est (*art.* 78)

$2dy + \frac{y^2 dx^2}{a^2 y}$, & $\frac{\alpha dy}{dx}$ est égale à la différence de Gp ou Go sur Gi . Donc $Gp - GE = dy + \frac{y dx^2}{a^2} + \frac{\alpha dy}{dx}$. Donc

$ddy = \frac{y dx^2}{a^2} + \frac{a dy}{dx}$, ou mettant pour a la valeur déjà trouvée, $ddy = \frac{y dx^2}{a^2} + \frac{2Dydy^2}{Aaa + Dyy}$, Equation de la Courbe DEp .

Pour en séparer les indéterminées, soit $dx = \frac{p dy}{a}$, on aura $ddy = -\frac{dp dy}{p}$, & $-\frac{a^4 dp}{p^3} - \frac{2ydy \cdot a^4 D}{p^2 \cdot (Aaa + Dyy)} = ydy$,

dont l'intégrale est $\frac{a^4}{2p^2(Aaa + Dyy)^2} = G - \frac{1}{2D(Aaa + Dyy)^2}$,

G exprimant une constante telle, que $\frac{p}{a}$ devienne à l'origine de la Courbe le rapport donné de dx à dy .

On a donc dx ou $\frac{p dy}{a} = \frac{a dy \sqrt{D}}{\sqrt{(Aaa + Dyy)[2GD(Aaa + Dyy) - 1]}}$ pour l'Equation de la Courbe DEp .

A l'égard des vitesses de chaque Corps, on trouve qu'en nommant u la vitesse du Corps A , on a $-\frac{du}{u} = \frac{CQ}{BC}$, puisque $\frac{BQ}{BC}$ est le rapport du second instant au premier.

Donc $-\frac{du}{u} = \frac{2Dydy}{Aaa + Dyy}$, & $\frac{u}{g} = \frac{Aaa + Dbb}{Aaa + Dyy}$ en prenant g pour la vitesse initiale du Corps A , & supposant $y = b$ à l'origine de la Courbe DE . De même si on nomme

v la vitesse du Corps D , on a $\frac{dv}{v} = \frac{Ep - Eo}{Eo} = \frac{po \cdot FD}{DE^2} = \frac{Aaa \cdot y dx}{Dyy \cdot a(dy^2 + y^2 \frac{dx^2}{a^2})}$; mais on peut avoir v plus élégamment

par le Principe de la conservation des forces vives que nous démontrerons ci-après, & qui donne $Dvv + Auu =$ à une constante. D'où il s'ensuit, que si on appelle h la vitesse initiale du Corps D , on aura $vv = \frac{Dhh + Agg - Auu}{D}$.

REMARQUE I.

80. J'ai évité de faire dans la solution de ce Problème les dt ou Elémens du tems constans, afin de pouvoir parvenir à l'Equation de la Courbe, sans avoir l'expression de la vitesse, ce qui seroit nécessaire si on faisoit les dt constans, parce que dt étant $\frac{dx}{u}$, on ne peut chasser dt que quand on connoît la valeur de u . C'est ainsi que j'en userai toujours dans la suite. Ce n'est pas qu'on ne puisse avoir u par différens moyens. Mais j'ai cru qu'il étoit à propos de faire voir de quelle manière on peut s'en passer dans la solution de ces sortes de Problèmes.

REMARQUE II.

81. Le Problème précédent ne seroit pas beaucoup plus difficile, si les Corps A, D , étoient animés par des forces accélératrices p, f , de directions & de valeurs quelconques. Pour donner un essai du calcul qu'il faudroit faire en cette occasion, je supposerai chaque force accélératrice constante, & dirigée parallèlement à la verticale AV , en imaginant le système transporté sur un plan vertical. La construction demeurant la même que dans

l'art. 79 ; soit de plus QN l'espace que le Corps A auroit parcouru par sa pesanteur p , dans l'instant qu'il parcourt BC par son mouvement contraint ; comme cet instant diffère infinim. peu du premier, on aura $QN = p \cdot \frac{GV}{GA} \times \frac{dx^2}{u^2}$;

de même $oz = \frac{f dx^2}{u^2}$; $z\pi = \frac{A \cdot CN \cdot GA}{D \cdot DG} = \frac{Aa}{Dy} (a + \frac{pz dx^2}{au^2})$

en nommant GV, z . On aura ensuite, comme dans *l'art.*

79. $\frac{zy dx dy}{ayy} = (a + \frac{pz dx^2}{au^2}) \times \frac{Aa}{Dyy} + \frac{a}{a} + \frac{f dx^2}{u^2} \times \frac{z}{y}$. &

$ddy = \frac{y dx^2}{a^2} + \frac{a dy}{dx} + \frac{f dx^2 \cdot \sqrt{[a^2 - z^2]}}{au^2}$: on a de plus

$dx = \frac{adz}{\sqrt{[aa - zz]}}$ & $-\frac{du}{u} = \frac{a}{dx}$. Si on met la valeur

de a tirée de cette dernière Equation, dans la première, on aura en intégrant, la valeur de u en y & en z avec leurs différences ; & mettant ensuite cette valeur de u dans la seconde Equation, on aura l'Equation cherchée de la Courbe DEp .

R E M A R Q U E III.

82. Si une puissance appliquée au Corps A l'oblige de se mouvoir sur la Courbe AB , avec une vitesse dont la Loi à chaque point soit donnée, & qu'on demande la Courbe du Corps D & sa vitesse ; ce Problème se réduit au précédent, en cherchant de quelle force accélératrice ϕ le Corps A devroit être animé, pour qu'étant

mû conjointement avec le Corps D , il eut à chaque point B la vitesse donnée.

Dans la première des quatre Equations de l'article précédent, on mettra ϕ pour $\frac{p z}{a}$, & à cause que u est donnée en x , on supposera $u = X$, & $-\frac{du}{u} = -\frac{dX}{X} = \frac{a}{dx}$.
Donc $a = -\frac{dX dx}{X}$: cette valeur de a étant comparée à celle qu'on tirera de la première Equation, on aura la valeur de ϕ & l'Equation de la Courbe DEp . Soit par ex. $f=0$, $u =$ à une constante g , on aura $a = 0$, &

$$\frac{2 dy dx}{ay} = \frac{\phi dx^2}{g^2} \cdot \frac{Aa}{Dyy} \text{ donc } \phi = \frac{2 D g^2 y dy}{A a^2 dx}, \text{ \& } ddy = \frac{y dx^2}{a^2}.$$

$$\text{donc } dx = \frac{a dy}{\sqrt{2(Ga^2 + yy)}} \text{ \& } \phi = \frac{2 D g^2 y}{A a^3} \sqrt{2(Ga^2 + yy)}.$$

$$\text{Si } G = 0 \text{ on a } y = c \frac{x \sqrt{2}}{a} \text{ \& } \phi = \frac{2 D g^2 \sqrt{2} \cdot c \frac{x \sqrt{2}}{a}}{A a^3}.$$

La Courbe décrite par le Corps D est en ce cas une *spirale logarithmique*.

S'il n'y avoit pas de Corps au point A , mais qu'en vertu d'une puissance quelconque appliquée à la verge, la vitesse du point A suivant AB fut donnée, on pourroit résoudre le Problème de la même manière, en imaginant qu'il y eut au point A un Corps de masse quelconque, & en cherchant de quelle force accélératrice ce Corps devoit être animé, pour qu'étant mû conjointement avec le Corps D , il eut à chaque point B la vitesse

dont la Loi est donnée ; & en général, on peut toujours employer cette Méthode, lorsque des Corps se tiennent par des fils ou par des verges d'une manière quelconque, & qu'un ou plusieurs points des fils ou des verges sont supposés se mouvoir avec une vitesse & une direction données. J'avoue qu'on peut résoudre ces Problèmes d'une manière plus simple, sans chercher quelle doit être la force accélératrice du Corps dont la vitesse est donnée, pour qu'il se meuve avec cette vitesse en vertu de l'action des autres Corps ; mais la solution que nous proposons ici, quoique plus longue, n'en est pas moins tirée des vrais Principes de la chose, puisqu'il est certain que la puissance qui meut le Corps avec une vitesse donnée, est différente de ce qu'elle seroit, si tous les autres Corps étoient anéantis, attendu qu'une partie de cette puissance est employée à vaincre l'action de ces mêmes Corps. Notre solution détermine la différence de ces deux puissances, & c'est en quoi consiste, ce me semble, la vraie Métaphysique du Problème dont il s'agit.

R E M A R Q U E IV.

83. On voit aisément qu'au lieu de deux Corps *A*, *D* on peut en supposer tel nombre qu'on voudra, dont les uns soient fixement attachés à la verge, les autres puissent couler librement le long de la verge ; les calculs seront seulement un peu plus longs, mais le Problème se résoudra toujours par les mêmes Méthodes.

PROBLEME

PROBLÈME III.

84. Un Corps P descendant le long d'une Courbe CB , (Fig. 26) & tirant après lui un autre Corps F par le moyen d'un fil PCF qui passe sur une Poulie C , trouver la vitesse de chacun de ces Corps.

Soit Pp l'Elément parcouru dans un instant par le Corps P , & $Ff = pV$ l'Elément parcouru par l'autre Corps durant le même instant. Dans l'instant suivant, ces Corps, si rien ne les en empêchoit, parcourroient $p\pi = Pp$ & $f\phi = Ff$. Mais à cause de la résistance du fil & de son inextensibilité, la ligne $p\pi$ sera parcourue par le Corps P dans un instant différent du premier, & dans ce même instant le Corps F arrivera au point ω , tel que $\omega C + C\pi = fC + Cp$.

Supposons présentement, que durant le tems que le Corps P parcourt $p\pi$, il eut parcouru naturellement pi , & que le Corps F eut décrit naturellement $f\omega$; que de plus, la pesanteur du Corps F lui eût fait parcourir pendant ce même instant la verticale ωv , & que la partie de la pesanteur du Corps P , qui agit suivant pi , lui eût fait parcourir la ligne il . Si on prend $po = \pi l$, il faut par notre Principe, que le Corps F animé de la seule force accélératrice représentée par ωv fasse équilibre au Corps P animé de la force po , & de la partie de sa pesanteur & de sa force centrifuge qui est perpendiculaire à la Courbe Cp suivant pZ . Or en menant du point o la ligne oa qui rencontre Cp prolongée en a , & tirant au ,

L

il est clair que le reste de la force suivant pZ étant anéanti par la résistance de la surface Courbe, il y aura équilibre, si $F \cdot \omega v = P \cdot p \alpha$.

Soit donc u la vitesse du Corps P , p sa pesanteur absolue, g celle du Corps F , $CP = x$, $NP = y$, $Pp = ds$, $\pi i = \alpha$; on aura $il = \frac{p dy \cdot ds^2}{u^2 ds}$ & $\phi \omega \cdot Ff :: i \pi \cdot Pp$, c'est-

à-dire $\phi \omega = \frac{\alpha dx}{ds}$; $\omega v = \frac{g ds^2}{u^2}$: soit $\omega v = n$, on trouve

$\phi \omega$ ou $-ddx = \frac{\alpha dx}{ds} + \frac{g ds^2}{u^2} - n$; de plus, à cause de

$F \cdot \omega v = P \cdot p \alpha$, on a $F \cdot n = P \cdot \frac{p \alpha \cdot ds}{dx} = \frac{P ds}{dx} \cdot \left(\frac{p dy \cdot ds^2}{u^2 ds} - \alpha \right)$,

Donc $Fddx + \frac{Fg ds^2}{u^2} + \frac{F \alpha dx}{ds} = -\frac{P \alpha ds}{dx} + \frac{P p ds^2 dy}{u^2 dx}$; par

conséquent $\alpha = \frac{-Fddx - \frac{Fg ds^2}{u^2} + \frac{P p ds^2 dy}{u^2 dx}}{F dx^2 + P ds^2} \times ds dx$.

mais $\frac{\alpha}{ds} = \frac{du}{u}$, donc $-\frac{P u^2 dx ddx - Fg ds^2 dx + P p ds^2 dy}{F dx^2 + P ds^2} =$

$u du$ ou $2u du \cdot \frac{(F dx^2 + P ds^2)}{P ds^2} + \frac{2F u u dx ddx}{P ds^2} = 2p dy -$

$\frac{2Fg dx}{P}$, dont l'intégrale complete (en supposant $u = 0$

lorsque y & $x = 0$) est $\frac{uu \cdot (P ds^2 + F dx^2)}{P ds^2} = 2py - \frac{2Fg dx}{P}$;

& faisant $uu = 2pk$, on trouve $k = \frac{ds^2 \cdot (Py - \frac{Ffx}{P})}{P ds^2 + F dx^2}$

COROL. I.

85. Si on fait $g = p$, on trouve $k = \frac{ds^2 \cdot (Py - Fx)}{Pds^2 + Fdx^2}$,
ce qui s'accorde avec la formule donnée sans démonstration par M. Bernoulli, To. 2. des Mém. de Petersb. & peut se tirer aisément du Principe de la conservation des forces vives.

COROL. II.

86. Si p & $g = 0$. c'est-à-dire, si les deux Corps n'ont point de pesanteur, on a $\frac{uu \cdot (Pds^2 + Fdx^2)}{Pds^2} =$ à une constante.

COROL. III.

87. Le Problème précédent se résoudroit avec la même facilité si les deux Corps étoient pesans, & qu'ils fussent mûs dans un milieu résistant comme une fonction de la vitesse. Car alors il ne faudroit que mettre $\frac{pdy}{ds} - \phi u^*$ au lieu de p , & dans l'Equation du Problème, $g + \phi \left(\frac{u dx}{ds} \right)$ au lieu de g , on auroit une Equation dont les indéterminées pourroient même être séparés dans quelques cas, comme quand $\phi u = a + buu$, a & b étant des constantes quelconques.

COROL. IV.

88. Si chacun des deux Corps étoit mû sur une Cour-

* Cette quantité ϕu exprime en général une fonction de u .

be, alors nommant $Ff, dt; Fu, dx; FN, dz$; (Fig. 27)

on trouveroit $\phi \omega = \frac{u dt}{ds}$; $\omega v = \frac{g dz}{dt} \cdot \frac{ds^2}{u^2}$; au lieu de Fn

il faudra mettre $\frac{Fn dt}{dx}$, & au lieu de $- ddx = \frac{u dx}{ds} +$

$\frac{g ds^2}{u^2} - n$, on écrira $- ddt = \frac{u dt}{ds} + \frac{g dz}{ds} \cdot \frac{ds^2}{u^2} - n$. le Pro-

blème fera résolu moyennant ces legers changemens, &

l'on trouvera $d\left[\frac{uu \cdot (P ds^2 + F dt^2)}{P ds^2}\right] = 2p dy - \frac{Fg dz}{P}$. Equa-

tion qu'on pourroit trouver aussi en se servant du Principe de la conservation des forces vives. Donc si la valeur primitive de u est zero, & qu'alors y soit $= A$, &

$z = 0$, on aura $\frac{uu \cdot (P ds^2 + F dt^2)}{P ds^2} = 2p \cdot (y - A) - \frac{2Fgz}{P}$.

C O R O L. V.

89. Si dans l'article précédent on fait $uu = 2pk$ &

$p = g$, on aura $k = \frac{[P(y - A) + Fz] ds^2}{P ds^2 - F dt^2}$. On peut, si l'on

veut, faire $A = 0$, en supposant que le Corps P parte

de C , & l'on aura $k = \frac{(Py - Fz) ds^2}{P ds^2 + F dt^2}$.

M. Herman, To. 2. des Mém. de Petersb. a donné une solution du Problème que nous avons résolu art. 88. Sa

formule revient à celle-ci $k = \frac{[Py - \int \frac{F dx^2 dz}{dt^2}] ds^2}{P ds^2 + F dx^2} =$

$$\left(\text{en faisant } dt^2 = dx^2 + dq^2 \right) \frac{[Py - Fz + \int \frac{F dz dq^2}{dt^2}] ds^2}{P ds^2 + F dx^2}.$$

Or la valeur de k que nous avons trouvée se peut changer en celle-ci $\frac{2p[(Py - Fz) \cdot ds^2 - Fu^2 dq^2]}{2p(P ds^2 + F dx^2)}$, expression qui ne fauroit revenir au même que celle de *M. Herman*, puisque la quantité négative $-Fu^2 dq^2$ ne fauroit être égale à la positive $(\int \frac{F dz dq^2}{dt^2}) 2p ds^2$. Il y a donc lieu de croire qu'il s'est glissé quelque inadvertance dans la solution de *M. Herman*, parce que le résultat de notre solution s'accorde avec celui qu'on trouveroit par le Principe de la conservation des forces vives, & que d'ailleurs elle n'est appuyée que sur des Principes fort clairs.

S C O L I E.

90. La solution du Problème III. pourra paroître un peu longue : mais j'ai cru qu'il étoit à propos de faire voir comment mon Principe s'y applique. Car si on vouloit résoudre autrement ce Problème, on pourroit s'y prendre ainsi. Soit T la tension du fil, qui agit également suivant

CP , & CF , on aura $\frac{Pp dy}{ds} - \frac{T dx}{ds}$ pour la force qui ac-

célère le Corps P suivant Pp , & $\frac{T dx}{dt} - \frac{Fg dz}{dt}$ pour cel-

le qui accélère le Corps F suivant Ff ; on aura donc

$$\left(\frac{Pp dy}{ds} - \frac{T dx}{ds} \right) ds = P du \text{ \& } \left(\frac{T dx}{dt} - \frac{Fg dz}{dt} \right) dt =$$

$\frac{F}{2} d(\frac{uu di^2}{ds^2})$ d'où l'on tire en ajoutant ces deux Equations,
& intégrant ; $uu + \frac{uu F di^2}{P ds^2} = 2py - \frac{2Fgz}{P}$.

Cette dernière solution peut servir à trouver le défaut de celle de M. Herman ; mais c'est une discussion dans laquelle il seroit trop long d'entrer. Au reste, cette solution est, à la vérité, plus simple que celle de l'art. 88 ; mais je crois que d'un autre côté elle n'est pas tout-à-fait si lumineuse ni si directe. Car, à parler exactement, le fil n'agit point sur les Corps, il n'a qu'une force de résistance, & nullement d'impulsion.

P R O B L È M E IV.

91. Un Corps P étant mû dans une rainure Courbe $APp\pi$, (Fig. 28) où il est animé d'une force accélératrice quelconque ϕ , & traînant après lui deux autres Corps M, M , par le moyen d'une verge inflexible MPM , on demande la vitesse du Corps P & les Courbes décrites par les deux Corps M, M .

Soient Pp, MR, MR les lignes décrites par les Corps P, M, M durant un instant quelconque ; je fais $p\pi = Pp = p\omega$, & je suppose que dans l'instant que le Corps P parcourt $p\pi$ par son Mouvement contraint, il eût parcouru naturellement & uniformément pf , & de plus fq en vertu de la force ϕ ; je fais de plus $Ri = MR$; $Ri = MR$: & je suppose que dans le même tems que le Corps P parcourt $p\pi$, le Corps M eût parcouru RK , & le Corps M, RK . Il faut par notre Principe décomposer la force suivant RK en deux autres RZ, Re , &c

la force suivant RK en deux autres RZ , Re , qui soient telles, que si les Corps P , M , M , n'étoient animés que des seules forces πq , RZ , RZ , ils se fissent équilibre & que le système demeurât en repos, & que s'ils n'avoient que les Mouvements $p\pi$, Re , Re , ils pussent conserver ces Mouvements sans se nuire réciproquement, c'est-à-dire que l'on eût $\pi e = PM$, $\pi e = PM$, & $ee = MM$.

Je décompose d'abord la force suivant RZ en deux autres, dont l'une RV soit dans le prolongement de pR , & de même la force suivant RZ en deux, dont l'une RV soit dans le prolongement de pR , & je suppose RV & RV telles, que les Corps P , M , M animés des seules forces πq , RV , RV se fassent équilibre, ce qui arrivera, si en imaginant ces forces réunies en p , la force unique qui en résultera est perpendiculaire à la rainure,

c'est-à-dire si $P \times \pi q = \frac{M \cdot RV \cdot GP}{PM} + \frac{M \cdot RV \cdot gP}{PM} \cdot (A).$

Il ne restera plus aux Corps M , M que les forces RX , RX qui doivent encore se détruire mutuellement, ce qui ne peut arriver que quand ces lignes RX , RX sont dans la même droite RR , & qu'on a $M \cdot RX = M \cdot RX$. (B).

Soit à présent $PM = a$; $GM = y$, $gM = y$, $PM = b$, la perpendiculaire constante $PQ = c$, la ligne MM ou RR , e , u la vitesse en P suivant Pp ; $Pp = dx$, $\pi f = a$, $RX = z$, $Rx = z$, on aura $f q = \frac{\phi ds^2}{u^2}$, & $\pi q = a + \frac{\phi ds^2}{u^2}$.

Si du centre p on décrit l'Arc $\pi\omega$, & qu'on tire les

lignes πi , πK ; Ro parallèle à VK ; oe sera égale & parallèle à RX , & l'on aura 1°. $\omega i - pR = \frac{a dy^2}{a^2 - y^2}$

(art. 78); $\pi i - \omega i = \frac{\omega \pi \cdot MG}{MP} = \frac{y dx^2}{ra}$, en nommant r le

rayon de la développée de la Courbe APp en P . 2°. Si on décrit du centre L les Arcs MN , PT , & du centre

π l'Arc $* iY$, on aura YK ou $\pi i - \pi K = \frac{iK \cdot RN}{MR}$, ou

(à cause que $iK \cdot MR :: \pi f \cdot Pp$) $YK = \frac{\pi f \cdot RN}{Pp} = \frac{\pi f \cdot pT}{Pp} =$

$\frac{\pi f \cdot PG}{MP} = \frac{a \sqrt{a^2 - y^2}}{a}$. 3°. $\pi K - \pi o = Ko = RV$ &

$\pi o - \pi e = \frac{oe \cdot MQ}{MP} = \frac{z \sqrt{a^2 - c^2}}{a}$. Donc $\pi e - pR$ ou

$\pi e - PM = - \frac{z \sqrt{a^2 - c^2}}{a} - RV - \frac{a \sqrt{a^2 - y^2}}{a} +$

$\frac{y dx^2}{ar} + \frac{a dy^2}{a^2 - y^2}$. mais la ligne πe doit être $= PM$. Donc

(C) $\frac{z \sqrt{a^2 - c^2}}{a} + RV + \frac{a \sqrt{a^2 - y^2}}{a} + \frac{y dx^2}{ar} + \frac{a dy^2}{a^2 - y^2} = 0$.

On aura de même pour l'autre Corps M , $\frac{z \sqrt{b^2 - c^2}}{b} +$

$RV + \frac{a \sqrt{b^2 - y^2}}{b} = - \frac{y dx^2}{br} + \frac{b dy^2}{b^2 - y^2}$. (D)

* L'angle πiK ne diffère qu'infiniment peu de l'angle aigu PMR , quoique cela ne paroisse guère dans la figure, où l'on a été obligé pour éviter la confusion, de faire assez grandes les lignes MR , Ri qu'on suppose infiniment petites. D'où l'on voit que l'Arc iY doit tomber au-delà de iK par rapport à π , & qu'on aura un triangle iYK semblable à MNR .

Je

Je remarque ensuite, que $\frac{MN - PT}{PM}$ est égal à l'angle de pR avec PM , & que cet angle lui-même = $\angle pR - \angle GPM + \angle pP = \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \frac{dx}{r}$. Donc $MN = PT + PM \times (\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \frac{dx}{r}) = \frac{y dx}{a} + \frac{a dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \frac{a dx}{r}$.
 or l'angle de ϖi avec pR est égal (art. 78) à l'angle de pR avec PM ; l'angle de ϖi avec $\pi i = \frac{\varpi \pi \cdot PG}{PM^2}$; l'angle de πi avec $\pi K = \frac{iY}{PM} = \frac{iK \cdot MN}{MR \cdot PM} = \frac{\pi f \cdot MN}{Pp \cdot MP}$; l'angle de πK ou πo avec $\pi e = \frac{o e \cdot P Q}{PM^2} = \frac{z c}{a^2}$. Donc l'angle de πe avec pR , c'est-à-dire la différence seconde de l'angle de pR & PM , fera égal à la somme de tous ces angles pris avec les Signes convenables, c'est-à-dire qu'on aura (E) $d(\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \frac{dx}{r}) = \frac{dx^2 \cdot \sqrt{a^2 - y^2}}{a^2 r} + \frac{a}{a dx} (\frac{y dx}{a} + \frac{a dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \frac{a dx}{r}) - \frac{z c}{a^2}$: on aura de même (F) $d(\frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} - \frac{dx}{r}) = -\frac{dx^2 \sqrt{b^2 - y^2}}{b^2 r} + \frac{a}{b dx} (\frac{y dx}{b} + \frac{b dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} - \frac{b dx}{r}) - \frac{z c}{b^2}$.

Si on met ensuite dans les Equations A & B ci-dessus, à la place des lignes qui y entrent, leurs valeurs analytiques, on aura

M

$$P \left(a + \frac{\phi dx^2}{u^2} \right) = \frac{M \cdot RV \cdot \sqrt{[a^2 - y^2]}}{a} + M \cdot RV \cdot \frac{\sqrt{[b^2 - y^2]}}{b}$$

$$(G); \frac{M}{M} = \frac{z}{z} (H); \& \text{ enfin } \frac{u}{dx} = \frac{du}{u} (L).$$

On remarquera de plus, qu'à cause de l'inflexibilité de la verge, l'angle MPM est constant, desorte que $\frac{y}{b}$ est toujours donné en $\frac{y}{a}$. Employant donc les sept dernières Equations à chasser $a, u, RV, R V, z$ & z , on arrivera à une Equation finale qui ne contiendra plus que dx avec y, dy, ddy , & qui sera l'Equation d'une des Courbes. Après quoi il sera aisé de trouver l'autre.

REMARQUE I.

92. Si MP, PM étoient des fils, alors les forces suivant $R X$ & $R X$ seroient nulles, & on auroit $z = 0$ & $z = 0$. Mais comme y ne seroit plus donné en y , on auroit six Equations, & cinq inconnues $a, y, RV, R V$, & u à faire disparaître.

COROL. I.

93. Supposons pour simplifier les choses que $r = \infty$, $b = 0$. $\phi = 0$. c'est-à-dire que le Corps P soit dans une rainure droite & tire après lui un seul Corps M , par le moyen d'une verge ou d'un fil, ce qui dans le cas pré-

$$\begin{aligned} \text{fent revient au même ; on aura } RV &= \frac{Paa}{MV[a^2 - y^2]} = \\ &= -\frac{a\sqrt{a^2 - y^2}}{a} + \frac{ady^2}{a^2 - y^2} ; \text{ d'où l'on tire } a = \frac{Mady^2}{\sqrt{a^2 - y^2}} \times \\ &\frac{a}{Paa + M(a^2 - y^2)} \& d\left(\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}\right) = \frac{a}{adx} \times \left(\frac{ydx}{a} + \frac{ady}{\sqrt{a^2 - y^2}}\right) \\ &= \frac{Maady^2}{\sqrt{a^2 - y^2}(Paa + M[a^2 - y^2])} \times \left(\frac{y}{aa} + \frac{dy}{dx\sqrt{a^2 - y^2}}\right) \end{aligned}$$

Soit $dx = \frac{pdy}{a}$, & l'on trouvera après les substitutions

$$\frac{-p\sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{Paa + M(a^2 - y^2)}} = A + \frac{May}{\sqrt{Paa + M(a^2 - y^2)}(M + p)},$$

A marquant une constante prise avec cette condition, que le rapport de dx à dy exprimé par $\frac{p}{a}$ soit = au rapport donné de ces différentielles, lorsque les Corps commencent à se mouvoir.

COROL. II.

94. Soit dans le Corollaire précédent, la constante

$$A = 0, \text{ on trouve } p = -\frac{M}{M+P} \cdot \frac{ay}{\sqrt{a^2 - y^2}} \& dx =$$

$$-\frac{Mydy}{(M+P)[\sqrt{a^2 - y^2}]}.$$

Cette dernière Equation fait voir que dans ce cas, la Courbe cherchée est Géométrique. Pour la construire, on supposera que CP (Fig. 29) soit la position du fil au premier instant, & ayant décrit du centre P l'Arc

M ij

CMK , & abaissé d'un point quelconque M la perpendiculaire MG , on prendra $NS = GP$, puis $PO = \frac{PS \cdot M}{M + P}$, & ayant tiré OT égale & parallèle à PM , le point T sera un des points de la Courbe. Pour en trouver l'Equation par rapport aux coordonnées NQ , QT , on remarquera que $QT = MG = y$, & appellant NP , f ; NQ , t ; on verra que $NQ = BT = OS = \frac{PS \cdot P}{M + P} = \frac{NG \times P}{M + P} = [\sqrt{(aa - yy)} - f] \cdot \frac{P}{M + P}$. On a donc $t = [\sqrt{(aa - yy)} - f] \cdot \frac{P}{M + P}$, & $t + \frac{fP}{M + P} = \frac{P}{M + P} \times \sqrt{[aa - yy]}$, ce qui est l'Equation d'une Ellipse dont le centre D se trouvera en faisant $ND = \frac{NP \cdot P}{M + P}$, & dont les deux Axes sont $DE = a$, & $DX = Cg = \frac{a \cdot P}{M + P}$.

Donc lorsque l'impulsion primitive des Corps P & M sera telle, que le premier dx soit au premier dy comme $\frac{-Ma}{(M + P) \sqrt{[a^2 - y^2]}}$ est à 1, le Corps M décrira une Ellipse, telle qu'on vient de la déterminer.

C O R O L. III.

95. Si l'on fait $P = m \cdot M$, la valeur générale de dx est $-\frac{y dy}{(1 + m) \cdot \sqrt{[a^2 - y^2]}} - \frac{A dy \sqrt{[(1 + m) \cdot a^2 - y^2]}}{\sqrt{[a^2 - y^2]}}$, ce qui fait voir que si A n'est pas $= 0$, la Courbe à la vérité

n'est pas Geométrique , mais peut se construire par la rectification de l'Ellipse. Car $\frac{dy \sqrt{[(1+m)a^2 - y^2]}}{\sqrt{[a^2 - y^2]}} =$

$\frac{dy \sqrt{[(1+m) \cdot qa^2 - qy^2]}}{\sqrt{q} \cdot \sqrt{[a^2 - y^2]}}$: or la formule générale de l'E-

lément de l'Ellipse étant $\frac{dy \sqrt{[a^2 + (\frac{p}{2a} - 1) \cdot y^2]}}{\sqrt{[a^2 - y^2]}}$, si on

fait $(1+m) \cdot q = 1$, & $-q = \frac{p}{2a} - 1$, on trouvera $q = \frac{1}{1+m}$ & $\frac{p}{2a} = \frac{m}{1+m}$; d'où il s'ensuit que

$\frac{dy \sqrt{[(1+m)a^2 - y^2]}}{\sqrt{[a^2 - y^2]}}$ est l'Elément d'un Arc d'Ellipse, dont

l'abscisse est y , le grand Axe $= 2a$, & le rapport du paramètre à cet Axe, $\frac{m}{1+m}$, cet Arc étant divisé par $\sqrt{q}$

ou multiplié par $\sqrt{[1+m]}$; ou, ce qui revient à la même chose, c'est l'Elément d'un Arc d'Ellipse dont le grand Axe $= 2a\sqrt{[1+m]}$, l'abscisse $= y\sqrt{[1+m]}$, & le rapport du paramètre à l'Axe $= \frac{m}{1+m}$.

REMARQUE II.

96. Ce que nous venons de dire dans les deux Corollaires précédens , & qui a été déduit du Problème général, peut se déduire d'une manière plus simple de deux Theorèmes que nous avons donnés au commencement de cette seconde Partie, sçavoir que le centre

de gravité g des Corps P, M , (Fig. 30) descend dans une ligne droite perpendiculaire à la rainure PQ , ou au moins que son Mouvement parallèlement à PQ est uniforme. Car quand le centre g descendra dans une ligne droite SgV , il est clair par les Sections coniques, que le point M décrira une Ellipse ; & dans les autres cas, il n'y a qu'à imaginer que le point g descende dans une droite perpendiculaire à la rainure, tandis que le point P avance vers Q , & que le point M décrit une Ellipse, & faire mouvoir ensuite tout le système parallèlement à PQ , avec la vitesse uniforme que doit avoir le centre de gravité parallèlement à PQ . Il est à remarquer que tout ceci a lieu, même lorsque les Corps P, M , sont pesans, pourvu que la rainure PQ soit alors horizontale.

Soient PQ, MN les vitesses primitivement imprimées aux Corps P, M , on décomposera la vitesse MN en deux autres, dont l'une MR soit perpendiculaire, & l'autre MS parallèle à la rainure, on prendra sur RN la partie RT telle, que $M.RT = P.PQ$; TN sera la vitesse du centre de gravité parallèlement à PQ , & le Problème sera entièrement résolu, si, abstraction faite de la vitesse commune TN , on trouve la vitesse du point M dans son Ellipse & celle du point P . C'est ce qu'on trouvera facilement par le Principe de la conservation des forces vives, que nous démontrerons ci-après. Voilà, comme l'on voit, une Méthode bien simple pour résoudre ces Problèmes.

REMARQUE III.

97. Si au lieu de supposer le Corps P animé d'une force accélératrice ϕ , on supposoit qu'il fut contraint de se mouvoir dans la rainure Courbe APp avec une vitesse dont la Loi fut donnée, le Problème pourroit toujours se résoudre de la même façon. Il ne seroit question que de déterminer la force ϕ . Voyez l'article 82. ci-dessus.

PROBLÈME V.

98. Un fil CmM fixe en C , (Fig. 31) & chargé de deux poids m , M , étant infiniment peu éloigné de la verticale CO , trouver la durée des oscillations de ce fil.

Soit mu l'Arc parcouru pendant le premier instant par le Corps m , & MV l'Arc décrit dans le même tems par le Corps M . On peut regarder le Corps M comme ayant à la fois deux Mouvements, dont l'un MV est égal & parallèle au Mouvement mu du Corps m , & l'autre Vv est un Mouvement circulaire autour du centre m ou u . Nous décomposerons d'abord l'effort absolu de la pesanteur du Corps m suivant mQ , en deux autres, dont l'un soit capable de faire parcourir au Corps m la ligne mu dans le premier instant, & l'autre soit dirigé suivant la ligne mR dont la position est inconnue. Ce dernier effort doit être détruit, puisque (*hyp.*) le Corps m ne peut se mouvoir que suivant mu . Nous décomposerons de même l'effort absolu de la pesanteur du Corps M sui-

vant ML , en deux autres, dont l'un fasse parcourir au Corps M la ligne MV , & l'autre MN puisse se décomposer de nouveau en deux autres, dont l'un fasse parcourir au Corps M la ligne Vv , l'autre soit entièrement détruit, ou ce qui revient au même, fasse équilibre avec l'effort suivant mR qui doit s'anéantir aussi. Or il est nécessaire pour cela 1°. que l'effort du Corps M qui doit être détruit, soit dirigé suivant MP dans la direction de mM prolongée, 2°. que cet effort soit à l'effort suivant mR , comme l'angle infiniment petit SmR (fait par mR & Cm prolongée), est à l'angle MmS , parce qu'il faut pour l'équilibre que la force résultante du concours de ces deux efforts soit dirigée suivant mS . Cela posé.

Soit $Cm = l$, p la pesanteur du Corps m , P celle du Corps M , $Mm = L$, $mK = x$, $MQ = y$, ϕ la force accélératrice suivant mu ; on aura 1°. la force ϕ à la pesanteur p , comme l'angle RmQ est au Sinus de l'angle droit Rmu . Donc nommant le Sinus total 1, on aura l'angle $RmQ = \frac{\phi}{p}$ 2°. on trouvera de même l'angle

$NML = \frac{\phi}{p}$. donc l'angle $PMN = \frac{y}{L} - \frac{\phi}{p}$, & la force

accélératrice suivant $uv = P \left(\frac{y}{L} - \frac{\phi}{p} \right)$. mais l'effort du

Corps M suivant MP , qui ne diffère qu'infiniment peu de son effort suivant ML , & qui peut par conséquent s'exprimer par $M \times P$, doit être à l'effort du Corps m suivant

suivant mR ($m \times p$) :: l'angle RmS ou $\frac{x}{l} - \frac{\phi}{p}$ est à l'angle MmS ou $\frac{y}{L} - \frac{x}{l}$. donc $m \cdot \phi = \frac{mpx}{l} - M \cdot P \times (\frac{y}{L} - \frac{x}{l})$, & par conséquent $\phi = \frac{px}{l} - \frac{M \cdot P}{m} (\frac{y}{L} - \frac{x}{l})$ & l'effort suivant Vv , fera $\frac{py}{L} - \frac{px}{l} + \frac{M \cdot P}{m} (\frac{y}{L} - \frac{x}{l})$.

Si on nomme présentement t le tems écoulé depuis le commencement du Mouvement, on aura ces deux

$$\text{Equations (M)} - ddx = [\frac{px}{l} - \frac{M \cdot P}{m} (\frac{y}{L} - \frac{x}{l})] dt^2.$$

$$\& - ddy = [\frac{yP}{L} \cdot \frac{(M+m)}{m} - \frac{x}{l} \cdot (p + \frac{M \cdot P}{m})] dt^2 \text{ (N)}$$

Ce sont ces deux Equations qui serviront à déterminer le Mouvement de chaque Corps.

C O R O L. I.

99. Si on suppose que les forces initiales suivant mu & Vv soient entr'elles, comme mK à MQ ; c'est-à-dire, si

$$(O) \frac{px}{l} + \frac{M \cdot P \cdot x}{lm} - \frac{M \cdot P \cdot y}{Lm} : \frac{yP}{L} (\frac{M+m}{m}) - \frac{x}{l} (p + \frac{M \cdot P}{m}) :: x : y.$$

Je dis que les Corps M, m , arriveront dans le même tems à la verticale CO . Car il faut, pour cela, que les Arcs MQ, mK soient parcourus dans le même tems: or si l'analogie précédente a lieu, les petites parties dont les Arcs mK, MQ diminueront au premier instant &

N

dans les suivans, seront entr'elles comme ces Arcs, & les forces accélératrices seront toujours entr'elles comme les Arcs qui resteront à parcourir jusqu'au point de repos. Donc &c.

L'analogie *O* étant réduite en Equation donne

$$\frac{p x y}{l} + \frac{M P x y}{l m} - \frac{M P y y}{L m} = \frac{y x P}{L} \cdot \left(\frac{M + m}{m} \right) - \frac{x x}{l} \cdot \left(p + \frac{M \cdot P}{m} \right)$$

$$\text{ou } \frac{y}{x} + \frac{M + m}{2 M} - \frac{p L m}{2 M P l} - \frac{L}{2 l} = \pm \sqrt{\left[\frac{p L m}{M P l} + \frac{L}{l} + \left(\frac{M + m}{2 m} - \frac{p L m}{2 M P l} - \frac{L}{2 l} \right)^2 \right]}$$

$$\& \frac{y + x}{x} = \frac{-m + M}{2 M} + \frac{p L m}{2 P M l} + \frac{L}{2 l} \pm \sqrt{\left[\frac{p L m}{M P l} + \frac{L}{l} + \left(\frac{M + m}{2 m} - \frac{p L m}{2 M P l} - \frac{L}{2 l} \right)^2 \right]}$$

COROL. II.

100. Si $P = p$, c. à d. si les Corps M & m sont de même gravité spécifique, on aura $\frac{y + x}{x} = \frac{M l - m l + M L + m L}{2 M l} \pm \pm$

$\frac{\sqrt{[4 M m L l + 4 M M L l + (M l + m l - M L - m L)^2]}}{2 M l}$: la quanti-

té qui est sous le Signe radical, se peut changer en $\sqrt{[4 M m L L + (m l + M L + M l - m L)^2]}$, & alors le rapport de $y + x$ à x , sera précisément le même qui a été donné pour ce cas seulement, par M. *Dan. Bern. Mém. de Petersb. to. 6. p. 111.* dont cet Auteur a donné ensuite la démonstration dans le To. 7. des mêmes Mémoires. M. *Euler* a donné aussi dans le To. 8. une solution de ce même Problème. Comme il est curieux, & qu'il peut servir à en résoudre plusieurs autres sembla-

bles, j'ai cru devoir montrer comment mon Principe s'y applique.

COROL. III.

101. Si la situation du fil CMm n'est pas celle que ce fil doit avoir, pour que les Corps m, M arrivent en même tems à la verticale; en ce cas, il faut recourir à l'intégration des Equations N & M de l'art. 98. pour trouver le Mouvement des Corps M & m . Je supposerai d'abord, pour rendre les calculs les plus simples qu'il sera possible, nonseulement $P = p$, mais encore $M = m$ & $l = L$; de plus, pour rendre les Equations M & N homogenes, je supposerai que T soit le tems pendant lequel la force accélératrice p feroit parcourir au Corps m ou M un espace $= l$; de cette manière les Equations M & N seront changées en celle-ci :

$$(P) - ddx = (2x - y) \cdot \frac{2dt^2}{T^2}, \text{ \& } (Q) - ddy = (2y - 2x) \frac{2dt^2}{T^2}$$

pour intégrer ces Equations, je multiplie la premiere par α , & la seconde par ν (α & ν étant deux nombres indéterminés) & ensuite je les ajoute ensemble, ce qui donne

$$(R) - \alpha ddx - \nu ddy = [(2\alpha - 2\nu) \cdot x (-\alpha + 2\nu) \cdot y] \cdot \frac{2dt^2}{T^2}.$$

Je fais enforte, que $(2\alpha - 2\nu) \cdot x (-\alpha + 2\nu) \cdot y$ soit un multiple de $-\alpha x - \nu y$, ce qui donne $\frac{2\alpha - 2\nu}{\alpha} = \frac{2\nu - \alpha}{\nu}$,

& $\alpha = \pm \nu \sqrt{2}$. Donc

$$- ddx \sqrt{2} - ddy [(2\sqrt{2} - 2) \cdot x + (2 - \sqrt{2}) \cdot y] \cdot \frac{2dt^2}{T^2}.$$

N ij

soit $x\sqrt{2} + y = u$, & l'on aura $-ddu = u\sqrt{2} \cdot \frac{2dt^2}{T^2}$,

dont l'intégrale est $\frac{A^2 dt^2}{T^2} - du^2 = 2\sqrt{2} \cdot \frac{u^2 dt^2}{T^2}$. donc

$$dt = \frac{-Tdu}{\sqrt{[A^2 - 2\sqrt{2} \cdot u^2]}} \text{ (je mets } -Tdu, \text{ parce que } u$$

étant $=$ à $x\sqrt{2} + y$, & x, y , diminuant lorsque t croît, il est nécessaire que u diminue aussi, lorsque t croît). De plus, la nature du Problème & l'inspection des Equations P & Q, font voir que lorsque $t = 0$, on a $dx = 0$,

$dy = 0$, & par conséquent $du = 0$. Donc $\frac{A^2}{2\sqrt{2}}$ est égal à ce

que devient u , quand $t = 0$; soit $x = X$, & $y = Y$ au commencement du Mouvement, c'est-à-dire quand $t = 0$;

& l'on aura $\frac{A^2}{2\sqrt{2}} = (X\sqrt{2} + Y)^2$. Présentement, si on

met pour y sa valeur $u - x\sqrt{2}$ dans l'Equation P, on

aura $-ddx = [(2 + \sqrt{2}) \cdot x - u] \frac{2dt^2}{T^2}$: dans cette Equa-

tion, on observera que la quantité u , est déjà construi-

te en t par l'Equation $dt = -\frac{Tdu}{\sqrt{[A^2 - 2\sqrt{2} \cdot u^2]}}$: je fais

$x = \frac{zs}{l}$, z & s étant deux variables indéterminées, & j'ai

$$\frac{-zdds - 2dsdz - sddz}{l} = (2 + \sqrt{2}) \cdot \frac{zs}{l} \cdot \frac{2dt^2}{T^2} - \frac{2udt^2}{T^2}.$$

Or à cause des deux indéterminées x & s , dont l'une peut être tout ce qu'on voudra, on peut supposer que les deux

termes $-zdds$ & $(2 + \sqrt{2}) \cdot zs \cdot \frac{2dt^2}{T^2}$ soient égaux,

ce qui donne $\frac{B^2 dt^2}{T^2} - ds^2 = (2 + \sqrt{2}) \cdot \frac{2s^2 dt^2}{T^2}$. Donc

$dt = - \frac{T ds}{\sqrt{[B^2 - (2 + \sqrt{2}) \cdot 2s^2]}}$; il ne nous reste plus que

l'Equation $-\frac{2dsdz - sddz}{l} = -\frac{2u dt^2}{T^2}$, dont l'intégrale

est $\frac{s^2 dz}{l} = \int \frac{2us dt^2}{T^2}$.

On remarquera enfin, que puisque $t = 0$ rend $X = x$, & dx ou $\frac{zds + sddz}{l} = 0$, on peut supposer $ds = 0$, &

$dz = 0$, quand $t = 0$; ce qui donne $\frac{B^2}{2 \cdot (2 + \sqrt{2})} = s^2$ &

$\frac{zs}{l}$ ou $x = X$. Donc $z = \frac{lX}{s}$, quand $t = 0$. De toutes

ces Equations, on tire la construction suivante.

Du centre C (Fig. 32) & d'un rayon $CA = (X\sqrt{2} + Y)$, on décrira un Cercle AF . Ensuite ayant pris une ligne

quelconque CK pour exprimer T , on fera $CB = \frac{T}{\sqrt{[2\sqrt{2}]}}$,

& on décrira le Cercle BE du Centre C . Si on prend BE à CK comme une partie de tems quelconque t écoulée depuis le commencement du Mouvement, est au tems donné T , & qu'on tire EFC , & FG perpendiculaire à CA ; je dis que CG fera la valeur de u qui répondra à BE

(t). Cela est clair par l'Equation $dt = - \frac{T du}{\sqrt{[A^2 - 2\sqrt{2} \cdot u^2]}}$.

dans laquelle, comme on a vu, $\frac{A^2}{2\sqrt{2}} = (X\sqrt{2} + Y)^2$.

Pour construire l'Equation $dt = \frac{-T ds}{\sqrt{[B^2 - 2.(2 + \sqrt{2}).s^2]}}$ dans laquelle la constante B^2 peut être prise pour ce qu'on voudra, étant seulement égale à $2s^2(2 + \sqrt{2})$ lorsque $t = 0$, on prendra $CD = \frac{T}{\sqrt{[2.(2 + \sqrt{2})]}}$, & on supposera $\frac{B^2}{2.(2 + \sqrt{2})} = CA^2$. & décrivant du rayon CD le Cercle DLO , sur lequel on prendra l'Arc $DL = BE$, on aura la correspondante $CZ = s$. Enfin on décrira une Courbe, dont les abscisses étant t , les ordonnées soient $\frac{u s}{T}$ & une autre Courbe dont les ordonnées soient égales aux aires $\int \frac{u s dt}{T}$ de la première, multipliées par $\frac{l}{ss}$, enfin une troisième Courbe, dont les ordonnées soient égales aux aires correspondantes des parties de la précédente, divisées par T , & on aura $z = \frac{lX}{CA} +$ aux ordonnées correspondantes de cette dernière Courbe.

De cette manière, on aura pour un tems t quelconque les valeurs de u, z, s . Donc aura celles de x & de y . Ce *Q. F. Trouver.*

R E M A R Q U E I.

102. Si l'on cherche dans le cas que nous venons d'examiner au Corol. précédent, c'est-à-dire lorsque $P = p$, $M = m$ & $L = l$, quel doit être le rapport des lignes X, Y , pour que les Corps m, M arrivent dans le même tems

à la verticale, on trouvera (art. 99) $2X - Y : 2Y - 2X :: X : Y$ donc $YY = 2XX$ & $\frac{y}{x} = \pm \sqrt{2}$, la même valeur qu'on a trouvée pour $\frac{a}{v}$. En effet, pour peu qu'on fasse d'attention à la nature du Problème, on verra que quand il y a deux Corps m, M , les deux valeurs de $\frac{a}{v}$ doivent être les mêmes, que celles que doit avoir $\frac{r}{X}$, pour que les points m, M , arrivent tous deux en même tems à la verticale. Car lorsque les deux Corps arrivent en même tems à la verticale, le rapport de x à y , de dx à dy , & de ddx à ddy est toujours constant & égal au rapport de X à Y . Or supposons, dans ce cas, les indéterminées a, v telles, que $\frac{a}{v} = -\frac{r}{X}$; il est clair que dans l'Equation $-addx - vddy = ([2a - 2v] \cdot x [-a + 2v] \cdot y) \frac{2dt^2}{T^2}$ le premier membre fera zero; & par conséquent le second devra l'être aussi, ce qui arrivera, si l'on a $\frac{2a - 2v}{2v - a} = -\frac{y}{x} = -\frac{r}{X} = \frac{a}{v}$, ou bien si on a à la fois $2a - 2v = 0$ & $2v - a = 0$. Or ce dernier cas renfermant contradiction, il s'ensuit que l'Equation entre a & v lorsque $\frac{a}{v} = -\frac{r}{X}$, est $\frac{2a - 2v}{2v - a} = \frac{a}{v}$ la même précisément qu'on a trouvée ci-dessus en général, lorsque le rapport de Y à X est quelconque. Donc dans cette dernière Equ-

tion, la valeur négative de $\frac{a}{v}$ doit être = à la positive de l'Equation qui donne le rapport de Y à X , & la positive à la négative.

R E M A R Q U E II.

103. Il est évident que le raisonnement de l'article précédent peut s'appliquer aux cas où l'on n'a ni $P = p$, ni $M = m$, ni $L = l$; & en effet, si l'on veut prendre la peine de faire le calcul, on verra que l'Equation étant ordonnée par rapport à $\frac{a}{v}$, elle ne différera que par le signe du second terme de l'Equation ordonnée par rapport à $\frac{r}{x}$.

Car en général les Equations M, N de l'article 98, peuvent être représentées par $ddx = (ax + by).dt^2$ & $ddy = (cx + ey).dt^2$. Or pour que les Corps arrivent en même tems à la verticale, il faut que $ax + by : cx + ey :: x : y$, & pour avoir la valeur de $\frac{a}{v}$, il faut que $\frac{ax + cy}{a} = \frac{bx + ey}{v}$. Les deux Equations ordonnées, l'une par rapport à $\frac{y}{x}$, l'autre par rapport à $\frac{a}{v}$, ne diffèrent que par le signe du second terme.

R E M A R Q U E III.

104. Au reste, je n'ai considéré dans la solution du
Problème

Problème précédent, le Mouvement du poids M , comme composé de deux Mouvements, dont l'un MV lui est commun avec le poids m , l'autre Vv est un Mouvement de rotation autour de m comme centre, que pour préparer le Lecteur à la solution de quelques Problèmes qui suivront, & que cette considération rend beaucoup plus aisés à résoudre. Car on auroit pû décomposer d'abord l'action de la pesanteur M suivant ML , en deux autres, dont l'une produisît le Mouvement Mv du Corps M , l'autre suivant MP , fut détruite. De cette manière on auroit eu la force accélératrice suivant $Mv =$

$$\text{à } p \times \text{Sin. } LMP = \frac{Py}{L}; \text{ l'angle } SmR = \frac{SmM \times P.M}{p.m}$$

$$= \left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l} \right) \times \frac{P.M}{p.m}; \text{ donc l'angle } RmQ \text{ auroit été}$$

$$= \frac{x}{l} - \left[\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l} \right) \times \frac{P.M}{p.m} \right], \text{ \& par conséquent la force}$$

accélératrice suivant mu égale au produit de p par cette dernière quantité. Ainsi comme x , est l'espace que cette dernière force accélératrice tend à faire parcourir au Corps m , & $x + y$ celui que la force accélératrice totale du Corps M , tend à lui faire décrire, on auroit eu

$$-ddx = \left[\frac{px}{l} - \frac{M.P}{m} \left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l} \right) \right] dt^2 \text{ \& } -ddx - ddy$$

$$= \left[\frac{Py}{L} \right] dt^2. \text{ deux Equations, dont la première est la même}$$

que l'Equation M de l'art. 98, & dont l'autre n'est autre chose que les Equations M & N de ce même article

ajoutées ensemble. Cette solution, par conséquent, revient au même que celle que nous avons donnée *art.* 98.

C O R O L. IV.

105. En général, si un fil $CMm\mu$ (Fig. 33) est chargé de tant de poids M, m, μ &c. qu'on voudra, infiniment peu éloignés de la verticale, on peut toujours déterminer la force accélératrice de chacun de ces Corps, par l'une des deux solutions données *art.* 98 & 104. pour le cas de deux Corps.

Supposons, par exemple, qu'il y ait trois Corps M, m, μ , dont les pesanteurs P, p, π suivant $MA, ma, \mu a$, se décomposent chacune en deux autres, dont les unes soient les forces accélératrices des Corps M, m, μ suivant $MV, mu, \mu v$; les autres, dirigées suivant $MB, mb, \mu b$ fassent équilibre, & que les fils $CM, Mm, m\mu$, soient prolongés suivant $MR, mr, \mu z$; il est clair que les puissances suivant $\mu z, mb$, qui doivent être censées égales aux poids des Corps μ, m , doivent se réduire à une puissance suivant mr , qui peut être regardée comme égale à leur somme; que de même la puissance suivant mr ou Mm , & la puissance suivant MB qui doit être censée égale au poids du Corps M , doivent se réduire à une puissance suivant MR . On aura donc la force accélératrice du Corps $\mu = \pi \cdot \text{angl. } Z\mu a$; celle du Corps $m = p$ [$\text{angl. } rma - \text{angl. } \frac{r m \mu \cdot \pi \cdot \mu}{p \cdot m}$]; celle du Corps $\mu = P$ [$\text{angl. } RMA - \text{angl. } \frac{R M m \times (p \cdot m + \pi \cdot \mu)}{P \cdot M}$].

En général il est visible, que si pour simplifier le calcul, on suppose toutes les pesanteurs égales à une même quantité g qu'on prendra pour l'unité, & qu'on appelle p, q, r, s &c. les angles $MCO, mMR, \mu mr$, &c. & B, C, D, E &c. les masses à commencer de haut en bas, les forces accélératrices seront par ordre à commencer du Corps le plus bas :

$$p + q + r + s$$

$$p + q + r - \frac{sE}{D}$$

$$p + q - r \cdot \left[\frac{E + D}{C} \right]$$

$$p - q \cdot \left[\frac{E + D + C}{B} \right]$$

Ce qui s'accorde avec ce qu'a trouvé M. *Daniel Bernoulli*, to. 7. des *Mém. de Petersb.* p. 170.

C O R O L. V.

106. Supposons que le fil ne soit chargé que de trois Corps égaux entr'eux, dont x, y , & z , soient les distances à la verticale à commencer par le plus haut ; & que les portions du fil interceptées entre ces Corps, soient égales : si on veut que ces Corps arrivent en même tems à la verticale, il faut faire $x:y :: p - 2q : p + q - r$; & $z:y :: p + q + r : p + q - r$. ou (mettant pour p, q, r , leurs proportionnelles $x, y - 2x, z - 2y + x$)

$$x : y :: 5x - 2y : 3y - 2x - z ;$$

$$\& z : y :: z - y : 3y - 2x - z ;$$

O ij

donc $(3y - 2x - z) \cdot z = (z - y) \cdot y$,
 & $(3y - 2x - z) \cdot x = (3x - 2y + 2x) \cdot y$.

donc $z = -5y + \frac{2yy}{x} + 3y - 2x = \frac{2yy}{x} - 2y - 2x$,

& $y \cdot (\frac{2yy}{x} - 3y - 2x) = (-\frac{2yy}{x} + 5y) (\frac{2yy}{x} - 2y - 2x)$;

d'où l'on tire $\frac{2yy}{x} - 3y - 2x = -\frac{4y^3}{xx} + \frac{4yy}{x} + 4y$

+ $\frac{10y^2}{x} - 10y - 10x$: divisant le tout par x , & ordon-

nant l'Equation par rapport à $\frac{y}{x}$, on aura $\frac{4y^3}{x^3} - \frac{12y^2}{x^2} + \frac{3y}{x}$

+ $8 = 0$, ce qui est conforme à ce qu'a trouvé M. *Bernoulli*, *Mém. de Petersb. to. 6. p. 112.* où il nomme 1

ce que nous avons appelé x ici, & x , ce qui est ici $\frac{y}{x}$.

R E M A R Q U E III.

107. En général, quel que soit le nombre des Corps & la distance des uns aux autres, si on veut qu'ils arrivent tous en même tems à la verticale, les distances du troisiéme & du quatriéme &c. à la verticale, se trouveront toujours par des Equations lineaires en $\frac{y}{x}$.

De plus l'Equation ordonnée par rapport à $\frac{y}{x}$ fera d'un degré égal à l'exposant du nombre des Corps, & aura toutes ses racines réelles. Car il est visible que s'il y a

trois Corps par exemple , & qu'on suppose celui qui est le plus haut placé à une très-petite distance de la verticale , on pourra toujours trouver trois situations pour chacun des deux autres Corps , pour qu'ils arrivent à la verticale tous deux en même tems que le premier ; savoir, en les mettant , ou tous deux du même côté de la verticale que le premier , ce qui fait un cas ; ou l'un du même côté, & l'autre du côté opposé, ce qui fait deux cas. En général , la situation du premier Corps étant donnée , le second Corps & les autres ont toujours autant de situations possibles , qu'il y a de Corps ; donc $\frac{y}{x}$ a toujours autant de valeurs réelles qu'il y a de Corps ; & ainsi l'Equation ordonnée par rapport à $\frac{y}{x}$ aura toujours toutes ses racines réelles. Donc la distance infiniment petite du Corps supérieur à la verticale , étant donnée , chacun des autres Corps pourra avoir autant de situations différentes qu'il y a de Corps en tout.

C O R O L. VI.

108. Les mêmes choses étant supposées que dans le Corol. 5. si on veut avoir le Mouvement de chaque Corps en particulier , sans s'embarrasser qu'ils arrivent tous en même tems à la verticale , on fera les trois Equations

$$-ddx = (5x - 2y) \cdot \frac{2dt^2}{T^2} (S)$$

O iij

$$-ddy = (3y - 2x - z) \cdot \frac{2dt^2}{T^2} (T)$$

$$\& -ddz = (z - y) \cdot \frac{2dt^2}{T^2} (V)$$

Pour intégrer ces Equations, je multiplie la première par α , la seconde par ν , la troisième par μ , & je les ajoute ensemble : j'aurai $- \alpha ddx - \nu ddy - \mu ddz$

$$= [(\alpha - 2\nu) \cdot x(-2\alpha + 3\nu - \mu) \cdot y(-\nu + \mu) \cdot z] \frac{2dt^2}{T^2};$$

$$\text{je fais } \frac{\alpha - 2\nu}{\alpha} = \frac{-2\alpha + 3\nu - \mu}{\nu} = \frac{\mu - \nu}{\mu},$$

ce qui donne

$$\mu = \frac{-2\alpha\alpha + 3\alpha\nu - 5\alpha\nu + 2\nu\nu}{\alpha} = \frac{2\nu\nu}{\alpha} - 2\nu - 2\alpha$$

$$\& (\alpha - 2\nu) \cdot \left(\frac{2\nu\nu}{\alpha} - 2\nu - 2\alpha\right) = \left(\frac{2\nu\nu}{\alpha} - 3\nu - 2\alpha\right) \cdot \alpha;$$

$$\text{d'où l'on tire l'Equation } \frac{8\alpha^3}{\nu^3} + \frac{3\alpha^2}{\nu^2} - \frac{12\alpha}{\nu} + 4 = 0.$$

Ayant trouvé la valeur de $\frac{\alpha}{\nu}$ en résolvant cette dernière Equation, on arrivera en faisant $\alpha x + \nu y + \mu z = u$ à une Equation de cette forme $-ddu = \frac{(\alpha - 2\nu) 2u dt^2}{\alpha T^2} (X)$

qui peut s'intégrer aisément, & d'où l'on tirera au moins par une construction la valeur de u en t , que j'appellerai θ . On aura ensuite $-ddx = (5x - 2y) \cdot \frac{2dt^2}{T^2} (Y)$

$$\& -ddy = (3y - 2x - \frac{\theta + \alpha x + \nu y}{\mu}) \cdot \frac{2dt^2}{T^2} (Z).$$

On multipliera la première de ces Equations par l'indéterminée π , la seconde par l'indéterminée ρ , & on les ajoutera ensemble, pour avoir $-\pi d d x - \rho d d y = [(5\pi - 2\rho + \frac{\alpha\rho}{\mu}) \cdot x (-2\pi + 3\rho + \frac{\nu\rho}{\mu}) \cdot y - \frac{\theta\rho}{\mu}] \cdot \frac{2 d t^2}{T^2}$;

on supposera $5\pi - 2\rho + \frac{\alpha\rho}{\mu} : \pi = -2\pi + 3\rho + \frac{\nu\rho}{\mu} : \rho$ afin de pouvoir en faisant $-\pi x - \rho y = k$ réduire l'Equation à cette forme $-d d k = a k d t^2 + b \theta d t^2$, que nous avons appris à intégrer ci-dessus.

On pourroit encore se servir d'une autre Méthode, en opérant sur les trois Equations X, Y, Z, comme on a opéré sur les Equations S, T, V : on réduiroit ainsi les trois Equations X, Y, Z, à trois Equations de la même forme que l'Equation X.

Au reste, les Méthodes que nous proposons ici non-seulement sont générales pour construire ces sortes d'Equations, mais peuvent encore avoir plusieurs autres usages dont ce n'est pas ici le lieu de parler.

S C O L I E.

109. Il n'y auroit qu'une seule chose qui pût faire de la difficulté dans la construction des Equations différentielles dont il s'agit; ce seroit, s'il arrivoit que les Equations ordonnées par rapport à $\frac{\alpha}{\nu}$, $\frac{\pi}{\rho}$ eussent toutes leurs racines imaginaires. Mais sans nous arrêter à chercher ici ce qu'il faudroit faire alors pour rendre la construc-

tion possible, nous nous contenterons de démontrer que ces Equations ont toujours dans le cas dont il s'agit ici au moins une de leurs racines réelle, ce qu'on peut prouver en cette sorte.

Soient x, y, s, u , &c. les distances respectives de chaque Corps à la verticale passant par le point fixe. Les Equations pour trouver le Mouvement de ces Corps, peuvent être en général représentées par

$$ddx = [ax + by].dt^2.$$

$$ddy = [cy + ex + fs].dt^2$$

$$dds = [hs + ly + gu].dt^2$$

$$ddu = [mu + ns].dt^2.$$

&c. &c.

Multipliant la première de ces Equations par a , la seconde par v , la troisième par μ , la quatrième par λ , &c. & les ajoutant ensemble, puis faisant en sorte que le second membre soit un multiple de $ax + vy + \mu s + \lambda u$ &c. on aura

$$\frac{aa + cv}{a} = \frac{ab + cv + l\mu}{v} = \frac{fv + b\mu + n\lambda}{\mu} = \frac{g\mu + m\lambda}{\lambda} = \&c.$$

En général, si le nombre des Corps est $= n$, on aura $n - 1$ de ces sortes d'Equations; on tirera des $n - 2$ premières les valeurs de μ, λ , &c. en $\frac{a}{v}$; toutes ces valeurs seront toujours données par des Equations lineaires: & substituant ces valeurs dans la $n - 2^e$ Equation, on

on formera une Equation du degré n , ordonnée par rapport à $\frac{a}{v}$; d'où il s'ensuit, que si $\frac{a}{v}$ a une valeur réelle dans cette Equation, toutes les autres quantités $\mu, \lambda, \&c.$ auront aussi chacune une valeur réelle.

Or 1°. si le nombre des Corps n est impair, l'Equation ordonnée par rapport à $\frac{a}{v}$ fera d'un degré impair, & aura au moins une racine réelle, & par conséquent $\frac{a}{v}, \mu, \lambda$ feront aussi des quantités réelles.

2°. Si le nombre des Corps n est pair, il faut prouver que les valeurs de $\mu, \lambda, \&c.$ tirées des $n - 2$ premières Equations, étant substituées dans la $n - 1^e$, on aura une Equation en $\frac{a}{v}$ dont au moins une des racines sera réelle.

Or imaginons que les distances $x, y, s, u, \&c.$ des Corps à la verticale, que nous avons supposées quelconques, soient telles, que ces Corps arrivent en même tems à la verticale; il est certain en premier lieu (*art.* 107.) que

$\frac{y}{x}, s, u, \&c.$ seront des quantités réelles. En restant dans

la même supposition, substituons dans la quantité

$ax + vy + \mu s + \lambda u \&c.$ les valeurs de $\mu, \lambda \&c.$ en $\frac{a}{v}$,

& imaginons qu'après cette substitution on fasse la quantité $ax + vy + \mu s + \lambda u \&c. = 0$, on aura une Equation

dans laquelle il n'y aura que $\frac{a}{v}$ d'inconnue; & qui

étant résolue, donnera pour $\frac{a}{v}$ une valeur telle, que $ax + vy + \mu s + \lambda u \&c. = 0$. Or cette Equation sera toujours du degré $n - 1$, & par conséquent ici d'un degré impair; donc elle aura dans le cas présent au moins une racine réelle, & par conséquent il y a toujours, quand n est un nombre pair, une valeur réelle de $\frac{a}{v}$ propre à rendre la quantité $ax + vy + \mu s + \lambda u \&c. = 0$, lorsque $x, y, s, u, \&c.$ sont les distances où les Corps doivent être de la verticale pour y arriver tous en même tems.

Je vais prouver maintenant, que toutes les racines de l'Equation $ax + vy + \mu s + \lambda u \&c. = 0$. ordonnée par rapport à $\frac{a}{v}$, & parmi lesquelles il y en a, comme nous venons de voir, au moins une réelle, sont aussi racines de l'Equation générale du degré n ordonnée par rapport à $\frac{a}{v}$; d'où il s'ensuivra que cette dernière Equation aura au moins une racine réelle, ce que nous nous sommes proposés de prouver.

Quelles que soient les valeurs de $x, y, s, u, \&c.$ soit que les Corps arrivent en même tems à la verticale, ou non, on a toujours l'Equation $a ddx + v ddy + \mu dds + \lambda ddu \&c.$

$$= \left(\frac{aa + ev}{a} \cdot ax + \frac{cv + ab + l\mu}{v} \cdot vy + \frac{fv + b\mu + n\lambda}{\mu} \cdot \mu g + \frac{g\mu + m\lambda}{v} \lambda u \&c. \right) dt^2,$$

$$\text{ou (à cause que } \frac{aa + ev}{a} = \frac{cv + ab + l\mu}{v} = \frac{fv + b\mu + n\lambda}{\mu},$$

puisque les valeurs de μ , λ &c. en $\frac{a}{v}$ sont supposées données par ces Equations) $a d d x + v d d y + \&c.$
 $= [\frac{(a a + e v)}{a} . (a x + v y + \mu s) + \frac{g \mu + m \lambda}{\lambda} . \lambda u] d t^2.$

Mais si on suppose les distances x, y, s, u , telles, que les Corps arrivent tous en même tems à la verticale; & de plus, que $a x + v y + \mu s + \lambda u = 0$, on aura $a d d x + v d d y + \&c. = 0$, c'est-à-dire que le premier membre de l'égalité précédente sera $= 0$, & par conséquent, que le second doit l'être aussi. Or (à cause de $a x + v y + \mu s + \lambda u = 0$) ce second membre est

$$\left(\frac{-a a - e v}{a} + \frac{g \mu + m \lambda}{\lambda} \right) \lambda u,$$

$$\bullet \left(\frac{-a a \lambda - e v \lambda}{a} + g \mu + m \lambda \right) u.$$

Donc $\frac{-a a \lambda - e v \lambda}{a} + g \mu + m \lambda = 0$, donc toute valeur de $\frac{a}{v}$ propre à rendre $a x + v y + \mu s + \lambda u \&c. = 0$. rendra aussi la quantité $\frac{-a a - e v}{a} + \frac{g \mu + m \lambda}{\lambda} = 0$. Mais cette dernière quantité, si on y substitue pour μ, λ &c. leurs valeurs en a & v , deviendra l'Equation générale du degré n ordonnée par rapport à $\frac{a}{v}$. Donc l'Equation $a x + v y + \mu s + \lambda u \&c. = 0$ à toutes ses racines communes avec l'Equation générale du degré n ordonnée par rapport à $\frac{a}{v}$; ce qui restoit à démontrer.

On démontrera par une Méthode semblable, que l'Equation générale ordonnée par rapport à $\frac{\pi}{\rho}$ aura au moins une racine réelle. Car en faisant $\alpha x + \nu y + \mu s \&c. = \theta$ comme dans l'*art.* 108. on observera que $\theta = 0$, à cause de $\alpha x + \nu y + \mu s \&c. = 0$ (*hyp.*), & la démonstration fera, moyennant cette remarque, précisément de la même nature que la précédente.

C O R O L. VII.

110. Soit une Courbe chargée de poids infiniment petits & égaux, placés à des distances infiniment petites les uns des autres, & tous infiniment peu éloignés de la verticale; soient x les abscisses, y les ordonnées infiniment petites de cette Courbe, s les Arcs qui diffèrent infiniment peu des x correspondantes; enfin l la longueur du fil, il suit de l'*art.* 105. que la force accélératrice de chaque petit poids, est comme la somme des Sinus des angles de contingence depuis le sommet, moins l'angle de contingence multiplié par le rapport des poids inférieurs à ce poids; donc cette force est pour chaque

point $\int \frac{ddy}{ds} - \frac{(l-s) \cdot ddy}{ds^2}$, ce que M. Daniel Bernoulli a

donné dans le tom. 7. des *Mém. de Petersb.* pag. 170.

M. Daniel Bernoulli a tiré delà l'Equation que devrait avoir la Courbe, pour que toutes ses parties arrivassent en même tems à la verticale. *Voy. ibid.* p. 171.

Si la Courbe n'a pas cette Equation, alors elle change-

ra d'Equation d'un instant à l'autre, & la valeur générale d'une ordonnée y , ne pourra être exprimée que par une fonction de l'Arc s ou de l'abscisse x correspondante, & du tems t écoulé depuis le commencement du Mouvement; cette fonction, lorsque $t = 0$ deviendra la valeur de y en s donnée par l'Equation de la première Courbe. Soit donc en général $y = \phi(t, s)$, $dy = p dt + q ds$, ddy la différence de dy , en regardant s comme constante, ddy sa différence en prenant t constante, on a

$$ddy = \left[\frac{dy}{ds} - (l-s) \cdot \frac{d^2y}{ds^2} \right] \cdot dt^2 \text{ ou } \frac{dp}{dt} = q - (l-s) \cdot \frac{dq}{ds};$$

on observera que dp doit être prise en ne faisant varier que t , & dq en ne faisant varier que s . Soit $dp = \alpha dt + v ds$, $dq = b dt + m ds$; à cause que $p dt + q ds$ est une différentielle complete, il faut que $\frac{dp}{ds} = \frac{dq}{dt}$, c'est-

à-dire $b = v$. De plus, l'Equation $\frac{dp}{dt} = q - \frac{(l-s) \cdot dq}{ds}$

donne $\alpha = q - (l-s) \cdot m$, donc $m ds = \frac{q ds - \alpha ds}{l-s}$;

ajoutant de part & d'autre $b dt$ ou $v dt$, on aura

$$m ds + b dt \text{ ou } dq = \frac{q ds - \alpha ds}{l-s} + v dt. \text{ Donc}$$

$dq \cdot (l-s) - q ds = v dt \cdot (l-s) - \alpha ds$, & $q \cdot (l-s) = \int v dt \cdot (l-s) - \alpha ds$. Cette Equation doit avoir lieu, en cas que toutes les Courbes variables dont il s'agit, puissent être renfermées dans l'Equation générale $y = \phi(t, s)$.

* Cette quantité $\phi(t, s)$ exprime en général une fonction de t & de s .

L E M M E VIII.

111. Soit un Corps CRM (Fig. 34) de figure quelconque, dont le centre de gravité soit G; que toutes les parties V de ce Corps soient animés par des forces VM dont les directions soient perpendiculaires à la ligne VC, menée des points V à un point fixe C pris à volonté dans le Corps, & que ces forces soient entr'elles comme les distances VC; je dis que la direction de la force résultante, sera une ligne KL perpendiculaire à la droite CG menée par G, & par le point donné C.

Car décomposant chaque force VM en deux; l'une suivant VN parallèle à CV, l'autre suivant VP, perpendiculaire à CV; il est aisé de voir que les forces suivant VN feront comme les distances CQ de ces forces à la ligne CG, qu'ainsi les sommes de ces forces seront égales à la somme des produits de chaque particule par sa distance à la ligne CG. Mais comme CG passe par le centre de gravité G, cette somme est = 0. donc la force résultante des forces suivant VN est = 0. donc la direction & la valeur de la force que nous cherchons, sera la même que celle qui résulte des seules forces suivant VP perpendiculaires à CG. Donc la direction de cette force ne peut manquer d'être une ligne OKL perpendiculaire à CG.

A l'égard de la valeur de la force suivant OL, elle est égale à la somme des forces suivant VP multipliées par les petites masses correspondantes V, & comme les

forces VP sont entr'elles comme VQ , & que $\int V.VQ$ est égal à CG multiplié par la masse MSC , par la propriété du centre de gravité; il s'ensuit, que si on appelle ϕ la force accélératrice du point G , la force suivant OL sera $= \phi . MSC$.

$$\begin{aligned} \text{La distance de la ligne } OL \text{ à } C &= \frac{\int V . \phi . \frac{VC}{CG} \times VC}{\phi . MSC} \\ &= \frac{\int V . VC^2}{CG . MSC} . \end{aligned}$$

COROLLAIRE.

112. On voit par-là que la position de la ligne OKL est toujours donnée, quelle que soit ϕ .

PROBLÈME VI.

113. Un Corps CRV (Fig. 35) de figure quelconque, dont G est le centre de gravité, étant suspendu à un fil AC , & les lignes AC , CG étant infiniment peu écartées de la verticale, trouver la vitesse des points C & G pour un tems donné t .

Les parties du Corps CRV ont chacune un Mouvement égal & parallèle à celui du point G , & elles tournent en même tems autour de ce point C avec des vitesses qui sont entr'elles comme les distances à ce point. Soit p la pesanteur absolue d'une particule quelconque V suivant la verticale VQ , & soit cet effort décomposé pour chaque particule en deux autres, dont l'un suivant Vu

soit égal & parallèle à la force accélératrice du point C suivant CP , & l'autre soit dirigé suivant Vn . Cet effort Vn dont on ne connoît point encore la direction, sera égal & de même direction pour toutes les particules : c'est pourquoi on peut regarder tous les efforts Vn comme réunis au centre G , & agissant suivant GN parallèle à Vn . Il faut, de plus, décomposer cet effort Vn pour chaque particule en deux autres, dont l'un soit l'effort nécessaire pour faire tourner la particule V autour de C , & l'autre soit détruit. J'appelle ce dernier effort s , & puisque tous les efforts s doivent être détruits, il faut que la force qui en résulte, soit dans la direction de AC .

On a déjà trouvé que GN parallèle à Vn , & dont la position est inconnue, est la direction de la force résultante des forces Vn ; on trouvera (*art.* 112.) la position de la ligne KL , direction de la force résultante des efforts des particules V pour tourner autour de C , quoiqu'on ne connoisse pas encore la valeur de cette force. La direction de la force résultante des efforts suivant GN & KL , doit nécessairement passer par le point de concours L des lignes GL & KL , & de plus elle doit être dans AC prolongée. Donc le point L est dans AC prolongée : donc la ligne GN doit passer par le point où se rencontrent les lignes KL donnée de position, & AC prolongée ; & CL fera la direction de la force résultante des forces s .

Soit π la force de C suivant CP , laquelle est commune à toutes les particules, & celle de G pour tourner
autour

autour de C , on menera Gi parallèle à CP , & GM à AP , & on nommera AC , l , CG , a , GK , b , m la masse du Corps, CP , x , l'angle fait par CG & par la verticale, $\frac{y}{a}$: GK & GL pourront être censées égales, & l'on aura l'angle $GLM = \frac{GCL \cdot CG}{GK} = (\frac{y}{a} - \frac{x}{l}) \cdot \frac{a}{b}$, & l'angle $LGM = \frac{x}{l} - (\frac{y}{a} - \frac{x}{l}) \frac{a}{b}$; mais la force $\pi = p \cdot LGM = p [\frac{x}{l} - (\frac{y}{a} - \frac{x}{l}) \frac{a}{b}]$; & la force suivant KL ($\phi \cdot m$) doit être à la force suivant GL ($p \cdot m$) :: l'angle GLM au Sinus total. Donc $\phi = p (\frac{y}{a} - \frac{x}{l}) \frac{a}{b}$; on a donc $-ddx = [x - (\frac{yl}{a} - x) \frac{a}{b}] \frac{2dt^2}{T^2}$, & $-ddy = (\frac{yl}{b} - \frac{ax}{b}) \cdot \frac{2dt^2}{T^2}$; Equations qui s'intégreront par une Méthode pareille à celle dont on s'est déjà servi pour des cas semblables, dans les *art.* 101. & 108.

COROLLAIRE.

114. Si on veut que les points C , G arrivent en même tems à la verticale, on fera $x : y :: \frac{x}{l} - \frac{y}{b} + \frac{ax}{bl} : \frac{y}{b} - \frac{ax}{bl}$;

$$\text{donc } \frac{xy}{b} - \frac{axx}{bl} = \frac{xy}{l} - \frac{yy}{b} + \frac{axy}{bl} :$$

$$\text{donc } \frac{x}{y} = -\frac{1}{2} + \frac{l-b}{2a} \pm \sqrt{[\frac{l}{a} + (\frac{l-b}{2a} - \frac{1}{2})^2]}$$

Q

Si l est fort grande par rapport à a & à b , on a $x = \frac{y^2}{a}$ & $x = -y$. La première de ces Equations, donne $\frac{x}{l} = \frac{y}{a}$; c'est-à-dire que si le fil est fort long, les lignes CG & AC doivent être à très-peu près dans la même droite, pour que les points C, G , arrivent en même tems à la verticale. La seconde donne les angles des lignes CG, AC avec la verticale, & du même côté, en raison inverse de AC à CG ; c'est-à-dire, que pour que les points C, G , arrivent en même tems à la verticale, il faut par la première Equation, que CG & AC soient dans la même ligne droite, & par la seconde, que le centre G soit situé au premier instant dans la verticale AC , ou au moins fort proche de cette verticale.

§. II.

Des Corps qui vacillent sur des plans.

P R O B L È M E VII.

115. Soit une figure quelconque CKO (Fig. 36) tellement située sur un plan horizontal MCS , que la direction GF de son centre de gravité G ne passe pas par son point touchant C , on demande ce qui arrivera à cette figure.

Cette figure ne peut avoir que deux Mouvements; l'un de rotation autour du point touchant C qui change à chaque instant; l'autre, qui sera le même dans toutes les parties de la figure, pour glisser le long du plan vers M ou

vers S : il faut donc déterminer d'abord , si ce dernier Mouvement se fait vers M ou vers S ; en second lieu , la valeur de la force qui le produit , & que j'appelle π ; en troisième lieu , la force du centre G pour tourner autour de C , & que je nomme ϕ ; enfin , si cette dernière force fait tourner G à droite ou à gauche.

Quelles que soient les forces ϕ , il est certain qu'on peut trouver la direction ZNO de la force qui en résulte , & que cette ligne NO sera perpendiculaire à CG prolongée. De plus , la force résultante des efforts absolus de chaque particule en vertu de sa pesanteur , sera dirigée suivant NGF , & sera $= p \cdot m$ en appelant m la masse du Corps , & p la gravité absolue. De même la ligne KGR parallèle à MS , sera la direction de la force résultante de toutes les forces π , & cette force sera $\pi \cdot m$. Or par notre Principe , il faut que la force suivant NF puisse se décomposer en trois , dont la première soit la force résultante du concours d'action des forces ϕ , la seconde la force résultante des forces π , & la troisième s'anéantisse. Cette troisième ne peut s'anéantir , que sa direction ne soit la ligne CD perpendiculaire au plan en C . Delà il est aisé de voir par la seule inspection de la figure , 1°. que NO & non pas NZ sera la direction de la force résultante des forces ϕ , & qu'ainsi la figure tournera de gauche à droite. 2°. Que la force suivant NG sera composée de la force suivant NO , & d'une force dont la direction NL passera par N & par l'intersection L des lignes CD , KR . 3°. Que la figure glissera de G vers K ,

non de G vers R . 4°. La force suivant NV étant donnée, & les lignes NL , NO données de position, la force suivant NO sera donnée, & par conséquent ϕ . De même la force suivant NL sera donnée, & comme son rapport avec la force $\pi.m.$ est celui de LQ à QC , la force π sera donnée aussi. Donc le Problème est résolu.

S C O L I E I.

116. Au reste, il est clair par l'*art.* 70. que le centre de gravité G descendra toujours dans une droite verticale : or delà il est très-aisé sans calcul, de trouver le Mouvement de la figure. Car par un point quelconque E , soit tirée la Tangente EB sur laquelle on abaissera la perpendiculaire GB : lorsque G sera à une distance du plan, égale à GB , le point E de la figure touchera le plan.

Quand le point C (Fig. 37) n'est pas un point touchant, par exemple, si la figure donnée est un triangle dont C soit un des angles, alors le centre étant en V , le point C sera au point E , tel que $VE = GC$.

S C O L I E II.

117. Le Savant M. Euler dans le To. 7. des *Mém. de Petersbourg*, s'est proposé de résoudre ce Problème, pour le cas seulement, où les vacillations du Corps sur le plan doivent être infiniment petites ; sa Méthode consiste à faire en sorte que les momens des forces des particules pour tourner autour de C , (Fig. 36) soient égaux aux momens de leur gravité absolue par rapport au point C .

considéré comme fixe , ce qui revient au même , que de décomposer la force suivant NF en deux , dont l'une soit la force suivant NO résultante des forces ϕ pour tourner autour de C , & l'autre passe par les points N & C , & soit anéantie.

Or la force suivant NC ne peut être anéantie , que quand NC est perpendiculaire à MCS , à moins qu'on ne suppose le plan raboteux , & d'une asperité assez grande , pour détruire l'effet de la force NC parallèlement au plan. Ainsi pour que la solution de M. Euler ait lieu , il faut supposer que le plan n'est pas parfaitement uni. C'est aussi probablement ce que l'Auteur veut dire , par ces paroles : * *In hoc motu verò notandum est planum super quo fit , aliquantulum asperum esse ponendum , ne curvæ de loco suo inter vacillandum dimoveri queant , quòd eveniret , si planum maximè foret politum.* Apparemment que ces paroles , *ne de loco suo dimoveri queant* , signifient : *De peur que les Courbes , outre leur Mouvement autour du point touchant , n'ayent aussi un Mouvement pour glisser parallèlement au plan.* Mais je ne sai ce qui a empêché que M. Euler n'eût égard à ce dernier Mouvement dans sa solution.

S C O L I E III.

118. Si la circonférence de la figure & la surface du plan sur lequel elle glisse ne sont pas parfaitement unies , voici comment on trouvera pour lors les forces p & π ; on regardera le point C (Fig. 38) comme une petite

* Pag. 108.

éminence de masse donnée , & on supposera que l'on connoisse de quelle force accélératrice g ce petit Corpuscule devoit être animé suivant CS ou CM , pour que si cette force étoit tant soit peu augmentée, il fut capable de surmonter la résistance provenant des inégalités du plan. On décomposera d'abord la force absolue suivant NG en deux, dont l'une soit la force cherchée suivant NO , & l'autre agisse suivant la ligne inconnue NL . Cette dernière force doit être décomposée en deux, dont l'une suivant $LK = \pi . m$, & l'autre suivant LC regardée comme poussant le point C suivant CT , donne à ce point C un effort suivant $CS =$ à l'effort connu g .

Soient les données $GP, a, GN, b, GO, c, CR, e, RG, f$, & l'indéterminée $GL = y$, on aura la puissance suivant NL à la puissance suivant NG ($p \times m$) :: le Sinus de l'angle GNO ou $\frac{GP}{GN}$ au Sinus de l'angle ZNL , ou $\frac{LZ}{NL}$. mais $\frac{GP}{GN} = \frac{a}{b}$, $LZ = GP \times \frac{OL}{OG} = \frac{a \cdot (c+y)}{c}$, & $NL = \sqrt{[bb + yy]}$. Donc la force suivant $NL = \frac{p \cdot m \cdot NL \cdot OG}{GN \cdot OL}$: la force suivant LC est égale à la force suivant NL , multipliée par le rapport du Sinus de l'angle NLG ou $\frac{NG}{NL}$ au Sinus de l'angl. RLC ou $\frac{CR}{CL}$; enfin, la force suivant CS est égale à la force suivant LC , multipliée par $\frac{LR}{LC}$, d'où l'on tire $\frac{p \cdot m \cdot LR \cdot GO}{OL \cdot CR}$ ou $p \cdot m \cdot \frac{(y-f) \cdot c}{(c+y) \cdot e}$

pour la valeur de cette force suivant CS : soit μ la masse de la petite éminence C , il faut que $p.m. \cdot \frac{c.(y-f)}{e.(c+y)} = g.\mu$. d'où l'on tirera la valeur de y , & par conséquent les valeurs absolues des forces suivant NL , LK & NO , qui sont celles que l'on cherche.

Mais il y a ici une chose importante à observer, c'est que la force du point C suivant CS , doit être dans la même direction que celle suivant laquelle les parties du Corps CRS glissent parallèlement au plan, d'où l'on voit que le point L ne peut être qu'entre R & A , A étant le point d'intersection des droites NC , RG , & l'expression de la force suivant CM , fera pour lors $\frac{p.m.(f-y).c}{e.(c+y)} = g.\mu$, d'où l'on tirera la valeur de y . Si cette valeur est plus grande que RA , la figure ne peut faire autre chose que tourner autour du point C , qui dans chaque instant variera, & pourra être regardé comme fixe pendant un instant. Si on veut que la force nécessaire pour faire mouvoir le point C malgré la résistance du plan, ne soit pas donnée, mais seulement son rapport à la pression de ce point sur le plan, on prendra RL à RC dans le rapport de la force du frottement à la force de la pression; & on aura par là le point L qui doit toujours être placé entre R & A ; sinon la figure n'aura aucun Mouvement parallèlement au plan.

119. Dans le cas où le plan MCS (Fig. 38) est parfaitement uni, nous avons fait voir que le centre G descendoit dans une ligne droite verticale. Pour savoir la vitesse avec laquelle il descend, il n'y a qu'à chercher la force qui le pousse à chaque instant suivant GF . Si on nomme GF, x , & ϕ la force accélératrice du point G pour tourner autour de C , m la masse du Corps, on aura 1°. la force suivant $NO = \phi \cdot m$ (art. 111.); de plus, GF étant donnée, on doit par la nature de la Courbe connoître GC , que j'appelle X , & GP que j'appelle z . La force suivant NR fera à la force suivant $NO ::$ le Sinus de l'angle PNG au Sinus de l'angle GNR . Donc la force suivant $NR = \frac{\phi \cdot m \cdot GP}{GN} \times \frac{RN}{CF}$, & la force suivant $RL =$ la force suivant NR multipliée par $\frac{RG}{RN} = \frac{\phi \cdot m \cdot GP}{GN} = \frac{\phi \cdot m \cdot GF}{CG}$. Donc la force du point G suivant GL , est à la force pour tourner autour de $C :: GF : GC$, & la force suivant GF à la force $\phi :: CF : CG$. Donc la force suivant $GF = \frac{\phi \cdot CF}{CG}$: mais la force suivant NG ($\phi \cdot m$) doit être à celle suivant NO ($\phi \cdot m$) :: le Sinus de RNk au Sinus de NG , c'est-à-dire: Rk à CF ; donc $\phi = \frac{p \cdot CF}{Rk}$; donc la force suivant $GF = \frac{p \cdot CF^2}{Rk \cdot CG}$, & comme CF, CG, Rk sont données en x , il est clair qu'on

qu'on aura la force initiale suivant GF exprimée en x .

On peut employer une Méthode analogue pour trouver la vitesse dans les instans suivans : mais le plus court est de se servir du principe de la conservation des forces vives. Soit u la vitesse du centre G (Fig. 39) lorsqu'il a parcouru verticalement un espace $GV = t$, V la vitesse avec laquelle les particules qui sont à une distance donnée b du centre G , tournent autour de ce même centre, p la pesanteur, M la masse, a la somme des produits des particules par leurs distances à G , on aura $2pt = uu + \frac{VVa}{Mb^2}$; mais t est donnée en x , & V en u & x . Donc &c.

S C O L I E V.

120. Lorsque la figure se meut sur un plan qui n'est pas uni, & que le frottement est supposé proportionnel à une partie donnée de la force comprimante, les lignes CR & CL (Fig. 38) ont entr'elles un rapport constant, par conséquent le centre G se meut sur la Courbe qu'il décrit, comme s'il étoit mû par une force dont la direction fit toujours avec le plan MS un angle constant.

§. III.

*Des Corps qui agissent les uns sur les autres par des fils ,
le long desquels ils peuvent couler librement.*

P R O B L È M E V I I I.

121. Un fil $ANPM$ (Fig. 40) de longueur donnée ,
étant arrêté fixement en A sur un plan horizontal , & chargé
R

de deux poids M, P , dont l'un M soit attaché fixement au fil, & l'autre P , puisse couler le long du fil par le moyen d'un anneau, on demande le Mouvement de chacun de ces deux Corps, en supposant qu'ils aient reçu l'un & l'autre une impulsion quelconque.

Soient Pp, Mm , les deux lignes parcourues par les Corps P, M , dans un instant. Ayant décrit d'un rayon arbitraire constant AN , l'Arc Nn , & fait $nn = nN$, la question se réduit à trouver la grandeur & la position du côté pV qui suit immédiatement Pp , & la position VT de l'autre partie du fil. Je suppose que dans l'instant que le Corps P parcourt pV , il eut parcouru uniformément dans la direction de Pp la ligne $pp = p\pi + \pi p = Pp + \pi p$, & que de même le Corps M eut parcouru uniformément $mo = m\mu + \mu o = Mm + \mu o$. Par notre Principe, il faut décomposer les Mouvements pp, mo chacun en deux autres px, pV , & mL, mT , tels, que par les Mouvements pV, mT , les Corps p, m , ne se nuisent point l'un à l'autre, c'est-à-dire qu'on ait $AV + VT = Ap + pm$, & que par les Mouvements px, mL , les Corps se fassent équilibre. D'où il s'ensuit 1°. que mL doit être dans le prolongement de pm ; 2°. que le Corps p pouvant couler (*hyp.*) le long du fil, il ne sauroit y avoir d'équilibre, à moins que sa direction px ne divise en deux également l'angle $Ap m$. 3°. Enfin, que la force suivant mL doit être à la force suivant px , comme le Sinus de la moitié de l'angle $Ap m$ est au Sinus de cet angle entier.

Les lignes Ap , pm , px étant données de position, on voit assez, que si on connoissoit la grandeur des lignes px , πp , le Problème seroit résolu, & qu'il n'y auroit plus que le calcul à faire : or 1°. les lignes px , πp doivent être telles que les angles VAp & pAP soient égaux, 2°. les lignes px & πp étant données, les lignes AV & VT sont données de grandeur & de position, & la somme de ces lignes doit être constante. On aura donc deux conditions, d'où l'on tirera deux Equations qui serviront à trouver px & $p\pi$. En voici l'analyse.

Soit $AN=1$. $Nn=dx$, $AP=y$, $PQ=dy$, le Sinus de la moitié de l'angle APM , z , enfin c la longueur du fil.

1°. La différence de l'angle PAp (dx) + celle de l'angle APM ($\frac{2dz}{\sqrt{1-zz}}$) est égale à l'angle de PM avec pm : donc cet angle de PM avec $pm = dx + \frac{2dz}{\sqrt{1-zz}}$.

2°. $\frac{pD}{Pp}$ & $\frac{PD}{Pp}$, c'est-à-dire les Sinus des angles pPD , & PpD sont données par le Sinus z & par celui de l'angle ApP ; je les exprime donc ainsi * $\phi(z, \frac{PQ}{Pp})$ & $\Delta(z, \frac{PQ}{Pp})$, ou $\phi(z, \frac{ydx}{\sqrt{dy^2 + y^2 dx^2}})$ & $\Delta(z, \frac{ydx}{\sqrt{dy^2 + y^2 dy^2}})$.

* Les quantités ϕ , Δ , mises au-devant d'une autre quantité quelconque, marqueront toujours dans la suite une fonction de cette quantité.

Donc $pD = Pp \cdot \phi(z, \frac{y dx}{\sqrt{[dy^2 + y^2 dx^2]}})$ & $PD = Pp \cdot \Delta(z, \frac{y dx}{\sqrt{[dy^2 + y^2 dx^2]}})$.

3°. $PM - pm = dy$ & $mB - pD = dy - (dx + \frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}})^2 \cdot \frac{(c-y)}{2}$.

4°. Si on fait $px = \ell$, $\pi p = a$, on aura (art. 78.) l'angle $\pi Ap = dx - \frac{2dy dx}{y}$; $\pi Ap = \frac{a dx}{\sqrt{[dy^2 + y^2 dx^2]}}$; pAV ou $xAp = \frac{\ell z}{y}$. Donc $\frac{2dy dx}{y} - \frac{a dx}{\sqrt{[dy^2 + y^2 dx^2]}} + \frac{\ell z}{y} = 0(A)$.

5°. $A\pi = y + 2dy + ydx^2$; $Ap = A\pi + \frac{a dy}{\sqrt{[dy^2 + y^2 dx^2]}}$; $AV = Ap - \ell \sqrt{[1-zz]}$. Donc $AV = y + 2dy + ydx^2 + \frac{a dy}{\sqrt{[dy^2 + y^2 dx^2]}} - \ell \sqrt{[1-zz]}$: donc en supposant dx constant, on a $ddy = ydx^2 + \frac{a dy}{\sqrt{[dy^2 + y^2 dx^2]}} - \ell \sqrt{[1-zz]} (B)$.

6°. Présentement, on a $\mu o = a \cdot \frac{Mm}{Pp}$; $PM - \pi\mu =$ (art. 76.) $2dy - (dx + \frac{2dz}{\sqrt{[1-zz]}})^2 (c-y)$; $\pi o = \pi\mu - ol$ (on suppose que μl est un Arc décrit du centre π & du rayon $\pi\mu$, & que MB est perpendiculaire à pB) $= \pi\mu - \frac{a \cdot mB}{Pp}$; $op = \pi o + \frac{a \cdot pD}{Pp}$; $oV = op - \ell \sqrt{[1-zz]}$;

Or à cause de l'équilibre, on a $m \times o T : \frac{P \cdot \epsilon}{2} :: 1 :$

$$\sqrt{[1 - zz]} ; \text{ donc } o T = \frac{P \cdot \epsilon}{2 M V [1 - zz]}, \text{ donc } VT = o V - \frac{P \cdot \epsilon}{2 M V [1 - zz]} . \text{ donc } VT = c - y - 2 dy$$

$$+ \left(dx + \frac{2 dz}{\sqrt{[1 - zz]}} \right)^2 (c - y) - \frac{\alpha \cdot m B}{P p} + \frac{\alpha \cdot p D}{P p}$$

$$- \epsilon \sqrt{[1 - zz]} - \frac{P \cdot \epsilon}{2 M V [1 - zz]} . \text{ Cette valeur de } VT$$

ajoutée à la valeur de AV trouvée ci-dessus *n. 5.* doit être $= c$. delà on tirera une Equation, qui, avec l'Equation A servira à chasser α & ϵ .

7°. L'angle $AVp = ApP - dx - ppV$, & l'angle pVT ou $pVo = ppo + ppV + poV$. Or l'angle

$$poV = \frac{\epsilon z}{c - y}, \text{ \& l'angle } ppo = p\pi o - \pi op = p\pi o$$

$$- \frac{\alpha \cdot p D}{P p \cdot (c - y)} ; \text{ l'angle } p\pi o = p\pi\mu + \mu\pi o = p\pi\mu$$

$$+ \frac{\mu o \cdot MB}{M m \cdot (c - y)} = p\pi\mu + \frac{\alpha \cdot MB}{P p \cdot (c - y)} = p\pi\mu + \frac{\alpha}{P p \cdot (c - y)} \times$$

$$[PD + (c - y) \cdot \left(dx + \frac{2 dz}{\sqrt{[1 - zz]}} \right)] ; \text{ l'angle } p\pi\mu \text{ est égal}$$

à l'angle Ppm , plus l'angle de $\pi\mu$ avec pm , & ce dernier

$$\text{angle (art. 76.) est } = \left(dx + \frac{2 dz}{\sqrt{[1 - zz]}} \right) \cdot \left(1 + \frac{2 dy}{c - y} \right) ;$$

$$\text{donc } AVp + pVT = ApP + Ppm - dx - ppV$$

$$+ \left(dx + \frac{2 dz}{\sqrt{[1 - zz]}} \right) \cdot \left(1 + \frac{2 dy}{c - y} \right) + \frac{\alpha}{P p \cdot c - y} \times$$

R iij

$[PD + (c - y) \cdot (dx + \frac{z dz}{\sqrt{1 - z^2}})] = \frac{a \cdot PD}{pp \cdot c - y}$
 $+ ppV + \frac{cz}{c - y}$; mais $ApP + Ppm = APM + \frac{z dz}{\sqrt{1 - z^2}}$.
 donc $d(\frac{z dz}{\sqrt{1 - z^2}}) = (dx + \frac{z dz}{\sqrt{1 - z^2}}) \cdot (\frac{z dy}{c - y} + \frac{a}{pp})$
 $+ \frac{cz}{c - y}$. Cette Equation combinée avec l'Equation B
 servira à trouver les Equations des deux Courbes, a & c
 étant connus par le n. 6.

REMARQUE I.

122. Si l'on attache un fil ABC (Fig. 41) fixement
 en A & en C , & qu'un Corps B , pesant ou non, puisse
 couler librement le long du fil ABC , il est évident que
 ce Corps B décrira l'Ellipse MBN , dont A & C sont
 les foyers. Mais je dis, de plus, qu'il la décrira de la
 même manière que s'il n'étoit pas attaché au fil, & qu'il
 descendit librement dans la cavité de cette Ellipse. Car
 lors qu'il se meut librement dans l'Ellipse, la direction du
 Mouvement qu'il perd à chaque instant, est une perpendi-
 culaire à l'Ellipse au point où est le Corps. Mais lorf-
 qu'il se meut le long du fil ABC , la direction du Mouve-
 ment qu'il perd à chaque instant, est la ligne BF qui divise
 en deux également l'angle ABC , & cette ligne BF est
 comme l'on fait par les Sections coniques, perpendiculai-
 re à l'Ellipse MBN en B . Donc &c.

REMARQUE II.

123. Si un fil $AMBNC$ fixe en A & en C (Fig. 42) passe à travers un Corps $KRBGL$ qui puisse couler librement dans ce fil, & que toutes les parties de ce Corps $KRBGL$ soient animées de vitesses telles, qu'il soit en équilibre, je dis que la force résultante doit avoir pour direction la ligne GR qui coupe en deux également l'angle AGC , fait par les lignes AK , CL prolongées. Autrement le Corps RKG , glisseroit ou vers A ou vers C , & par conséquent il n'y auroit point équilibre, ce qui est contre la supposition.

D'après cette remarque, il est aisé de trouver la Courbe que décrivent les points K , L , & la vitesse de chacun de ces points, lorsque le Corps a reçu une impulsion quelconque. Car il y a pour chaque instant quatre inconnues à trouver, savoir les directions des points K & L , & leurs vitesses. Or il faut que ces directions & ces vitesses soient telles, que $AK + CL$ fasse une quantité constante, aussi-bien que la distance KL : de plus, les forces perdues doivent être tellement dirigées pour chacun des points du Corps KRL , que la résultante ait pour direction GR ; cette dernière condition produit deux Equations. Car regardant la force perdue par chaque particule, comme composée de deux autres; l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à GR , il faut que la somme de ces dernières soit zero, & que la direction de la force résultante des autres soit GR ; on aura donc en tout quatre

Equations & quatre inconnues, & le Problème sera résolu. Je n'en donne point le calcul, parce qu'on imagine bien qu'il est trop long & très-compiqué, & qu'il suffit ici d'en présenter l'esprit.

SCOLIE GENERAL.

124. Je ne finirai point cette matière, sans faire ici une observation assez importante sur la solution des Problèmes, dans lesquels on suppose que les Corps se tiennent par des fils. Comme les fils sont supposés inextensibles, les Corps ne peuvent jamais se trouver à une distance l'un de l'autre, plus grande que la longueur qui les sépare; mais rien n'empêche qu'ils ne puissent se trouver à une distance plus petite que cette même longueur. Ainsi, deux Corps étant, par exemple, attachés aux deux extrémités d'un fil, si on leur donnoit des Mouvements tels, qu'ils pussent suivre ces Mouvements sans que le fil s'allongeât, il est évident qu'ils suivroient ces Mouvements précisément de la même manière, que s'ils étoient libres, & qu'il n'y auroit alors aucun Problème à résoudre. Aussi ne pourroit-on pas appliquer à ces sortes de cas le Principe général dont nous nous sommes servis jusqu'ici: car si on vouloit faire usage de ce Principe, on trouveroit que les Mouvements par lesquels les Corps devroient se faire équilibre, au lieu de tendre à allonger le fil, tendroient au contraire à en rapprocher les extrémités; & qu'ainsi, puisque le fil ne fait aucune résistance à ce dernier effort, ces Mouvements ne pourroient être détruits.

En

En général, quand les Corps se tiennent par des fils, le moyen de s'assurer si les fils doivent rester toujours tendus, c'est de voir si en les supposant tels, les forces qui doivent faire équilibre, ont des directions qui tendent à allonger le fil. Si cela est, on aura eu raison de supposer que les fils ne se plioient point ; sinon les Corps seront mûs précisément comme s'ils étoient libres, & qu'ils ne fussent pas joints ensemble. On n'a pas besoin de prendre toutes ces précautions, quand les Corps se tiennent par des verges inflexibles auxquelles ils sont fixement attachés. Car leur distance est toujours nécessairement égale à la longueur de la verge qui les sépare, & ne peut être ni plus grande ni plus petite. Aussi la remarque que nous venons de faire sur le cas où les Corps se tiennent par des fils seroit inutile, si au lieu d'être joints par des fils, ils l'étoient par des verges inflexibles unies ensemble par des charnières. Il y a, au reste, une analogie parfaite entre ce dernier cas & celui des fils. Car, quand les Mouvements imprimés à des Corps unis par des fils sont tels, que les fils par leur inextensibilité puissent les altérer, il arrive précisément à ces Mouvements le même changement, que si les fils étoient des verges inflexibles jointes ensemble par des charnières.



§. IV.

Des Corps qui se poussent ou qui se choquent.

P R O B L Ê M E IX.

125. Un Corps dont la masse est m , & la vitesse u se mouvant sur une même ligne avec un autre Corps dont la masse est M & la vitesse U , trouver la vitesse de ces Corps après le choc.

Soit v la vitesse du premier Corps après le choc, V celle du second : on fera (art. 23) $u = v + u - v$ & $U = V + U - V$. Il faut par notre Principe, que $V = v$ & que $m(u - v) + M(U - v) = 0$. Donc v ou V

$$= \frac{mu + MU}{M + m}.$$

C O R O L L A I R E.

126. Si un Corps M de masse quelconque animé d'une vitesse donnée U est choqué par un Corps m infiniment petit, dont la vitesse soit u , il recevra par ce choc une quantité de Mouvement $=$ à $m(u - U)$, & si u est infiniment plus grande que U , la quantité de Mouvement qu'il recevra sera égale à mu , c'est-à-dire à la quantité de Mouvement du Corps choquant. On voit par-là, que quand le Mouvement d'un Corps est accéléré ou retardé par une puissance impulsive, dont il reçoit, pour s'en dire, à chaque instant des coups réitérés; la quantité de Mouvement que le Corps perd ou gagne à chaque inf-

tant, ne doit être regardée comme proportionnelle à la puissance impulsive, qu'en regardant cette puissance comme une masse infiniment petite, animée d'une vitesse infinie par rapport à la vitesse du Corps poussé. En ce cas, l'effet de cette puissance est toujours le même, soit que le Corps se meuve ou qu'il soit en repos.

R E M A R Q U E.

127. C'est ici le lieu de prouver ce que nous avons avancé plus haut, (art. 19.) que le Principe des forces accélératrices proportionnelles à l'Elément de la vitesse, ne doit point être employé pour déterminer les Mouvements qui résultent de l'impulsion. En effet, supposons, par exemple, qu'un Corps vienne en choquer un autre en repos, la quantité de Mouvement gagnée par le choqué, fera $\frac{m u M}{M + m}$. Il faudroit donc que la cause productrice de

ce Mouvement fût proportionnelle à $\frac{m M u}{M + m}$. Mais 1^o.

comment peut-on prouver que la cause motrice du Corps

M est proportionnelle à $\frac{M m u}{M + m}$, plutôt qu'à une autre

fonction quelconque des grandeurs M, m, u ? Ne seroit-il pas même assez naturel de penser que $m u$ pourroit être regardé comme proportionnelle à la cause motrice, ce qui ne manqueroit pas d'induire en erreur, puisque la quantité de Mouvement du Corps M n'est point com-

me mu , toutes choses d'ailleurs égales. 2°. Quand on fauroit que la cause motrice est proportionnelle à $\frac{Mmu}{M+m}$, on ne pourroit en conclure rien autre chose, sinon que la quantité de Mouvement du Corps M regardée comme son effet, seroit proportionnelle à $\frac{Mmu}{M+m}$, sans savoir si elle seroit précisément cette quantité même. Il faut donc nécessairement employer d'autres Principes, pour déterminer la quantité absolue de Mouvement du Corps choqué.

L E M M E IX.

128. Soit sur un plan QR un Corps $AKQR$ (Fig. 43) de figure quelconque, qui puisse glisser librement sur ce plan de Q vers R , ou de R vers Q , & soit un Corps quelconque M , placé sur KQ en tel endroit qu'on voudra; supposons que le Corps $AKQR$ ait suivant RQ une vitesse quelconque, & que le Corps M ait une vitesse & une direction telle qu'il fasse équilibre au Corps $AKQR$: Je dis que cela ne peut arriver 1°. que MO perpendiculaire à KQ ne soit la direction du Corps M . 2°. Que la force du Corps M suivant MO , & la force du Corps $AKQR$ suivant RQ , ne se réduisent à une seule force dont la direction soit perpendiculaire au plan QR .

C O R O L L A I R E.

129. Donc la force du Corps M doit être à celle du Corps $AKQR$, comme GL est à LS .

S C O L I E.

130. La direction de la force résultante de celles des deux Corps, doit être nonseulement perpendiculaire au plan, mais passer par la base QR . D'où l'on voit que si on mène par le centre de gravité de la figure $AKQR$ une droite parallèle à QR , cette droite doit couper la ligne MO en un point, d'où l'on puisse mener une perpendiculaire qui tombe sur QR .

P R O B L È M E ^A X.

131. Supposant le Corps M animé d'une force accélératrice quelconque perpendiculaire à la base QR , & le reste comme dans le Lemme précédent, on demande le Mouvement du Corps M & de la figure.

Soient $AB, B\mathcal{C}$ (Fig. 44) deux côtés consécutifs de la figure, tels que $AB = BV$, & supposons que tandis que le Corps M parcourt AB , la figure ait parcouru Aa ; en sorte que les côtés $AB, B\mathcal{C}$ soient parvenus dans la situation $aB, B\mathcal{D}$: soit $a\alpha = Aa$, $Bb = AB$, & enfin la ligne $b\delta$, celle que le Corps M parcourroit en vertu de sa force accélératrice: les lignes $a\alpha, B\delta$ seroient celles que les deux Corps parcourroient dans l'instant suivant, sans leur action mutuelle. Au lieu de ces lignes ils parcourront, l'un, la ligne Aa , l'autre, la ligne Bz , terminée par le côté bz parallèle à βd ; & il faut par notre Principe, que la masse du Corps M animée de la

vitesse δz fasse équilibre à la masse m de la figure, animée de la vitesse aa . D'où il s'ensuit, qu δz doit être perpendiculaire à bz , & que $m \cdot aa : M \cdot z\delta :: ib : z\delta$. donc $m \cdot aa = M \cdot ib$. mais $ib = kz - bo - aa$ & $aa = d(aa)$. donc si on nomme Aa, du, BK, dy , on aura $m ddu = M ddy - M ddu$, ou $ddu \cdot (M + m) = M ddy$. Equation générale & fort simple pour trouver le Mouvement des deux Corps, quelle que soit la force accélératrice qui agisse sur le Corps M , pourvû que cette force soit toujours perpendiculaire à QR .

S C O L I E I.

132. Les Constantes qu'il faut ajouter dans l'intégration de l'Equation $M ddy = (M + m) \cdot ddu$ dépendent du premier dy & du premier du , qu'il est toujours facile de trouver. Par exemple, si la direction du Mouvement du Corps M en A (Fig. 45) est suivant la Tangente de la Courbe AB en A ; il faudra tirer la Tangente AP , & prendre $AO = \frac{PN \cdot M}{M + m}$ pour avoir le point O où la figure se trouvera, lorsque le Corps M fera en N .

Si le Corps M agit par sa seule force accélératrice sans aucune impulsion primitive, il faudra tirer AQ perpendiculaire à BD , & prendre $AO = \frac{NQ \cdot M}{M + m}$.

Au reste, il est clair par l'art. 70. que dans ce der-

nier cas , le centre de gravité commun des deux Corps descend dans une ligne droite verticale.

S C O L I E II.

133. On pourroit donner plusieurs autres solutions de ce Problème , qui toutes se terminent à donner l'Equation $Mddy = (M + m) . ddu$: j'ai préféré la solution qu'on vient de voir à toutes les autres , parce qu'elle est extrêmement simple.

Tous les Problèmes analogues à celui-ci qu'on pourra proposer , se résoudreont toujours par l'application de notre Principe , & il n'y aura de difficulté que dans le calcul.

L E M M E X.

134. Soient deux Spheres G, C , mues suivant GB, CD , (Fig. 46) avec des vitesses qui soient représentées par les lignes infiniment petites GB, CD ; il est clair que si $DB = CG$, c'est-à-dire si $DE = BF$, les Mouvements de ces deux Spheres ne se nuiront point l'un à l'autre ; d'où il s'ensuit qu'en général , pour que ces Spheres ne se nuisent point , il faut dans chacune que la vitesse du point touchant A suivant la perpendiculaire CAG aux deux Corps , soit la même de part & d'autre.

C O R O L L A I R E.

135. Si deux Corps de figure quelconque se touchent , alors en regardant comme une petite surface Spherique

leur point d'attouchement commun, on verra que pour que ces deux Corps ne se nuisent point, la vitesse du point d'attouchement estimée suivant une perpendiculaire aux deux surfaces en ce point, doit être la même pour chacun d'eux.

L E M M E XI.

136. *Si tant de Corps qu'on voudra viennent se choquer de manière, qu'en les supposant parfaitement durs & sans ressort, ils demeurent tous en repos après le choc; je dis que s'ils sont à ressort parfait, ils retourneront en arrière chacun avec la vitesse qu'il avoit avant le choc.* Car l'effet du ressort est de restituer en sens contraire à chaque Corps le Mouvement qu'il a perdu par l'action des autres.

C O R O L.

137. Donc, si tant de Corps durs qu'on voudra se choquent à la fois, & que a, b &c. soient leurs vitesses avant le choc, qui soient changées après le choc en a, b &c. alors regardant les vitesses a, b &c. comme composées des vitesses $a, a; b, b$; les vitesses de ces mêmes Corps après le choc, seront composées des vitesses $a, -a; b, -b$; &c.

Nous ne parlerons donc dans les Problèmes suivants que du choc des Corps durs, puisqu'on en déduit nécessairement les loix du Mouvement des Corps Elastiques.

Je n'examine point ici s'il y a des Corps parfaitement durs,

durs, c'est une question qui appartient plutôt à la Physique qu'à la Mécanique, & je ne suppose ici des Corps parfaitement durs, que comme on suppose d'ordinaire dans la Mécanique des Leviers inflexibles, des Machines sans frottement &c. Je suppose aussi comme une vérité d'Expérience, que le ressort rend à chaque Corps en sens contraire ce qu'il a perdu de Mouvement par le choc, sans examiner de quelle manière se fait cette restitution.

Comme il est assez bien prouvé que les Corps à ressort s'applatissent & se compriment par le choc, pour se rétablir ensuite dans leur première figure, on pourroit croire que ce n'est pas le véritable moyen de trouver les loix du Mouvement de ces Corps, que de les supposer incompressibles, comme nous faisons ici; & il est vrai que cette circonstance de plus ou de moins doit apporter à ces loix beaucoup de changement, comme nous le ferons voir plus bas. Quoi qu'il en soit, nous pouvons supposer à moins, que les Corps changent très-peu de figure, & que la compression aussi-bien que la restitution se fait dans un tems très-petit; en ce cas, le Mouvement après le choc sera sensiblement le même, que si on considéroit les Corps comme incompressibles. On résoudroit ces Problèmes exactement, si on savoit suivant quelle loi la figure du Corps change par la compression; mais on ne peut faire sur cela que des hypothèses.

P R O B L È M E X I.

138. *Supposons qu'un Corps A (Fig. 47) en vienne*
T.

choquer un autre BOQ en repos , suivant une direction AC qui ne passe pas par le centre de gravité M du Corps choqué , on demande le Mouvement de ces deux Corps après le choc.

Quelque Mouvement que prenne le Corps BOQ, il est certain (art. 64) que son centre *M* ira toujours en ligne droite après le choc, tandis que toutes ses parties tourneront autour de ce même centre. Il faut, de plus, par notre Principe, que si on imprimoit à ce Corps un Mouvement contraire à celui qu'il a reçu par le choc, il fit équilibre avec le Corps *A* animé du Mouvement qu'il a perdu par le choc.

C'est une proposition aisée à démontrer, que si le centre de gravité *M* d'un Corps se meut suivant une direction quelconque, & que ce Corps tourne en même tems autour de son centre, la direction de la force résultante sera parallèle à la direction du centre de gravité. Or la direction de cette force ne peut ici être autre que la ligne *CA* perpendiculaire à l'endroit du contact: donc le Mouvement du centre *M* doit être parallèle à *CA*. De plus, la vitesse de rotation doit être telle, qu'étant combinée avec le Mouvement du centre *M*, les Corps ne se nuisent point, c'est-à-dire qu'ils ayent dans le même sens une vitesse égale. Or abaissant la perpendiculaire *MN* sur *CA*, il est aisé de voir que le Mouvement du point touchant *A* suivant *AN*, est égal au Mouvement du point *N*. La difficulté se réduit donc à trouver la vitesse du point *M*, & la vitesse de rotation du point *N*.

Soit u la vitesse du Corps A avant le choc, u sa vitesse après le choc, α la vitesse de M , v la vitesse de rotation du point N , on aura 1°. $\alpha + v = u$. De plus, la force résultante des Mouvements des parties du Corps M en sens contraire, doit être égale à $A \cdot (u - u)$; or cette force doit être $= M \cdot \alpha$, & avoir pour direction la ligne CA ; on a donc 2°. $M \cdot \alpha = A \cdot (u - u)$: 3°. si on nomme p la somme des produits des parties du Corps M par le carré de leurs distances à M , on aura $\frac{vp}{MN} = M \cdot \alpha \cdot MN$. ces trois Equations serviront à trouver les inconnues α , v , u ; Ce *Q. F. Trouver.*

PROBLÈME XII.

139. Deux Corps sphériques A, a , (Fig. 48) attachés aux verges CA, Ca , fixes en C & en c , se choquant avec des vitesses données, trouver leurs vitesses après le choc; on suppose qu'avant le choc ils vont tous deux d'un même côté.

Soient u, v , les vitesses des centres A, a , avant le choc, u, v , les vitesses de ces mêmes centres après le choc. Par notre Principe, il faut que ces vitesses u, v soient telles, que les deux Corps ne se nuisent point, & que si leurs centres avoient les vitesses $u - u, v - v$, les deux Corps se fissent équilibre, c'est-à-dire que les points A, a , étant animés des vitesses $u - u, v - v$, il faut que la force du Corps A regardée comme réunie en A , & agissant suivant Aa , soit égale à la force du Corps a regardée comme réunie en a , & agissant suivant aA .

Si on mene les perpendiculaires CG , cg à Aa , la première de ces deux conditions donne $\frac{u \cdot CG}{CA} = \frac{v \cdot cg}{ca}$. De plus, si on nomme F la somme des produits des particules du Corps A par le quarré de leurs distances à C , & f la quantité analogue à celle-là pour le Corps a , la seconde condition donnera $\frac{F \cdot (u - u)}{AC \cdot CG} + \frac{f \cdot (v - v)}{ac \cdot cg} = 0$. de ces deux Equations, on tirera la valeur de u & celle de v .

C O R O L. I.

140. Si les Corps sont Elastiques, leurs viteſſes après le choc feront (*art.* 137.) $u + u - u$ & $v + v - v$. la ſomme des forces vives après le choc, fera $\frac{F}{AC^2} (2u - u)^2 + \frac{f}{ac^2} (2v - v)^2 = \frac{Fuu}{AC^2} + \frac{fv^2}{ac^2} + \frac{4F}{AC^2} (uu - uu) + \frac{4f}{ac^2} (vv - vv)$. Mais ſi on multiplie le premier de ces deux derniers termes par $\frac{CA}{CG} \times \frac{CG}{CA}$, & l'autre par $\frac{ca}{cg} \times \frac{cg}{ca}$, ce qui ne change point leur valeur, on verra qu'à cauſe de $\frac{u \cdot CG}{CA} = \frac{v \cdot cg}{ca}$, & de $\frac{F \cdot (u - u)}{AC \cdot CG} + \frac{f \cdot (v - v)}{ac \cdot cg} = 0$, ils ſe détruiſent mutuellement. Donc la ſomme des forces vives après le choc $= \frac{Fuu}{AC^2} + \frac{fv^2}{ac^2}$, c'eſt-à-dire que la ſomme des forces vives avant & après le choc, eſt la même.

COROL. II.

141. Si les lignes CA, ca sont parallèles dans l'instant du choc, il faudra faire $CG = CA; cg = ca$, & le reste comme ci-dessus. Ce dernier cas a été résolu par M. *Jean Bernoulli* le fils, dans le Tom. 7. des *Mémoires de Petersbourg*, en supposant les Corps Elastiques. Nos deux solutions sont fort différentes, quant à la Méthode & quant au résultat. Car dans le Mémoire de M. *Bernoulli*, les vitesses après le choc sont exprimées par des quantités radicales; ici on peut s'assurer aisément qu'il n'y aura point de radicaux: les quantités F, f , les seules qui puissent faire entrer des radicaux dans l'expression des vitesses, n'en contiennent point, puisqu'en nommant b, ℓ les rayons des Spheres A, a, CN, a, cn, a , on trouve

$$F = (aa + 2ab + \frac{7}{5} bb) . A, \& f = (a^2 + 2a\ell + \frac{7}{5} \ell\ell) . a.$$

Mais outre que la solution de M. *Bernoulli* n'est pas directe, étant appuyée sur le Principe de la conservation des forces vives, cette solution est fondée encore sur un autre Principe que je ne crois pas vrai. Ce Principe consiste à regarder le Corps A mû par la verge inflexible CA , comme si toutes ses parties se mouvoient d'un Mouvement égal à celui du centre A , & qu'en même tems le Corps A tournât sur son centre avec un Mouvement angulaire égal à celui de la verge. En conséquence la force du Corps A est la même selon lui, que s'il n'étoit point attaché à la verge, & que toutes ses parties eus-

sont une vitesse égale à celle de son centre, sans aucune rotation; ce qui me paroît contraire aux loix de la Mécanique. M. Bernoulli se contente de faire voir *art. XV.* de son Mémoire, que dans l'un & l'autre cas la quantité de Mouvement est la même, soit que le Corps tourne autour de *C*, ou que toutes ses parties se meuvent avec une vitesse égale à celle du centre *A*, ce qu'on ne peut lui contester. Mais dans une Sphere qui tourne autour d'un point fixe, la quantité de Mouvement & la force ne sont pas la même chose: il faut avoir égard de plus au bras de Levier par lequel chaque particule agit; c'est la somme des produits de chaque Elément par sa vitesse & par sa distance au point fixe, qui fait la force, & non pas seulement la somme des produits de chaque Elément par sa vitesse.

P R O B L È M E ^A XIII.

142. Deux Corps *A*, *B*, (Fig. 49) attachés aux fils *CA*, *GB* fixes en *C* & en *G*, venant à se choquer, trouver leurs Mouvements après le choc.

Soit *u* la vitesse du point *A* avant le choc pour tourner autour de *C*, laquelle vitesse est commune à toutes les parties du Corps *A*, soit outre cela *v* la vitesse du centre de gravité du Corps *A* avant le choc, pour tourner autour du point par où le Corps est suspendu. Soient de même *U* & *V* les vitesses qui dans le Corps *B* avant le choc sont analogues à *u* & *v*: qu'enfin ces vitesses après le choc soient changées en *u* & *v*, *U* & *V*, qui

doivent être telles, que les Corps A, B aillent de compagnie sans se nuire l'instant d'après le choc, & que s'ils n'avoient que les vitesses $u - u, v - v; U - U, V - V$; ils se fissent équilibre.

Toutes les parties du Corps A (Fig. 50) étant considérées comme animées de la vitesse $u - u$, on peut réduire tous leurs Mouvements à une seule force, dont la direction OK passera par le centre de gravité du Corps A , & fera perpendiculaire à CA prolongée vers L . De plus le centre de gravité du Corps A étant animé de la vitesse $v - v$ pour tourner autour de A , on trouvera (art. 112.) sans connoître la valeur de $v - v$, la direction NO de la force résultante. La force suivant OP que je suppose résulter des forces suivant OK, NO , doit s'anéantir : elle doit donc être telle, qu'on puisse la décomposer en deux autres, l'une suivant PL dans la direction de CA , l'autre suivant Pa perpendiculaire en a à l'endroit du contact des deux Corps. Or comme la position des points P, O , est donnée, par les lignes aP, CA, NO, KO , toutes données de position ; il s'ensuit que la direction OP de la force résultante des forces suivant OK & NO est aussi donnée, & qu'ainsi le rapport de ces forces suivant OK & NO est donné. Mais en nommant m la masse du Corps A , on a la force suivant $OK = m.(u - u)$, & celle suivant $NO = m.(v - v)$. Donc le rapport de $u - u$ à $v - v$ est donné : on trouvera par un raisonnement semblable, que le rapport de $U - U$ à $V - V$ est donné pour l'autre Corps. On pourra

donc des quatre inconnues $u, v, U \& V$ en chasser deux. On a, de plus, deux autres conditions à remplir, savoir que la force suivant Pa soit égale à celle qui agit pour l'autre Corps en sens contraire, & que, de plus, ces deux Corps aillent de compagnie l'instant d'après le choc, c'est-à-dire que la vitesse du point touchant a suivant Pa , soit la même pour l'un & pour l'autre : ces deux conditions donneront deux autres Equations qui serviront à trouver les deux inconnues restantes, & ces Equations ne passeront jamais le premier degré.

D'un Corps qui en choque plusieurs autres à la fois.

P R O B L È M E ^A XIV.

143. Supposons qu'un Corps sphérique A , (Fig. 51) mû suivant une ligne donnée AQ avec une vitesse donnée, rencontre à la fois les deux Corps en repos B, C , on demande les directions & les vitesses de ces trois Corps après le choc.

Soit $AN = u$ la vitesse du Corps A avant le choc; AR , sa direction cherchée après le choc, & $AU = v$ sa vitesse aussi après le choc; BZ, CX des vitesses que reçoivent les Corps B, C , (on suppose que toutes ces lignes AN, AV, BZ, CX qui représentent des vitesses, sont infiniment petites.)

La vitesse BZ du Corps B , & la vitesse AV du Corps A , doivent être telles, (art. 134.) que $VZ = AB$. De même la vitesse CX du Corps C , & la vitesse AV du Corps A doivent être telles, que $VX = AC$. De plus,
fi

Si dans l'instant du choc, on suppose le Corps A animé des Mouvements AV , VN , ou AV , Ap ; & les Corps B , C , animés des Mouvements égaux & contraires BZ , Bz ; CX , Cx ; il faut par notre Principe, que les Corps A , B , C , animés des Mouvements Ap , Bz , Cx , se fassent équilibre.

Soient les données $AQ = a$, $QS = T$, $QT = T$, & les inconnues $QR = t$, $AV = v$; on aura (en menant RO perpendiculaire à AS & Ro à AT) $\frac{RO}{AR}$

$$= \frac{(T-t) \cdot a}{\sqrt{a^2 + T^2} \cdot \sqrt{a^2 + t^2}}; \frac{Ro}{AR} = \frac{(T+t) \cdot a}{\sqrt{a^2 + T^2} \cdot \sqrt{a^2 + t^2}};$$

de plus, à cause de $VZ = AB$, on aura $BZ = \frac{AV \cdot AO}{AR}$

$$= v \left(\frac{\sqrt{a^2 + T^2}}{\sqrt{a^2 + t^2}} - \frac{(T-t) \cdot T}{\sqrt{a^2 + T^2} \cdot \sqrt{a^2 + t^2}} \right). \text{ On trouvera par un raisonnement semblable}$$

$$CX = v \left(\frac{\sqrt{a^2 + T^2}}{\sqrt{a^2 + t^2}} - \frac{(T+t) \cdot T}{\sqrt{a^2 + T^2} \cdot \sqrt{a^2 + t^2}} \right).$$

Mais si on mène du point V la perpendiculaire VP sur AN , on aura, à cause de l'équilibre, $A \cdot PN = B \cdot \frac{BZ \cdot AQ}{AS}$

$$+ C \cdot \frac{CX \cdot AQ}{AT}, \text{ \& } A \cdot VP = \frac{B \cdot BZ \cdot QS}{AS} + \frac{C \cdot CX \cdot QT}{AT}. \text{ En}$$

mettant dans ces Equations au lieu des lignes qui y entrent, leurs valeurs analytiques, on parviendra à déterminer u & t ; & on verra, si l'on veut en faire le calcul, qu'il n'y a jamais que des Equations lineaires à résoudre.

R E M A R Q U E I.

144. Je ne m'étends pas davantage sur la solution de ce Problème , & je ne cherche pas même à la simplifier , parce que l'on en trouve une très-belle solution dans le nouvel Ouvrage de M. *Mac-Laurin*. On peut , au reste , par notre Principe , trouver les loix du choc quand une boule en rencontre à la fois tant qu'on voudra ; problème qui a été résolu par M. *Jean Bernoulli* , mais par le Principe de la conservation des forces vives , & seulement pour le cas où les boules choquées sont égales & disposées semblablement de part & d'autre de la direction de la boule choquante. M. *Bougner* a aussi résolu ce Problème pour ce dernier cas seulement (*Journ. des Sav. Avr. 1728*) mais sans y employer le Principe de la conservation des forces vives. M. *Bernoulli* dans sa pièce sur le Mouvement , a tiré de la solution qu'il a donnée un grand nombre de très-belles conséquences sur le Mouvement des Corps dans les Fluides. Il y a entr'autres plusieurs Theorèmes qu'il n'a pas démontrés , & qui pourront trouver leur place dans un Traité sur les Fluides , que j'espère donner après celui-ci.

R E M A R Q U E II.

145. Au reste , quand on fait attention à la Nature du Problème général des Corps qui se choquent plusieurs à la fois , avec des vitesses & des directions données , on

peut rencontrer dans le détail plusieurs difficultés qu'il est bon d'éclaircir ici, & qui pourront nous donner lieu de faire sur les loix du choc des Corps, quelques observations nouvelles.

Supposons, par exemple, qu'une boule A (Fig. 52) mue suivant AL , rencontre à la fois les boules C, D, E, F semblablement situées de part & d'autre de la ligne AL ; que les boules F, E soient en repos, & que les boules C, D , aient parallèlement à AL une vitesse égale à celle du Corps A ; il est évident que le Corps A n'aura aucune action sur les boules C & D , & que tout se passera de la même manière, que si le Corps A ne touchoit que les boules E, F . Mais si les boules C, D avoient une vitesse moindre que celle du Corps A suivant AL ; alors le Corps A auroit de l'action sur ces boules, & il paroît d'abord qu'il doit communiquer du Mouvement à toutes les quatre.

Cependant voici une difficulté. Supposons que la vitesse des boules C & D avant le choc, ne soit que de très-peu moindre que la vitesse du Corps A : si elle n'est que très-peu augmentée après le choc, alors, comme les boules A, C, D , doivent aller de compagnie, la vitesse de la boule A ne sera que très-peu diminuée; de
us, les boules F, E devant aller aussi de compagnie avec la boule A , auront une vitesse qui sera à la vitesse du Corps A après le choc, comme le Cosinus de l'angle BAF au Sinus total, & qui par conséquent sera comme infiniment plus grande que la vitesse perdue par le

V ij

Corps A . Mais par notre Principe, le Corps A animé de la vitesse qu'il a perdue, doit faire équilibre aux Corps E, F, C, D , animés en sens contraire de ce qu'ils ont gagné de vitesses; or la vitesse perdue par le Corps A étant (*hyp.*) très-petite, ne sauroit faire équilibre aux vitesses finies des Corps E, F . Donc la vitesse des boules C, D , ne sauroit être de très-peu augmentée. Mais d'un autre côté si leur vitesse est augmentée d'une quantité qui ne soit pas très-petite, alors elles ne pourront aller de compagnie avec le Corps A , dont la vitesse doit nécessairement être diminuée.

On rencontre une nouvelle difficulté dans l'application du calcul à ce Problème. Car on trouve très-aisément les expressions des vitesses des cinq Corps après le choc, quoique suivant la remarque que nous venons de faire, il ne paroisse pas qu'il doive être facile de les trouver. Cependant le calcul est fondé expressément sur les deux conditions, que les cinq Corps aillent de compagnie après le choc, & qu'animés en sens contraire de ce qu'ils ont perdu ou gagné de vitesse, ils se fassent équilibre.

Mais si on examine de quelle manière le calcul satisfait à ces conditions, on verra que de la façon dont il les exprime, elles ne s'accordent pas toujours avec nature du Problème, & peuvent même conduire à une fausse solution, si on ne les applique comme il faut à la question proposée. Pour que les Corps, par exemple, aillent de compagnie après le choc, il faut que les vitesses

de ces Corps estimées suivant une perpendiculaire à l'endroit du contact, soient égales entr'elles, condition que le calcul exprime. Mais il faut, de plus, que ces vitesses soient dans le même sens ou dans des sens différens, selon l'exigence du cas : condition que le calcul n'exprime point, & ne peut exprimer. De même, pour qu'il y ait équilibre entre les Corps touchans F, C, D, E & le Corps A , il ne suffit pas que la somme des Mouvements de même part soit $= 0$, ce qui est la seule chose que le calcul exprime ; il faut encore que les Mouvements faisant équilibre, soient dirigés suivant AB, FA, CA, DA, EA .

Comme le calcul ne peut exprimer ces conditions, ce n'est qu'après avoir trouvé les valeurs & les directions des inconnues, qu'on peut voir si ces conditions sont remplies. Si toutes les conditions ne sont pas remplies, comme il arrive dans le cas dont il s'agit ici, c'est une marque qu'il y a de certains Corps dans le système qui ne souffrent rien de l'action des autres, & dont les Mouvements ne reçoivent aucun changement. Ainsi dans le cas présent, quoique les Corps C & D aient une vitesse moindre que la vitesse du choquant A , néanmoins ces Corps C & D ne recevront aucun changement, & tout se passera de la même manière, que si le Corps A choquoit les deux Corps E, F , seuls. En effet, les Corps C & D ne peuvent diminuer de vitesse par la rencontre du Corps A : ils ne peuvent non plus recevoir de vitesse par l'action du Corps A ; car comme on la vu ci-dessus, ces Corps ne peuvent aller de compagnie avec le Corps A

après le choc. Or il n'y aura point d'action entre les Corps A, C, D , s'ils ne vont pas de compagnie après le choc. En effet, quand il y a action entre deux Corps, leurs Mouvements peuvent toujours se réduire à des Mouvements dans le même sens pour chacun, par lesquels ils ne se nuisent point, & a des Mouvements contraires qui se détruisent. Or les Mouvements contraires ne peuvent se détruire, que les Mouvements dans le même sens ne soient égaux. Car si le premier Corps alloit plus vite que le second, il n'y auroit entre l'un & l'autre aucune action mutuelle possible.

R E M A R Q U E III.

146. Il n'en est pas de même, lorsque les Corps A, C, D, E, F sont des Corps à ressort. La vitesse du Corps A ne diminue que petit à petit & par des degrés insensibles, ainsi il ne peut manquer d'agir sur les Corps C, D , & par conséquent il doit nécessairement altérer leurs Mouvements. C'est pourquoi il faut bien se garder, pour trouver dans ce cas-là les vitesses après le choc, de se servir de la règle que nous avons donnée *art.* 137.

Cette réflexion m'en a fait faire une autre, c'est que pour les loix du choc des Corps à ressort qui se rencontrent plusieurs à la fois, cette même règle peut être souvent très-fautive.

Supposons, par exemple, les cinq Corps A, F, E, C, D , (Fig. 52) à ressort parfait, il se fait dans l'instant du choc une compression dans chacun de ces Corps,

telle que le Corps choqué reçoit à chaque instant en arrière suivant chacune des directions FA , CA , DA , EA une quantité de Mouvement infiniment petite, égale à celle que les Corps F , C , D , E reçoivent en avant : ces Corps s'applatissent ainsi de plus en plus, jusqu'à ce qu'enfin ils puissent aller de compagnie avec des vitesses, qui soient égales dans le même sens, pour lors ils commencent à se rétablir peu à peu, & perdent ou gagnent de nouveau des quantités de Mouvement égales à celles qu'ils ont déjà perdu ou gagné.

Mais comme nous ignorons entièrement suivant quelle loi le ressort produit l'accélération dans les Corps, nous ne pouvons savoir si les cinq Corps cessent d'être comprimés tous cinq au même instant ; & si, par exemple, les Corps C & D ne commencent pas à se rétablir, quoique les Corps E , F ne soient pas encore entièrement comprimés. En ce cas, les cinq Corps n'iroient point de compagnie après le choc, en supposant même que le ressort ne les rétablisse pas dans leur premier état. Or si cela étoit, il ne faudroit plus pour trouver le Mouvement des cinq Corps après le choc, se servir de la Méthode de l'art. 137, en regardant d'abord les cinq Corps comme durs ; car cette Méthode suppose formellement, que les cinq Corps (abstraction faite de leur ressort) aillent de compagnie après le choc.

Une raison qui donne lieu de douter que la compression finisse dans le même instant pour tous les cinq Corps, c'est qu'il y a nécessairement des cas où cela ne peut ar-

river, comme quand les Corps C & D sont supposés avoir une vitesse parallèle à AL , & qui soit de très-peu plus grande que celle du Corps A suivant AL .

S'il y a des cas où la compression des cinq Corps puisse finir en même tems, on conçoit qu'en changeant quelques circonstances, alors la compression pourra ne pas finir dans le même tems; par exemple, si la boule A rencontre quatre boules C, D, E, F , égales, & en repos, & que la compression dans ce cas-là finisse au même instant pour toutes les boules (ce qui ne peut pourtant être prouvé) on conçoit qu'en augmentant la masse des deux boules C & D , il pourra se faire que ces deux boules achevent d'être comprimées avant les deux boules E, F , ou ne le soient qu'après. Il est donc absolument nécessaire de chercher comment il faut s'y prendre dans ce cas, pour avoir les loix du choc. C'est ce qu'on va voir dans l'article suivant.

Du choc des Corps à ressort qui se rencontrent plusieurs à la fois.

147. Je regarde avec plusieurs Auteurs deux Corps A, B , à ressort qui se choquent, (Fig. 53. 54) comme s'ils étoient réduits à leurs centres de gravité A, B , & qu'il y eut un ressort placé entre deux, capable de contraction & de dilatation, ce qui représente la compression & restitution successive des deux Corps. De plus, comme la compression se fait en fort peu de tems, j'imagine que ce ressort ne se dilate & ne se contracte pas beaucoup,

coup, mais qu'étant très-peu contracté il a une très-grande force, & j'exprime cette force par une fonction de la quantité dont le ressort est contracté ou dilaté, c'est-à-dire que je suppose proportionnelle à cette fonction la petite quantité de Mouvement que l'un des Corps perd, & que l'autre reçoit à chaque instant : car ces deux quantités de Mouvement sont égales (*art.* 126) parce que le ressort tend à se débânder également en sens contraire, avec une vitesse qu'on doit regarder comme infinie par rapport à celle des deux Corps, sa masse étant infiniment petite par rapport à celles de ces mêmes Corps.

Cela supposé, si a , b (*Fig.* 54) sont les points où sont parvenus les Corps A, B , & qu'on nomme Aa, x, Bb, y , & t le tems écoulé, on aura — $Addx = \phi(x - y) \cdot dt^2$, & $Bddy = \phi(x - y) \cdot dt^2$; d'où l'on tire — $Addx = Bddy$, & $ndt - Adx = Bdy$, n étant un nombre constant, qu'on déterminera de la manière suivante; on supposera que a, b , soient les vitesses des Corps A, B , en A, B , on aura par conséquent lorsque x , & $y = 0$, $\frac{dx}{dt} = a$ & $dy = b dt$: donc $n = Aa + Bb$.

L'Equation intégrée donne $nt - Ax = By$, & par conséquent — $Addx = \phi(x - \frac{nt - Ax}{B}) dt^2$; si l'on fait $x - \frac{nt - Ax}{B} = u$, on aura (à cause de dt constant) — $\frac{ABddu}{B+A} = \phi u \cdot dt^2$, & — $\frac{ABduddu}{B+A} = dt^2 \cdot du \phi u$; d'où

X

l'on tire $A q dt^2 - \frac{A \cdot B du^2}{2 \cdot (B + A)} = dt^2 \int du \phi u$, &

$$dt = \frac{du \sqrt{B}}{\sqrt{[2 \cdot (B + A)] \cdot \sqrt{q - \frac{\int du \phi u}{A}}}}$$

148. Au reste, si je donne ici cette solution, ce n'est pas qu'elle soit nécessaire pour trouver le Mouvement des Corps A, B ; car dans cette hypothese il leur arrive précisément le même changement, que si la compression & la restitution se faisoient chacune dans un instant: & comme c'est principalement le Mouvement après le choc qu'on cherche, que d'ailleurs la loi d'accélération ou de retardation instantanée est inconnue, il est évident que la solution précédente ne peut jeter aucune lumière sur ce cas particulier; aussi n'est-elle ici que comme une introduction à des cas plus compliqués.

149. Dans la Figure 55. imaginons que les Corps A, C, D, E, F soient des points unis par des ressorts AC, AD &c. & cherchons simplement les vitesses des Corps A, F, C , parce que les Corps E, D doivent subir précisément les mêmes changemens que les Corps F, C ; supposons les Corps arrivés en a, f, c ; menant les perpendiculaires $a\phi, ax$, on aura $af = \phi f$ à cause que les lignes Aa, Ff sont très-petites, le ressort AF n'étant que très-peu compressible, comme nous l'avons supposé plus haut. Si on nomme p le Cosinus de l'angle BAF , r , celui de BAC ; on aura en faisant Aa, x, Ff, y, Cc, z ,
 $-A ddx = [2p\phi(px - y) + 2r\phi(rx - z)] dt^2$;

$Fddy = \phi(px - y) \cdot dt^2$; $Cddz = \phi(rx - z) dt^2$. Il y a cas où ces Equations peuvent être séparées en général, c'est celui où $\phi(px - y) = F(px - y)$; $\phi(rx - z) = G(rx - z)$ (G & F étant des Constantes); en ce cas-là, on peut trouver les valeurs de x , de y , & de z en t par la Méthode expliquée dans la solution du Problème 5 ci-dessus, où nous avons enseigné la manière de construire des Equations semblables. Le ressort cessera de se comprimer entre les Corps A, F , lorsque $pdx = dy$, & entre les Corps A, C , lorsque $rdx = dz$.

150. Lorsque le Corps A ne choque que deux Corps F, E semblablement situés de part & d'autre; ce qui arrive au Corps F devant également arriver au Corps E , il n'y a pas plus de difficulté, que si le Corps A ne choquoit que le seul Corps F , & tout se passe à peu près, comme si la compression & la restitution se faisoient en un instant; c'est pourquoi les calculs précédens sont alors fort peu nécessaires. Ils peuvent néanmoins servir à trouver exactement la vitesse du Corps A , & le chemin du Corps F , qui se meut, non suivant la droite Ff , comme nous l'avons supposé, & comme on peut le supposer sans erreur, mais sur une très-petite Courbe.

Les Equations qu'on trouve d'abord, en supposant que F se meuve suivant Ff , & que $af = \phi f$, sont — $Addx = 2p\phi(px - y) \cdot dt^2$, & $Fddy = \phi(px - y) dt^2$. d'où l'on tire comme dans l'art. 147. la valeur de x & de y en t . Mais si on nomme $f\theta$, (Fig. 56) s , on aura de plus la force suivant $f\theta =$ à la force suivant af

multipliée par $\frac{fo}{ol}$, c'est-à-dire par $\frac{a\phi}{FA}$ ou par $\frac{x\sqrt{1-p^2}}{a}$,
 (en appellant FA) a , & l'on prendra au lieu de $px - y$,
 la quantité plus exacte $px - y + \frac{(1-p^2)}{2a} \cdot x^2$, parce que
 $ao - AF$ (en négligeant les différences troisièmes), est
 $Ax - Ff + \frac{ax^2}{2FA}$. Ainsi on déterminera d'abord les va-
 leurs de x & de y en t , par le moyen des Equations
 $-Addx = 2p \cdot \phi(px - y) dt^2$, & $Fddy = \phi(px - y) dt^2$;
 on remarquera ensuite, que dans la première de ces Equa-
 tions, au lieu de $2p$, double du Cosinus de l'angle BAF ,
 il faut mettre le double du Cosinus de l'angle Bal ,
 qu'on trouvera $= p - \frac{x\sqrt{1-p^2}}{a} \cdot \sqrt{1-p^2}$; on met-
 tra enfin pour x , $x + u$, pour $y = y + q$, u & q exprimant
 des quantités très-petites, par rapport à x & à y , & l'on au-
 ra $Fddy + Fddq = * \phi(px + pu - y - q + \frac{(1-p^2) \cdot x^2}{2a}) dt^2$;
 $-Addx - Addu = [2p - \frac{2x \cdot (1-p^2)}{a}] \times$
 $\phi(px + pu - y - q + \frac{(1-p^2) \cdot x^2}{2a}) dt^2$;
 & $Fdds = \frac{x\sqrt{1-p^2}}{a} \times \phi(px - y) dt^2$. Soit en géné-

* Nous supposons ici que la force suivant Ff est la même que la force sui-
 vant ao , parce qu'elles ne diffèrent l'une de l'autre que d'une quantité infini-
 ment petite du *second* ordre, & que nous n'avons égard ici qu'aux quantités
 infiniment petites du *premier* ordre, négligées dans le premier calcul.

ral $d(\phi a) = da \Delta a$ (a exprimant une variable quelconque l'on aura au lieu des deux premières Equations,

$$Fddq = dt^2 \cdot (pu - q + \frac{(1-p^2) \cdot x^2}{2a}) \cdot \Delta(px - y);$$

$$- Addu = 2pdt^2 (pu - q + \frac{(1-p^2) x^2}{2a}) \Delta(px - y)$$

$$- \frac{2xdt^2 \cdot (1-p^2)}{a} \phi(px - y). \text{ d'où l'on tire } Fddq =$$

$$\frac{2xdt^2 \cdot (1-p^2)}{a} \phi(px - y) - \frac{Addu}{2p} : \text{or comme } x \text{ \& } y \text{ sont}$$

déjà données en t , on aura par l'intégration de cette dernière Equation, la valeur de u en q & t , qu'on pourra exprimer ainsi $u = Rq + T$, R exprimant une Constante, & T une fonction de t ; il faudra donc savoir intégrer l'Equation

$$Fddq = [(pR - 1) \cdot q + pT + \frac{(1-p^2) \cdot x^2}{2a}] dt^2 \Delta(px - y)$$

ou en général $ddq = Nqdt^2 \Psi t + dt^2 \Gamma t$, N exprimant une Constante, & Ψt , Γt des fonctions de t . Cette Equation peut s'intégrer par une Méthode semblable à celle qui a déjà été expliquée dans l'art. 101, en prenant q égale au produit de deux indéterminées. A l'égard de

$$\text{l'Equation } Fdds = \frac{x \sqrt{1-p^2}}{a} \times dt^2 \phi(px - y), \text{ com-}$$

me x & y sont données en t , tout le monde voit que son intégration est fort simple.

151. Il suit de ce que nous venons de dire, que quand le Corps A choque deux Corps à ressort C, D , (Fig. 55) également situés de part & d'autre de la direction AB du Corps choquant, les vitesses de ces trois Corps après le choc, sont, sinon exactement, au moins à peu près les mêmes, que si la compression & la restitution du ressort se faisoit dans un instant. Il n'en seroit pas de même, si les boules choquées n'étoient pas semblablement situées de part & d'autre de la boule choquante.

En effet, supposons que la boule dure A mue suivant AB (Fig. 57) rencontre les boules dures & en repos C, D , avec une vitesse représentée par Aa ; supposons, de plus, que cette boule A ne change point de direction après le choc, & que Aa soit sa vitesse, on aura (en faisant les parallélogrammes $AnaX, Apai$, & menant les lignes ax, ad , perpendiculaires à AC, AD) $C . Ax = A . iX$; & $D . Ad = A . np$: donc $iX:np::C . Ax:D . Ad$. c'est-à-dire que comme na est à An , ainsi le Cosinus de l'angle BAC , multiplié par C , doit être au produit du Corps D par le Cosinus de l'angle BAD . Donc le produit du Corps C par le Sinus de l'angle BAC , & par son Cosinus, doit être égal au produit du Corps D par le Sinus de l'angle BAD , & par son Cosinus.

Si les Corps D & C sont égaux, on aura le produit du Sinus d'un des angles par son Cosinus, égal au pro-

duit du Sinus de l'autre angle par son Cosinus, ce qui ne peut arriver, à moins que les angles ne soient complément l'un de l'autre à 90 degrés, & qu'ainsi l'angle DAC ne soit droit. On aura pour lors $Ai : Ax :: Ap : Ad$. Donc, si on suppose la ligne Aa infiniment petite, on voit que dans le cas où les trois Corps A, C, D , sont à ressort, si l'action des ressorts aC, aD , n'est pas comme les lignes Ax, Ad , le point A sera écarté de la ligne droite Aa dès le premier instant, & qu'ainsi les loix du choc entre ces trois Corps seront fort différentes de ce qu'elles seroient, si la compression & la restitution se faisoient en un instant.

152. Soit en général AB (Fig. 58) la direction du Corps choquant, Aa la Courbe qu'il décrit pendant la compression & la restitution du ressort, $Ai = x$, $ai = z$, $Cc = y$, $Dd = u$, le Cosinus de $DAC = r$, on aura $Ax - Cc = x + rz - y$, & $Ad - Dd = z + rx - u$, & l'on trouvera $-Addx = \phi(x + rz - y) \cdot dt^2$; $-Addz = \phi(z + rx - u) dt^2$; $Cddy = \phi(x + rz - y) dt^2$, $Dddu = \phi(z + rx - u) dt^2$; d'où l'on tire $-Addx = Cddy$, & $at - Ax = Cy$, & de même $-Addz = Dddu$, & $et - Az = Du$. On aura donc (en mettant dans les deux premières Equations, pour y & u leurs valeurs) deux Equations où il ne restera plus que deux inconnues, & qui pourront se construire par les Méthodes expliquées ci-dessus, si $\phi(x + rz - y) = F.(x + rz - y)$ & si $\phi(z + rx - u) = G.(z + rx - u)$.

153. Soient deux Corps A, a , (Fig. 59) unis par un ressort Aa , qui se choquent suivant AD, ad , de manière que leur centre de gravité C resteroit en repos, s'ils pouvoient se mouvoir suivant AD, ad ; ces deux Corps décriront deux Courbes semblables ag, AG pendant le tems de la compression, & la compression finira lorsque Gg sera perpendiculaire à chacune des Courbes; ensuite pendant la restitution du ressort, ils décriront les Courbes GF, gf semblables aux premières, d'où l'on voit que leur Mouvement après le choc sera le même, que si la compression & la restitution se faisoit dans un instant. Cela est vrai en général, lorsque deux Corps à ressort viennent se choquer d'une manière quelconque; car il est aisé de voir que le Mouvement de leur centre de gravité ne changeant point par leur action mutuelle, il n'y a qu'à chercher quels seroient leurs Mouvements après le choc, s'ils venoient se frapper de manière que leur centre de gravité fut en repos, & donner ensuite à tout le système le Mouvement du centre de gravité.

Si les deux Corps étoient mous, leurs vitesses après le choc ne seroient pas les mêmes que s'ils étoient durs. Car dans le cas de la dureté des deux Corps, les vitesses avant le choc seroient aux vitesses après le choc, comme Cd à Ca , & dans le cas où ils seroient mous, c'est-à-dire où le ressort se comprimerait sans se rétablir, les mêmes vitesses seroient comme Cd à Cg : or $Cg < Ca$. Donc &c.

CHAPITRE

CHAPITRE IV

Du Principe de la conservation des forces vives.

154. **S**I des Corps agissent les uns sur les autres, soit en se tirant par des fils ou des verges inflexibles, soit en se poussant, pourvû qu'ils soient à ressort parfait dans ce dernier cas, la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses, fait toujours une quantité constante; & si les Corps sont animés par des puissances quelconques, la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses à chaque instant, est égale à la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses initiales, plus les quarrés des vitesses que les Corps auroient acquis, si, étant animés par les mêmes puissances, ils s'étoient mûs librement chacun sur la ligne qu'il a décrit. C'est dans ces deux Principes que consiste ce qu'on appelle *la conservation des forces vives*.

M. *Hughens* est le premier, que je sache, qui ait fait mention de ces deux Principes, & M. *Bernoulli* le premier qui en ait fait voir l'usage, pour résoudre élégamment & avec facilité plusieurs Problèmes de Dynamique. J'entreprends de donner dans ce Chapitre, sinon une démonstration générale pour tous les cas, au moins les Principes suffisans pour trouver la démonstration dans chaque cas particulier.

155. Imaginons d'abord deux Corps *A*, *B*, (Fig. 60)

Y

d'une étendue infiniment petite, attachés à la verge inflexible AB ; & supposons qu'on imprime à ces Corps des directions & des vitesses quelconques, représentées par les lignes infiniment petites AK, BD . Il faut par notre Principe, faire les parallélogrammes MC, NL , tels que $LC = AB$, & $B \times BM = A \times AN$; BC & AL seront les vitesses & les directions des Corps B & A . Or $BC^2 = BD^2 - 2CE \times CD - CD^2$, & $AL^2 = AK^2 + 2PL \times KL - KL^2$. donc $B \cdot BC^2 + A \cdot AL^2 = A \cdot AK^2 + B \cdot BD^2 + A(2PL \cdot KL - KL^2) - B(2CE \cdot CD + CD^2)$ qui se réduit à $A \cdot AK^2 + B \cdot BD^2 + A \cdot KL^2 - B \cdot CD^2$, à cause que $CE = PL$ & $A \cdot KL = B \cdot CD$.

On a donc $B \cdot BC^2 + A \cdot AL^2 = A \cdot AK^2 + B \cdot BD^2 + A \cdot KL^2 - B \cdot CD^2$.

COROLLAIRE I.

156. Si NA, BM sont infiniment petites, c'est-à-dire si les vitesses AL, BC , ne diffèrent qu'infiniment peu des vitesses AK, BD , la conservation des forces vives aura lieu. Car négligeant dans l'Equation les lignes KL, CD , on aura $B \cdot BC^2 + A \cdot AL^2 = A \cdot AK^2 + B \cdot BD^2$.

COROL. II.

157. Si NA, BM ne sont pas infiniment petites, & qu'on fasse $CF = CD$; $LO = LK$, & en sens contraire, il est aisé de prouver que $BF^2 = BD^2 - 4CE \cdot CD$, & $AO^2 = AK^2 + 4PL \times KL$. Donc $B \cdot BF^2 + A \cdot AO^2$

$$\begin{aligned}
 &= B (BD^2 - 2BM \cdot 2CE) + A (AK^2 + 2 \cdot AN \cdot 2PL) \\
 &= B \cdot BD^2 + A \cdot AK^2, \text{ parce que } CE = PL \text{ \& } A \cdot AN \\
 &= B \cdot BM.
 \end{aligned}$$

Donc la conservation des forces vives a encore lieu ici. Mais, si l'on y fait attention, ce cas est précisément celui du choc de deux Corps Elastiques (*art.* 137.)

De la conservation des forces vives dans les Corps qui se tirent par des fils ou par des verges inflexibles.

158. Nous avons vu dans l'article précédent, que si deux Corps sont attachés au bout d'une verge inflexible, & qu'on leur donne à chacun une vitesse quelconque, la conservation des forces vives n'a lieu que quand les vitesses qu'ils prennent diffèrent infiniment peu des vitesses qu'ils ont reçues. Or la vitesse initiale réelle de chacun de ces Corps, peut différer d'une quantité finie de celle qu'on a imprimé à chacun suivant une direction quelconque. Mais quand ils ont une fois commencé à se mouvoir chacun sur sa Courbe, leur vitesse ne varie qu'infiniment peu d'un instant à l'autre. Ainsi dans le cas de *l'art.* 155. la somme des produits de chaque masse par le quarré de sa vitesse est toujours égale, non à la somme des produits de chaque masse par le quarré de la vitesse imprimée à chacune au premier instant, mais par le quarré de la vitesse initiale réelle de chacune.

159. Il faut donc présentement démontrer en général, que si des Corps se meuvent en se tirant par des fils ou

par des verges inflexibles , & que la vitesse de chacun ne varie à chaque instant qu'infiniment peu , la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses sera constante , si les Corps ne sont animés d'aucune puissance accélératrice , & que dans ce dernier cas , elle sera égale à la somme des effets des forces motrices pour chaque Corps.

Or, j'observe d'abord, que le second de ces deux cas suit immédiatement du premier; c'est-à-dire que le premier étant supposé vrai, le second l'est aussi nécessairement. Car supposons deux Corps A, a , (Fig. 61) attachés l'un à l'autre par la verge Aa , & animés par des puissances motrices dirigées suivant les lignes quelconques EF, ef , dont la position à chaque instant soit telle qu'on voudra; que BA, ab soient les lignes que ces Corps ont décrites pendant un même instant, & qui peuvent par conséquent représenter leurs vitesses. Si chacun de ces Corps étoit libre, ils décriroient dans l'instant suivant les lignes AO, ao , égales & en ligne droite avec AB, ab ; & supposant que AD, ad , représentassent l'effet des puissances motrices pendant cet instant, leurs vitesses seroient changées en AN, an , & menant les perpendiculaires BC, bc sur AC, ac , on auroit $AN^2 = AB^2 + 2 \cdot AD \cdot AC$. & $an^2 = ab^2 + 2 \cdot ad \cdot ac$; mais comme les vitesses AB, ab , sont les vitesses réelles que les Corps ont dans le premier instant, & que les vitesses AN, an n'en diffèrent qu'infiniment peu, ces mêmes vitesses AN, an ne différeront qu'infiniment peu des vitesses

dans lesquelles elles seront changées par l'action réciproque des deux Corps. Donc, si on nomme V, v , les vitesses AB, ab ; U, u , les vitesses des Corps A, a au second instant, c'est-à-dire les vitesses qu'ils ont au lieu de AN, an , on aura $A \times UU + a \cdot uu = A \cdot AN + a \cdot an^2 = A (AB^2 + 2 AD \cdot CA) + a (ba^2 + 2 ad \cdot ca) = A \cdot VV + a \cdot vv + 2 A \cdot AD \cdot CA + 2 a \cdot ad \cdot ca$. Donc $A(UU - VV) + a(uu - vv) = 2 A \cdot AD \cdot CA + 2 a \cdot ad \cdot ca$, c'est-à-dire $2 AV dV + 2 audu = 2 A \cdot AD \cdot CA + 2 a \cdot ad \cdot ca$, ou $AVV + auu = \int 2 A \cdot AD \cdot CA + \int 2 a \cdot ad \cdot ca$. Mais si les Corps A, a , se mouvoient librement sur les Courbes GA, ga , il est clair que $\int 2 A \cdot AD \cdot CA$ seroit l'effet de la force motrice de A depuis G jusqu'en A , & de même $\int 2 a \cdot ad \cdot ca$ l'effet de la force motrice de a depuis g jusqu'en a . Donc &c.

Il est clair que cette démonstration peut s'étendre à tel nombre de Corps qu'on voudra, & que tout ce qu'on y a supposé, c'est que si la vitesse ne varie qu'infinitement peu d'un instant à l'autre, & que les Corps ne soient point animés de forces accélératrices, la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses fait toujours une somme constante. C'est donc ce qui nous reste à démontrer en général. Pour cela nous avons besoin des Lemmes suivans.

LEMME XII.

160. Soit un parallélogramme quelconque $BVbN$;
Y *ijj*

(Fig. 62) je dis, que si par un de ses angles quelconques B , on tire à volonté la ligne BD de grandeur & de position quelconque, & du point D on tire les perpendiculaires Dn , DK , DG sur Bb , BV , BN prolongées; on aura $Bb \cdot Bn = BV \cdot BK + BN \cdot BG$.

D É M O N S T R A T I O N.

Des points N, V, b soient menées les perpendiculaires NE, VF, bH , sur BD prolongée; on peut regarder les côtés BV, BN comme représentant des puissances décomposées chacune dans les deux BF, VF ; & BE, EN , & de même la Diagonale Bb comme une puissance décomposée dans les deux BH, bH . Donc, puisque la puissance Bb équivaut aux deux BN, BV , on aura $BE + BF = BH$: or à cause des triangles semblables bHB, BDn , on a $Bb \times Bn = BD \times BH = BD \times BE + BD \times BF = BN \cdot BG + BV \cdot BK$. Ce Q. F. D.

R E M A R Q U E.

161. On voit aisément, que selon la position des points E, F l'un par rapport à l'autre & par rapport au point H ; il faudra au lieu de la somme des produits $BN \cdot BG$, & $BV \cdot BK$ prendre leur différence, & la faire égale à $Bb \cdot Bn$.

De la conservation des forces vives quand les Corps, regardés comme des points, se tiennent par des fils.

162. Imaginons que trois Corps A, B, C , (Fig. 63)

soient attachés au fil ABC , & qu'on imprime à ces Corps les vitesses Aa , Bb , Cc , qu'ils soient forcés de changer par leur action mutuelle dans les vitesses AA , BD , CC , qui seront telles, que $AD = AB$; $DC = BC$, il faudra regarder par notre Principe les vitesses Aa , Bb , Cc , comme composées des vitesses AA , BD , CC ; & des vitesses Aa , Bb , Cc par lesquelles seules les Corps A , B , C , se feroient équilibre; il faut donc prouver que $A \cdot AA^2 + B \cdot BD^2 + C \cdot CC^2 = A \cdot Aa^2 + B \cdot Bb^2 + C \cdot Cc^2$, c'est-à-dire que $A \cdot Aa \cdot AQ - B \cdot Bb \cdot BN \cdot BG + B \cdot Bb \cdot BV \cdot BK - C \cdot Cc \cdot CM = 0$. Or $CM = BK$ & $C \cdot Cc = B \cdot Bb$. à cause de l'équilibre. De même $AQ = BG$ & $A \cdot Aa = B \cdot Bb$. Donc &c.

Si au lieu du Corps A on supposoit un point fixe autour duquel les Corps B , C tournassent, on auroit $AQ = 0$; $BG = 0$, & la proposition seroit encore vraie. Il est visible par la nature de la démonstration précédente, qu'elle est générale pour tel nombre de Corps qu'on voudra.

Si le point B n'étoit pas fixe en sa place, mais pouvoit couler librement le long du fil, alors Bb diviserait l'angle ABC en deux également, & on auroit $A \cdot Aa = B \cdot Bb$; $B \cdot BV = C \cdot Cc$, & $B \cdot Bb = B \cdot BV$. & enfin $AQ - BG = BK - CM$, parce que $AD + DC = AB + BC$. donc $A \cdot Aa \cdot AQ - B \cdot Bb \cdot BN \cdot BG + B \cdot BV \cdot BK - C \cdot Cc \cdot CM = 0$.

On voit donc, ce me semble, que la conservation des forces vives a lieu dans tous les cas possibles, quand les

Corps ne sont regardés que comme des points, & se tiennent par des fils.

L E M M E XIII.

163. Soient trois Corps A, B, C , animés des vitesses AQ, BR, Cc , (Fig. 64) & en équilibre sur un Levier de figure quelconque; & soient AB, BC les distances de ces Corps l'un à l'autre. Imaginons le Levier dans une autre situation quelconque infiniment proche de celle-là, & que les points F, G, E , soient alors le lieu des Corps A, B, C , desorte que $FG = AB$; $GE = BC$: je dis qu'en menant les perpendiculaires GK, FX, EZ , on aura $B.BR.BK = A.AQ.AX + C.Cc.CZ$.

D É M O N S T R A T I O N.

Tant que le Levier ABC n'est pas droit, cette proposition peut se démontrer de la même manière, que si ABC étoit un fil, parce que chacune des puissances peut toujours se changer en deux autres, dont la direction passe par les points où les deux autres sont appliqués, & que l'on aura ainsi six puissances, égales deux à deux & directement opposées. Voy. les art. 160, 161, 162.

Il n'y a que le seul cas où le Levier ABC (Fig. 65) est droit, dans lequel une pareille décomposition ne se peut faire, & pour lequel il est nécessaire de trouver une démonstration particulière. Soient donc AQ, BR, Cc perpendiculaires au Levier ABC , on aura $B.BR.BO = C.Cc.CL + A.AQ.AY$, mais les lignes $BO, BK, CL,$

$CL, CZ; AY, AX$; ne diffèrent l'une de l'autre que d'une quantité infiniment petite par rapport à elles. Donc
 $BK = C.Cc. CZ + A.AQ. AX$ Donc &c.
 Ce $Q. F. D.$

REMARQUE.

164. Si le Levier ABC (Fig. 66) étoit fixe en quelque point, en Γ par exemple, & qu'on imaginât le Levier dans une autre situation $F\Gamma GE$, la proposition seroit encore vraie & se démontreroit d'une manière semblable.

De la conservation des forces vives, quand les Corps se tiennent par des verges inflexibles, & qu'on les regarde comme des points.

165. Il est clair que par le Lemme précédent on démontrera la conservation des forces vives, quand les Corps se tiennent par des verges inflexibles, & que chacun de ces Corps est fixe à la verge. Si l'un des Corps comme B pouvoit couler le long de la verge, alors la vitesse BR qu'il perdrait, devroit être perpendiculaire à la verge, & il se trouveroit dans l'instant suivant, non au point G tel que $FG = AB$, (Fig. 64) mais à un point g infiniment proche de celui-là. * Or à cause que les points B, G sont infiniment proches, & que Gg, BA doivent être censées parallèles, la ligne Gg doit être

* On suppose ici que le Levier ABC est une Courbe aussi-bien que FGE , & que BR est perpendiculaire à cette Courbe en B . Il m'a paru inutile de faire pour cela une nouvelle Figure.

regardée comme perpendiculaire à BK , & partant on peut prendre Bk & BK l'une pour l'autre, parce que la différence est infiniment petite du second ordre. Donc la conservation des forces vives a encore lieu dans ce cas.

De la conservation des forces vives, quand les Corps sont de masses finies, & qu'ils se tiennent par des fils ou par des verges inflexibles.

166. Nous avons dans le Lem. 13. que si trois Corps A, B, C , animés de vitesses AQ, BR, Cc de directions quelconques, sont en équilibre, on aura $C . Cc . CZ + A . AQ . AX = B . BR . BK$. D'où il s'ensuit, que si on prend Br égale & contraire à BR , (Fig. 64) c'est-à-dire, si on cherche la force résultante des deux puissances $C . Cc, A . AQ$, on réduira toujours $C . Cc . CZ + A . AQ . AX$ à un seul produit $B . Br . BK$; & ainsi quel que soit le nombre des Corps attachés à une verge inflexible, si on prend le point B par ou passe la force résultante, & qu'on imagine ce point B parvenu en G , il suffira de prendre le produit de BK par la force résultante, au lieu de la somme de tous ces produits.

Or, pour que la conservation des forces vives ait lieu, il faut, comme nous l'avons vu, que la somme de tous ces produits soit $= 0$. Donc il faut, ou que la force résultante soit $= 0$, ou que BK soit $= 0$; or 1°. quand il n'y a pas de point fixe, la force résultante est $= 0$. 2°. Quand il y en a un, la vitesse du point B doit être nulle, ou au moins sa direction est nécessairement perpendiculaire à

la direction de la force résultante. En effet, si l'obstacle est un point Mathématique, comme le point d'appui d'un Levier, la direction de la force résultante passe par ce point d'appui; & le Mouvement du point *B* est un Mouvement de rotation autour de ce point, ou le point *B* n'est autre chose que le point d'appui même, dont le Mouvement est zero. Si l'obstacle est une surface immobile, le point *B* par où passe la direction de la force résultante est nécessairement un point qui touche cette surface, & dont le Mouvement instantané est suivant la direction de cette surface même, tandis que la direction de la force résultante est perpendiculaire à cette surface. Donc en général $BK = 0$, quand il y a un point fixe. Il est donc démontré, que quand les Corps se tiennent par des Leviers inflexibles, fixes ou non fixes, la conservation des forces vives a lieu.

167. Si les Corps se tiennent par des fils, alors on imaginera aux extrémités de chaque portion de fil qui est entre deux Corps, deux puissances égales & opposées qui tirent dans la direction du fil, & la démonstration se verra aisément de ce qui a été dit ci-dessus (*art.* 162) quand les Corps étoient regardés comme des points.

168. Si le fil passe à travers un ou plusieurs de ces Corps, de manière qu'ils puissent y couler librement, alors comme la direction de la force résultante des Mouvements perdus à chaque instant passe (*art.* 123.) par le point de concours *G* (Fig. 67) des lignes *CS*, *AR*, & divise cet angle en deux également; il faudra, au lieu

de cette force résultante, imaginez deux puissances égales qui tirent suivant SG , & RG dans la direction des fils CS , AR ; de plus, si on suppose que SV , RN soient les chemins des points S , R , & qu'on mène les perpendiculaires, VD , NP , on aura, à cause de $AR + SC$ constante, $SD = RP$. Moyennant ces deux remarques, on viendra aisément à bout de démontrer dans tous les cas, la conservation des forces vives.

*De la conservation des forces vives dans le choc
des Corps Elastiques.*

169. Nous pourrions démontrer la conservation des forces vives dans le choc des Corps Elastiques, en regardant ces Corps comme durs, & supposant que la compression & la restitution du ressort se fit dans un instant, nous avons même déjà donné dans l'art. 157. un essai de démonstration de cette espèce; mais comme nous avons observé que cette hypothèse ne pourroit souvent conduire aux véritables loix du choc des Corps Elastiques, nous l'abandonnerons ici, & nous démontrerons la proposition dont il s'agit, en supposant un ressort placé entre les deux Corps, & qui leur donne en sens contraire des forces motrices égales.

170. Soient A, B , (Fig. 68) deux points unis par un ressort AB , lesquels ayant reçu des impulsions quelconques AG , BF , décrivent les Courbes Ama , BMb pendant le tems de la compression & de la restitution

du ressort : soit ϕ la force motrice variable , qui est égale à chaque instant pour les deux Corps , & qui les pousse en sens contraire dans la direction du ressort Mm , V la vitesse de M , u celle de m , G la vitesse de B , g celle de A , Mm, x , MV , dz , on aura $BVV = BGG - 2\int \phi dz$, & $Auu = Agg + 2\int \phi dx - 2\int \phi dz$. Mais lorsque $ab = AB$, on a $2\int \phi dx = 0$. donc $Auu + BVV = BGG + Agg$, lorsque la compression est finie.

Il est clair que cette démonstration peut s'étendre à tant de points qu'on voudra, liés ensemble d'une manière quelconque. On voit donc que la conservation des forces vives a lieu pour des points liés par des ressorts.

Quand les Corps sont finis , il suffit (*art.* 166.) pour prouver la conservation des forces vives , de prouver que cette conservation a lieu dans les points par où passe la direction de la force résultante des forces qui se font équilibre ; ces points sont dans l'un & dans l'autre Corps le point par lequel ils se touchent , & que nous supposons demeurer toujours le point touchant pendant la compression & la restitution , que nous regardons ici comme achevées dans un tems très-court. C'est par ces points qu'il faut imaginer que passe le ressort , qui leur communique en sens contraire à chaque instant des forces motrices égales , qui se distribuent ensuite dans toute la masse. Donc ce cas se trouve par-là réduit au précédent.

171. Si les Corps A, B (*Fig.* 69) se choquoient par le moyen d'une verge CBA fixe en C , alors les forces

motrices appliquées en A & en B ne feroient plus égales, mais elles feroient en raison inverse des bras CA , CB , & comme les chemins des points B & A en se mouvant, sont en raison directe de ces bras de Levier; il s'ensuit que le produit des forces motrices par le chemin des points A , B feroit égal de part & d'autre. Ainsi on peut encore ici démontrer la conservation des forces vives, soit par le Principe de l'art. 157. en supposant les Corps incompressibles, soit en imaginant un ressort infiniment petit placé en A & un autre en B . Ce qu'il est inutile d'expliquer plus en détail pour des Lecteurs intelligens.

Donc la conservation des forces vives aura encore lieu dans le cas dont il s'agit ici; & il est clair en combinant les Principes établis ci-dessus, qu'on pourra toujours la démontrer dans le choc des Corps Elastiques.

S C O L I E G E N E R A L.

172. Il résulte de tout ce que nous avons dit jusqu'à présent, qu'en général la conservation des forces vives dépend de ce Principe, que quand des puissances se font équilibre, les vitesses des points où elles sont appliquées, estimées suivant la direction de ces puissances, sont en raison inverse de ces mêmes puissances. Ce Principe est reconnu depuis long-tems par les Geomètres pour le Principe fondamental de l'équilibre; mais personne, que je sache, n'a encore démontré ce Principe

en général, ni fait voir que celui de la conservation des forces vives en résulte nécessairement.

Le Principe de l'équilibre dont nous venons de parler, peut toujours se démontrer facilement ; car, ou les puissances sont égales & directement opposées, ou elles sont appliquées à des bras de Levier différens, ou enfin la force résultante de ces puissances passe par quelque obstacle fixe & insurmontable, comme dans le Probl. X. Tout ce que nous avons dit ci-dessus est, ce me semble, suffisant pour démontrer les deux premiers cas : à l'égard du dernier cas, il est visible, que les puissances décomposées dans une direction perpendiculaire à la force résultante seront égales, & que les vitesses dans ce même sens seront égales aussi. Or delà il est aisé de tirer la démonstration en la cherchant sur quelque cas, par exemple, sur celui du Problème X. où elle est aisée à trouver.

De la conservation des forces vives dans les Fluides.

173. Soit un vase de figure quelconque & indéfini $POTQ$ (Fig. 70) dont la partie $ADCZ$ terminée par les parallèles AD , CZ , soit remplie de fluide. Soit imaginé ce fluide divisé en tranches FKG parallèles à AD ; & que tous les points de chaque tranche soient animés par une force accélératrice représentée par l'ordonnée correspondante kf de la Courbe dfb , (les ordonnées ad représentant les forces accélératrices positives, c'est-à-dire qui tendent de L vers B , & les ordonnées kf celles

dont la direction est en sens contraire); je dis que si le fluide en cet état est en équilibre, l'Aire ou surface *ad nobis* sera zero, c'est-à-dire la somme des Aires positives, égale à la somme des Aires négatives.

Car pour l'équilibre, il faut qu'une tranche quelconque *FKG* soit pressée également de bas en haut, & de haut en bas: or la pression de la tranche *FKG* suivant *LB*, est la même que si elle étoit chargée du Cylindre *EHFG*, dont le poids, en appelant *LK*, x , & ϕ la force accélératrice de chaque tranche, sera $FG \times \int \phi dx$, ou $FG \times (adin - nfk)$; on prouvera de même que la pression de *FG* suivant *BA*, sera $FG (kfm - mog + gcb)$ & comme ces deux pressions doivent être égales, on aura $adin - nfk = kfm - mog + gcb$, & $adin - nfk - kfm + mog - gcb = 0$. Donc &c. Ce *Q. F. D.*

COROLLAIRE.

174. Si au lieu de la force accélératrice ϕ on substitue la petite vitesse *du* qui lui seroit proportionnelle, le tems étant constant, c'est-à-dire la petite vitesse avec laquelle chaque tranche, considérée comme isolée, descendroit dans un instant, on aura $\int du dx = 0$. Donc si le Fluide se meut vers *AB*, & que *du* représente la vitesse perdue ou gagnée par chaque tranche, c'est-à-dire (*art. 50*) la vitesse par laquelle chaque tranche seroit restée en équilibre avec les autres, on aura $\int du dx = 0$.

REMARQUE

REMARQUE.

.. Nous avons fait voir ci-dessus en général (*art.* 159) la conservation des forces vives quand les Corps sont animés par la pesanteur ou par une force accélératrice quelconque, dépend de la conservation des forces vives quand il n'y a point de forces accélératrices. Nous nous contenterons donc de prouver, que si un Fluide *ADZC*, poussé & mis d'abord en Mouvement par quelque cause (comme par un Piston) se meut dans le vase *POTQ*, abstraction faite de la pesanteur, la conservation des forces vives aura lieu.

Pour cela, nous imaginerons le Fluide partagé en tranches égales & infiniment petites, dont la masse sera appelée m , & dont l'épaisseur sera dx & y la largeur; on aura ainsi $m = y dx$. Si on appelle u la vitesse de chaque tranche, & $u + du$ sa vitesse dans l'instant suivant; il faudra par notre Principe, que les tranches animées des vitesses du se fassent équilibre, c'est-à-dire que $\int du dx$ sera $= 0$. (*Cor. précéd.*) Mais pour démontrer la conservation des forces vives, il faut prouver que $\int m u du = 0$: or $u = \frac{1}{y}$, puisque la vitesse de chaque tranche est en raison inverse de sa largeur; $m = y dx$. donc $\int m u du = \int du dx = 0$. Donc &c.

AVERTISSEMENT.

M. Daniel Bernoulli dans son excellent Ouvrage qui a

Aa

pour titre : *Hydrodynamica* &c. a tiré les loix du Mouvement des Fluides dans des vases, de la conservation des forces vives, mais sans la démontrer. Comme notre principe général exposé *art.* 50. nous a conduit à en trouver la démonstration, il est évident que nous aurions pu déduire immédiatement de ce même Principe le Mouvement du Fluide, ce qui auroit encore été plus lumineux & plus direct. Mais comme notre dessein n'est point de traiter ici des Fluides, nous nous sommes contentés de faire voir en deux mots l'usage de notre Principe dans une matière qui paroît si épineuse. Nous nous contenterons donc ici de ce léger essai, & nous entrerons là-dessus dans un détail beaucoup plus grand, lorsque nous donnerons notre *Traité des Fluides*, dans lequel nous déduirons de notre Principe général, la solution des Problèmes les plus difficiles qu'on ait jusqu'à présent proposé sur cette matière.

F I N.

Extrait des Registres de l'Académie Royale des Sciences, du 22. Juin 1743.

M^{ES}SIEURS DE MAUPERTUIS & NICOLE, ayant examiné par ordre l'Académie, le *Traité de Dynamique* de M. D'ALEMBERT, & en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression. En foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris ce 25. Juin 1743.

DORTOUS DE MAIRAN, *Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.*

PRIVILEGE DU ROI.

L OUIS par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amez & féaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Senéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES, Nous a très-humblement fait exposer, que depuis qu'il Nous a plu lui donner, par un Règlement nouveau, de nouvelles marques de notre affection, elle s'est appliquée avec plus de soin, à cultiver les Sciences, qui sont l'objet de ses exercices; en sorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a donnés au Public, elle seroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaisoit lui accorder de nouvelles Lettres de Privilege, attendu que celles que Nous lui avons accordées en date du 6. Avril 1693, n'ayant point eu de terme limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt du Conseil d'Etat du 13. Août 1704, celles de 1713 & celles de 1716 étant aussi expirées : Et désirant donner à notredite Académie en corps & en particulier, & à chacun de ceux qui la composent, toutes les facilités & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leurs travaux utiles au Public, Nous avons permis & permettons par ces Présentes à notredite Académie, de faire vendre ou débiter par tous les lieux de notre obéissance, par tel Imprimeur ou Libraire qu'elle voudra choisir, toutes les *Recherches ou Observations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées de notredite Académie Royale des Sciences; comme aussi les Ouvrages, Mémoires, ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression; & ce, pendant le temps & espace de quinze années consécutives, à compter du jour de la date desdites Présentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangère dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Imprimeurs, Libraires, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire aucun desdits Ouvrages ci-dessus spécifiés, en tout, ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre, feuilles mêmes séparées, ou autrement, sans la permission expresse & par écrit de notredite Académie, ou de ceux qui auront droit d'elle, & ses ayans cause, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de dix mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Présentes seront entregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs; & que notredite Académie se conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; & qu'avant que de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état, avec les Approbations & les Certificats qui en auront été donnés,*

ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur Chauvelin ; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur Chauvelin le tout à peine de nullité des Présentes ; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir notredite Académie, ou ceux qui auront droit d'elle & ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin de l'un des ouvrages, soit tenue pour dûment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amis & féaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent, de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : Car tel est notre plaisir. DONNE' à Fontainebleau le douzième jour du mois de Novembre, l'an de grace mil sept cent trente-quatre, & de notre Règne le vingtième. Par le Roi en son Conseil.

SAINSON.

Registré sur le Registre VIII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, No. 792. Fol. 775. conformément au Règlement de 1723. qui fait défense, Art. IV. à toutes personnes de quelque qualité qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres, pour les vendre en leur nom, soit qu'ils s'en disent les Auteurs, ou autrement, & à la charge de fournir les Exemplaires prescrits par l'Art. CVIII. du même Règlement. A Paris le 15. Novembre 1734.

G. MARTIN, Syndic.

FAUTES A CORRIGER.

Page 13, ligne 4, CE, lisez Ce.

Page 21, lig. 12, les tems, lis. les quarrés des tems.

Page 46, lig. 2, qui ait, lis. qui aye.

Page 60, lig. 14, Coroll. lis. Lemme.

Page 82, lig. dernière, $\frac{Ffx}{p}$, lis. $\frac{Fgx}{p}$.

Page 106, lig. 14, μa , lis. μZ .

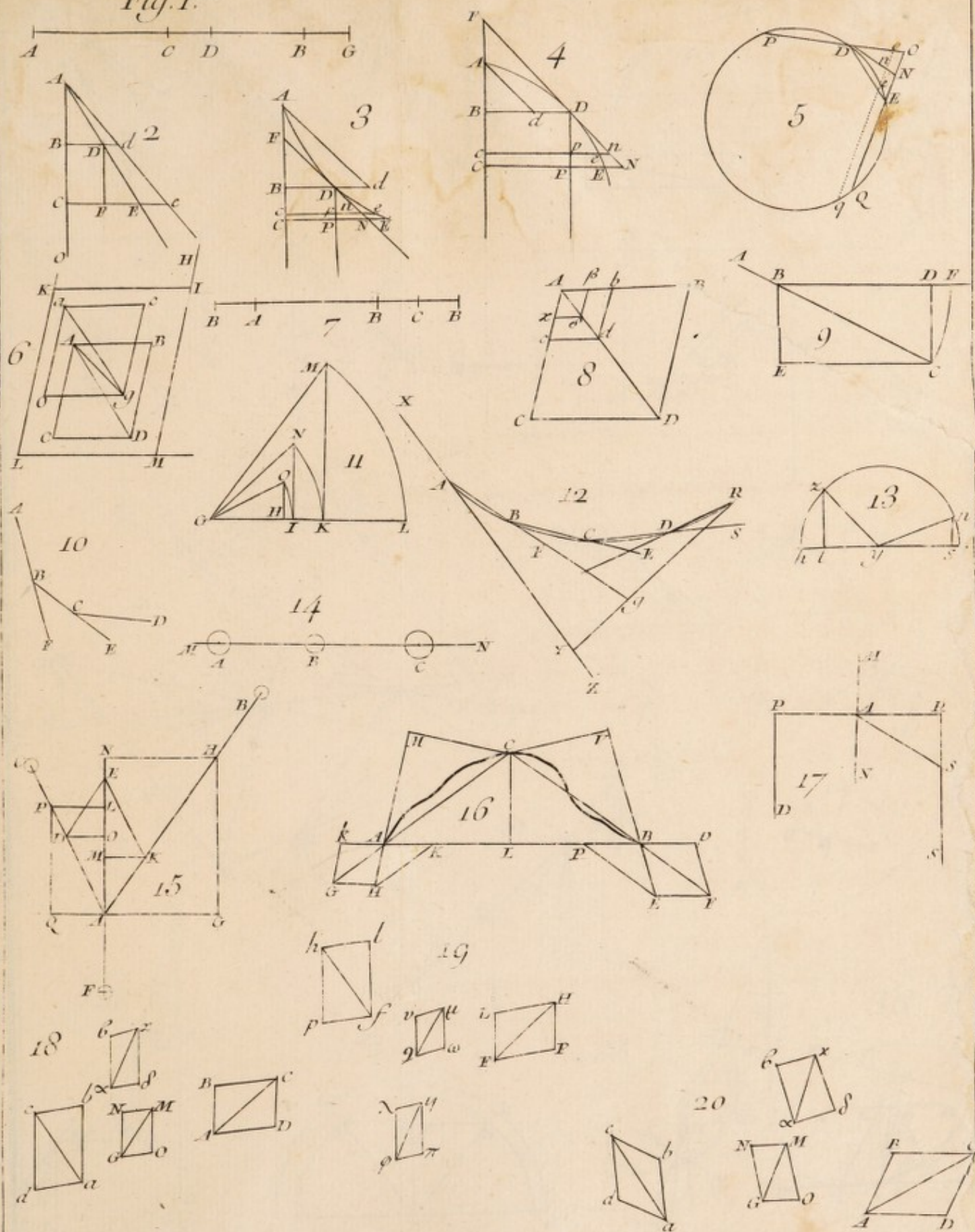
Page 119, lig. 18, G, lis. C.

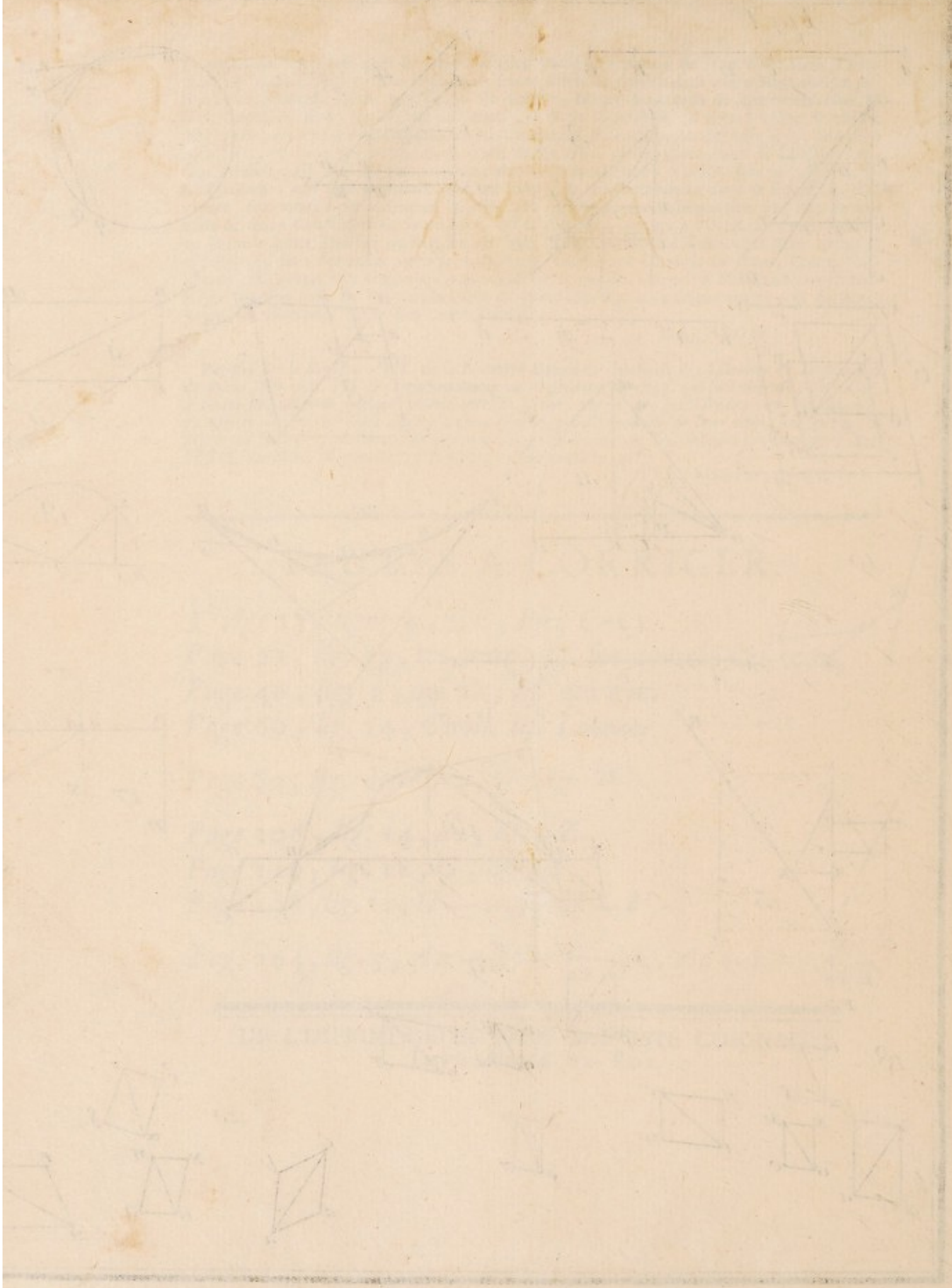
Page 138, lig. 11, $U - v$, lis. $U - V$.

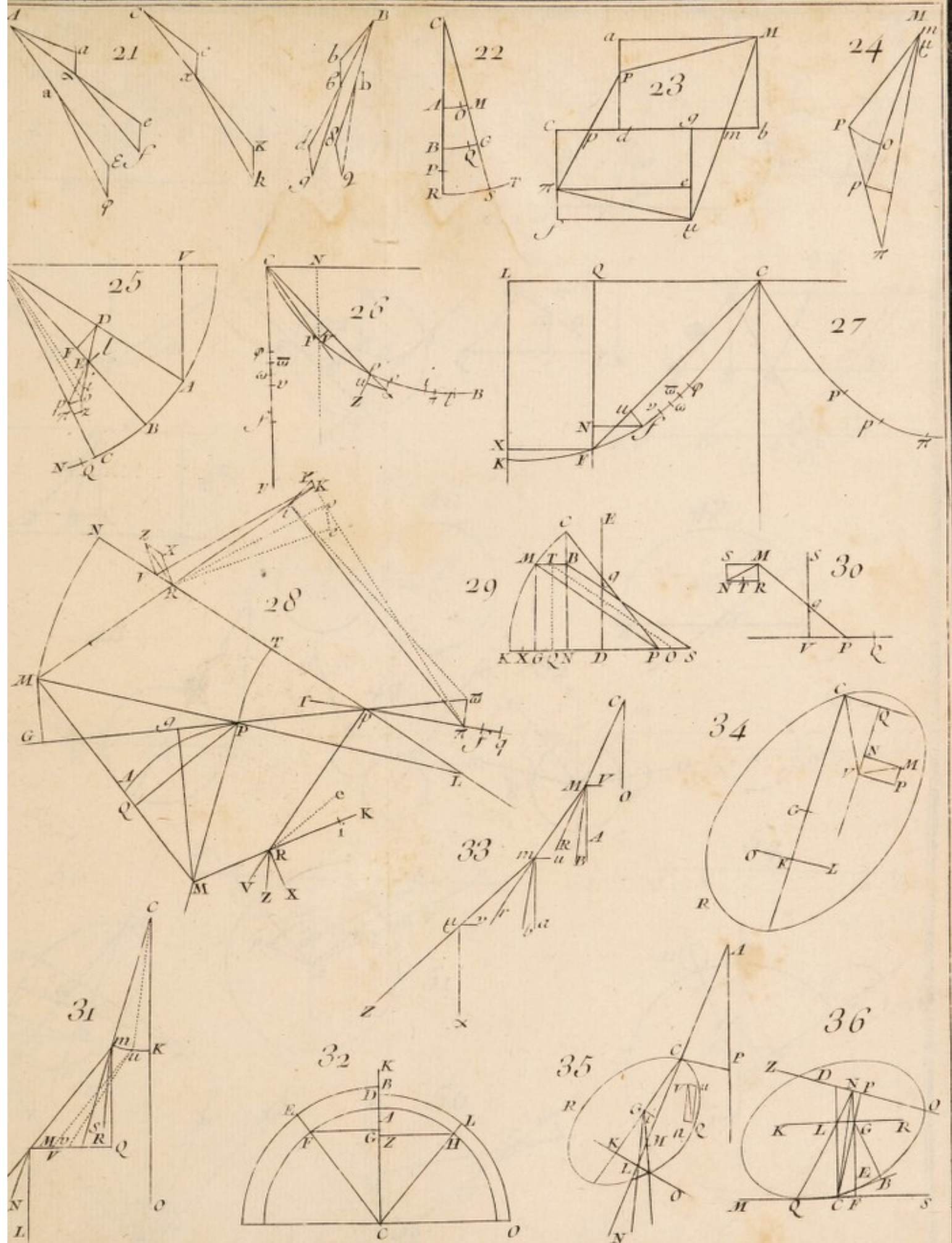
Pag. 164, lig. 5, $Ax - Ff + \frac{ax^2}{2FA}$, lis. $A\phi - Ff + \frac{a\phi^2}{2FA}$.

DE L'IMPRIMERIE DE JEAN-BAPTISTE COIGNARD,
IMPRIMEUR DU ROI.

Fig. I^{re}







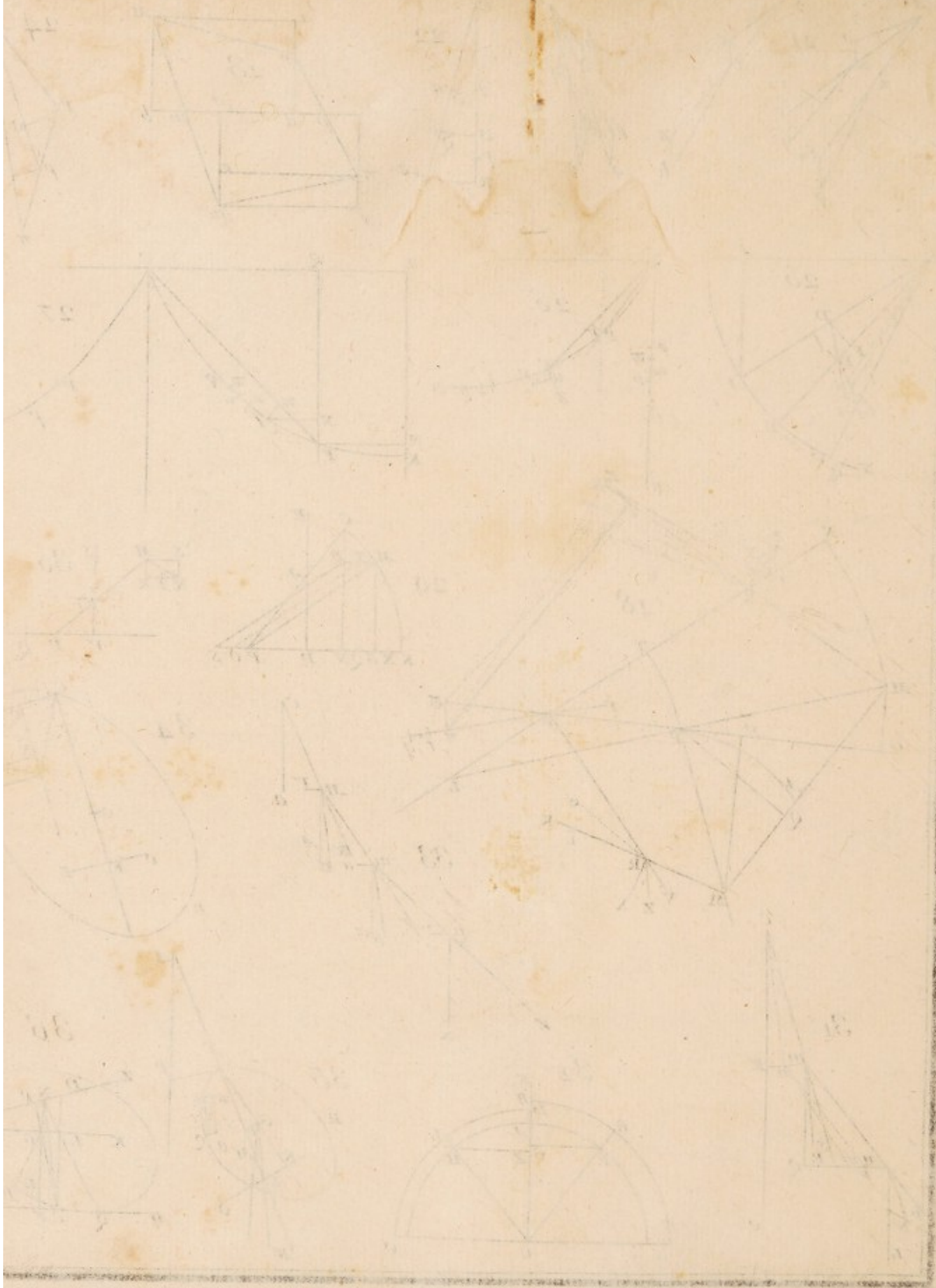
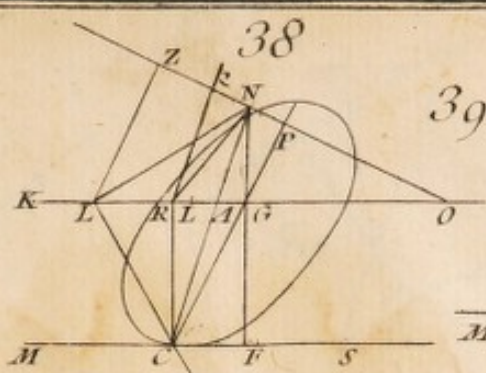
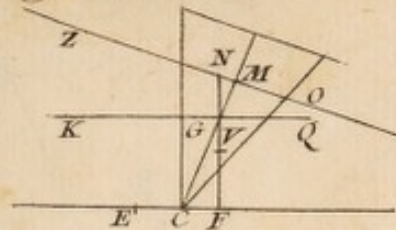
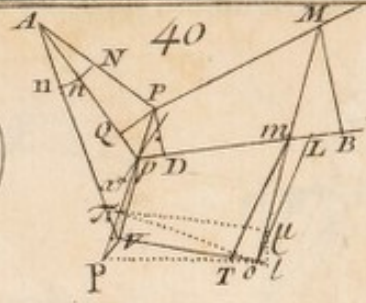
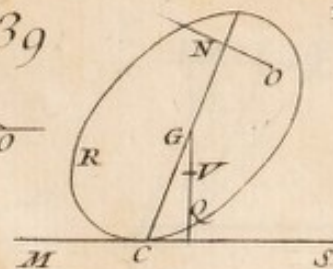


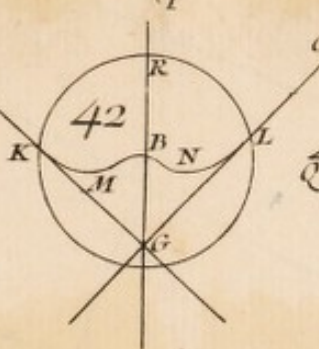
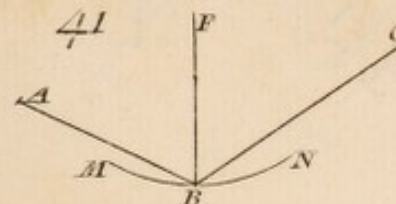
Fig. 37



39



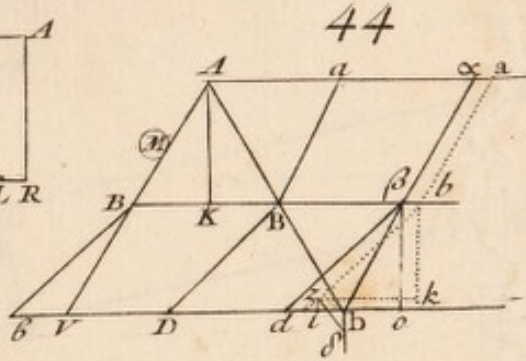
41



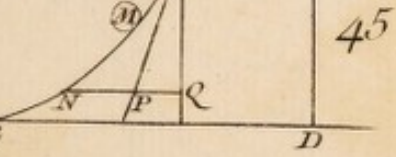
43



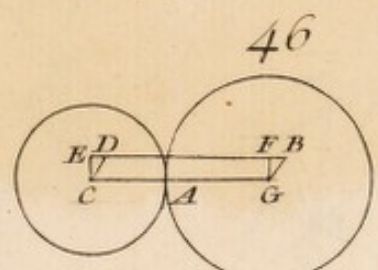
44



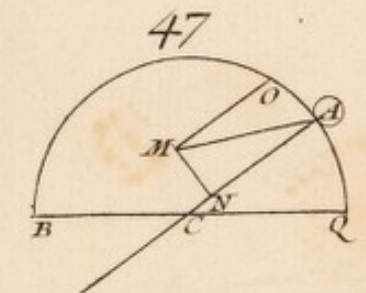
45



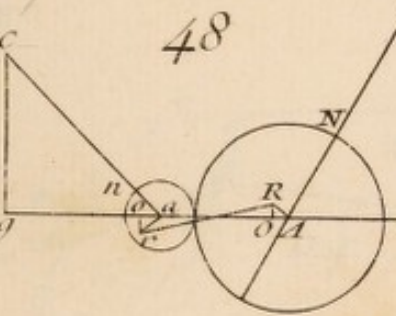
46



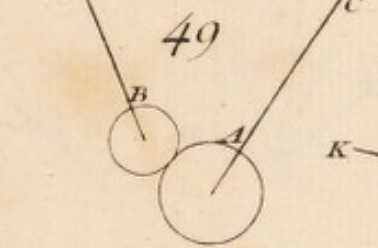
47



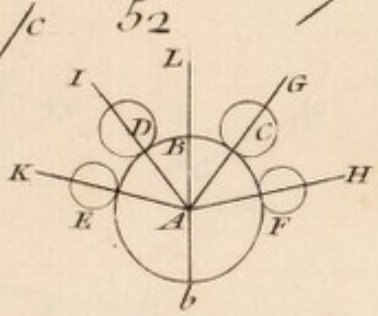
48



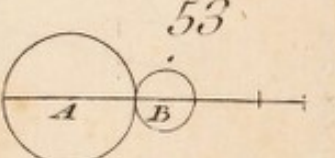
49



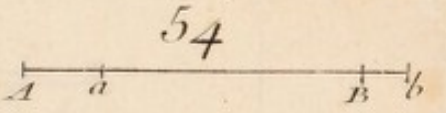
52



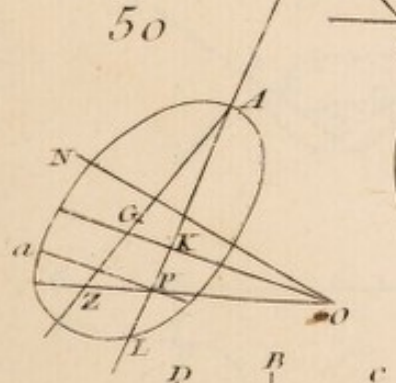
53



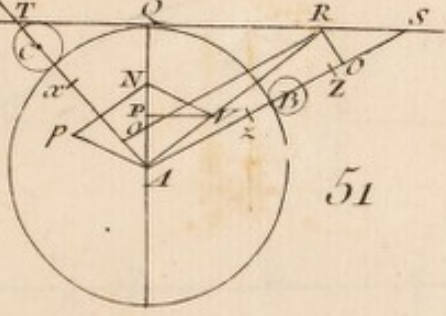
54



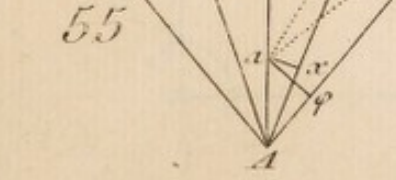
50



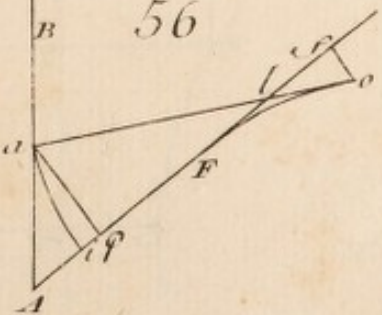
51



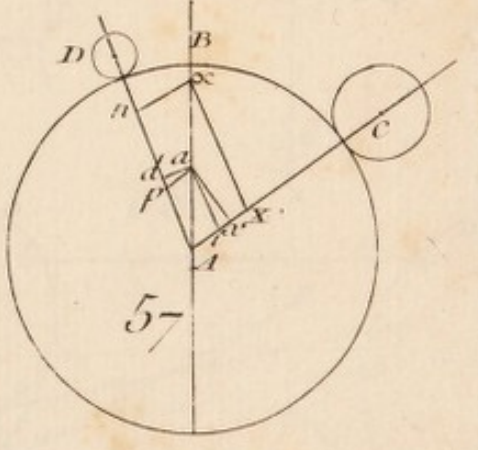
55



56



57



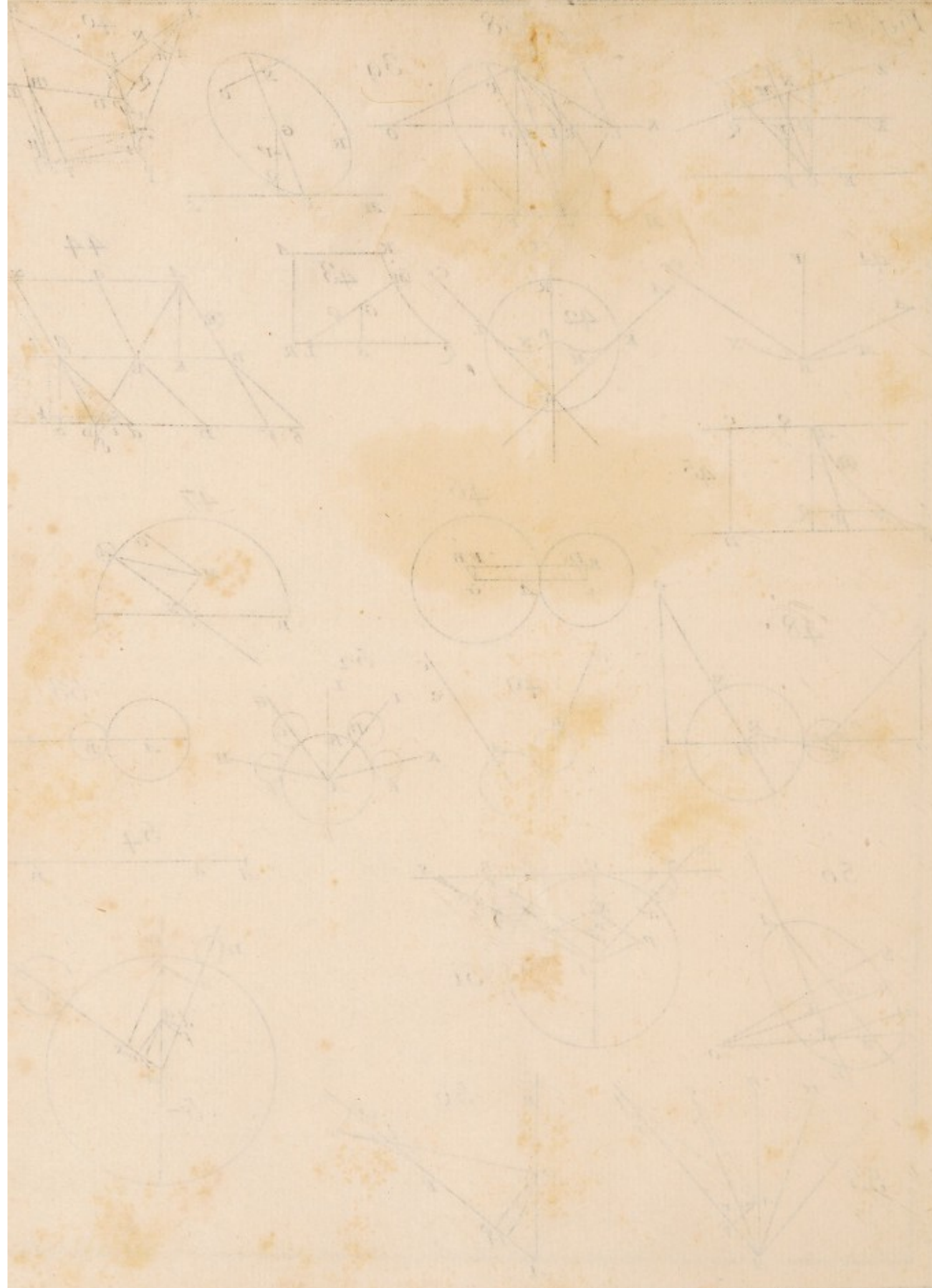
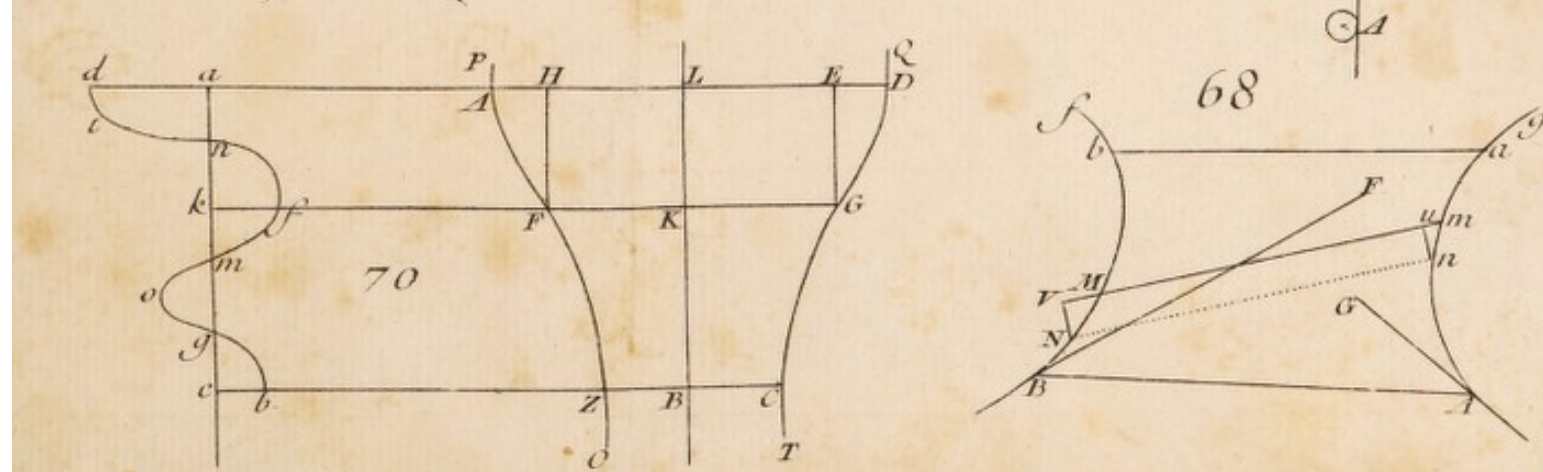
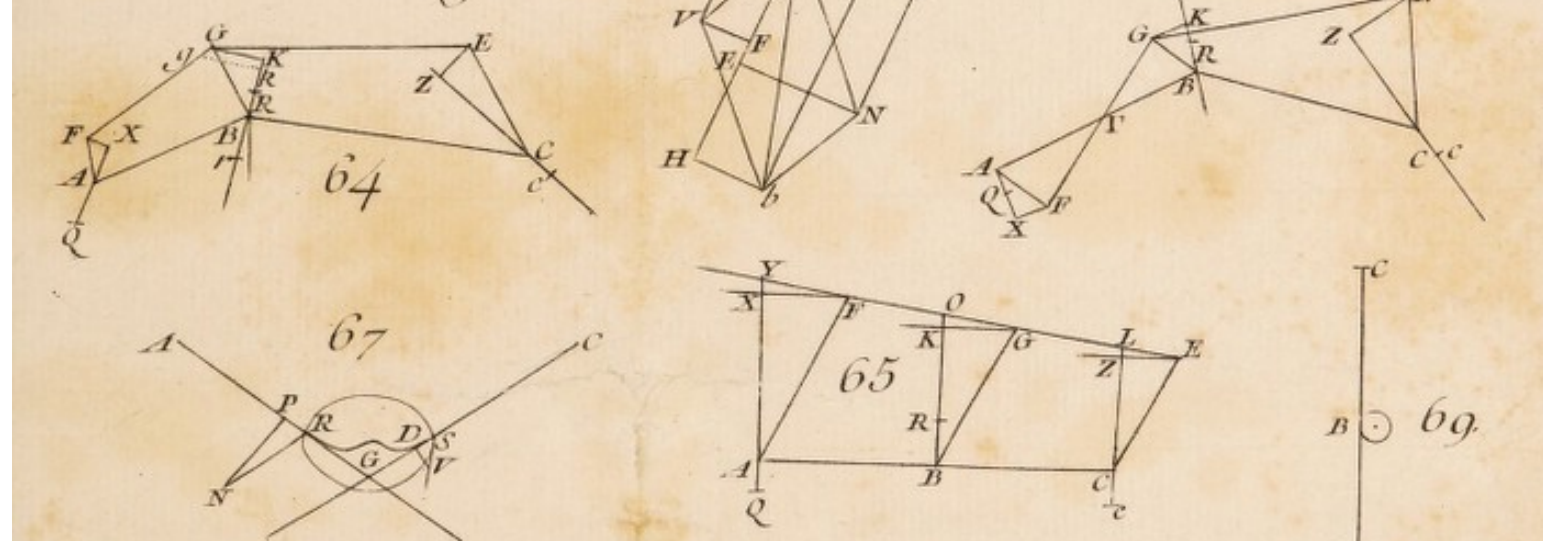
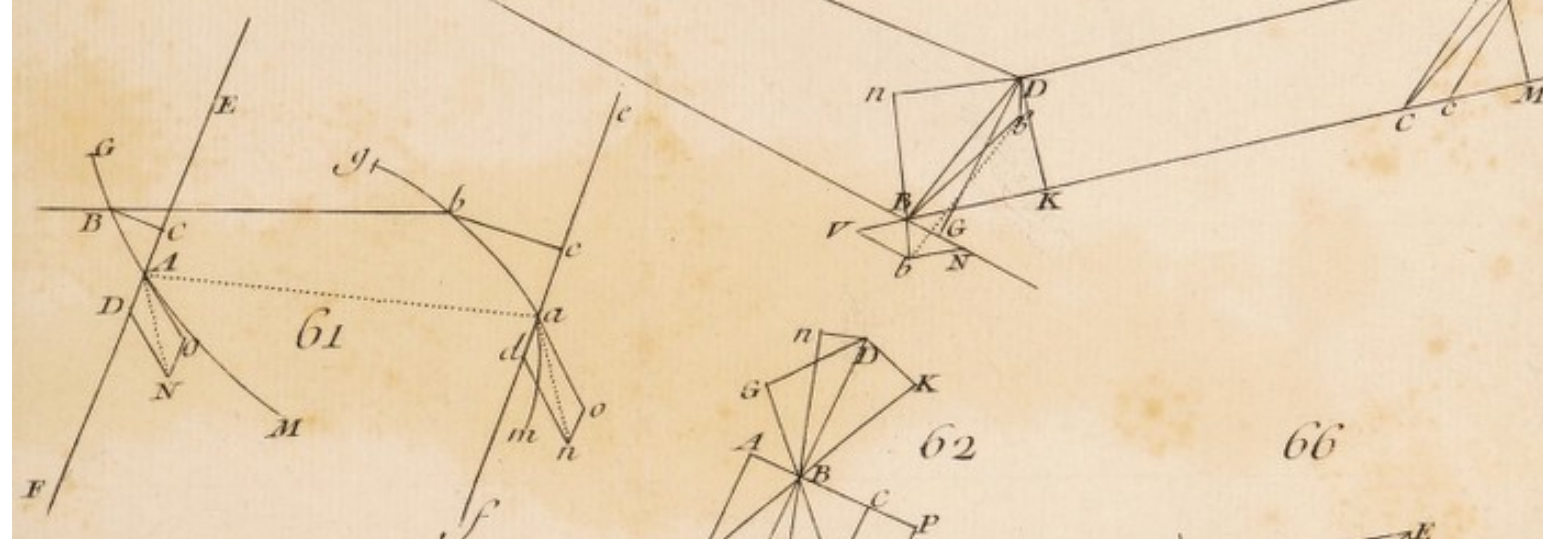
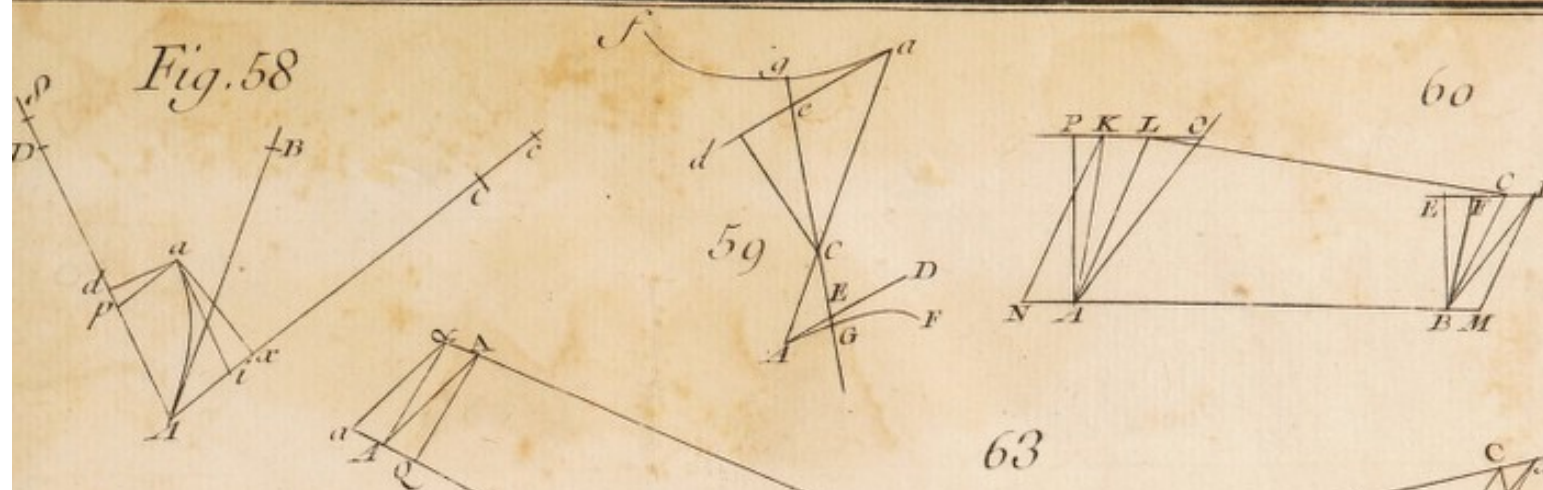
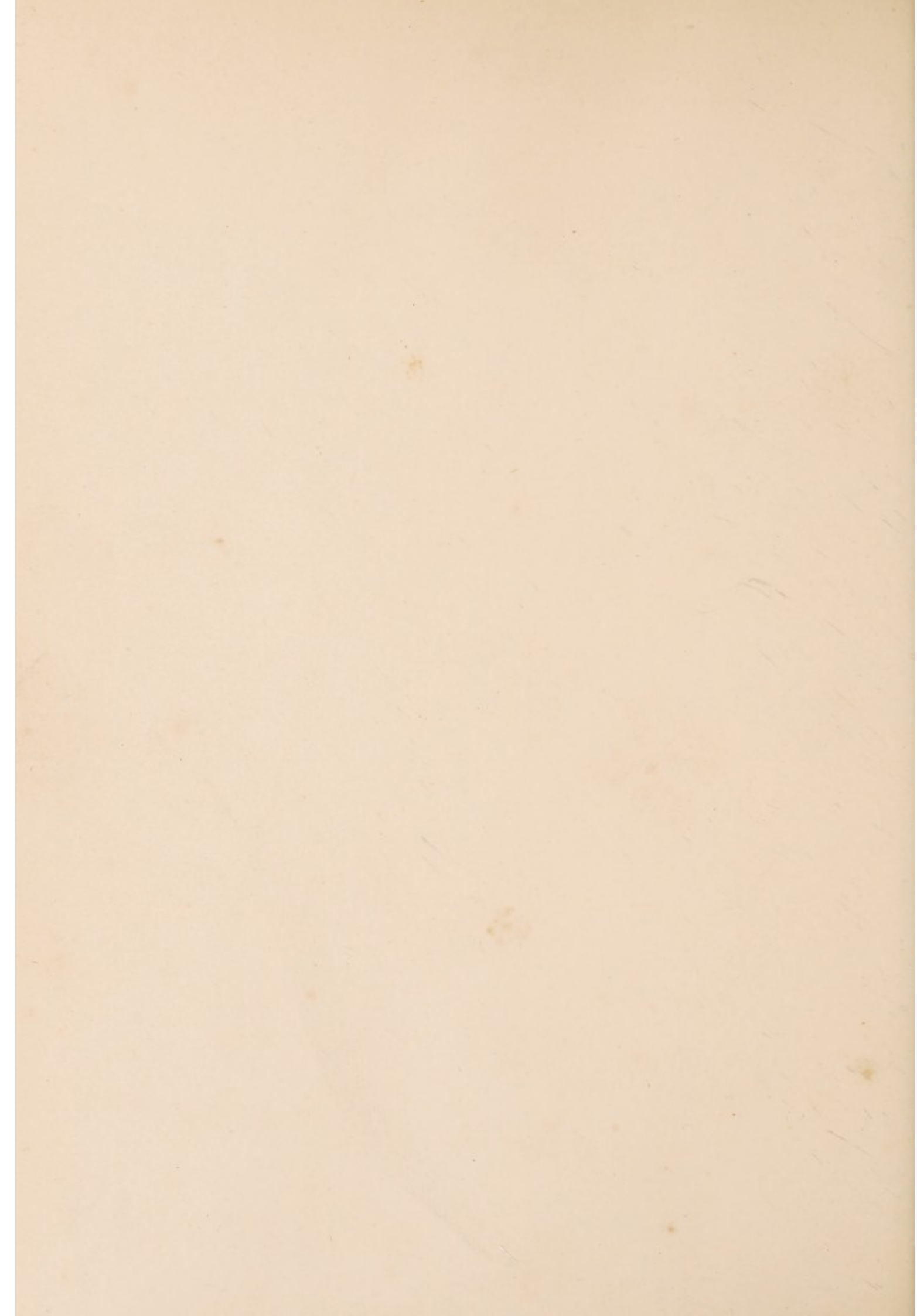


Fig. 58







8/08
u491





