John Gough


Harry Arnold
Arnbarrow

# DE
# DESCENSU GRAVIUM.
# DE
# MOTU PENDULORUM
# IN
# CYCLOIDE.
# ET DE
# MOTU PROJECTILIUM.

Honos—

---

AUCTORE
ROGERO COTES.

---

*CANTABRIGIÆ,*
Typis excudebant T. FLETCHER & F. HODSON.
Impensis J. NICHOLSON, *Cantab.* Veneunt apud J. RIVINGTON, *Lond.*

MDCCLXX.

A

# LIST of the SUBSCRIBERS.

A

MR. Adams, of Caius College
Mr Allix, of Chriſt's
Mr Amyas, of Caius, A. B.
Mr Atley, of St. John's

B

Mr Barſtow, of Emmanuel
Mr Bateman, of ditto
Mr Batteley, of St. John's
Mr Bedford, of ditto
Mr Belgrave, of ditto, A. B.
Mr Beſwicke, of ditto, A. B.
Mr Blackburn, of Sidney
Mr Blackburne, junior, of Peterhouſe
Mr Blakeway, of St. John's
Mr Bland, of Caius, A. B.
Mr Brand, of Chriſt's
Mr Brandiſh, of Caius College
Mr Bridges, of Queen's
Mr Bromley, of St. John's
Mr Bryer, of ditto
Mr Buck, of Caius
Mr Burſlem, of St. John's, A. B.

C

Mr Champion, of Trinity Hall
Mr Chapman, of Jeſus, A. B.
Mr Church, of Sidney
Mr Cleave, of Corpus Chriſti
Mr Clark, of Clare Hall
Mr Clarkſton, of Peterhouſe, A. B.
Mr Cockſhutt, of St. John's
Mr Cooper, of Queen's
Mr Cooper, of Pembroke Hall
Mr Crawford, of Queen's
Mr Crofts, of Caius

D

Mr Dampier, of King's College
Mr Dealtary, Fellow of Jefus
Mr Dewfnop, of ditto
Mr Dodwell, of Chrift's
Mr Dove, of Clare Hall, A. B.
Mr Drewe, of Emmanuel
Mr Dymoke, of St. John's, A. B.

E

Mr Ellis, jun. of Trinity
Mr Emonfon, of ditto
Mr Evans, jun. of St. John's
Mr Eyre, jun. of ditto

F

Mr Farnham, of St. John's
Mr Field, of Pembroke Hall
Mr Finch, of Trinity
Mr Fifher, Fellow of Caius
Mr Fifher, of Peterhoufe, A. B.
Mr Fifher, of Chrift's, A. B.
Mr Frank, of Trinity, A. B.

G

Mr Gregory, of Jefus
Mr Grimfhaw, of Catherine Hall
Mr Grimwood, of St. John's

H

Mr Hadfield, of St. John's
Mr Halls, of ditto
Mr Hay, of Magdalen
Mr Healy, of Clare Hall
Mr Heath, of Magdalen College
Mr Hendry, of Corpus Chrifti
Mr Hill, of Catherine Hall, A. B.
Mr Hodgfon, of Queen's, A. B.
Mr Hodgfon, of Clare Hall, A. B.
Mr Holmes, of St. John's
Mr Holt, Fellow of Queen's
Mr Homer, of Emanuel
Mr Horton, of Queen's
Mr Hudfon, Fellow of Queen's
Mr Hughes, of St. John's, A. B.
Mr Humphrey, of Corpus Chrifti
Mr Hunt, of Caius

J

Mr Jackfon, of St. John's
Mr Jawett, of Trinity
Mr Jenkins, of Sidney
Mr Jobfon, of Trinity
Mr Johnfon, of Clare Hall, A. B.
Mr Jordan, of Queen's

K

Mr Kedington, of Caius

L

Mr Lane, of Queen's
Mr Laurence, of St. John's
Mr Law, of Peterhoufe
Mr Layard, of St. John's, A. B.
Mr Layton, of ditto
Seym. Leeke, Efq; of Peterhoufe
Mr Lloyd, of Caius, A. B.
Mr Lovat, of Clare Hall
Mr Lloyd, of Magdalen

M

Mr Maule, of Chriſt's College, A. B.
Mr Morriſon, of Trinity
Mr Mountain, of Caius
Mr Murgatroyd, of St. John's

N

Mr Neal, of Caius
A. H. Newcome, Eſq; Fellow of Queen's

O

Mr Outlaw, of Queen's, A. B.

P

Mr Pedley, of St. John's
Mr Pentycroſs, of Pembroke Hall
Mr Pern, of Peterhouſe
Mr Pool, of Corpus Chriſti
Mr Porter, of Jeſus
Mr Porter, of Trinity
Mr Prowd, of Jeſus, A. B.
Mr Prytiman, of Pembroke Hall

R

Mr Radford, of St. John's, A. B.
Mr Raſtal, of Peterhouſe
Mr Rathbone, of Pembroke Hall, A. B.
Mr Ray, of Emmanuel
Mr Reid, of St. John's
Mr Robinſon, ſenior, of Trinity, A. B.
Mr Robinſon, junior, of Trinity
Mr Rolle, Fellow-Commoner of Emmanuel

S

Mr Roſe, jun. of Trinity College
Mr Sandiford, of Corpus Chriſti
Mr Sandiford, of Sidney
Mr Scholes, of St. John's
Mr Smelt, of ditto
Mr Stephenſon, of Clare Hall
Mr Sydenham, of Caius, A. B.

T

Mr Taylor, of Magdalen
Mr Taylor, of Pembroke Hall
Mr Topping, of Peterhouſe
Mr Trant, of Chriſt's

V

Mr Vickers, of Trinity

W

Mr Wade, of St. John's
Mr Walker, of Clare Hall
Mr Ward, ſenior, of St. John's
Mr Ward, of Queen's
Mr Watts, of Caius
Mr Whitcher, of Pembroke Hall
Mr Wilcox, of Clare Hall
Mr Williams, jun. of St. John's
Mr Willis, of Trinity
Mr Wilmot, of Peterhouſe
Mr Wilſon, of Caius
Mr Wilſon, of Clare Hall
Mr Wiſe, Fellow-Commoner of Trinity Hall
Mr Whiſh, of Trinity
Mr Withe, of Caius
Mr Woodburn, of Trinity
Mr Wrigley, of Catherine Hall

## ERRATA.

Pag. 7. lin. 7. pro ſecondo, lege ſecundo.
Pag. 22. lin. 19. pro poſteriori *T K*, lege *T A*.
Pag. 23. lin. 10. pro Cy cloidis, lege Cycloidis.
Pag. 29. lin. 12. pro Theor. V. lege Theor. IV.

# DE
# DESCENSU GRAVIUM.

## LEMMA.

*Vis acceleratrix, qua grave corpus per planum quodvis inclinatum oblique deſcendens urgetur, eſt ut Elevatio plani illius directe & Longitudo ejuſdem inverſe.*

SIT enim *AC* Longitudo plani utcunque inclinati ad horizontale planum *BC*, ſitque *AB* ejuſdem plani inclinati Elevatio ſeu perpendicularis altitudo ſupra *BC*. Jam ſi uniformis & data vis Gravitatis qua corpus recta deorſum tendit, exponatur per *AB*, & hæc reſolvatur in binas vires *AD* & *DB*, ducendo *BD* perpendicularem ad *AC*: patebit harum ſolam *AD* eam eſſe qua FIG. 1.

$AD : AB :: AB : AC$
$AD : AB :: 1 : AC$
because $AC$ is given that is $= 1$
$AD \times AC = AB$
$AD = \frac{AB}{AC}$

corpus oblique deſcendens acceleratur, alteram vero $DB$ per contrariam plani renitentiam omnino tolli. Eſt autem $AD$ ad $AB$ ut $AB$ ad $AC$: adeoque vis acceleratrix ad vim gravitatis abſolutam erit ut $AB$ ad $AC$. Igitur cum data ſit vis gravitatis; erit vis acceleratrix directe ut $AB$ Elevatio plani inclinati & inverſe ut $AC$ Longitudo ejuſdem. *Q. E. D.*

## PROBLEMA.

*Motus rectilinei per æquales impulſus continuo propagati, in Medio non reſiſtente, affectiones explicare.*

IN Motu æquabili ſi detur Tempus, erit Longitudo ſpatii peracti ut Velocitas; ſi detur Velocitas, erit Longitudo ut Tempus: adeoque neutro dato, ut Velocitas & Tempus conjunctim. Commode ergo exponitur per Parallelogrammum rectangulum, cujus latera Velocitatem & Tempus rite retulerint: Nam & hujus quoque ratio è rationibus laterum ſuorum componitur.

Dividatur

Dividatur jam recta $A\,M$ in partes qualescunque æquales $A\,B$, $B\,C$, &c. Temporis partes æquales referentes, in quarum initiis agat vis eadem quælibetcunque successive unico suo impulsu; faciatque ut mobile in primo tempore percurrat Spatium quale est $A\,E$ rectangulum, huic æquale $C\,E$ secundo tempore confecturum simulque (propter iteratum impulsum) huic aliud æquale $E\,F$; ita ut totum secundi temporis Spatium $B\,F$ duplum sit primi $A\,E$, totum tertii temporis Spatium $C\,G$ triplum primi $A\,E$, atque ita deinceps. Velocitates etiam in singulis temporibus eodem modo accrescent. Secunda $C\,F$ dupla erit primæ $B\,E$, tertia $D\,G$ tripla ejusdem, &c. Quod si Spatiorum in temporibus integris $A\,K$, $A\,M$ decursorum exquiratur ratio, erunt hæc inter se ut areæ angulosæ $A\,K\,L$, $A\,M\,N$; ultimæque Velocitates ut rectæ $K\,L$, $M\,N$. FIG. 2.

Augeatur jam numerus & minuatur latitudo parallelogrammorum ad infinitum, ut ita actione continua vis impellentis progrediatur Mobile; & abibunt Figuræ angulosæ è parallelogrammulis FIG. 3.

suis

ſuis conflatæ in Triangula *AKL*, *AMN*. Itaque Spatia deſcripta in Temporibus *AK*, *AM* à Mobili æquabiliter accelerato, ſunt ut Triangula *AKL*, *AMN*, & Velocitates in iſtis Temporibus ultimo acquiſitæ, ſunt ut rectæ *KL*, *MN*. *Q. E. E.*

*Corol.* Patet ſi Vires aliæ atque aliæ idem Mobile eodem modo impellant, Velocitates in Temporibus quibuſvis genitas, eſſe ut Vires generantes & Tempora in quibus generantur conjunctim.

## THEOREMA I.

*Longitudo peracta in dato Tempore a gravi e quiete caſum inchoante, per quodcunque planum datum, dimidia eſt ejus quam pari tempore tranſiret motu æquabili cum Velocitate quam acquiſivit ultimo caſus momento.*

FIG. 3. VIS qua urgetur grave continuo impulſu ut per planum quodvis deſcendat eſt ubique ut Elevatio plani illius directe & Longitudo ejuſdem inverſe:

inverſe: hoc per Lemma præmiſſum conſtat. Itaque cum detur planum, dabitur Vis. Unde (per Solutionem Problematis præcedentis) ſi Tempus deſcenſus exponatur per rectam *A K* & Velocitas ultimo acquiſita per rectam *K L*, exponetur Longitudo confecta per triangulum *A K L*, dimidium ſcilicet parallelogrammi cujus latera ſunt *A K*, *K L*, per quod utique exponitur Longitudo quæ tempore eodem *A K* deſcribitur à mobili æquabiliter lato cum velocitate ultima *K L*. *Q. E. D.*

## THEOREMA II.

*In dato plano, ratio integra tum temporis a quiete, tum Velocitatis genitæ & ſubduplicata ratio Longitudinis deſcriptæ æquantur.*

SUNTO Tempora *A K*, *A M*; Velocitates genitæ *KL*, *MN*; Longitudines percurſæ *A K L*, *A M N*, uti ſupra: & patet jam propoſitio ex Elementis. *Q. E. D.* FIG. 3.



nam similia triangula sunt ut quadrata laterum Homologorum

## THEOREMA III.

*In planis quibuſcunque ratio Longitudinum emenſarum componitur ex rationibus Temporum & Velocitatum ultimarum; ratio Temporum ex rationibus Longitudinum directe & Velocitatum inverſe; ratio Velocitatum ex rationibus Longitudinum directe & Temporum inverſe.*

FIG. 3. EXPONUNTUR, uti ſupra, Longitudines, Tempora & Velocitates per triangula eorumque latera bina circa datum angulum poſita: conſtat itaque propoſitio ex Elementis. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Si detur Longitudo,* reciprocat ratio Temporis & Velocitatis; & vice verſa.†

*Corol.*

* Sit $L$ Longitudo percurſa, $T$ Tempus, & $V$ Velocitas; tum (per Theorema III.) $L = T \times V$, adeoque $T = \frac{L}{V}$; Longitudine igitur datâ, id eſt, $L = 1$, $T = \frac{1}{V}$.

† Si Tempus ſit reciproce ut Velocitas, dabitur Longitudo: quoniam enim $T = \frac{1}{V}$, $T \times V = 1$. Sed $T \times V = L$ (per Theorema III.): adeoqne $L = 1$, id eſt, dabitur.

*Corol.* 2. Si detur Tempus, erit Longitudo ut Velocitas; & vice verſa.

*Corol.* 3. Si detur Velocitas, erit Longitudo ut Tempus; & vice verſa.

## THEOREMA IV.

*In planis quibuſcunque Velocitates ultimo genitæ ſunt in ratione ſubduplicata Elevationum: Ratioque Temporum componitur ex ratione ſimplici Longitudinum directe & ex ratione ſubduplicata Elevationum inverſe.*

PER Corollarium Problematis præcedentis, Velocitas ultimo genita eſt ut Vis eam generans & ut Tempus in quo generatur conjunctim, hoc eſt (per Lemma præmiſſum) in ratione compoſita Elevationis plani directe, Longitudinis ejuſdem inverſe, & Temporis directe. Erit itaque Velocitas (per Theorema III.) ut Elevatio plani directe utque ipſa Velocitas inverſe; atque adeo in ratione ſubduplicata Elevationis.‡ *Q. E. D.*

Tempus

‡ Vide not. p. 17.

$V = G \times T$

$G = \frac{E}{L}$ & then $T = \frac{L}{V} = \frac{E}{V}$

& since $V = \frac{E}{V}$ then $V^2 = E$ or $V = \sqrt{E}$

Tempus autem, cum ſit per Theorema III. ut Longitudo percurſa directe & Velocitas inverſe; rationem habebit compoſitam ex ratione ſimplici Longitudinis directe & ex ratione ſubduplicata Elevationis inverſe.§ *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Si detur Longitudo percurſa; Tempus deſcenſus erit reciproce in ratione ſubduplicata Elevationis; & vice verſa.

*Corol.* 2. Si detur Elevatio; dabitur Velocitas, eritque Tempus directe ut Longitudo plani; & vice verſa.

*Corol.* 3. Si detur Tempus; Longitudo plani percurſi erit in ſubduplicata ratione Elevationis ejuſdem, & Velocitas erit ut Longitudo; & vice verſa.

FIG. 4. Inde in Circulo, ſi diameter quævis ad horizontem ſtatuatur normalis, erunt Tempora deſcenſus per Chordas quaſlibet ab extremitate hujus ductas

§ Vide not. p. 17.

ductas æqualia,* & Velocitates ultimæ erunt ut ipsæ Chordæ:‡ sunt enim Chordarum longitudines ad invicem in subduplicata ratione suarum elevationum.

## THEOREMA V.

*Si ex altitudine eadem descendat mobile continuato motu per quotlibet ac quælibet plana contigua, utcunque inclinata; semper eandem in fine velocitatem acquiret, quæ nimirum æqualis erit ei quam acquireret cadendo perpendiculariter ex pari altitudine.*

*Hugenii Demonstratio.*

SINT plana contigua $AB$, $BC$, $CD$; quorum terminus $A$, supra horizontalem lineam $DF$ per infimum terminum $D$ ductam, altitudinem habeat

* $T=\frac{L}{\sqrt{E}}$ (per Theorema IV.), ubi $E$ ponitur pro Elevatione: si igitur descendat Corpus per $DA$, $T=\frac{DA}{\sqrt{DA}}=\sqrt{\overline{DA}}$; in hoc enim casu $L=E$.

habeat quanta eſt perpendicularis $E\,F$: deſcendatque mobile per plana illa ab $A$ uſque in $D$. Dico in $D$ eam velocitatem habiturum quam, ex $E$ cadens, haberet in $F$.

FIG. 5. Producta enim $C\,B$ occurrat rectæ $A\,E$ in $G$. Itemque $D\,C$ producta occurrat eidem $A\,E$ in $E$. Quoniam itaque per $A\,B$‡ deſcendens eandem acquirit

$L = E$. Si deſcendat per $C\,A$, $T = \frac{C\,A}{\sqrt{EA}}$; ſed per 8. prop. 6. Ele.) $E\,A : C\,A :: C\,A : D\,A$; ergo $E\,A \times D\,A = \overline{C\,A}^2$, ergo $D\,A = \frac{\overline{CA}^2}{EA}$; ergo $\sqrt{DA} = \frac{C\,A}{\sqrt{EA}}$: tempora igitur deſcenſus per $D\,A$ & $C\,A$ æquantur. Eodem modo demonſtrari poteſt, tempora deſcenſus per omnes chordas $e\,A$, &c. æqualia eſſe tempori deſcenſus per $D\,A$; adeoque æqualia inter ſe.

‡ Velocitas corporis acquiſita cadendo per $C\,A = \sqrt{EA}$, (per Theorema IV.); ſed per 8. 6. Ele. $E\,A : C\,A :: C\,A : D\,A$; ergo $E\,A \times D\,A = \overline{C\,A}^2$ igitur $E\,A = \frac{\overline{CA}^2}{DA}$; ſed dati circuli diameter, data eſt quantitas, ergo $E\,A = \overline{C\,A}^2$; adeoque $\sqrt{E\,A} = C\,A$ adeoque Velocitas acquiſita cadendo per $C\,A$, eſt ut $C\,A$. Eodem modo demonſtratur, quod Velocitates acquiſitæ cadendo per ullas chordas ſunt ut Chordarum Longitudines.

quia $V = \sqrt{g}$



acquirit velocitatem in termino *B*, atque deſcendens per *GB* (per Cor. 2. IV.); manifeſtum eſt, cum flexus ad *B* nihil obſtare motui ponatur, tantam velocitatem habiturum ubi in *C* pervenerit, quantam ſi per *GC* planum deſcendiſſet; hoc eſt, quantam haberet ex deſcenſu per *EC*. Quare & reliquum planum *CD* eodem modo tranſibit ac ſi per *EC* adveniſſet, ac proinde in *D* denique parem velocitatem habebit, ac ſi deſcendiſſet per planum *ED*, hoc eſt, eandem quam ex caſu perpendiculari per *EF*. *Q. E. D.*

*Corol.* Hinc liquet etiam per Circuli circumferentiam vel per Curvam quamlibet lineam deſcendente mobili (nam curvas tanquam ex infinitis rectis compoſitæ eſſent hic conſiderare licet) ſemper eandem illi velocitatem acquiri ſi ab æquali altitudine deſcenderit: tantamque eam eſſe velocitatem, quantam caſu perpendiculari ex eadem altitudine adipiſceretur.

THEO-

## THEOREMA VI.

*Si detur planorum quotlibet contiguorum Inclinatio atque ratio Longitudinum eorundem ad invicem; erit Tempus quo totum ſyſtema planorum continuato motu percurritur in ſubduplicata ratione Longitudinis ſyſtematis totius.*

MANENTE conſtructione priori, conſtat ex Theoremate II. Tempus deſcenſus per *A B* eſſe in ſubduplicata ratione Longitudinis *A B*. Tempus item deſcenſus tum per *G B* tum per *G C* eſt in eadem ſubduplicata ratione Longitudinis *A B*. Tempus enim deſcenſus per *G B* eſt in ſubduplicata ratione Longitudinis *G B*, adeoque propter datam rationem *G B* ad *A B*, in ſubduplicata ratione Longitudinis *A B:* ſimiliterque Tempus deſcenſus per *G C* eſt etiam in eadem ratione: & diviſim Tempus deſcenſus per *B C* poſt *G B* vel *A B* eſt in eadem ratione. Igitur componendo, Tempus deſcenſus per *A B* & *B C* eſt adhuc in eadem ratione; & ſimiliter Tempus deſcenſus

ſcenſus per quotlibet $AB$, $BC$, $CD$ eſt in eadem ratione, hoc eſt, in ſubduplicata ratione Longitudinis $AB$ vel Longitudinum $AB + BC + CD$: ſunt enim omnes ad invicem in datis rationibus per Hypotheſin. *Q. E. D.*

*Corol.* Hinc liquet ſimiles partes Curvarum ſimilium ſimiliterque poſitarum ad Horizontem deſcribi à mobili deſcendente in Temporibus quæ ſunt in ſubduplicata ratione partium deſcriptarum.

Unde ſi Pendula in Circulis oſcillentur, erunt Tempora quibus oſcillationes ſimiles peragunt, in ſubduplicata ratione Longitudinum Filorum.

DE

‡ Sit $A$ vis acceleratrix; tum $V = A \times T$ (per Corol. Problematis præcedentis); ſed (per Lemma præmiſſum) $A = \frac{E}{L}$, et $T = \frac{L}{V}$ (per Theorema III.); adeoque $V = A \times T = \frac{E}{L} \times \frac{L}{V} = \frac{E}{V}$; adeoque $V^2 = E$; adeoque $V = \surd E$. *Q. E. D.*

§ $T = \frac{L}{V}$ (per Theorema III.): ſed $V = \surd E$ (per primam partem hujuſce Theorematis); adeoque ſubſtituendo $T = \frac{L}{\surd E}$. *Q. E.D.*

E

# DE MOTU PENDULORUM IN CYCLOIDE.

## DEFINITIO.

FIG. 6. SI Circulus *CDH* qui tangit *AB* rectam in puncto *D*, more rotarum provolvatur super eadem, & circuitum integrum progrediendo conficiat: punctum *C*, quod situm in ejus circumferentia sub initio tangebat rectam *AB* in puncto *A*, motu suo ex rectilineo & circulari composito describet curvam illam lineam *ACEB* quæ Cyclois

cloïs appellatur. Recta vero $A B$ dicitur basis, & huic ad medium ejus punctum $F$ perpendicularis $E F$, axis, punctum vero $E$ vertex Cycloidis; Circulus autem $C D H$ vel huic æqualis in alio situ $G F E$ vocatur Circulus genitor.

## LEMMA I.

*Si circa Cycloidis axem* E K F *describatur Circulus genitor* E G F, *& a curvæ puncto quovis* C *ducatur* C I K *parallela basi* A B, *& secans Circulum in* G: *erit arcus Circularis* E G *æqualis rectæ* C G.

PATET ex Definitione totam Circuli circumferentiam æquari rectæ $A B$ atque adeo dimidiam circumferentiam $E G F$ æquari dimidiæ rectæ $A B$, nempe ipsi $A F$; Patet etiam Circuli æqualis $C D H$, diametro $D I H$ descripti, arcum $C D$ æquari rectæ $A D$; adeoque arcus $E G$ æqualis erit rectæ $D F$ vel $I K$ vel $C G$. *Q. E. D.*

LEMMA.

## LEMMA II.

*Iisdem positis, dico chordam* E G *parallelam esse rectæ tangenti Cycloidem in puncto* C.

PATET ex generatione Cycloidis, chordam *CD* perpendicularem esse ad Curvam in puncto *C;* itaque chorda *H C* tanget eandem: est autem *E G* chorda parallela chordæ *H C*. *Q. E. D.*

## LEMMA III.

*Manente Circulo genitore circa axem descripto, si a Curvæ puncto quovis* L *ducatur* L M K *parallela basi* B A *quæ abscindat circularem arcum* E M *cujus chorda sit* E M *recta: dico Cycloidis arcum* E L *æqualem esse duplæ chordæ* E M.

DUCATUR enim recta *S Q* parallela & quam proxima rectæ *L K* secans axem in *Q*, circulum in *R*, chordam *E M* productam in *P*, & Cycloidem

Cycloidem in *S*. Junge *E R* & demitte *R O* perpendicularem ad *E M O P*. Tangant denique Circulum in *E* & *M* rectæ *E N*, *M N*. Propter ſimilia triangula *E N M*, *P R M*, & æquales *E N*, *N M*, æquales etiam erunt *P R*, *R M*. Itaque lineola *M P* ſive *L S* dupla erit lineolæ *M O*. Sunt autem *L S* & *M O* incrementa momentanea ſynchrona arcus Cycloidis *E L* & chordæ *E M*: crevit itaque arcus *E L* duplo ſemper velocius quam chorda *E M*. Is ergo hujus duplus eſt. *Q. E. D.*

## PROBLEMA.

*Facere ut Corpus pendulum oſcilletur in Cycloide data.*

DETUR Cyclois *AVB* ſuper baſi *AB* deſcripta; producatur axis ejus *V D* ad *C* ut æquales FIG. 7.
evadant *D C*, *D V*; per *C* age *E C F* parallelam baſi *A B*; cape *C E*, *C F* æqualem utramque dimidiæ baſi; deſcribantur à puncto *C* ſuper *C E*, *C F* duæ ſemicycloides *C A*, *C B* æquales dimidiæ datæ Cycloidi, quarum vertices tangant baſim *A B* in punctis *A*, *B*. *A* puncto illo *C* filo *C T P*, lon-

gitudinem *CV* æquante, pendeat corpus *P* & ita intra ſemicycloides oſcilletur, ut quoties pendulum digreditur à perpendiculo *CV* filum, parte ſui ſuperiore *CT*, applicetur ad ſemicycloidem illam *CTA* verſus quam peragitur motus & circum eam ceu obſtaculum flectatur, parteque reliqua *TP* cui ſemicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus *P* oſcillabitur in Cycloide data *AVB*. *Q. E. F.*

Deſcribantur enim ſemicirculi genitores *AGE*, *DHV* ſuper axibus *AE*, *DV*. Age *TG*, *PH* parallelas baſi *AB*, & junge *AG*, *DH*.

Semicyclois *AC* æqualis eſt duplæ rectæ *AE*, per Lem. III. atque adeo æqualis rectæ *CV* vel filo integro *CTP*: itaque arcus Cycloidis *TA* æqualis erit parti liberæ fili *TP* quæ Cycloidem in *T* tangit. Unde cum *GA* parallela ſit tangenti *TK* (per Lem. II.) eique adeo æqualis, & dupla *GA* vel dupla *TK* æqualis ſit arcui *T*✳ vel rectæ *A*
*TP*, per Lem. III. erunt æquales *TK* & *KP*, & parallelæ *TG*, *PH* æquali intervallo diſtabunt a baſi *AB*. Abſcindunt ergo ſemicirculorum generantium

rantium æquales arcus *G A* & *H D;* unde parallelæ ſunt chordæ *A G*, *D H*, ac proinde *K P*, *D H;* & quadrilaterum *D H P K* eſt parallelogrammum & æquales ſunt *D K* & *H P*. Itaque cum *A K* recta ſit æqualis *G T* rectæ vel (per Lem. I.) arcui *A G* vel arcui *DH;* erit *H P* vel *D K* æqualis arcui reliquo *V H*, adeoque pondus *P* erit in Cycloide data *A V B*, per Lemma I. *Q. E. D.*

## THEOREMA I.

*Si Axis Cycloidis* D V *conſtituatur ad horizontem perpendicularis, vertice* V *deorſum ſpectante, & mobile incipiat a puncto quovis Cycloidis* L *oſcillari verſus verticem* V: *erit velocitas ejus in loco quovis* M *ut* $\sqrt{VLq - VMq}$; *vel ſi in rectam protendatur curva* V N M L *fiatque radius Circuli* L Z P, *erit velocitas in loco* M *ut ſinus* M X *qui huic radio ad* M *punctum perpendiculariter inſiſtit.*

AD Axem *D R S V* demittantur perpendiculares *L R*, *M S* ſemicirculo genitori *D O Q V* occurrentes in *O*, *Q*, & jungantur *O V*, *Q V*.

Oſcillantis

Oscillantis Velocitas in loco $M$ æqualis est velocitati corporis cujusvis cadentis ab $R$ ad $S$, per Theor. V. de Desc. Grav. Est autem hæc velocitas (per Theor. II. de Desc. Grav.) in subduplicata ratione Longitudinis $RS$ vel $RV - SV$ vel quantitatis $RV \times VD - SV \times VD$ vel $VOq - VQq$ vel $VLq - VMq$, per Lem. III. vel in ratione integra sinus $MX$, per Constructionem. *Q. E. D.*

## THEOREMA II.

*Iisdem positis, dico Circuli arcum quemlibet* XxY *sinubus* MX, NY *interjectum, eodem tempore describi cum velocitate maxima* VZ *ad verticem Cycloidis acquisita, quo a Pendulo dimisso ab* L *percurritur arcus* MN *respondens rectæ* MmN, *quæ interjicitur iisdem sinubus. Eritque adeo tempus quo percurritur arcus ille* MN *ut Circuli arcus* XY.

NAM ductus intelligatur sinus $mrx$ sinui $MX$ vicinissimus & parallela sit lineola $Xr$ lineolæ $Mm$.

Constat

Conſtat ex Theoremate præcedente lineolam *M m* deſcribi cum velocitate quæ eſt ut *M X* & lineolam *X x* cum velocitate quæ eſt ut *V Z*. Sed propter ſimilia triangula *M X V*, *r X x*, eſt *X x* ad *X r* vel *M m*, ut *V X* vel *V Z* ad *M X*. Sunt igitur *X x* & *M m* ad invicem ut velocitates quibuſcum deſcribuntur. Æquali itaque tempore deſcribuntur; ac pari ratione cæteræ partes correſpondentes. Unde totus arcus Cycloidalis *M N* & Circularis *X Y* æquali tempore deſcribuntur. Eſt autem tempus quo deſcribitur *M N*, vel quo deſcribitur *X Y* cum data velocitate *V Z* ut ipſe arcus *X Y*. *Q. E. D.*

## THEOREMA III.

*Tempus quo peragitur Oſcillatio quævis in data Cycloide, eſt ad tempus deſcenſus Gravis per axem Cycloidis, ut Circuli peripheria ad ejuſdem diametrum; atque adeo Oſcillationes omnes ſunt Iſochronæ.*

TEMPUS quo deſcribitur ſemiperipheria *L Z P* cum velocitate maxima *V Z* eſt ad tempus quo deſcribitur ſemidiameter *L V* cum eadem velocitate *V Z* ut Circuli peripheria ad ejuſdem diametrum. Eſt autem tempus prius idem atque tempus oſcillationis integræ *L V P*, per Theorema II. Tempus vero poſterius idem eſt atque tempus deſcenſus Gravis per Cycloidis axem *D V*: nam quo tempore ſemidiameter *L V* vel arcus *L V* vel dupla chorda *O V* percurritur cum velocitate maxima acquiſita ad verticem *V* ſive a pendulo oſcillante per arcum *L V* ſive a Gravi decidente per chordam *O V*; eodem cadit Grave ab *O* ad *V* (per Th. I. de Deſc. Grav.) vel a *D* ad *V*, per Cor. 3. Theor. IV. de Deſc. Gravium. Itaque tempus oſcillationis eſt ad tempus deſcenſus Gravis per axem Cycloidis ut Circuli peripheria ad ejuſdem diametrum. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Si corpora duo filis æqualibus ſuſpenſa, temporibus æqualibus oſcillationes ſuas peragant; in deſcenſu rectilineo æquabiliter accelerabuntur: & propterea Pondera eorum erunt ut Quantitates Materiæ.

*Corol.*

*Corol.* 2. Spatium quod a gravi e quiete dimiſſo, tempore quovis percurritur, eſt ad ſemiſſem longitudinis fili, quo idem grave ſuſpenſum eodem tempore oſcillationes ſingulas peragit; in duplicata ratione circuli peripheriæ ad diametrum. Cadat enim grave per fili longitudinem dimidiatam; & tempus deſcenſus erit ad tempus unius oſcillationis, ut circuli diameter ad peripheriam: augeatur jam tempus in hac ratione ut æquale fiat tempori oſcillationis; & ſpatium deſcriptum augebitur in duplicata illa ratione.

## THEOREMA IV.

*Tempus quo peragitur Oſcillatio quævis in Cycloide, ubi tum fili longitudo tum vis gravitatis variatur, eſt in ſubduplicata ratione longitudinis iſtius directe & vis gravitatis inverſe.*

TEMPUS Oſcillationis eſt ut tempus deſcenſus per Axem per Theor. III. atque hoc tempus eſt in ſubduplicata ratione axis vel dupli axis vel fili

fili longitudinis directe, & in subduplicata ratione vis gravitatis inverse. Nam si detur vis, longitudo descensus erit ut quadratum temporis; & si detur tempus, longitudo erit ut velocitas ac proinde ut vis: adeoque neutro dato, ut quadratum temporis & ut vis conjunctim. Unde tempus erit in subduplicata ratione longitudinis directe & vis inverse. *Q. E. D.*

*Corol.* Longitudo fili, quæ per hanc demonstrationem erat ut vis gravitatis & quadratum temporis simul; dato tempore erit ut vis illa simpliciter.

## SCHOLIUM.

Patet vires acceleratrices esse ut velocitatum mutationes dato tempore quam minimo genitas. Erit itaque vis acceleratrix in loco *M* ut lineola *r x*, dato arcu minimo *X x*, hoc est ut longitudo *V M*. Et vicissim, si vis acceleratrix sit ut *V M* & motus continuetur ab *L* versus *V*; erit velocitas in loco quovis *M* ut sinus *M X*, tempusque transeundi ab *M* ad *N* erit ut arcus *X Y*.

Quæcunque

Quæcunque in præcedentibus de oſcillationibus in Cycloide dicta ſunt, etiam de oſcillationibus minimis in Circulo pariter obtinebunt: nam iſtiuſmodi oſcillationes utrobique eædem erunt. Quin & hoc fortaſſe non eſt prætereundum; nempe corporis funipenduli in dato circulo utcunque oſcillantis velocitatem ad punctum infimum eſſe ut chorda arcus toto deſcenſu deſcripti. Nam per Corol. Theor. V. de Deſc. Grav. velocitas illa eadem erit ſive per arcum ſive per chordam deſcenderetur, & proinde erit ut chorda per Corol. 3. Theor. IV. de Deſc. Grav.

# DE MOTU PROJECTILIUM.

## THEOREMA.

*Curva descripta motu corporis oblique projecti est Parabola: & Velocitas Projectilis in quolibet puncto parabolæ ea est quam grave cadendo acquirere potest & casu suo describendo quartam Parametri partem pertinentis ad punctum illud datum pro Vertice sumptum.*

FIG. 8. EXEAT Projectile de loco $A$ secundum rectam $AE$, & sit $ACD$ curva descripta. Ponatur $AE$ longitudo quam dato quovis tempore Projectile transiret motu æquabili orto ex vi impressa si nulla esset gravitas: atque $AB$ alia longitudo

tudo quam grave eodem tempore tranſiret deſcendendo ab $A$ verſus centrum Telluris. Completo parallelogrammo $E\,A\,B\,C$, facile patebit projectile motu compoſito latum in fine ejuſdem temporis perventurum eſſe ad punctum $C$. Eſt autem $A\,E$ ut tempus quo deſcriberetur; adeoque $A\,E\,q$ vel $B\,C\,q$ ut temporis quadratum. Eſt etiam $A\,B$ ut quadratum ejuſdem temporis per Theor. II. de Deſc. Grav. Igitur $A\,E\,q$ vel $B\,C\,q$ eſt ut $A\,B$. Proinde curvæ deſcriptæ puncta $C$ ſita ſunt in Parabola cujus Diameter eſt $A\,B$, Vertex $A$ & Parameter ad hunc verticem pertinens eſt $\frac{B\,C\,q}{A\,B}$ vel $\frac{A\,E\,q}{E\,C}$.

Projectilis in puncto quovis $A$ ea eſt Velocitas qua longitudo $A\,E$ eodem tempore deſcribi poſſet quo grave deſcenderet ab $E$ ad $C$. Velocitas autem hoc deſcenſu acquiſita, eſt ad velocitatem illam qua longitudo $A\,E$ eodem tempore deſcribi poſſet, ut $E\,C$ ad $\frac{1}{2}\,A\,E$ per Theor. I. de Deſc. Gravium. Eademque velocitas acquiſita in $C$ cadendo ab $E$, eſt ad velocitatem acquirendam cadendo per quartam

tam partem Parametri nempe $\frac{\frac{1}{4} A E q}{E C}$, in ſubduplicata ratione longitudinis $E C$ ad longitudinem $\frac{\frac{1}{4} A E q}{E C}$ (per Theor. II. de Deſc. Grav.) vel in ratione integra ipſius $E C$ ad $\frac{1}{2} A E$. Itaque Projectilis velocitas in puncto $A$ ea eſt quam grave acquirere poteſt deſcendendo per quartam Parametri partem pertinentis ad Verticem $A$. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Si projectile dirigatur ſecundum $A E$ & parabolæ deſcribendæ parameter pertinens ad Verticem $A$ ſit æqualis quantitati $\frac{A E q}{E C}$; iſthæc parabola tranſibit per punctum $C$.

*Corol.* 2. In eadem vel in diverſis parabolis Parametri pertinentes ad quoſlibet Vertices ſunt ad invicem in duplicata ratione Velocitatum quibus feruntur Projectilia in iſtis verticibus, per Theor. II. de Deſc. Grav.

*Corol.*

*Corol.* 3. Itaque in quibufvis Parabolis ubicunque locorum æquales fuerint impetus feu motus ejufdem Projectilis vel æquales velocitates diverforum Projectilium, ibi femper æquales erunt Parametri; & vice verfa: utcunque diverfa fuerit directio motus in iftis locis.

## P R O B L E M A.

*Data Velocitate qua de loco dato Projectile dirigendum eft dataque pofitione Scopi feriendi: invenire Directiones vis imprimendæ.*

DATA Velocitate dabitur Parameter Parabolæ defcribendæ. Conftat enim per Theorema, fi grave eoufque defcendat dum data illa velocitas cadendo fuerit acquifita: Altitudinem ifto defcenfu percurfam fore æqualem quartæ parti parametri.

Efto jam *C* fcopus, pofitus in data recta *A C*. In loco *A*, de quo projectile dirigendum eft, erige

$A\,P$ normalem ad Horizontem & æqualem Parametro inventæ. Dividat hanc perpendiculariter & bifariam in $G$ recta $K\,H$, cui in $K$ occurrat recta $A\,K$ ad ipſam $A\,C$ perpendicularis, centroque $K$ & intervallo $K\,A$ deſcribatur circulus $A\,H\,P$. Denique per ſcopum $C$ ad horizontalem $A\,B$ normalis ducatur $B\,C\,E\,I$ circulum ſecans (ſi fieri poteſt) in $E$ & $I$: erunt $A\,E$ & $A\,I$ directiones quæſitæ. *Q. E. I.*

FIG. 9. Nam, ſi jungantur $P\,E$, $P\,I$, propter ſimilia triangula $P\,A\,E$, $A\,E\,C$ erit $P\,A$ æqualis $\frac{A\,E\,q}{E\,C}$. Itemque propter ſimilia triangula $P\,A\,I$, $A\,I\,C$ erit eadem $P\,A$ æqualis $\frac{A\,I\,q}{I\,C}$. Igitur, cum ſit $P\,A$ parabolæ deſcribendæ parameter pertinens ad punctum $A$, conſtat per Cor. 1. Theorematis, parabolam iſtam tranſituram eſſe per ſcopum $C$. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Patet rectam $A\,H$ biſecare Angulum $C\,A\,P$ menſuram viſibilis diſtantiæ inter Scopum & Zenith.

*Corol.*

*Corol.* 2. Ubi puncta *E I* concurrunt in *H*, five directiones binæ *A E*, *A I*, concurrunt in unam *A H*, Scopi diftantia *A C* evadet maxima *A* ϰ quæ velocitate illa data tranfiri poteft.

*Corol.* 3. Binæ quælibet directiones *A E*, *A I*, quarum utravis idem Scopus feriri poteft, æqualiter diftant à directione illa *A H*, hoc eft, anguli *E A H*, *I A H* funt æquales.

*Corol.* 4. Scopi diftantia *A C* vel *A B* pofita in linea Horizontali, eft ut finus dupli anguli Elevationis *E A C* vel *I A C*. Nam fi recta *C E I* occurrat rectæ *G H* in *F*, erit *A C* vel *G F* æqualis finui arcus *A E* vel *A I*, qui metitur duplum angulum *E A C* vel *I A C*.

*Corol.* 5. Maxima autem Scopi diftantia *A* ϰ pofita in linea Horizontali adæquat *A G* femiffem Parametri, adeoque datur: Et Scopus ifte ϰ attingi poteft exiftente angulo Elevationis *H A* ϰ femirecto.

*Corol.*

FIG. 10. *Corol.* 6. Si Projectile emittatur ſecundum *AE*, puncti altiſſimi parabolæ deſcribendæ Altitudo ſupra Horizontem adæquabit $\frac{1}{4}$ *EC*. Nam ſi *AC* biſecetur in *T* & ducatur *TR* parallela ad *CE* ſecanſque *AE* in *R*: erit *AC* ordinata ad parabolæ axem *TR* quem vertex ejus principalis biſariam dividet in *V*. Itaque Altitudo *TV* eſt æqualis $\frac{1}{2}$ *TR* vel $\frac{1}{4}$ *CE*. Cum vero *CE* ſit ſinus verſus arcus *AE*, ſive dupli anguli *CAE*, patet projectilis Altitudinem *TV* eſſe ut Sinus verſus dupli anguli Elevationis.

*Corol.* 7. Altitudo autem maxima projectilis emiſſi ſecundum *AP* normalem ad Horizontem adæquabit $\frac{1}{4}$ parametri *AP*; adeoque datur. Nam in hoc caſu coincidentibus *AE*, *EC* cum directione *AP*, altitudo illa *TV* vel $\frac{1}{4}$ *CE* jam evadet $\frac{1}{4}$ *AP*.

*Corol.* 8. Tempus quo projectile emiſſum ſecundum *AE* feretur ab *A* ad *C* eſt ut Chorda *AE* vel ut $\frac{1}{2}$ *AE*, hoc eſt, ut ſinus anguli elevationis *EAC*.

*Corol.*

*Corol.* 9. Tempus autem maximum projectili emiſſo ſecundum *A P*, normalem ad Horizontem, idem eſt quo grave deſcendet à *P* ad *A* per totam parametrum, adeoque datur. Nam in hoc caſu Projectile recta aſcendit ad altitudinem $\frac{1}{4}$ *A P*, deinde vero ab eadem altitudine deſcendit. Tempora vero aſcenſus & deſcenſus ſimul ſumpta conficiunt duplum tempus ſolius deſcenſus vel tempus deſcenſus ab altitudine quadrupla, per Theor. II. de Deſcenſu Gravium.

F I N I S.

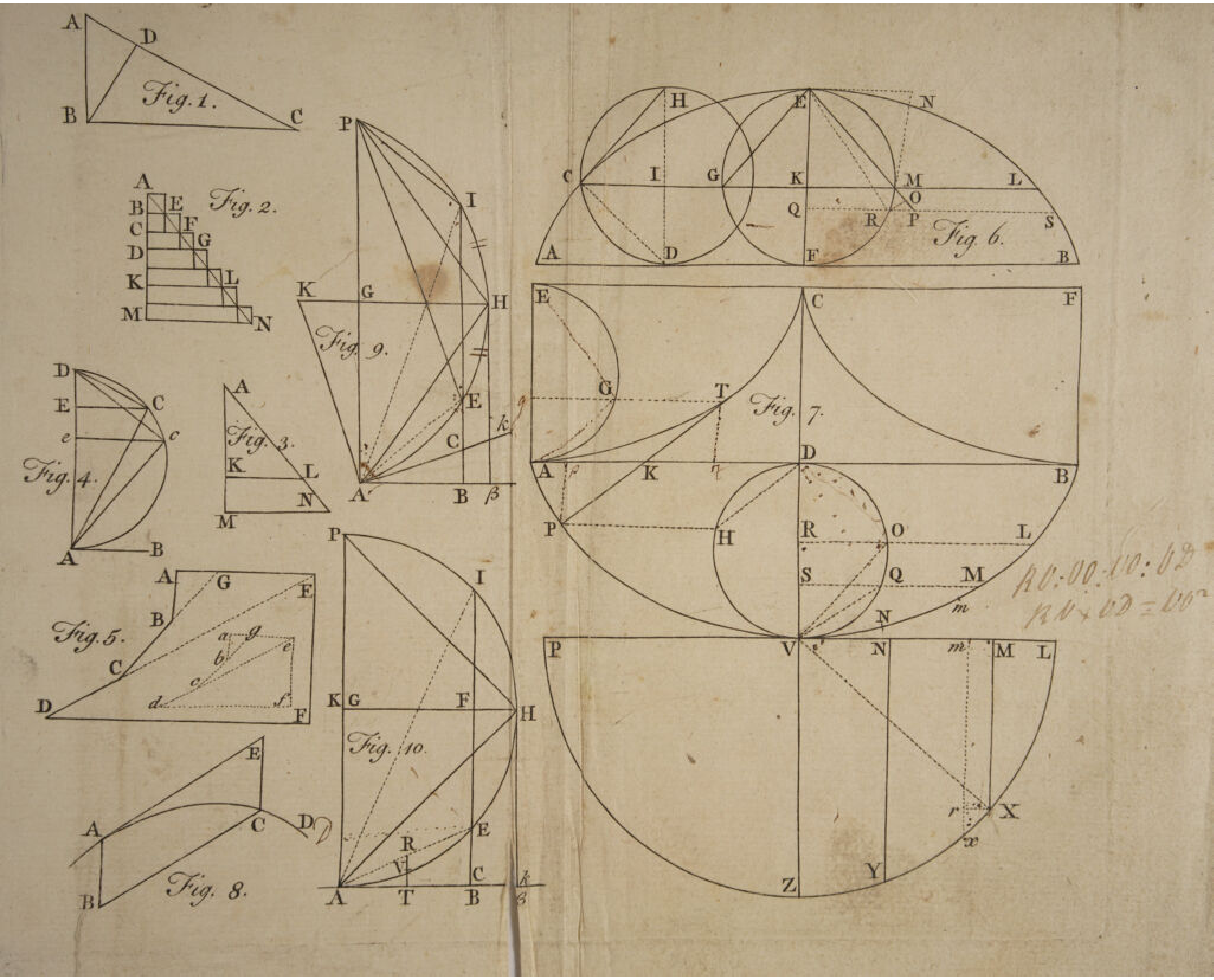
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
RO : OO :: OO : OD
RN × OD = OO²