Lectiones elementares opticae ex editione Parisina anni MDCCLVI in latinum traductae a C.S[cherffer] e S[ocietate J[esu] quibus auctarii loco accessit Brevis theoria micrometri objectivi a R.P. Rogerio Josepho Boscovich concinnata / [Nicolas Louis de La Caille].

Contributors

La Caille, Nicolas Louis de, 1713-1762.
Scherffer, Karl, 1716-1783
Boscovich, Ruggero Giuseppe, 1711-1787.

Publication/Creation

Viennae, Austriae : Typis J.T. Trattner, 1757.

Persistent URL

https://wellcomecollection.org/works/snkwhtud

License and attribution

This work has been identified as being free of known restrictions under copyright law, including all related and neighbouring rights and is being made available under the Creative Commons, Public Domain Mark.

You can copy, modify, distribute and perform the work, even for commercial purposes, without asking permission.

Wellcome Collection
183 Euston Road
London NW1 2BE UK
T +44 (0)20 7611 8722
E library@wellcomecollection.org
https://wellcomecollection.org

31762/C

31764
31765

LA CAILLE, Nicolas Louis de

7575

CLARISSIMI VIRI

D. DE LA CAILLE,

ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ, SUECICÆ, ET BORUSSICÆ, NEC NON INSTITUTI BONONIENSIS MEMBRI, AC PROFESSORIS MATHESEOS IN COLLEGIO MAZARINIANO PARISIIS

LECTIONES ELEMENTARES

OPTICÆ

EX

EDITIONE PARISINA ANNI MDCCLVI

IN LATINUM TRADUCTÆ

A

C. S. E S. J.

QUIBUS AUCTARII LOCO ACCESSIT

BREVIS THEORIA

MICROMETRI OBJECTIVI

A

R. P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH, E S. J.

IN COLLEGIO ROMANO MATHESEOS PROFESSORE

CONCINNATA

M. DCC. LVII.

VIENNÆ AUSTRIÆ

TYPIS JOANNIS THOMÆ TRATTNER, CÆS. REG. AULÆ TYPOGRAPHI ET BIBLIOPOLÆ.

WELLCOME
HISTORICAL
MEDICAL
LIBRARY

LECTORI BENEVOLO.

ectionibus Aſtronomiae Clariſſimi Authoris, quas nuper Gallici ſermonis ignari tironis commodo Latinas effeceram, has quoque, Opticam univerſam pulcherrimo compendio complexas, jungere viſum eſt. Neque enim ſatis aequum exiſtimabam, ut, quas privatis meis exercitationibus percommodas experirer, eas aliorum utilitati non perinde aptas redderem, apud quos id genus inſtitutiones, ut latina lingua fiant, uſus poſcit. Ceterum ita habe, Lector Benevole, ampliſſimam eſſe Authoris laudem, quam tametſi praefixam libro non legas, tu tamen, ubi evolveris, ni prorſus iniquus ſis, pronunciabis.

Illud autem tibi non injucundum fore exiſtimavi, ſi perbrevem Micrometri Objectivi *deſcriptionem, atque ex Opticis rationibus concinnatam theoriam, auctarii loco adjicerem, quam R. P. Rogerius Joſephus Boſcovich, cum his diebus apud nos degeret, petente R. P. Carolo Benvenuto, conſcripſerat, mihique pro ſua humanitate communicaverat. Utriuſque nomen apud litteratos notius eſt, quam ut a me ad eorum laudem quidpiam adjici poſſit. Committendum ſcilicet non putavi, ut iſthic, ſuoque adeo loco, praeſtantiſſimum, atque recens inventum taceatur, quod cum commoda non exigua in Aſtronomicis ſpondeat, in uſu tamen ſuas ſibi depoſcit cautelas. Vale.*

EXTRAIT

Addidi etiam in hac editione tractatum de Perſpectiva, quod quamvis plures longe apud nos libri extent in hanc Optices partem conſcripti, quam in alias; nullus tamen, quod ſciam, ſit omnium, qui methodo ſatis generali principia illius tradat. In plurimis non niſi regulæ quædam in praxi ſervandæ ſparſim occurrunt, eæque verbis obſcurioribus propoſitæ, & ordine, & demonſtratione deſtitutæ. Uſus autem ſum in principiorum, quæ adfero, ac methodorum, quæ in eorum applicatione ſunt tenendæ, expoſitione, ſtylo paullo fuſiore, quam ceterum adhibeam, quod ſcilicet non agamus hic de Theoria quapiam, quæ vel *Prælectionibus* evolvi primum debeat, vel ſtudio & meditatione Lectori familiaris poſſit reddi; ſed de Arte, quæ diuturnam potius normæ ac circini tractationem deſiderat, duce methodo, quæ nuſpiam ad intricatiorem aliquem caſum adhærere ſequacem patiatur.

INDEX

(o)

INDEX
CAPITUM ET ARTICULORUM.

PARS PRIMA.
OPTICA PROPRIE DICTA.

Pag.

ARTICULUS I. De principiis, quibus demonſtrationes Opticæ innituntur - 2
ARTICULUS II. De proprietatibus generalibus luminis - - - - - 3
ARTICULUS III. De proprietatibus Umbrarum - - - - - - 8
ARTICULUS IV. De proprietatibus luminis, viſionis & colorum cauſa ſpectatis 11
ARTICULUS V. De ideis, quæ ex viſu in anima noſtra conſequuntur - - 17
ARTICULUS VI. Varia phænomena objectorum procul viſorum - - 20

PARS SECUNDA
COMPLECTENS CATOPTRICAM ET DIOPTRICAM.

CAPUT I. Notiones Generales Catoptricæ & Dioptricæ.
ARTICULUS I. De imaginibus & focis - - - - - - - - - 28
ARTICULUS II. Leges & principia ab experientia deducta, quæ demonſtrationibus in Dioptrica, & Catoptrica fundamentum præbent - - 29

CAPUT II. De Catoptrica.
ARTICULUS I. De imaginibus, aut focis per reflexionem - - - - 31
ARTICULUS II. De loco, ſitu, & motu imaginum per reflexionem ortarum - 33
ARTICULUS III. Applicatio Theoriæ ſuperioris ad ſpecula plana - - - 37
ARTICULUS IV. De ſpeculis cylindricis, conicis &c - - - - - - 41

CAPUT III. Dioptrica.
ARTICULUS I. De imaginibus ſive focis ex ſimplici refractione - - - 43
ARTICULUS II. De motu imaginum reſpondente motui objectorum, quando lux ex aere in vitrum tranſit & viciſſim - - - - - - 44
ARTICULUS III. De imaginibus, quæ per duplicem refractionem efformantur - 46
ARTICULUS IV. De motu & ſitu imaginum, quæ e duplici refractione oriuntur - - - - - - - - - - - - - - 50

CAPUT IV. De viſione.
ARTICULUS I. Deſcriptio Oculi, & imaginum, quæ in eo depinguntur - - 53
ARTICULUS II. De viſione diſtincta. De diverſis vitiis viſus, & remediis, quæ Dioptrica ſuppeditat - - - - - - - - - - - 55
ARTICULUS III. De viſione, quæ fit ope vitrorum, vel ſpeculorum - - 58

CAPUT V. De Teleſcopiis, & Microſcopiis.
ARTICULUS I. Notiones præviæ - - - - - - - - - - 60
ARTICULUS II. De Teleſcopiis Dioptricis, ſive refringentibus - - - 62

ARTI-

ARTICULUS III. De Teleſcopiis Catadioptricis - - - - - - - 65
ARTICULUS IV. De Microſcopiis - - - - - - - - - - 67
ARTICULUS V. Animadverſiones Generales in Teleſcopia, & Microſcopia - 70

CAPUT VI. De Obſtaculis, quæ in conſtructione Teleſcopiorum & Microſcopiorum ſe produnt, & eorum perfectionem neceſſario minuunt. - 74
ARTICULUS I. De obſtaculis a figura ſphærica ſuperficierum pendentibus, & ratione iis occurrendi - - - - - - - - - - 74
ARTICULUS II. De Obſtaculis, quæ reſolutio lucis in diverſæ naturæ radios opponit - - - - - - - - - - - - - 75
ARTICULUS III. Quæ de proprietatibus lucis dicta ſunt, univerſim ad Teleſcopia, & Microſcopia applicantur - - - - - - - - 78
ARTICULUS IV. Applicantur eadem ad Teleſcopia, & Microſcopia dioptrica - 78
ARTICULUS V. Applicatio dictorum de proprietatibus lucis ad Teleſcopia & Microſcopia Catadioptrica - - - - - - - - - - 83

CAPUT VII. Diverſæ quæſtiones Opticæ - - - - - - - - 85

PARS TERTIA.

PERSPECTIVA.

CAPUT I. Notiones, & principia Generalia, quibus univerſa Perſpectivæ Theoria ſuperſtruitur - - - - - - - - - - - 92

CAPUT II. Deſcribuntur præcipuæ Methodi Perſpectivæ Practicæ - - 99
I METHODUS per craticulam Perſpectivam - - - - - - - 99
II METHODUS ſine craticula Perſpectiva - - - - - - - - 102
III METHODUS per margines ſcalares - - - - - - - - 103
PROBLEMATA ope marginum ſcalarium ſolvenda - - - - - 108

CAPUT III. Exemplum, & Obſervationes Generales pro delineationibus perſpectivis omnis generis - - - - - - - - - - 119

CAPUT IV. Apparatus neceſſarius, quando magnus objectorum ſitu, & magnitudine datorum numerus eſt delineandus - - - - - - 125

CAPUT V. De perſpectiva Umbrarum - - - - - - - - 129
ARTICULUS I. De proprietatibus Umbrarum, quarum ratio in Perſpectiva habetur - - - - - - - - - - - - - 130
ARTICULUS II. De umbris corporum, quando ſol vel luna eſt in eodem plano cum tabula - - - - - - - - - - - 132
ARTICULUS III. De umbris corporum, quando ſol vel luna eſt poſt planum tabulæ 133
ARTICULUS IV. De umbris, quando ſol eſt a tergo ſpectatoris - - - 134
ARTICULUS V. De umbris corporum, quando lucidum vicinum eſt, uti candela ardens - - - - - - - - - - - - 135
ARTICULUS VI. Varia Problemata de Umbris - - - - - - 139
AUCTARIUM Theoria Micrometri objectivi - - - - - - - 148

LECTIO-

LECTIONES ELEMENTARES OPTICAE.

1.

Optica eſt ſcientia Phyſico-Mathematica, de lumine, & viſione agens.

2. Lumen tripliciter ad oculum ab objecto venire poteſt, *primo* directe, & ſine flexu. *Secundo* ſi prius frangatur, vel refringatur. *Tertio* per reflexionem. *Optica proprie dicta* eſt ea pars, quæ tractat de viſione, luce directe ad oculum veniente. *Dioptrica* dicitur pars altera, explicans viſionem, dum lux frangitur, vel refringitur. Et *Catoptrica* denique exponit viſionem, quæ fit lumine reflexo.

3. *Perſpectiva* itidem ad ſcientiam Opticam pertinet; eſtque ars exhibendi in ſuperficie data objecta, qualia apparerent, ſi e puncto dato conſpicerentur.

4. *Medium* dicitur ſpatium, quod lumen permeare debet. Hoc ſpatium vel eſt ſimpliciter vacuum, aut ejusmodi repletum materia, quæ nullum prorſus obſtaculum motui lucis objiciat, tumque *medium liberum* appellatur; vel vero continet talem materiam, per quam lumen majore, vel minore cum facilitate tranſit, vocaturque *medium diaphanum*. Si materia per totum, quod occupat, ſpatium, ſit ejusdem prorſus conſtitutionis, ſibique ſimilis, erit *medium homogeneum*; at ſi conſtet partibus diverſæ indolis, efficiet *medium heterogeneum*.

PARS PRIMA.

Optica proprie dicta.

ARTICULUS PRIMUS.

De Principiis, quibus Demonſtrationes Opticæ innituntur.

5. Principia, quibus tanquam fundamentis Optica ſuperſtructa eſt, non aliunde quam ex experientia deducuntur. Sunt autem obſervata quædam in ipſa rerum natura, de quibus inter omnes Phyſicos convenit. Omnia hæc erui poſſunt e ſequente experimento, ſi ejus conditiones rite expendantur. Obſtruatur omnis omnino lumini in cubiculum aditus, exiguo tantum relicto foramine. Tum tempeſtate ſerena in pariete (qui nitidus ſit & albus) omnium objectorum extra foramen poſitorum imagines ſuis diſtinctæ coloribus, quamvis languentibus, & obſcurioribus, videbuntur. Rerum immotarum figuræ, ut arborum, ædificiorum, & ipſæ immotæ erunt; quæ vero moventur, harum quoque imagines moveri cernentur, uti hominum, equorum &c. Equidem ſitus horum omnium inverſus exhibebitur, quod inde accidit, quod radii per foramen decuſſatim tranſeant, quemadmodum uberius in Dioptrica & Catoptrica exponetur. Si lumen ſolare in foramen incidat, radius lucidus videbitur linea recta a foramine uſque ad oppoſitum parietem, aut tabulatum protenſus. Si oculus in hoc radio conſtituatur, oculus, foramen, & ſol in eadem recta apparebunt. Idem cenſendum de objectis aliis, quæ in pariete depinguntur. Porro imagines in eodem plano efformatæ tanto ſunt minores, quanto longius objecta a foramine ſunt remota. Cetera, quæ in hoc experimento occurrunt (quod exprimit, quæ in oculo noſtro continguntur, dum objecta nos ambientia videmus), alias examini ſubjiciemus; nunc ſi debita adhibeatur attentio, ſequentia deduci poſſunt.

6. I. *Lumen ſemper linea recta de ſe propagatur.*

7. II. *Punctum quodvis objecti luminoſi e loco quovis videri poteſt, ad quem ex eo recta, nullo interjecto obſtaculo, duci poteſt.* Tamdiu enim rei motæ imago in camera obſcura depingitur, quamdiu manet foramini oppoſita.

8. III. *Punctum quodvis luminoſum in omnem partem radiat. Eſt velut centrum ſphæræ lucis indefinite quaquaverſum extenſæ.* Et ſi cogitetur, quod interpoſito plano aliquo radii non nulli intercipiantur, erit punctum lucidum apex pyramidis luminoſæ, quam radii illi conſtituunt; & cujus baſis eſt planum eos excipiens.

9. IV. Imago quoque in camera obſcura objecti alicujus ſuperficiem exhibens, eſt baſis pyramidis luminoſæ, apicem in foramine habentis; & radii, qui hanc efformant, cum in foramine ſe inter-

terſecent, aliam huic ſimilem & oppoſitam efficiunt, cujus vertex eſt in eodem foramine, & baſis in ſuperficie objecti.

10. *Particulæ luminis ſunt ſubtiliſſimæ* : utpote cum radii e quovis puncto objectorum foramini oppoſitorum venientes, per aperturam quam minimam, quin ſeſe invicem impediant, vel confundantur, quantum quidem percipi poteſt, tranſeant.

ARTICULUS II.

De proprietatibus generalibus Luminis.

11. PROPOSITIO I. *In medio libero vis & intenſitas luminis per radios parallelos propagati ſemper manent eædem.* In medio enim libero nihil eſt, quod motui lucis obſtet; nihil, quod impediat, quo minus eodem ſemper modo agat; nihil, quod ejus celeritatem, aut directionem mutet.

12. PROPOSITIO II. *In medio libero vis & intenſitas luminis, quod propagatur radiis vel ex eodem aliquo puncto digredientibus, vel ad idem punctum concurrentibus, ſunt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ab illo puncto.*

Nam intervalla inter duos radios ab eodem puncto venientes ſunt ſemper in ratione diſtantiarum ab eo puncto (ſunt enim hæc intervalla baſes parallelæ triangulorum iſoſcelium, quorum crura radii conſtituunt). Supponamus itaque, per interpoſitum planum in diſtantia quapiam a puncto concurſus certum radiorum numerum intercipi; removeatur dein hoc planum ad diſtantiam duplam; tum ad triplam, quadruplam &c; erunt intervalla radiorum binorum quorumvis inter ſe ut 1, 2, 3, 4 &c. (quæ eadem eſt ratio diſtantiarum a puncto concurſus); & quælibet dimenſio baſium pyramidum hac ratione factarum, erit in eadem ratione. Ergo ſuperficies (Element. 608) earundem baſium erunt ut 1, 4, 9, 16 &c; ita ut idem radiorum numerus ſucceſſive diſtribuatur per ſuperficies, quæ ſunt in ratione duplicata diſtantiarum a puncto concurſus, adeoque ut vis luminis eas ſuperficies occupantis in eadem ratione decreſcat. Etenim ſi in baſi ſecundæ, tertiæ, quartæ &c. pyramidis accipiatur ſpatium æquale baſi pyramidis primæ, manifeſtum eſt, quod in eo ſpatio accepto in baſi pyramidis ſecundæ non ſit niſi pars quarta luminis totius baſis; in ſpatio accepto in baſi pyramidis tertiæ, non niſi pars nona; in ſpatio ſumto in baſi quartæ non niſi decima ſexta &c.

13. Hinc ergo conſtat, quod luminis a puncto, unde emittitur, digredientis vis ſequatur hanc ſeriem 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$ &c.

14. OBSERVA. Quamvis luminis vis adeo velociter decreſcat, quando ab origine ſua recedit, interim tamen *ſplendor corporis lucidi*

ad quodcunque intervallum in medio perfecte libero, & eadem apertura oculi visi manet constans.

Hic enim splendor dependet a densitate radiorum, qui imaginem in oculo depingunt, uti Articulo IV exponetur. Quod si jam oculus ad certam distantiam constitutus dein recedat ad distantiam duplam, in hac dupla distantia imaginis depictæ diameter tantum est dimidia diametri imaginis, quæ in ejus fundo ad distantiam simplam depingebatur, adeoque spatium imaginis secundæ est subquadruplum spatii imaginis primæ: atqui etiam radiorum tantum quarta pars in dupla distantia recipitur eorum, qui incidebant in distantia simpla; ergo in imagine secunda eadem est radiorum densitas, ac in prima, consequenter idem splendor.

15. Equidem si experientiam consulamus, semper objecta eadem tanto apparent obscuriora quanto longius distant, donec tandem prorsus non amplius videantur; verum hæc obscuritas inde oritur, quod non nisi trans aerem ea videre possimus, qui est medium satis densum, præcipue prope telluris superficiem, & incredibilem radiorum copiam per intervallum inter objectum & oculum dissipat. Quippe secundum calculum a D. Bouguer initum in spatio horizontali 189 hexapedarum, sive $\frac{1}{172}$ leucæ communis, pars centesima lucis perditur; & intervallo 7469 hexapedarum, seu fere $3\frac{1}{4}$ leucarum, pars tertia perit. (Essai d'Opt. p. 76 & 80). Disparent tandem objecta, quod eorum imaginum decrescente semper magnitudine, minor quoque fibrarum nervearum oculi numerus moveatur, donec tam fiant exiguæ, ut sensibilem impressionem facere non possint.

16. PROPOSITIO III. *Lumen per medium diaphanum ejusdem ubique densitatis quomodocunque propagatum, decrescit in progressione geometrica.*

DEMONSTRATIO. Supponamus densitatem uniformem medii, v. g. frusti vitri, esse ejus naturæ, ut partes illius solidæ radios lucis intercipientes efficiant partem $\frac{1}{n}$ totius voluminis vitri. Supponamus etiam, vitrum in lamellas æquales & parallelas sectum, quarum crassities æquet diametrum particulæ unius solidæ (quas omnes inter se æquales assumo): patet primo in cujusvis lamellæ spatio, per quod lux transit, esse particulas radios intercipientes $\frac{1}{n}$ totius illius spatii. 2do si fascis luminis, qui primam lamellam ingreditur, sit $= 1$, in prima lamella intercipi $\frac{1}{n}$, adeoque lumen in egressu tantum fore $= 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$. Pariter ex lumine in secun-

ſecundam lamellam veniente $= \frac{n-1}{n}$ intercipietur pars $\frac{1}{n}$, quæ eſt $\frac{n-1}{nn}$; hinc in exitu tantum manebit $\frac{n-1}{n} - \frac{n+1}{nn} = \frac{n^2-2n+1}{n^2}$ $= \frac{(n-1)^2}{n^2}$. Ex hac quantitate in tertia lamella rurſus ſubtrahetur $\frac{1}{n}$ ſeu $\frac{n^2-2n+1}{n^3}$, ut emergens tantum ſit $\frac{n^2-2n+1}{n^2} - \frac{n^2+2n-1}{n^3}$ $= \frac{n^3-3n^2+3n-1}{n^3} = \frac{(n-1)^3}{n^3}$; & ſic deinceps, id, quod evidenter progreſſionem Geometricam conſtituit.

17. PROPOSITIO IV. *In medio diaphano æquabilis denſitatis intenſitas luminis a puncto lucido intra hoc medium poſito divergentis decreſcit in hac ſerie* $\frac{n-1}{n}, \frac{(n-1)^2}{4n^2}, \frac{(n-1)^3}{9n^3}, \frac{(n-1)^4}{16n^4}, \frac{(n-1)^5}{25n^5}$ &c, in qua n exprimit quantitatem radiorum ad ſingula intervalla æqualia a puncto lucido per denſitatem medii interceptorum.

Cum enim lumen divergat, poſt ſingula intervalla intenſitas lucis decreſcit in ſerie 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$ &c (13). Et quia etiam medium denſum eſt, decreſcit quoque in hac ſerie $\frac{n-1}{n}, \frac{(n-1)^2}{n^2}$ $\frac{(n-1)^3}{n^3}, \frac{(n-1)^4}{n^4}, \frac{(n-1)^5}{n^5}$ &c.

18. Exempli cauſa, quia lux ad diſtantiam 189 hexapedarum perdit partem $\frac{1}{100}$ ſuorum radiorum propter denſitatem aeris, ſequitur, eſſe intenſitatem luminis, qua objectum videtur ad diſtantiam $\frac{1}{12}$ leucæ, ad intenſitatem, qua idem videtur ad diſtantiam $\frac{1}{8}$ leucæ, ſive 756 hexapedarum, in ratione reciproca $\frac{96059601}{160000000}$ ad $\frac{99}{100}$, ſive ut 33 ad 2 fere.

19. OBSERVA I. Cum lumen ab aſtris ad nos non niſi per atmoſphæram, quæ tellurem undique ambit, pervenire poſſit, eo plus radiorum perit, quo tractu longiore per eam transmittitur; eſt vero hic eo longior, quo radii magis oblique ad nos pertingunt: ſit enim A B C (Fig. 1) arcus peripheriæ telluris, *a b c* arcus concentricus, atmoſphæram terminans, quæ non niſi ad aliquot leucarum altitudinem aſſurgit. Sit D B radius e zenith obſervatoris in B conſtituti perpendiculariter ad horizontem incidens; E B ſit alter radius oblique; & F B tertius horizontaliter veniens. Manifeſtum eſt, quod radius perpendicularis ſolam altitudinem atmoſphæræ *b* B permeare debeat; obliquo E B jam longior via,

quam *b* B, ſcilicet G B, conficienda ſit; horizontali F B denique maximum ſpatium tranſeundum ſit, ut H B. E quo ſequitur, lucem aſtrorum eſſe maxime debilem, cum in horizonte verſantur; ſed ſemper augeri, dum magis ſupra horizontem elevantur; eſſe denique vivaciſſimam, dum per zenith tranſeunt.

20. D. Bouguer calculo propriis nixo experimentis reperit, quod e 10000 radiis, qui ſi atmoſphæra non eſſet, ab aliquo ſydere ad nos pervenirent, tot ſolummodo, quot ſequens Tabella exhibet, ad noſtros uſque oculos propagentur.

Gradus altitudinis apparentis	Numerus Radiorum.	Gradus altitudinis apparentis	Numerus Radiorum.	Gradus altitudinis apparentis	Numerus Radiorum
0	5	8	2423	30	6613
1	47	9	2797	35	6963
2	192	10	3149	40	7237
3	454	11	3472	50	7624
4	802	12	3773	60	7866
5	1201	15	4551	70	8016
6	1616	20	5474	80	8098
7	2031	25	6136	90	8123

21. OBSERVA II. Idem etiam experimentis oſtendit, Primo *lumen ſolare eſſe circiter* 300000^es *fortius luce lunæ plenæ, cum hæc mediam inter maximam & minimam diſtantiam a tellure habet.* Secundo *lumen ſolis non eſſe amplius perceptibile, quando* 1000000000000 *vicibus imminutum eſt,* ita ut corpus ſit vere opacum, quod partem tantum 1000000000000^am lucis ſolaris transmittit.

22. Alia lucis affectio, quæ per obſervationes Aſtronomicas conſtitit, eſt, quod *maxima cum velocitate propagetur, ita ut tempore fere 8 minutorum ad nos usque a ſole perveniat*, hoc eſt, 27500000 Leucas percurrat. Hinc fit, ut nihil fere videamus in cœlo in loco ſuo vero, aſtris interea in ſuis orbitis progredientibus, cum lux ſpatium inter oculum noſtrum, & aſtra interjectum conficit. Et quia præterea ipſe oculus revolutione telluris circa ſolem abripitur, phænomena ita inter ſe complicantur, ut aſtra alio, quam ubi reipſa verſantur, referamus. Effectuum horum particularis expoſitio non exiguam Aſtronomiæ modernæ partem conſtituit, quam *Theoriam aberrationis luminis* appellant.

23. PROPOSITIO V. *Si radii luminis ab eodem puncto dimanentes, & per foramen in cameram obſcuram admiſſi, excipiantur plano ad foramen parallelo, efformabunt in plano figuram ſimilem figuræ foraminis, eoque majorem, quo major fuerit plani a foramine diſtantia.*

Nam

Nam in hoc casu punctum luminosum est apex pyramidis, cujus basis est planum foraminis, & latera constituuntur per radios, qui latera foraminis radunt; hi porro in cameram obscuram producti semper magis divergunt: unde per planum iis objectum pyramis continuata intra cameram secatur ad basin parallele, adeoque sectio est figura luminosa foramini similis, & tanto major, quanto remotior a foramine.

24. Ex natura pyramidis constat, quod si planum non parallele ad foramen, sed oblique opponatur, figura luminosa tot quidem habitura sit latera, quot foramen, verum oblonga magis sit futura.

25. Illud etiam facile apparet, hanc figuram lucidam nil aliud esse, quam collectionem tot imaginum puncti radios emittentis, quot puncta sunt in foraminis plano.

26. PROPOS. VI. *Si lumen solis, vel lunæ plenæ per exiguum foramen cuiuslibet figuræ admissum excipiatur plano ad foramen parallelo in exigua a foramine distantia, figura spatii luminosi in plano similis erit foramini; at in majore distantia erit ad sensum circularis.*

Planum enim foraminis velut infinitis punctis constat, quæ sunt totidem foramina contigua, per quæ singula radii e singulis disci solaris punctis emissi transmittuntur. Quodlibet igitur punctum superficiei foraminis est apex coni luminosi, cujus basis est discus solis, & axis radius e centro veniens; angulus vero ad apicem a radiis ab extimi limbi diametraliter oppositis punctis emanantibus comprehensus 32 minutorum. Hinc radii iidem ultra foramen producti, alium efficiunt conum, cujus idem apex, idem axis, idem ad apicem angulus, & qui in partem soli oppositam indefinite prolongari possit. Quia autem amplitudo foraminis respectu distantiæ solis infinite parva, axes omnium horum conorum sunt inter se paralleli; & ob anguli a lateribus ad verticem comprehensi exilitatem, eadem latera cum axibus suis coincidunt fere in exiguo a foramine intervallo. Hinc si planum opponatur prope foramen, lux non aliter in eo excipitur, ac si soli axes conorum radiosorum inciderent; qui cum inter se sint paralleli, eundem ordinem & situm habent, quem puncta, quibus superficies foraminis constat, ideoque spatium illuminatum plani figuram foraminis habere debet. At vero si planum longius removeatur, latera conorum luminosorum sensibiliter a suis axibus discedunt, efformantque conos semper latiores, ita ut figura spatii illuminati in plano intervallo majore a foramine constet meris basibus circularibus conorum. Equidem centra horum circulorum, productis axibus determinata, eundem inter se situm habent in plano, eandem-

demque distantiam ab invicem, quem puncta superficiem foraminis constituentia; attamen peripheriæ eorum inter se confundunntur, & figuram proxime circularem efformant, uti videre est figura 2, e septem circulis, centris A, B, C, D, E, F, G descriptis composita, & heptagonum irregulare exhibente.

27. OBSERVA I. Figura spatii illuminati erit semper ad sensum circularis, si latera foraminis non multum inter se discrepant. At si foramen sit oblongum, uti parallelogrammum, etiam figura spatii luminosi oblonga evadet, terminis oppositis in semicirculos rotundatis. Universim, figuræ luminosæ a sole vel luna factæ in aliqua distantia semper angulis in rotundum versis apparent.

28. II. Si planum lumen excipiens non sit parallelum plano foraminis, figura erit ovalis, basibus conorum luminosorum in ellipses abeuntibus.

29. III. Si parte foramini obstructa ejus figura mutatur, figura imaginis lucidæ non mutabitur, sed solum dilutior, ac debilior videbitur, & minor.

30. IV. Hinc est, quod in ambulacris altioribus arboribus consitis, quæ densis frondibus radios solares arcent, uti sunt castaneæ majores, quandoque in terra circuli lucidi videantur, interstitiis frondium, per quæ lumen solare penetrare potuit, respondentes.

31. COROLL. *Si sint plura foramina vicina*, v. g. tria, *per quæ solaris lux in cameram obscuram admittitur, in minore distantia tres circuli luminosi depingentur; ubi vero tabula, qua radii excipiuntur, magis, magisque removetur, hi circuli ampliores fient, quin tamen eorum centra distantiam inter se mutent; tum sese invicem contingent; tandem in unum abibunt, qui crescente intervallo a foraminibus & ipse semper crescet, & ad accuratiorem rotunditatem accedet.*

ARTICULUS III.

De proprietatibus Umbrarum.

32. PROPOSITIO I. *Corpus opacum ex una parte illuminatum projicit umbram lineis rectis terminatam, & lumini directe oppositam.*

Lumen quippe (6) semper linea recta propagatur, eiusque radii extremam corporis superficiem radentes, umbram ex parte aversa terminant.

33. PROPOSITIO II. *Umbra corporis opaci eo sensibilior & nigrior est, quo corpus ex altera parte intensiore luce colluστratur.*

Tunc

Tunc enim oppoſitio inter umbram & ſpatium vicinum illuminatum eſt ſenſibilior.

34. OBSERVA. Si corpus illuminetur a diverſis lucidis ad eandem fere partem conſtitutis, totidem diverſas umbras in plagas lucidis oppoſitas projicit, quæ proinde prope corpus opacum partim inter ſe coincidunt; & ex propoſitione hac patet, cur umbræ eo ſint obſcuriores, quo plurium confuſione oriuntur.

35. PROPOSITIO III. *Si umbra corporis in plano excipiatur, ſpatiis reliquis medii illuminatis, ea ſemper cingitur penumbra tanto latiore, quanto lucidum majus eſt, & corpus longius a plano abeſt, vel umbra magis oblique in planum incidit; eſtque hæc penumbra eo dilutior, quo remotior ab umbra vera.*

Sit AB (fig. 3.) ſol; ED corpus opacum ſuper ſolo DI. Ducantur radii BF, CG, AH. Manifeſtum eſt, quod ſi ſpectator ab I usque ad H accedat, ſemper videat integrum ſolis diſcum. At ubi ex H progreditur, inferior ſolis limbus A illi obtegetur primum, tum major ſemper pars, donec in G ſuperiorem ſolum partem mediam conſpiciat. Denique in F ad umbram veram DF pertinget, totusque diſcus ſolis ejus oculis eripietur. Ex quo patet, *Primo* ſpectatorem eo ſemper minus clare videre poſſe, quo umbræ veræ fit proprior, ut adeo ſpatium HF tegatur penumbra ſemper denſiore, quo umbræ veræ eſt vicinior, cujus limes eſt in F. *Secundo* in triangulo FEH latus FH, quod eſt menſura penumbræ, eo eſſe majus, quo angulus FEH, qui diametrum apparentem lucidi AB metitur, major eſt, quo item diſtantia ED extremi E corporis opaci a plano DI umbram excipiente major; & quo denique rectæ EH, EF magis oblique incidunt in hoc planum.

36. OBSERVA. Hæc cauſa eſt, cur limites umbræ corporum a ſole illuminatorum ſemper ſint incerti & confuſi, maxime quando umbra longius projicitur. Et quia diameter ſolis ſub angulo 32 minutorum videtur; eſt (Elem. 746) *magnitudo penumbræ* FH *a corpore opaco projectæ ad diſtantiam limitis umbræ veræ* F *ab extremo corporis* E, *ſive ad* FE, *ut ſinus anguli 32 minutorum ad ſinum anguli* EHD, *quo limbus inferior* A *ſolis ſupra planum* DI, *in quod umbra cadit, elevatus eſt.* Ceterum, quæ hic de ſole dicuntur, etiam de luna intelligenda ſunt, & univerſim de omnibus corporibus illuminantibus, quorum diameter, quæ cauſa eſt penumbræ, ſenſibilis eſt. Ut enim penumbra nulla eſſet, luminoſum deberet eſſe unicum punctum.

37. PROPOSITIO IV. *Longitudines umbrarum verarum corporum a ſole vel luna illuminatorum ſunt reciproce ut tangentes altitudinum apparentium horum ſyderum ſupra planum, in quod umbræ cadunt.*

Nam in triangulo rectangulo EDF, altitudine corporis opaci ED ſumpta pro radio, eſt (Elem. 748) longitudo umbræ DF tangens anguli DEF, complementi alterius DFE qui eſt altitudo limbi ſuperioris ſolis ſupra planum DI. Itaque umbræ veræ ſunt ut cotangentes harum altitudinum, ſive (Elem. 737) reciproce ut tangentes altitudinis ſuperioris limbi ſyderis corpus opacum illuminantis.

38. COROLL. *Datis duobus e ſequentibus tribus: angulo altitudinis limbi ſuperioris ſyderis; altitudine perpendiculari corporis opaci ſupra planum, ad quod altitudo ſyderis refertur; & longitudine umbræ veræ ab opaco projectæ computata a puncto, in quod cadit perpendiculum a ſupremo corporis puncto in planum demiſſum; tertium ſemper reperitur*, ſolutione trianguli rectilinei ut EDF.

39. PROPOSITIO V. *Si ſphæra lucida radiet in opacam, ſitque hæc illa major; pars illuminans ſphæræ lucidæ tanto major, & pars illuminata opacæ tanto minor erit reliqua in utraque ſphæræ ſuperficie, quanto magis opaca excedit lucidam. Contrarium fiet, ſi lucida ſuperet opacam. Et ſi ſphæræ ſint æquales, ſuperficies dimidia lucidæ illuminabit ſuperficiem dimidiam opacæ.*

Sit B (fig. 4) ſphæra minor lucida, & C opaca major. Evidens eſt, partem ſphæræ C, quæ illuminari poteſt, determinari per extimos radios, qui eam attingere poſſunt, ſive, per radios tangentes. Similiter ultimi radii, qui a ſphæra B ad opacam venire poſſunt, ſunt eiusdem tangentes. Itaque tangentes LP, KO determinant & ultima puncta illuminantia L, K, & ultima puncta illuminata P, O. Si porro ad rectam BC ducantur diametri HI, MN perpendiculariter, peripherias globorum B & C bifariam divident (Elem. 402); & ſi e centris B & C demittantur ad tangentes perpendicula BL, BK, & CP, CO, hæc in puncta contactus incident. Ergo arcus LRK (major 180 gradibus) exhibet partem illuminantem; & arcus PSO (180 gradibus minor) partem illuminatam. Quod ſi globus C eſſet lucidus, globus B opacus; arcus PSO foret pars illuminans, & LRK illuminata. Denique ſi globi eſſent æquales, tangentes forent inter ſe parallelæ, & per extrema diametrorum HI, MN tranſirent, ideoque tam arcus illuminans, quam illuminatus contineret 180 gradus.

40. COROLL. I. Ex ſimilitudine triangulorum rectangulorum LBH, PCM; KBI; OCN, arcus LH, PM, KI, ON eſſe ejusdem numeri graduum, facile apparet. Hinc *arcus globi metiens amplitudinem partis illuminantis eſt complementum ad 360 gradus arcus metientis amplitudinem partis illuminatæ in altero globo.*

41. COROLL. II. Ex eadem ratione *arcus obſcurus globi illuminati eſt tot graduum, quot arcus illuminans globi lucidi. Et arcus non illuminans globi lucidi habet tot gradus, quot arcus illuminatus globi opaci.*

42. Co.

42. COROLL. III. Et quia ſimilia ſunt triangula rectangula ABL, LBH, eſt angulus BAL = LBH. E quo ſequitur, exceſſum arcus illuminantis ſupra arcum non illuminantem; ſive differentiam inter partem illuminantem & illuminatam, menſurari per angulum LAK, quem radii tangentes efficiunt.

43. COROLL. IV. *Sphæra lucida opacæ æqualis, ſemper hujus dimidium illuminat, quocunque intervallo diſtent; verum ſi lucida major ſit, quam opaca, tanto major hujus pars illuminatur, quanto minor eſt ſphærarum diſtantia, & viciſſim.* Quo enim ſphæra altera alteri propior eſt, eo angulus a tangentibus comprehenſus PAO fit major, & pars illuminata obſcuram magis excedit.

44. Hinc globi medietas, cujus diameter excedit diametrum pupillæ, uno oculo ſimul videri nequit. Et ſol plus quam hemiſphærium cujusvis planetæ illuminat; luna plena minus, quam dimidium telluris &c.

45. COROLL. V. *Umbra globi illuminati a globo æquali cylindrica eſt, & infinita.* Terminatur enim radiis inter ſe parallelis circumferentiam circuli ambientibus. *Umbra globi illuminati a globo majore eſt conica & finita,* ut KAL. Et *umbra* QPOV *globi* C *illuminati a globo minore* B *in infinitum extenditur forma coni truncati.*

46. COROLL. VI. Datis ſemidiametris BK, CO, & diſtantia centrorum BC duorum globorum, facile determinatur axis BA coni umbroſi a globo minore projecti. Ducta enim KD ad BC parallela, cum etiam BK, CO ſint parallelæ, eſt BK = CD, & BC = KD, & triangula KDO, ACO ſimilia. Hinc DO: OC = DK: CA; ſive CO — BK: CO = CB: CA: ſubtracta igitur CB ex CA, remanet BA, axis quæſitus. Exhibeat B terram, C ſolem; ſit BK = 1, CO = 80, 5, & BC = 17189; reperietur BA = 216, quæ circiter efficiunt 324000 leucas, ſi ſcilicet ſemidiametro telluris BK tribuantur 1500 leucæ.

47. OBSERVA. Manifeſtum eſt, quod pars illuminata, de qua in hac propoſitione ſermo eſt, etiam complectatur penumbram, & terminetur per umbram veram.

ARTICULUS IV.

De natura & proprietatibus luminis, viſionis & colorum cauſa ſpectatis.

48. Oculus, ſi quædam dempſeris, idem nobis præſtat, quod camera obſcura. Pupilla foramen eſt, quod radios lucis ſe in ea interſecantes admittit, ut in tunica fundum oculi veſtiente rerum omnium, ad quas viſus noſter ſe extendit, imagines in-

verſas depingant, quarum diametri fere ſunt ut anguli a radiis ab extremis objectorum punctis venientibus ipſo in ingreſſu in pupillam comprehenſi, dum ſcilicet hi anguli exigui ſunt; ſive quod idem eſt, imaginum ejusdem objecti diametri eo ſunt majores, quo objectum minorem habet diſtantiam ab oculo. Quamvis autem ſitum inverſum rerum imagines in noſtro oculo acquirant; nihilominus tamen omnia ſitu erecto videmus. Cum enim radii decuſſatim ingrediantur oculum, ii, qui ab objecti parte ſuperiore veniunt, inferiorem imaginis partem efformant, & ex oppoſito. Et quoniam nos non aliunde de ſitu objecti judicium ferre poſſumus, quam ex impreſſione in organum viſus per radios facta, neceſſe eſt, ut objectum ſecundum eam directionem collocatum cenſeamus, qua impreſſio fit: atqui ſi radius a ſuperiore objecti parte incidens feriat partem oculi inferiorem, reactio hujus exhibet objectum radios emittens in recta a parte inferiore ſurſum reducta; igitur, ut reipſa eſt, ſuperior objecti pars, etiam ſuperius videtur.

49. Licet ratio, & modus, quo per lumen in oculo objectorum imagines depinguntur, ſine legum Dioptricæ notitia accurate explicari nequeant; omittere tamen hic non poſſumus, quæ nos experientia tum de modo, quo lumen viſum afficit, tum de conſequentibus inde in nobis ideis docet.

50. Lumen eſt collectio particularum innumerarum materiæ, ſive corpuſculorum propemodum infinite parvorum, ac inter ſe diſtinctorum, ſumme elaſticorum, & maxima cum velocitate motorum, ut cum ad organum viſus perveniunt, illud vi ſuæ denſitati, maſſæ, ac celeritati proportionali feriant, ad motum quemdam tremulum concitent, diverſasque impreſſiones efficiant, quas ex lege unionis animæ cum corpore in mente noſtra variæ conſequuntur ideæ de præſentia objectorum, e quibus ejusmodi corpuſcula, ſive atomi luminoſæ veniunt.

51. Atomi lucis diverſæ ſunt indolis, aut ſaltem proprietates peculiares quibuslibet ſunt inditæ, nulli obnoxiæ mutationi, nec a varia modificatione luminis pendentes, quæ dum propagatur, ei accidere poteſt.

52. *Radium luminis* cum dicemus, intelligemus viam atomi, vel puncti lucentis; ſive potius ſeriem ſubtiliſſimi fili ſpeciem exhibentem atomorum luminoſarum, contiguarum inter ſe, & ejusdem naturæ. Unde tot erunt radiorum diverſæ ſpecies, quot atomorum, quibus ſinguli conſtant. Illæ autem atomi diverſæ ſpeciei cenſendæ ſunt, quæ in organo viſus diverſas ſenſationes excitant. Denique ſenſationum diſcrimen in eo conſiſtere eſt putandum, quod *colores* appellamus.

53. Quam-

53. Quamvis autem fieri non poſſit, ut radii lucis in omnes omnino ſpecies, quæ re ipſa ſunt, diſtribuantur exacte; ſolent tamen ſeptem præcipuæ numerari, *colorum primigeniorum* nomine, quorum ordo idem eſt, ac eorum, qui in iride obſervantur, ſcilicet *ruber*, *aurantius*, *flavus*, *viridis*, *cæruleus*, *indicus*, *violaceus*. Hinc cum impoſterum ſermo de coloribus erit, *radios rubros*, *radios cæruleos* &c. vocabimus eas lucis atomos, quæ in oculo noſtro talem excitant ſenſationem, ut objectum, quod videmus, rubrum, aut cæruleum judicemus.

54. Objectum viſibile redditur, vel quia ipſum directe poteſt particulas lucis in noſtros oculos emittere, diciturque tum *objectum luminoſum*, uti ſunt ſol, fax ardens &c, & lumen illius *lumen directum*; vel quia radiis objecti luminoſi expoſitum eosdem poteſt in noſtros oculos remittere, atque ut diximus, hoc modo occaſionem præbere ideæ de ſua præſentia: vocatur vero tunc *objectum illuminatum*, & lumen inter hoc & noſtros oculos interceptum, *lumen reflexum*.

Quoniam ſol reſpectu noſtri eſt objectum maxime luminoſum, quod ad nos radios emittat, illud jam exponemus, qua ratione cetera objecta nobis faciat conſpicua. Idem enim de aliis lucidis, velut de flamma candelæ, ſentiendum eſt.

55. Sol verſus omnem partem ad immenſam uſque diſtantiam, incredibilem copiam radiorum omnis generis in ſe commiſtorum emittit *, ita quidem, ut neque ulla horum certa ſpecies prædominetur ad ſenſum, neque in toto univerſo, qua quidem nobis patet, ullum ſit punctum ſenſibile, quod radios non recipiat, ſaltem niſi vel a corpore ſolido occupetur, vel intra umbram veram corporum luci imperviorum ſit poſitum.

56. Radii, quos oculus noſter ex omnibus punctis ſuperficiei ſolis viſui objectæ directe recipit, conum conſtituunt, cujus baſis eſt ſuperficies ſolis, & apex in apertura, ſeu pupilla oculi. Iidem radii ultra pupillam producti (ſi inflexionem quandam, de qua in ſequentibus dicemus, hic non attendamus) alium conum intra oculum efficiunt, atque in ejus fundo terminatum, qui propterea in ſpatio circulari hujus fundi impreſſionem facit, ad quam idea de præſente objecto lucido, & rotundo, quod ſolem dicimus, conſequitur.

57. *Imagines objectorum in oculo* dicemus in ſequentibus illa ſpatia

* Non iſthic illud agimus, ut litem inter Philoſophos componamus, an lux conſiſtat in vero, & continuo effluvio particularum a corpore luminoſo avulſarum; an vero efficiatur motu undulatorio aut oſcillatorio materiæ elaſticæ per hoc univerſum diffuſæ, quem ei ſol, aliaque corpora lucida per ſe imprimant, aut in eadem conſervent. Quam quisque partem hac in quæſtione tueri velit, Phyſicis liberum eſto decernere. *Nota Autoris.*

in fundo hujus organi, in quæ radii lucis recipiuntur, & ubi conſequenter impreſſio ſentitur. Vocabuli ratio eſt, quod reipſa, ſi reciſis ex parte poſtica oculi exterioribus tunicis, ante eum objectum lucidum, vel ſaltem fortiter illuminatum conſtituatur, objecti imago ſuis coloribus picta in fundo oculi videatur.

Dum radii ſolis tantum ex reflexione ad nos perveniunt, ſive magis generaliter, dum prius in aliud corpus incidunt, quadruplex caſus eſſe poteſt.

58. CASUS I. Si particulæ hujus corporis (quod luci impenetrabile ſuppono) ita ſint coordinatæ, ut qua parte radii in illud incidunt, ex integro reflectantur eo ſitu & ordine, quo advenerunt, * manifeſtum eſt, oculum in quem ita reflexi radii incurrunt, eodem prorſus modo debere affici, ac ſi directe e ſole venirent. Itaque in oculo ſolis tantum perceptio orietur, cujus imago quoque in eodem depingitur, & corpus reflectens verum eſt ſpeculum, oculo non viſibile. Sed quoniam radii primam ſuam directionem amiſerunt, ſol non apparet in eodem loco, in quo videretur radiis directe ad oculum emiſſis, quippe cum exiſtimemus objecta ſita eſſe in ea linea recta, quæ eſt radiorum directio ipſo momento, quo ad viſus organum pertingunt; quemadmodum ſi forte ictum lapidis recipiamus, quin eum, cum projicitur, videamus, putamus eum linea recta, atque ea ex parte, qua impreſſio fit, adveniſſe, quamvis ſubſultim, aut linea aliqua curva ad nos delatus ſit, cujus tangens in puncto, ubi nos ferit, eſt recta illa, quam veram lapidis viam arbitramur.

59. Porro experientia didicimus, corpus opacum, & ſoli expoſitum eo accuratioris ſpeculi vices gerere, quo ejus ſuperficies magis eſt polita, hoc eſt, eo minus a nobis cerni hanc ſuperficiem, ſed tanto vivaciorem ſolis imaginem ab ea ad nos reflecti. Quoniam itaque corpora nobis nota nequaquam tam exacte ſunt lævia, ſed particulis extimis nulla certa lege diſpoſitis, atque inæqualiter inclinatis, aliis altius & ſupra alias aſſurgentibus, figura diverſa &c; ſupponemus in hoc Articulo, corporum noſtratium ſuperficies exacte ſpeculares eſſe non poſſe.

60. CA-

* Altera hæc eſt lis inter Philoſophos, utrum ſcilicet reflexio lucis aliorum elaſticorum corporum more fiat ſola motus reſolutione ad impactum in partes ſolidas obſtaculi, an, quod potius videtur, lux reflectatur ex incurſu in materiam elaſticam per ſuperficiem corporum diffuſam: an denique reflexio hæc fiat repulſione, quæ ſit vis quædam activa in lucem appellentem ad corpora exercita. Quin quidquam hac de re ſtatutum velimus, ita loquemur de reflexione, velut ſi fieret in ipſis particulis ſolidis corporum. *Nota Autoris.*

60. CASUS II. Si is ſit particularum in ſuperficie corporis, in quam lux incidit, ſitus & ordo, ut ſive omnes, ſive plurimi radii reflectantur, ſaltem ut non plures ad ſenſum ex una, quam ex altera quavis eorum ſpecie abſorpti extinguantur, ſintque radii inter ſe confuſi & permiſti, quaquaverſum ſcilicet pro varia particularum reflectentium inclinatione directi; oculus in directione luminis ita confuſi poſitus radios ex omni parte ſuperficiei reflectentis recipiet, qui formam quandam pyramidis habebunt, cujus baſis eſt ſuperficies reflectens, apex oculi pupilla; producti dein intra oculum ſecundam efficient pyramidem ad fundum uſque pertingentem, cujus baſis fere ſimilis baſi exterioris. Jam vero quævis particula ſolida ſuperficiei reflectentis eſt ſpeculum quoddam minimum, quod exiguam tantum imaginis ſolis portionem repræſentare poteſt; ſitu autem irregulari ſit, ut in corpore totidem ſpecilla minima diverſimode inclinata conſiderare debeamus, quot ſunt particulæ ſolidæ reflectentes: ideoque etiam totidem diverſi ſitus apparentes erunt cujusvis portionis imaginis ſolis. Unde neceſſe eſt, ut ad impreſſionem totalem, quæ per totam baſin pyramidis luminoſæ in oculo efformatæ fit, conſequatur idea collectionis cujusdam particularum lucentium, figura huic baſi ſimili circumſcriptarum.

61. Quæ jam diximus, exemplo ſequente clariora fient. Notum eſt, diametrum ſolis apparentem ſubtendere in ſuperficie ſphæræ cæleſtis angulum circiter 32 minutorum. Si itaque ſpeculo plano ſoli obverſo ejus imago verſus oculum reflectatur, ea videbitur ſpatium ſatis magnum in ſpeculo occupare. Supponamus dein hoc ipſum ſpatium ſpeculi fere totum obtegi, exigua tantum portione relicta, in quam radii cadere poſſint. Evidens eſt *primo*, partem ſolummodo parvam imaginis ſolis, quæ prius tota videbatur, tum exhiberi poſſe. *Secundo* hanc ipſam portionem imaginis eadem appariturum figura, ac eſt ſpatium ſpeculi non tectum. Idem prorſus contingeret, ſi loco ſpeculi majoris usque ad exile ſpatiolum obtecti adhiberetur ſpecillum exiguum, æquale ac ſimile parti apertæ majoris. Hoc poſito, cogitemus, plura ejusmodi exigua ſpecilla, quorum nullum integram ſolis imaginem exhibere poſſit, diſponi ita, ut figuram quamlibet regularem, vel irregularem, hexagonam verbi gratia, referant, poſſintque ſingula partem imaginis ſolaris, quam repræſentant, verſus oculum eundem reflectere (in ſequentibus dicetur, debere ea in diverſis planis collocari, ut id præſtare poſſint); liquet, tot in hoc caſu ab oculo videri partes imaginis ſolis, quot ſunt ſpecula, quæ omnes ſimul figuram lucidam efficient, diſpoſitioni ſpeculorum ſimilem, uti hexagonam; & ſiquidem

vel

vel novum adjungeretur prioribus ſpecillum, vel unum ex iis ſubtraheretur, etiam nova imaginis ſolaris portio adderetur, aut diſpareret figura illa lucida eundem in modum mutata, quo figura ſpeculorum.

62. Hinc etiam quisque facile videt, *Primo* ſpecilla dicta ita diſponi inter ſe poſſe, ut nullum inter portiones imaginis ſolaris ſenſibile intervallum advertatur, ac figura lucida, quam efformant, continua appareat, & nusquam interrupta. *Secundo* ut quodvis ſpecillum nitidius, aut obſcurius, ut politurae magis, minusve exactae fuerit, ita partem figurae, quam efformat, magis minusve fore fulgidam. *Tertio* Figuram hanc luminoſam eandem debere in oculo facere impreſſionem, ac ſi radii directe e ſole advenirent, ideoque ejusdem debere apparere coloris cum ſole, hoc eſt, albi.

63. Quod ſi igitur ſuperficies corporis, quae magnam radiorum ſolarium copiam, atque omnis generis, reflectit, quin plures ad ſenſum unius, quam alterius ſpeciei abſorbeat, conſideretur, tanquam quae conſtet particulis ſolidis, totidem polyedra inter ſe ſeparata referentibus, quorum plana ſint ſpecilla exigua, irregulariter collocata, atque diverſimode inclinata; extra dubium eſt, quin tale corpus album debeat apparere, ac figurae conſimilis imagini in oculo efformatae. Ut autem textura ejusmodi polyedrorum arctior, laxiorve fuerit, pluribus, paucioribusve inter ea relictis interſtitiis obſcuris; & plana magis minusve lævia, ut eorum ſitus tum reſpectu oculi, tum etiam ſolis opportunior; ita etiam albedo ſuperficiei corporis magis, minusve nitida videbitur.

64. Ex allatis jam ſequitur, in praeſente hypotheſi *illa corpora eſſe alba, quae radios omnis ſpeciei inter ſe permiſtos ad noſtros oculos reflectunt.*

65. CASUS III. Si particulae ſolidae corporis talem ſitum reſpectu ſolis & oculi habeant, aut ejusmodi ſint naturae, ut non niſi paucos radios verſus oculum remittant, reliquis omnibus intra poros, vel interſtitia ſua abſorptis, ibidemque per varia obſtacula interceptis, ne ad oculum pertingere poſſint, niſi exiguo numero; oculus tam paucas portiones imaginis ſolis recipiet, ut vix perceptibilem impreſſionem faciant, aut ſaltem ut non faciant aliam, quam quae requiritur, ut advertatur, oculo objici quasdam particulas exiguum lumen reflectentes. Atque hinc ejusmodi corpus vel prorſus, vel prope eſt nobis inconſpicuum, neque de ejus praeſentia & figura idea haberetur, niſi objecta vicina tanto eſſent lucidiora, ut diſcrimen fieret manifeſtius. Id genus corpora nigra dicimus.

66. Ex dictis porro colligitur, in hac hypotheſi *corpora illa eſſe nigra, quae aut nullos, aut paucos radios lucis reflectunt.*

67. CA-

67. CASUS IV. Quando particulæ ſolidæ ſuperficiem corporis conſtituentes ejusmodi ſunt, ut omnes fere radios abſorbeant, præterquam unius certæ ſpeciei, quos propemodum omnes reflectunt, oculus, in quem incurrunt radii reflexi, recipiet tot portiones exiguas imaginis ſolis, quot ſunt particulæ reflectentes, eruntque omnes ejusdem coloris, ut ſimul collectæ excitent ideam corporis præſentis certo colore prædiți, quem natura radiorum determinat, atque ejus figuræ, quam ſitus harum exilium imaginum poſcit.

68. Hinc autem apparet I, *corpora certo colore prædita eſſe illa, quæ fere omnes radios aliarum ſpecierum abſorbent, ac unius tantum reflectunt.*

69. II. *Colorum alterius alterum temperantium variationem dependere a radiorum diverſæ ſpeciei, qui reflectuntur, combinatione.*

70. III. *Corpus certo colore imbuere nihil aliud eſſe, quam vel ejus particulis, ſeu interioribus, ſeu tantum ſuperficiem conſtituentibus alium ſitum, ac ordinem tribuere; vel in poros ejus materiam quandam extraneam inducere; vel ejus ſuperficiem vernice oblinere; aut quavis ſimili ratione efficere, ut radii ab hoc corpore non niſi unius ſpeciei reflectantur, aut certe ut una radiorum reflexorum ſpecies prædominetur.*

71. Si ad allatam hactenus viſionis & colorum explicationem advertamus, illud etiam inferemus, quod *quævis lucis atomus ſecum ferat imaginem puncti illius luminoſi, e quo emiſſa eſt.* Si radius flavus e ſole veniens incidat in corpus rubrum, ſeu ita tinctum, ut rubrum appareat, non reflectetur, ſed intra poros penetrabit, ac intercipietur, aut ſaltem non niſi ita detortus, & poſt varios flexus iterum emerget, ut ad oculum pertingere nequeat. At ſi idem radius in corpus flavum incurrat, inde reflectetur, quin in ejus interſtitia penetret. Interim tamen hæc non tanto cum rigore accipi volumus, ut putetur nullus omnino radius flavus abſorberi poſſe a corpore flavo, aut a rubro reflecti; verum id ſolum intelligimus, quod ſi faſcis luminis ingenti numero radiorum, v. g. flavorum, conſtans incidat in corpus rubrum, valde pauci inde reflectendi ſint, ſi conferantur cum reliquis, qui penetrant, vel abſorpti exſtinguuntur.

ARTICULUS V.

De ideis, quæ ex viſu in anima noſtra conſequuntur.

72. Diximus, figuram, & præſentiam objectorum a nobis non aliter percipi, quam per impreſſionem, quam eorum imagines, cum in fundo oculi depinguntur, faciunt; quin nec eo-

rum magnitudinem, ſitum, motum, & diſtantiam aliunde advertimus, quam ex impreſſionum ejusmodi diverſa indole, aut e judiciis quibusdam, quibus aſſuevimus, etſi perſæpe falſis, & per rectum ratiocinium corrigendis.

73. Eſt quædam viſus noſtri habitudo & facilitas ad certum intervallum ſeſe extendens, ad quod ſcilicet res externas tum quando verſamur cum aliis, tum in reliquis noſtris negotiis conſpicere ſolemus. Hunc diſtantiæ modum cum objecta habent, quamvis eorum imaginum dimenſiones in noſtris oculis admodum mutentur, iis paullo propius admotis, vel recedentibus; nos tamen haud advertimus ullam magnitudinis variationem. At vero quando objecta ultra eum terminum ſunt poſita, ea tanto minora nobis apparent, quanto ab iisdem longius abſumus, & ex oppoſito. In exemplo: ſi ſucceſſive ab eodem homine ad intervallum 2, 4, & 6 pedum recedam, extra dubium eſt (Elem. 415), dimenſiones ejus imaginis fore proxime inter ſe ut 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, conſequenter ejus magnitudo eadem ratione decreſcere deberet, de qua ſcilicet judicium ferendum non eſt, niſi dependenter ab imagine in oculo expreſſa. Interim tamen ejusmodi diminutionem haud advertere ſolemus. Atque ut pateat, id non aliunde, quam a dicta jam habitudine provenire, ſatis erit, ſi conſideremus, magnitudinem hominis ad 120 pedes in eadem, in qua nos ſumus, planitie diſtantis nobis haud videri ad tantam reduci exilitatem, cujus tamen eadem appareret, ſi ad pedem turris centum viginti pedes altæ conſtituti eundem hominem in turris vertice videremus. Id, quod non alia ex cauſa accidit, quam quod præter uſum ſit, oculos ad tantam altitudinem fere ad perpendiculum attollere, quando alias cum hominibus verſamur, neque id genus diſtantias experientia crebriore cognitas habeamus: ideoque haud amplius e familiari nobis videndi ratione judicare poſſumus, ſed magnitudinem objectorum apparentem præcipue ex imaginibus efformatis in oculo metimur.

74. Quando itaque objectum ad eam diſtantiam conſiſtit, cui oculus jam aſſuevit, videtur, quod de ejus magnitudine & intervallo interjecto non aliunde judicemus, quam e notitia uſu longo hauſta dimenſionum rerum ceterarum inter oculum & objectum poſitarum, neque tum imaginum in oculo efformatarum diverſas extenſiones attendamus, ſeu quod idem eſt, nullam habeamus rationem angulorum, ſub quibus objectum apparet. Sed extra hanc diſtantiam, aut ſi interpoſitum obſtaculum rerum interjacentium conſpectum nobis eripiat, uti ſi objectum per teleſcopium videatur, vel microſcopium, aut ſaltem per exiguum foramellum

in

in plano opaco factum; magnitudo & distantia objecti apparens videtur dependere a dimensionibus ejus imaginis in nostro oculo, ita ut si hæc augeatur minuaturve artificio quovis optico, ipsum objectum, licet immotum, appareat magnitudine & distantia mutata; auctum vel imminutum; accedere, vel recedere, quemadmodum in sequente articulo exponetur.

75. Quod ex D. Cheſſelden, celebri Anatomico Anglo, narrat Smithius, dictis lucem affundet. Ostendit Cheſſelden, ab iis, quorum oculi vera cataracta laborant, nihilominus discerni posse inter noctem & diem, inter corpora nigra, alba, & intense rubra, cum sufficienter illuminantur, quin tamen figuram eorum dignoscant; tum narrat, se puero tredecim annos nato simili cataracta laboranti oculos consanasse; sed hunc oculorum usum adeptum haud potuisse amplius colorata illa corpora noscere, cum proponerentur, erroneis ideis, quas prius sibi efformarat, ad id non sufficientibus. Ea, quæ antea etiam de nomine norat, cum videret, revera esse eadem, vix credebat. Cum distincte cernere cœpisset, adeo non poterat de objectorum distantia judicium ferre, ut omnia oculis contigua putaret: inter se, & cubiculi parietes intervallum aliquod intercesse, res ei erat conceptu difficillima. Omnia apparebant ei sub initium ultra modum grandia: capere non potuit, qua ratione tota domus esset suo cubiculo major, licet perbene intelligeret, hoc illius partem esse. De corporum figura, & mole prorsus diversorum discrimine, nihil certi poterat statuere; neque sciebat, quid esset, quo in rerum aspectu se tantopere affici advertebat. Cum imagines coloribus expressæ exhiberentur, tum vero perplexa videbantur omnia: duorum mensium spatio opus erat, donec comprehenderet, non nisi repræsentationem corporum solidorum per eas haberi. Oculos sub initium versus objecta non dirigebat; imo ut hoc faceret, paullatim & longiore tempore assuescere debuit.

Atque hæc facile cuivis persuadebunt, nequivisse puerum de distantia, & figura corporum judicium ferre, nisi postquam sæpius advertit, imo postquam habitudinem id advertendi contraxit, quod non solum diversitas quædam esset in impressionibus ex mutata figura & situ imaginum in oculis depictarum, sed etiam certa quædam relatio cum ideis ad motus organi tactus excitatis. Oculos versus objecta dirigere haud antea didicit, quam experiretur, hanc ipsam idearum congruentiam esse tum maxime luculentam, cum oculus certum situm respectu objectorum haberet. Denique quisque videt, eum non ante videndi usum ceteris communem obtinuisse, nisi assuetudine contracta dijudicandi quam promptissime, qua ratione id, quod oculum afficeret, in reliquos sensus esset acturum.

ARTICULUS VI.

Varia phænomena objectorum procul visorum.

76. *Angulus opticus* est, quem in pupilla efficiunt radii ab extimis dimensionis objecti punctis venientes.

77. PROPOSITIO I. *Objecta sive æqualia, sive inæqualia, sub eodem angulo visa apparent æqualia*, nisi scilicet aliud adsit, quod in casu peculiari phænomenon mutet.

Etenim ceteris omnibus paribus de æqualitate vel inæqualitate objectorum non aliunde judicare possumus, quam ex imaginibus in oculo formatis: jam vero si duorum objectorum quorumvis dimensiones ad pupillam eundem subtendunt angulum, imagines in oculo æquales efformari debent; videbuntur igitur æqualia.

78. PROPOSITIO II. *Objecta similiter oculo obversa ea ratione videntur minui, qua ab oculo recedunt.*

Nam dimensio quævis objecti est basis constans trianguli, cujus latera sunt distantiæ utriusque extremi ab oculo; quod si jam hæc latera augeantur, anguli quoque iis oppositi crescunt, ideoque (Elem. 495) angulus ad oculum, lateri constanti oppositus, decrescit, minoresque semper imagines in oculo formantur.

79. COROLL. I. *Magnitudines apparentes, sive anguli optici objectorum, sunt in ratione reciproca distantiarum ab oculo, quando hi anguli sunt exigui.*

80. COROLL. II. *Partes æquales objecti valde magni, & extra distantiam, ad quam res alias spectare solemus, apparent inæquales.* Partes enim remotiores ab oculo, minorem debent angulum opticum subtendere; & ex opposito.

81. COROLL. III. *Fieri potest, ut pars objecti minor, major appareat, quam altera, quæ in se major est.* Nempe si ita objiciatur oculo, ut angulum opticum majorem subtendat.

82. PROPOS. III. *Lineæ parallelæ ad magnam distantiam productæ, videntur concurrere, & extremis suis angulum efficere.*

Nam lineæ intervallum parallelarum metientes, quod semper idem est, angulos opticos semper minores subtendunt, & tandem insensibiles, cum ad distantiam quodammodo infinitam perventum est: igitur versus extrema intervallum inter parallelas nullum apparet, & parallelæ videntur concurrere.

83. OBSERVA. Hinc manifestum fit, *primo, cur turris admodum alta videatur versus illum propendere, qui ejus verticem ex pede spectat.* Si enim turris est ad perpendiculum erecta, spectator eam refert ad perpendiculum, quod per ejus oculum transit. Hæc duo perpendicula inter se parallela videntur convergere: igitur murus perpendicularis turris in majore altitudine ad perpendiculum per oculum

lum ductum accedit, ideoque inclinari versus spectatorem videtur velut in eum ruiturus. *Secundo, cur maris superficies eo altius attolli videatur, quo longius a littore distat, & quo magis editus est locus, e quo spectatur.* Eadem hujus est ratio. Nam maris superficiēs ad libellam compositā, refertur ad lineam libellæ, sive horizontalem, per oculum transeuntem; ambæ, cum sint parallelæ, videntur eo magis convergere, quo ab oculo fiunt remotiores: crescit autem hæc distantia, quo longius maris aspectus patet; hicque patet eo longius, quo in altiore loco spectator consistit. *Tertio, cur in longioribus porticibus & ambulacris lacunar videatur deprimi, & pavimentum attolli.* Rursus enim lineas libellæ tam lacunaris, quam pavimenti cum horizontali per oculum ducta comparamus, quæ illa inferior, hac superior est. *Quarto, cur quando prope murum longiorem, vel seriem continuam arborum viam facimus, ea, quæ ad dextram sita apparent, videantur versus sinistram accedere: aut si utrinque sit murus, vel arborum series, cur semper longius a se se videantur recedere, quo propius accedimus? &c.*

84. COROLL. Linea libellæ per oculum transiens, v. g coronæ murorum, semper talis apparet, utcunque objiciatur oculo; aliæ vero omnes, seu supra hanc, seu infra eam ductæ, ad horizontem inclinatæ videntur.

85. PROPOS. IV. *Figura objecti apparens dependet a situ punctorum, quæ ad oculum radios emittere possunt.* Patet per se.

86. COROLL. I. *Linea recta ita posita, ut producta per centrum pupillæ ad oculi superficiem esset perpendicularis, instar puncti apparet.* A nullo enim ejus puncto, nisi extremo, radius ad oculum venire potest.

87. COROLL. II. *Planum ita situm, ut axis oculi productus in eodem perpetuo maneret, debet tanquam linea videri.*

Sola enim perimetri pars oculo obversa in eundem radios emittere potest.

88. COROLL. III. *Solidum, cujus unicum tantum planum oculo objicitur, non aliter ac mera superficies apparet.*

89. PROPOSITIO V. *Si oculus sit in eodem plano cum linea admodum longa, & ad magnam distantiam descripta; ea, sive regularis sit, sive irregularis, apparet ut arcus circuli, cujus centrum oculus occupat.*

Quoniam puncta G, F, A, B, C, D, E, (fig. 5) curvæ irregularis sunt in plano per oculum transeunte, & extra distantiam, ad quam objecta considerare assuevit, discernere nequit, quænam eorum sint aliis viciniora. Pariter differentiam rectarum OP, & OD haud distinguit, utpote quæ exigua est, si cum alterutra harum linearum conferatur. Itaque cum nullum ei suppetat medium de inæqualitate horum radiorum judicandi, eo connaturaliter propendet, ut eos æquales credat. Idem est de reliquis. Quare se in

centro circuli exiſtimabit, in cujus circumferentia omnia illa puncta ſint poſita.

90. OBSERVA. Si differentiæ radiorum eſſent admodum magnæ, partes viciniores ſive ex vivacitate luminis, ſive ex magnitudine apparente dignoſci poſſent. Et ſi oculus haberet magnam diſtantiam a plano curvæ, itidem ejus inæqualitates diſcerneret; nam cum lineæ DP, BL, FI non ſint infinite parvæ relate ad OD, OB, OF, & ipſo ſitu directius viſui exponerentur, ſenſibiles evaderent.

91. *Linea irregularis parva procul viſa, ut* ABCDE, *inſtar rectæ apparere debet.* Quoniam ſcilicet videtur tanquam arcus circuli paucorum graduum.

92. Hinc eſt *primo*, quod quis in magna planitie variis anfractibus terminata conſtitutus ſe putet eſſe in centro circuli. *Secundo* quod talis, etſi ſemper progrediatur, nullum ſpatium ſe confeciſſe arbitretur; quod nempe ſe adhuc in centro conſtitutum videat. *Tertio* quod cælum inſtar ſphæræ cavæ appareat, in cujus axe ſit oculus poſitus, & aſtra ejus ſuperficiei inhæreant. *Quarto* quod urbes majores, ſylvæ latæ in formam amphitheatri flexæ videantur, quando procul conſpiciuntur. *Quinto* quod ſphæræ admodum diſſitæ, ut ſol, luna, tanquam mera ſuperficies circularis plana appareant. *Sexto* quod polyedrum variis areolis planis terminatum ad diſtantiam mediocrem inſtar globi, ad magnam autem diſtantiam ut circulus videatur. *Septimo* quod turris quadrangularis, vel polygona rotundæ, aut etiam planæ ſpeciem e majore intervallo exhibeat. *Octavo* quod non advertatur motus in globo circa axem æquabiliter rotato etiam in diſtantia parva, niſi quibusdam maculis ſit notatus, & motus lentior.

93. PROPOSITIO VI. *Si oculus conſtituatur in axe polygoni regularis perpendiculariter per ejus centrum tranſeunte, polygonum advertit eſſe regulare; ſed ſi ponatur extra hunc axem, polygonum videbitur illi irregulare.*

Oculo in axe conſtituto, radii ex ſingulis polygoni angulis ad eum ducti efficiunt pyramidem baſis regularis, cujus conſequenter omnes anguli plani angulum ſolidum ad verticem conſtituentes inter ſe æquantur, uti etiam omnia plana pyramidem efformantia. Itaque latera polygoni ab oculo ſub æqualibus angulis, & ſimiliter poſita videntur. At ſi oculus ſit extra axem, latera æqualia polygoni inæqualiter ab oculo diſtant, ideoque apparent inæqualia, nec eodem modo collocata.

94. COROLL. *Polygonum regulare oblique viſum apparet oblongum; & circulus inſtar figuræ ovalis.* Partes enim remotiores videntur minores, magisque contractæ; viciniores autem majores, & latiores: igitur diagonales aliæ apparent majores, aliæ minores. 95.

95. OBSERVA. Perſpectivæ eſt, phænomena ſuperioribus propoſitionibus expoſita Geometrice determinare.

96. PROPOSITIO VII. *Objecta in regione circumſita aſpectui noſtro expoſita videntur eo obſcuriora, magisque confuſa, quo remotiora ſunt. Quo autem nobis propiora ſunt, eo vivacioribus coloribus, magisque diſtincta apparent.*

Præcipua hujus phænomeni ratio eſt, quod viſio diſtincta, & colorum vivacitas dependeat ab intenſitate luminis, quæ, quo objectum remotius eſt, eo magis minuitur ex interjecto aere craſſiore inter objectum & oculum.

97. Inde fit *primo*, ut objecta magis in edito collocata, ut quæ in vertice altiorum montium ſunt, longe diſtinctius videantur, quam quæ ad eorum radicem ſunt poſita, quod aer ſubtilior, & a vaporibus purior ſit in ejusmodi altitudine, quam in locis humilioribus. *Secundo*, ut pictores colores clariores, & illuſtriores obſcurioribus, & languidioribus rite temperando efficere poſſint, ut corpora depicta extra tabulam emineant, & ſolidi ſpeciem referant.

98. PROPOSITIO VIII. *Objecta obſcura & confuſa, ſimul etiam ceteris remotiora apparent.*

Ratio eſt, quod cum remota non niſi obſcura & confuſa videre ſoleamus, etiam illa judicemus remota, quæ horum more apparent.

99. OBSERVA. Si quavis ratione contingat, ut objectum extra limites collocatum, intra quos de corporum magnitudine ex uſu judicare poſſumus, attamen ejus molis, cui videndæ alias aſſuevimus, reddatur ſolummodo obſcurius, & magis confuſum; illico etiam remotius, quam ſit, putabimus. Et quia manſit in eadem diſtantia, adeoque in oculo noſtro imago imminuta non eſt, exiſtimamus objectum fuiſſe majus factum.

100. Ex his pronum erit rationem reddere, *primo* cur noctu ignis lucidior appareat propior, ac vere ſit. *Secundo*, cur phantaſmata, quæ per tenebras ſibi quidam effingunt, & ipſa vera objecta, noctu iter facientibus prope occurrentia, uti vicinæ arbores, domus &c, videantur remotiora, quam ſint. *Tertio*, cur cælum inſtar fornicis aliquantum depreſſi ſuperne ſubſidere intuentibus putetur. Nempe luce ſtellarum horizonti viciniorum decreſcente (20), eas magis diſtare exiſtimamus, quæ ad horizontem propiores ſunt. Hinc experimur, diſtantiam apparentem oculi ab horizonte, eſſe fere triplam diſtantiæ ejusdem a zenith. Colligimus hanc cæli depreſſionem ex eo, quod dum oculi judicio punctum cæli inter zenith & horizontem medium deſignare volumus, illud ad 23 vel 24 gradum altitudinis referamus, cum tamen, ſi cælum hemiſphærii formam referret, ad 45 gradum ſupra horizontem

idem

idem punctum designandum foret. *Quarto* cur sol & luna, cùm nudo oculo in ortu suo spectantur, longe majores appareant, eaque ratione decrescant, qua altius supra horizontem ascendunt; licet si eorum diametri instrumentis Astronomicis explorentur, contrarium detegatur. Sit enim AE (Fig. 6) horizon, O locus observatoris; sol in diversa altitudine designetur per BC, DH, FG; superficies apparens cæli sit AMRE. Evidens est, solem in quocunque loco circuli AHGE constitutum, exhibere diametrum sub angulis ad centrum O æqualibus BOC, DOH, FOG: at quia figura cæli depressior apparet, sol cum est in BC, videtur in KI; cum hæret in DH, vel FG, putatur esse in PN vel TS: hinc licet sub iisdem videatur angulis, IOK, PON, TOS; minor tamen creditur, utpote vicinior oculo.

101. PROPOSITIO IX. *Objecta eo remotiora, & majora apparent, quo major aliorum numerus, ampliusque in plano spatium inter ea & oculum interjacet; & ex opposito tanto videntur propiora & minora, quanto pauciora alia corpora, & angustius loci spatium inter oculum & objecta intercedit.*

Amplitudo enim spatii intercedentis, ac objectorum aliorum numerus speciem magnæ distantiæ exhibent, ideoque fallitur oculus, ut corporibus justo majorem molem tribuat; & ex opposito.

102. Hæc causa est *primo*, cur horizon usque ad cæli superficiem procurrere videatur, utpote cum nullum intermedium corpus appareat. *Secundo*, Cur si quis in planitie constitutus inter oculum & objecta alia interjectam vallem cernere nequeat, ea sibi longe viciniora arbitretur; & distantiam non advertat, nisi jam prope vallem conspicuam positus. *Tertio*, Cur vesperi objecta paullo in edito collocata, & visui recte exposita, admodum dissita, & magna existimentur. Cum enim per tenebras non liceat ex interjecto spatio de distantia eorum judicium ferre, ad extremum horizontem ea referimus, ideoque etiam valde magna putamus.

103. PROPOSITIO X. *Si duo objecta inæqualiter ab oculo remota, percurrant spatia temporibus æqualibus æqualia, & parallela, id, quod remotius est, videbitur tardius moveri altero.*

Patet; nam spatium descriptum a remotiore minorem angulum ad oculum subtendit.

104. OBSERVA. Si directiones mobilium non sint parallelæ, fieri potest, ut vicinius appareat tardius moveri remotiore, etsi plus reipsa spatii eodem tempore percurrat, quam alterum. Nempe possunt hæc spatia ita obliqua esse posita respectu oculi, ut minorem angulum radii ab eorum extremis ducti efficiant, quam sit angulus subtensus a spatiis minoribus remotioris mobilis, sed magis directe oculo objectis.

105. PRO-

105. PROPOSITIO. XI. *Objectum quavis celeritate motum, ſi deſcribat ſingulis ſecundis ſpatium, quod in oculo angulum non majorem* 15 *vel* 20 *ſecundis ſubtendit, immotum videtur.*

Conſtat experientia, cum aſtra nudo oculo nullum motum ſenſibilem habere videantur, licet plura eorum tempore minuti ſecundi deſcribant ſpatium angulum 15 ſecundorum ſubtendens.

Hinc eſt, quod in horologiis portatilibus motus indicis per circulum horarium, imo etiam alterius circulum minutorum percurrentis, ſit inſenſibilis.

106. OBSERVA. Ratio ſpatii percurſi a mobili ad diſtantiam ejusdem ab oculo, quando motus eſt inſenſibilis, cenſeri poteſt 1 ad 1200; hoc eſt, ſi corpus tempore unius ſecundi non deſcribat plus, quam $\frac{1}{1200}$ ſuæ diſtantiæ ab oculo, immotum apparet, quia tum illud ſpatium non ſubtendit angulum majorem, quam 17 ſecundorum & 12 tertiorum.

107. Ex oppoſito, *ſi objectum moveatur celeritate ſumma, uti glans plumbea e catapulta ferrea vi pulveris nitrati ejecta, videri nequit.* Nullibi enim tamdiu moratur, ut viſus illic figi poſſet, & objectum percipere.

108. PROPOSITIO. XII. *Duo aut plura objecta eadem velocitate apparente & directione mota, ſi referantur ad aliud immotum, quieſcere videntur; objectum vero quieſcens directione oppoſita, & celeritate eadem moveri apparet, qua reipſa alia moventur.*

Nam Duo aut plura objecta eadem directione, & velocitate apparente lata inter ſe ſitum non mutant; ſed quia motu ſuo vero alium ſemper ſitum reſpectu objecti immoti acquirunt, & ad alias ſucceſſive, aliasque hujus partes referuntur, videtur iſtud moveri in partem oppoſitam, & celeritate eadem.

109. Hinc pendet *Primo*, quod curru vel navi vectus ſe credat ſemper in eodem loco manere, & objecta vicina in partem oppoſitam moveri. Hæc oculorum fallacia eo eſt efficacior, quo navis major eſt: tunc enim navis partes, magno numero, & variis diſtantiis ſpectatorem ambientes, cujus reſpectu eundem ſemper ſitum retinent, haud poſſunt videri locum mutare, vel moveri. Et certe ſi ſpectator immoto perſtet capite, imagines partium navis in ejus oculo locum non mutant, ſed in eisdem ſemper ſpatiis depinguntur, ideoque non ſolum partes navis immotæ apparere debent, ſed etiam aptiſſimæ, ad quas alia objecta referantur, ut, an moveantur, an quieſcant, exploretur. Jam vero ob motum verum navis fieri debet, ut objecta extra navem immota omni momento ſitum & diſtantiam ab oculo ſpectatoris mutent: igi-

tur eorum imagines diverſa ſpatia in oculo ſucceſſive percurrunt, ut adeo totus motus navis illis videatur tribuendus.

110. Simili illuſione fit, quod nobis perſuadeamus, ſolem & omnia ſydera intra 24 horas circa tellurem moveri, & quod revolutio annua ſolis reipſa circa terram fiat.

111. *Secundo*, quod cum nubes magna celeritate feruntur, luna velociſſime videatur in partem oppoſitam moveri, & nubes absque motu hærere in eodem loco. Hæ quippe ſimul eadem directione, & celeritate progrediuntur.

112. PROBLEMA. *Datis poſitione loco ſpectatoris* S (figur. 7), *in quo ſe putat quieſcere; quotcunque punctis* A, B, C *ſpatii veri mobilis in plano quovis progredientis; & totidem punctis* a, b, c, *ad quæ ſpectator iisdem momentis pervenit, determinare viam apparentem mobilis.*

Ductis rectis A a, B b, C c, fiant his parallelæ & æquales S α, S β, S γ omnes per punctum S transeuntes; erunt α, β, γ, puncta, per quæ ſemita apparens mobilis ducenda eſt. Nam cum v. g. recta S α ſit æqualis & parallela rectæ A a, punctum α reſpectu S eundem ſitum habet, ac punctum A reſpectu a. Igitur ſpectator, ſe in S poſitum credens, exiſtimare debet, mobile eſſe in α. Idem eſt de reliquis punctis β, γ &c.

113. COROLL. I. *Locus verus, & locus putatitius oculi; locus verus & locus apparens objecti ſemper ſunt in angulis parallelogrammi.* Locus verus objecti, & locus putatitius oculi, ſemper ſunt in angulis oppoſitis; locus apparens objecti, & locus verus oculi ſunt in reliquis duobus angulis oppoſitis. Hinc *objectum ſemper apparet oppoſitum loco vero oculi ſpectatoris.*

114. COROLL. II. *Si objectum ſit immobile in* A, *ejus ſemita apparens* $\alpha\beta\gamma$ (fig. 8) *eſt æqualis ſemitæ veræ oculi, & in plano parallelo.*

Quoniam $\alpha a, \beta b, \gamma c$ ſunt parallelogramma, quorum S A eſt diagonalis communis, ſimulque interſectio communis planorum eorum, baſibus S a, S b, S c, in eodem plano exiſtentibus, in quo ſcilicet eſt ſemita vera oculi; etiam his parallelæ & æquales A α, A β, A γ debent in eodem plano ad planum ſemitæ oculi parallelo exiſtere, angulosque α A β, β A γ, æquales angulis a S b, b S c efficere. Ergo puncta α, β, γ ſunt in linea æquali lineæ $a\,b\,c$, & in plano parallelo, ſed ſitu inverſo. Si vero objectum ſit in eodem plano cum ſemita oculi, etiam ejus ſemita apparens in eodem erit.

115. COROLL. III. *Si objectum quieſcat in loco putatitio oculi ſpectatoris, ab eo refertur ad extremum radii æqualis & in directum jacentis radio ex vero loco oculi ad ejus locum putatitium ducto.*

Itaque ſi ſpectator moveatur in circulo, cujus centrum ab objecto occupatur, eſtque ſpectatoris locus putatitius; videtur objectum

jectum eundem circulum deſcribere, ſed ſemper in punctis peripheriæ illis diametraliter oppoſitis verſari, in quibus eſt ſpectator, ideoque eadem moveri velocitate, ac reipſa oculus ſpectatoris movetur.

116. OBSERVA. Corpora terreſtria nos undique ambientia, ac noſtri reſpectu quieſcentia, quamvis reipſa una nobiſcum circa ſolem volvantur, ita hac ſpecie nobis illudunt, ut nos credamus in centro univerſi immobiles, ſolemque circa nos agi, licet is in ſe quieſcat; Planetas item circa ſolem latos percurrere curvas mire flexas, ut jam in ortum, jam in occaſum progrediantur, etſi de ſe non niſi ab occaſu in ortum moveantur. Ope Problematis præcedentis omnes hi motus apparentes in plano deſcripti exhiberi poſſunt. Si enim fiant duo circuli concentrici, quorum alter exhibeat orbitam Telluris, alter orbitam alterius planetæ, exempli causa, Jovis; ſintque radii horum circulorum proportionales diſtantiis ſolis a terra, & Jove, hoc eſt circiter ut 1 & 5; & denique peripheriæ circulorum dividantur, in ratione celeritatum terræ & planetæ, in caſu noſtro ſcilicet 12 ad 1, ita ut v.g. circulus orbitæ terræ reſpondens dividatur in gradus duodenos; alter, qui orbitam Jovis exprimit, in ſingulos; ſi, inquam, his ita conſtructis, notentur in circulo telluris diviſionum puncta ſucceſſiva *a*, *b*, *c*, &c, hiſque totidem correſpondentia in circulo Jovis A, B, C, &c (initio, a quo libuerit, ſumpto), centro eorum communi S; facile erit omnia puncta curvæ apparentis a Jove deſcribendæ determinare, atque ex iis omnium mirarum illarum variationum rationem reddere.

117. PROPOSITIO. XIII. *Imagines ejusdem objecti, ſi in fundo utriusque oculi non depingantur ad partes homologas, exhibent objectum duplicatum.*

Quod objectum, etſi duobus oculis ſpectatum, ſimplex appareat, non aliunde pendet, niſi quod utraque impreſſio in fibras homologas,& æqualiter tenſas utriusque oculi ad ſenſum eadem ſit; ſive, quod plurimis experimentis congruit, quod anima non niſi ad unam e duabus æqualibus & ſimultaneis impreſſionibus advertat. Quod ſi igitur impreſſiones per imagines in partibus diverſis oculorum depictas fiant in fibras inæquales, & non homologas, ipſæ impreſſiones jam diverſæ ſunt, ideoque tales, ut duplicis objecti idea conſequatur.

118. OBSERVA. Imago in utroque oculo depingitur in fibris homologis, quando objectum videtur per radios ad ſenſum parallelos, ſive quando uterque oculus eodem modo verſus objectum dirigitur. Hinc accidit, ut objectum nimis admotum oculis appareat duplicatum, quod nempe axes optici nimium inclinari de-

beant, ut objectum utroque oculo videri possit; & sinistro quidem apparebit ad partem dextram, dextro ad sinistram, quia hæc est eorum axium inclinatio. Idem fit, si alia quavis ratione oculi distorqueantur. Ebrii sæpe objecta duplicata vident, fibris & musculis omnibus ita laxatis, ut motus æquales non recipiant; hinc oculos nequeunt eodem modo versus objecta dirigere. Patebit hoc manifeste, si eorum oculi attentius considerentur.

119. In vehementioribus commotionibus, dum quis affectuum impetu, v. g. ira abripitur; item hominibus furiosis, quandoque objecta duplicata apparent, cum tunc liberum non sit, oculos, ut convenit, in ea dirigere.

PARS SECUNDA

Complectens Catoptricam, & Dioptricam.

CAPUT I.

Notiones Generales Catoptricæ, & Dioptricæ.

ARTICULUS PRIMUS.

De imaginibus & focis.

120. Quoniam summa est atomorum lucis exilitas, fieri sane nequit, ut unius, paucorumve radiorum impressionem in organum visus, cujus fibræ cum lucis radiis comparatæ rudes admodum sunt, & crassæ, percipiamus. Majore itaque radiorum numero ex eadem superficiei corporis parte digredientium opus est, ut ea nobis visibilis reddatur. Verum quia radii ex eodem puncto dimanantes continuo a sese invicem divergunt (8), excogitanda fuerunt media, quibus secum iterum conjungi, in puncto quovis dato uniri, quin etiam, ut libuerit, dispergi possent. Atque de hisce adminiculis Dioptrica, Catoptricaque agit; de vitris, inquam, & speculis, quæ eum in finem adhibet.

121. Ope itaque vitrorum, speculorumque ingens radiorum numerus ab objecti parte quavis egressorum, in eodem iterum ad sensum puncto uniri possunt: & cum quisque radius imaginem puncti illius, e quo emanat, secum deferat (71); omnes ad idem collecti spatium imaginem partis objecti, unde emissi sunt, efforment, necesse est, eo quidem vivaciorem, quo major radiorum copia coacta fuerit; eo accuratiorem, magisque distinctam, quo ordo idem, dum colliguntur, servatus fuerit exactius, quem in digres-

digreſſu ab objecto tenuerunt. Eſt hæc imago adeo luculenta, ut ſi planum quodpiam læve & candidum eo in loco, in quo radiorum unio fit, conſtituatur, ſuis accurate diſtincta coloribus appareat, maxime, ſi dum experimentum capitur, luci cuivis alteri aditus negetur.

122. Punctum illud, in quod ope vitri, ſpeculive luminis radii coguntur, *focus* vitri, aut ſpeculi vocatur; & ſiquidem vera fiat radiorum collectio, *focus realis*, aut citra additum, *focus* nuncupatur, eſtque locus, in quo imago objecti lucem emittentis effingitur, ipſumque apparet objectum eſſe, ſi plures radii, poſtquam per focum decuſſatim tranſierunt, in oculum incidant. At vero ſi punctum illud tale modo ſit, ad quod, diſperſis per vitrum aut ſpeculum radiis, nova eorum directio tendat, *focus imaginarius* appellatur, illicque etiam tunc objectum conſiſtere videtur, ſi major radiorum diſperſorum vis oculum ſubeat, quæ objecti imaginem ſatis ſenſibilem efformet: quippe illic univerſim objectum exiſtere putatur, unde ejus radii ad noſtrum oculum venire videntur (58, & 48).

123. Quod ſi vero quivis radius imaginem objecti, e quo emanat, ſecum deferat, ſequitur, quod *ſi radii, poſtquam ſemel collecti ſeſe ſecuerunt, ac in concurſu ſuo imaginem depinxerunt, poſtea ſeu refractione, ſeu reflexione quapiam uniti rurſus fuerint, denuo imaginem efforment, ac ſic deinceps, quamdiu eorum inter ſeſe ordo non fuerit perturbatus.* Igitur tot ejusdem objecti imagines fieri poſſunt, quoties radii ab eo emiſſi citra confuſionem iterum poſſunt colligi.

124. Illud etiam deducitur, quod *quando ſolum de via radiorum luminoſorum agitur, imago vicem objecti ſubire poſſit, & objectum vicem imaginis; quin etiam ſecundæ imaginis reſpectu prima tanquam ejus cauſa productrix haberi poſſit, ac ſic de reliquis.*

125. Si radii in faſce luminoſo ad ſeſe invicem inclinentur, *convergentes* aut *divergentes* dicuntur, prout ſcilicet ſive diſceſſus eorum a puncto quopiam unionis, ſive congreſſus conſideratur. E quo liquet, focum eſſe in ipſo tranſitu a convergentia ad divergentiam, & viciſſim.

ARTICULUS II.

Leges & principia ab experientia deducta, quæ demonſtrationibus in Dioptrica & Catoptrica fundamentum præbent.

126. Lex I. *Quivis lucis radius per medium quodpiam propagatus, dum in aliud diverſæ denſitatis aut naturæ incurrit, directionem mutat: Si*

novum illud medium penetrare nequeat, in ſuperficie reflectitur; ſi penetrat, in ingreſſu frangitur, ſive refringitur.

Sit A C (fig. 9) radius, ex aere in ſuperficiem P Q cryſtalli, aut vitri ſolidi P S incidens. E puncto C, in quo radius A C in novum hoc medium incurrit, & quod propterea *punctum incidentiæ* dicitur, erigatur perpendicularis M D ad vitri ſuperficiem (vocatur ea nonnunquam cathetus incidentiæ; angulus vero A C M, eive æqualis D C B eſt angulus incidentiæ). Quod ſi *radius incidens* A C offendat in aliquod obſtaculum aditum in vitrum prohibens, mutata directione reflectitur, viamque C I tenet; tumque angulus M C I vocatur *angulus reflexionis*: verum ſi radius incidens A C vitrum penetrarit, deſerta priore directione C B deviat, & novam C T ſequitur. Atque in hoc caſu angulus D C T dicitur *angulus refractus*; C T *radius fractus*, vel *refractus*; B E *ſinus anguli incidentiæ*; & T H *ſinus anguli refracti.*

127. Lex II. *Si punctum lucidum, poſtquam in occurſu diverſorum mediorum & ſuperficierum diverſimode reflexum, refractum, aut inflexum eſt (uti ſcilicet mediorum & ſuperficierum occurrentium natura & poſitio exigit), tandem in obſtaculum offendat, quod ei directionem præciſe oppoſitam impertit, eadem accurate via, & celeritate, qua advenerat, regreditur.*

Sic radius T C per vitrum P S propagatus, dum in ejus ſuperficiem P Q incurrit, via C A egreditur; ſive, quod eodem recidit, ſi radius A C, refractus ſit in C T, & ex T directione T C repellatur, e vitro directione C A exit.

128. Lex III. *Angulus reflexionis aut refractionis eſt in eodem plano cum angulo incidentiæ, eſtque hoc planum ad ſuperficiem medii perpendiculare.* Etenim ejus poſitio per Cathetum incidentiæ, quæ ad ſuperficiem medii perpendicularis eſt, determinatur.

129. Lex IV. *Sinus anguli reflexionis aut refractionis alicujus radii eſt in ratione conſtante cum ſinu ſui anguli incidentiæ.*

In reflexione ea ratio eſt æqualitatis: & conſentientibus omnibus experimentis, differentia nulla eſt, quæ percipi poſſet.

130. Quando lux ex aere in aquam pluviam tranſit, ratio ſinus anguli refracti ad ſinum anguli incidentiæ proxime eſt, ut 3 ad 4, aut accuratius, ut 3 ad 4,0076; dum ex aere in vitrum incidit, ut 2 ad 3, vel accuratius ut 20 ad 31; dum e vitro in aquam propagatur, ut 9 ad 8 *&c, & viciſſim ratio ſinus anguli refracti ad ſinum anguli incidentiæ eſt in tranſitu ex aqua in aerem, ut 4 ad 3; e vitro in aerem, ut 3 ad 2 &c.

131 Co-

* Newton. Opt. L. 1. part. II. Prop. III. Exper. VIII. rationem anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis ſuæ ponit ut 80 ad 93; hinc typothetis numerorum 8 & 9 transpoſitio in exemplari Gallico adſcribenda.

131. COROLL. I. *Si radius incidens ſit perpendicularis ad ſuperficiem medii, in quod incurrit; vel in ſe ipſum reflectitur, vel medium ſine refractione tranſit.* Cum enim tunc ſinus anguli incidentiæ ſit = o, ſinus anguli reflexionis, aut refractionis pariter eſt = o; aut, quod idem eſt, radius tum cum catheto incidentiæ congruit.

132. COROLLARIUM II. *Sub quocunque angulo incidentiæ radius occurrat alicui medio luci alias pervio, ſemper ſub eodem reflecti poteſt, ſiquidem in caſu particulari illud penetrare nequeat; verum quando juxta naturam medii ſinus anguli incidentiæ debet minor eſſe ſinu anguli refracti, radius non ſemper poteſt medium, facta refractione, penetrare;* aut, quod idem eſt, *in angulis incidentiæ certi dantur limites, ultra quos radius refringi nequit, conſequenter nec exire e medio, in quo propagatur, ut in alterum, cui occurrit, tranſeat.*

Etenim ſi lux ex aere in ſuperficiem aquæ incidat ſub angulo fere 90°, angulus refractionis erit proxime 48° ½, ſinu toto, aut incidentiæ, ad ſinum anguli refracti exiſtente tunc ut 4 ad 3, quæ ratio angulum refractum præbet 48° ½ circiter: itaque ſi ex oppoſito radius ex aqua in aerem transire debeat ſub angulo incidentiæ 48° ½, is ex aqua egreſſus debebit ejusdem ſuperficiem radere, angulo refracto 90° exiſtente; quod ſi igitur radius ſub majore angulo incidentiæ, quam 48° ½, ex aqua egredi deberet, ſinus anguli refracti ipſo ſinu toto major fieret, quod impoſſibile eſt: unde neque fieri poteſt, ut talis radius ex aqua emergat, docetque nos experientia, eum in communi aquæ & aeris ſuperficie reflexum intra aquam manere. Simili ratiocinio in aliis mediis limites refractionis inveniri poſſunt, data ratione ſinuum anguli incidentiæ & refractionis. Deinceps de planis ſolummodo, & ſphæricis ſuperficiebus agemus, quarum ſcilicet ſolarum in reliquis artibus uſus eſt.

CAPUT II.

De Catoptrica.

ARTICULUS I.

De imaginibus, aut focis per reflexionem.

133. PROBLEMA. *Datis puncto, aut objecto quovis* O *in axe* A O *ſpeculi cujuscunque ſphærici concavi* M A B (fig. 10. & 11) *aut convexi* (fig. 12), *& radio incidente* O M, *axi* A O *infinite propinquo, invenire punctum axis* F, *per quod radius in* M *reflexus tranſit.*

RESOLUTIO. Ducatur ad centrum C e ſuperficie ſphærica recta M C, quæ cum (Elem. 459) ad ſuperficiem ſpeculi in puncto

ſto incidentiæ M normalis ſit, erit cathetus incidentiæ: hinc angulus OMG, vel CME eſt angulus incidentiæ: & ſi fiat CMF = OMG, erit radius reflexus MD, axi OA in F occurrens.

Ut jam valor de AF, ſeu MF (ponuntur enim OM & OA infinite propinquæ) analytice exprimatur, ſit OA, ſive MO, diſtantia objecti a ſpeculo, $= \pm d$ ($+ d$, ſi ſpeculum ſit concavum; & $- d$, ſi ſit convexum: quippe cum hæc ſignorum determinatio a ſitu radii incidentis OM reſpectu ſemidiametri ſpeculi AC pendeat); ſit $AC = r$, & FA, vel $FM = f$. Hinc erit $FC = r - f$ (fig. 10. & 12), aut $= f - r$ (fig. 11); & $CO = -r + d$ (fig. 10), vel $= r - d$ (fig. 11), vel $= r + d$ (fig. 12). Eſt autem (Elem. 560) CO: CF = MO: MF, ſive (fig. 10 & 11) $\mp r \pm d : \pm r \mp f = d : f$; unde formula generalis pro ſpeculis concavis eruitur $f = \frac{dr}{2d - r}$.

Porro in triangulo CMO fig. 12, habetur (Elem. 746) CO: MO = *ſin* CMO (vel FMC): *ſin* MCO (ſive MCF): item in triangulo FMC eſt *ſin* FMC: *ſin* MCF = CF: FM; igitur etiam CO: CF = MO: MF, ſive $r + d : r - f = d : f$. Ex quo deducitur formula pro ſpeculis convexis $f = \frac{dr}{2d + r}$. Ut adeo formula utrique ſpeculorum ſphæricorum generi communis ſit $f = \frac{dr}{2d \mp r}$.

134. OBSERVA I. Hæc formula eo accuratius exhibet valorem de AF, quo radius incidens OM axi OA fuerit propior, ſive quo AM, inter radium incidentem, & axem AO per objectum O ductum, intercepta, minor portio ſuperficiei totius ſphæræ fuerit. Sic cum MF (fig. 10 & 12.) ſemper ſit major, quam AF, quo radius incidens a puncto A longius diſcedit, eo propius ad idem A radius reflexus MF cum axe AF concurrit.

135. OBSERVA II. Si ſciatur arcus AM, per Trigonometriam planam valor de AF calculo rigido erui poteſt. Nam in triangulo OCM, datis OC, CM, & angulo MCO, cujus menſura eſt AM, anguli COM, & CMO cum latere MO reperiri poſſunt. (Elem. 760). Dein in triangulo FMO habetur MO, angulus FOM, & FMO, duplus (aut dupli complementum (fig. 12)) anguli CME: quare per calculum obtinetur latus OF, & inde AF.

Si radius incidens OM fiat parallelus axi OA, hoc eſt, ſi diſtantia objecti fiat infinita, angulus EMC erit æqualis angulo FCM, & triangulum CMF iſoſceles, utrumvis ejus angulum metiente

tiente arcu AM. Sit exempli cauſa CM = 6 ped. arcus AM = 1°; reperietur AF = 2,99964 pedum. Si AM ponatur = 10°, habebitur AF = 2,95372 ped. Si AM ſit = 30°, fiet AF = 2,53589 pedum.

136. COROLL. I. Quoniam tota lux ab objecto O in ſpeculum in exigua a puncto A diſtantia incidens, per punctum axis F aut ſaltem admodum prope, tranſit in ſpeculis concavis; ſequitur ad idem punctum F debere imaginem objecti O ſenſibilem efformari. In ſpeculis vero convexis radii e puncto O venientes reflexione ita diſperguntur, ut producti ad F concurrant, & ſi quidem lux eum in modum reflexa oculum ſubeat, objectum verſus F exhibeat.

137. COROLL. II. Cum imago objecti O ſita ſit in axe ſphæræ per punctum O producto, ſi quando occurrat obſtaculum, quo minus ab objecto ad centrum ſphæræ recta duci poſſit, imago objecti formari nequit. Simili ratione, quocunque ſitu oculus collocetur, ut imaginem ſuam in ſpeculo videat, eam ſemper in recta per centrum ſpeculi tranſeunte videt.

138. OBSERVA III. Si objectum O tantam vim lucis emittat, ut radii etiam nondum collecti ſenſum caloris excitent, uti id præſtant radii ſolares, facis, carbonis accenſi &c, manifeſtum eſt, quod ſi ope ſpeculi concavi colligantur, calorem tum eorum denſitati, tum illi, quem per ſeſe habent ſinguli incidentes, proportionalem excitaturi ſint. Atque hinc nomen *foci* puncto illi, in quod coguntur, impoſitum eſt.

ARTICULUS II.

De loco, ſitu, & motu imaginum per reflexionem ortarum.

139. Si diverſæ aſſumantur diſtantiæ, e quibus objectum in ſuperficiem ſpeculi ſphærici reflectentem radiare poteſt, haud difficile erit, ex formula generali, ſuperiore Articulo tradita, locum ejus imaginis reperire.

Itaque ſupponamus objectum quodpiam, primo in ipſa ſpeculi ſuperficie poſitum, dein ſucceſſive in infinitum ab eodem removeri...

140. I. *Si diſtantia a ſpeculo ſit infinite parva, imago objecti eſt infinite propinqua poſt ſpeculum.* Quippe cum ſit $\mp d = \frac{1}{\infty}$, formula $f = \frac{dr}{2d \mp r}$ in hanc abit $f = \frac{1}{\mp \frac{2}{\infty}}$. Denotat autem ſignum —, in ſpeculo concavo imaginem eſſe ex parte oppoſita illi, in qua aſſumebatur ſe-

midiameter cavitatis $= +r$, adeoque poſt ſpeculum: ſignum vero $+$ oſtendit, in ſpeculo convexo imaginem eſſe ex parte centri convexitatis, cujus ſemidiameter ponebatur $= +r$; manifeſtum autem eſt, in formula $f = \frac{dr}{2d+r}$ ſemper fore f poſitivum, quicunque valor de d aſſumatur: unde ſequitur, *in ſpeculo convexo imaginem neceſſario eſſe ex parte centri convexitatis, in quacunque diſtantia objectum fuerit;* id, quod in ſequentibus toto hoc Articulo probe notandum.

141. II. *Diſtantia objecti a ſpeculo a* 0 *uſque ad quartam axis ſphæræ, vel dimidiam ſemidiametri partem creſcente, imago quoque poſt ſpeculum ſemper recedit; & quidem in concavo a* 0 *uſque ad* ∞; *in convexo vero a* 0 *uſque ad* $\frac{1}{8}$ *axis.* Nam *Primo* ſi ponatur $d < \frac{1}{2}r$, ſeu $2d < r$, patet, eſſe $2d - r$ quantitatem negativam; ergo in ſpeculo concavo f quoque erit negativa, & locus imaginis poſt ſpeculum. *Secundo.* At vero ſi fiat $d = \frac{1}{2}r$, erit formula pro ſpeculo concavo $f = \frac{\frac{1}{2}rr}{0} = \infty$. E quo liquet, *imaginem ad diſtantiam infinitam recedere, ſi objectum ad quartam axis partem collocetur;* ſive, quod idem eſt, *radios ab objecto venientes reflecti inter ſe parallelos a ſpeculo, adeoque* non niſi ad diſtantiam infinitam a ſpeculo concurrere. Verum quia nulla eſt ratio, ob quam lineæ parallelæ in infinitum utrinque productæ ex una potius, quam altera parte concurſuræ concipiantur, ideoque eodem jure concurſus utrinque fieri ſupponitur; in caſu, in quo verſamur, dum ſcilicet objectum $\frac{1}{4}$ axis parte a ſpeculo concavo diſtat, ejus imago a ſpeculo tam antrorſum, quam retrorſum in infinitum diſcedit.

142. Quod ad ſpeculum convexum, patet, poſito $-d = \frac{1}{2}r$, fore $f = \frac{1}{4}r$.

143. III. *Diſtantia objecti a ſpeculo ab* $\frac{1}{4}$ *axis usque ad* $\frac{1}{2}$ *ejusdem (hoc eſt usque ad ſemidiametrum ſphæræ) creſcente, imago in ſpeculo concavo eſt cis ſpeculum, atque e diſtantia infinita usque ad centrum ſpeculi accedit; at in ſpeculo convexo imago poſt ſpeculum ab* $\frac{1}{8}$ *axis uſque ad* $\frac{1}{6}$ *ejusdem recedit.*

Manifeſtum enim eſt, quamdiu $d > \frac{1}{2}r$, ſive $2d > r$, formulam pro ſpeculo concavo non poſſe fieri negativam, atque adeo imaginem ſemper fore ex parte concavitatis. Quod ſi formula ſolvatur in analogiam $d : 2d - r = f : r$, quia $d > \frac{1}{2}r$, & $d < r$, erit antecedens d majus conſequente $2d - r$, atque propterea $f > r$ (Elem. 306): hinc imago eſt ultra centrum ſpeculi reſpectu objecti. Si fiat $d = r$, erit $2d - r = d$, & $f = r$. Igitur *in ſpeculo concavo ſi objectum in centro ſpeculi collocetur, imago ibidem erit;* at ſi in ſpeculo convexo fiat $-d = r$, habebitur $f = \frac{1}{3}r$.

144. Ex his petenda eſt ratio, cur oculus ante ſpeculum intra

tra $\frac{1}{4}$ partem axis & centrum collocatus ſuam imaginem nulla ratione videre poſſit, quippe quæ tum poſt oculum efformatur, atque in infinitum recedit, quando is ad $\frac{1}{4}$ axis conſtituitur; ex diſtantia autem infinita usque ad centrum redit, ibique cum oculo confunditur, hoc ab $\frac{1}{4}$ axis ad centrum usque a ſpeculo recedente. Dum autem oculus ejusque imago in locum eundem conveniunt, omnia confuſa apparent, oculo ſe ipſum in quovis puncto vidente.

145. IV. *Diſtantia objecti a ſpeculo a ſemidiametro ſphæræ usque in infinitum creſcente, imago a centro usque ad $\frac{1}{4}$ partem axis verſus ſpeculum accedit, ſi ſpeculum ſit concavum; at ſi convexum ſit, ea poſt ſpeculum ab $\frac{1}{8}$ axis usque ad $\frac{1}{4}$ ejusdem recedit.*

Nempe in analogia $d : 2d - r = f : r$, poſito $r < d$, antecedens d minus eſt ſuo conſequente $2d - r$; ideoque etiam $f < r$. Quod ſi ponatur $d = \infty$, formula in hanc mutatur $f = \frac{1}{2} r$.

146. THEOREMA. *ſi objectum ſit arcus circuli* O P Q (fig. 13 & 14) *ſpeculo ſphærico* B A D *concentrici, erit* PRIMO *etiam imago arcus circuli concentrici,* SECUNDO *radius hujus imaginis circularis, adeoque ipſa imago quoque, major, minorve erit, prout ea a centro ſpeculi* C *longius, propiusve abfuerit;* TERTIO *hæc imago erit ſitu erecto, hoc eſt, eodem ac objectum, quamdiu ex eadem cum objecto parte fuerit reſpectu centri ſpeculi; at vero ejus ſitus erit inverſus, ſive contrarius ſitui objecti, ubi inter eam & objectum centrum ſpeculi extiterit.*

Cum enim O P Q ſit arcus cum B A D concentricus, rectæ O B, P A, Q D, per centrum C tranſeuntes, in quibus exiſtunt imagines *o*, *p*, *q*, punctorum O, P, Q, æquales ſunt inter ſe: itaqua d (quod earum valorem in formula generali exprimit) erit quantitas conſtans, æque, ac r; & hinc etiam f conſtans eſt: hoc eſt, rectæ *o* B, *p* A, *q* D ſunt æquales: ergo *opq*, O P Q, B A D ſunt arcus concentrici.

147. Ex his evidens eſt *Primo*, quod dum imago & objectum ſunt ex eadem parte reſpectu centri, uti figur. 14, ſitus imaginis ſit idem cum ſitu objecti, ſingulis ſcilicet punctis imaginis exiſtentibus in iisdem ſemidiametris, quæ per ſingula puncta correſpondentia objecti ducuntur. Verum ſi imago reſpectu objecti ſit ultra centrum (fig. 13), cum rectæ, in quibus exiſtunt imagines ſingularum partium objecti neceſſario per centrum ſpeculi tranſeant, eæ, quæ a puncto objecti ſito ſupra axem (qui per medium objectum ducitur) veniunt, poſtquam per centrum tranſierunt, deorſum vergunt, & ex oppoſito. Igitur in omnibus rectis venientibus e parte ſuperiore objecti (quæ hoc ipſo ſupra axem ſita eſſe debet) imago exiſtit inferius, quippe quæ in il-

lis non niſi poſtquam per centrum tranſierint, efformatur: eſt ergo ſitus imaginis inverſus reſpectu objecti ſui.

148. *Secundo* manifeſtum eſt, imaginem integram objecti, quæ tota lineis in centro concurrentibus comprehenditur, eo eſſe debere minorem, quo centro ſpeculi fuerit vicinior, & ex oppoſito.

149. COROLL. I. *Si objectum ſit arcus concentricus ſpeculo convexo, imago illius ſemper apparet ſitu erecto*, quia ſcilicet ex eadem parte centri ſpeculi efformatur, in qua objectum eſt; *decreſcit vero ea ratione, qua objectum recedit*, cum magis ſemper, magisque tum ad centrum accedat. *In ſpeculo concavo imago eſt erecta, & objecto a ſuperficie ſpeculi uſque ad* $\frac{1}{4}$ *axis recedente, creſcit. Hinc vero uſque ad centrum promoto objecto, imago decreſcit, ſitumque inverſum acquirit: Tandem a centro in infinitum abeunte objecto, ſitum quidem inverſum retinet, ſed denuo creſcit.* Verum quod ad ultimum præcipue caſum pertinet, obſervandum eſt, quod ſi objectum non ſimul augeatur pro ratione majoris ſemper diſtantiæ, ſed ſolummodo figuram ſpeculo concentricam, quam radius diſtantiæ exigit, acquirat, ejus imago creſcente intervallo minuatur.

150. COROLL. II. *Si cetera omnia paria ſint, quo minor eſt radius ſphæræ ſpeculi, eo minor etiam eſt imago objecti.*

151. OBSERVA. Præſens theorema ad objecta alterius cujusvis figuræ in ſpecula ſphærica radiantia cum rigore applicari nequit. Quod ſi tamen adeo ſupponantur exigua, ut eorum latitudo pro arcu ſpeculo concentrico haberi poſſit, ex iis, quæ præſente Articulo expoſita ſunt, intelligi poterit *primo*, cur imagines in ſpeculis ſphæricis jam minores, jam majores ſuis objectis depingangantur; *Secundo*, cur earum ſitus nunc erectus, ſit nunc inverſus; *Tertio*, cur videantur verſus ſua objecta accedere, objectis ipſis a ſpeculo cavo recedentibus &c.

152. Similiter intelligitur ex dictis, figuram objectorum, quorum ſuperficies ſpeculo non eſt concentrica, eo magis deformem reddi debere, id eſt, imagines eo magis fore diſſimiles ſuis objectis, quo ſuperficies objectorum major, & radius ſpeculi minor fuerit. Etenim ſi v. g. linea recta opponatur ſpeculo ſphærico, ejus imago curva apparebit, quoniam punctis ejus rectæ inæqualiter a ſpeculo diſtantibus, etiam eorum punctorum imagines inæquales acquirunt diſtantias, quarum tamen non eadem eſt ratio. Ejusmodi imagines eo etiam magis a figura objecti diſſident, quo id intra ſpeculum concavum & centrum uni quartæ axis parti propius fuerit, cum tunc imagines admodum magnæ efformentur, & exigua diverſarum objecti partium differentia in diſtantia a ſpeculo, ingens diſcrimen diſtantiarum & magnitudinum in imaginibus earum partium efficiat.

AR-

ARTICULUS III.

Applicatio Theoriæ ſuperioris ad ſpecula plana.

153. E formula generali proprietates ſpeculorum planorum ſponte veluti fluunt, ſi id genus ſpecula tanquam ſphærica conſiderentur, in quibus diameter dimidia ſphæræ ſit infinita, ſive ſi ponatur $r = \infty$; nam tum formula $f = \frac{dr}{2d - r}$ in hanc abit $f = -d$, quæ oſtendit, *imagines in ſpeculis planis viſas apparere tanto intervallo trans ſpecula, quanto cis eadem exiſtunt objecta, easque ſemper eſſe erectas.* Et quoniam in ſpeculis ſphæricis imago cujusvis punĉti objecti depingitur in recta per punctum illud, & centrum tranſeunte, adeoque ad ſpeculorum ſuperficiem perpendiculari; *imago cujusvis punĉti objecti ante ſpeculum planum collocati eſt in perpendiculari ex eo punĉto ad ſuperficiem ſpeculi ducta.* Denique, cum perpendiculares ab extremis objecti punctis ad ſpeculum ductæ ſint inter ſe parallelæ, & hinc non niſi in diſtantia infinita (ad quam centrum ejusmodi ſpeculi remotum eſt) concurrere poſſint, *imagines inter has comprehenſæ quoad ſingulas dimenſiones objectis ſuis æquantur.*

154. Simili argumento ceteræ quoque ſpeculorum planorum proprietates deduci poſſent; verum quia uſus horum ſpeculorum frequentior eſt, quam aliorum, non nullas iſthic in particulari indagare juvat.

155. THEOREMA I. *In ſpeculo plano horizontaliter collocato, objecta, quorum ſitus erectus eſt, apparent inverſa, & viciſſim. Si ſpeculum ſit inclinatum, omnia objecta in contrarium inclinata videntur. Si angulus inclinationis ſpeculi ſit 45°, objecta verticalia fiunt horizontalia; & horizontalia acquirunt ſitum verticalem &c.*

Omnia hæc ex eo conſequuntur, quod partium objecti ſpeculo viciniorum imagines poſt ſpeculum viciniores quoque ſint; & remotiorum imagines longius quoque poſt ſpeculum diſtent. Quod ſi pro ſingulis caſibus theorematis ſchemata conſtruantur, facile ex iis demonſtratio elicietur.

156. THEOREMA II. *Pars dextra objecti in imagine in ſpeculo plano depicta apparet ad ſiniſtram, & ſiniſtra ad dextram.*

Pendet id ex eo, quod imagines ſitum objectorum ſuorum retineant, partesque dextræ ad dextram depingantur &c. Jam vero dum vultum alterius conſpicimus, illius dextra ſiniſtræ noſtræ opponitur, & viciſſim. Cum itaque hunc in modum alios ſine ſpeculo conſiderare aſſueverimus, quando nos ipſos in ſpeculo conſideramus, dum manum verſus dextram movere volumus, eam

reipsa versus sinistram movemus; dum eam antrorsum tendere volumus, retrahimus, ita, ut peculiari habitudine opus sit, ut quis speculo recte utatur.

157. THEOREMA III. *Imago objecti ad superficiem speculi plani paralleli videtur in speculo tantum dimidium spatii illius occupare, quod objectum occupat.*

DEMONSTRATIO. Sit AB (fig. 15) dimensio quævis alicujus objecti ad speculum IG paralleli; sit *ab* imago de AB. E puncto quolibet P in AB accepto ducantur P*a*, P*b*, manifestum est, esse IE partem speculi ab imagine *a b* occupatam: & quoniam IG ab AB, & *ab* æqualiter distat, pars IE debet esse dimidium de *ab*, vel AB.

158. SCHOLIUM. Ut itaque se quis integrum in speculo verticaliter posito videre possit, necesse est, ut speculi altitudo & latitudo saltem sit dimidia altitudinis & latitudinis spectatoris situ erecto consistentis. Unde si quis in situ erecto non nisi partem sui conspicere possit, reliqua imagine sub margine speculi verticalis occultata, non plus videre unquam poterit, seu accedat, seu recedat a speculo.

159. THEOREMA. IV. *Si speculum circa axem suum moveatur, motus angularis imaginis est duplus motus angularis speculi.*

DEMONSTRATIO. Sit primo AB (fig. 17) situs speculi, OE radius incidens, EF radius reflexus: acquirat dein speculum circa axem, per E transeuntem, motum novum situm CD: erit EG radius reflexus respectu incidentis OE. Ostendendum est, angulum FEG, quo motus angularis, seu quantitas, qua radius reflexus EG a priore situ suo EF discessit, exprimitur, esse duplum anguli AEC, sive motus angularis speculi. Nam cathetus incidentiæ semper est in medio inter radium incidentem, & reflexum; & quia ad speculum est normalis, eundem habet motum angularem cum speculo. Quod si itaque speculum motu angulari accedat versus radium incidentem, cathetus incidentiæ ab hoc radio tantundem removetur; & simul eadem quantitate radius reflexus a catheto recedere debet, ut inter radium incidentem & reflexum media maneat. Quare peracto hoc motu radius incidens a reflexo dupla quantitate motus angularis speculi recessit.

160. SCHOLIUM. Dum speculum arcum quadrantis describit, radius reflexus integrum semicirculum percurrit. Atque ob hanc causam imago reflexa solis in speculis tanta celeritate moveri potest. Similiter imago solis e superficie aquæ fere stagnantis reflexa videtur admodum agitata, præcipue si in majore a puncto incidentiæ distantia excepta fuerit &c.

161. THEO-

161. THEOREMA V. *Si ſpeculi vitrei ſuperficies poſtica ſtanno ſit obducta, duplicem ejusdem objecti imaginem ſpeculum exhibet: alteram viciniorem & debilem; remotiorem alteram & vivaciorem: diſtantia autem utriusque imaginis æquatur duplæ vitri craſſitiei.*

Phænomeni cauſa ea eſt, quod ipſa anterior ſpeculi ſuperficies polita & ſolida ſpeculi vicem agat, omnes eos radios, qui vitrum non penetrant, reflectens, ſicque debilem quamdam objecti imaginem formans, quæ eo videtur clarius, quo magis oblique aſpicitur: ſi quis enim perpendiculariter eam intueatur, alteri vivaciori a poſtica ſpeculi ſuperficie, quæ ſtanno obducta eſt, efformatæ directe incumbit, atque cum ea confunditur. Quod ſi diſtantia objecti a ſuperficie anteriore ſpeculi ſit $= d$, craſſities vitri $= e$; erit diſtantia objecti ab imagine vivaciore (153.) $= 2d + 2e$; at diſtantia ejusdem ab imagine debiliore ſolummodo $= 2d$.

162. THEOREMA VI. *Quiscunque ſit ſpeculorum planorum in eodem plano collocatorum numerus, unica tantum ejusdem objecti imago efformari poteſt.*

Nempe omnia tunc ſpecula unius vicem agunt; & quoniam imago ſemper apparet in catheto incidentiæ ab objecto demiſſa, ac nonniſi unica perpendicularis ex eodem puncto ad idem planum duci poteſt (Elem. 634), una etiam tantum imago efformabitur.

163. THEOREMA VII. *Si oculus* I (fig. 16) *conſtituatur intra angulum quemvis* A B C, *a duobus ſpeculis planis* A B, B C *comprehenſum; tot videbit imagines objecti* O *intra eundem angulum poſiti, quot perpendicula ab eodem objecto, & ſingulis ejus imaginibus in quodvis ſpeculum intra angulum* B *duci poſſunt.*

DEMONSTRATIO. *Primo.* Demiſſa ab objecto O in ſpeculum B C catheto O D, factaque N D = N O, erit punctum D locus unius imaginis. Nam ducta ex oculo I recta I D, & per g (ubi ea occurrit ſpeculo) altera g O, erit g O radius incidens, ejusque reflexus I g, per quem oculus imaginem in D videt, ob triangula D g N, O g N æqualia, adeoque O g N = D g N = B g I.

Secundo. Si e puncto D demittatur in ſpeculum A B perpendicularis D E, fiatque k E = k D, erit punctum E locus alterius imaginis, reſpectu cujus imago in D vicem objecti ſubit. Etenim quia O N = N D, & triangula O N f, D N f itidem æqualia, radius incidens O f reflectitur in fi; & ob triangula rectangula D ki, E ki pariter æqualia, radius fi in i I reflectitur, adeoque ad oculum in I pervenit.

Tertio. E puncto E in ſpeculum B C demiſſa catheto E Q, ſumptaque Q F = E Q, obtinetur locus F tertiæ imaginis, cujus objectum eſt imago altera in E. Nam ob æqualitatem triangulorum rectangu-

ctangulorum O*d*N, N D*d*; D*rk*, *rk*E; F Q*b*, *b*Q E, manifeſtum eſt, radium incidentem O*d* reflecti in *dr*, tum in *rb*, denique in *b* I, ubi ad oculum pertingit.

Quarto. Si a puncto F ducatur perpendicularis ad ſpeculum A B, reperietur, quod jam extra ſpeculum in F G cadat, atque adeo non poſſit amplius eſſe cathetus incidentiæ, nec imago.

164. Simili ratione oſtendetur, eſſe in H imaginem objecti O, quæ per radium I*h*, ex incidente O*h* reflexum, videatur; eſſe imaginem alteram in K, quæ cernatur radio *c* I, reflexo ex *ct*, reſpectu cujus incidens eſt O*t*; eſſe tertiam in L, viſam per radium incidentem O*l*, & primo in *la* poſtea in *ak*, denique in *k* I reflexum. Tandem non poſſe eſſe plures imagines, perpendiculo L M a poſtrema imagine demiſſo jam extra ſpeculum cadente.

165. COROLL. I. Ex ipſa conſtructione facile apparet, *imaginem primam videri per radium ſemel reflexum, ſecundam per bis, tertiam per ter reflexum* &c.

166. COROLL. II. *Diſtantia imaginis cujusvis ab oculo æquatur ſummæ ex radio incidente, & reflexis, per quos videtur.* In exemplo I F = O*d* + *dr* + *rb* + *b* I. Nam I F = I *b* + *b* F; & *b* F = *b* E = *br* + *r* E, item *r* E = *r* D = *r d* + *d* D; denique *d* D = *d* O: ergo I F = I *b* + *br* + *rd* + *d* O. Atque hinc quo magis multiplicatur imago, eo longius diſtat.

167. COROLL. III. *Prima imago vivacior eſt quam ſecunda; hæc, quam tertia, & ſic deinceps;* tum quod intenſitas luminis ſemper decreſcat tota ea via, quam radii incidentes & reflexi conficiunt, cum etiam quod ingens radiorum numerus in ſingulis reflexionicus pereat.

168. COROLL. IV. *Quo major eſt angulus a ſpeculis comprehenſus, eo minor eſt numerus imaginum, quæ efformari poſſunt.* Cum enim catheti incidentiæ eodem motu angulari a ſeſe invicem recedant, quo ipſa ſpecula, ſemper eæ vertici anguli a ſpeculis intercepti fiunt propiores tandemque extrorſum cadunt, ubi non amplius eſt locus imagini. Atque hinc *quo angulus duorum ſpeculorum magis augetur, eo imagines ad verticem illius propius accedunt, ibique confunduntur inter ſe, ac tandem ſub illo ſeſe occulentes diſparent;* ita ut quando angulus is fit rectus, nequeant eſſe plures, quam duæ imagines; dum vero fit infinite obtuſus, unica exhiberi poſſit, quoniam numerus imaginum dependet ſemper (162) a numero perpendiculorum, quæ tum ab objecto, tum ab ejus imaginibus in utrumvis ſpeculum cadere poſſunt.

169. COROLL. V. *Si duo ſpecula ſint inter ſe parallela, atque oculus cum objecto in eadem ad ſpeculorum planum perpendiculari conſtituatur, infinitæ fiunt objecti imagines,* quæ tamen ſemper remotiores apparent, itaque fiunt debiles, ut paullo poſt haud amplius percipi poſſint.

AR-

ARTICULUS IV.

De ſpeculis Cylindricis, Conicis &c.

170. Specula cylindrica, conica, prismatica, & pyramidalia vix alium uſum habent, quam ut ſpectatorem oblectent, dum vel objectorum figuram deformem exhibent, vel imagines, quæ ex induſtria deformatæ ſunt, ſuis objectis conſimiles repræſentant.

171. Quoniam ſpecula prismatica, & pyramidalia nil aliud ſunt, quam plana verticalia vel inclinata, opus non eſt, ut de iis in particulari agamus. At cylindrica conſideranda ſunt tanquam collectio ſpeculorum, quæ tam e planis verticalibus, quam e ſphæricis participant; & conica, velut quæ partim plana inclinata, partim ſphærica ſint; ita, ut compoſitis inter ſe affectionibus ſpeculorum planorum, & ſphæricorum, facile ſit rationes invenire, cur id genus ſpecula imagines objectorum regulares deformes reddant, & viciſſim.

172. In exemplo, ſi objectum figura debita præditum ſitu verticali collocetur ante ſpeculum cylindricum, itidem verticaliter erectum, manifeſtum eſt, dimenſiones verticales objecti haud poſſe deformari, quæcunque ſit ejus a ſpeculo diſtantia, quippe cum eæ objiciantur ſpeculis planis & verticalibus; at vero dimenſiones horizontales debere figuram ſuam amittere, prout ea plus minusve a concentrica cum ſpeculo abeſt, atque diſtantiarum majus eſt diſcrimen (152.); etenim dimenſiones iſtæ velut in totidem ſpecula ſphærica radiant. Cum itaque ejusdem objecti partium aliarum imagines in ſpeculo cylindrico recte exhibeantur, aliarum autem figuræ deformentur, omnium collectio imaginem admodum diſtortam, in qua objectum vix dignoſcas, repræſentat.

173. En autem methodum in plano delineandi imaginem deformatam, ut in ſpeculo cylindrico (cujus radius datur) in ejusdem plani loco certo verticaliter poſito, e certa oculi diſtantia viſa, recta, & objecto ſuo conformis, appareat.

Pingatur in plano ſeparato objectum in ſpeculo exhibendum vera dimenſionum omnium ſervata proportione, attamen ne maxima ejus latitudo major ſit chorda arcus 130, vel 140 graduum ſpeculi cylindrici. Hæc imago parallelogrammo rectangulo (fig. 18) includitur, quod *craticulam prototypi* dicere licet. Hoc parallelogrammum in plura minora quadrata aut rectangula parallelogramma dividitur, ut imago hac ratione in plures partes diſpeſcatur. Dein in plano dato deſignetur locus, in quo collocanda eſt ſpeculi cylindri-

lindrici basis, portio nempe circuli F′TK′ (fig. 19.) cujus radius æqualis radio basis cylindri; applicetur huic chorda F′K′, æqualis lateri FK craticulæ prototypi, pedi imaginis respondenti, atque in totidem partes dividatur, ac ipsum latus FK. Erigatur in puncto bisectionis chordæ H perpendicularis HO, usque ad punctum O producenda, supra quod oculus constituendus est. Agantur ex O per puncta divisionum chordæ rectæ indefinitæ OA′, Og′, Oh′, Oi′, Ok′, atque super una ex istis, v. g. OA′ erigatur perpendicularis OV æqualis altitudini oculi supra planum. In eadem recta OA′ ex puncto F′, ubi occurrit chordæ K′F′, erigatur altera perpendicularis F′A, æqualis lateri alteri FA craticulæ prototypi, & in totidem partes secetur. Ex puncto V ducantur per puncta divisionum rectæ F′A lineæ VF′, VE′, VD′, VC′, VB′, VA′, & ubi eæ rectæ OA′ occurrunt in E′, D′, C′, B′, A′, fiant parallelæ ad K′F′, nempe E′e′, D′d′, C′c′, B′b′, A′k′; habebitur ex legibus Perspectivæ trapezium K′F′A′k′ perspectivum craticulæ prototypi AK, visum ex eo puncto, in quo collocandus est oculus, ut objectum in cylindro cernat, hoc est, in altitudine OV supra punctum O.

Ex centro Q arcus F′TK′, super quo pes cylindri collocandus est, per puncta incidentiæ F′, S, T, K′, in quibus rectæ (sive radii) OF′, OG, OI, OK′ dicto arcui occurrunt, ducantur catheti incidentiæ QL′, QP, QR, QX, atque indefinitæ F′a, Sg, Ti, K′k, quæ faciant angulos aF′L = OF′L, gSP = OSP, iTR = OTR, & kK′X = OK′X, adeoque radii reflexi erunt (133). In has lineas, sive radios reflexos, transferantur divisiones rectarum correspondentium trapezii perspectivi, nempe rectarum F′A′, Sg′, Mh′, Ti′, K′k′, & per singula puncta hac ratione reperta ducantur curvæ, quæ parum aberunt ab arcubus circulorum concentricorum, communis centri H, ipsasque rectas Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, FK craticulæ prototypi repræsentant, quemadmodum ab F′a, G′g, H′h, I′i, K′k, rectæ FA, Gg, Hh, Ii, Ka ejusdem craticulæ exhibentur, ac denique a trapeziis mixtilineis parva quadrata vel rectangula craticulæ. Quod si itaque cylinder super arcu F′TK′, & oculus in puncto jam determinato collocetur, in cylindro imago craticulæ prototypi recte exhibebitur. Unde si in trapezia mixtilinea partes in singulis correspondentibus areolis craticulæ prototypi delineatæ transferantur, habebitur imago deformata, uti desiderabatur.

CAPUT III.

CAPUT III.

Dioptrica.

ARTICULUS PRIMUS.

De Imaginibus, ſive focis ex ſimplici refractione.

174. PROBLEMA. *Datis objecto* O (fig. 20 & 21) *poſitione reſpectu ſuperficiei ſphæricæ refringentis* BAI *dati radii* AK, *& ratione ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refracti, invenire locum imaginis* P, *quæ per refractionem efformatur.*

Sit ratio data p ad q. Per objectum O & centrum K ducatur indefinita AO, quæ repræſentet axem ſphæræ per objectum O tranſeuntem: incidat radius OI infinite propinque ad axem OA: ducatur e centro K ad punctum incidentiæ I ſemidiameter, quæ erit cathetus incidentiæ. Ex eodem centro demittatur in radium incidentem, productum, ſi opus ſit, perpendicularis KG, quæ erit ſinus anguli incidentiæ OIN, ſive KIG: fiat ut p ad q, ita KG ad terminum quartum, quo tanquam radio centro K deſcribatur arcus, ad quem e puncto I ducta tangens, ſi producatur, ſecabit axem AO in puncto quæſito P. Si enim ad punctum contactus ducatur recta KH, patet, eam eſſe ſinum anguli KIP, qui conſequenter eſt angulus refractus ex radio incidente OI. Et quoniam manet eadem conſtructio pro omnibus radiis e puncto O infinite propinque ad A in ſuperficiem refringentem incidentibus, ſequitur, eos ita refringi, ut omnium directio ſit verſus P, in quo adeo focus eſt ſeu imago objecti.

175. Ut autem valor de AP analytice exprimatur, ſit AO, ſive $OI = d$, radius ſphæræ KI vel $KA = \mp r$ (adhibito $+r$, quando objectum eſt ex parte convexitatis (fig. 20); & $-r$, quando objectum eſt ex parte cavitatis (fig. 21)). Sit AP, ſive $IP = f$. Ex conſtructione præcedente eſt $p : q = KG : KH$; adeoque $KG = \frac{p \times KH}{q}$. Quia vero OI ſupponitur infinite propinqua ad OA, arcus AI pro recta ad axem OA perpendiculari haberi poteſt, ac propterea ſimilia ſunt triangula rectangula AOI, & OKG; item PAI & PKH. Et hinc $OK : OI = KG : AI = \frac{OI \times KG}{OK}$; item $KH : AI$ (ſive $\frac{OI \times KG}{OK}$) $= PK : PI$ (vel PA). Quare $PA = \frac{OI \times KG \times PK}{OK \times KH}$.

Et si substituantur valores literales, ut eruatur f, invenietur $f = \frac{dpr}{dp-q(d+r)} = \frac{dpr}{d(p-q)-rq}$, pro superficiebus convexis; item $f = \frac{dpr}{d(q-p)-rq} = \frac{dpr}{q(d-r)-dp}$, pro superficiebus concavis, quia in his r habet situm oppositum.

176. Quod ad accurationem harum formularum, & imagines, quæ per eas determinantur, attinet, eadem sunt attendenda, quæ superius (135) annotavimus. Quin theorema Num. 146. cum suis Corollariis huc etiam transferri debet; quod factum esse, imposterum supponemus.

ARTICULUS II.

De motu imaginum respondente motui objectorum, quando lux ex aere in vitrum transit, & vicissim.

Quoniam maxima utilitas, quam a Dioptrica expectare licet, est accurata cognitio legum, quas lumen observat, dum ex aere in vitrum, vel vicissim, transit, ut conspicillorum, telescopiorum, & microscopiorum effectus rite percipiantur; exemplum hujus rei in applicatione duarum præcedentium formularum dabimus.

177. Quando radius ex aere transit in vitrum, est $p = 31$, & $q = 20$. Unde formulæ duæ præcedentis articuli ad has reducuntur, $f = \frac{31\,dr}{11\,d-20r}$ pro superficiebus convexis; & $f = \frac{31\,dr}{-11\,d-20r}$ pro superficiebus concavis.

178. Sint duo media indefinite extensa, aer, & vitrum, utrumque in se homogeneum, & communi superficie sphærica alterum ab altero separatum. Supponamus primo convexitatem obverti aeri, in quo collocatum objectum lucidum, exiguæ extensionis, concipiatur in infinitum recedere, directione ad dictam superficiem perpendiculari. Ope formulæ $f = \frac{31\,dr}{11\,d-20r}$, determinabuntur omnes motus imaginis hujus objecti, quemadmodum supra (Num. 140 & sequentibus) de speculis sphæricis factum est, prout alii semper fuerint valores distantiæ d, quam exprimemus in partibus, quarum unitas sit r.

I.a-

Itaque quamdiu d fuerit intra $d = \frac{1}{\infty} r$, & $d = \frac{20}{11} r$, erit f ſemper quantitas negativa, creſcente ejus valore in infinitum, & imago extra vitrum ſive ad eandem cum objecto partem apparebit, quia ſcilicet in formulæ calculo ponebatur f poſitiva, qua deſignabatur diſtantia ſuperficiei refringentis ab imagine ultra eam ſuperficiem reſpectu objecti exiſtente: præterea imago ſemper erit erecta (149), & a ſuperficie refringente in infinitum recedet, ejus locum determinante concurſu directionis radiorum, quam in ingreſſu in vitrum acquiſiverunt, minus ſemper divergentium, donec paralleli evadant exiſtente $d = \frac{20}{11} r$. Ab hoc valore $d = \frac{20}{11} r$ uſque $d = \infty r$, f ſit poſitiva, imago exiſtit intra vitrum ſitu inverſo, & ex diſtantia infinita verſus ſuperficiem refringentem accedit uſque ad $\frac{31}{11} r$, radiis, qui vitrum transmittunt, a parallelismo magis ſemper convergentibus.

179. At vero ſi ſuperficiei communis, media diſterminantis, cavitas ſit obverſa aeri, formula $f = \frac{31 dr}{-11d - 20r}$ oſtendit, quod quæcunque fuerit objecti ab ea ſuperficie diſtantia, ſive valor de d, f ſit ſemper negativa; atque hinc imago ſemper eſt extra vitrum, & erecta. Dum autem d ab $\frac{1}{\infty} r$ usque ad ∞r creſcit, f etiam ab infinite parva usque ad $\frac{31}{11} r$ augetur, & imago a ſuperficie refringente usque ad diſtantiam $\frac{31}{11} r$ recedit, radiis, qui vitrum ſubeunt, perpetuo quidem divergentibus, attamen ſemper minus.

180. Quod ſi objectum intra vitrum exiſtere, illicque moveri ſupponeretur a ſuperficie media ſeparante in infinitum, tum vero ſumendum foret $p = 20$, & $q = 31$, atque formula pro ſuperficie convexa in hanc abiret $f = \frac{20 dr}{-11d - 31r}$; pro concava autem $f = \frac{20 dr}{11d - 31r}$.

Unde ſi objectum ponatur primo in ſuperficie convexa, calculo & ratiocinio priori ſimili clarum fiet, quod objecto in infinitum recedente imago erecta intra vitrum maneat, a ſuperficie communi ad diſtantiam $\frac{20}{11} r$ removenda, radiis, qui e vitro in aerem exeunt, ſemper minus divergentibus.

181. Si denique objectum in superficie concava collocetur, e formula $f = \frac{20dr}{11d-31r}$ deducetur, f semper fore negativam, quiscunque sit valor de d, incipiendo a $d = \frac{1}{\infty} r$ usque ad $d = \frac{31}{11} r$: atque hinc imago habebit situm erectum intra vitrum, & a superficie in infinitum recedet, radiis qui in aerem emergunt, semper minus divergentibus, donec paralleli fiant. Verum a $d = \frac{31}{11} r$ usque ad $d = \infty r$, fiet f positiva, imago invertetur, & in aere versus superficiem refringentem ad distantiam $\frac{20}{11} r$ accedet, radiique in aere semper magis convergent.

Eodem prorsus modo, ut ex hoc exemplo liquet, investigari poterit via imaginis alicujus objecti in aliis mediis refringentibus, uti in aere & aqua, vel vitro & aqua.

ARTICULUS III.

De imaginibus, quæ per duplicem refractionem efformantur.

In vitris, quorum usus est, plerumque duplex considerandа est refractio, altera in ingressu radii in vitrum; in egressu altera.

182. PROBLEMA I. *Datis dimensionibus lentis vitreæ cujuscunque* AB (fig. 22), *positione objecti* O *in communi axe utriusque superficiei sphæricæ lentis, quarum centra sunt in* C & K, *invenire punctum axis* F, *in quo radius* OI *axi* AO *infinite propinque incidens, post duplicem refractionem, alteram in* I, *alteram in* T, *eundem secat.*

RESOLUTIO. Sit $OA = d$, $CB = R$, $KA = r$, $FB = x$, $PB = z$; ex inspectione schematis patet, esse P punctum axis, quo dirigitur radius incidens OI post primam refractionem in I; sit AB, quæ vitri crassitiem exhibet, $= e$; & ratio sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis in ingressu radii in lentem, ut p ad q; in egressu ut q ad p. Sit denique $CD = m$, $KG = n$. Liquet porro ex ipsa figura, esse $p : q = KG$ (sive n): $KH = \frac{nq}{p}$; & $q : p =$ CD (seu m): $CE = \frac{mp}{q}$.

His positis, ob triangula rectangula OAI, OKG similia, est $OK : OA = GK : AI$, sive $d + r : d = n : AI = \frac{dn}{d+r}$; &

quia

quia triangula PAI, PKH ſimilia quoque ſunt, habetur PA $(z+e)$: PH$(z+e-r)$ = AI $\left(\frac{dn}{d+r}\right)$: KH $\left(\frac{nq}{p}\right)$; unde oritur æquatio $\frac{dnz+den-dnr}{d+r} = \frac{nqz+enq}{p}$, e qua invenietur valor $z = \frac{deq+eqr+dpr-dep}{dp-dq-qr}$. Dein e triangulorum PCD, PBT ſimilitudine eſt PD (ſeu $z+R$): PB (ſive z) = CD (vel m): BT = $\frac{mz}{z+R}$. Denique triangula FCE, FBT itidem ſimilia ſuppeditant hanc analogiam FC (id eſt $x+R$): FB (ſeu x) = CE $\left(\text{ſive } \frac{pm}{q}\right)$: BT $\left(\text{vel } \frac{mz}{z+R}\right)$, e qua facta æquatione, obtinetur alter valor de $z = \frac{pRx}{qx+qR-px}$; hi duo valores, ut reperiatur x, inter ſe comparentur, & factis reductionibus neceſſariis tandem obtinebitur $x = \frac{dpqRr+deqqR-depqR+eqqRr}{dppR-dpqR-pqrR-deqq-dpqr+2depq-depp+dppr-eqqr+epqr}$.

183. Hæc æquatio generalis ad multo ſimpliciorem expreſſionem in caſibus particularibus reducitur. Etenim ſi lens ſupponatur vitrea, eſt $p = 31$, $q = 20$, & formula prior in hanc mutatur $x = \frac{620drR-220deR+400erR}{341dR+341dr-620rR-121de+220er}$. Et ſi ponatur $e = 0$, ſive vitri craſſities negligatur, habetur $x = \frac{620drR}{341dR+341dr-620rR} = \frac{20drR}{11dR+11dr-20rR}$. Denique ſi aſſumatur $r = R$, ſive ſi utraque ſuperficies ſphærica ſupponatur ejusdem radii, fiet $x = \frac{10dr}{11d-10r}$.

184. OBSERVA. I. Dato arcu AI, inter punctum axis utrique ſuperficiei ſphæricæ communis A, & punctum I (in quod oblique incidit radius OI, e puncto O ejusdem axis emiſſus) intercepto, ope trigonometriæ planæ inveniri poteſt verum punctum F, in quo radius OI poſt duplicem refractionem axi occurrit. Nam in triangulo OKI nota ſunt OK, KI, & angulus AKI, unde reperitur IO, & angulus KIO cujus complementum eſt KIG Porro in triangulo rectangulo IKG habetur IK cum angulo KIG, & hinc obtinebitur KG. Fiat tum p: q = KG: KH, & in triangulo rectangulo KIH invenietur angulus KIH, habitis nempe KI & KH. In triangulo KIP datur jam IK & anguli IKP, KIP; quare dabitur etiam latus KP cum angulo KPI. In triangulo

PCD,

PCD, rectangulo ad D, habetur PC = PK + KA + CB − AB, & angulus CPD, e quibus reperietur PCD, & CD. Fiat $q : p = CD : CE$. Tum in triangulo rectangulo CTD cognita erunt CT, & CD, e quibus reperietur angulus TCD. In triangulo CTE habitis CT & CE, angulus ETC invenitur, cujus complementum est CTF. Unde tandem in triangulo CTF, notis latere CT, & angulis CTF, FCT = PCD − TCD, reperitur CF, consequenter BF = CF − CB.

Si objectum habeat distantiam infinitam, calculus paullo contractior erit: etenim cum in eo casu fiat radius OI axi parallelus, anguli KIG = AKI, mensura est arcus datus AI.

185. OBSERVA. II. E calculo præcedente, imo ex ipsa constructione Geometrica, facile apparet, quod *dum radius* OI *ad aliquam distantiam a puncto* A *axis utrique superficiei sphæricæ communis incidit, curvitas arcus* AI *eum citius versus axem inclinet.* E quo fit, ut punctum F, in quo axis a radio refracto secatur, eo propius sit ad B, quo plures gradus arcus AI continet.

186. PROBLEMA II. *Datis dimensionibus lentis cujusvis* AD (fig. 25) *cujus superficies habent centra in* C & K, *positione objecti* O *extra axem* BK *sed in eadem cum puncto axis* B *a lente distantia; invenire punctum* F, *in quo radii ab* O *emanantes post transitum per lentem concurrunt.*

RESOLUTIO Ducatur per O & centrum K recta OK, quæ erit axis superficiei primæ sphæricæ ALD; & omnes radii (174) ex O in hanc superficiem (quæ per hypothesin paucorum graduum est) incidentes concurrent in aliquo puncto P ejusdem axis, quod per formulam Num. 175 determinatur; quemadmodum etiam omnes radii e puncto B emissi uniuntur in *p*. Jam vero considerari potest punctum P tanquam objectum aliquod intra massam vitream positum, quod radios in superficiem ATD emittat: itaque ducta recta PC per centrum C & punctum P, quæ erit axis hujus superficiei, radii ex P incidentes ita refringi debent in hac superficie, ut eorum directio tendat ad idem punctum F cis T situm (174), quod per formulam Num. 175 invenitur; quemadmodum punctum *p*, cum sit prima imago objecti B per refractionem in superficie ALD efformata, objecti vicem agit respectu superficiei ATD, quæ secunda refractione efficit imaginem ipsius *p* in *f*, sive imaginem secundam objecti B.

187. COROLL. I. Quod si crassities vitri negligatur, & supponantur B & O æqualiter distare a lente, manifestum est, etiam puncta *p* & P habitura æqualem distantiam, utpote quæ reperiuntur ex eadem formula, & iisdem datis. Ob eandem rationem F quoque & *f* eodem spatio sunt a vitro remota.

188. Co-

188. COROLL II. Quoniam quæ de puncto O diximus, omnibus punctis ſuperficiei objecti applicari poſſunt, liquet, quomodo imago integra alicujus objecti efformetur, cujus figura proxime ſimilis eſt ſuperficiei objecti, quæ in vitrum radiat.

189. COROLL. III. Si partes objecti magnam habeant extenſionem, vel ſi plura objecta ſint in eadem a vitro diſtantia, eorum imagines in magna portione ſphæræ, cujus centrum occupat vitrum, diſtincte depingi debent.

190. COROLL. IV. *Itaque ſufficit, ope formularum præcedentium quærere locum imaginis illius puncti, quod in axe vitri exiſtit, ut habeatur locus imaginis totius objecti.*

191. COROLL. V. Ex ipſa conſtructione quoque præcedente apparet, quod ſi tanta ſit diſtantia objecti O B, ut imago depingatur ultra ſemidiametrum ſuperficiei ſecundæ refringentis hæc imago habeat ſitum inverſum, hoc eſt ejus partes contrario ſitu appareant, quam habeant partes correſpondentes objecti.

192. Experientia docemur, campum, in quo imagines objectorum in lentes radiantium diſtincte depinguntur, eſſe ſatis amplum. Etenim ſi in camera obſcura (qualem N. 5. deſcripſimus) fiat appertura 2 vel 3 digitorum in diametro, atque in eam vitrum convexum inſeratur, in charta alba ad diſtantiam tum ſemidiametris convexitatis, cum etiam diſtantiæ objectorum proportionatam collocata videbuntur imagines inverſæ objectorum per foramen radiantium, quarum colores eo vivaciores apparebunt, quo objecta magis fuerint illuminata: eruntque hæ imagines admodum diſtinctæ, quamvis illæ præ ceteris, quarum objecta propius ad axem lentis ſunt poſita.

193. THEOREMA. *Si in vitro utrinque convexo, vel utrinque concavo, radii convexitatis vel concavitatis fuerint æquales; e radiis lucis a puncto O extra axem poſito* (fig. 23 & 24) *in vitrum incidentibus ille, qui per punctum I, medium craſſitiei vitri, tranſit, in egreſſu e vitro poſt duplicem refractionem acquirit directionem* T F *parallelam directioni* O L, *quam habuit ante ingreſſum.* Atque hic radius deinceps dicetur *radius principalis.*

DEMONSTRATIO. Ob arcus A L D, A T D eodem radio deſcriptos æquales, figura vitri conſiderari poteſt tanquam polygonum infinitorum laterum ſymmetrum, cujus partes in ſingulis diagonalibus oppoſitæ æquales ſunt, centro in I exiſtente. Unde radius lucis T L per I tranſiens utrinque in latera parallela & æqualia (quorum ſitus per tangentes G L, H T determinatur) incurrit; & propterea utrobique æqualem patietur refractionem, hoc eſt, angulus refractionis I L O debebit æqualis eſſe angulo refractionis I T F, atque adeo (Elem. 434) directiones M C, T F erunt parallelæ.

194. COROLL. I. *Si ponatur vitrum ex una parte planum, ex altera convexum vel concavum, radius principalis erit is, qui per ſupremum convexitatis vel cavitatis punctum vel vitrum ingreditur, quando convexitas aut concavitas obvertitur objecto; vel egreditur, dum planities objectum reſpicit.* Nam ſupremum ſuperficiei ſphæricæ punctum haberi poteſt pro plano infinite parvo, atque ſuperficiei planæ vitri parallelo.

195. COROLL. II. *Neglecta vitri craſſitie, radius principalis in eadem recta exit, qua ingreditur;* ſeu quod idem eſt, *radius oblique incidens, qui ad illud axis punctum dirigitur*, quod eſt medium craſſitiei vitri, in eadem recta transit per vitrum, quin patiatur refractionem.

ARTICULUS IV.

De motu & ſitu imaginum, quæ e duplici refractione oriuntur.

196. I. Si ſupponatur objectum exiguæ extenſionis in ipſa ſuperficie vitri utrinque æqualiter convexi, ubi communis utriusque ſuperficiei axis transit, collocari, dein ab eo in eodem axe producto in infinitum recedere; e formula $x = \frac{10\,dr}{11\,d - 10\,r}$ (183) liquet, imaginem hujus objecti ſemper fore in eodem axe: & quia in formula quantitas x eſt negativa, & valoribus omnibus de d, a $d = \frac{1}{\infty} r$ uſque ad $d = \frac{10}{11} r$, ſubſtitutis, creſcit; erit imago erecta, & ab initio in eodem loco cum objecto, poſtea verſus eandem partem a vitro (in quam objectum movetur) in infinitum recedet, radiis, qui e vitro exeunt, ſemper minus divergentibus, donec paralleli evadant. In omnibus aliis valoribus de d, incipiendo a $d = \frac{10}{11} r$ usque ad $d = \infty\, r$, quantitas x fit poſitiva, & decreſcit, imago habet ſitum inverſum ex parte altera objecti, & e diſtantia infinita redit verſus vitrum usque ad $\frac{10}{11} r$, radiis eam formantibus, dum e vitro egrediuntur, ab initio parallelis, tum ſemper magis convergentibus.

197. II. Si vitrum ſit plano-convexum, unus e radiis fit infinitus; ſit itaque $R = \infty$; formula $x = \frac{20\,drR}{11\,dR + 11\,dr - 20\,rR}$, mutatur in hanc $x = \frac{20\,dr}{11\,d - 20\,r}$. Quod ſi jam eædem fiant ſuppoſitiones, quæ Num. præcedente, diverſarum diſtantiarum objecti ab hoc vitro, reperietur motus imaginis fieri eadem ratione, niſi quod

quod positis æqualibus valoribus de d, quantitas x semper sit major, & imago non acquirat distantiam infinitam, nisi dum d sumitur $= \frac{20}{11} r$.

198. OBSERVA. Dum vitrum est plano-convexum, quæri potest, an perinde sit, sive objecto superficies plana obvertatur, sive convexa? Ad quod respondendum, perinde id esse, si vitri crassities insuper habeatur. At si ad eam attenditur, imago magis distat a superficie convexa, dum objecto superficies plana obvertitur, quam distet a superficie plana, dum convexa objectum respicit. Et siquidem objectum magnam habeat a vitro distantiam, hæc differentia est circiter $\frac{2}{3}$ crassitiei vitri. Etenim si in formula $x = \frac{620drR - 220deR + 400erR}{341dR + 341dr - 620rR - 121de + 220er}$ (183) fiat $d = \infty$, & $r = \infty$, ut exprimatur superficies plana A I (fig. 22) objecto obversa, hæc formula reducitur ad hanc $x = \frac{620}{341} R$; at si ponatur $R = \infty$, ut denotetur, quod superficies plana B T sit ab objecto aversa; prior formula mutatur in hanc $x = \frac{620}{341} r - \frac{220}{341} e$. Usus hujus observationis est in Telescopiis dioptricis, in quibus reticula, sive micrometra applicantur, uti in sequentibus videbimus. Ejusmodi telescopiorum vitra objectiva sæpe sunt plano-convexa; unde dum e tubis eximuntur, ut v. g. maculæ iis adhærentes detergantur, cura adhiberi debet, ut dum reponuntur, superficies utravis parti, cui prius, obvertatur: hoc si negligeretur, fieri posset, ut si vitri crassities $1\frac{1}{2}$ lineam excederet, fila reticuli seu micrometri, plus integra linea extra locum debitum constituerentur.

199. III. Si vitrum est ex utraque parte æqualiter concavum, radius superficiei objecto obversæ K A (fig. 22) cadit ad partem objecti O, ideoque ponendum $= -r$; & radius C B, qui prius ex parte objecti erat, venit ad partem oppositam, adeoque erit $= -R$. Hac ratione formula pro vitris utrinque æqualiter convexis etiam applicari poterit utrinque æqualiter concavis, fietque $x = -\frac{10dr}{11d + 10r}$; e qua simul apparet, quod si objectum primo collocetur in alterutra talis vitri superficie in puncto, per quod communis axis transit, postea ab ea in infinitum recedat, ejus imago moveatur versus eandem partem usque ad distantiam $\frac{10}{11} r$ a superficie in hoc axe sumtam; quod semper sit erecta; quod radii, a quibus depingitur, e vitro exeant semper minus divergentes. Nam va-

lor de x in hac formula eſt ſemper negativus, quæcunque quantitas pro d aſſumatur.

200. IV. Si vitrum ſit plano-concavum, formula erit $x = -\frac{20dr}{11d+20r}$; moto objecto erit ſimilis motus imaginis, ut in vitro utrinque concavo, niſi quod valor de x ſemper ſit major, & diſtantia maxima imaginis a vitro $= \frac{20}{11}r$.

201. Denique ſi vitrum ſit *Meniſcus*, hoc eſt, ex altera parte convexum, ex altera concavum, ut obtineatur formula ei competens, ſignum alterutrius radii mutandum eſt, exempli cauſa ponendum $-$ R, loco $+$ R in formulis Num. 183; & neglecta vitri craſſitie obtinebitur $x = \frac{20drR}{11dR-11dr-20rR}$; quod ſi dein diverſi valores de d aſſumantur, invenietur motus imaginis. Verum hæc ſingillatim diſcutere ſuperſedemus, tum quod rarior ſit uſus ejusmodi vitrorum, tum quod plures occurrant caſus, quam nobis præfixa brevitas ferat. Ex eadem cauſa nihil adferimus de vitris concavis vel convexis utrinque, quorum concavitates vel convexitates diverſos habent radios.

202. OBSERVA. *In praxi ſupponi poteſt, objecti diſtantiam eſſe infinitam a vitro, quando radium ſphæræ millies vel decies millies excedit.* Sic ſi in formula $x = \frac{10dr}{11d-20r}$ ponatur $r = 10$ digit. & $d = 10000$, hoc eſt, d millies majus, quam r, reperietur $x = 9,102$ digit. Et ſi ponatur $d = \infty$, prodit $x = 9,091$ digit. Ex quo patet, differentiam diſtantiæ imaginis eſſe circiter $\frac{1}{100}$ dig. quando diſtantia objecti radium ſphæræ excedit millies, a diſtantia ejusdem, dum objectum infinite diſtat. *

CAPUT

* Si $d = 10000.$, $r = 10$; fit $x = 9,107+$; & ſi $d = \infty$, eſt $x = 9,091-$, unde differentia eſt $\frac{16}{1000}+$. Apparet tamen, quod nondum æquet $\frac{2}{100}$.

CAPUT IV.

De Visione.

ARTICULUS I.

Descriptio oculi, & imaginum, quæ in eo depinguntur.

203. Oculus tribus tunicis vestitur: prima & extima EDNNDE (fig. 26.) *cornea* dicitur, estque figuræ sphæricæ, parte DED minoris sphæræ segmento existente, quam altera, atque laminæ tenuis corneæ instar pellucida. Altera PIIP *sclerotica* appellatur, apertura ad P P prædita, quam pupillam nominant, quamque annulus niger, griseus, vel cæruleſcens (iridem appellant) ambit: hic semper figuram circularem pupillæ conservat, seu ea dilatetur, dum oculus ad locum obscurum venit, seu contrahatur in majore luce. Neuter motus nobis non est voluntarius. Tertia *choroides* dicitur, estque textum villosum, nigerrimo colore tinctum, nempe C B *s* B C, quæ adeo oculo speciem cameræ obscuræ conciliat, atque radios, quorum refractio inordinate fit, absorbet. Choroidi infra pupillam lens quædam, seu *humor Crystallinus* connexus est C C. Ejus convexitas anterior minoris est radii, quam posterior. Retinetur autem duobus musculis B C, B C (sive *ligamentis ciliaribus*), a quibus, dum poscente casu versus B a C trahitur, minus convexus redditur. Fors etiam illud præstant hi musculi, ut eam antrorsum, retrorsumve moveant.

Fundo circa H H reticulum album & subtilissimum, quod *retinam* dicunt, inhæret, ac super choroide sese explicat. hæc retina nil aliud est, quam expensio nervi optici, impressiones usque ad sedem animæ transmittentis. * Spatio intra corneam & humorem crystallinum continetur liquor admodum limpidus, & clarus, cui iris innatat, ac *humor aqueus* vocatur; Intra humorem crystallinum vero & fundum oculi est alter, admodum quidem pellucidus, consistentiæ tamem majoris, quam aqueus & mucilaginosæ: dicitur *humor vitreus*.

204. Radii lucis oculum subeuntes ita in humore aqueo refringuntur, ut sinus anguli incidentiæ sit ad sinum anguli refracti ut 4 ad 3: patiuntur quoque aliquam refractionem in ingressu &

* Physici non nulli choroidem tanquam immediatum visus organum habent, quod experimentis constet, objecta cessare videri, oculo ita collocato, ut eorum imagines incidant in centrum fascis N N e tenuissimis filamentis compositi, e quo retina incipit se supra choroidem expandere. *Nota Authoris.*

egreſſu ex humore cryſtallino, ratione dictorum ſinuum exiſtente in ingreſſu ex humore aqueo in cryſtallinum ut 13 ad 12; in egreſſu ex humore cryſtallino in vitreum ut 12 ad 13. His autem refractionibus efficitur, ut radii ex eodem objecti puncto emiſſi rurſus uniantur, & conſequenter ejus imaginem depingant, quæ objectum diſtincte exhibet, quando in ipſa retina efformatur, confuſe autem, ſi radii citius concurrant, quam attingant retinam, vel etiam quando punctum concurſus ultra retinam exiſtit.

205. Verum ut hæc non nihil clarius intelligantur, quodlibet ſuperficiei corporis punctum in omnem partem radios emittens, reſpectu pupillæ oculi conſiderari debet tanquam apex coni, cujus baſis eſt ipſa pupilla: per refractionem vero in oculo fit alter conus priori oppoſitus, cujus baſis eſt eadem pupilla, vertex autem in fundo oculi, ubi radiorum concurſu imago puncti illius, e quo dimanarunt, perceptibilis efformatur. Utrique huic cono axis eſt communis, qui ad ſenſum eſt linea recta (nam refractio, quæ in ingreſſu & egreſſu ex humore cryſtallino fit, hic conſiderari vix meretur): unde ſupponi poteſt, omnes radios, utrumqne conum conſtituentes, cum axe communi congruere & hac ratione quodvis objecti punctum diſtincte depingi, quia ejus imago per radium, centrum pupillæ transeuntem, in fundo oculi formatur.

Hoc poſito, *Primo* ſi punctum viſibile ſit circa centrum ſuperficiei objecti, velut in R (fig. 26), alterum quodpiam Q ad partem dextram prioris, iſtud ſuam imaginem radio Q *q* in oculum transmittet, qui radium R *r*, prioris imaginem deferentem, in centro pupillæ interſecat: unde imago *q* depingetur in fundo oculi e parte ſiniſtra imaginis *r*, quæ punctum R repræſentat, atque ideo ſitus imaginum *q* & *r* contrarius eſt ſitui punctorum R & Q in ſuperficie objecti.

Secundo. Quoniam quivis faſcis vel conus luminoſus e quovis ſuperficiei puncto egreſſus reduci poteſt ad unicum radium, qui axem conſtituit; ſuperficies objecti ſit reſpectu oculi baſis pyramidis, cujus vertex eſt in centro pupillæ: & radii hanc pyramidem formantes e centro pupillæ in oculum producti alteram efficiunt in fundo oculi terminatam, cujus conſequenter baſis eſt imago tota objecti, quæ ſuis depicta coloribus ideam præſentis objecti, ejusque figuræ excitat, ut in prioribus jam diximus.

ARTI-

ARTICULUS II.

De Visione Distincta.

De diversis vitiis visus, & remediis, quæ Dioptrica suppeditat.

206. Quoniam radii luminis ab aliquo puncto A emissi secum deferunt imaginem illius (71), atque post transitum per vitrum convexum in foco iterum uniuntur, manifestum est, quod sive cis, sive trans focum in tabula quapiam plana excipiantur, puncti quidem illius A imaginem exhibeant, verum tanto majorem, minusque vivacem, quo major a foco fuerit tabulæ distantia. Ob eandem extensionem imaginis puncti alterius B, priori A vicini, necessario fiet, ut imagines utriusque partem aliquam commiscean-tur: & siquidem diversi sint coloris, imago e binis composita trium colorum apparere debebit, quia pars utrique imagini communis referet colorem e mistione duorum ortum. E quo liquet, imaginem ita commistam suo objecto nec dimensione, nec figura, nec colore, nec nitore fore similem, sed justo majorem, atque confusam. At si radii in ipso foco excepti fuissent, utriusque puncti imago separatim fuisset suo colore depicta. Atque hunc in modum visio distincta, vel confusa concipienda est. Visio objecti tunc est distincta, quando lumen in ipso concursu radiorum retinam contingit, sive quando apices conorum luminosorum, qui e singulis objecti punctis egrediuntur (supponimus enim objectum esse sufficienter illuminatum), in ipsa retina efformantur. At visio confusa est, dum lux ad retinam pervenit vel ante, vel post punctum concursus.

207. Illud quoque jam diximus (174); imaginem vivacem & distinctam objecti, refractione radiorum in superficie convexa productam, esse in axe per centrum superficiei sphæricæ & objectum transeunte; unde apparet, objecta distincte videri haud posse, nisi oculo versus illa obverso, hoc est, nisi recta per centrum oculi & pupillæ transiens versus objecta dirigatur; quin non aliud punctum, si cum rigore loqui velimus, vere distincte cernitur præter illud, in quo ea recta terminatur.

208. Si objectum a superficie sphærica refringente convexa, cujus radius sit constans, certo intervallo remotum sit, dein ad eam immotam accedat, ejus imago a superficie refringente recedit (179): unde ut imago in eodem loco perstaret etiam admoto propius objecto, necesse foret, ut vel ipsa superficies refringens a loco imaginis removeretur, vel radius convexitatis minueretur, prout major objecti vicinia exigit: quippe postremum si fieret, imaginis distantia (quæ juxta formulas Artic. II (179) semper est multiplum

tiplum radii ſuperficiei ſphæricæ) ratione magnitudinis novi radii habita major evaderet, quamvis in ſe prorſus eadem maneret. Atque hoc eſt, quod bonitatem viſus apud quosdam ſingularem conſtituit, quibus nempe ita conformatus eſt oculus, motusque partium adeo expeditus, ut radiis lucis ex eodem puncto emiſſis pupillam fere parallele ingredientibus (objecto ſcilicet ad magnam diſtantiam remoto (202)) focus accurate in ipſa retina efformetur; dum vero accedente objecto radii ex eodem puncto venientes jam ad ſenſum quoque divergunt, ita pro diverſo objecti intervallo poſſint componere oculum, ut imago nihilominus ſemper ſuper retina depingatur, ſeu deinde id efficiant humorem cryſtallinum verſus pupillam admovendo, ſeu augendo illius convexitatem, ſeu etiam corneam reddendo magis convexam, aut denique bina ex iſtis, aut omnia tria ſimul præſtent, ut in quavis diſtantia objecta diſtincte cernant, modo ea nec in ſe nimis magna ſit, nec 5, vel ſex digitis minor.

209. Verum ſi contingat oculi vitio (ſeu id e natura advenerit, ſeu contractum ſit mala aſſuetudine, ſeu alicunde infortunato acciderit) ut muſculis tum firmitas, tum ſeſe contrahendi, laxandique facultas ad novam oculo conciliandam figuram neceſſaria deſit, tum equidem objecta diſtincte videri non poterunt, niſi quæ conſtituta fuerint intra certos diſtantiæ limites, ampliores, arctioresve, pro diverſa oculi, ut imagines in rectinam incidant, figuram ſuam mutandi poteſtate. Exempli cauſa ſi humor cryſtallinus, aut etiam anterior corneæ pars, nimium ſint convexa, locus verus imaginum objectorum valde remotorum eſt humori cryſtallino admodum vicinus, adeoque intra hunc humorem & retinam ; unde non niſi confuſe apparere debent, & ut in majore diſtantia ſuper ipſa retina depingantur, neceſſe eſt, ut objecta prope admoveantur. Atque hoc illorum eſt vitium, qui vicina modo diſcernunt, & *Myopes* appellantur.

210. Ex oppoſito, ſi ſegmentum anterius corneæ, vel humor cryſtallinus, tam exiguam habeant convexitatem, ut objectorum multum diſtantium ſolummodo imagines in retinam incidant, radii ex objectis vicinis venientes trans retinam ſuum focum habent ſitum : quare cum jam intercipiantur in retina ante concurſum, objecta confuſe exhibeant, eſt neceſſe ; quod vitium eorum eſt, qui remota tantum vident, & *Presbytæ* dicuntur, quales magnam partem ſunt ſenes, apud quos ipſa ætas humores deſiccat, humoris cryſtallini convexitatem minuit, facitque, ut anterior corneæ pars ſubſidat aliquantum.

211. Itaque Myopes objecta vicina ſolum diſtincte cernunt, ſive illa, e quibus emiſſi radii ſenſibiliter divergunt; & Presbytæ obje-

objecta remota tantum vident distincte, id est, ea, e quibus radii ad sensum paralleli veniunt; in sequentibus enim videbimus, quod si accurate loquamur, ad visionem distinctam necessarium sit, ut radii tantillum divergant (323). Jam vero ex theoria vitrorum concavorum & convexorum patet, radios parallele incidentes in vitra concava (sive qui e magna distantia veniunt) ex iisdem egredi divergentes, quia si concavitatis semidiametri utrinque sint æquales, radii in exitu e vitro acquirunt talem directionem, ut versus vitrum reducti concurrant in puncto intra vitrum & objectum sito, quod a dimidio axis parum abest. Quare Myops, in cujus oculum radii hunc in modum divergentes incidunt, objectum illorum discernere poterit; atque id genus vitium ope vitri concavi corrigetur, objectis remotis distincte apparituris, si concavitas conformationi oculi proportionata fuerit. Simili argumento colligitur, a Presbytis objecta vicina distincte videri posse, si in foco vitri convexi constituantur, quod radios e foco divergentes ad parallelismum refringit.

212. Verum nec Myopes, nec Presbytæ defectum ullum sentirent, si pupilla non tam late pateret. Si enim in oculum aditus per unicum tantum punctum foret, ut e singulis objecti punctis singuli tantum admitterentur radii, hi in singula, & separata retinæ puncta inciderent, ideoque imaginem distinctam efformarent, attamen ob paucitatem radiorum admodum debilem. Et nisi hæc debilitas visioni obesset, san promtum haberemus tam Myopibus, quam Presbytis remedium, scilicet tenuem & opacam laminam, exiguo foraminulo pertusam: quamvis fatendum, reipsa quibusdam in casibus eos hoc modo juvari.

213. Hinc etiam sequitur, *objecta per admodum parvum foramen visa debere distincte apparere, utcunque exigua eorum sit ab oculo distantia.*

214. Evenit quandoque, ut apud eundem hominem oculus alter sit recte constitutus, alter vitio, sive myopum, sive presbytarum, laboret. Tum vero ut talis objecta recte cernat, necesse est, ut oculum alterum, nulli defectui obnoxium, ea versus dirigat, alterum vitiosum ab iisdem avertat, utpote non recepturum nisi imaginem confusam, quæ alterius imagini distinctæ officeret. Hæc alterna, jam hujus, jam alterius oculi distorsio *Strabismus* appellatur, iique dicuntur *Strabi*, qui hoc vitio laborant. *

* Quod si alter oculus sit rite constitutus, alter presbytarum vitio subjectus, solum vitiosus avertendus est ab objectis vicinis, a nullo vero objecto is, qui vitio non laborat; si vitium alterius oculi sit myopum, & objecta sint justo viciniora, oculus integer averti debet in hoc solo casu. At si uterque oculus suo laboret vitio, alter myopum, presbytarum alter, tum vero alterna facienda est eorum distorsio, ut diversa fuerit objectorum distantia.

ARTICULUS III.

De Visione, quæ fit ope vitrorum, vel speculorum.

215. Cum objecta extra nos posita non aliter, nisi per imaginem in oculo depictam percipiamus, illud imprimis est manifestum, *quod ea videamus in directione radiorum, qua imaginem efformaturi oculum ingrediuntur*, quemadmodum jam superius est dictum (58). Quod si itaque radii oculum non subeant, nisi post complures refractiones, reflexionesque, quibus prima eorum, quam ab objecto emissi habuerant, directio admodum mutata est, fieri nequit, ut objectum videamus in linea recta, inde ad nostrum oculum ducta.

216. *Secundo.* Extra dubium quoque est, cum magnitudo apparens objecti, quacunque tandem ratione videatur, semper potissimum dependeat ab angulo ad oculum (77) qui a radiis ab extremis objecti punctis venientibus comprehenditur; si hic angulus sive refractione, sive reflexione reddatur major, minorve, quam citra eam, & nudo oculo objectum inspiciente foret; aut (quod idem est) *si angulus inter duos radios ab extremis imaginis ultima refractione, vel reflexione efformatæ punctis ductos comprehensus major sit vel minor, quam qui fieret, si ab extremis objecti punctis radii sine refractione aut reflexione ad oculum pervenirent, objectum auctum vel diminutum pro diversa anguli magnitudine appariturum: atque adeo oculo ad imaginem hanc ultimo efformatam accedente, vel ab eo recedente, objectum crescere, aut decrescere videbitur, etiam tunc, quando accessu ad imaginem oculus ab objecto recedit, & recessu ab imagine objecto reipsa vicinior fit:* est enim imago objecti vicaria, non nisi hujus ope videndi. Quod si autem *objectum, vel etiam objecti imago, talem situm respectu vitri cujusdam tenuissimi, aut speculi obtineret, ut radii inde egressi, vel illuc tendentes, per refractionem reflexionemve evaderent paralleli, oculus in radiorum directione collocatus objectum, aut imaginem illius, videret semper ejusdem magnitudinis, utcunque ad vitrum vel speculum accederet, vel ab eo recederet; essetque hæc magnitudo eadem, ac si oculus in loco vitri vel speculi constitueretur.* Etenim sit RS (fig. 27 & 28) semidiameter objecti vel imaginis ita respectu vitri CB sitæ, ut radii e puncto R digressi (aut ad hoc punctum directi) paralleli inter se exeant; vitri crassitie posita infinite parva unus ex his radiis RC (scilicet principalis) sine refractione transit (195). Sit porro radius SC e centro imaginis vel objecti emissus, qui cum axe vitri congruit: patet, oculo in C posito, ubi est vitrum, objectum, vel imaginem SR, sub angulo SCR appariturum; eodem vero in quovis axis puncto alio E constituto, modo illuc dirigatur radius e puncto R veniens (vel ad R tendens), angulum visorium fore

CEB

CEB = SCR. Idem eveniet, oculo in foco vitri, vel ſpeculi collocato, in quod radii ex imagine vel objecto quopiam paralleli incidunt: quæcunque ſit imaginis vel objecti diſtantia a ſpeculo, ſemper ejusdem magnitudinis oculo videbitur.

217. Quod ad diſtantiam oculi a loco, in quo objecta eſſe apparent, ea non deſumitur a diſtantia vera oculi a loco imaginis per ultimam reflexionem vel refractionem factæ. Sed quoniam de intervallo apparente præcipue judicium ferimus ex idea, quam de eorum magnitudine acquirimus (74, 101), conſequens eſt, ut cum objecta per imagines refractione aut reflexione auctas vel diminutas videmus, ea ad noſtrum oculum acceſſiſſe, aut ab eo receſſiſſe exiſtimemus, prout ratio magnitudinis viſæ ad magnitudinem, quam aliunde ſcimus objectis eſſe, poſtulat. Jam vero cum ſuperficies corporis directe viſi ſit baſis pyramidis luminoſæ (23) cujus apex eſt in oculo, quando idem apex una, pluribusve reflexionibus, vel refractionibus fit magis obtuſus, objectum (quod ſemper videtur eſſe baſis pyramidis) hoc ipſo verſus oculum vel apicem novæ pyramidis admotum apparere debet. Oppoſitum continget, ſi apex pyramidis auctior evaſerit. Ex his ſequens conſtructio pro determinando loco apparente objectorum, quæ per vitra aut ſpecula conſpiciuntur, deduci poteſt. Sit R Q vera dimenſio objecti (fig. 29.); O locus oculi; O R axis pyramidis opticæ, qua objectum videtur; O T directio radii ab extimo puncto Q venientis poſt quotcunque refractiones vel reflexiones in ſuperficiebus ſphæricis, quarum axes omnes cadant in O R. Ducatur Q*q* ad O R parallela, donec occurrat radio O T; erit punctum *q* locus apparens puncti objecti Q, ſive ultimæ illius imaginis; O*r* diſtantia apparens ab oculo; *qr* locus apparens ultimæ imaginis reflexione vel refractione factæ, quam oculus O videt.

218. Hinc porro facile explicatur, cur objecta per vitra convexa aucta, & viciniora; per concava imminuta & remotiora appareant.

219. Denique intelligitur, quod radiis ab objecto emanantibus ita reflexis vel refractis, ut imago a tergo ſpectatoris depingatur, aut corpus opacum quodpiam inter eam, & oculum interponatur; objectum nulla ratione videri poſſit, quamdiu oculus in eodem manet loco. Quod ſi vero radii ita inflexi ingrediantur oculum, ut imaginem non niſi cis, vel trans retinam efformare poſſint, objectum confuſe tantum videbitur.

220. Hæc omnia ut exemplo generali explicentur, ſit G R (fig. 30) axis quotcunque vitrorum A, B, C; Q R dimenſio objecti cujusvis; E locus oculi excipientis radium Q K I H E, egreſſum primum a puncto Q, dein refractione lentis A ad K facta verſus F

Tab: III fig: 30.

directum, verum denuo refractionem in vitro concavo ad I passum, & versus *f* in egressu inflexum ; tandem in transitu per novam lentem CH ad axis punctum E refractum, ubi in oculum incurrit. Patet *Primo*, cum ET sit directio postrema radii, qua ad oculum pervenit, ductis Q*q* ad GR, & *qr* ad QR parallelis, locum apparentem ultimæ imaginis objecti QR esse *qr* (217). *Secundo*, distantiam apparentem oculi ab objecto esse E*r*. *Tertio*, magnitudinem apparentem esse ad magnitudinem veram objecti, ut ER ad E*r*, quia scilicet ratio angulorum *q*E*r*, QER (qui per hypothesin sunt valde exigui) eadem est (79). *Quarto*, situm objecti esse vel erectum vel inversum, ut imago postrema cis vel trans centrum ultimi vitri vel speculi respectu objecti vel prioris imaginis, quæ objecti vicem egit, sita fuerit, quod inito calculo focorum pro singulis vitris determinatur. *Quinto*. Si rectæ, quæ medii puncti vitri distantiam ab extimo limbo metiuntur (qualis est CH) instar objecti alicujus considerentur, & earum situs apparens eadem ratione determinetur, qua N. 217 usi sumus, supponendo, quod per vitrum inter eas & oculum situm videantur, illa, quæ minimum angulum ad oculum subtendit, determinat angulum visionis, hoc est, spatium maximum, quod trans omnia vitra videri potest.

Si modo vocibus, *refractio*, *lens* &c. substituantur *reflexio*, *speculum* &c aut universim, *medium diversum*, facile intelligitur, omnia, quæ modo attulimus, Catoptricæ cum Dioptrica communia esse.

CAPUT V.

De Telescopiis & Microscopiis.

ARTICULUS I.

Notiones præviæ.

221. Illud universim in *Telescopio* (sive tubo optico objectis diffitis contemplandis destinato) & *Microscopio* spectatur, ut *Primo* imaginem vivacem objecti, quod quis distincte videre cupit, exhibeat, obverso illi (objecto nempe) vitro utrinque convexo, aut plano-convexo, aut etiam menisco, vel speculo concavo (quod propterea *vitrum*, vel *speculum objectivum* appellatur). *Secundo* ut hanc imaginem nitidam, distinctamque videndam præbeat, imo auctam etiam ope alterius alicujus, pluriumve vitrorum, *quæ ocularia* dicuntur, quod ad eam partem collocentur, cui oculus est applicandus.

222. Duo

222. Duo itaque ſunt teleſcopiorum & microſcopiorum genera; alterum eorum, quæ ſolis vitris conſtant; alterum illorum, quæ tum ſpeculis, tum vitris ſunt inſtructa, ideoque *catadioptrica* vocantur.

223. *Campus* teleſcopii vel microſcopii dicitur totum illud ſpatium, quod oculus videre poteſt, ſi ita applicetur, ut microſcopium, vel teleſcopium totum ſuum effectum præſtare poſſit.

224. Quando deinceps *focum* ſimpliciter, & citra additum nominabimus, ſemper intelligemus locum concurſus radiorum refractorum, vel reflexorum, qui ab objecto ad diſtantiam infinitam remoto veniunt, ſive qui ex eodem objecti puncto digreſſi parallele incidunt. Idem eſt, ſi dicemus, vitrum, vel ſpeculum habere focum tot pedum vel digitorum.

225. Si detur vitrum, vel ſpeculum ſphæricum quodvis, longitudo foci experimentando determinari poteſt hunc in modum.

I. Si ſpeculum ſit cavum, & vitrum convexum, obvertatur ſoli, quæraturque illud punctum, in quo radii reflexi vel refracti, plano quopiam excepti, efficiunt circulum quam minimum, atque luce candidiſſima & vivaciſſima, materiamque combuſtioni aptam quam citiſſime incendunt. Vel vero tegatur ſpeculum, vel altera vitri ſuperficies, charta nigro colore tincta, & pluribus foraminulis acu factis pertuſa; tum quæratur diſtantia, in qua radii ſolis per hæc foramella ingreſſi rurſus uniuntur, atque unicum circulum candidum efformant. Vel denique obvertatur ſpeculum aut vitrum candelæ ardenti, & ad magnum intervallum remotæ, ut ſit ultra ſpeculi vel vitri centrum; quæratur diſtantia tum a candela, tum a ſpeculo vel vitro, in qua collocanda eſt tabula, ut imago candelæ inverſa, maxime diſtincta, quamque minima depingatur; utraque hac diſtantia habita, ope formulæ calculari poteſt radius concavitatis ſpeculi, vel convexitatis vitri, adeoque innoteſcet longitudo foci, quæ in ſpeculo eſt radii dimidia; in lente utrinque æqualiter convexa, ipſe fere radius; in vitro plano-convexo, dupla.

226. II. Si ſpeculum ſit convexum, vel vitrum concavum, tegatur rurſus ſpeculum, vel altera vitri ſuperficies charta nigra, foraminulis pluribus in circuli circumferentia exciſis; radii ſolis per ea transmiſſi, atque poſt refractionem vel reflexionem tabula excepti, divergent, totidemque maculas albas depingent, omnes in circuli eo majoris peripheria ſitas, quo tabula longius removetur: dum igitur diameter hujus circuli dupla erit illius, in quo foramina chartæ ſunt inciſa, tabulæ a ſpeculi vel vitri puncto medio diſtantia æquabitur longitudini foci quæſitæ.

227. Dum focus ſpeculi convexi quæritur, in tabula, qua radii reflexi excipiendi ſunt, exſcindendus eſt circulus paullo major illo, in cujus peripheria ſita ſunt foramella, quæ in charta ſpeculum tegente facta ſunt; ut ſcilicet lux ſolaris commode in eadem incidere poſſit.

ARTICULUS II.

De Teleſcopiis Dioptricis, ſive refringentibus.

228. Tres fere cenſentur Teleſcopiorum refringentium, ſeu ſpeculo reflectente carentium, ſpecies, figura, diſpoſitione, & numero vitrorum ocularium inter ſe diverſæ.

229. Prima eſt teleſcopii, quod *Batavum*, ſive *Hollandicum*, aut *Galilæanum* dicunt, prima quoque circiter annum 1609. reperta, atque quadraginta fere annis una adhibita. Hic tubus vitrum oculare habet unicum vel utrinque concavum, ut PQ (fig. 31), vel plano-concavum, intra objectivum convexum vel plano-convexum, ac ejus focum ita collocatum, ut axes utriusque in eandem rectam A*o*, & foci in idem punctum *o* coincidant.

230. Ex hac conſtructione patet *primo*, quod cum vitrum objectivum longe magis patere poſſit, quam pupilla oculi, longe quoque majorem radiorum copiam ex eodem objecti puncto emiſſorum excipiat, quam alias ad oculum perveniret. *Secundo*, quod radii ab objecto O admodum remoto paralleli (ut hic per AD, & duas utrinque parallelas exhibentur) in vitrum objectivum MN incidentes, ac ejus refractione ad punctum *o* convergentes, in egreſſu e vitro oculari rurſus fiant paralleli (197); & quia vitrum oculare prope *o* conſtitutum eſt, ubi eſt vertex coni radioſi per vitrum objectivum collecti, atque adeo radii admodum denſi; etiam in exitu e vitro iidem adhuc valde denſi eſſe debent. Unde *tertio* ſi poſt vitrum oculare incidant in oculum rite conformatum, vel alicujus presbytæ, (211) imaginem objecti ſui eo vivaciorem depingent, quo faſcis lucidus ex oculari vitro egreſſus denſior eſt illo, qui in vitrum objectivum incidit, & quo vitri objectivi major eſt amplitudo, quam pupillæ.

231. Quod reliqua puncta objecti OB, velut B, extra axem teleſcopii A*o* ſita concernit, eodem modo patet, quod radii, hic per CD, eique utrinque parallelas deſignati, ex iis in vitrum objectivum paralleli veniant, dein refracti ad punctum *b*, puncto *o* vicinum (187), tendant, ac tandem e vitro oculari PQ ad ſenſum paral-

paralleli, & valde denſi egrediantur, ut in oculo nullo vitio laborante, vel presbytæ, imaginem admodum vivacem efforment ſui objecti B. Verum quia faſcis hic radioſus puncti B imaginem depingens in egreſſu ex oculari vitro divergit ab altero, qui imaginem puncti O exhibet, idem oculus utramque imaginem ſimul excipere nequit, niſi vel pupilla admodum diducatur, vel puncto F, ad quod radii P*c* reducti tendunt, ſit valde vicina. Ex quo infertur, *ope ejusmodi teleſcopii eo plures objecti partes ſimul videri poſſe, quo oculus vitro oculari propior, & ejus pupilla amplior fuerit.* Et quia pupilla non modo per ſe exigua eſt, ſed etiam nobis nolentibus contrahitur copioſiore luce incidente, conſequitur, *campum talis teleſcopii eo fore minorem, quo objectum lucidius, & longitudo foci vitri oculariſ fuerit major.* Denique quoniam natura lucis focum tam brevem, ac quis cupiat, non patitur; imo vero focos vitrorum ocularium eo longiores exigit, quo longiores ſunt foci vitrorum objectivorum, ut in ſequentibus videbimus (270), neceſſe eſt, *ut campus in his teleſcopiis ſit tanto minor, quanto major eſt tubi longitudo.* Atque hoc incommodum fecit, ut uſus id genus teleſcopiorum pene ſit abolitus pro objectis admodum remotis, quæ tubos longiores requirunt; nec amplius, niſi valde brevia conficiantur, in quibus augmentum modicum exigitur, quæ vulgo *tubulos theatrales* appellant.

232. Ipſa quoque hæc conſtructio indicat, objectorum ſitum fore erectum; radii enim *c*, objecti extremum B exhibentes, infra axem A K poſitum, ad oculum directione *c*F veniunt, quæ producta infra axem deſcendit.

233. Si ſupponatur *objectum magis ſemper, magisque verſus vitrum objectivum accedere*, conſequens eſt (196), ut imago ſimili ratione longius removeatur; adeoque etiam *oculare, prolongato tubo, in majore diſtantia applicari debebit*, ut ejus focus ſemper cum imagine per objectivum depicta coincidat.

234. Myops vitrum oculare objectivo propius admovere debet, ut diſtincte videat. Hoc enim ſi fiat, radii, qui prius paralleli egrediebantur, fiunt divergentes. Nam imagine *bo* (ſi ea inſtar objecti conſideretur) recedente a foco vitri concavi, radii refracti, & verſus alteram partem producti minus divergunt, adeoque ex parte ipſius *bo*, ubi prius paralleli erant, jam divergere debent verſus oculum (199).

235. II. Altera teleſcopiorum ſpecies eorum eſt, quæ quod obſervationibus ſyderum ſint aptiſſima, ideoque ſola fere hunc in uſum conficiantur, *tubi aſtronomici* vocantur. Unica inſtructa ſunt lente oculari utrinque convexa (aut plano-convexa) P Q (fig. 32)

quæ

quæ ea ratione collocanda eſt, ut ejus focus *o* cum foco vitri objectivi M N inter utrumque vitrum in axe communi congruat.

236. Hæc conſtructio oſtendit *primo*, radios ab objecti puncto O admodum remoto (& per hypotheſin in axe producto exiſtente) parallele incidentes (ac propterea per A D & utrinque parallelas exhibitos) ſeſe refractione vitri objectivi in ejus foco interſecare, illicque imaginem *o* puncti O efformare.

237. *Secundo.* Hanc imaginem vicem objecti in foco lentis ocularis P Q collocati agere, conſequenter radios ab ea in lentem ocularem emiſſos ita refringi (196) ut paralleli inde egrediantur, eo autem denſiores, quo focus ocularis brevior eſt foco vitri objectivi: & hinc in oculo presbytæ (211), vel nulli vitio obnoxio, novam efformari imaginem objecti O, tanto vivaciorem, quanto amplius eſt vitrum objectivum, ſive plus lucis admittit.

238. *Tertio.* Ab oculo in quacunque ab oculari vitro diſtantia, modo faſcis radiorum parallelorum in eum incurrat, æque bene imaginem videri, quam iidem radii in communi vitrorum foco depingunt.

239. *Quarto.* Per radios parallele ab objecti O B extremo B venientes, ac per vitrum objectivum refractos, debere prope *o* efformari imaginem *b* puncti B (188); hinc autem incidentes in vitrum oculare, poſt refractionem inter ſe parallelos egredi, cumque axe eo propius ad hoc vitrum concurrere, quo major eſt ejus convexitas, ita ut hic concurſus in foco ejus F fiat. Unde ut oculus totam ſimul imaginem *ob* videat, neceſſe eſt, ut ad punctum F conſtituatur, communem nempe interſectionem omnium faſciculorum lucis ex omnibus imaginis *ob* vel objecti O B punctis venientium.

240. *Quinto* objectum O B videri inverſum, quia ejus imago *ob*, quæ in lentem ocularem radiat, jam habet ſitum oppoſitum ſitui objecti, & punctum illius *b* per radios divergentes ſupra axem refertur, exiſtente extremo objecti B infra axem.

241. *Sexto.* Amplitudinem campi hujus teleſcopi præcipue pendere a magnitudine ſpatii ad *ob*, quod in foco communi utriusque vitri eſſe cenſetur, cum oculus in F conſtitutus omnes objecti partes videre poſſit, quarum imagines in ocularis foco, aut huic valde vicinæ, depinguntur. Atque ob hoc commodum prioris generis teleſcopiis merito præfertur.

242. *Septimo.* Accedente magis objecto ad vitrum objectivum, imaginem ejus longius removeri (196); & hinc etiam vitrum oculare, prolongato tubo, majorem debere acquirere diſtantiam, ut imago ſemper in ejus foco perſtet. Quare per hujusmodi teleſcopia tam objecta diſſita, quam vicina recte exhibentur, modo competens utriusque vitri intervallum ſervetur. 243.

243. *Octavo*, si myopes hisce utantur, lentem ocularem propius ad objectivam admoveri oportere, sive ad ejus imaginem *ob*, ut hac intra focum ocularis constituta, radii ex oculari egressi divergant (196).

244. III. Tertium Telescopiorum genus ad contemplanda objecta terrestria in usu, a priore non differt, nisi quod duæ præterea addantur lentes oculares, ut imaginis *ob* situs inversus erigatur. Ipse figuræ 33 aspectus constructionem docebit. Quatuor vitra MN, PQ, RS, TV habent axem communem A*f*. Focus cujusvis vitri coincidit cum foco binorum utrinque positorum, solentque ocularia ejusdem fere foci adhiberi. Sit OB objectum infinite distitum, & punctum ejus O in axe telescopii: radii inde paralleli in vitrum objectivum incidentes, per refractionem in ejus foco *o* imaginem puncti O efficiunt, e qua in oculare PQ incurrentes ad parallelismum inter se, & focum F refringuntur; hinc digressi in secundum oculare RS ad ejus focum ω convergunt, alteramque objecti O imaginem depingunt, unde tandem in tertium oculare TV venientes rursus paralleli fiunt, ut oculo recte constituto, vel etiam presbytæ, excepti objectum suum vivace imagine exhibeant. Simili modo radii a puncto B ad vitrum objectivum paralleli venientes in ejus foco *b* prope *o* primam efformant imaginem (187); dein in vitro oculari PQ refracti, paralleli inter se axem eo propius ad PQ intersecant, quo focus hujus lentis est brevior. Hinc in RS delati, atque ad ejus focum inflexi secundam puncti B imaginem β constituunt, donec tandem ab ultima lente TV inter se paralleli ad ejus focum *f* refringantur, in quo constituendus est oculus, ut imaginem ωβ videat, uti superius (239) diximus, quæ habet situm erectum, sive eundem cum objecto OB.

245. Telescopia modo descripta, quæ per *quatuor vitrorum* numerum plerumque designantur, easdem, ut patet, proprietates generales habent, ac Astronomica. Sed ob quæ Astronomica his præstant, & eorum in observationibus præfertur usus, sunt *primo*, quod tubus Astronomicus ampliorem habeat campum. *Secundo*, quod lentem ocularem minoris foci patiatur, ideoque majoris sit augmenti. Utriusque rationes in sequentibus videbimus. *Tertio*, quod brevior sit. *Quarto*, quod in eo minus radiorum pereat, qui non nisi per duo vitra trajici debent.

ARTICULUS III.

De Telescopiis Catadioptricis.

246. Telescopii catadioptrici munus generatim est, fasces lucis ab objecto venientes a via detorquendo colligere, ut in

oppoſito ſpeculo concavo reflexi convergant, & imaginem ſui objecti in axe ſpeculi, vel pone eum, depingant, velut in F' (fig. 35). Situs hujus imaginis intra ſpeculum & objectum impedit, quo minus per unam, aut tres lentes oculares directe videri poſſit: ad hoc enim opus eſſet, ut ſpectator caput inter obiectum, & imaginem interponeret, quo fieret, ut lumen nec ſufficiens, nec ſatis prope axem, in ſpeculum illabi poſſet.

247. Ad hoc incommodum tollendum, ſpecillum exiguum planum I H ad angulum 45 graduum cum axe inclinatum ita collocatur, ut apicem coni radioſi, in quo imago eſt, ad *o* reflectat; tum in recta *o*K, una, tresve lentes oculares applicantur, prout ſitus objecti inverſus, erectuſve exhiberi debet; quem in finem latus tubi ſpecula continentis M N perforatur.

248. Præcipuum in hoc teleſcopiorum genere, quod Newtonianum appellatur, commodum eſt, quod licet multo breviora ſint refringentibus, eundem tamen effectum præſtent. Cujus rei cauſa eſt, tum quod imago a ſpeculo objectivo formata ab eodem non amplius quarta axis parte abſit, ſi objectum infinite diſtet, quæ per vitrum æqualiter utrinque convexum in diſtantia ſemiaxis depingitur; tum etiam quod imago non intra ſpeculum objectivum & lentem ocularem ſit, ut in teleſcopiis dioptricis primi, ac ſecundi generis; maxime vero quod ſpeculum objectivum patiatur ocularia diverſorum focorum, imo breviſſimi. Ex quo fit, ut idem teleſcopium catadioptricum pluribus tubis dioptricis diverſæ longitudinis æquivaleat, cum hi effectum debitum præſtare nequeant, niſi ocularibus iis inſtructi ſint, quorum foci ad focos objectivorum rationes determinatas habeant, quarum rationum tamen valde arcti ſunt limites, ut deinceps videbimus.

249. Cum imago a ſpeculo objectivo recedat, objecto ad illud accedente (145), ut uſus ſit hujus teleſcopii, manifeſtum eſt, debere ſpecillum I H eſſe mobile, ut imago ſemper in focum ocularis incidat. Itaque etiam neceſſe eſt, ut moto intra tubum ſpecillo I H ſimul ſecundum latus tubi M N ipſum oculare in eandem partem moveatur, ut nempe ejus focus ſemper congruat cum apice coni radioſi a ſpecillo H I reflexi.

250. Patet præterea, myopes debere ſpecillum planum aliquantum ad ſpeculum objectivum admovere, ut imagine intra lentem ocularem & ejus focum conſtituta radii ita divergentes in eorum oculum veniant, ut hujus conformatio ad viſionem diſtinctam poſtulat.

251. Al-

251. Alterius quoque formæ, paulloque magis compoſitæ, teleſcopia catadioptrica conſtruuntur, tam objectis terreſtribus, quam cæleſtibus apta, quæ Gregoriana appellant. En brevem deſcriptionem. Objecto ſpeculum ſphæricum concavum AB (fig. 36) opponitur, & paullo ultra focum F in ejus axe collocatur alterum ſpecillum multo minus itidem concavum CD, ſed foci brevioris, ita, ut utriusque axes congruant. Imago F intra hujus ſpecilli focum G, & centrum E poſita, ejus reſpectu vices objecti agit. Quare (143) in eodem axe ſecunda imago H efformabitur, eo longius ultra centrum E ſpecilli CD, quo prior F foco G vicinior eſt. Et quia ſpecillo CD ad imaginem F admoto propius, vel ab eadem remoto, imagini H diſtantia quævis tribui poteſt, ſolet ea tantillum intra ſpeculum AB in medio ad I foramine circulari præditum, conſtitui, ut per lentem ocularem PQ videri poſſit. Manifeſtum autem eſt, hanc imaginem apparituram ſitu erecto, cum reſpectu imaginis F, ſitum objecti invertentis, inverſa ſit.

252. Quando objectum eſt copioſo lumine illuſtratum, ut major fiat ſecunda imago, ea trans ſpeculum AB verſus O dirigi poteſt, & in O focus vitri ocularis PQ conſtitui, ut radii verſus O convergentes e vitro paralleli egrediantur, ac poſtea lente ultra O excepti iterum colligantur ad punctum, in quo oculus eſt collocandus.

253. Ex dictis conſtat, per ſpecillum parvum in utriusque hujus teleſcopii axe ſitum intercipi radios lucis parallelos, qui in medium ſpeculi objectivi inciderent. Unde nil refert, ſeu hoc ſpeculum in medio pertuſum ſit, ſeu integrum.

254. Incommoda his teleſcopiis annexa ſunt, quod modicum habeant campum; quod difficulter verſus objecta dirigantur; quod multis cautelis tum in conſtructione, tum in uſu eorum opus ſit; quod cum magni ſint pretii, damnum tamen facile accipiant.

ARTICULUS IV.

De Microſcopiis.

255. I. Microſcopiorum, quæ in uſu ſunt, prima ſpecies eſt ſimplex vitrum MN (fig. 34) vel utrinque, vel una ex parte convexum, quod *vitrum auctorium* generatim appellant. Itaque ſi objecti conſiderandi BO punctum O ad focum in axe collocetur, radii inde emiſſi e vitro paralleli egrediuntur, apti proinde, qui imaginem illius in oculo recte conſtituto, vel presbytæ,

in quavis distantia efforment, modo oculus in eorum directione reperiatur. Myops objectum paullo intra focum constituet, ut imaginem accurate depictam videat. Punctum B ejusdem objecti, axi valde vicinum, ut in lentis foco positum censeri adhuc possit, pariter emittet radios, qui refractione ad sensum paralleli fiant, eoque magis ad axem inclinati, quo convexitas lentis minoris sphæræ fuerit, sive foci brevioris. Quare si oculus prope o, ubi radius principalis B C axem secat (ideoque in valde parva a lente distantia) ponatur, objectum O B sub angulo B o O tanto magis auctum videbitur, quanto minore intervallo ab oculo abest, quam soleat illud esse, in quo objecta alias distincte videre consuevimus.

256. Exempli gratia, quia objecta mediocri visu prædíti non solent distincte videre nudo oculo, nisi ea 7, aut 8 circiter digitis distent, si hæc distantia recta $o\,\infty$ designetur, & ope lentis objectum distincte appareat, nemo sibi facile persuadebit, ejus diametrum B O esse oculo adeo vicinam, ut reipsa est; sed eam circa ∞ existere putabit, ideoque in ratione $\infty\beta$ ad O B, sive $o\infty$ ad oO auctam (79). E quo simul conficitur, *magnitudinem apparentem objecti per lentem visi dependere ex parte ab ipsa oculi conformatione.*

257. II. Sed lente hac in re longe superior est sphærula vitrea, facile parabilis, si ad flammam spiritus vini ellychnio affusi (ne admista suligine opaca reddatur) exiguum vitri frustulum colliquescere sinatur. Resumpta enim formula N. 182, ac posito $p = 3$, $q = 2$, fit $x = \frac{6drR + 4erR - 2deR}{3dR - 6rR - de + 3dr + 2er}$; quæ ut sphæræ vitreæ accommodetur, sumi debet $e = 2r$; $r = R$, & $d = \infty$; his substitutis habetur $x = \frac{1}{2}r$; hoc est, objecto in axe sphæræ ad distantiam quartæ partis diametri collocato, radii prope axem in sphæram incidentes, egrediuntur inter se paralleli; ergo distincte objectum videbitur, eoque magis auctum, quo oculo fuerit vicinius, & consequenter quo minor fuerit sphæræ diameter.

258. Vicem etiam microscopii simplicis obire potest globulus vitreus cavus & aqua repletus, qui eundem fere præstat effectum, quem sphæra aquea, tum quod crassities vitri exigua sit, tum etiam quod superficies utraque concentrica eodem modo refringat radios, ac si sola aqua adesset. Verum quia lux minus refringitur in aqua, quam vitro, ratione sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis in aqua existente 4 ad 3 circiter, focus, in quo collocandum est objectum, ut radii in sphæram incidentes refringantur ad parallelismum in egressu, distat a sphæra semidiametro, ut facile invenitur e formula generali pro focis data (182), si fiat $p = 4$, $q = 3$, $r = R$, $e = 2r$, & $d = \infty$. E quo liquet,

quet, horum globulorum non esse tantum augmentum, quam eorum, qui e vitro solido funduntur.

259. Parari quoque potest lenticula mere aquea, si exiguum laminæ tenuis metallicæ foramellum gutta aquæ ope acus imposita repleatur, ne ejus limbis madefactis aqua convexitatem amittat. Major adhuc erit talis lenticulæ effectus, si in lamina $\frac{3}{4}$ lineæ circiter crassa utrinque cavitas sphærica exigua fiat, axe communi per oppositos utriusque vertices transeunte, & inæqualis radii, ita ut tenuissima laminæ pars vertices separet, quæ dein acus cuspide perforetur; repletur tum duplex hæc cavitas aquæ gutta.

260. III. Altera Microscopiorum species Telescopiis Astronomicis non absimilis est. Constat duabus lentibus convexis, quarum objectiva M N (fig. 37) est foci admodum brevis, extra quem paullum collocatur objectum O B, ut ejus imago *o b*, in aliqua distantia, & cum proportione aucta, efformetur (196): tum, ut distincte videri possit, focus lentis ocularis ad eundem cum hac imagine locum constituitur.

261. Ex hac constructione patet *primo*, *distantiam imaginis a lenticula objectiva magnas subire mutationes, dum intervallum inter eam, & objectum* O B *paullum mutatur* (196). Et quoniam difficillimum est, ut quis in distantia data, ac loco eodem objectum certo collocet; in usu hujus microscopii lens ocularis tamdiu versus objectivam admovenda est, vel ab ea retrahenda, donec imago objecti distinctissime depingatur; aut vero necesse est, ut in objecto ipso, vel toto microscopio motus, ut res postulat, quam lentissimus effici possit: id, quod pro diverso microscopii apparatu facilius, difficiliusve obtinetur. *Secundo* colligitur, *objectum debere eo majus apparere, quo ejus imago* o b *longius abest a vitro objectivo* M N; *& (cum postea per lentem ocularem videatur) quo oculo est propior, quam sit intervallum, ad quod objecta sine vitris distincte videre solemus.* *Tertio* manifestum est, *magnitudinem apparentem objecti debere mutari, quando hoc a lente objectiva recedit;* nam objecto recedente, ejus imago versus eandem accedit, ac simul minuitur.

262. IV. Quandoque fere circa medium inter lentem objectivam M N, & imaginem *o b*, altera ocularis interponitur, ut imago propius multo ad lentem objectivam formetur, adeoque tubus microscopii brevior adhiberi possit. Hac ratione simul campus microscopii amplior redditur, quemadmodum id patebit, si ipsa figura construatur, & quæ N. 220 adduximus, rite applicentur.

263. V. Denique fieri possunt microscopia catadioptrica, objecto inter focum & centrum speculi concavi constituto, ut imago ultra centrum efformata (143), ac lente oculari excepta distin-

ste videatur. Apud Smith extat etiam descriptio microscopii e duobus speculis sphæricis compositi, concavo altero; altero convexo, utroque in medio foramine circulari prædito, ut lux liberum accessum habeat. Collocatur autem objectum inter centrum & focum speculi concavi, a quo reflexi radii in convexum incidunt, unde denuo reflexi imaginem prope foramen speculi concavi depingunt, ope lentis ocularis spectandam.

ARTICULUS V.

Animadversiones generales in Telescopia & Microscopia.

264. I. *Tangens anguli, sub quo semidiameter objecti per primæ & secundæ speciei telescopia dioptrica* (imo etiam tertiæ, si trium lentium ocularium sit idem focus) *videtur, est ad tangentem anguli, sub quo nudo oculo spectatur, ut longitudo foci vitri objectivi ad longitudinem foci ocularis*, neglecta scilicet vitrorum crassitie.

Nam objecti extremitas altera B (fig. 31 & 32) per fascem radiorum parallelorum F*c*; altera vero per fascem *o* K repræsentatur: angulus igitur, sub quo objectum per telescopium videtur, est ille, quem axes utriusque fascis F*c*, & *o*K comprehendunt. Et quoniam imago *o b* in foco ocularis P Q existit, radii e puncto *b* (quod tanquam objectum ab aliis separatum & solitarium considerari potest) in vitrum oculare incidentes, ex eodem cum radio principali paralleli egredi debent (196); ergo angulus *c* F K = *b* K *o*. Sed angulus O D B, sive huic æqualis *b* D *o* (quia radius B D sine refractione per vitrum M N transit (195)) est ille, sub quo oculus in D collocatus objectum sine telescopio videret; quare angulus, sub quo objectum per telescopium apparet, est ad angulum, sub quo nudo oculo spectatur, ut *b* K *o* ad *b* D *o*. Est autem, sumpto radio *b o*, in triangulo rectangulo *b* K *o*, *o*K cotangens anguli *b* K *o*; & in triangulo *b D o*, *o*D cotangens anguli *b* D *o*; ergo cotangentes horum angulorum sunt ut *o*K ad *o*D; ergo (Elem. 737) tangentes eorundem sunt reciproce ut *o*D ad *o*K.

265. COROLL. I. Quia magnitudines apparentes objectorum maxime dependent ab angulis opticis, sub quibus eorum semidiametri videntur; sequitur, *diametrum objecti per telescopium visam esse ad eandem ut nudo oculo apparet, sicut est longitudo foci vitri objectivi ad longitudinem foci vitri ocularis*; sive, quod idem est, *magnitudines apparentes diametri ejusdem objecti per diversa telescopia visi esse inter se in ratione composita ex directa longitudinum focorum vitrorum objectivorum, & reciproca longitudinum focorum ocularium.*

266. Co-

266. COROLL. II. Et quoniam (79) diſtantiæ apparentes objectorum ſunt reciproce ut anguli optici, ſub quibus eorum ſemidiametri videntur; erit *diſtantia apparens objecti per tubum opticum ſpectati, ad ejusdem diſtantiam apparentem, ſi nudo oculo videatur; ut eſt longitudo foci vitri ocularis ad longitudinem foci lentis objectivæ.*

267. Quod hic de teleſcopiis dioptricis oſtendimus, verum etiam eſt de catadioptricis, & microſcopiis ſecundæ ſpeciei, quemadmodum patebit, ſi quod diximus, ad verbum applicetur ad figuram 35; modo literæ o', b', c', K', F', virgula notatæ ſubſtituantur literis o, b, c, K, F, & ſupponatur radius O D axi admodum vicinus, ut triangulum $o'b'$ D pro rectangulo haberi poſſit; dein dum applicatio ad microſcopia in figura 37 fit, loco *longitudo foci vitri objectivi*, poſitum intelligatur *diſtantia imaginis a lente objectiva.*

268. COROLL. III. *Ut objecta per teleſcopia quam maxime aucta apparerent, neceſſe foret, ut longitudo foci vitri objectivi eſſet admodum magna, & longitudo foci ocularis valde exigua.* Et propterea eo longiores adhibentur etiam tubi, quo objecta & minora ſunt, & magis diſſita. Verum figura ſphærica, quæ vitris tribuitur, & natura lucis faciunt, ut effectus, quem quis forte ſibi ſpondeat, expectatione ſit inferior. Rationes in ſequentibus dabimus.

269. II. Teleſcopia & microſcopia, quæ imaginem objecti in foco lentis ocularis ex altera reſpectu oculi parte efficiunt, illud habent commodi, quod omnes hujus imaginis dimenſiones menſurari poſſint ope filorum tenuiſſimorum, quæ per totum ſpatium, quod occupat, mobilia ſunt: ejusmodi fila ſumi poſſunt e folliculo bombycis; machina autem ad motum filorum efficiendum, ejusque quantitatem metiendam, conſtructa *micrometrum* dicitur. Hæc fila diſtinctiſſime videntur, vitro oculari eorum reſpectu vices microſcopii primæ ſpeciei obeunte; & tanto accuratius imaginis dimenſiones acquiruntur, quanto eadem majus augmentum a vitro oculari accipit, & ſimul quo fila exactius in eodem cum imagine plano fuerint conſtituta: reddimur vero de hoc certi, ſi filis & objecto immotis, oculus jam in hanc, jam in alteram partem moveatur, & nihilominus eadem objecti pars ad eandem partem fili ſemper videatur.

270. Quod ſi moto, ut dictum eſt, oculo advertatur, objectum non ad easdem filorum partes manere immotum, micrometrum *parallaxin* habere dicitur, qua voce ſignificamus, objectum apparere in diverſis locis, ut diverſa eſt oculi poſitio. Tollitur hic defectus, ſi margines reticuli, in quibus fila tenſa ſunt, vel ad vitrum objectivum, vel ad oculare propius admoveantur, prout

oculo

oculo recedente objectum vel attolli vel deprimi respectu filorum videtur.

271. *Micrometri usus errori est obnoxius*, sive, quod eodem recidit, error a parallaxi filorum pendens fit eo minus sensibilis *quo minus est spatium, per quod fila moventur; quo minor est vitri objectivi apertura; & quo longior est focus ocularis.* Ut enim secure, & citra erroris periculum, micrometro utamur, necesse est, ut ejus fila accurate in eodem plano sint posita, in quod foci vitrorum objectivi & ocularis coincidunt: jam vero foci utriusque fiunt in superficiebus sphæricis (189) externe se tangentibus, quæ adeo censeri nequeunt in eodem ad sensum plano, nisi quatenus hoc spatium exiguum est, & utriusque superficiei radius sat magnus. In sequentibus porro ostendetur (279 & 298), imagines objectorum non formari in ejusdem ad sensum superficie sphæræ, nisi quando apertura vitri objectivi modica est.

272. III. Si servata eadem vitri objectivi, in eodem telescopio, apertura, diversa successive ocularia adhibeantur ad idem objectum contemplandum, hoc eo obscurius apparet, quo oculare brevioris fuerit foci. Etenim fasciculi radiorum parallelorum omnes sese intersecant in eo axis puncto, in quo collocandus est oculus, adeoque efformant conum aliquem, cujus basis est vitrum oculare, apex in oculo: est vero hic eo magis obtusus, quo focus ocularis est brevior; unde necesse est, ut radii magis a sese invicem separati, ac minus densi, oculum ingrediantur, & consequenter imaginem minus vivacem, licet majorem, depingant. Itaque *obscuritas imaginum est in ratione reciproca duplicata longitudinum focorum vitrorum ocularium.* Nam cum eadem sit luminis quantitas, manente per hypothesin eadem vitri objectivi apertura; eo major est obscuritas, quo minor est densitas luminis; hæc vero eo est minor, quo spatium a lumine occupatum majus est, hoc est, quo areæ, in quibus imagines depinguntur, sunt ampliores, & consequenter (Elem. 608) quo diametrorum apparentium quadrata sunt majora; igitur obscuritas in telescopiis est directe ut quadrata diametrorum apparentium imaginum. Sunt autem (265) diametri apparentes in ratione composita ex directa longitudinum focorum vitrorum objectivorum, & reciproca longitudinum focorum ocularium; ergo longitudine foci vitri objectivi manente eadem, sunt diametri apparentes imaginum in ratione reciproca longitudinum focorum ocularium: & hinc manente eodem vitro objectivo, obscuritas imaginum est in ratione reciproca duplicata longitudinum focorum ocularium.

273. IV. Duo telescopia, vel duo microscopia æqualis bonitatis in suo genere censentur, quando objecta eadem claritate, sive eadem vivacitate luminis ostendunt. Quod si jam vi-

tra

tra objectiva & ocularia in utroque ex materia æque bona elaborata ſupponantur, ſi eorum figura, & politura æqualis ſint perfectionis, erit *claritas objectorum in ratione compoſita ex directa duplicata diametrorum aperturæ vitrorum objectivorum, & reciproca duplicata numerorum, qui utriusque teleſcopii vel microſcopii augmentum exprimunt.* Sit claritas $= c$, diameter aperturæ $= d$, diſtantia vitri objectivi ab imagine $= a$, longitudo foci vitri ocularis $= b$, adeoque (265) ratio augmenti $\frac{a}{b}$; dico eſſe $c = \frac{b\,b\,d\,d}{a\,a}$. Nam areæ imaginum in retina depictarum, ſunt ut areæ, quas occupant imagines a vitro objectivo efformatæ; hæ vero ſunt (Elem. 608) ut quadrata diametrorum, adeoque (265) ut $\frac{a\,a}{b\,b}$: quare ſi areæ imaginum in retina factarum ſint eædem, earum claritas erit ut quantitas luminis per vitrorum objectivorum aperturas incidentis, ſive ut quadrata diametrorum aperturarum (Elem. 608); ergo quadratis augmenti iisdem exiſtentibus, claritas eſt in ratione duplicata diametrorum aperturæ, ſive $c = d\,d$. Verum ſi ponantur aperturæ objectivorum eædem, quantitates luminis eædem quoque ſunt, ideoque claritas imaginum eſt in ratione reciproca duplicata diametrorum earum, hoc eſt, $c = \frac{b\,b}{a\,a}$. Ergo ſi nec eædem ſint objectivorum aperturæ, nec eadem imaginum augmenta, earum claritas erit $c = \frac{b\,b\,d\,d}{a\,a}$.

274. V. Teleſcopia majora, quæ diametros objectorum octuagies vel centies majores exhibent, non poſſunt objecta terreſtria diſtincte repræſentare, ſed uſum habent ſolum in obſervatione ſyderum. Lumen enim ex objectis terreſtribus diffuſum, jam alias longe debilius, quam quod ex aſtris allabitur, nimium diſpergitur in tam amplis imaginibus, quas vitra objectiva talium teleſcopiorum efformant. Quin etiam radii ex objectis terreſtribus ad teleſcopia prope terræ ſuperficiem, eam veluti perſtringentes adveniunt: in progreſſu ubique fere magnam partem intercipiuntur, aut detorquentur ab occurrentibus craſſioribus particulis in atmoſphæra perpetuo aſcendentibus, & agitatis; unde imago tremula, & male terminata apparet. Poſtremum hoc incommodum experimur, ſi tempeſtate calida, vel vento vehementiore vapores humidos agitante, quamvis cælum ſudum alias & innube videatur, aſtra ſpectemus.

CAPUT VI.

De Obſtaculis, quæ in Conſtructione Teleſcopiorum & Microſcopiorum ſe produnt, & eorum perfectionem neceſſario minuunt.

275. Duplex obſtaculorum genus ſeſe offert in conſtructione cujusvis machinæ dioptricæ & catoptricæ: alterum a figura pendet, ſuperficiebus refringentibus, aut reflectentibus tribuenda, quæ vel plana eſt, vel ſphærica: ſaltem perquam difficile, & vix non phyſice impoſſibile eſt, ut iis alia accurate concilietur; alterum a reſolutione lucis in diverſæ naturæ radios, quando refringitur, vel reflectitur, provenit.

ARTICULUS I.

De Obſtaculis a figura ſphærica ſuperficierum pendentibus, & ratione iis occurrendi.

276. Ex calculo formularum, quas adhibuimus (134 & 182) ad determinandas longitudines focorum ſuperficierum ſphæricarum refringentium, & reflectentium, manifeſtum eſt, nos aſſumpſiſſe, curvaturam ab eo puncto, per quod axis tranſit, usque ad punctum incidentiæ radii ex objecto in eodem axe exiſtente oblique venientis, eſſe inſenſibilem. Hac ſtante hypotheſi formulæ oſtendunt, omnes radios ab eodem objecti puncto egreſſos, poſt reflexionem, vel refractionem, concurrere cum axe in uno eodemque puncto: ſed quoniam hæc hypotheſis geometrice accurata non eſt, nequit eſſe unicum punctum interſectionis omnium radiorum ab eodem objecto venientium cum axe, ſi in ſuperficie ſphærica reflectantur, vel refringantur; & hinc quod *focum*, ſeu locum imaginis vocavimus, reipſa non eſt niſi locus ille, in quo plurimi radii ſe interſecant; reliquorum radiorum eo plures erunt interſectiones, quo ſuperficies reflectens, vel refringens plurium fuerit graduum: hujus rei exemplum & calculus N. 135 extat.

277. Cum quodvis interſectionis punctum ſit locus alicujus imaginis, eo magis ſenſibilis, quo plures radii concurrunt; ſequitur, quod *omnes ejusmodi imagines principali vicinæ eandem confuſam reddere, & ejus figuram turbare debeant.*

278. Dato numero graduum, & extenſione ſuperficiei refringentis aut reflectentis, trigonometrice calculari poteſt longitudo foci radiorum prope limbos incidentium (135 & 184); quæ ſi compare-

paretur cum ea, quæ ex formulis generalibus deducitur, reperitur ſpatium ab extremis hiſce focis occupatum, quod equidem notabile non eſt, niſi in microſcopiis refringentibus, ubi ob brevitatem foci lentis objectivæ, curvitas etiam in exiguæ aperturæ ſpatio eſt admodum ſenſibilis.

279. His defectibus e figura ſphærica provenientibus mederi poſſumus *primo*, ſi apertura exigua tribuatur vitro, quod objecto obvertitur, ut arcus eam metiens valde paucorum ſit graduum; illa tamen cautela adhibita, ne juſto minor apertura neceſſariæ ad claritatem & vivacitatem imaginum luminis copiæ obſit. *Secundo*, ſi prope focum conſtituatur *diaphragma*. Eſt autem diaphragma planum rotundum, nigro colore tinctum, & opacum, in medio exciſo foramine circulari, cujus diameter fere æqualis diametro imaginis, quæ ab objecto maximo, quod per vitrum oculare adhuc diſtincte cerni poteſt, depingitur. Limbi diaphragmatis radios inutiles intercipiunt, & abſorbent. *Tertio*, ſi interna tubi ſuperficies colore nigro inficiatur, ut abſorbeantur radii ab objectis multum ab axe diſſitis venientes, qui alias valde oblique incidentes, & a lateribus tubi reflexi ad ipſam usque imaginem, & vitrum oculare pervenirent, ac viſionem confuſam efficerent.

280. Celebres Geometræ demonſtrarunt, cujusnam curvaturæ deberent eſſe ſuperficies refringentes, & reflectentes, ut radii omnes ab eodem objecti puncto emanantes ad idem omnino punctum rurſus unirentur; verum infortunato accidit, ut ex obſtaculis, quæ conſtructioni ac perfectioni machinarum opticarum opponuntur, illud ſit omnium minimum, quod a figura ſphærica pendet.

ARTICULUS II.

De obſtaculis, quæ reſolutio lucis in diverſæ naturæ radios opponit.

Cum de viſione ageremus, ſumpſimus interea (51), lumen componi e diverſæ ſpeciei radiis, e quorum combinatione colores dependeant: hic igitur paucis præcipua exponenda ſunt experimenta, quibus aſſertum innititur.

281. I. Supponamus in cameram obſcuram (ut eam N. 5. conſtitutam vidimus) per exiguum foramen C (fig. 38) patere aditum faſci radiorum ſolarium A B, qui ſeu in objecta charta alba, ſeu in oppoſito pariete L K, ad D imaginem albam ſolis efformet e tot circulis luminoſis inter ſe commiſtis conſtantem, quot in foramine C puncta concipi poſſunt. Si iidem radii interpoſita ſuperficie Q R priſmatis triangularis vitrei, cujus axis ſit ad axem faſcis

luminoſi perpendicularis, intercipiantur, imago alba ſolis ad D mutabitur in figuram GF ſupra D, oblongam, extremis rotundis, lateribus utrinque rectis, ſeptem coloribus diſtinctam, quos in iride obſervamus, ſpatio nempe ad *r* rubro, *a* aurantio, ad *f* flavo, ad *v* viridi &c.

282. Hinc vero patet *primo*, figuram hanc coloratam (quam *ſpectrum* appellant) efformari non potuiſſe, niſi radii in faſce AB confuſi, & non interpoſito priſmate uſque ad D ita perventuri, ſeparati fuiſſent per refractionem in duabus priſmatis ſuperficiebus QR, PR, ad ſeſe invicem inclinatis.

283. *Secundo*, cum imago D ſit alba, & ſpectrum FG omnes ex ordine colores iridis referat, ſequitur, *lucem albam nil aliud eſſe, quam miſtionem omnium colorum; ſingulos vero colores eſſe certæ ſpeciei radios.* Id vero infinitis aliis experimentis evincitur; ac inter alia ſequente.

284. II. Si in loco, in quo ſpectrum GF depingitur, conſtituatur lens, ut radii ſpectrum componentes in foco rurſus uniantur, atque ad eundem focum collocetur tabula vel charta, imago alba & circularis apparebit. Si charta propius ad lentem admoveatur, imago verſus medium alba manebit, ſed inferne rubro, ſuperne cæruleo & indico terminabitur: cum enim ante focum radii nondum ſint uniti; verſus F rubri, verſus G autem cærulei prævalent. Si charta ultra focum ponatur, imaginis medium rurſus album erit, ſed partem ſupremam color ruber, infimam cæruleus tinget, quod radii ſcilicet per focum decuſſatim tranſeant.

285. *Tertio* colligitur, *radios rubros omnium minime refringi*, ſive radios rubros eſſe minime refrangibiles; paullo magis aurantios; tum flavos &c. Newtonus menſuris accurate acceptis invenit, luce ex aëre in vitrum tranſeunte, ſinum anguli incidentiæ eſſe ad ſinum anguli refracti (quorum ſinuum ratio in radiis ejusdem ſpeciei ſemper eſt conſtans) in ratione, quam ſequens tabella exhibet:

Pro omnibus colorum commiſſuris, ut ſeſe ordine excipiunt, dum radii ſunt adhuc certo

Rubri	ut	1, 54	1, 5425	ad 1.
Aurantii		1, 5425	1, 544	
Flavi		1, 544	1, 54667	
Virides		1, 54667	1, 55	
Cærulei		1, 55	1, 55333	
Indici		1, 55333	1, 55555	
Violacei		1, 55555	1, 56	

286 Ex ipſo aſpectu confuſorum limitum colorum ſpectri, & figuræ oblongæ extremis rotundis, facile intelligitur, eos oriri ex meris ima-

imaginibus circularibus ſolis, quarum ſingulæ ſint coloris magis minusve ſplendidi & vivacis ſecundum ordinem a nobis expoſitum.

287. III. Si charta, qua ſpectrum coloratum F G excipitur, ita perforetur, ut non niſi radii, v. g. rubri transmitti poſſint, iisque novum, aut ſucceſſive plura nova priſmata objiciantur, ſeu etiam lentes; hi radii manebunt rubri, utcunque reflectantur, vel refringantur, cujuscunque ſint coloris vitra, per quæ tranſeunt, vel corpora, in quæ incidunt. Illud ſolum diſcrimen notari poterit, quod hic color ruber radiorum eo ſit vivacior, quo color vitrorum, vel corporum reflectentium magis analogus eſt rubro. Idem ſentiendum de radiis alterius coloris, quem, ubi ſemel a reliquis ſeparati fuerint, haud amplius amittunt.

288. Per lentem vitream duo, tresve colores ſpectri rurſus inter ſe commiſceri poſſunt, atque color aliquis, ut libuerit, compoſitus effici; cujus tum claritatis gradus, tum ad primigenios ratio alia, aliaque erit, ut diverſa fuerit cujuslibet e componentibus quantitas; idem vero rurſus, ſi viſum fuerit, in eosdem ope priſmatis reſolvetur, quorum commiſtione eſt ortus.

289. IV. Sit priſma, cujus duo plana ſint æqualia & ad angulum rectum inclinata, adeoque ejus ſectio triangulum rectangulum iſoſceles Q T H (fig. 39) exhibeat. In hujus planum T Q incidat fere ad perpendiculum faſcis radiorum ſolarium A K, ut ſine refractione per illud tranſeat: reflectetur pars radiorum D L in baſi Q H fere perpendiculariter ad planum H T, ob angulum ad T rectum, e quo paralleli ad M pervenient. Objiciatur illis hic fere ad angulum rectum planum G E alterius priſmatis G F E, efformabunt ſpectrum omnium colorum *v r*, quorum nominum primæ literæ ſunt adſcriptæ, quamvis hoc ſpectrum ob exiguum radiorum numerum in Q H reflexorum non ita vivax ſit futurum. Reliqui radii per Q T H penetrantes, refractione itidem ſpectrum coloratum U R depingent. Vertatur tum lente priſma Q T H circa axem ſuum, ut angulus incidentiæ radiorum A D cum catheto T D paullatim major fiat, quam ut lux tranſire poſſit, adeoque reflecti debeat; videbitur primo diſparere lux violacea D U, tum coloris Indici D I, dein cærulea D C &c, verum ſimul colores iidem *v*, *i*, *c* &c. in ſpectro *v r* vivaciores fient. E quo intelligitur, radios in ſpectro U R diſparentes ſucceſſive incipere reflecti a baſi Q H, atque uniri faſci D M, adeoque radios maxime refrangibiles ſimul eſſe maxime reflexibiles. Quoniam autem nunquam differentia aliqua ſenſibilis obſervatur inter angulum incidentiæ & reflexionis alicujus faſcis radioſi, videtur, quod radii violacei non poſſent ante alios reflecti, niſi, dum ad D perveniunt, jam a ceteris eſſent ſe-

parati, adeoque quod reflexio non fiat, nisi præcedente aliqua refractione, quæ in exiguo spatiolo inter punctum incidentiæ, & punctum reflexionis facta sit, ita ut radii tantillum separati per refractionem, in minimo illo spatiolo factam, sub eodem angulo post reflexionem egrediantur, sub quo inciderunt.

ARTICULUS III.

Quæ de proprietatibus lucis dicta sunt, universim ad Telescopia & Microscopia applicantur.

290. E diversa radiorum lucis refrangibilitate necessario consequitur, illud, quod superius *imaginem* alicujus puncti lucem emittentis in foco lentis efformatam diximus, nil aliud esse, quam continuam seriem punctorum coloratorum r, a, f, v, e, i, v (fig. 40) ordine colorum iridis sese excipientium, ita, ut focus r radiorum rubrorum a vitro sit remotissimus; focus vero v radiorum violaceorum vicinissimus. Postremi hi radii, ubi secto axe producuntur, vel per imagines a vitro remotiores transeunt, vel extrema earum radunt, quo fit, ut vel confusæ evadant, vel fimbrias coloratas attextas habeant, in quibus lux cærulea & violacea plerumque dominatur, id, quod Optici *iridem* appellant.

291. Evenit hoc plerumque in imaginibus per vitra objectiva telescopiorum & microscopiorum depictis, maxime si *primo* hæ imagines longe a vitro remotæ sint, cum separatio radiorum refractione ad exiguos angulos facta eo sensibilior evadat, quo majus est intervallum imaginis a superficie refringente vel reflectente. *Secundo.* Si apertura vitri objectivi sit major, hoc est, si superficies radios incidentes excipiens sit plurium graduum: tunc enim angulus radiorum prope limbos incidentium fit major, atque ideo etiam refractio crescit, ut anguli radiorum post separationem divergentium; ut colores a separatione pendentes citius percipi possint.

ARTICULUS IV.

Applicantur eadem ad telescopia & microscopia dioptrica.

292. Si in formula generali superius (182) inventa ponatur $q = 1$, $p = 1, 54$ ab initio, dein $p = 1, 56$, scilicet illud pro radiis rubris, hoc pro violaceis; inveniri potest spatium, ad quod spectrum coloratum $r\,v$ (fig. 40) extenditur in foco telescopii. Itaque neglecta vitri crassitie, si fiat $e = 0$, $r = R$, & $d = \infty$, formula

mula abit in hanc $x = \frac{pr}{2pp-2p}$; & hinc distantia foci radiorum rubrorum elicitur $x = 0{,}9259\,r$; violaceorum vero $x = 0{,}8928\,r$. Facile autem intelligetur, differentiam inter hos duos focos 331 esse partem 28^am^ proxime majoris, cum 9259 divisa per 331 dent quotum 28 proxime. Quare *dum objectum ad distantiam infinitam remotum est, longitudo spectri colorati e diversa refrangibilitate lucis provenientis est* $\frac{1}{28}$ *longitudinis foci lentis.*

293. Et quoniam lux circa medium spectri (ad sensum) prope CD est maxime densa, & minime separata, ubi proinde supponi potest verus locus imaginum objectorum alborum, qualia sunt astra, sequitur *primo*, quod in telescopio termini visionis confusæ e diversa radiorum refrangibilitate ortæ, a loco vero imaginis objectorum valde remotorum distet utrinque circiter $\frac{1}{55}$ longitudinis foci vitri objectivi.

294. Quia porro triangula vCF, vAG similia sunt, est CF: Fv = AG: Gv; itaque etiam CF = $\frac{1}{55}$ AG; & hinc *secundo*, *diameter* CD *fimbriarum coloratarum imaginem* F *objecti valde diffiti ambientium, est* $\frac{1}{55}$ *aperturæ vitri objectivi.*

295. OBSERVA. I. Si constituatur imago F in CD, ea per imagines singulas singulorum colorum r, a, f, v, c, i, v reddetur quodammodo nebulosa; & per radios, qui transeunt per CD, acquiret fimbrias, sive *iridem*; ita ut singulis alicujus imaginis punctis simul iride cinctis, simul nebula obfuscatis, imago tota objecti confusa esse debeat.

296. COROLL. I. Si objectum per telescopium spectandum sit certi alicujus coloris, v. g. rubri, manifestum est, tubum prolongandum esse, retracto vitro oculari, ut distincte videatur, quia ejus imago reliquis accuratior est ad r. Contrarium faciendum est, si color objecti sit cæruleus vel violaceus. E quo colligitur, *focum telescopiorum vel microscopiorum esse varium, ut varius est objectorum color, quæ per ea spectantur.* Idem verum est, si astra spectentur cælo non perfecte sudo: ut enim vapores, aut raræ nubeculæ hujus vel illius generis radiorum majorem copiam transmittunt; ita etiam imago syderum vel propius, vel remotius a vitro objectivo ad sensum quoque efformatur, quemadmodum id annotavit D. Bouguer.

297. COROLL. II. Si loco vitri albi, e quo objectiva telescopiorum elaborari solent, adhiberetur certo colore tinctum, quod non nisi sui coloris radiis aditum præberet; uti v. g. si foret cæruleum;

ruleum; tum vero imago, per ſolos radios cæruleos ab objecto emanantes formata nec confuſa eſſet, nec iride cincta; ejusque diſtantia & magnitudo vera exacte reperiretur, adhibita in calculo formulæ pro teleſcopiis & microſcopiis ratione 1 ad 1, 551667. At enim ſimul illud eveniret, ut imagines fierent nimis debiles defectu luminis, ideoque nec ſatis diſtincte cernerentur.

298. COROLL. III. Angulis, ſub quibus radii colorati facta refractione a ſeſe invicem divergunt, iisdem manentibus, patet, CF fore eo minorem, quo minor fit AG. Quin etiam addi poteſt, Fv quoque tum imminuendam, quod extenſio foci, a figura ſphærica vitri pendens, decreſcente apertura decreſcat (279). Igitur *ut apertura vitri objectivi minuitur, ita irides imaginum, & obfuſcantes eas nebulæ tolluntur.* Verum quia hoc genus remedii cum detrimento luminis, & ex hoc pendentis claritatis imaginum conjunctum eſt, is modus aperturæ ſtatuendus eſt, ut & ſufficiens lucis copia admittatur, & imagines ſine iride ſenſibili ſint quam maxime nitidæ; id quod ſola experientia, & vitrorum perfectio, quibus quis utitur, determinare poteſt.

299. OBSERVA. II. Similibus calculis pro microſcopiis ex datis dimenſionibus, & habita ratione eorum, quæ in caſu particulari in conſiderationem veniunt, inſtitutis, patebit, quandonam irides, & objectæ imaginibus nebulæ, plus minusve ſpatii occupent, ac plus, minusve viſioni obturbent. Inde vero determinabitur, quam ampla eſſe poſſit objectivorum apertura, ut quantum fieri citra confuſionem poteſt, lucis admittatur. Quod ut certius in quovis caſu ſingulari obtineatur, plura parari poſſunt diaphragmata, vitrum objectivum tangentia, illudque retineri, quod effectus optimus commendat.

300. OBSERVA III. Radii violacei, & indici ſpectri colorati ſunt maxime debiles, & fere inſenſibiles, niſi quando objectum eſt valde fulgidum, uti ſol; cærulei item adhuc ſunt admodum debiles, uti etiam rubri ad extremum *r*. Hinc vero ſequitur *primo*, quod in teleſcopiis & microſcopiis multum detrahendum ſit a longitudine vera ſpectri colorati, ut habeatur longitudo hujus ſpectri, qua ſenſibile eſt; item quod tantundem minuendæ ſint diametri veræ iridum, ut obtineantur diametri, ad quas irides ſenſibiles extenduntur. Newtonus invenit, loco $\frac{1}{55}$ accipiendam eſſe $\frac{1}{250}$ circiter. *Secundo* quod verus locus CD imaginis F conſtituendus ſit inter focos radiorum flavorum, & aurantiorum, ubi ex experimentis prismatis lumen eſt vivaciſſimum. Invenitur vero hoc punctum,

ctum, si in formula pro focis vitrorum ponatur $p = 31$ & $q = 20$ *.

301. OBSERVA IV. Diminuta objectivi apertura non tollit ex integro irides imagini circumfusas, sed solum minuit tum earum magnitudinem, tum colores, seu, ut rectius dicamus, colorum ab objecto propriis discrimen, idque magis, si objectum sit magis lucidum. E quo deducitur, *per irides augeri diametrum apparentem imaginum.* Atque hoc locum etiam habet in objectis nudo oculo spectatis, pupilla idem præstante respectu imaginum in oculo depictarum, quod facit apertura vitri respectu foci. Ex hac observatione complurium illusionum opticarum ratio redditur; exempli causa primo, *cur flamma e longinquo visa sub majore appareat angulo, quam qui distantiæ & magnitudini illius veræ ex calculo respondet?* sic D. Picard observavit, ignem tres pedes latum noctu ad distantiam fere 32000 hexapedarum, sive 16 leucarum Parisinarum, per tubum visum habuisse diametrum apparentem 8″, cum reipsa tantum $3''\frac{1}{4}$ esse debuisset. Secundo. *Quare stellæ fixæ, quæ diametrum apparentem sensibilem habere videntur, dispareant momento, quando limbus obscurus lunæ iis motu admodum lento occurrit?* Tertio. *Quare stellarum maxime illustrium diameter minor videatur, si per telescopia longiora spectentur, quam si aspiciantur per breviora, quæ proinde objecta longe minus aucta exhibent?* Notandum isthic, aperturam vitri objectivi in telescopiis majoribus, proportione longitudinis habita, minorem fieri, quam in brevioribus. Ita in telescopio Astronomico triginta pedes longo, vitrum objectivum non nisi 3 digitos patet; & in telescopio 3 pedum adhuc fere integri digiti aperturæ diameter admittitur. Quarto. *Cur si luna, dum parum a novilunio abest, & per lucem e terra reflexam satis fortiter illuminatur, ut etiam ejus pars, ad quam radii e sole nondum directe pervenire possunt; cur, inquam, si luna tunc per telescopium conspiciatur, semicirculus illuminatus soli obversus sensibiliter appareat major altero oppositio?* Quinto. *Cur limbo lluminato lunæ versus stellam primæ magnitudinis progrediente in occultatione, stella, cujus lumen est multo vivacius lunari, non dispareat, nisi postquam jam tota infra discum lunæ subiisse videtur?* scilicet, quando stella tamdiu videtur, quamdiu adhuc est extra verum limbum lunæ, & tantummodo versatur adhuc in spatio transparente iridis lunam ambientis.

302. SCHOLIUM. Ex omnibus prioribus observationibus colligitur, solam esse experientiam, quæ pro diversitate objectorum, tum quod ad copiam lucis, qua collustrantur, tum quod ad colores, decidere possit, quanta sive in telescopiis, sive in microscopiis debeat esse objectivorum apertura, quis sit verus imaginum

* Newtonus Opt. L. I. part. I. Prop. VII. Exper. XVI., *ubi hæc definit, ponit rationem sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis in his radiis* 17 *ad* 11)-

locus, quæ aptiſſima diaphragmatum diameter, quæ illic ad definiendum viſionis campum ſunt conſtituenda.

303. Quod ad rationem longitudinis foci vitri objectivi ad longitudinem foci ocularis, rurſus ea non aliunde, quam ex experientia definienda eſt, utpote cum admodum diverſa eſſe debeat pro diverſa vitrorum perfectione & objectorum luce. Sic objectum valde lucidum perquam diſtincte videri poterit per objectivum accurate elaboratum, ſi cum oculari exigui foci conjungatur; cum enim imago citra ſenſibilem defectum efformetur, atque ſat vivax ſit, per vitrum, quod ei magnum augmentum adfert, recte adhuc videtur; verum ſi objectum per ſe ſit obſcurum, cerni diſtincte nequit, niſi per oculare, quod ejus radios non multum diſpergit, cujus conſequenter focus adeo brevis eſſe non poteſt; ſimiliter, ſi vitrum objectivum aliquo vitio laboret, quod etiam in imaginem transfunditur, huic ſpectandæ adhiberi non debet vitrum magni augmenti, ne ejus vitium notabilius evadat. Denique objecta interdiu conſideranda, ocularia minus acuta poſcunt; cum enim magna lucis vis tum ſpectatoris oculum jam prius ſubeat, atque aciem viſus quodammodo obtundat, antequam eum ad teleſcopium applicet, lumen nimia foci brevitate diſperſum haud ſatis perciperet.

304. Nulla igitur conſtans regula in hiſce rebus ſtatui poteſt, cui praxis ſemper ſit adſtringenda, ſed oportet uſu ejusmodi machinarum acquiſitam experientiam conſulere, atque dimenſiones earum, quæ pluris apud æquos æſtimatores fiunt, tanquam normam & modum novis, quæ conſtrui debent, adhibere. Atque hoc non modo de vitris ipſis, ſed etiam de tubis, totoque ad uſum neceſſario apparatu, dictum putetur.

305. Nos iſthic dimenſiones ſolum ſubjiciemus, quas meliores artifices in conſtructione teleſcopiorum, & microſcopiorum magis uſitatorum obſervare ſolent.

Pro Teleſcopio quatuor vitrorum.

Longitudo foci vitri object.	Diam. aperturæ vitri object.	Longit. foci vitri ocul.	Diam. diaphragm. in foco vitri object.	Augm. diametrorum apparentium object.
1 Ped.	4½ Lin.	16 Lin.	4 Lin.	9ies
2	6½	22	5½	13
3	9	26	7½	17
4	11	28	9	21
5	12	30	10	24
6	13	31	10½	28
7	14	34	11	30
8	15	36	11½	32

Sumuntur in hac tabula vitra objectiva accurate elaborata, non tamen excellentia; hæc enim & focum lentium ocularium breviorem,

&

& majorem tam aperturæ objectivi, quam diaphragmatis in ejus foco constitui, diametrum patiuntur.

Pro Telescopio Astronomico.

Longitudo foci vitri objectivi Ped.	Diameter aperturæ vitri objectivi Digit. Lin.	Longitudo foci vitri ocularis Digit. Lin.	Augmentum diametrorum apparentium objecti. circiter
1	0. 6½	0. 8	20ies
2	0. 9	0. 10	28
3	0. 11½	1. 0½	34
4	1. 1	1. 2½	40
5	1. 2½	1. 4	44
6	1. 4	1. 6	49
7	1. 5½	1. 7½	53
8	1. 6½	1. 8½	56
9	1. 8	1. 9½	60
10	1. 9	1. 11	63
11	1. 10	2. 0	66
12	1. 11	2. 2	69
14	2. 0½	2. 3	75
16	2. 2	2. 5	79
18	2. 4	2. 7	85
20	2. 5½	2. 8½	89
25	2. 8	3. 0	100
30	3. 0	3. 3½	109
35	3. 3	3. 7	118
40	3. 6	3. 10	126
45	3. 8	4. 0½	133
50	3. 10	4. 3	141

306. Si objectiva vitra præter morem excellant, eorum apertura amplior esse potest, & focus ocularis minor. Sic objectivum a Campani elaboratum foci 34 pedum patitur oculare foci 2½ digitorum, & aperturam 4 digitorum diametri: atque tum 163ies diametros objectorum cælestium apparentes, quæ sufficientem claritatem retinent, auget.

307. Pro Microscopiis trium vitrorum, oculare debet esse foci digitalis, & diametri circiter 9 linearum; quod in medio ad distantiam 8 fere linearum ab oculari collocatur, focum 18 linearum habeat, & diametrum unius digiti. Cum his variæ lentes objectivæ mutabiles conjungi possunt, v. g. foci 1, 2, 4, 6 linearum; sed aperturæ harum admodum exiguæ sint, oportet, atque bonitati vitrorum proportionatæ; distantia autem ob oculari sex circiter digitorum.

ARTICULUS V.

Applicatio dictorum de proprietatibus lucis ad Telescop. & Microscop. Catadioptrica.

308. Experientia docuit, imagines reflexione formatas longe minus esse confusioni obnoxias, quam quæ per refractio-

nem fiunt. Et ſane intelligitur, radios, cum facta refractione ſeparentur, atque a ſeſe invicem divergant, quo longius progrediuntur, eo magis colorum diſcrimina prodere. At vero in reflexione ſeparatio radiorum parallelorum non fit niſi (ut ita dicam) in ipſo puncto incidentiæ, vel in intervallo inter hoc, & punctum reflexionis. Poſt reflexionem itaque hi radii quodammodo infinite parum ſeparati, ſunt adhuc ad ſenſum paralleli; unde neque ſeparatio percipi poteſt, ſed illud ſolum advertitur, quod faſcis radioſus reflexus tantillo magis dilatatus appareat, quam fuerit prius. Hinc eſt, quod in teleſcopiis catadioptricis irides haud videantur, ſed tantum exigua in imaginibus confuſio notetur, partim ex dilatatione faſciculorum lucis, partim ex figura ſphærica ſpeculorum orta. Quare longe ampliorem aperturam ſpecula objectiva teleſcopiorum, & microſcopiorum ferunt, quam vitra ejusdem foci; ex quo fit, ut imagines reflexione depictæ multo vivaciores ſint, ideoque diſtincte per lentem exigui foci cerni poſſint, & magnum acquirere augmentum ſine claritatis detrimento. Quod commodum in teleſcopiis dioptricis haberi nequit, niſi tanto ſint longiora (ut e tabulis ſuperioris Articuli liquet), tantoque etiam minus tractabilia.

309. Teleſcopia catadioptrica primæ ſpeciei, qualia N. 246 & ſequente deſcripſimus, diverſa vitra ocularia admittunt, pro modo luminis, quo objecta fulgent, & deſiderati in eorum diametris apparentibus augmenti. En dimenſiones, ſecundum quas partes hujus generis teleſcopiorum conſtrui poſſunt, ut effectum debitum præſtent (vide Smith, Tom. I. pag. 364.).

Longitudo foci Speculi concavi	Diameter aperturæ Speculi.	Longitudo mediocris foci vitri ocularis	Augm. Diametrorum apparentium objecti
Ped.	Digit. Lin.	Lin. Centeſim.	Circiter
½ - - -	0 11 - - -	2, 00 - - -	36
1 - - -	1 6 - - -	2, 39 - - -	60
2 - - -	2 6 - - -	2, 83 - - -	102
3 - - -	3 3 - - -	3, 13 - - -	138
4 - - -	4 1 - - -	3, 37 - - -	171
5 - - -	4 10 - - -	3, 54 - - -	202
6 - - -	5 7 - - -	3, 73 - - -	232
7 - - -	6 3 - - -	3, 88 - - -	260
8 - - -	6 11 - - -	4, 01 - - -	287
9 - - -	7 7 - - -	4, 13 - - -	314
10 - - -	8 2 - - -	4, 24 - - -	340
11 - - -	8 9 - - -	4, 34 - - -	365
12 - - -	9 4 - - -	4, 44 - - -	390

Quod ad ſpecillum planum HI (fig. 35) pertinet, id ovale eſſe debet, cum axem A*o'* coni D*o'*D radiorum ad eundem axem paral-

parallele incidentium ſub angulo 45 graduum ſecet: ejus dimenſiones petuntur a ſpatio, quod radii reflexi occupant in illo loco, in quo collocandum eſt ſpecillum, dum oculare foci minimi adhibetur, id, quod facili calculo reperitur. Eſt mihi hujusmodi teleſcopium, cujus ſpeculi objectivi focus eſt duorum pedum: ſpeculum minus fere ſeptem lineas in maxima ſua latitudine habet; quinque in minima.

CAPUT VII.

Diverſæ quæſtiones Opticæ.

Inviolabilis in hiſce *lectionibus* brevitatis lex, atque arctior cum Phyſica Experimentali a noſtris exercitationibus aliena nexus quam plurima non modo ſcitu jucunda, ſed etiam utilia, nos prætermittere cogunt. Interim tamen ſupplementi inſtar eorum, quæ minus a Phyſica pendent, & quibus tirones exerceri poſſunt, quæſtiones non nullas, indicatis modo reſponſis, ſubjungere viſum eſt.

310. I. *Cur, ſi cui in tenebris in caput ictus impingatur, tractus quidam lucis videntur?*

Ictus omnes partes elaſticas capitis concutit, iisque tremorem quemdam, aliquamdiu perdurantem, inducit, adeoque etiam nervi optici fibræ contremiſcunt, quod ſenſationem ſimilem excitat, ac ſi lux confuſa oculos feriret.

311. II. *Quare, dum per tabulas vitreas feneſtrarum in vicos deſpicimus, melius videmus transeuntes, quam illi nos trans easdem videre poſſint?*

Qui in vicis ſunt, majore in luce verſantur; hinc modica illa, quæ e feneſtris tranſit, exiguam facit impreſſionem: contrarium accidit illis, qui e cubiculo tranſeuntes ſpectant.

312. III. *Cur, ſi caput acus prope ad oculum cis chartam exiguo foramello pertuſam teneatur, & idem foramellum luci obverſum aſpiciatur, caput acus videtur eſſe trans chartam, & ſitu inverſo?*

Caput acus non videtur cis chartam, quia oculo nimis vicinum eſt; & videtur trans chartam & inverſum, ob easdem cauſas, propter quas, ſi quis extra cameram obſcuram poſitus per ejus aperturam aſpicere poſſet, quin impediretur luci aditus, objectorum exteriorum imagines inverſas cerneret.

313. IV. *Cur, ſi carbo ardens admodum velociter in gyrum agatur, videtur tæniam igneam exhibere?*

Impreſſio lucis in retinam motum illic quemdam tremulum excitat aliquamdiu perdurantem cum ſenſatione lucis: hinc ſi carbo ma-

gna velocitate circulum non magnum deſcribat, tremor ille perſeverat integræ revolutionis tempore.

Viſus noſter eſt ſenſus ſatis lentus & ſegnis; & diverſi colores magna cum celeritate alter alteri ſuccedentes haud poſſunt ſatis diſtinctas impreſſiones facere, neque oculum ſimili voluptate afficere, ac experiatur auris, cum ſonorum celerrime ſeſe conſequentium harmoniam percipit.

314. V. *Quare videntur ſæpe nubes albæ magno numero in faſcias circulares, modicæ latitudinis, & verſus idem horizontis punctum convergentes, diſpoſitæ?*

Si nubes leviores, ideoque ſatis elevatæ, aliæ ab aliis ſint ſeparatæ, a vento in diſtantia paullo majore a terra, & directione horizontali ſpirante, omnes verſus eandem plagam impulſæ faſciarum longarum inter ſe, & cum horizonte parallelarum formam induunt, quæ conſequenter (82) debent videri verſus idem punctum lineæ libellæ per oculum tranſeuntis, & ideo in horizonte, convergere. Et quoniam a ſpectatore valde diſſitæ ſunt, velut in ipſa ſuperficie ſphæræ cæleſtis ſitæ, & circulares apparent.

315. VI. *Si candelabrum penſile, accenſis candelis, ſuſpenſum e funi longiore & contorto, dein ſibi permiſſo, circa axem rotetur, cur contingit quandoque, ut uni e ſpectatoribus videatur in hanc, alteri in alteram partem moveri, quamvis uterque ex eodem illud loco aſpiciat?*

Candelæ accenſæ circulum deſcribunt, & motus candelabri refertur ad diametrum per oculum tranſeuntem: jam vero in diſtantia aliqua ſæpe non ſatis diſcernitur, utra e duabus candelis oppoſitis ſit in extremo hujus diametri remotiore ab oculo (89), præcipue quando planum circuli fere per oculum tranſit, nec ſatis attenditur ad phænomena Perſpectivæ. Hinc ſi alter e duabus candelis hanc, alter aliam exiſtimet remotiorem eſſe; candelabrum illi verſus hanc plagam moveri videbitur, huic verſus oppoſitam. Idem contingere poteſt, ſi duo videant pinnulas ventorum indices in tectorum vertice valde oblique, vel alas molendini a ventis acti in majore diſtantia.

316. VII. *Quæ cauſa, quod ſi quis e tenebris ad lucem majorem repente veniat, viſus tantopere perſtringatur; & cum ad locum etiam mediocriter tantum obſcurum e magna luce tranſit, prorſus nihil videat?*

In tenebris pupilla eſt admodum dilatata, in luce magna valde contracta; jam motus iridis, quo hæc dilatatio & contractio peragitur, non eſt adeo velox; & lumen repente in pupillam valde amplam incidens majus eſt, quam ut imaginem diſtinctam efformare poſſit (288), ſed potius organa viſioni deſtinata ſubito, & violente concitat, quo fit, ut acies oculi obtundatur. At vero ſi

ad

ad lucem copioſam pupilla nimium arctetur, & repente in loco obſcuro conſtituatur, ſufficiens ad diſtinguenda objecta lumen non admittit, unde illa cæcitas oritur, quæ non prius deſinit, quam pupilla ſatis temporis ad dilatationem habuerit.

317. VIII. *Quare objectum ſi prope oculum poſitum per foramellum acu in chartæ nigræ folio factum aſpiciatur, eo apparet majus, quo magis ad oculum admovetur, cum tamen ſi ſine eo foramine conſideretur, ejusdem ad ſenſum videatur magnitudinis, quamvis ad diverſas ab oculo diſtantias collocetur?*

Viſio per tale foramellum fit accurata (213), & interjecta inter oculum & objectum charta aſpectum rerum aliarum circumpoſitarum impedit, nec admittit, ut aliunde, quam ex imaginibus in oculo depictis de magnitudine judicium feramus.

318. IX. *Quare charta madefacta acquirit colorem quemdam griſeum, & fit magis transparens?*

Chartæ ſiccæ pori filis varie implexis impediti ſunt; humor aſperſus ac in poros penetrans, hæc fila explicat, ac ordinatius componit, ut pori quaſi totidem tubuli fiant liquore pleni, aptique ad lucem transmittendam, quod chartam reddit aliquantum transparentem, & ſimul candorem tollit, quem a radiis intra poros non ſatis pervios varie reflexis habebat.

319. X. *Quare quidam circa veſperum clarius vident, quam alii?*

Sunt hi præcipue myopes, qui objecta valde vicina diſtincte, & quin oculis vim inferant, vident; cum ex oppoſito alii, qui ſunt oculis recte conſtitutis, cogantur pupillam contrahere, quando objecta admodum prope ſunt admovenda; unde non recipiunt tantum luminis, ac myopes.

320. XI. *Quare myopibus objecta remotiora apparent plerumque majora, quam aliis viſu bono præditis?*

Imagines objectorum non efformantur diſtincte, niſi in puncto interſectionis radiorum ab eodem objecti puncto egredientium: in oculo myopis hi radii non attingunt retinam, niſi poſt punctum concurſus, adeoque ubi ad retinam perveniunt, jam iterum divergunt.

321. XII. *Quare, qui fiunt presbytæ, minuto charactere ſcripta non poſſunt, ut prius, legere, niſi exponant radiis ſolaribus, aut pone candelam ardentem collocent?*

Ad lumen copioſum pupilla contrahitur, & ad exigui foraminis magnitudinem reducitur; atqui per ejusmodi foramen viſio debet eſſe diſtincta (213).

322. XIII. *Quare etiam ex illis non nulli, qui nullo oculorum vitio laborant, putant ſe in luna, dum pleno orbe fulget, quamdam faciei humanæ figuram videre, cum tamen, ſi per teleſcopium conſpiciatur, nullam prorſus ſimilitudinem referat?*

Sunt

Sunt quædam in luna, maxime verſus limbos oppoſitos, maculæ magnæ, aut potius ſpatia reliquo diſco obſcuriora (quæ Aſtronomi plerumque *maria* vocant): majores hæ maculæ non prorſus ad limbos uſque ſe extendunt, nec etiam ad centrum pertingunt, & ſpatio interjecto clariore a ſeſe invicem ſeparantur, per mediam lunam protenſo, quod verſus extrema ſua maculis longioribus & exiguæ latitudinis, variisque lucidis apicibus, interruptum eſt. Dubium non eſt, per magnam lunæ a terra diſtantiam, & lumen intenſius totius orbis, veras ſpatiorum ejusmodi clariorum, obſcuriorumque figuras diſcerni non poſſe. His ſi addatur præjudicium quoddam, quod facile ex aſpectu imaginum lunæ plenæ, quæ ei plerumque faciem humanam tribuunt, hauriri poteſt, fit ut majores illæ, & obſcuriores maculæ ſpatiis verſus limbum clarioribus cinctæ, atque ſimili lucidiore circa medium ſeparatæ, videantur velut genæ; tractus ille ſplendidior in medio naſum repræſentet, reliquus orbis variis clarioribus, ac obſcurioribus maculis diſtinctus, reliquas faciei partes exhibeat. At vero cum teleſcopium omnes maculas diſtincte oſtendat, ea faciei figura prorſus evaneſcit.

323. Hæc occaſionem præbent obſervationi cuidam magni momenti hic faciendæ. Si ſplendor nimius lunæ eſſet præcipua cauſa confuſionis, qua ejus maculæ videntur, promptum eſſet remedium, ſi per exiguum foramellum aſpiceretur (212). Interim tamen, licet hæ maculæ ſint admodum magnæ, & obſervator inſigni oculorum acie præditus, nunquam bene terminatæ, niſi per teleſcopium apparent. Neceſſe itaque eſt, ut diſtantia lunæ excedat eam, ad quam viſus utcunque excellens ſeſe extendit; & cum luna circiter 90000 leucis a terra abſit, adeoque radii inde ad nos ex ſingulis ejus punctis emiſſi ſint quam qui maxime ad ſenſum paralleli, manifeſte ſequitur, *paralleliſmum radiorum cum oculum ſubeunt nullo vitio laborantem, non efficere viſionem diſtinctam, ſed potius ad hanc requiri, ut tantillo divergant.* Hoc ſi non eſſet, ſane objecta remotiſſima viderentur maxime diſtincta, quod evidenter falſum eſt, experientia teſte. Per teleſcopia radii, quantum neceſſe eſt, ad divergendum cogi poſſunt, ideoque, ceteris paribus, objecta ſemper diſtincte cerni. Verum ut hoc fiat, focus vitri ocularis non debet accurrate congruere cum foco objectivi, ſive vero loco imaginum, ſed tantillo ultra eum conſtitui, ut radii ex oculari paullulum divergentes egrediantur. Diſcrimen in teleſcopiis fere imperceptibile eſt; at non item in microſcopiis ſive ſimplicibus, ſive compoſitis, eoque id magis, quo augmentum diametrorum apparentium objectorum majus eſt, atque magis diverſa oculorum conſtitutio apud obſervatores. Hinc

regu-

regulæ, quas ſive pro conſtructione, ſive pro calculando effectu teleſcopiorum & microſcopiorum attulimus, non tanto cum rigore accipi debent, utpote quæ paralleliſmum radiorum e vitris ocularibus egredientium ad viſionem diſtinctam neceſſarium ſupponunt. Retinuimus tamen hanc hypotheſin tanquam ſimpliciſſimam, eique maxime vicinam, quam natura oculi recte conſtituti poſtulat. Itaque præſcriptæ regulæ in teleſcopiis pro ſatis accuratis haberi poſſunt; at in microſcopiis ejusmodi ſolum cenſendæ ſunt, quæ poſſint ita proxime determinare ſitum debitum vitrorum pro viſione diſtincta, atque magnitudines apparentes diametrorum objectorum, ut perbrevi tentamine obſervator dein facile aptiſſima vitrorum ac objecti intervalla deprehendere poſſit, e quorum dimenſione in caſibus peculiaribus etiam calculos juxta regulas generales factos eadem facilitate corriget.

324. XIV. *Quare, dum lux ſolaris vel alia ſatis fortis, in latera interna vaſis rotundi radiat, apparent in tali vaſe duo ſemicirculi lucidi ita inter ſe juncti, ut figuram cordis exhibeant, puncto concurſus eo viciniore ad axem vel centrum vaſis, quo lumen propius admotum eſt.*

Hæ curvæ lucidæ oriuntur ex interſectionibus valde invicem vicinis radiorum reflexorum a ſingulis ſemicircumferentiæ punctis ſuperficiei cavæ vaſis, quæ illuminatur, uti figura 41 oſtendit. Punctum B eſt focus hujus ſemiperipheriæ, ejusque diſtantia a centro dependet (145) a diſtantia objecti lucentis a ſemiperipheria illuminata. Curvæ AB, BC dicuntur *cauſticæ per reflexionem.*

325. XV. *Quare ſi gladius nudatus verſus ſpeculum convacum protenditur, terreri ſolent ii, qui ſe in tali ſpeculo ſpectant?*

Si gladius ſit intra centrum & ſocum ſpeculi, ejus imago inverſa apparet ante ſpeculum, & ex parte ſpectatoris, hæc imago porro a ſpeculo recedit (143) gladio ad ſpeculum propius admoto, ideoque ejus acies verſus ſpectatorem accedit.

326. XVI. *Quare ſi ſol, luna, aut fax, in aquam fluentem, velut rivum, radiat, videtur in ejus ſuperficie tractus quidam longus lucidus, tremulus & interruptus?*

Partes aquæ aliæ ſuper alias decurrunt inſtar tenuiſſimarum lamellarum, quæ vices totidem ſpeculorum planorum varie inclinatorum agunt, atque omni momento magnitudinem, locum, velocitatem & inclinationem mutant, planitiem jam ad ſpectatorem, jam in partem oppoſitam vertentes

327. XVII. *Si tabula vitrea ſpeculi valde oblique aſpiciatur, cur quinque vel ſex imagines candelæ ardentis pone ſpeculum poſitæ videntur?*

Tabulæ hujus craſſities pluribus ſtratis invicem ſibi incumbentibus, & lamellis conſtat, quarum ſuperficies ſingulæ tanquam totidem ſpecula conſiderandæ ſunt.

328. XVIII. *Si baculus ad dimidiam longitudinem aquæ immergatur, & oculus ſpectatoris collocetur in plano anguli refractionis, cur pars ſubmerſa propius ad ſuperficiem aquæ inflexa, & brevior apparet, quando oculus ad eam partem conſtituitur, ad quam baculi pars ex aqua eminens facit cum ſuperficie aquæ angulum acutum, quam ſi ſpectator ſit ex parte altera?*

Ratio facile ex aſpectu figuræ 42 colligitur, in qua radii HT, GT ab extremo baculi T venientes, refracti exeunt directione OH, OG verſus oculum, qui eos in T concurrere putat, ideoque hic conſtitutus partem baculi BT videt, quaſi ea eſſet BT; at ex altera parte, eadem illi apparet ut Bt.

329. XIX. *Quare objecta trans aquam, vel tabulam ſpecularem paullo craſſioris vitri viſa apparent majora, viciniora, & ſubinde etiam clariora?*

Repræſentet (fig. 43) IK diametrum pupillæ. Objectum O trans vitrum videtur per radios extimos OBDI, OCEK, qui apparent, velut ſi e puncto *o* venirent, angulumque I *o* K majorem comprehendunt, quam ſit IOK, qui fieret ab extimis radiis vitro remoto. Dein ſi objectum per vitrum ſpectetur, radii qui ex O inter B & C cadere poſſunt, ad oculum veniunt; at ſi tollatur vitrum, ad oculum non pertingunt radii, niſi inter F & G intercepti, adeoque pauciores.

330. XX. *Cur urinatores ſub aquam demerſi objecta tantum confuſe videre poſſunt?*

Refractio radiorum ex aere in aquam incidentium tanta fere eſt, ac illa, quæ fit in noſtro oculo; itaque oculo intra aquam poſito exigua tantum fit refractio; ideoque radii imaginem nequeunt diſtincte efformare, niſi multum ultra retinam.

331. XXI. *Quare humor cryſtallinus in oculis piſcium eſt ad ſenſum globulus ſolidus?*

Humor aqueus in oculis piſcium inutilis foret; & ſi humor cryſtallinus ſimilem a pupilla diſtantiam haberet, ut in animantium terreſtrium oculis, campus viſionis nimium parvus eſſet. Oportuit itaque, ut humor cryſtallinus infra pupillam illico collocaretur, ut pupilla latius pateret, ut humor cryſtallinus eſſet denſior, ideoque majores efficeret refractiones, ut denique eſſet globoſus, ne majus inter eum & fundum oculi ſpatium relinqueretur.

332. XXII. *Quare qui nictante oculo, ac lacrymis ſuffuſo, candelam ardentem aſpiciunt, faſces radioſos ex ea emitti, maxime ex ſuprema & infima parte vident?*

Pen-

Pendet hoc a refractione irregulari, quæ fit in humore extremis palpebrarum limbis adhærente, & oculo connivente ad pupillæ aperturam admoto; ſive etiam in ipſis lacrymis ſupra corneam ſe diffundentibus.

333. XXIII. *Cur imago objecti per vitrum polyedrum viſi toties multiplicatur, quot in vitro ſunt areolæ planæ?*

Ex radiis ab objecto paullum remotiore in talem areolam fere ſub æqualibus angulis incidentibus, complures per duplicem refractionem ad oculum perveniunt, atque faſcem luminoſum conſtituunt, ſatis fortem, qui in oculo imaginem objecti depingat, quæ proinde in axe hujus faſcis apparere debet. Jam vero cum inclinatio cujuslibet areolæ alia ſit, totidem faſces efformantur, quorum axes alium ſemper ſitum ab inclinatione areolarum pendentem habent. Quare tot imagines diverſæ, ac in tot locis diverſis videntur, quot areolæ radios ad oculum transmittunt.

334. XXIV. *Quare per lucernam magicam objecta tantopere augentur?* In hac lucerna eſt AC (fig. 44) ſpeculum ſphæricum cavum; B lumen candelæ, vel lampadis craſſioris ellychnii paullo intra focum collocatum, ut radii a ſpeculo reflexi convergant; DD lens vitrea, radios tum directos, tum etiam reflexos a ſpeculo, adhuc magis colligit: EF eſt objectum coloribus transparentibus in tabula vitrea pictum, & ſitu inverſo. Radii per hanc tabulam transeunt, incidunt in lentem GH, a qua refracti convergunt, & imaginem in K efformant, ubi diaphragma radios inutiles, & irregulariter refractos, intercipit. Poſtquam radii in K ſeſe interſecuerunt, in lentem LM incidunt foci valde longi, e qua egreſſi admodum divergunt. Tum tandem in tabula alba ad maximam, qua fieri poteſt, diſtantiam excipiuntur, habita ratione vivacitatis, & diſtinctionis imaginis *ſe*, quæ ſitu erecto depingitur. Jam vero patet, ut hæc omnia ita fiant, quemadmodum diximus, focum lentis DD debere eſſe intra B; lentis autem GH focum alterum conſtituendum eſſe inter eandem, & objectum EF; denique lentis LM focum collocandum ultra K verſus GH.

335. XXV. *Quare ſi laminæ metallicæ exiguum foramellum gutta aquæ, cui animalcula microſcopica innatant, repleatur, atque verſus candelæ lumen aſpiciatur, quandoque ejusmodi animalculum maximo cum augmento & diſtincte videtur?*

Superficies interior guttæ reſpectu animalculi vices ſpeculi ſphærici concavi agit. Itaque quando animalculum eſt intra focum, & ſuperficiem guttæ internam ab oculo remotiorem, ita, ut radii ab animalculo venientes ab ea verſus oculum reflexi per alteram guttæ ſuperficiem oculo viciniorem inter ſe paralleli egredian-

tur, videbitur imago ſuperficiei animalculi ab oculo averſæ; atque hæc imago eo erit major, quo animalculum propius ad focum illum fuerit.

PARS TERTIA

Perſpectiva.

CAPUT I.

Notiones & Principia Generalia, quibus univerſa Perſpectivæ Theoria ſuperſtruitur.

336. Objectum ex legibus Perſpectivæ delineare in tabula, ultra quam plerumque reſpectu oculi ſitum ſupponitur, nihil eſt aliud, quam ſingula puncta tabulæ deſignare, per quæ radii luminis ex ſingulis ſuperficiei viſibilis punctis ad oculum venientes tranſirent. Et ſimilitudo imaginis cum objecto omnibus numeris abſoluta eſt, ſi ad eadem puncta tabulæ iidem colores applicentur, cujus ſunt radii illic tranſeuntes. Colores autem hunc in modum applicare, eſt *Perſpectivæ Picloriæ*, quæ ad claſſem Mathematicam non pertinet.

337. PRINCIPIUM I. *Quidquid in tabula optice repræſentatur, ex uno eodemque puncto ſpectari debet.* Exprimit enim tabula, quod fit actione momentanea, quod adeo unico oculi obtutu videri poteſt.

338. PRINCIPIUM II. *Projectio perſpectiva puncti objectivi in tabula illic fieri debet, ubi radius ex eo puncto ad oculum ductus, per planum tabulæ tranſit.*

339. PRINCIPIUM III. *Projectio perſpectiva lineæ rectæ objectivæ, quæ producta per oculum non tranſit, eſt recta in tabula, in qua eam ſecat planum trianguli, cujus baſis eſt recta objectiva, & latera radii ab ejus extremis uſque ad oculum ducti.*

340. PRINCIPIUM IV. Ut projectio perſpectiva figuræ planæ recte intelligatur, cogitandum eſt, quod *radii ex omnibus ſuperficiei aſpectabilis figuræ planæ punctis ad oculum ducti efficiant pyramidem, cujus baſis figura objectiva eſt, & vertex in oculo: jam figura, quæ fit ſectione hujus pyramidis per planum tabulæ, eſt projectio perſpectiva figuræ illius objectivæ.*

341. COROLL. I. *Projectio perſpectiva polygoni nequit eſſe ſimilis polygono objectivo, niſi hujus planum ſit tabulæ parallelum.* Elementa enim pyramidis ſimilia eſſe non poſſunt baſi, niſi fiant ſectionibus ad baſin parallelis.

342. Co-

342. COROLL. II. *Projectio perſpectiva ſolidi eſt figura plana compoſita ex projectionibus omnium planorum ſolidum comprehendentium, quæ ſimul oculo ſunt conſpicua.*

343. THEOREMA I. *Quemcunque ſitum habeat tabula, projectio perſpectiva duarum aut plurium rectarum objectivarum inter ſe parallelarum convergere debet verſus punctum aliquod in plano tabulæ (ſive intra hanc, ſive extra eam poſitum), in quod cadit recta ex oculo ad rectas objectivas parallele ducta.*

DEMONSTR. Utcunque duæ pluresve parallelæ objectivæ reſpectu oculi poſitæ ſint, ſemper debent videri concurrere (82); igitur etiam earum projectio perſpectiva convergere debet. Jam vero oculo per eundem radium repræſentatur punctum concurſus parallelarum objectivarum, & punctum concurſus earum projectionis; quare neceſſe eſt, ut punctum concurſus projectionis ſit illud in plano tabulæ, per quod tranſit recta ab oculo ad punctum concurſus linearum objectivarum ducta. Sed quoniam punctum concurſus parallelarum objectivarum infinite diſtat ab oculo, recta ex oculo ad hoc punctum ducta eſt iisdem parallela; ergo punctum concurſus projectionis perſpectivæ linearum objectivarum inter ſe parallelarum eſt illud plani tabulæ, producti ſi opus ſit, in quod cadit recta ex oculo ad parallelas objectivas parallele ducta.

344. COROLL. I. Si parallelæ objectivæ ſimul ſint parallelæ ad planum tabulæ, recta ex oculo ad punctum earum concurſus apparentis ducta, nuſpiam poteſt occurrere tabulæ plano, utpote cui parallela quoque eſt: igitur neque dari poteſt punctum concurſus earum projectionis, ſive earum projectiones perſpectivæ ſunt etiam parallelæ inter ſe. Hinc *ſi tabula ſit verticalis, ſive ad horizontem perpendicularis, omnium verticalium objectivarum projectiones ſunt rectæ verticales; & projectiones omnium horizontalium, ſive ad libellam ductarum, ſimulque ad planum tabulæ parallelarum, ſunt rectæ in tabula ad libellam ductæ.* Projectiones item rectarum objectivarum cum plano tabulæ parallelarum, ſed ad horizontem inclinatarum, ſunt etiam parallelæ in tabula, & tantundem ad horizontem inclinatæ.

345. COROLL. II. *In tabula verticali projectiones omnium rectarum objectivarum, quæ ad libellam ducuntur, ſimulque ad planum tabulæ ſunt perpendiculares, debent concurrere in puncto viſus tabulæ.* Dicitur enim *punctum viſus*, in quod cadit recta ex oculo ad planum tabulæ perpendicularis, conſequenter ad rectas objectivas parallela.

346. THEOREMA II. *Si recta objectiva ſit plano tabulæ parallela, & in partes æquales diviſa, etiam ejus projectio perſpectiva erit recta in partes æquales diviſa: at ſi recta objectiva plano tabulæ non ſit parallela, ejus projectio non dividitur in partes æquales.*

DEMONSTR. Sit AB (fig. 45) recta objectiva trifariam secta in C, D, & plano tabulæ GH parallela; sit O locus oculi; erit *ab* projectio rectæ AB. Manifestum, ductis rectis QA, OC, OD, OB, triangula AOC, *a*O*c*; COD, *c*O*d*; DOB, *d*O*b* esse similia (Elem. 510). Cum itaque bases AC, CD, DB æquales sint: etiam iis homologæ *ac*, *cd*, *db* æquari inter se debent. At vero si PQ exhibeat situm tabulæ ad rectam AB inclinatæ, triangula $\alpha O \beta$, $\beta O \gamma$, $\gamma O \delta$ non amplius sunt similia triangulis correspondentibus AOC, COD, DOB; adeoque cum bases AC, CD, DB inter se æquales sint, bases $\alpha\beta$, $\gamma\beta$, $\gamma\delta$ inter se æquales esse non possunt.

347. COROLLARIUM I. Ex similitudine triangulorum sequitur, partes projectionis perspectivæ alicujus rectæ ad tabulam parallelæ & in partes inæquales divisæ, etiam inæquales esse debere, verum proportionales partibus homologis rectæ objectivæ; atque adeo projectionem perspectivam figuræ ad tabulam parallelæ esse similem figuræ objectivæ.

348. COROLL. II. Lineæ perspectivæ, quæ in tabula sunt parallelæ, sunt in eadem ratione divisæ, ac earum objectivæ; sed lineæ perspectivæ in tabula convergentes, non dividuntur in ea ratione, in qua sectæ sunt earum objectivæ, utpote cum in hoc casu istæ (objectivæ) nequeant esse parallelæ ad tabulam.

349. THEOREMA. III. *Projectio perspectiva ejusdem lineæ objectivæ semper est ejusdem magnitudinis in tabula, quemcunque situm respectu horizontis habeat, & quæcunque ponatur distantia ab oculo, modo semper sit in plano eodem ad tabulam parallelo.*

Idem intelligendum est de quotcunque lineis objectivis inter se æqualibus, & de lateribus polygoni, quemcunque situm in plano eodem tabulæ parallelo habeant.

DEMONSTR. Quamvis hoc theorema evidenter consequatur ex dictis NN. 341, & 347; illius tamen veritas luculentior erit e sequente ratiocinio. Cogitetur recta data objectiva circa unum extremum immotum rotari, altero circulum in plano ad tabulam parallelo describere. Radii ex oculo ad omnia hujus circuli peripheriæ puncta ducti constituent pyramidem conicam (sive conoides) plano tabulæ basi parallelo sectam. Ergo projectio perspectiva basis erit itidem circulus in tabula. Ulterius concipiantur omnem diametri hujus circuli objectivi indefinite produci versus omnem partem, & in eas productas transferri continuo longitudo radii: fiet, ut hac ratione omnes in partes æquales dividantur, & quælibet talis pars considerari potest tanquam linea objectiva data, in alio semper, alioque situ, quem habere potest. Sed

(346) projectiones harum partium æqualium sunt pariter inter se æquales ; ergo projectio perspectiva rectæ ejusdem objectivæ, quemcunque situm in plano eodem ad tabulam parallelo habentis, est magnitudinis constantis, sive ejusdem.

350. PROBLEMA FUNDAMENTALE. *Datis positione plano tabulæ, loco oculi, & puncto objectivo post tabulam, invenire ejus projectionem perspectivam in tabula.*

Pro resolutione Problematis notandum est, situm alicujus puncti in spatio absoluto non posse determinari, nisi per ejus distantias a tribus planis datis diversum inter se situm habentibus. Fit autem hæc determinatio commodissime, si tria plana data sibi perpendiculariter insistant; atque id etiam in praxi Perspectivæ observatur. Supponi enim solet imprimis planum indefinitum HR (fig. 46) per oculum in O positum transiens: situs hujus plani est ad libellam, seu horizontalis, unde etiam *planum horizontale* dicitur. Præcipuus illius usus est, ut distinguantur objecta *superne* & *inferne* posita; quidquid enim in plano hoc existit, cum sit in linea libellæ oculi, nec *infra*, nec *supra* esse dici potest; quæ autem sunt supra hoc planum, oculo altiora; & quæ infra idem sunt, oculo depressiora sunt.

Dein assumitur alterum planum indefinitum VC, pariter per oculum O transiens, & verticaliter, seu ad perpendiculum erectum, ideoque etiam *planum verticale* vocatur. Servit, ut discrimen statuatur inter objecta dextima & siniſtima: nam quæ in hoc plano collocata sunt, directe opponuntur oculo. Est hoc planum ad alterum HR perpendiculare; utpote verticale ad horizontale. Tandem sumitur planum tabulæ TB ad aliquod intervallum ab oculo & perpendiculare planis horizontali & verticali, ut adeo omnia tria sint perpendicularia inter se, singula binis quibusvis.

Linea horizontalis tabulæ *hr*, est intersectio plani horizontalis cum plano tabulæ. *Linea verticalis* tabulæ *ut* est intersectio plani verticalis cum plano tabulæ. *Punctum visus* tabulæ est punctum *a*, in quo linea horizontalis secat lineam verticalem. *Radius principalis* est pars O*a* intersectionis plani verticalis cum plano horizontali, quæ metitur distantiam oculi a plano tabulæ.

351. I. RESOLUTIO PER CALCULUM. Sit datum punctum D, cujus projectio *d* in plano tabulæ TB petitur. Demittantur ex hoc puncto D in planum horizontale HR, & in planum verticale VC, perpendicula DI, DS; ducatur ex I recta IA in plano horizontali ad verticale perpendicularis; & ex S altera SA in plano verticali ad planum horizontale perpendicularis. Patet, DSAI esse parallelogrammum rectangulum, cujus planum est norma-

normale ad plana verticale V C, & horizontale H R, ideoque parallelum plano tabulæ T B. S A, ſive D I, eſt menſura diſtantiæ puncti dati D a plano horizontali, ſive ejus altitudo ſupra libellam oculi: & D S, ſeu I A metitur ejusdem diſtantiam a plano verticali, ſeu quantum objectum reſpectu oculi ſit ſiniſterius. Denique pars A*a* interſectionis planorum verticalis & horizontalis, (quæ adeo ad planum tabulæ normalis eſt) menſura eſt diſtantiæ parallelogrammi D S A I a plano tabulæ, conſequenter etiam puncti dati D. His poſitis, cum punctum D detur poſitione, dantur hoc ipſo tres diſtantiæ dictæ D I, D S, A*a* magnitudine.

Ducantur ex loco oculi O rectæ O I, O D, O S; habebitur pyramis quadrangularis O D S A I, per planum tabulæ baſi parallelæ ſecta in *dsai*. Ergo (340) rectangulum *dsai* eſt projectio perſpectiva rectanguli D S A I, & *d* puncti dati D. Evidens quoque eſt, rectangulum *dsai* eſſe ſimile rectangulo D S A I, utpote cum ſint elementa ejusdem pyramidis ſectionibus parallelis formata: hinc latera rectanguli *dsai* proportionalia ſunt lateribus homologis rectanguli D S A I; & ob triangula O*as*, O A S ſimilia, habetur O A : O*a* = A S : *as*; ergo etiam eſt O A ad O*a*, ut quodvis latus rectanguli D S A I ad latus homologum rectanguli *dsai*: ergo (Elem. 686) ſequentes duæ habentur analogiæ: O A (ſive O*a* + *a* A): O*a* = A I (ſeu D S): *ai* ſive *ds*: & O A (vel O*a* + *a* A): O*a* = A S (vel D I): *as* vel *di*, ex quibus duæ dantur regulæ, aut analogiæ pro ſolutione generali Problematis per calculum

I

Ut radius principalis plus diſtantia objecti a plano tabulæ eſt
Ad radium principalem;
Ita eſt diſtantia objecti a plano verticali
Ad diſtantiam ſui puncti perſpectivi a linea verticali tabulæ.

II

Ut radius principalis plus diſtantia objecti a plano tabulæ eſt
Ad radium principalem;
Ita eſt diſtantia objecti a plano horizontali
Ad diſtantiam ſui puncti perſpectivi a linea horizontali tabulæ.

352. EXEMPLUM. Supponamus oculum diſtare a tabula 6 pedibus ſeu 72 digitis; punctum vero objectivum ab eadem remotum eſſe 15 pedibus, vel 180 digitis; 4 pedibus, ſive 48 digitis ſupra libellam oculi elevatum: & 7 pedibus, ſive 84 digitis verſus ſiniſtram a plano verticali diſſitum. Oporteat jam hujus puncti projectionem perſpectivam invenire.

Sit

Sit (fig. 49) L T A B margo tabulæ datæ, quem rectangulum ſuppono. Aſſumatur in tabula punctum *a*, cui oculus directe eſt opponendus, ſive *punctum viſus* tabulæ: ducatur per idem punctum recta *t u* ad marginis latera T A, L B normalis (quod ſi margo tabulæ non eſſet rectangularis, ita ducenda foret *t u*, ut, cum peracta delineatione tabula loco deſtinato collocatur, ſitum habeat verticalem): erit hæc linea verticalis tabulæ; agatur etiam recta *h r* lateribus T L, A B perpendicularis per idem punctum *a* (vel ſi margo non ſit rectangulus, ut ſit normalis ad *u t*), quæ erit linea horizontalis tabulæ.

Fiant tum hæ duæ proportiones: $72 + 180 : 72 = 48 : x$;
$72 + 180 : 72 = 84 : y$.
his rite ſolutis, obtinebitur $x = 13, 71$, ſeu 13 dig. $8\frac{1}{2}$ lin. quæ eſt diſtantia puncti projectionis *d* quæſiti a linea horizontali tabulæ *h r*, & ſupra eandem accipienda; *y* autem fiet = 24 digitis, quæ eſt diſtantia ejusdem puncti *d* verſus ſiniſtram a linea verticali *u t*.

Deſignatio ipſa hujus puncti *d* in tabula variis modis fieri poteſt. Subjiciemus eos, qui commodiores, & exactiores videntur.

353. I. Si margines tabulæ ſint rectanguli, accipiantur in lateribus T L & A B puncta E, & *e* a punctis *h* & *r* lineæ horizontalis 13 dig. $8\frac{1}{2}$ lin. remota, & agatur per ea linea cæca E *e*, in qua (per primam analogiam) ſitum eſſe debet punctum perſpectivum quæſitum. Simili ratione ad partem ſiniſtram lineæ verticalis in lateribus T A, L B accipiantur puncta *b* & K ab *u* & *t* lineæ verticalis 24 digitis diſtantia, ducaturque per ea linea cæca, in qua (per analogiam alteram) pariter eſſe debet punctum quæſitum, quod adeo erit interſectio *d* linearum E *e*, *b* K.

In praxi, cum hoc modo utimur, qui pro majoribus tabulis eſt accuratiſſimus, opportune latera marginis in digitos, aut etiam in lineas dividuntur, initio diviſionum in punctis *t*, *u*; *r*, *h* ſumto; ex *t* ſcilicet verſus L; dein verſus B pergendo; ex *u* verſus T & A; ex *h* verſus T & L iisdem diviſionibus translatis; ut etiam ex *r* verſus A, & B. Ex his etiam illud commodi emerget, ut facile duci poſſint perpendiculares, & ad horizontalem parallelæ, id quod fieri frequentiſſime oportet, quando plurium objectorum delineatio optica facienda eſt.

354. II. Si margines tabulæ non ſunt rectanguli, accipiatur in linea verticali *t u* punctum *s* ſupra punctum viſus *a* 13 dig. $8\frac{1}{2}$ lin. ac per illud agatur E *e* ad verticalem perpendicularis. Tum accipiatur in linea horizontali punctum *i* a puncto *a* verſus ſiniſtram 24 digitis diſtans, & ducatur per illud perpendicularis K *b*: interſectio harum perpendicularium erit punctum *d* quæſitum. Modus

hic commode adhibetur pro tabulis minoribus, cum præcipue ope duplicis gnomonis labor excitandi perpendiculares evitetur.

355. III. Potest quoque punctum *d* determinari, quin ulla linea ducatur, idque ope duplicis circini, hunc in modum. Crura unius circini aperiantur accurate ad distantiam puncti quæsiti a linea verticali, alterius ad distantiam ejusdem a linea horizontali. Tum crure unius circini altero in puncto visus *a* fixo, notetur altero in linea horizontali punctum *i*; similiter ope alterius notetur in linea verticali punctum *s*. Denique circino priore manu altera, altera posteriore prehenso, figatur crus unum illius in *i*, hujus in *s*; ubi reliqua duo crura in tabula conveniunt, punctum quæsitum *d* esse debet.

356. II. RESOLUTIO GRAPHICA. Sit TB (fig. 47 & 48) planum tabulæ, *ut* ejus linea verticalis; *rh* horizontalis; *a* punctum visus, D punctum objectivum datum. Transeat per D planum horizontale KF, parallelum lineæ horizontali *rh*; sit XZ intersectio hujus plani cum plano verticali, quod concipitur per *ut* & XZ transire; BY sit intersectio plani KF cum plano tabulæ. Ex puncto D demittatur ad BY perpendiculum DE, quod metitur ejus distantiam a plano tabulæ; punctum E, in quod cadit in tabula, dicitur *punctum incidentiæ*: conjungantur puncta visus *a* & incidentiæ E recta *a*E; transferatur distantia DE objecti a tabula in rectam BY, ex E in G; (perinde est, sive punctum G versus B, sive versus Y accipiatur): dein in lineam horizontalem *hr* ita transferatur ex puncto visus *a* radius principalis *a*O, ut punctum O in partem alteram respectu puncti G cadat, hoc est, ad partem dextram puncti visus *a*, si G fuerit ad sinistram puncti incidentiæ E, & vicissim: ducatur OG; ejus intersectio *d* cum *a*E erit punctum perspectivum dati D.

DEMONSTR. Ducatur per *d* recta LN parallela verticali *ut*, ac ideo ad horizontalem *hr* & ad BY perpendicularis; erunt triangula *d*GE, *da*O similia, eorumque altitudines *d*N, *d*L in ratione laterum homologorum (Elem. 578); itaque O*a*: GE = *d*L: *d*N, & (Elem. 304) O*a* + GE: O*a* = *d*L + *d*N (seu *at*): *d*L, quæ est prima analogia resolutionis prioris, cum *at* sit altitudo oculi supra planum libellæ, in quo objectum ponitur, ideoque distantia objecti a plano horizontali. Denique quia parallelas *d*L, *ut* secat recta *a*E, triangula *ad*L (seu *asd*), & *at*E similia sunt, & hinc *at*: *as* (sive *d*L) = *t*E (seu DS): *ds*. Atqui ostendimus esse O*a* + GE: O*a* = *at*: *d*L; ergo etiam O*a* + GE: O*a* = DS: *ds*, quæ est secunda analogia resolutionis primæ.

357. OB-

357. OBSERVA. Evidens eſt, conſtructionem Problematis manere eandem, ſeu ponatur planum tabulæ perpendiculariter erectum ſupra planum KF, ſeu cum eo congruere, modo linea BY repræſentet ſectionem tabulæ cum plano KF, & linea verticalis *tu* maneat in linea ZX ejusdem plani KF. Atque ſic rem habere ſupponendum erit in prioribus duabus methodis, quas ſequente Capite allaturi ſumus.

Ex hac ſecunda ſolutione praxes variæ deductæ ſunt, quæ paſſim in libris de Perſpectiva conſcriptis traduntur; præcipuas ſubjungemus.

CAPUT II.

Deſcribuntur præcipuæ Methodi Perſpectivæ Practicæ.

I METHODUS

Per Craticulam Perſpectivam.

358. Conſtruitur imprimis quadratum ABDE (fig. 51), quod exhibet planum objectivum tabulæ, hoc eſt, totum ſpatium, quod objecta delineanda in plano occupant. Dicitur etiam *planum Geometricum*. Quadratum hoc dividitur in plura alia, quam fieri poteſt, parva; & poſito, quod margo inferior tabulæ AB congruat cum latere AB quadrati AD, ducitur in plano tabulæ linea horizontalis QO ad eam altitudinem, quæ commoda viſa fuerit; uti etiam linea verticalis VI, prout oculus ſpectatoris vel directe medio tabulæ opponendus eſt, vel ad alterutram partem collocandus, ita, ut S ſit punctum viſus, SI altitudo oculi ſupra planum Geometricum. Ex puncto S ad ſingulas diviſiones lateris BA ducuntur rectæ SB, SG, SI, SC, SM, SA. Radius principalis (ejus longitudinis, quæ opportuna judicatur, ut tantundem oculus a tabula diſtet) utrinque ex puncto S in lineam horizontalem (etiam productam, ſi opus ſit), velut in O & Q, transfertur. Ex utroque hoc puncto ad puncta diviſionum lateris AB, aguntur rectæ OB, OG, OI, OC, OM, & QA, QM, QC, QI, QG, QB, quarum interſectiones *e*, *k*, *l*, *n*, *r*; *d*, *t*, *p*, *f*, *h*, cum rectis SA, SB determinant puncta, per quæ ductæ rectæ *de*, *tk*, *pl*, *fn*, *hr* cum rectis *g*G, *i*I, *c*C, *m*M conſtituunt trapezia majori B*de*A incluſa, quæ omnia ſunt projectio perſpectiva quadrati BDEA, atque minorum in eo contentorum. Trapezium

B *d e* A *craticula perſpectiva* vocatur. Pro demonſtratione, quod B *d e* A ſit projectio perſpectiva quadrati BDEA, manifeſtum eſt (356) punctum A eſſe punctum incidentiæ puncti E, & AB eſſe æqualem diſtantiæ puncti E a plano tabulæ; igitur interſectio *e* rectarum SA, OB eſt punctum perſpectivum puncti E. Eodem modo puncti K punctum incidentiæ eſt idem A, & AG = AK; ergo puncti K projectio perſpectiva eſt *k*, ubi rectæ SA, OG ſe interſecant. Idem eſt de ceteris omnibus punctis quadrati ABDE.

359. SCHOLIUM. Equidem ex conſtructione patet, craticulam perſpectivam deſcribi poſſe independenter a puncto S, ex datis ſolum O & Q; cum rectæ ex O & Q ad diviſiones lateris plani Geometrici AB ductæ, interſectionibus ſuis determinent diagonales trapeziorum, quæ in craticula deſcribuntur, adeoque his datis etiam ipſa trapezia conſtrui poſſint. Verum modus, quem dedimus, accuratior eſt; cum enim rectæ G *g*, I *i*, C *c* in puncto viſus S concurrere debeant (345); exactius verſus illud tendunt, ſi ipſum punctum S adhibeatur, quam ſi ſolum utamur angulis trapeziorum.

Rectæ *d*B, *g*G, *i*I, *c*C &c, quarum diviſiones inæquales repræſentant partes æquales rectarum BD, GR, IX, CY &c, dicuntur *Scalæ decreſcentes longitudinum*, quod ſerviant *diminuendis* dimenſionibus objectorum ea ratione, qua diverſæ eorum partes magis a tabula diſtant. Et parallelæ *h r*, *f n*, *p l* &c ſunt *ſcalæ decreſcentes latitudinum & altitudinum*, cum ad *diminuendas* latitudines, & altitudines objectorum in diſtantiarum a tabula ratione adhibeantur.

360. USUS CRATICULÆ PERSPECTIVÆ. Quoniam craticula perſpectiva exhibet in tabula ſpatium quadrati Geometrici BDEA, manifeſtum eſt, quod ſi planum alicujus objecti, cujus projectio perſpectiva petitur, delineetur in hoc quadrato, ita ut diviſiones ejusdem ſpectentur tanquam ſcala dimenſionum plani delineati, facile quoque projectio perſpectiva fieri poſſit. Ut ſi v. g. quadratum in plano Geometrico oblique ad tabulam ſitum perſpective delineare velim, cujus ſingula latera ſint trium pedum; conſtruo quadratum BAED (fig. 52), cujus ſingulæ diviſiones ſint unius pedis, aut ſaltem unum pedem exhibeant, ac intra hoc alterum oblique poſitum IMNO, cujus ſingula latera æquentur tribus diviſionibus lateris quadrati Geometrici, ſitumque datum habeant. Tum in craticulæ perſpectivæ areolis correſpondentibus quadratulis plani Geometrici, in quibus ſunt puncta I, M, N, O, deſigno puncta *i*, *m*, *n*, *o*, ut ſingula ſint ad areolarum partes homologas. Ductis *m i*, *i o*, *o n*, *n m* habeo trapezium *i o n m* perſpectivum quadrati IONM, ut per ſe liquet.

361. Si

361. Si quadratum IONM ſit baſis cubi perſpective delineandi, præterea e punctis *i*, *m*, *n*, *o* erigi debent perpendiculares ad horizontem *i*F, *m*P, *n*Q, *o*H; & quoniam altitudo cubi objectivi eſt æqualis tribus diviſionibus lineæ AB quadrati geometrici; ſingulæ dictæ perpendiculares fiant æquales triplæ latitudini areolæ illius, cui quævis inſiſtit, & acceptæ ope cricini in lineis horizontalibus, quæ per puncta *i*, *m*, *n*, *o*, tranſeunt. Denique ducantur QP, PF, FH, HQ; habebitur projectio perſpectiva cubi. Nam rectæ Plana verticalia cubi objectivi terminantes, plano baſis ſunt perpendiculares; igitur (344) earum projectiones debent eſſe rectæ verticales, ſive parallelæ ad VK; & quia earum dimenſio objectiva æquatur triplici diviſioni quadrati geometrici; earundem altitudo perſpectiva æqualis eſt triplici latitudini trapeziolorum craticulæ, acceptæ in eodem plano (parallelo ſcilicet ad planum tabulæ), in quo ea altitudo collocari debet.

362. OBSERVA I. Facile apparet, in hiſce operationibus ſupponi quadratum geometricum eſſe reſpectu oculi poſt tabulam; ideoque neceſſe eſt, ut objecta, quæ in tabula tanquam anteriora, & oculo propiora repræſentanda ſunt, propius ad AB, latus maximum craticulæ perſpectivæ, delineentur; quæ vero remotiora apparere debent, conſtituenda ſunt verſus latus quadrati DE.

363. II. ſi in plano objecti, cujus delineatio ex legibus Perſpectivæ facienda eſt, vel in pluribus ejusdem planis, aut in planis inter ſe parallelis, deſcriptæ ſint plures lineæ parallelæ inter ſe, uti v. g. ſunt membra ornatus Architectonici, tum ut labori parcatur, tum ut accurationi conſulatur, determinandum eſt punctum earum concurſus (quod earum *punctum accidentale* dici ſolet). Jam vero quando hæ parallelæ ſunt ſimul horizontales, quod quam ſæpiſſime accidit, earum punctum concurſus eſt in linea horizontali tabulæ, ita, ut, ſi habeatur projectio unius ex illis, tantum opus ſit hanc projectionem uſque ad lineam horizontalem producere; punctum, in quod cadit, eſt ſimul reliquarum punctum accidentale. Cum enim ſupponantur omnes parallelæ ſimul eſſe ad libellam ductæ, radius ex oculo ad easdem parallelus debet duci in plano horizontali, ergo tabulæ nullibi occurrere poteſt, quam in linea horizontali.

Itaque habita ſemel projectione perſpectiva *nm* rectæ objectivæ NM, eandem projectionem produco in R, quod eſt punctum accidentale projectionis rectæ objectivæ OI, & duarum baſis ſuperioris, quæ ſunt ad NM, & OI parallelæ. Idem eſt de puncto L, in quo concurrere debent projectiones parallelarum ON, IM, hisque correſpondentium in baſi ſuperiore cubi. At ſi parallelæ objectivæ non ſint ad libellam ductæ, opus eſt, ut duarum reperian-

riantur projectiones, quæ in eam partem, in quam convergunt, productæ concurſu ſuo determinant punctum accidentale omnium reliquarum.

364. III. Ut repleatur vacuum extra latera craticulæ perſpectivæ relictum, rectæ *de*, *tk*, *pl* &c (fig. 51) utrinque produci poſſunt uſque ad tabulæ margines, & diviſiones lineæ *de* in utramque partem productam transferri; ſi dein ex puncto viſus S ad puncta harum diviſionum ducantur rectæ, donec occurrant marginibus tabulæ, efficient cum *kt*, *lp* &c productis nova trapezia, ſive projectiones perſpectivas quadratulorum, quæ ex utroque latere quadrati geometrici BAED adhuc addi poſſunt, quo ſpatium plani geometrici capacius reddetur.

365. IV. Quando tabulæ minores faciendæ ſunt, & objecta ſub diverſis obliquis ſitibus repræſentanda, uſus craticulæ perſpectivæ commendandus eſt. Verum pro magnis tabulis hæc methodus locum non habet, præcipue, ſi objecta magno numero, & inter ſe diſtantia dantur; tunc enim planum Geometricum iis ſufficiens conſtrui nequit. Quod ſi tamen tam magnum haberi poſſit, ut omnia objecta ſub dimenſionibus ſubduplis, ſubtriplis, vel ſubquadruplis capiat, hæc in craticula ſeparatim perſpective delineari poterunt; ſed dein in tabula ad id deſtinata rurſus depingenda, lineis, quæ in craticula deſcriptæ ſunt, duplicatis, triplicatis, vel quadruplicatis; eritque objectorum projectio ejusmodi tanto accuratior, quanto minus dimenſiones ex craticula acceptæ augeri debuerunt.

366. V. Omitti etiam poteſt deſcriptio quadratulorum in plano Geometrico, ſi accurata tabella conſcribatur, quæ dimenſiones, ſitum, & diſtantiam objectorum in tabula exhibendorum contineat. Tum enim latere infimo tabulæ in tot, quot libuerit, partes æquales diviſo, quarum quævis digitum, pedem, hexapedam, aut generatim menſuram eam repræſentet, juxta quam tabella magnitudinum conſcripta eſt, & quæ *modulus* dici poterit, craticula his diviſionibus conveniens fiet, cujus ſingula trapezia digitum quadratum, aut pedem, vel hexapedam quadratam, aut denique *modulum quadratum* valebunt. Unde objecta delineanda eo modo, quo tabella magnitudinum exigit, in craticula collocari poterunt.

II METHODUS
Sine Craticula perſpectiva.

367. In hac methodo, ut in præcedente, ſupponitur planum baſis objecti delineandi EFGHI (quod in præſente exemplo eſt pri-

prisma pentagonum) (fig. 50) in ea distantia a limbo inferiore tabulæ in plano geometrico constructum esse, in qua apparere debet.

Ducatur in plano tabulæ linea verticalis VK, atque paullo ultra planum basis objecti continuetur; fiat item horizontalis SP, in qua accipiatur SO, æqualis radio principali, versus utramque partem puncti S. Tum ab angulo B marginis infimi tabulæ abscindatur BC altitudini prismatis objectivæ æqualis, jungaturque C cum extimo puncto lineæ horizontalis P. Inveniatur per constructionem superius descriptam (356) omnium angulorum prismatis projectio perspectiva: exempli causa pro angulo E, accipiatur circino ejus distantia a linea verticali VK, & transferatur ex K in D, erit D punctum incidentiæ anguli E. Accipiatur præterea ejusdem distantia a margine tabulæ AB, & transferatur ex D in N, in partem scilicet oppositam puncto O respectu D; ducantur SD, ON; harum intersectio *e* erit projectio perspectiva puncti E.

Repertis hac ratione projectionibus reliquorum angulorum pentagoni, excitentur ex iis perpendiculares *e*T, *f*L, *g*M &c, quæ fiant æquales lineis $\varepsilon\tau$, $\varphi\lambda$, $\gamma\mu$ &c inter PC & PB interceptis ex parallelis ad AB, quæ e singulis punctis *e*, *f*, *g* &c ducuntur. Reliqua peragantur ut priore methodo; erit eadem demonstratio.

368. Observationes, quas priore articulo subjunximus, hic quoque locum habent. Potest etiam fieri exacta distributio objectorum delineandorum, & tabella tum distantiarum a linea verticali, tum a limbo tabulæ AB singulorum punctorum, quorum projectio petitur, conscribi, cujus ope, ut superius dictum est, puncta D & N reperiantur; uti etiam tabella altitudinum pro punctis supra basin objectorum elevatis. Delineatio perspectiva eo erit accuratior, quo ichnographia, & objectorum altitudines exactius fuerint acceptæ; & id quidem, quamvis singulis pedibus dimensionum objectivarum non nisi duæ vel tres lineæ in scala moduli respondeant.

III Methodus

Per margines scalares.

Hæc methodus priores duas includit, atque alia præterea habet commoda, ob quæ iis merito præferatur, quorum unum e præcipuis est, quod delineatio æque ope angulorum figurarum, ac laterum perfici possit. Unde in ea describenda paullo prolixiores erimus, quam in præcedentibus.

Con-

Conſtructio marginum ſcalarium.

369. Conſtituto in tabula puncto viſus S (fig. 53), ducatur per illud linea horizontalis H S Q, atque utrinque, quantum fieri poteſt, ultra tabulam prolongetur. Fiat etiam linea verticalis V T, in qua accipiatur punctum C ſeu verſus V, ſeu verſus T, ita, ut S C æquetur radio principali. Centro C radio quovis (quo hic fuerit longior, eo diviſio fiet accuratior) deſcribatur arcus A B, 60, vel 70 graduum circiter, qui in ſingulos, vel in denos ſaltem gradus dividatur, initio ad A facto. Ex C per ſingula diviſionum puncta ducantur rectæ occurrentes lineæ horizontali, quæ hac ratione una ex parte diviſa erit. Tum eædem ejus diviſiones ex puncto S in alteram partem transferantur, ut utrinque æqualiter dividatur tota ejus longitudo. Compendii cauſa ad C A applicari poteſt inſtrumentum *Transportatorium* in ſuos gradus accurate diviſum, & ope fili tenuis in ejus centro fixi, & per ſingulos gradus tenſi, in linea horizontali puncta diviſionum notari.

370. Et quia ex hac conſtructione manifeſtum eſt, diviſiones lineæ horizontalis a puncto S computatas eſſe tangentes angulorum ad C, ſinu toto exiſtente C S; eædem multo accuratius reperientur, ſi conſtruatur ſeparatim ſcala R D in quotvis partes æquales diviſa, ita tamen, ut earum 10 æquentur radio principali, quæ iterum in denas minores ſubdividi poterunt, & harum quævis rurſus in denas alias, quo fiet, ut radii principalis partes milleſimæ habeantur. Quodſi ſi jam e tabula tangentium excerpantur competentes numeri, iidem ex ſcala parata facile in lineam horizontalem transferentur.

371. In margine infimo tabulæ F E accipiantur (incipiendo ab extremo F & pergendo verſus E) tot, quot libet, partes æquales, quæ ſint *modulus* dimenſionum objectorum delineandorum; & ex puncto Q, accepto in horizontali producta ad diſtantiam a P æqualem radio principali, ducantur ad eas lineæ cæcæ, vel vero applicata regula notentur puncta interſectionum in linea F G, adſcriptis notis 1, 2, 3, 4 &c. Eædem diviſiones transferantur ab E in latus E K.

372. Denique in marginem F E ex utraque parte puncti T transferantur partes æquales 1, 2, 3, 4 &c illis, ad quarum diviſionum puncta prius lineæ cæcæ ex Q ductæ fuerunt, quarum interſectione latus F G diviſum eſt. Quin majoris commoditatis gratia eædem partes æquales transferantur ex puncto V in utramque partem marginis ſupremi tabulæ, iisdemque numeris notentur. Atque ita conſtructio marginum ſcalarium abſoluta erit.

Ex

Ex his marginibus ſcalaribus diviſiones lineæ horizontalis ſerviunt projectioni perſpectivæ linearum ad libellam ductarum, quæ ad planum verticale ſunt obliquæ. Diviſiones marginum dextri & ſiniſtri ſunt *ſcalæ decreſcentes* longitudinum proportionatæ objectorum a tabula diſtantiis; & diviſiones ſuperioris & inferioris ſunt *ſcala frontis*, ſive objectorum in ipſa fronte, ſive margine tabulæ FE conſtitutorum, & ad planum tabulæ parallelorum, modulus.

373. Conſtructionem marginum ſcalarium rite factam eſſe, ut demonſtretur, concipiatur *primo* centrum C ita elevari ſupra punctum viſus S, ut planum trianguli SCH ſit ad planum tabulæ normale. Liquet punctum C tunc fore locum oculi, atque gradus arcus AB centro C deſcripti eſſe menſuram angulorum ad oculum, quos efficiunt lineæ in plano horizontali deſcriptæ, & ad planum verticale obliquæ; quare recte in linea horizontali notari poſſunt puncta, ad quæ radii ex oculo per ſingulos gradus ducti terminantur. *Secundo* cogitetur ſimiliter, quod linea QP elevetur perpendiculariter ad planum tabulæ, ut angulus SPQ ſit rectus, linea vero FE ſit ad idem planum, ſed ex parte altera ab oculo averſa, normalis, atque propterea planum, in quo ſunt rectæ ex Q ad puncta diviſionum FE ductæ, ſit ad planum tabulæ perpendiculare, FG exiſtente communi utriusque interſectione. Patet, diviſiones FE fore diſtantias a tabula in plano Geometrico producto acceptas. Exempli cauſa, FN deſignet unitatem moduli diſtantiæ ultra tabulam, erit F 1 ejus projectio perſpectiva; nam ob triangula rectangula QP 1, FN 1 ſimilia eſt PQ : FN = P 1 : F 1; igitur etiam PQ + FN : PQ = P 1 + F 1 (ſeu PF) : P 1, quæ cum ſit ex primis analogiis reſolutionis generalis (351), ſequitur, punctum 1 eſſe projectionem puncti N. Idem eſt de aliis diviſionibus.

374. COROLL. Ex his conſtat, quod ſi nequeat ſufficienter produci planum tabulæ, ut diviſiones in marginibus dextro & ſiniſtro, quot requiruntur, obtineantur, eæ facili calculo reperiri poſſint; id, quod faciendum quoque eſt pro majoribus tabulis. En hujus rei exemplum!

Sit radius principalis SC decem pedum, aut generatim decem unitatum moduli; altitudo oculi ſupra planum Geometricum 6: ut obtineantur diſtantiæ P 1, P 2, P 3 &c, quarum intervalla ſingula ſingulis moduli unitatibus reſpondeant, faciendæ ſunt ſequentes proportiones.

10 + 1			5, 45 = P 1
10 + 2			5, 00 = P 2
10 + 3			4, 61 = P 3
10 + 4			4, 29 = P 4
10 + 5			4, 00 = P 5
10 + 6	sunt ad 10;	ita 6 ad	3, 75 = P 6
10 + 7			3, 53 = P 7
10 + 8			3, 33 = P 8
10 + 9			3, 16 = P 9
10 + 10			3, 00 = P 10
10 + 11 &c			2, 86 = P 11 &c.

Unde ex ſcala in partes decimales (quarum in præſente exemplo diſtantia lineæ horizontalis a margine infimo tabulæ contineat 6, 00) facile erit in marginibus lateralibus tabulæ diviſionum puncta accurate notare, quotquot delineationi neceſſaria fuerint.

375. Alter modus dividendi margines laterales, ſua facilitate ſe commendat, eſtque prioribus duobus expeditior, niſi quod magnam circumſpectionem, ut errores vitentur, exigat; ideoque tum commodiſſime adhibendus, quando ſolummodo majoribus diviſionibus opus, uti ſi minores objecti partes paucæ ſunt, & tantum præcipua quædam puncta deſignanda, quæ conſtituendis ceteris ſerviant, vel dum res non ſinit, ut tam minutim ſequamur regulas, ſed naturali quadam æſtimatione rudiusve, adumbrandum eſt objectum.

Menſura, quæ pro unitate moduli aſſumpta eſt, tranſferatur in marginem inferiorem tabulæ ex F in N (fig. 54), & radius principalis ex P in Q ad eandem partem puncti N; ducantur PN, QF: ex puncto interſectionis *a* demittatur ad PF perpendiculum *a* 1; ducatur Q 1, & ex *b*, ubi ſecat PN, rurſus demittatur perpendicularis *b* 2 ad PF: tum iterum ducatur Q 2, & ex puncto interſectionis *c* cum PN, perpendicularis *c* 3 ad PF, & ſic deinceps, donec tot diviſiones habeantur, quot opus eſt.

376. DEMONSTR. Quoniam QP, NF ſunt parallelæ, erunt triangula QP*a*, NF*a* ſimilia: itaque PQ : FN = P*a* : *a*N; & PQ + FN : PQ = P*a* + *a*N (ſeu PN) : P*a*. Sunt vero etiam triangula rectangula PNF, P*a* 1 ſimilia; ergo PN : P*a* = PF : P 1; conſequenter PQ + FN : PQ = PF : P 1, quæ eſt analogia, juxta quam diviſio facienda erat.

Obſervanda circa lineam horizontalem tabulæ.

377. Si ſupponamus ſpectatoris oculum ita reſpectu tabulæ collocatum, uti debet, cum projectio perſpectiva perfecta eſt, atque ei per tabulæ quadrum (quæ ideo inſtar vitri transparens ſupponitur) patere liberum aſpectum plani indefiniti, continui, & ad

li-

libellam positi, manifestum est, quod hæc planities ei appareat usque ad circulum procurrere, qui cæli superficiem aspectabilem a tellure separare videtur (*qui horizon cælestis dicitur*). Jam vero projectio perspectiva hujus circuli non potest esse nisi linea recta: cum enim hic circulus habeat centrum in ipso spectatoris oculo, radii ex eo ad omnia circumferentiæ illius conspicuæ puncta ducti sunt in eodem plano: itaque eorum intersectio cum plano tabulæ est intersectio binorum planorum, quæ necessario linea recta est (Elem. 629). Patet igitur, hanc esse lineam horizontalem tabulæ, quæ adeo est projectio perspectiva portionis horizontis cælestis, spectatori visibilis, ejusque divisiones sunt projectio graduum ejusdem.

378. Quoniam oculus centrum est horizontis cælestis, sequitur, quod si duæ lineæ objectivæ in plano libellæ per oculum transeunte convergant ad aliquem angulum in oculo, gradus horizontis, & consequenter divisiones lineæ horizontalis tabulæ, metiantur hunc angulum, ideoque earum ope linearum objectivarum inclinatio optice repræsentari possit. Et quia omnia plana inter se parallela ad distantiam infinitam ab oculo videntur concurrere; planum geometricum, & universim omne planum libellæ convergit cum plano horizontali per oculum transeunte, donec in horizonte cæleſti cum eo coincidat. Atque hinc *linea horizontalis tabulæ est linea concursus projectionum omnium planorum ad libellam positorum.*

Planorum omnium ad libellam positorum, quibus insistunt objecta delineanda, distantia a se invicem finita est, cum interim horizontis cælestis peripheria infinite ab oculo distat; igitur intervallum inter ea plana infinite parvum est respectu distantiæ ab oculo, ad quam concurrere videntur; atque adeo omnia plana ad distantiam finitam supra vel infra oculum ad libellam posita, respectu horizontis cælestis, & consequenter respectu lineæ horizontalis tabulæ, quæ illius projectio est, instar unius cum eodem horizonte cæleſti congruentis considerandæ sunt, verticali per oculum transeunte, seu perpendiculari eorum distantiam inter se metiente, evanescente, & rationem puncti cum centro horizontis coincidentis non excedente.

Unde angulus, qui fit a duabus rectis in plano quopiam ad libellam posito convergentibus, atque verticem in verticali per oculum transeunte habet, non aliter spectari debet respectu peripheriæ horizontis cælestis, sive lineæ horizontalis tabulæ, quam si fieret in ipso oculo: quare ejus mensura erunt etiam divisiones lineæ horizontalis, earumque ope optice delineari poterit.

Denique cum objecta quævis, quæ ab oculo distincte cerni possunt, ideoque in tabula delineari, habeant distantiam tum inter se, tum

ab oculo finitam, horizonte cæleſti infinite diſtante: puncta omnia, quibus objectorum partes conſtant, cenſenda ſunt infinite propinqua, atque adeo omnes anguli, quos in plano quovis ad libellam poſito efficiunt termini eorum planorum, ſive latera, ita conſiderandi ſunt, tanquam in centro horizontis cæleſtis eorum vertices exiſterent, ut adeo diviſiones lineæ horizontalis eosdem metiantur.

379. Hinc ſequitur I°. *per diviſiones lineæ horizontalis tabulæ menſurari poſſe, & perſpective delineari omnes angulos, in plano quovis ad libellam poſito ſitos.*

380. II°. *Ut projectio perſpectiva anguli cujuslibet objectivi fiat, inveniri debere projectionem illius verticis* (qua ratione reperiatur, inferius Num. 389 dicetur), *atque ex ea rectas ad bina diviſionum lineæ horizontalis puncta, inter quæ numeri graduum menſura contineatur, duci; ſive ad ea, ad quæ radii ex oculo lateribus objectivis anguli paralleli pervenirent.*

381. III. *Si e quotlibet punctis* C, D, E, *in tabula acceptis* (fig. 55) *ducantur binæ ad easdem interſectiones lineæ horizontalis* A, B, *angulos* A C B, A D B, A E B *fore projectiones angulorum objectivorum inter ſe æqualium, quorum menſura eſt numerus graduum diviſionibus inter* A *&* B *comprehenſis æqualis;* in præſente figura ſcilicet 30°. Certe, cum C B, B D, B E ad idem punctum accidentale convergant, neceſſe eſt, ut ſint projectiones opticæ trium parallelarum (363); ſimiliter rectæ A C, A D, A E tres parallelas alias deſignant: atqui ſi tres parallelæ inter ſe occurrant tribus aliis itidem inter ſe parallelis, eadem debet eſſe omnium inclinatio, ideoque idem angulus.

382. Infertur denique, rectam, uti D A, aut E A, ex quovis tabulæ puncto D vel E ad punctum quodpiam A lineæ horizontalis ductam eſſe projectionem perſpectivam lineæ objectivæ in plano libellæ ſitæ, & ad planum verticale tot gradibus, & verſus eam partem inclinatæ, quot, quæve a puncto A indicantur. In hoc exemplo lineæ D A, vel E A ſunt projectiones rectarum ad libellam ductarum, quæ decem gradibus verſus dextram a plano verticali declinant.

Problemata ope marginum ſcalarium ſolvenda.

383. PROBLEMA I. *Ex dato puncto tabulæ* C (fig. 55) *ducere rectam, quæ ſit optice parallela datæ lineæ perſpectivæ* D F. Supponitur, quod hæ lineæ ſint in planis ad libellam poſitis.

RESOLUTIO. Producatur perſpectiva data D F, donec occurrat lineæ horizontali in quovis puncto B; tum jungantur C B.

384. PROBLEMA II. Ad extremum D (fig. 55) lineæ perſpectivæ D F, cujus objectiva eſt in plano libellæ, angulum numerum graduum petitum continentem conſtruere.

RESOLUTIO. Producta linea perſpectiva, donec occurrat horizontali in B, numerentur ex B verſus eam partem, ad quam conſtruen-

ſtruendus eſt angulus, v. g. verſus A, tot diviſiones lineæ horizontalis, quot graduum eſſe debet angulus, & ducatur DA.

385. Observa I. Si angulus conſtruendus ſuiſſet 60 aut 80 graduum, eodem modo accipi inter B & A 60 vel 80 gradus debuiſſent, 20 ſcilicet, aut 40 gradibus ultra punctum viſus S ſumtis.

386. II. Si angulus ad partem puncti B debuiſſet conſtrui; diviſionibus ex hac parte non ſufficientibus, accipi debuiſſet anguli petiti complementum ad duos rectos, & gradus ex B verſus ſiniſtram A numerari, indeque linea ADR duci; atque ita angulus BDR ſuiſſet petiti numeri graduum.

387. Problema III. *Ex dato puncto* D (fig. 56) *lineæ perſpectivæ datæ* CE, *erigere optice perpendicularem.*

Resolutio. Problema hoc ad præcedens redit. Producta CE usque ad lineæ horizontalis punctum B, a B in diviſionibus horizontalis numerentur 90 gradus v. g. usque ad A, indeque ducatur AD.

388. Problema IV. *Ex puncto tabulæ dato ducere perſpective perpendicularem ad rectam datam.*

Resolutio. Sit data CE (fig. 56), & F punctum tabulæ pariter datum. Producatur CE uſque ad horizontalem in B; inde usque ad A numerentur 90 gradus, & per F ducatur ex A recta ad AD, quæ erit perpendicularis quæſita.

389. Problema V. *Data puncti objectivi in plano Geometrico diſtantia a tabula, & a plano verticali, invenire ejus punctum perſpectivum.*

Resolutio. Per diviſiones marginum lateralium diſtantiæ puncti objectivi a tabula reſpondentes ducatur linea cæca, & alia itidem cæca ex puncto viſus ad eam diviſionem marginis inferioris, quæ indicat diſtantiam puncti objectivi a plano verticali, utriusque interſectio erit punctum perſpectivum quæſitum. Exempli cauſa, ſi diſtantia a plano tabulæ eſſet quatuor unitatum moduli; & a plano verticali trium verſus ſiniſtram, punctum perſpectivum foret G.

390. Si punctum datum non ſit in plano Geometrico, ſed vel ſupra illud elevatum, vel infra depreſſum, v. g. in foſſa quapiam, concipienda eſt perpendicularis ex eo ad planum Geometricum ducta, quæ ſeu altitudinem, ſeu depreſſionem metiatur; quoniam itaque hæc perpendicularis tam plano tabulæ, quam verticali parallela eſt, punctum plani Geometrici, in quod cadit, eandem ab his planis habet diſtantiam, quam punctum objectivum datum. Unde ſi fiat projectio puncti hujus in plano Geometrico, in quod cadit perpendicularis, & ducatur per illud parallela lineæ verticali, determineturque longitudo perpendicularis eo modo, quem Pro-

blemate ſequente præſcribemus, extremum perpendicularis punctum erit projectio perſpectiva dati.

391. PROBLEMA VI. *Lineam objectivam poſitione, & magnitudine datam optice deſcribere in tabula.*

RESOLUTIO. Sit longitudo lineæ datæ duarum unitatum moduli, alterum ejus extremum G (fig. 56) diſtet a plano verticali tribus, & a plano tabulæ quatuor ejusmodi unitatibus: quæratur per Probl. Præcedens ejus projectio G. Sed ut alterius extremi punctum perſpectivum rite determinetur, triplex expendendus eſt caſus.

392. CASUS I. *Dum linea objectiva plano verticali parallela eſt.* Ponatur extremum lineæ G eſſe tabulæ propius. Quia longitudo eſt duorum modulorum, alterum ejus extremum a tabula ſex modulis diſtat. Ducatur jam ex G ad punctum viſus recta GS, & per diviſionum marginum lateralium puncta 6, 6 cæca 6 I 6: interſectio I erit projectio alterius extremi.

Quod ſi extremum G altero magis diſtaret a tabula, duo moduli ex quatuor ſubducendi eſſent, & recta per puncta 2, 2 marginum lateralium ducta abſcinderet in recta S 3 extremum quæſitum.

393. CASUS II. *Dum linea objectiva eſt plano tabulæ parallela.* Vel in hac hypotheſi extremum G propius eſt plano verticali, quam alterum, vel eſt remotius? Si hoc, liquet, alterum extremum a plano verticali diſtare uno modulo. Unde ex puncto viſus S ducatur cæca ad marginis inferioris diviſionem 1; hujus interſectio K cum parallela ad horizontalem per G tranſeunte determinat alterum extremum quæſitum.

At ſi extremum G lineæ objectivæ ſit plano verticali vicinius, diſtantia alterius ab eodem plano erit 5 modulorum, & recta ex S ad diviſionem 5 inferioris marginis duci debebit.

394. CASUS III. *Quando linea objectiva tam ad planum verticale, quam ad planum tabulæ obliqua eſt;* uti ſi 20 gradibus verſus dextram a plano verticali declinet.

Ducatur per G recta ad diviſionem 20° lineæ horizontalis ad partem dextram puncti viſus; per idem G, & verſus eam partem, ad quam linea objectiva declinat, ducatur quoque GK lineæ horizontali parallela, & optice æqualis objectivæ (393) ſive duorum modulorum: ex hujus extremo K ducatur KQ, quæ ſecet rectam GL ad 20° ex G ductam verſus eam partem, ad quam ſitum eſſe debet extremum quæſitum, & ſimul tranſeat per diviſionem illam lineæ horizontalis, quæ indicat dimidium complementi anguli obliquitatis, quem facit linea objectiva cum plano verticali (in noſtro

ſtro exemplo per 35°, quod eſt medietas de 70°, ſive complementi 20°). Interſectio rectarum KQ, & GL determinat punctum L perſpectivum extremi alterius quæſiti. Quod ſi enim ad ea, quæ fieri præcepimus, attendatur, patebit, factam ſuiſſe projectionem perſpectivam trianguli objectivi iſoſcelis GKL, cujus crura GK, & GL optice æqualia ſunt.

395. OBSERVA. Si ſeparatim conſtruatur, vel trigonometrice calculetur triangulum rectangulum, cujus hypotenuſa ſit recta objectiva data, & unus ex angulis acutis æqualis angulo obliquitatis lineæ objectivæ cum plano verticali, ex valore lateris huic angulo oppoſiti reperietur, quantum extremum alterum lineæ objectivæ magis, minusve diſtet a plano verticali, quam extremum G: & ſi, ducta ex puncto viſus per G recta SM, accipiatur in inferiore margine tabulæ linea MP, qua lineæ objectivæ extremum quæſitum L magis, minuſve a plano verticali abeſt, & ducatur ad punctum viſus alia recta PS, hujus interſectio cum GH erit punctum L quæſitum.

396. PROBLEMA VII. *Lineam datam perſpectivam in quotvis partes optice æquales dividere.*

RESOLUTIO. Sit data PQ (fig. 57) in quatuor partes æquales dividenda. Ex quovis puncto S lineæ horizontalis ducantur per ejus extrema P, Q rectæ SD, ST occurrentes margini inferiori tabulæ. Intervallum DT ſecetur in partes æquales DM, ML, LG, GT, & ducantur SM, SL, SG, quæ datam PQ in punctis *m*, *l*, *g*, in partes optice æquales divident. Manifeſtum enim eſt, eas partes intercipi inter parallelas objectivas SD, SM, SL, SG, ST (383) æqualiter inter ſe diſtantes, ac rectam TD in partes æquales ſecantes; igitur per easdem data PQ in partes perſpective æquales dividitur.

397. OBSERVA I. Pro majore accuratione, punctum S ita ſeligendum eſt, ut quantum fieri poteſt, diſtantiæ ejus ab extremis datæ PQ ſint æquales.

398. OBSERVA II. Si recta PQ dividenda ſit in partes inæquales in ratione data, in eadem ratione dividatur TD (id, quod ope *circini proportionum* expedite fit), & rectæ ex S ad diviſionum puncta ductæ ſecabunt quoque datam PQ in ratione data.

399. PROBLEMA VIII. *Ex dato puncto* A *in tabula ducere perſpectivam* AK *rectæ, quæ cum plano verticali faciat angulum objectivum majorem, quam ut graduum numerus in diviſionibus lineæ horizontalis exhiberi poſſit* (fig. 57).

Ex dato puncto A ad eam partem, ad quam ſpatii commoditas admittit, ducatur recta AH horizontali parallela, & æqua-

lis

lis projectioni perſpectivæ radii principalis. Ex puncto viſus O accipiatur OZ deſignans gradus complementi anguli dati, & conferatur cum diviſionibus marginis inferioris, ut ſciatur, quot modulos contineat: tum ducatur OH, & ex ea abſcindatur HK, tot modulis perſpective æqualis, quot continet OZ: recta AK erit quæſita perſpectiva.

Etenim cum AH ſit æqualis radio principali, & AHO projectio anguli recti, ſequitur, HK eſſe tangentis anguli HAK, ſive complementi anguli dati, projectionem: igitur AK habet ſitum, qui quærebatur.

400. OBSERVA. Quod ſi recta quæſita ſimul debeat eſſe magnitudinis datæ, accipiendum eſt in AH punctum N ita, ut AN ſit perſpective æqualis magnitudine datæ; & ducenda NC ad diviſionem lineæ horizontalis, quæ indicat dimidium complementi anguli objectivi dati (394): obtinebitur AV.

401. SCHOLIUM. Allata adhuc Problemata oſtendunt, ope marginum ſcalarium haberi poſſe delineationem perſpectivam plani alicujus objectivi non tantum ex laterum, ſed etiam angulorum magnitudine. Atque ut id fiat accuratius, & expeditius, ſæpe perutile eſt, adhibere ſimul diverſarum diagonalium tum ſitum, tum longitudinem, quarum computus in polygonis regularibus admodum facilis eſt. Verum res hæc diligens requirit exercitium.

402. PROBLEMA IX. *Rectas ad planum horizontale perpendiculares optice exhibere;* ſive, quod idem eſt, *linearum altitudinum projectionem perſpectivam invenire.*

I RESOLUTIO. Problemati ſatisfit per ea, quæ ſuperius N. 357 dicta ſunt.

403. II RESOLUTIO. Oporteat ex puncto Q (fig. 57) ad horizontem perpendicularem excitare, $6\frac{1}{2}$ modulos altam. Ducatur ex puncto viſus O, vel alio quovis lineæ horizontalis, per Q recta OF usque ad inferiorem marginem tabulæ F, indeque erigatur ad eundem marginem normalis FE, $6\frac{1}{2}$ modulos, in ejusdem diviſionibus acceptos, longa: ducatur OE: hujus interſectio I cum QI ad horizontalem perpendiculari ex Q erecta, erit ſupremum punctum lineæ quæſitæ.

Nam evidens eſt (381), OF, OE eſſe projectiones duarum linearum ad libellam ductarum, ac inter ſe parallelarum, conſequenter rectis FE, QI, ab illis interceptis, exhiberi objectivas æquales.

404. III RESOLUTIO. Conſtat, diſtantiam lineæ horizontalis a projectione perſpectiva alicujus puncti objectivi in plano Geometrico collocati tot eſſe modulorum, quot aſſumta eſt altitudo

oculi

oculi ſupra planum Geometricum. Exempli gratia, ſi linea horizontalis ducta eſt ad diſtantiam 5 modulorum a margine inferiore, diſtantia puncti Q a linea horizontali debet continere quinque modulos perſpective acceptos. Quod ſi itaque ſpectetur QR ut quinque modulorum, in eadem ſupra R accipi poteſt punctum I, quod a Q diſtet $6\frac{1}{2}$ partibus æqualibus, quarum in QR continentur quinque. Executio facilis eſt ope *circini proportionum.*

405. PROBLEMA X. *Lineas perſpectivas altitudinum in partes æquales, ſive inæquales in ratione data, dividere.*

RESOLUTIO. Cum lineæ perſpectivæ altitudinum ſint ad planum tabulæ parallelæ, in partes æquales, vel inæquales in ratione data non ſecus, ac lineæ objectivæ dividendæ ſunt, idque vel ope *circini proportionum*, vel ex diviſionibus rectæ FE, in margine inferiore acceptis, ductis per QI rectis ad O, quibus in eadem ratione, ac FE, ſecatur QI.

406. PROBLEMA XI. *Determinare in tabula punctum accidentale parallelarum inter ſe, & ad horizontem inclinatarum, quarum poſitio datur.*

RESOLUTIO. Cum parallelæ poſitione dentur, ſi concipiantur plana verticalia, in quibus ſingulæ ſitæ ſunt, evidens eſt, hæc plana fore inter ſe parallela, ideoque dari eorum ſitum reſpectu plani verticalis tabulæ. Jam igitur hæc plana vel ſunt plano verticali tabulæ parallela, vel ad illud obliqua quantitate data:

407. I. Si ſunt parallela ad planum verticale tabulæ, punctum accidentale quæſitum eſt in linea verticali tabulæ, ſupra, vel infra punctum viſus quantitate æquali numero graduum, qui ſunt complementum inclinationis parallelarum cum horizonte, & ex puncto viſus in diviſionibus lineæ horizontalis accipiuntur: & quidem ſupra punctum viſus, ſi parallelarum extrema ſuperiora a plano tabulæ ſint reclinata; infra vero, ſi verſus tabulam vergant.

408. Sit exempli cauſa delineandum parallelepipedum rectangulum, cujus plana ſint ad horizontem ſub angulo 39° inclinata, longitudine illius ad planum verticale parallela, velut trabs quadrangularis in murum ad planum tabulæ parallelum reclinata (fig. 60). Manifeſtum eſt *primo*, rectas quatuor plana lateralia parallelepipedi claudentes eſſe omnes ad horizontem angulo 39° inclinatas; dextimum vero & ſiniſtimum planum eſſe plano verticali tabulæ parallelum. *Secundo* Plana baſium eſſe itidem ad horizontem inclinata angulo 51°, complemento ſcilicet ad 39°, ob rectos angulum quemvis ſolidum conſtituentes. *Tertio* ex octo lateribus baſium eſſe quatuor horizonti parallela (quorum projectiones hic ſunt *ab*, *dc*, AB, DC), nempe imprimis latus, cui in plano Geometrico incumbit, eique in eadem baſi parallelum (AB, DC); dein latus,

quo innititur muro, & huic in basi illa parallelum (*ab*, *dc*): reliqua quatuor harum basium latera (*ad*, *bc*; AD, BC) esse ad horizontem inclinata angulo complementi ad 39°. Ex his apparet, in linea verticali reperienda esse duo puncta accidentalia; alterum T supra punctum visus, pro lineis A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, plana lateralia parallelepipedi terminantibus, quarum puncta suprema recedunt a plano tabulæ: alterum P infra punctum visus S, pro lateribus basium AD, BC, *ad*, *bc*, quorum superior pars versus tabulam accedit. Itaque ex linea horizontali accipienda est imprimis tangens 39°, & in verticalem ex S in T transferenda; dein tangens 51° ex S in P. Reliqua ex inspectione figuræ patent.

409. II. Si plana verticalia, in quibus sunt parallelæ datæ, faciunt cum plano verticali tabulæ angulum, uti si supponamus, parallelepipedum exempli prioris esse reclinatum in planum, quod cum verticali faciat angulum 30°, sive cum plano tabulæ angulum 60°, tum opus est tribus punctis accidentalibus, uno in T (fig. 59) pro rectis terminantibus plana lateralia parallelepipedi; altero in Q pro lateribus basium, quorum alterum est in plano geometrico, alterum in plano, in quod reclinatur parallelepipedum, atque pro his parallelis: tertio in P pro reliquis quatuor lateribus basium, quorum duo plano geometrico, duo muro oblique insistunt.

410. Quod ad punctum Q pro parallelis, quarum una est in plano geometrico, nulla est difficultas, quippe quod sumi debet in lineæ horizontalis ea divisione, quæ denotat angulum obliquitatis earum cum plano verticali. Sed ut reliqua, v. g. T, reperiantur, sequens adhiberi potest methodus.

411. In linea horizontali VQ accipiatur VE tangens complementi anguli inclinationis planorum lateralium parallelepipedi cum horizonte; transferatur ex O in perpendicularem OF, sumpto O ad divisionem 45°: jungantur F & V recta, quæ secet in R alteram perpendicularem, erectam ad D, ubi notatur complementum declinationis planorum lateralium a plano verticali: transferatur OF ex D in K, & junctis K & R, fiat DT = KR; erit T punctum accidentale quæsitum. Eodem modo invenitur punctum P.

412. Ut methodi veritas demonstretur, cogitandum est, quod recta ad horizontem sub angulo v. g. 39° inclinata indefinite producta in superficie sphæræ cælestis pertingeret ad punctum 39° supra horizontem elevatum, aut vero ad peripheriam circuli minoris sphæræ cum horizontali paralleli, & undique ab eo 39° distantis (id genus circulus voce Arabica *Almicantarath* appellatur). Jam vero cum projectio perspectiva horizontis cælestis sit linea hori-

horizontalis tabulæ (377), *projectio alicujus Almicantarathi eſt hyperbola, cujus vertex eſt in linea verticali, & ſemiaxis principalis æquatur tangenti altitudinis illius ſupra horizontem* (ſive parti lineæ horizontalis interceptæ inter punctum viſus, & diviſionem numerum graduum altitudinis deſignantem); *ſemiaxis vero conjugatus radio principali.*

413. Circulus enim cæleſtis horizonti parallelus eſt baſis coni optici, cujus vertex in oculo, & baſis coni oppoſiti aliud Almicantarathum tantundem infra horizontem depreſſum. Sit A (fig. 58) locus oculi; A B H repræſentet planum horizontis cæleſtis cum plano geometrico ad diſtantiam infinitam ab A concurrentis; P T ſit planum tabulæ; E G M Almicantarathum ſupra horizontem angulo H A E elevatum; K N I Almicantarathum infra horizontem. Evidens eſt, ſectiones conorum oppoſitorum M S *m*, N S *n* per planum tabulæ P T ad eorum axem C L parallelum eſſe hyperbolas, quarum centrum eſt punctum viſus tabulæ B, & ſemiaxis principalis A D, ſive S B. Et ut oſtendatur, quod ſemiaxis conjugatus ſit A B, eſto A D vel S B = *a*, S D = P C = A B = *b* (eſt autem A B radius principalis). A C, vel B P ſit = *x*; hinc S P = *x* — *a*; P M = *y*. In triangulis rectangulis A S D, S E P ſimilibus eſt A D : S D = S P : E P; igitur E P = $\frac{bx-ab}{a}$; & E C = E P + P C = $\frac{bx}{a}$; item P G = P C + C G = $\frac{bx+ab}{a}$. Jam vero ex natura circuli E M G, habetur (Elem. 565) P M² = P E × P G; igitur $yy = \frac{bb\,xx}{aa} - bb$, quæ eſt æquatio ad hyperbolam, cujus ſemiaxes ſunt *a* & *b* (Elem. 840).

414. Hinc jam conſtat, quod ſi, ſumta V C = V E, notetur in plano (fig. 59) verticali punctum C altitudinis 39°, ac per illud deſcribatur hyperbola C T ſemiaxibus V C, V O, ea ſit projectio perſpectiva Almicantarathi 39°, & punctum accidentale quæſitum in eadem exiſtat, ubi a perpendiculari ex D erecta ſecatur. Reſtat jam, ut demonſtretur, conſtructione expoſita (411) verum punctum T reperiri.

415. Sit itaque V O = *b*, V C, vel O F = *a*; V D = *y*; D T, aut K R = *x*: ob triangula V D R, O V F ſimilia, eſt O V : O F = V D : D R, hinc D R = $\frac{ay}{b}$; & D R² = $\frac{aayy}{bb}$. Et quia K D, ſeu V C = *a*, eſt K D² = *a*². Porro ob triangulum K D R rectangulum, K R² = K D² + D R², ſive $xx = aa + \frac{aayy}{bb}$ = D T²: ergo (Elem.

844) D T est ordinatim applicata ad axem conjugatum hyperbolæ, cujus semiaxes sunt V C, V O.

416. COROLL. I. Liquet (Elem. 833), V F esse asymptotum hyperbolæ C T: hinc dato puncto T almicantarathi 39°, facile est, hyperbolam integram, quæ sit ejus projectio perspectiva, describere (Elem. 874).

417. OBSERVA I. Hæc methodus commode adhibetur, si inclinatio, & declinatio linearum objectivarum 50 vel 60 gradus non excedat: quod si enim major sit, lineas in plano tabulæ admodum producere necesse est, quod non sine incommodo fit. Unde in ejusmodi casu puncto accidentali carere debemus, & quasvis lineas singillatim determinare, quærendo trigonometrice, vel graphice (vide methodum N. 518) punctum plani geometrici, in quod cadit perpendiculum ex cujusvis supremo puncto demissum, nec non ipsam perpendiculi altitudinem; ac punctum illud plani geometrici, una cum perpendiculi altitudine optice describendo.

418. OBSERVA II. Si, quæ adhuc dicta sunt, rite intelligantur, ipsa figura 59 ostendit, quam facilis sit parallelepipedi descriptio optica, quam superius (N. 409) exposuimus.

419. COROLL. II. Ex fig. 58 patet, *a* esse tangentem anguli inclinationis parallelarum datarum, qui dicatur I; *y* tangentem anguli obliquitatis, quem faciunt earum plana cum plano verticali tabulæ, qui vocetur O; *b* vero sinum totum, qui sit R. Igitur formula $xx = \frac{aabb + aayy}{bb} = (bb+yy) \times \frac{aa}{bb}$ factis his substitutionibus in hanc abit $xx = (R^2 + tang^2 O) \times \frac{tang^2 I}{R^2}$. Est autem ex Trigonometria $sec^2 = R^2 + tang^2$; quare etiam $xx = sec^2 O \times \frac{tang^2 I}{R^2}$, & hinc $x = sec\ O \times \frac{tang\ I}{R}$. Sed ex iisdem regulis trigonometricis est $sec = \frac{R^2}{cos}$: quare $x = \frac{R^2}{cos O} \times \frac{tang\ I}{R} = \frac{R \times tang\ I}{cos\ O}$. Unde obtinetur hæc anologia: *Ut est cosinus anguli obliquitatis planorum, in quibus sunt parallelæ objectivæ ad horizontem inclinatæ, cum plano verticali tabulæ, ad tangentem anguli inclinationis earundem cum horizonte; ita est sinus totus ad distantiam puncti accidentalis harum parallelarum a linea horizontali tabulæ.*

420. COROLL. III. Hinc etiam sequitur, quod si ex omnibus gradibus in linea horizontali notatis erigantur perpendiculares, eæ sint projectio perspectiva circulorum maximorum horizonti perpendicularium (qui in Astronomia dicuntur circuli verticales), quorum gradus metiuntur inclinationem quamvis rectarum ad horizon-

zontem, & planum verticale obliquarum. Ipsa quoque linea verticalis tabulæ ejusmodi circulum exhibet, qui cum meridiano sphæræ cælestis comparari potest. Quod si quis igitur has projectiones circulorum verticalium in suos gradus dividere voluerit, lineæ verticali tabulæ easdem tribuet, quæ fiunt in linea horizontali; reliquarum divisiones expedito calculo per analogiam præcedentem reperiet.

421. Sed ut divisio hæc peragatur graphice, sit O Q (fig 61) linea horizontalis, S B verticalis, O Y projectio circuli verticalis dividenda. Transferatur radius principalis ex O in Q, & distantia O S, verticalis dividendi a puncto visus S, ex O in M. (si linea verticalis tabulæ instar meridiani consideretur, distantia hæc O S voce Astronomis usitata dicetur *azimuthum* verticalis dividendi). Conjungantur M & Q recta, & centro Q, radio Q O describatur arcus O N: demittatur ex N ad O Q perpendicularis N L, erit L Q manifeste cosinus azimuthi, ejus tangente existente O M, & sinu N L. Transferatur L Q in partem oppositam ex Q in P, & ducatur per P perpendicularis ad horizontalem P R, in quam, velut in *t*, *u*, *x* &c versus utramque partem puncti P transferantur divisiones lineæ horizontalis ex S acceptæ. Ducantur per puncta *t*, *u*, *x* &c & Q rectæ, quæ determinabunt puncta divisionum quæsita T, V, X &c. Cum enim P *t* v. g. sit tangens 10° radio existente O Q, ex similitudine triangulorum rectangulorum Q O T, Q P *t* habetur Q P : P *t* = Q O : O T. Quæ est analogia corollarii præcedentis (419.

422. Obesrva III. Si fingamus sphæræ cælesti, vel terrestri inscriptum esse cubum, ad cujus duo plana opposita axis æquatoris, vel eclipticæ sit perpendicularis, per præcedentes regulas in quatuor planis reliquis, per quæ axis non transit, optice exhiberi possunt omnia puncta superficiei sphæræ, quæ undique ab æquatore vel ecliptica intra 45 gradus continentur. Reliquorum vero projectio eodem modo fieri posset, si supponerentur plana cubi producta. Atque hunc in modum constructæ sunt chartæ cælestes Patris Pardies.

423. Problema XII. *Projectionem opticam facere figuræ in plano libellæ a plano geometrico distante descriptæ.*

Resolutio. In margine inferiore tabulæ A B (fig. 62) accipiatur numerus modulorum, quo planum datum supra planum geometricum elevatum est, transferaturque in utrumque marginem lateralem ex B in L, & ex A in K: conjungantur L & K recta, quæ jam instar marginis ipsius inferioris A B consideretur, & spatium L C D K tanquam totum planum tabulæ, veluti si figura, cujus projectio petitur, sita foret in novo hujus plano geometrico. Un-

de LK easdem habebit divisiones, quas AB, eundemque usum respectu figuræ delineandæ, quem AB respectu objectorum in vero plano geometrico sitorum. Lineæ porro horizontalis divisiones immutatæ manent, eademque iis utendi ratio; verum quod ad lineas CL, DK, in quibus distantiæ punctorum figuræ delineandæ a plano tabulæ accipi debent, divisiones non sunt eædem, ac in CB, DA, attamen proportionales. Unde inveniri poterunt vel ope circini proportionum, vel graphice sequente methodo.

Ducatur ad DA sub angulo quovis DF, eique æqualis, atque transferantur in eandem divisiones marginis DA, quarum correspondentes in DK petuntur. Jungantur K, F, & ad KF per singula divisionum rectæ DF puncta agantur parallelæ, quæ determinabunt divisiones quæsitas in DK. Exempli causa, si oporteat in DK designare distantiam duorum modulorum a tabula, accipiendi sunt duo primi moduli decrescentes scalæ DA, atque ex F in G transferendi; tum ducenda est GH ad FK parallela; erit KH distantia quæsita in plano supra geometricum elevato.

Eadem omnino operandi ratio est, si ponatur planum, in quo figura repræsentanda est, supra planum horizontale tabulæ, vel infra planum geometricum, uti v. g. in fossa. Nam in priore casu LK supra CD, in posteriore infra AB, velut in *lk*, constituenda est.

424. PROBLEMA XIII. *Dato puncto perspectivo* B (fig. 63) *centri circuli radii dati, v. g. trium modulorum, exhibere projectionem circuli.*

RESOLUTIO. Per punctum datum B ducatur ex puncto visus V recta VF, & DC ad horizontalem parallela, fiantque BD, BC trium modulorum optice decrescentium. Per idem B ducantur quoque PG, OL ad divisionem 45 graduum utrinque a puncto visus in linea horizontali. Similiter ex divisione $22^{\circ}\frac{1}{2}$ ex parte dextra ducantur rectæ per C & D, quæ OL secabunt in M & N. Ex eadem divisione ad partem sinistram $22^{\circ}\frac{1}{2}$ rectæ ad C & D ductæ secabunt PG in I & K. Denique per octo puncta inventa C, I, E, N, D, K, F, M, ducatur curva regularis, erit ea projectio perspectiva circuli petiti.

425. Evidens est, *projectionem perspectivam circuli esse ellipsin, quemcumque is situm habeat.* Radii enim ex singulis circuli peripheriæ punctis ad oculum ducti conum, sive conoides, efficiunt, cujus vertex est in oculo, & sectio per planum tabulæ necessario est ellipsis.

426. Descriptio ellipsis facilior, & accuratior fit, si per E & F ducantur ad lineam horizontalem parallelæ, quæ efficiant trapezium, quod erit projectio quadrati, cui circulus inscriptus est, PLGO. Itaque ellipsis ita erit describenda, ut omnia quatuor latera

tera trapezii in C, D, E, F, tangat. Si ad modum operandi præſcriptum attendatur, patebit, eum adhiberi poſſe ad inveniendos vertices angulorum octogoni circulo inſcripti.

427. OBSERVA. Equidem facile apparet, centrum ellipſeos non eſſe B, nec ejus axem majorem DC. Sed centrum eſt punctum medium S rectæ EF. Nam cum OG, & PL ſint tangentes ellipſeos, & DC eis parallela, hæc biſecatur in B per rectam EF, quæ per puncta contactus tranſit; igitur DC eſt ordinata diametri EF, in cujus medio conſequenter eſt centrum S.

428. Quod poſitionem axium hujus ellipſeos attinet, ea diverſa eſt, pro diverſa ſcilicet circuli objectivi diſtantia tum a plano verticali, tum a plano tabulæ. Et quoniam id ſcire pulchrum magis, quam utile in delineationibus, generatim notaſſe ſufficiat, axem majorem ellipſeos, quæ ſit projectio perſpectiva circuli, non eſſe, niſi projectionem chordæ illius, quæ jungit puncta contactus circuli cum radiis extimis ex oculo ad circulum dictis.

CAPUT III.

Exemplum, & obſervationes generales pro delineationibus Perſpectivis omnis generis.

429. Cum objecti multis partibus conſtantis deſignatio optica facienda eſt, in eo maxime elaboret delineaturi induſtria, oportet, ut ſolerter advertat, quænam lineis ſimiliter ductis comprehendantur, quæ inter parallelas easdem, quæ in iisdem verticalibus, in iisdem diagonalibus &c. conſiſtant, ut ſingulæ in projectione locum debitum ſortiantur, ne errorum numerus, quibus praxis a regularum accuratione deficit, etiam ex hoc capite augeatur.

430. Proponatur exempli cauſa ex regulis Perſpectivæ delineatio ſtylobatæ ordinis Tuſci cum plintho baſeos columnæ facienda, ita, ut trunci planum alterum aſpectabile inclinatum ſit ad planum verticale tabulæ ſub angulo 40° ex ſiniſtra parte, alterum ex parte dextra ſub angulo 50°, ſitque diſtantia anguli quadræ, qui oculo eſt propior, a plano tabulæ unius, & a plano verticali duorum modulorum verſus ſiniſtram. Omnium autem membrorum ſtylobatæ dimenſiones eæ ſint, quas fig. 64 notatas exhibet numeris ſuis, quamvis ipſa deſcriptio illius utcunque rudis eſſe poſſit, quippe cujus nullus uſus alius in præſens eſt, quam ut ſingulorum membrorum nexum & ordinem monſtret.

431. At-

431. Atque ne difficultatum, quæ in delineatione occurrere poſſunt, numerus, ſi ſimul aſpectui objiciantur, tironem abſterreat, eas plurium figurarum deſcriptione partiemur, quo etiam linearum multiplicium confuſioni occurretur. Unde pro aſſumptæ tabulæ magnitudine, ubi marginum ſcalarium conſtructio peracta erit, ducatur ex puncto viſus V (fig. 73) ad diviſionem 2 marginis infimi verſus ſiniſtram lineæ verticalis recta V 2, & per puncta 1, 1 marginum lateralium altera 1 A 1, cujus interſectio exhibet punctum perſpectivum. A anguli ſtylobatæ oculo proximi (389).

432. E puncto A ducantur indefinitæ A 40°, A 50°, exhibentes ſitum planorum conſpicuorum; ex puncto viſus V vero ad marginis infimi diviſionem 7 recta V 7, quæ interſectione ſua cum 1 A 1 determinat A C (393) novem modulorum decreſcentium; tot enim ex ſtylobatæ dimenſionibus quadræ longitudini competunt. Jungatur C cum 20° (medietate 40 graduum, qui complementum ſunt ad 50°) ex parte dextra ſumtis, habebitur projectio E anguli quadræ dextimi (394). Hinc jam facile poſitio tota quadræ A D F E abſolvetur, ducta ex A ad 5° (quæ ſcilicet directio diagonalis eſt) recta, & altera E F ex E ad 40°, interſectio F erit angulus viciniori A oppoſitus. Denique ducatur per F & 50° recta occurrens alteri A 40° in D.

433. Et quoniam quadræ latera æqualia in ichnographia quadratum efficiunt, & reliqua omnia ſtylobatæ membra ſingulorum laterum æquales dimenſiones habent; non ſolum diagonalis quadræ per A & F deſcripta, ſed etiam omnium reliquorum membrorum, quæ in eorum planis concipi poſſunt, verſus 5° ex parte dextra lineæ horizontalis tendere debent, quippe quæ diviſio 45 gradibus abeſt a 40° ex ſiniſtra, & 50° ex dextra ſumtis.

434. Præterea manifeſtum, quod ſi concipiatur planum perpendiculariter erectum ſuper diagonali A 5 projectionis ichnographiæ quadræ, omnes reliquorum membrorum diagonales in eodem ſint futuræ.

435. Atque hinc I°, ut membrorum projecturæ, & retractiones commodius deſignentur, ejusdem diagonalis portionem oculo propiorem in partes optice æquales dividere conſultum eſt (399). Et ne diverſi generis diviſionibus marginis infimi uſus impeditior fiat, adhibeatur pro novis hiſce linea A C margini parallela; cum porro arbitraria ſit puncti ad hanc diviſionem peragendam in linea horizontali electio (396), aſſumatur hoc in 40°, ducaturque inde per E (fig. 74) recta, donec A C ſecet in G, productam, ſi opus ſit. A G dividatur in 9 partes æquales, quoniam lateri quadræ 9 mo-

moduli tributi ſunt. Primæ duæ partes ad A ſubdividantur in minores, uti hic in dimidias. Ad puncta hæc ducantur ex 40° rectæ occurrentes diagonali in H, K, L, quæ conſtituendis projecturis, & retractionibus ſervient, ideoque iisdem numeris notanda ſunt, ac partes in A G correſpondentes.

436. Illud vero hic probe notandum, partes A H, H K, K L, non eſſe projectiones perſpectivas ſemimodulorum, ſed eſſe eas ad ſemimodulos, ut eſt diagonalis quadrati ad latus ſuum, ſeu ut $\sqrt{2}$ ad 1. Dimidii moduli decreſcentes ſunt partes A *h*, *h k*, *k l*. Diviſiones vero lineæ A F deinceps *ſcalam projecturarum* vocabo.

437. II°. Ut dimenſio altitudinum expeditior ſit, producta diagonali F A, uſque dum occurrat margini inferiori in M, erigatur inde perpendicularis indefinita M T, in quam ex diviſionibus marginis inferioris transferantur omnes dimenſiones altitudinum, quæ in prima ſitus & magnitudinum conſtitutione (fig. 64) ſingulis partibus tributæ ſunt, in N, O, P, Q, R, S, T. Rectam M T in ſequentibus *ſcalam altitudinum* appellabo (fig. 74).

438. His ita conſtitutis, erigantur ex quatuor angulis projectionis quadræ perpendiculares indefinitæ A B, D I, F G, E C, (fig. 75), & jungatur punctum N ſcalæ altitudinum cum puncto 5° lineæ horizontis: interſectio cum A B abſcindit altitudinem perſpectivam anguli quadræ in B. Ex hoc eodem puncto B agatur recta ad 40°, quæ determinabit apicem I altitudinis D I anguli quadræ ex parte ſiniſtra conſpicui; item altera ad 50°, quæ anguli dextri altitudinem C præbet. Ducantur ex C ad 40°, & ex I ad 50° rectæ, habebitur earum interſectione in G altitudo anguli quadræ, qui angulo A opponitur. Quod ſi omnia accurate ex regularum præſcripto hactenus facta ſunt, interſectio modo dicta G non ſolum erit in perpendiculari F G, ſed etiam in diagonali per N & 5° tranſeunte: id quod examinis inſtar eſſe debet, tum ut errores ita deprehenſi corrigantur, tum ut deinceps evitentur.

439. Pro regula O N in (fig. 64) ſitus & magnitudinum conſtitutione prima deſignata, ducantur primum diagonales B G, I C (fig. 76); & quia hæc regula o, 6 moduli retrahi debet, accipiatur in ſcala projecturarum pars A H = o, 6. Dein erigatur ex H normalis, occurrens, diagonali G B in D, erit D angulus inferior regulæ, qui ſi jungatur cum 40° & 50°, interſectiones diagonalis I C exhibent ejusdem regulæ angulos K & F. Rectæ porro ex K ad 50°, & ex F ad 40° ductæ, ſe in ipſa diagonali B G ſecabunt, atque illic in E habebitur quartus angulus regulæ. Unde quadrilaterum D K E F baſin regulæ exhibet, qua quadræ incumbit. E quatuor repertis modo punctis erigantur perpendicula indefinita;

tum nectatur punctum O scalæ altitudinum, quod regulæ altitudinem designat, cum 5° recta O 5, quæ occurrens perpendiculari D V in V angulum superiorem regulæ, qui oculo proximus, designat; in Y vero (ubi alteram perpendicularem ex E erectam secat) huic oppositum; rectæ denique ad V ex 40° & 50° ductæ determinant reliquos duos L & X. Et siquidem constructio fuerit exacta, rectæ ex L ad 50°, & ex X ad 40° ductæ se in Y intersecare debent, id, quod examinandæ operationi serviet. Atque hunc in modum projectio optica regulæ perfecta est.

440. Ut jam truncus stylobatæ super his erigatur, fiant diagonales L X, V Y (fig. 77); & quia ex prima magnitudinum constitutione 1, 2 moduli retrahi debet, in scala projecturarum sumatur A C = 1, 2. Erigatur in C perpendicularis indefinita, occurrens diagonali V Y in K, in quo erit angulus inferior trunci, si eum apophyge carere supponamus. Jungantur 40° & 50° cum K, ut in diagonali L X acquirantur B & D, anguli laterales; & ductis ex B ad 50°, & ex D ad 40° rectis obtinebitur etiam quartus I in diagonali V Y, eritque quadrilaterum K B I D projectio perspectiva plani trunci, quo regulæ insidet.

441. E quatuor angulis inventis perpendiculares indefinitæ excitentur K E, B G, D F, I H, & ut singularum altitudo debita abscindatur, ducatur ex 5° ad Q scalæ altitudinum (in hoc enim punctum cadere altitudo trunci supponitur) recta 5° Q, quæ in E angulum anteriorem determinat. Ex E ducantur porro E 40°, & E 50°, quæ in G & F abscindunt angulos laterales; rectæ denique ex G ad 50°, & ex F ad 40° ductæ intersectione sua H in ipsa Q 5° dant angulum posticum, oculo non conspicuum.

442. Ut apophygis trunci describatur, jungat recta punctum P scalæ altitudinum, quod assumtam altitudinem apophygis æquat, cum 5°, quæ in *k*, ubi perpendiculum C K productum secat, eandem optice determinat; hinc porro rectæ ad 40° & 50° ductæ, uti superius in projectione regulæ & quadræ factum, apophygis altitudines in reliquis angulis dabunt. Denique describantur curvæ per *b* & L, per *d* & X, per *k* & V transeuntes, quarum prima & postrema cavitatem parti sinistræ obvertant, cum oculus ad dextram stylobatæ sit constitutus.

443. Ventum jam est ad coronidem stylobatæ, cymatio Lesbio, altitudine R Q (fig. 64) & regula S R constantem. Itaque plano supremo trunci (fig. 78) rite delineato fiant diagonales G F, E H, paullum ultra truncum excurrentes, cum cymatium projecturam habeat. Planum porro inferius, quo cymatium trunco insidet, ex prima magnitudinum & situs constitutione retrahi debet o, 9 modu-

moduli. Unde ex puncto B ſcalæ projecturarum erigatur perpendicularis B C, occurrens diagonali E H productæ in C; erit C angulus anterior huius plani, ex quo facile reliqui in I & L diagonalis G F, & in K diagonalis E H productæ reperientur.

444. Et quoniam regulæ latera ſunt in iisdem planis cum lateribus quadræ baſeos ſtylobatæ, producantur indefinite perpendicula angulorum V, A, X quadræ, qui ſcilicet videri poſſunt. Ex puncto R ſcalæ altitudinum ducatur R 5°, quæ interſectione in P cum perpendiculo A P, abſcindit angulum inferiorem regulæ; quod ſi altera quoque ex S ad 5° ducatur (eſt autem R S regulæ altitudo) ſupremus quoque angulus ejusdem in *p* habebitur. Ex *p* & P rectæ ad 40°, & 50° ductæ reliquos *n* N, *o* O præbent, ut alias factum.

445. Quia planum ſupremum cymatii intra regulam o, 3 moduli ex aſſumptis magnitudinibus retrahendum eſt, ducta diagonali N O (fig. 79.), atque erecta ex o, 3 ſcalæ projecturarum perpendiculari, quæ R 5° ſecat in *c*, habetur angulus ſupremus cymatii *c*; hinc vero rectæ ad 40°, & 50° ductæ, ubi diagonalem N O in *i* & *l* ſecant, alios quoque determinant. Deſcribantur curvæ *i* I, *c* C, *l* L, eæ cymatii projectionem abſolvent.

Supereſt modo plinthus baſeos columnæ. Et cum eadem quantitate, ac truncus ſtybolatæ, retrahatur, producantur rectæ angulares trunci indefinite. Punctum altitudinis plinthi T in ſcala acceptum jungatur cum 5° recta T 5°, erit interſectio E cum producto angulo trunci, angulus ſupremus plinthi, qui ſi nectatur cum 40°, & 50°, etiam G & F reliquos conſpicuos determinabit.

446. Hisce ſubjungamus obſervationes quasdam in præcedentes operationes.

I°. Si in prima magnitudinum & ſitus conſtitutione ſit projectura quædam ultra angulum infimum baſis, cui totum objectum inſiſtit, excurrens, ea in ſcala projecturarum deſignetur diviſione cis punctum A.

447. II°. Si margo ſupremus tabulæ eodem modo, ac infimus, diviſus ſit, ut N. 372 inſinuatum eſt, facilis erit omnium perpendicularium occurrentium erectio, quippe quæ fiet, ſi regula ita ad punctum, ex quo perpendicularis excitanda eſt, applicetur, ut per easdem utriusque marginis diviſiones tranſeat.

448. III°. In Perſpectiva practica diagonalium inſignis eſt uſus, tum ut angulorum in polygonis ſitus ad examen revocetur, tum etiam ut reperiantur polygonorum centra. Sic in allato exemplo operationum bonitas examinari potuit hunc in modum, obſervando ſcilicet, an omnium diagonalium, quæ ductæ ſunt, interſe-

ctiones ſint in eadem recta, ad lineam verticalem parallela, cum omnes debeant in axe ſtybolatæ, cujus projectio eſt linea perpendicularis, eſſe.

449. IV°. Interſectio diagonalium etiam adhiberi poteſt ad reperiendum in tabula punctum, in quod cadit perpendiculum ex apice alicujus pyramidis, turris campanariæ, alteriusve in cuſpidem coeuntis, aut tentorii militaris &c demiſſum.

450. V°. In diagonalibus commodiſſime etiam projecturæ, & retractiones diverſarum partium objecti determinantur; attamen hic uſus, quem præcedente exemplo oſtendimus, ad quadrata ſolum, & polygona regularia reſtringendus eſt; projecturæ enim & retractiones ad ſingula latera æquales quadrata aut polygona regularia concentrica conſtituunt, ideoque earum anguli ſunt in diagonalibus per centra planorum, quibus inſiſtunt, tranſeuntibus.

451. Quod ſi itaque hæc plana quadrata non ſint, ſed ut plerumque evenit, parallelogramma rectangula, velut A B C D (fig. 72), ubi A B, C D ſunt 3 ½ modulorum, & B C, A D 4 ½ decreſcentium; accipiantur in projectionibus laterum in ſe longiorum partes A E, B F; D G, C H optice æquales lateribus in ſe minoribus, in noſtro exemplo 3 ½ modulorum decreſcentium, ut in plano A B C D deſcribantur duorum quadratorum A B F E, D C H G projectiones, quarum diagonales B E, A F; G C, D H, uti ſuperius, ad angulos projecturarum, & partium retractarum reperiendos adhiberi poterunt. Commodum quoque fuerit, ſi ex his diagonalibus aliqua dividatur, & *ſcalæ projecturarum* vices agat.

452. At ſi planum ſit polygonum irregulare, tum loco rudioris illius partium adumbrationis, quæ veras magnitudines, ac ſitum ſolis notis numericis indicat, accurata, & geometrica conſtructio facienda eſt, projecturis & retractionibus ex veris dimenſionibus conſtitutis, & id quidem ope ſcalæ exactæ, magnique partium numeri, ac tantæ magnitudinis, ut etiam minores partes rite accipi poſſint. Præterea binæ perpendiculares in hoc plano ducendæ ſunt, quarum altera ſitum tabulæ, altera plani ejusdem verticalis habeat, ut ope circini ſingulorum punctorum ab his diſtantia accipi, & in ſcalam transferri poſſit, eorumque projectio perſpectiva juxta Problema V vel XII fieri.

CAPUT

CAPUT IV.

Apparatus neceſſarius, quando magnus objectorum ſitu, & magnitudine datorum numerus optice delineandus eſt.

Frontem ſcenæ appello omnia ea objecta, quæ in tabula ceteris anteriora, & velut in fronte, integra exhibenda ſunt.

453. I°. Cum magnus objectorum numerus eſt, quæ in tabula exhiberi debent, ſive, quod eodem redit, quando objectum repræſentandum ingens eſt, v. g. ædes magnificæ, palatium quodpiam, vel hortus cum ſuis ambulacris &c. diſtantiis partium inter ſe, ſitu, ac magnitudine conſtituta, ſeu rudiori rerum delineandarum adumbrationi adſcriptis numeris dimenſionum, ſeu in tabellam ex ordine relatis, primo indagandum eſt, quantum a tabula frons ſcenæ remota eſſe debeat. Hoc ut rite fiat, ſumenda eſt ex tabella magnitudinum parata objecti ceteris vicinioris, magisque eminentis altitudo, & ſequens analogia facienda:

Ut altitudo tabulæ
Ad radium principalem;
Ita altitudo objecti
Ad diſtantiam ab oculo, in qua conſtituendum eſt objectum, ut integrum in tabula exhiberi poſſit.

Exempli cauſa: ſi ſupponamus, AB (fig. 65) eſſe objectum viciniſſimum, ſimulque altiſſimum, ad 16 modulos aſſurgens; altitudinem tabulæ TR continere 5 modulos; radium principalem OT denique 10 modulis æqualem: erit RT: TO = BA: AO. Subductis calculis reperitur AO = 32 modulis, ideoque AT = 22 modulis. Igitur frons ſcenæ 22 modulis a plano tabulæ diſtare debet, ut objectum ei proximum, & ceteris altius integrum videri poſſit.

454. II°. Ulterius videndum, an ea ſit tabulæ latitudo, ut totam frontis ſcenæ amplitudinem capiat. Quem in finem fiat proportio:

Ut diſtantia objecti ab oculo per præcedentem analogiam reperta
Ad radium principalem;
Ita eſt latitudo frontis ſcenæ
Ad latitudinem, quam tabula habere debet, ut illam capiat.

455. Eſto AB (fig. 67) latitudo frontis ſcenæ = 48 modulis; O locus oculi ob objecto AB 32 modulis diſtantis = OC; DE latitudo tabulæ. Si tabula totam frontis latitudinem exhibet, radii ex oculo ad extrema utrinque latitudinis puncta ducti per ipſos margines tabulæ ad D, & E tranſeunt. Sunt autem triangula AOB, DOE ob parallelas AB, DE ſimilia; itaque perpendiculares OC,

OF ſunt magnitudines homologæ; & hinc OC: OF = AB: DE. Inſtituto calculo invenitur DE = 15 modulis. Ergo latitudo tabulæ 15 modulorum eſſe debet, ut in ea tota frontis ſcenæ latitudo & altitudo repræſentari poſſit. At ſi v. g. tabula non eſſet, niſi 12 modulos lata, frons ſcenæ longius removeri deberet, novaque diſtantia ex ſequente analogia, quæ prioris inverſa eſt, reperiretur:

Ut Latitudo tabulæ
Ad radium principalem;
Ita eſt latitudo frontis ſcenæ
Ad diſtantiam ejusdem ab oculo, ut tota in tabula exhiberi poſſit.

In priore hypotheſi invenietur 40 modulorum, ut adeo a tabula 30 modulis removeri deberet.

456. I°. Ut linea horizontalis, & verticalis tabulæ determinetur, eligendum eſt punctum in fronte ſcenæ, cui oculus ſpectatoris directe opponi debet; erit igitur certa quædam ejus puncti diſtantia a latere alterutro hujus frontis, tum etiam altitudo ſupra planum geometricum: utraque ſi e tabella magnitudinum ab initio conſtitutarum ſumatur, illa dabit diſtantiam lineæ verticalis ab alterutro margine laterali tabulæ; hæc vero diſtantiam lineæ horizontalis a margine inferiore. Hinc duæ, quæ ſequuntur, fiant analogiæ:

Ut diſtantia oculi a puncto in fronte ſcenæ aſſumto
Ad radium principalem;
Ita eſt diſtantia ejusdem puncti ab alterutro latere frontis ſcenæ
Ad diſtantiam lineæ verticalis a margine tabulæ ad eam partem ſumto, ad quam acceptum eſt latus ſcenæ.

Eſt enim CO : FO = CB : FE.
Dein . . . .

Ut diſtantia oculi a puncto in fronte ſcenæ aſſumto
Ad altitudinem ejusdem puncti ſupra planum Geometricum;
Ita eſt radius principalis
Ad diſtantiam lineæ horizontalis a margine inferiore tabulæ.

Etenim ſi CE (fig. 66) repræſentet planum geometricum, CA altitudinem puncti in fronte ſcenæ aſſumti, DF tabulam, patet eſſe OA : AC = OT : DT.

457. Quod ſi altitudo oculi ſupra planum geometricum alia commodior viſa fuerit, quam puncti in fronte ſcenæ aſſumti, ita ut hoc punctum ſolummodo ad ſitum lineæ verticalis determinandum adhibeatur, poſtrema analogia hunc in modum ex iisdem triangulis AOC, ODT conſtituenda erit.

Ut diſtantia oculi a verticali ad planum geometricum, quæ per punctum in fronte ſcenæ aſſumptum tranſit,

Ad

Ad altitudinem oculi ſupra planum geometricum;
Ita eſt radius principalis
Ad diſtantiam lineæ horizontalis a margine inferiore tabulæ.

458. IV°. Si frons ſcenæ AB (fig. 69) non ſit parallela plano tabulæ, ſed quantitate data BAL inclinata; uti ſi frons ædificii oblique oculo objicienda ſit, quæ totam tabulæ latitudinem exæquet; calculi præparatorii non nihil plus difficultatis habent: quæ tamen evitari poteſt, diverſis dimenſionibus tabulæ aſſumtis, dum tentando eæ reperiantur, quæ propoſito faciant ſatis; ſi ſcilicet prius quatuor extrema frontis ſcenæ puncta optice deſignentur, & ex trapezio inde orto tabulæ altitudo, & latitudo conſtituatur. Quod ſi lubeat eas calculo directe invenire, is ſequente ratione ineundus eſt.

459. Ubi punctum F, per quod planum verticale tranſire debeat, conſtitutum eſt (fig. 69), & ſeu ex calculo trigonometrico, ſeu ex conſtructione geometrica ſcalæ accuratæ ſubſidio magnitudo linearum AL, FM, AH, FH tenetur, ſit $OP=r$, $DE=t$, $PE=x$: eſt nempe PE diſtantia lineæ verticalis a tabulæ margine E, qua mox ſubjiciendo calculo reperta, cetera facile invenientur. Sit præterea $BL=b$, $FM=HL=d$, $AH=f$. Ex triangulis BGL, OPE ſimilibus habetur $OP:PE=BL:LG$, ſive $r:x=b:\frac{bx}{r}=LG$. Hinc $HG=d-\frac{bx}{r}$. Dein ob ſimilitudinem triangulorum HGO, PEO, eſt $PE:OP=HG:HO$, vel $x:r=d-\frac{bx}{r}:HO=\frac{dr}{x}-b$. Denique quia ſimilia ſunt triangula AHO, DPO, eſt $DP:PO=AH:HO$, aut $t-x:r=f:HO=\frac{fr}{t-x}$. Ex duplici valore de HO fiet hæc æquatio $\frac{dr}{x}-b=\frac{fr}{t-x}$, & facta reductione $xx-\frac{drx-btx-frx}{b}=-\frac{drt}{b}$; aut ſi brevitatis gratia ponatur $\frac{dr+bt+fr}{b}=a$, erit $xx-ax=-\frac{drt}{b}$. Unde $x=\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa-\frac{drt}{b}\right)}=PE$. Ex PE datur etiam PD; inde $PD:OP=HA:HO$; eſt vero $PF=HO+HF-OP$: igitur habetur quoque diſtantia puncti viſus tabulæ P a puncto F in fronte ſcenæ, per quod planum verticale tranſire debet.

460. V°. Circa ſitum, & altitudinem oculi illud hic advertendum, in tabulis, quæ ornandis cubiculis deſtinantur, aliisque id genus pictoris, altitudinem oculi commode 7 vel 8 pedum ſupra planum geometricum aſſumi, niſi quando magnus objectorum numerus

merus in eadem tabella repræſentandus eſt, v. g. integer hortus. Tunc enim major tribuenda eſt oculo altitudo, ne partes remotiores nimium contrahi debeant, & confuſe appareant. Id genus delineationes opticas Galli ad *viſum volucris* factas dicunt, quod tanta aſſumatur oculi altitudo, quaſi ex ſublimi cum avibus objectum intueri liceret.

461. Non igitur altitudo oculi ad communem hominis ſtaturam exigenda eſt, ut 5 vel $5\frac{1}{2}$ pedum ſit, niſi tabula ex magna diſtantia ſpectari debeat, ac intuentibus illudere, ut planum in ea depictum, cum ſolo, in quo conſiſtunt, in directum jacere, ac ultra tabulam excurrere arbitrentur. Hujusmodi ſunt tabulæ, quæ in fine ambulacri vel horti conſtitutæ, eorum limites longe ultra protenſos exhibent. In theatrorum ornatu oculi locus prope medium amphitheatri ſumitur, atque ad altitudinem trium, quatuorve pedum ſupra libellam illius, ut ſuggeſtum theatri directe excurrere, & plano perſpectivo continuum videatur.

462. Quod univerſim hac in re dici poteſt, illud eſt, talem ſemper oculi altitudinem eligendam eſſe, ut quam diſtinctiſſime videantur objecta, quorum projectio tabulæ maximam pulchritudinem conciliat. Hoc autem non aliter determinari poteſt, quam ſi prius tota ſcena diverſis modis adumbretur rudius, ut oculo diverſimode collocato apparitura eſt. Etenim certiſſimum eſt *ideo delineationem fieri ex legibus Perſpectivæ, ut imagines pulchræ ſint; at vero non ideo omnes imagines eſſe pulchras, quod earum delineatio ad leges exacta ſit.* Eſt hæc ſors omnium quidem artium, maxime tamen earum, quarum principia ex arbitratu noſtro non pendent.

463. VI°. Longitudo radii principalis diſtantiæ objectorum a tabula proportionata eſſe debet, ne rerum delineandarum partes aut contrahantur nimium, aut a figura ſua naturali diſſideant. Et ſi quidem tabula nec nimium procul ſpectari debeat, nec uni affigi loco, ſequens teneri poteſt regula: *radius principalis nec minor eſto dimidia, nec longior integra diagonali tabulæ, ſi objecta præcipua integra exhibenda ſunt.*

464. Nam experientia nos docet, uno obtutu, & oculo immoto, non poſſe objectum videri integrum, ſi angulus a radiis ab objecti extremis ad oculum ductis comprehenſus ſit obtuſus, nec ſatis diſtincte partes ejus cerni poſſe, ſi idem 60 gradibus minor ſit. Hinc vero facile patet, quod ſi oculus F (fig. 68) a medio tabulæ D diſtet quantitate D F æquali diagonali B C, radii ex oculo ad angulos tabulæ B, & C ducti, F B & F C, excedant diagonalem B C (cum hypotenuſa F C major ſit catheto F D = B C); atque ideo crura trianguli B F C paullo longiora ſunt, quam in triangulo æquilatero; igitur angulus

lus ad oculum minor est 60 gradibus. (Reperitur facili calculo 53°, 8′).

465. At si oculus E distet dimidia diagonali BC = ED, triangula EBD, ECD sunt rectangula, & isosceli; igitur anguli BED, CED sunt singuli 45 graduum, & totus BEC 90 graduum.

466. In majoribus projectionibus, ut sunt picturæ theatrales, hortenses, ambulacrorum &c, quæ procul spectandæ sunt, nec subtiliore elaborandæ penicillo, nec etiam objecta integra exhibere debent, distantia oculi ex situ loci determinanda est.

Caput V.

De Perspectiva Umbrarum.

467. Regulis umbras optice exhibendi ars Pictoria nequaquam carere potest, maxime quando imagines referre debent corpora a sole, aliove vicino lumine colluſtrata, ut umbrarum nigriorum limites non possint non in spectatoris oculos incurrere.

468. Punctum lucidum (sive a quo corpus opacum illustratum umbram in partem directe oppositam projicit) potest esse vel trans tabulam, vel in ejusdem plano, vel cis istud.

469. Quando punctum lucidum est trans tabulam, fieri potest, ut vel sit ante corpus opacum, vel post istud; si primum, umbra ita exhibenda est, ut intelligatur recedere a tabula, ideoque ejus projectio versus lineam horizontalem dirigetur; si hoc, sitque simul lucidum opaco altius, umbra versus spectatorem cadet, & ejus delineatio versus marginem inferiorem tabulæ verget; at si punctum luminosum sit depressius corpore illuminato, hujus umbra quidem rursus ita exhibenda est, ut appareat versus spectatorem projici, attamen in plano tabulæ versus marginem superiorem delineanda est.

470. Si punctum lucidum sit cis tabulam, aut inter oculum, & tabulam existere intelligitur, aut a tergo spectatoris. In utroque casu umbræ recedunt a tabula, & projectio earum versus lineam horizontalem dirigitur.

471. Si punctum lucidum sit Sol aut Luna, hoc supponi nequit, nisi vel sit trans tabulam post objecta, vel in plano tabulæ, vel cis tabulam a tergo spectatoris: neque enim fieri potest, ut sit trans tabulam, & ante corpus delineandum, aut intra tabulam & oculum, nisi simul sit in ipso zenith alicujus puncti inter tabulam & corpus opacum, vel inter oculum & tabulam siti; at quia distan-

tia horum ſiderum fere immenſa eſt, hi caſus locum non habent, niſi quando ſimul ſunt in zenith corporum delineandorum, tabulæ, & oculi, ideoque in plano tabulæ.

472. Ex his apparet, umbras corporum a ſole vel luna illuminatorum facilius determinari, quam quæ ex vicina alia luce, v. g. lampadis, vel cerei ardentis, oriuntur.

ARTICULUS I.

De proprietatibus umbrarum, quarum ratio in Perſpectiva habetur.

473. Quoniam proprietates umbrarum generales jam Parte I demonſtravimus, ſatis eſt, ſi modo eas hic afferamus, quæ ad Perſpectivam attinent.

474. THEOREMA I. *Umbræ corporum a ſole oriente vel occidente illuminatorum in planum horizontale projectæ; ſeu univerſim umbræ corporum, quando ſol aut punctum lucidum eſt in eodem plano, cui illa inſiſtunt, indefinitæ ſunt.*

Nam longitudines umbrarum ſunt (37) ut cotangentes altitudinum corporis lucidi ſupra planum illuminatum; igitur quando hæc altitudo nulla eſt, hoc eſt, quando lucidum eſt in plano, in quo ſupponitur corpus opacum, cotangens altitudinis eſt infinita.

475. THEOREMA II. *Umbræ corporum ex luce ſolari intercepta ſunt ejusdem longitudinis, ac corpora, ſole elevato ad 45°.*

Umbræ ſunt longitudinis corporum dimidiæ, partes tertiæ, quartæ &c, ut altitudo ſolis fuerit 63°, 26′, vel 71°, 34′, aut 75°, 58′ &c. Vel vero ſunt duplæ, triplæ, quadruplæ &c ſole elevato ad 26°, 34′, ad 18°, 26′, ad 14°, 2′ &c, quæ omnia manifeſta ſunt ex tabulis tangentium.

476. THEOREMA III. *Umbra rectæ objectivæ cadens in planum quodcunque, eſt etiam optice recta.*

Nam punctum lucidum eſt vertex, & radii per extrema rectæ objectivæ tranſeuntes, ſunt latera trianguli, cujus baſis eſt recta objectiva: umbra porro hujus rectæ eſt planum trianguli ultra baſin productum: atqui hoc planum nequit per alterum planum occurrens ſecari, niſi linea recta (Elem. 629.): & hæc ſectio eſt projectio perſpectiva umbræ a linea objectiva in planum occurrens triangulo cadentis; igitur &c.

477. COROLL. *Datis itaque duobus punctis, per quæ umbra a linea recta projecta tranſit, datur ſitus umbræ.* Et viciſſim *ut inveniatur ſitus umbræ*

bræ in planum quodpiam cadentis, reperienda ſunt duo puncta illius plani, per quæ umbra tranſit.

478. THEOREMA IV. *Umbra corporis opaci a puncto lucido illuminati eſt truncus pyramidis, quem complet pyramis verticem punctum lucidum, & baſin partem illuminatam corporis opaci habens. Extenditur indefinite in plagam oppoſitam puncto lucido, donec alterius corporis ſuperficie intercipiatur; & ſpatium, quod in hac ſuperficie occupat, eſt umbra projecta a priore corpore illuminato.*

Theorematis evidentia demonſtratione non eget.

479. COROLL. I. *Umbra corporis a puncto lucido illuminati eo latior eſt, quo lucidum illuminato propius, & ſuperficies umbram excipiens ab opaco remotior eſt.*

480. COROLL. II. *Umbra corporis illuminati a lucido infinite diſtante, ut a ſole vel luna, eſt prisma indefinite longum, cujus baſis altera eſt ſuperficies illuminata corporis, altera ſuperficiei umbram excipientis illud ſpatium, quod in eadem umbra occupat.* Hoc enim in caſu radii a lucido venientes ſunt inter ſe paralleli.

481. COROLL. III. *Si ad penumbram non attendatur, umbræ linearum rectarum exceptæ plano iis parallelo, ſunt rectæ, & lineis, a quibus projiciuntur, æquales.* Duo enim radii per extrema ejusmodi lineæ tranſeuntes ſunt inter ſe paralleli, ideoque cum linea & ejus umbra parallelogrammum conſtituunt. Ex hoc vero deducitur *primo, umbras corporum a ſole illuminatorum habere eandem latitudinem cum objectis ſuis directe ſoli expoſitis. Secundo: Projectiones perſpectivas umbrarum ſuis rectis objectivis parallelarum debere* (363) *ad eadem puncta accidentalia concurrere, ad quæ convergunt projectiones ipſarum linearum lumen intercipientium.*

482. COROLL. IV. Perimeter umbræ nil aliud eſt, quam projectio quædam Perſpectiva, pro qua locus oculi eſt punctum lucidum, objectum perimeter ſuperficiei illuminatæ, tabula illa ſuperficies, quæ umbram excipit.

483. THEOREMA V. *Umbra a linea verticali in planum quodvis projecta, ſi producatur, tranſit per illud punctum plani, in quod cadit perpendiculum a puncto lucido demiſſum.*

Sit (fig. 70 & 71) L punctum lucidum; P vel *p* punctum in plano ſeu inclinato, ſeu ad libellam poſito, infra aut ſupra lucidum, in quod cadit perpendiculum; verticales in hoc plano poſitæ ſint AB, vel CD; dico earum umbras FB, ED productas per P vel *p* tranſire. Cum enim rectæ AB vel CD ſint verticales, plana quoque triangulorum umbræ FAB, EDC erunt verticalia; atqui hæc ſi producantur, per L tranſire debent, ideoque ſeſe in verticali LP interſecant: ergo etiam latera FB, ED producta tranſeunt per P vel *p*.

484. COROLLARIUM I. *Si lucidum* L *ſit ſol vel luna, puncti, in quod cadit perpendiculum in planum Geometricum inde demiſſum, projectio eſt in linea horizontali.* Non enim, niſi ad diſtantiam infinitam a tabula, perpendicularis ex ſole ad planum horizontale demiſſum huic plano occurrere poteſt.

485. COROLLARIUM II. *Si plura lucida eandem lineam verticalem illuminant, tot fiunt umbræ, quot ſunt lucida, quæ ſingulæ, ſi producantur in plano, in quo excipiuntur, tranſeunt per puncta, in quæ cadunt perpendicula a lucidis oppoſitis demiſſa.*

ARTICULUS II.

De umbris corporum, quando ſol vel luna eſt in eodem plano cum tabula.

486. I°. Dum ſol in plano tabulæ & ſimul in horizonte verſatur, uti dum oritur vel occidit, omnes corporum umbræ in planum Geometricum projectæ, ob debilitatem lucis, ſunt dilutiores, ſimulque infinitæ (474). Quare earum projectiones opticæ lineæ horizontali tabulæ parallelæ protenduntur; & ſiquidem occurrat ſuperficies quædam ſupra horizontem erecta, in ea ad altitudinem corporibus lumen intercipientibus æqualem aſſurgunt. Cetera ex figura hic annexa facile intelliguntur. Vide fig. 80.

487. II°. Quando ſol angulo dato ſupra horizontem elevatus eſt, ſitus umbræ determinatur parallela ad lineam horizontalem ex pede corporis illuminati ducta, v. g. (fig. 81) ex *a*; dein ad apicem ſupremum *c* conſtruatur cum perpendiculo *c a* angulus æqualis complemento altitudinis ſolis; recta *c b* terminabit umbram *a b*, angulo *c b a* altitudini ſoli æquali; niſi forte obſtaculum opponatur, velut ſolidum A, vel murus *hm*. Hoc ſi fiat, umbra ex *d* perpendiculariter aſcendet in ſolidi plano *de* (planum enim trianguli umbræ *cab* verticale a plano occurrentis ſolidi itidem verticali non poteſt aliter, quam linea perpendiculari ſecari); inde in ſuperiore plano ſolidi parallele ad horizontem procurret ex *e* in *f*; tum rurſus in *g* priorem ſitum reſumet usque ad *i*. Hinc in muro verticali *hm*, usque dum in *k* pertingat ad lineam *c b*, aſſurget. Umbra ſolidi A eodem modo definitur, quem attulimus pro corpore *c a*, dum nullum obſtaculum occurrit.

488. OBSERVA. Quando altitudo ſolis arbitraria aſſumi poteſt, opus non eſt angulo ad *c*, ſed definitur longitudo umbræ ex ratione, quam ad corporum altitudinem habere ſupponi poteſt.

ARTI-

ARTICULUS III.

De umbris corporum, quando ſol vel luna eſt poſt planum tabulæ.

489. Si ſol oriens vel occidens ſit in ipſo horizonte, ſcire oportet (aut ſi arbitrarium eſt, aſſumere) quantum planum verticale per oculum & centrum ſolis tranſiens a plano verticali tabulæ declinet, hoc eſt, quonam diviſionis lineæ horizontalis puncto centrum ſolis ſit conſtituendum. (Id vero punctum *azimuthum ſolis* vocare licet). Hoc ubi in linea horizontali, etiam producta, ſi neceſſe ſit, habetur, ipſe ſol delineari poteſt dimidio diſco ſupra lineam horizontalem eminens, 24 vel 25 minutis ex illis diviſionibus utrinque a centro pro radio ſumtis: apparet enim ſol major in ortu ſuo, vel occaſu, quam dum ſupra horizontem elevatus eſt.

490. Punctum lineæ horizontalis, in quo eſt centrum ſolis, eſt punctum accidentale umbrarum a lineis verticalibus projectarum (483). Umbræ vero iſtæ debiles ſunt, & verſus marginem inferiorem tabulæ indefinite extenduntur, niſi quando illis planum aliquod verticale, aut aliud inclinatum, v. g. murus quispiam, aut corpus quodvis opponitur.

491. Sit exempli cauſa azimuthum ſolis occidentis 40°. Umbra corporis A (fig. 83) terminatur utrinque linea recta ad punctum 40° tendente, ac in plagam huic oppoſitam indefinite producta. Umbra item cylindri B comprehenditur duabus rectis verſus 40° convergentibus, verum ubi ad gradum infimum obſtaculi pertingit, verticaliter per *e i* aſcendit; tum in plano ſuperiore horizonti parallelo directione *i o* ad 40° vergente extenditur; ex *o* rurſus uſque in *l* perpendiculariter erigitur; ex *l* in *u* ſitum verſus 40° iterum acquirit; tandem ex *u* in *r* in plano verticali aſſurgit, ibique terminatur, linea *r u* optice altitudini cylindri æquali.

492. II°. Si ſol ſit ſupra horizontem, ſumendum eſt ejus azimuthum in linea horizontali, ut habeatur punctum accidentale umbrarum a lineis verticalibus projectarum. Tum vero ſeu ex data, ſeu ex aſſumta (ſi arbitrio noſtro permittitur) ſolis altitudine ratio longitudinis umbrarum ad altitudinem corporum determinanda eſt, quæ eadem eſt (474), ac ſinus totius ad cotangentem anguli altitudinis ſolis. Uti ſi ſol ponatur 20° ſupra horizontem, & verſus ſiniſtram a plano verticali declinet 40°, reperitur cotangens 20° ad ſinum totum, ut 2,75 ad 1, ſeu longitudo umbræ in plano horizontali æqualis $2\frac{3}{4}$ altitudinis corporis. Eſto itaque A C (fig. 82) corpus verticaliter erectum: ducatur ex ejus

basi A recta A B per punctum Z 40 graduum transiens, fiatque perspective æqualis $2\frac{3}{4}$ A C: si nullum objiceretur impedimentum, umbra foret A B. At quia isthic interponitur prisma *pk*, umbra ex A ad O producta, ex basi prismatis perpendiculariter per O E attollitur: dein directione E I ad 40° servata superius prismatis planum emensa rursus in F comparet trans umbram a prismate projectam, atque ad B usque, situ eodem procurrit, quem primo habuit.

493. Ex figura hac intelligitur, umbram prismatis determinari, ductis primo *p* G, Q N, R M ex puncto accidentali 40°, & indefinitis; tum facta una earum, v. g. Q N, $2\frac{3}{4}$ altitudinis Q T optice æquali, & ducta M N ad punctum visus S, quod nempe latus prismatis *k* T ad idem dirigatur (481); tandem facta N G ad lineam horizontalem parallela, cum latus T D situm eundem habeat.

494. OBSERVA I. Si quis locum solis in tabula, producta, si necesse sit, exhibeat, velut in M, terminus umbræ B corporis A C obtinetur, si regula ad M & C applicata secetur recta per 40° & pedem corporis transiens Z B in B. Eodem modo punctum N umbræ solidi *p k* reperitur.

495. OBSERVA II. Hæc methodus commodissima est, quando altitudo solis nostro arbitrio relinquitur; at si hæc determinata sit, quæri prius debet M Z modo superius (411) expositio, & demonstrato.

ARTICULUS IV.

De umbris, quando sol est a tergo spectatoris.

496. Cum sol a tergo spectatoris est, umbræ eodem modo determinari possunt, ac in superiore articulo, si concipiatur esse in puncto diametraliter oppositio infra horizontem. Unde notari debet gradus azimuthi solis in linea horizontali in parte opposita illi, in qua reipsa versatur respectu plani verticalis. Tum si res poscat, inito calculo eruitur, seu, si nihil determinetur, assumitur ratio longitudinis umbræ ad altitudinem corporum; indeque longitudo umbrarum optice ex scala decrescente sumitur, situ earum a pede corporum lumen intercipientium semper versus punctum azimuthi directo.

497. Potest quoque locus solis in tabula exhiberi, altitudine arbitraria, si nihil præscribatur, aut Geometrice determinata, si data sit, ut limites umbrarum reperiantur. Sit exempli causa sol a ter-

a tergo ſpectatoris ad partem ſiniſtram 40° a plano verticali, & 20° ſupra horizontem: oporteat invenire umbram perticæ verticaliter erectæ A C (fig. 84). Ex A ducatur ad Z (40° verſus dextram in linea horizontali) recta A Z. In Z M, ad horizontalem S Z normali, accipiatur locus M centro ſolis oppoſitus, ita ut Z M ſit projectio perſpectiva arcus cæleſtis verticalis 20 graduum: jungantur M & C: erit terminus umbræ in B.

498. Etenim umbra ex luce ſolari a quocunque puncto intercepta, ſi nullum interponeretur obſtaculum, directe projiceretur in punctum ſoli diametraliter oppoſitum in cælo: ergo punctum hoc ſoli oppoſitum, punctum plani umbram intercipientis, & punctum, in quo exiſtit ſol, ſunt in eadem recta.

ARTICULUS V.

De umbris corporum, quando lucidum vicinum eſt, uti candela ardens.

499. I°. *Quando lucidum eſt poſt tabulæ planum.*

Ut umbræ expedite inveniantur, in ipſa tabula, producta, ſi opus eſt, exhibeatur lucidum ex regulis perſpectivæ, una cum projectione puncti in plano Geometrico, in quod perpendiculum a lucido demiſſum cadit, quod *pedem lucidi* deinceps vocabimus: eſt enim hoc punctum accidentale omnium umbrarum, quæ ex intercepta luce hujus corporis oriuntur. Ceterum methodus umbras hujusmodi exhibendi eadem omnino eſt, ac Art. III deſcripta; illud modo advertendum, quod ſi lucidum ſit humilius, quam corpus opacum, umbra hujus in lacunar (ſi quod in tabula repræſentetur) projecta dirigatur verſus punctum, in quod verticalis ex pede lucidi erecta incidit.

500. II°. *Quando lucidum eſt in plano tabulæ.*

Rurſus lucidum in tabula deſignandum, quod facile admodum eſt; quoniam enim nullam a tabula diſtantiam habet, ejus projectio tantundem a linea verticali, & horizontali diſtat, quantum ipſum a plano horizontali & verticali. Pes porro lucidi erit in ipſo inferiore margine tabulæ, ideoque umbræ eodem prorſus modo, ac prius, determinantur.

501. III°. *Quando lucidum eſt intra oculum, & planum tabulæ.*

Eadem hic quoque adhibenda methodus, lucido ejusque pede in tabula deſignatis. Quare in analogia ſolutionis generalis (351) ponendum eſt: *ut radius principalis minus diſtantia puncti lucidi a tabula* &c loco *plus diſtantia* &c. Quod ſi enim ſumatur planum A S D I

(fig.

(fig. 46) pro tabula, & *asdi* pro plano tabulæ parallelo, in cujus puncto *d* sit lucidum, liquet, A O esse radium principalem; A *a* distantiam lucidi a tabula; *as*, seu *id*, ejusdem distantiam a plano horizontali; *ai* sive *sd* denique ejus distantiam a plano verticali: unde erit O *a* (vel O A — *a* A) : O A = *ai* (vel *sd*) : A I (vel S D) = *as* (vel *id*) : A S (vel D I). Observandum verò, lucidum nec debere esse multum supra planum horizontale, nec multum a plano verticali remotum, nec etiam nimis vicinum plano tabulæ parallelo, quod per oculum transit; alias illius projectio longe extra tabulæ margines erit: & pedis quidem lucidi projectio semper infra marginem infimum tabulæ cadit.

502. OBSERVA. Quoniam lux hunc in modum incidens non parum decoris imaginibus adfert, si arbitraria sit lucidi collocatio, ea assumatur tum ab horizontali, tum a verticali plano distantia, ut ejus projectio paullo extra alterutrum marginem lateralem tabulæ, ac non nihil supra lineam horizontalem cadat.

503. *Quando lucidum est a tergo spectatoris.*

Situs hic lucidi commodissimus quidem est, ut objecta aliquantum remota distincte videantur: verum determinatio umbrarum difficillima evadit, quod neque lucidi, neque ejus pedis projectio in tabula fieri possit, ideoque non habeatur punctum accidentale concursus umbrarum. Quare alia quævis lucidi collocatio eligenda. Ne quid tamen hac in materia desideretur, regulas pro umbrarum determinatione subdimus.

504. I°. Itaque quærenda est per calculum distantia puncti visus ab illo puncto lineæ horizontalis, ad quod umbra cujusvis objecti verticalis dirigitur. Si igitur punctum illuminatum & punctum lucidum sint ad eandem partem plani verticalis, inferatur: *ut summa distantiarum puncti illuminati & lucidi a plano tabulæ, est ad differentiam distantiarum eorundem punctorum a plano verticali; ita est radius principalis ad distantiam quæsitam*, quæ versus eandem partem in linea horizontali accipienda est, ad quam est punctum illuminatum, si hujus distantia a plano verticali major sit, quam distantia lucidi ab eodem; at si minor sit, ad partem oppositam.

505. Ex hoc patet, quod si punctum illuminatum, & punctum lucidum habeant eandem distantiam a plano verticali, sintque ad eandem ejus partem, situs umbrarum dirigatur ad punctum visus.

506. Verum si punctum illuminatum, & punctum lucidum sint ad diversas partes plani verticalis, fiat sequens analogia: *ut summa distantiarum horum punctorum a plano tabulæ, est ad summam distantiarum eorundem a plano verticali; ita radius principalis est ad distantiam puncti visus ab illo puncto lineæ horizontalis, ad quod umbra dirigitur.* Et hæc quidem di-

distantia semper ex ea parte sumitur, ad quam est punctum illuminatum.

507. Calculo modo exposito id egimus, ut inveniretur inclinatio basis trianguli umbræ ad planum verticale. Nam sit L (fig. 85) pes puncti lucidi in plano geometrico; GE sit situs plani verticalis; IK tabulæ; B punctum plani geometrici, in quod cadit perpendiculum e puncto illuminato demissum. Sit LD plano verticali parallela; & jungatur BL; patet, BL esse directionem umbræ in plano geometrico, ad planum verticale angulo DLB inclinatam. Jam vero in triangulo DLB est DL (seu DF+FL): BD (vel EL—GB)=R: *tang* DLB; & quia divisiones lineæ horizontalis sunt tangentes, radio principali sumto pro sinu toto (370): habetur DF+FL ad EL—GB, ut radius principalis ad distantiam puncti visus ab eo puncto lineæ horizontalis, ad quod umbra tendere debet. Quoniam autem B propius est plano verticali, quam L, situs umbræ inclinatus ad planum verticale vergit in partem oppositam puncti illuminati. Idem ratiocinium facile punctis illuminatis A & C pro casibus reliquis applicatur.

508. II°. Calculanda est longitudo umbræ in plano geometrico inde a pede corporis illuminati accepta, ut ejusdem perspectiva projectio fiat. En vero methodum: distantia puncti visus ab altero puncto lineæ horizontalis præcedente calculo reperta transferatur ex puncto visus in lineam verticalem, nec refert, quam in partem hoc fiat. Mensuretur, quantum punctum lineæ verticalis, in quod translata cadit, distet a gradu 45to lineæ horizontalis, & inferatur: *ut factum ex radio principali in differentiam altitudinum puncti illuminati & puncti lucidi supra planum geometricum, est ad factum distantiæ ultimo repertæ in summam distantiarum puncti illuminati & puncti lucidi a plano tabulæ; ita est altitudo puncti illuminati supra planum geometricum ad distantiam umbræ a pede hujus puncti in plano geometrico acceptam.*

509. Supponit hæc analogia, punctum lucidum esse altius illuminato; si sit infra illuminatum, reperietur distantia umbræ accepta in plano parallelo ad planum geometricum, velut in lacunari, a puncto, in quo huic plano occurrit verticalis per punctum illuminatum transiens.

510. Pro demonstratione allatæ analogiæ, advertendum est, quod si in lineam verticalem transferatur recta æqualis tangenti anguli inclinationis lineæ LB, atque ejus extremum jungatur cum

gradu 45to lineæ horizontalis, oriatur triangulum ſimile triangulo BLD. Unde habetur (Elem. 556): ut radius principalis (qui dicatur r) ad hypotenuſam hujus trianguli novi (quæ d vocetur); ita eſt in triangulo BLD latus LD (ſive FL+FD) ad BL: igitur $BL = \frac{(LF+FD)\times d}{r}$.

511. Exhibeat porro LN (fig. 86) planum geometricum; LH altitudinem puncti lucidi H; BM ſit altitudo puncti illuminati M; ducatur MO parallela ad LN, erit HO differentia altitudinum puncti illuminati, & puncti lucidi; & ſi recta HM producatur in N, eſt BN diſtantia umbræ N a pede B puncti illuminati. Eſt vero ob triangula HOM, MBN ſimilia, MB: BN = HO (ſeu HL—MB): OM (vel LB); quare $BL = \frac{(HL-MB)\times BN}{MB}$. Si jam fiat æquatio ex duplici valore de BL, deducetur analogia: $r\times$ (HL—MB): $d\times$ (LF+FD) = MB: BN. Q. E. D.

Quod ſi ſitus figuræ inverſus exhibeatur, ita ut LN repræſentet planum aliquod plano geometrico parallelum, H punctum lucidum illuminato M depreſſius, obtinebitur idem punctum umbræ N, manetque adeo idem calculus.

512. OBSERVA I. Si idem objectum a pluribus lucidis diverſimode collocatis illuminetur, ſingulæ umbræ ex luce ſingulorum lucidorum intercepta eodem modo calculandæ ſunt, ac ſi quodvis lucidum ſolum eſſet. Umbræ porro ejusmodi prope pedem corporis illuminati inter ſe confunduntur, fitque ea pars tanto nigrior, quanto umbrarum major eſt numerus. Inde autem ſingulæ fiunt dilutiores, quo magis inter ſe ſeparantur, quo a pede longius recedunt, quo ſuperficies eas excipiens ab alio lucido vivacius illuſtratur. Hæc omnia facile intelligentur, ſi umbræ a corpore a pluribus candelis diverſum ſitum obtinentibus colluſtrato projectæ delineentur, ut neceſſe non ſit ſingula minutim diſcutere.

513. OBSERVA II. Si duæ umbræ, quarum utraque in ſe admodum diluta, & vix perceptibilis, ſeſe interſecant alicubi, id ſpatium jam longe nigrius eſt, ut umbra facile diſtinguatur; & ſi plures adhuc umbræ illic ſe ſecarent, ſane multo magis nigreſceret.

ARTI-

ARTICULUS VI.

Varia Problemata de Umbris.

514. PROBLEMA I. *Determinare umbram veram corporis a penumbra diſcretam.*

RESOLUTIO. Facta projectione perſpectiva corporis luminoſi ED ſecundum omnes ejus dimenſiones, determinetur ut ſupra (494) umbra unius lateris corporis opaci ex radiis e centro venientibus interceptis AG; tum etiam umbræ ex luce ab extremis limbis emiſſa, & ab eodem latere intercepta, AF, & AG. Eodem modo quærantur limites *f*, *g*, *h*, umbrarum ab altero opaci latere *ab* projectarum, & ducatur *f*F, in qua ſumantur puncta I & *i* ita, ut FI ſit perſpective æqualis cum FG, & *if* = *fg*. Junctis AI, *ai*, erit trapezium A*ai*I umbra vera: A*ah*H vero exhibet limites penumbræ.

515. OBSERVA. Si corpus lucidum non ſit ſphæra, velut ſi ſumatur fax ardens, cujus flammæ latitudo ſit ad altitudinem, ut *p* ad *q*; ſumendum eſt FI ad FG, & *fi* ad *fg*, ut *p* ad *q*.

516. PROBLEMA II. *Determinare umbram rectæ* AB (fig. 87) *ad ſolum inclinatæ, quando poſitione & magnitudine datur.*

RESOLUTIO. Quæratur trigonometrice vel graphice punctum D plani geometrici, in quod cadit perpendiculum a ſupremo puncto B lineæ inclinatæ demiſſum, ut quantum a plano verticali, & tabulæ diſtet, ſciatur. Tum jungantur B & D, & quæratur hujus perpendiculi BD umbra DE (499). Ducatur ex A recta AE; erit hæc umbra lineæ AB. Quod ſi intercipiatur plano aliquo verticali FG, liquet, umbram fore AIK, puncto nempe K exiſtente termino umbræ a perpendiculo BD projectæ.

517. Ut trigonometrice reperiatur punctum D, in triangulo BAD ad D rectangulo, notum eſt AB, & angulus inclinationis BAD; igitur inveniri poteſt AD. Si porro ducatur AN parallela plano verticali, & ad hanc ex puncto D perpendicularis DN, in triangulo ADN datur AD (ex priore triangulo repertum), & angulus NAD, ob datam declinationem lineæ AB a plano verticali: quare reperitur AN & ND, quibus habitis ſcitur poſitio puncti D, reſpectu puncti A poſitione dati.

518. Graphice res ſic peragitur. Ad A *d*, (fig. 88) parallelam plano tabulæ, conſtituatur angulus *d* A B æqualis inclinationi datæ lineæ objectivæ, cui etiam ſumatur A B æqualis. Demittatur perpendiculum B *d*, & erigatur A N ad A *d* normalis, quæ erit parallela plano verticali. Fiat N A F æqualis declinationi datæ lineæ objectivæ a plano verticali, & accipiatur in A F recta A D = A *d*, ducaturque D N ad A N perpendicularis: rectæ D N, A N præbebunt in ſcala diſcrimen ſitus puncti D inter punctum datum A.

519. OBSERVA. Si extremum B rectæ inclinatæ A B ſit ſupra lucidum C elevatum (fig. 90), ut punctum E (fig. 87) nequeat in plano geometrico haberi, accipiendum aliud quodvis ejusdem lineæ punctum L (fig. 90) infra lucidum C, indeque demiſſi perpendiculi L M umbra M O determinanda. Ducta ex A per O indefinita A O erit umbra quæſita, nuſpiam terminata, niſi incidat in aliquod planum ſupra geometricum elevatum.

520. RESOLUTIO ALTERA. *Quando datur rectæ inclinatæ projectio perſpectiva in tabula.* Sit ejusmodi projectio A B (fig. 91). Ex duobus quibusvis ejus punctis A, D demittantur perpendicula A C, D E in projectionem plani geometrici, & ducantur ex pede lucidi P per C & E indefinitæ P F, P G. Concipiatur planum ad horizontem perpendiculare (parallelum, ſi lubet, plano verticali, vel tabulæ, modo ne nimium ad rectas P F, P G ſit obliquum), cujus interſectio cum plano Geometrico repræſentetur optice per F K. Ex F, G, ubi rectæ P F, P G occurrunt interſectioni F K, erigantur perpendiculares indefinitæ F H, G I; & ex puncto lucidi L ducantur per A & D rectæ L A H, L D I, quæ in H & I plani aſſumti determinant umbras punctorum A & D: jungantur H & I recta, quæ ſecet F K in O: erit O in directione umbræ, cujus adeo ſitus eſt B O Q.

521. PROBLEMA III. *Determinare directionem umbræ a linea recta inclinata* A B *in plana lucido altiora projectæ.*

RESOLUTIO. Ex pede P lucidi L (fig. 96) ducatur per C, in quod cadit perpendicularis ab extremo B rectæ A B demiſſa, recta P C M, occurrens interſectionibus planorum perpendicularium graduum cum plano terræ, in punctis H, I, K, M, e quibus erigantur perpendiculares indefinitæ H N, I O, K Q, M R. Ducatur etiam ex puncto lucidi L per B recta L R, quæ exhi-

exhibebit umbras puncti B in singula plana verticalia graduum producta cadentes, scilicet N, O, Q, R. Quæratur per problema præcedens situs umbræ A*m* in plano terræ, quæ occurrit intersectionibus planorum verticalium (productis etiam) in *h*, *i*, *k*, *m*. Ducantur *h*N, *i*O, *k*Q, *m*R, quæ determinant situm umbræ in planis iisdem verticalibus graduum. Et si etiam umbræ ipsorum graduum S T, V X, Y Z declinentur, facile erit rectæ A B totam umbram A*hnostux*R, qua videri potest, exhibere.

522. PROBLEMA IV. *Invenire punctum, ad quod umbræ linearum verticalium in planum inclinatum incidentes dirigi debent.*

RESOLUTIO. Ex pede lucidi P (fig. 92) ducatur (388) ad intersectionem plani inclinati cum plano terræ perpendicularis; aut si planum inclinatum A B C non pertingat usque ad planum terræ, ducatur ex Q tantundem supra terram elevato, quantum latus C B, ad idem C B perpendiculum Q R, cujus quantitas modo mox exponendo quæratur. Tum fiat: ut sinus totus est ad tangentem anguli inclinationis plani, in quod umbræ cadunt, cum plano terræ; ita est Q R ad Q T; erit T punctum accidentale omnium umbrarum projectarum a lineis verticalibus ex luce L intercepta: etenim in hoc puncto planum inclinatum A B C productum secat perpendicularem Q L ex lucidi puncto demissam.

523. Ut jam graphice inveniatur Q T, collocetur in plano figuræ hunc in finem separatim construendæ (vide fig. 93) punctum Q (cujus eadem supra planum terræ altitudo, ac lateris C B) ac recta B C, quæ idem latus plani exhibeat, ita ut figura hæc in plano exprimat verum situm tam lateris B C, quam puncti Q, respectu plani verticalis F G, & plani tabulæ G H. Demittatur ex Q perpendicularis Q R ad B C, & ducatur ad eandem B C parallela Q V. Fiat B R S æqualis angulo inclinationis plani dati cum plano terræ, & producatur S R, donec occurrat parallelæ Q V in T; tum accipiatur mensura de Q T in scala, & describatur optice in tabula.

524. SCHOLIUM. Ex dictis apparet, quod determinatis punctis T & *t* (fig. 95), in quibus plana inclinata A B C, A C D, si producantur, secant perpendicularem L T ex puncto lucidi L demissam, facile sit ductum umbræ N E F G H I K a verticali M N projectæ exhibere, ut figura indicat.

525. RESOLUTIO altera, *quando umbra fit ex intercepta luce sol's.* Producatur latus plani inclinati D C (fig. 94) uſque ad lineam horizontalem in I. Ex I ducatur per planum inclinatum quævis recta I L, ut pars K L ſit in eo optice parallela cum latere D C. In plano terræ (vel generalius, in plano ad libellam poſito, in quo eſt latus D C) quæratur punctum A, in quod cadit perpendiculum ab alterutro extremo K vel L demiſſum; & ducatur per I recta indefinita I N ſecans perpendicularem K A; item altera ex F, azimutho ſolis, tranſiens per quodvis punctum, v. g. D, lateris D C, & occurrens priori I N in O. Erigatur ex O perpendicularis, uſque dum rectam I L ſecet in Q, jungantur Q & D recta, quæ producta concurrat in T cum perpendiculo e ſole S demiſſo: erit T punctum concurſus umbrarum a lineis verticalibus in planum inclinatum E D C projectarum.

Etenim manifeſtum eſt, triangulum D Q O rectangulum ad O, & cujus angulus Q D O æqualis eſt inclinationi plani D C E, eſſe in plano verticali O Q S F per ſolem S, & perpendiculum ex eo demiſſum S T, tranſeunte: igitur producta Q D determinat punctum T, in quo planum inclinatum D C E occurrit eidem perpendiculo S T.

526. OBSERVA. Non hic agimus de umbris in ſuperficies corporum alias, quam planas, projectis; quemadmodum nec de ejusmodi projectionibus perſpectivis tractavimus, quæ in alia, quam plana ſuperficie delineari poſſent, uti in cylindrica, conica, ſphærica &c, cum rarum admodum ſit, ut id neceſſitas exigat, & res a brevitate nobis propoſita ſit aliena. Quod ſi tamen evitari id genus delineatio nequeat, principiorum, quæ attulimus, accurata notitia, & exercitatione firmata, Geometriæ quidam uſus, loci, ſuperficierum, corporum delineandorum conditiones, ſemper peculiares ſuppeditabunt regulas, quibus id præſtari poſſit.

AUCTA-

AUCTARIUM.

THEORIA MICROMETRI OBJECTIVI.

* *
*

CAROLO BENVENUTI Soc. JESU.
ROGERIUS JOSEPHUS BOSCOVICH ejusd. Soc. S. P. D.

In meo ex urbe discessu Martio mense postulasti a me brevem aliquam theoriam præclarissimi instrumenti, quod objectivum micrometrum appellant, quod quidem in Anglia accuratissime elaboratum, ac telescopio catadioptrico sane egregio aptatum Pezenas noster, celeberrimus Massiliensis Mathematicus Regius, pro Barberinis Principibus, cultioris litteraturæ amantissimis, ad nos Romam transmiserat, una cum fusiore dissertatione sua impressa, qua theoriam omnem instrumenti, & usum est persecutus, quam ego quidem, in ipso nimirum discessu meo advectam, uti nosti, videre omnino non potui, uti nec Transactionum Philosophicarum locum Tomo 48 pertinente ad annum 1753, in quo de instrumento agitur, quibus nimirum Romæ cum summo nostrorum studiorum damno carebamus.

Ex ipso itinere theoriam, quam ex instrumenti semel visi consideratione erueram, non valde illam quidem complicatam, sed nec omnino simplicem, ad te transmisi, qua alia longe simplicior, & vero etiam elegantior, ac perbrevis mihi nuper in mentem venit, quanquam aliis nunc ego quidem molestioribus sane, & a meorum studiorum ratione, maxima ex parte, alienissimis, & contentiosis hic curis distineor, ac penitus a contemplationibus Mathematicis avertor. Sed occasionem mihi præbuit ea iterum de re meditandi præclarissimus Societatis itidem nostræ Astronomus P. Liesganig, hujus domesticæ Viennensis speculæ præfectus, in qua cum alia instrumenta sane multa partim de novo curat, partim corrigit, atque, ut dicimus, rectificat, tum in primis sectorem

rem pro verticalibus obſervandis ſtellis, meo in *Expeditione Litteraria* deſcripto ſimilem, ſed multo præſtantiorem, adjectis aliis, aliis multo ſimpliciore ratione præſtitis, per hoſce dies abſolvit, ac hujus ipſius generis objectivum micrometrum eodem tempore conſici curat, Newtoniano aptandum teleſcopio, egregio ſane, quo utitur ad obſervationes plerasque.

Ejusmodi theoriam igitur ita, ut ſe mihi ſponte obtulit (eam enim nusquam alibi mihi adhuc videre licuit), ad te transmitto, in qua ipſam rei ſummam perſequor tantummodo, rationem vero aptandi inſtrumentum ipſum teleſcopiis, quæ multiplex eſſe poteſt, & eſt admodum arbitraria, ac inveſtigationem primi ejus inventoris, quæ ad uſum nequaquam pertinet, prorſus omitto. Quoniam vero eandem a me petiit tibi ſat cognitus P. Scherffer, qui noſtros hic in Mathematicis diſciplinis inſtituit, apud quos hæc ſtudia tam Viennæ & domi noſtræ, & per noſtros in publica Academia, & in Nobiliſſimo Thereſiano Collegio, quam Tyrnaviæ, Græcii, ac per univerſam hanc Auſtriacam Provinciam, fervent nunc plurimum maximo cum ſucceſſu; quique poſteaquam Aſtronomiam Caillii, ſcriptoris diligentiſſimi, e Gallico in Latinum translatam in uſum ſtudioſæ juventutis hic edidit, ac ejusdem Opticam Latine pariter redditam nunc edit; ut nimirum utiliſſimi Optici inſtrumenti theoriam perbrevem eidem Opticæ adjungat, in eorum gratiam, qui ceteris fontibus, ex quibus ejus notitiam haurire poſſent, deſtituuntur in hiſce locis; concedendam omnino cenſui, ſi tu, cujus judicium noſti ſane, quanti ego faciam, non improbes, & hanc ipſam epiſtolam ad te datam permittas imprimi ſimul, ſine qua eandem theoriam prodire non ſinam, ne occaſionem hanc elabi mihi patiar, publicam aliquam exhibendi mei animi ſignificationem erga homines, quorum & diligentiæ, & doctrinæ ſpecimina in dies habeo quam plurima ob oculos, & quorum incredibilem in me humanitatem experior, cui parem ego quidem gratiam nec referre unquam potero, nec habere. Vale.

Dabam Viennæ 1. Aug.
1757.

DE MICROMETRO OBJECTIVO.

Sint in fig. 1 (Tab. XIII) binæ ſemi-lentes L′L, *l l*′, derivatæ e ſectione lentis facta per axem ſuum, & conſtitutæ in ſummo teleſcopio quocunque, quarum ipſam ſectionem per axem refert hæc figura; & fig. 2 ſectionem perpendicularem axi, vel ipſam utramvis ſuperficiem curvam. Sint autem earum centra Q, *q*, & foci radiorum parallelorum rectæ A D ſint M, *m*, ac poſſint promoveri altera reſpectu alterius motu parallelo, & determinari diſtantia centrorum Q, *q*, quæ erit æqualis diſtantiæ quorumlibet punctorum thecæ, cui ſingulæ includuntur, quæ puncta congruant congruentibus Q, *q*, & ſimul cum ſemilentibus moveantur.

Quoniam radiorum H Q, H′ L′, parallelorum A D, focus eſt M reſpectu primæ ſemilentis, ſi ducatur M *q* I, cui ſit parallelus radius I′ *l*′, ſatis patet, omnium radiorum hujusmodi parallelorum I *q*, incidentium in ſecundam lentem, focum debere eſſe ad ſenſum itidem in M, cum radius I *q* M tranſire debeat ad ſenſum irrefractus, & diſtantia a lente foci radiorum, parum inclinatorum ad axem, in data quavis directione debeat eſſe ad ſenſum eadem, ac radiorum axi parallelorum.

Hinc binæ quidem fient in M, *m* imagines objectorum ſingulorum in magna diſtantia poſitorum ultra L′ l′, ſed exiſtente Q *q* intervallo, quo lens altera ultra alteram eſt promota, coincident imagines binorum punctorum objecti, quæ jaceant in directione M H & M I, ſive quæ habeant diſtantiam opticam definitam ab angulo Q M *q*, & jaceant in directione Q *q*.

Si jam addantur aliæ quotcunque lentes, aut ſpecula, quæ radios quacunque ratione detorqueant, ſemper radii paralleli H Q, & radii paralleli I *q*, qui nimirum convergebant omnes ad idem punctum M, ſimul paralleli evadent, vel ſimul ad eadem puncta convergent, vel ab iisdem divergent; & ubi demum in oculi fundo imago fiet, conjungentur itidem in eadem imagine radii venientes directione H Q M per primam ſemi-lentem cum radiis venientibus directione I *q* M per ſecundam. Quam ob rem ſi innoteſcat angulus Q M *q* per diſtantiam Q *q*, & hujusmodi inſtrumentum aptetur teleſcopio cuicunque, ac ſecunda imago primi puncti objecti congruat cum prima ſecundi; diſtantia Q *q* exhibebit angulum viſualem, quo illa bina puncta a ſe invicem diſtant, & proinde inſtrumentum ipſum ſubibit vices micrometri.

Id fiet, ſi vel citra M *m* collocetur lens convexa, vel ultra lens concava, & fiat vel teleſcopium dioptricum ſimplex commu-

ne, vel Galilæanum; vel prætera infra L′ l′ ſit objectiva alia lens ſoci cujusvis cum toto reliquo teleſcopio dioptrico: ſed in hoc poſtremo caſu focus hujus alterius lentis objectivæ accedet ad ipſam propius, cum nimirum radii inter ſe paralleli ad ſenſum profecti ex eodem puncto objecti jam per ipſas ſemi-lentes convergant ad M, adeoque ocularis lens objectivæ debebit admoveri. Sic ſi centro C ſit ſpeculum cavum N′O′, quod rectis M L′, MQ, MC, DC, Mq, Ml′, occurrat in N′, N, P, B, O, O′, tam radii H′L′N′, HQN, quam lqO, I′ l′ O′ abibunt ad idem punctum F, quod tamen erit infra punctum G, bifariam ſecans radium CP. Ac ſi inde vel circa F adhibeatur ſpeculum planum in angulo 45 graduum, quod ad latus deflectat radios ad efformandum teleſcopium Newtonianum, ſive ultra F ſpeculum cavum eodem axe ad Gregorianum; ſive citra F ſpeculum convexum ad recentius teleſcopium catadioptricum Gregoriano ſimile, ſed objecta invertens; ſemper intra oculum duplicabuntur objecti imagines, & imagines punctorum in ea poſitione, & diſtantia poſitorum congruent.

Porro facile eſt, data diſtantia foci Q M radiorum parallelorum lentis biſectæ ab ipſa, & data diſtantia Qq, invenire angulum QMq, nimirum diſtantiam viſualem punctorum congruentium. Eſt enim MQ ad Qq, ſive diſtantia illa foci ad intervallum diſtractionis ſemilentium, ut radius ad tangentem, vel ſinum, ejus anguli. Cum nimirum angulus MQq ſit accurate, & MqQ quam proxime rectus. Pro lente pedum 40 infertur, angulum unius gradus exhiberi a pollicibus $8\frac{378}{1000}$, unde fit, ut ſingula ſecunda requirant plus quam $\frac{2}{1000}$-digiti, ſive proxime $\frac{1}{36}$ lineæ, quæ eſt admodum ſenſibilis.

Adhibitis autem diverſis lentibus, quo minor fuerit convexitas, ut nimirum focus longius debeat recedere, eo major ſemi-lentium diſtractio requiretur ad eundem angulum exhibendum; & vice verſa in magis convexis major angulus reſpondet diſtractioni eidem. Hinc ut micrometrum ſenſibilitatem habeat ſatis magnam, adhiberi debent lentes admodum parum convexæ, & lens objectiva pedum 40 eſt admodum ad rem idonea.

Facile patet, ſcalam valoris diſtantiæ viſualis punctorum congruentium objecti pro intervallo diſtractionis ſemi-lentium fore eandem, cuicunque teleſcopio aptetur idem micrometrum earundem binarum ſemilentium, & ſive pro myopibus admoveatur lens ocularis objectivæ, vel ſpeculo plano, aut ſpeculum minus majori, ſive pro presbytis removeatur. Pendet enim a ratione ejusdem QM ad eandem Qq.

At

At si telescopium adhibeatur pro objectis non ita remotis, tum vero focus M recedit a lente Q. Quare crescit QM, & angulus ad M decrescit. Hinc idem distractionis intervallum indicat minorem distantiam visualem punctorum congruentium, atque id in ratione reciproca distantiæ foci radiorum venientium ab objecto. Si distantia objecti a lente objectiva sit $= d$, radius curvaturæ lentis bisectæ $= r$, distantia foci respondentis ei objecto $= x$, ratio sinus incidentiæ ex aere in vitrum ad sinum refractionis $= p : q$, ex formula generali (181) facto $e = 0$, $R = r$, erit $x = \frac{q\,d\,r}{2(p-p)d-qr}$. Quare mensura distantiæ visualis exhibita a data distractione pro objecto habente distantiam $= d$, ad mensuram pro objecto remotissimo (inquo evanescente r respectu d evadit $x = \frac{q\,r}{2(p-q)}$) erit ut $\frac{q\,r}{2(p-q)}$ ad $\frac{q\,d\,r}{2(p-q)d-qr}$, sive ut $2\,(p-q)\,d-q\,r$ ad $2(p-q)\,d$. Invenitur autem r ex ipso foco facile inveniendo per observationem, datis p, q, d, x, cum debeat esse ex formula superiore $r = \frac{2(p-q)\,dx}{q\,(d+x)}$. Sunt autem in vitris quam proxime $p = 31$, $q = 20$, adeoque $r = \frac{11\,dx}{10\,(d+x)}$, & ratio illa superior, ut $11\,d - 10\,r$ ad $11\,d$.

Si per ejusmodi micrometrum aptatum cuivis telescopio determinetur distractio debita, ut imagines duorum punctorum dati objecti, collocati ad perpendiculum in data distantia a semilentibus congruant, facile computabitur angulus respondens iis binis punctis, faciendo: *ut distantia data objecti a semilentibus ad distantiam veram illorum punctorum objecti; ita radius ad sinum vel tangentem ejus anguli.* Hinc pro quavis alia distantia objecti, etiam pro immensa, invenietur angulus ex superiore formula & proportione.

Ut res illustretur exemplo, sit objectivum vitrum bifariam sectum ejusmodi, ut focum radiorum parallelorum habeat in distantia pedum 40. Adhibita formula $r = \frac{11\,dx}{10(d+x)}$, quæ pro radiis parallelis evadit $\frac{11\,x}{10}$, ob d infinitam, & facto $x = 40$, erit $r = 44$. Distet objectum assumtum pro anguli determinatione a lente ipsa pedibus 1000, & inveniatur quædam determinata distractio respondens minutis 30, reducetur ea mensura ad usum Astronomicum operationis $11\,d - 10\,r$ ad $11\,d$, sive positis pro d & r numeris 1000 & 44,

ope rationis 10560 ad 11000 nimirum facto: ut 10560 ao 11000, ita 30′ (= 1800″) ad 1875″; illa eadem semi-lentium distractio pro objectis remotissimis, nimirum pro omni Astronomia, subtendet 1875″, accedentibus 75″ ad priorem illam mensuram. Unde patet, ubi scala per ejusmodi observationes definitur, habendam maxime in hisce instrumentis rationem distantiæ objecti, ut ea determinatio ad Astronomiam traduci possit.

Quoniam autem in objectis non ita multum distantibus mutatio distantiæ objecti ab illa lente objectiva mutat distantiam foci præcedentis lentem ocularem, vel speculum minus, & hæc mutatio datur per illam ex Dioptricis, & Catoptricis focorum formulis, facile est etiam pro ejusmodi mutatione lentis ocularis, vel speculi minoris scalam valorum computare adhibendam pro distantiis minoribus, quæ tamen in maximis, adeoque in omni Astronomia, constans erit, atque id pro quovis oculorum genere.

Si aptetur ejusmodi micrometrum cum lente bisecta foci dati telescopio catadioptrico datæ curvaturæ, facile determinabitur, quantum debeat admoveri ipsi speculo speculum planum obliquum cum lente oculari, vel speculum minus, sive concavum, sive convexum. Id intervallum erit quam proxime æquale FG, nimirum æquale accessui sui foci ad speculum, inducto a convergentia radiorum, quam præstat lens objectivi micrometri: quod quidem ex Catoptricis formulis facile invenitur. Nam si radius sphæricitatis speculi sit $= r$, distantia puncti radiantis $= d$, erit distantia foci a lente (133) $= \frac{dr}{2d-r}$. Si autem hic dicatur BD $= a$, BG $= b$, erit ob convergentiam radiorum $d = -a$, eritque $r = 2b$, adeoque BF $= \frac{-2ab}{-2b-2a} = \frac{ab}{a+b}$. Quare accessus ille GF erit $= a - \frac{ab}{a+b} = \frac{aa}{a+b}$. Nimirum si collocetur lens bisecta prope focum speculi cavi N′O′, ut sit $a+b$ proxime æqualis distantiæ QM foci radiorum parallelorum lentis ipsius bisectæ, erit ille accessus proxime tertius continue proportionalis post distantiam foci radiorum parallelorum ipsius lentis bisectæ, & speculi.

Pro telescopio Newtoniano, cujus speculum distet a foco pedibus $3\frac{1}{2}$, distantia micrometri a speculo sit pedum 4, distantia foci lentis bisectæ ab ipsa pedum 40, erit ille accessus $\frac{3\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}}{40} = \frac{49}{160}$, sive digitorum $\frac{49 \times 12}{160} = 3\frac{7}{10}$. In aliis telescopiis catadioptricis ob $a + b$

pro-

proxime conſtantem, erit ut quadratum r, ſive proxime ut quadratum longitudinis teleſcopii, & accuratius ut quadratum radii curvaturæ ſpeculi majoris.

Quoniam lens objectiva non colligit radios omnes accurate in M, ſed alios propius, ob diverſam refrangibilitatem, alios remotius; terminatio in teleſcopio erit minus accurata, quam eſſet ſine ejusmodi micrometro: verum diſcrimen erit exiguum, quia ingens etiam mutatio diſtantiæ foci MG ingentis, exiguam mutationem inducit in GF. Cum enim ſit ipſa GF tertia poſt MG & PG, erit GF ad ſui mutationem, ut MG ad mutationem ſui.

In caſu propoſito ſeries ſocorum pertinentium ad radios heterogeneos in M, quæ eſt pars $\frac{1}{27}$ totius QM, eſt pedem $\frac{40}{27}$, ſeu proxime $1\frac{1}{2}$; & cum fuerit FG digitorum fere 4, erit ſuperior ratio mutationum ut 40×12 ad 4, ſive ut 120 ad 1. Reducetur igitur ejus ſeriei longitudo ad $\frac{1\frac{1}{2}}{120}$, ſive ad $\frac{3}{240}$, ad $\frac{1}{80}$ digiti, vel ad $\frac{3}{20}$ lineæ, ſpatium perquam exiguum.

Eo inſtrumento ita collocato, ut circa axem teleſcopii libere moveri poſſit, facile erit, aſſumere diametros apparentes in quavis directione. Collocata ſectione ſemilentium in directione quæſita, ſatis erit, ipſas diſtrahere ita, ut binæ imagines aſtri ſe contingant, & habebitur diameter apparens, ut patet, congruentibus ejus extremis punctis, quorum imagines pertinent ad dimidias ſemilentes.

Si eodem nihil mutato teleſcopio myopes & presbytæ utantur, alteri videri poterit major apparens diameter, alteri minor, ob inæqualem terminationem, quæ per radios ſpurios imaginem auget. Id incommodum evitatur plurimum, ſi quisque teleſcopium ita diſponat, ut terminatio ſibi ſit, quantum fieri poteſt, exacta.

Si alterius oculi plures radios violaceos, alterius plures rubeos ad retinam transmittunt, poterit alteri QM eſſe brevior, alteri longior. Si id fiat etiam triente intervalli occupati a ſerie ſocorum, nimirum in caſu propoſito ſemipede, mutabitur angulus ad M octogeſima ſui parte, nimirum ſcala diſtantiæ viſualis mutabitur in dimidio gradu per ſecunda $\frac{1800}{80\frac{8}{9}} = 22\frac{1}{2}$. Quamobrem exiguum etiam in eo diſcrimen pariet diſcrimen aliquot ſecundorum. Hinc unusquisque ſibi ſua obſervatione ſcalam debet efformare, vel ſi alter ſemel ſibi efformavit, debet alter vi-

dere, quod discrimen determinationis sibi obveniat in una observatione quacunque ab illius determinatione, & manente eadem oculorum constitutione, semper omnes reliquæ determinationes erunt in ratione data, adeoque facile admodum ex illius scala inveniet suam.

Idem discrimen habebitur, si aspiciatur eo instrumento jam objectum violaceum, jam rubeum. Quoniam rubeorum radiorum focus est remotior, eadem distractio semi-lentium minorem in iis subtendet angulum. Hinc cavendum, ubi scala per observationem objecti terrestris definitur, ut objectum accipiatur album potius, quam ullius alterius coloris. Præterea si objectum cæleste sit admodum rubeum, ut solet esse luna, vel sol prope horizontem, obtinebitur hoc instrumento diameter vera major, cum ea distantia, quæ pro luce integra exhibet angulum quemdam, exhibeat minorem pro radiis rubeis.

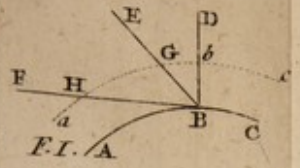
Idem incommodum haberi potest in diametro solis determinanda hoc instrumento per vitra, quæ solem admodum rubicundum exhibeant; cum adhibeantur ii radii, quorum focus ab objectiva lente recedit plurimum, reliquis interceptis; quamobrem vel adhibenda sunt vitra viridia, vel combinatio quæcunque vitrorum, quæ album potius solem exhibeat, quod quidem probe notandum videtur omnino, cum aliter facile admodum sit in errores incidere non contemnendos.

FINIS.

ERRA.

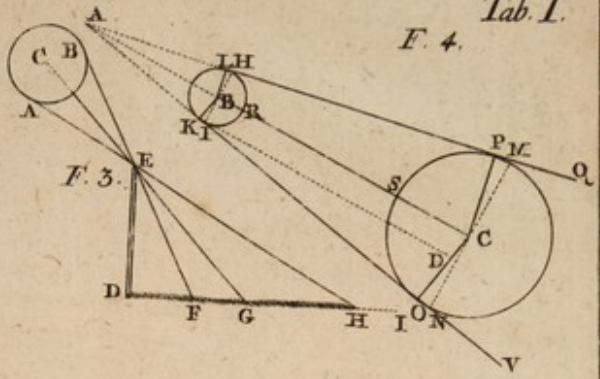
			ERRATA	CORRIGE
Pag.	1	Lin. 22	ſimile - - - -	ſimilis
	3	34	pyramydis - - -	pyramidis
	6	4 a fine	dimanentes - - -	dimanantes
	47	11	$+eqq$R - - -	$+eqq$Rr
	49	ultim.	MC - - - -	MO
	53	13	non eſt - - - -	eſt
		22	eam - - - -	eum
		25	expenſio - - -	expanſio
	59	19	auctior - - -	acutior
		25	Oq - - - -	Qq
	80	27	tangentia - - -	tegentia
	81	28	*pars* - - - -	*pars videatur*
	119	16	dictis - - - -	ductis
	132	26	ſoli - - - -	ſolis

Tab. I.

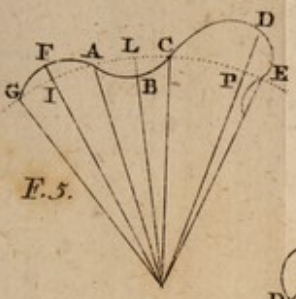


F. 1.

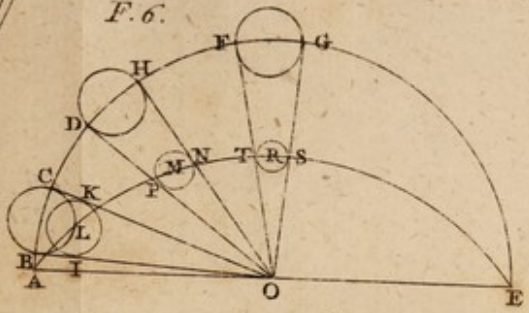
F. 2.



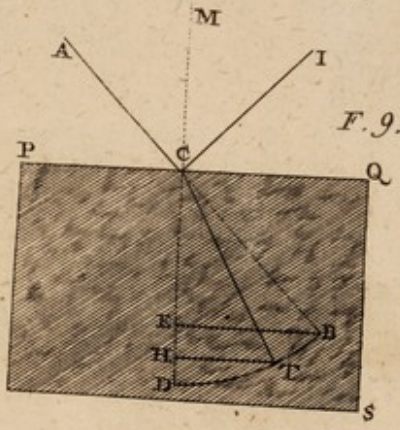
F. 4.



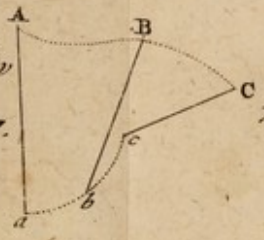
F. 3.



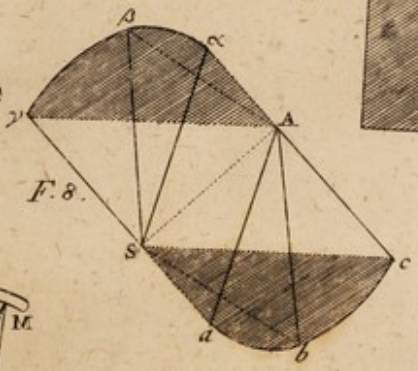
F. 6.



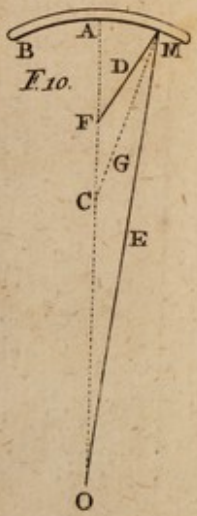
F. 9.



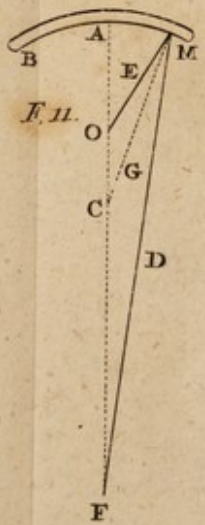
F. 7.



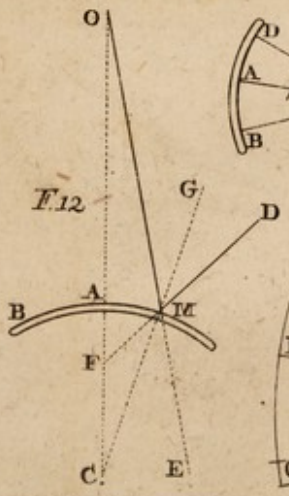
F. 8.



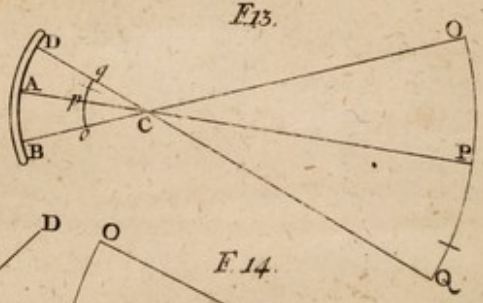
F. 10.



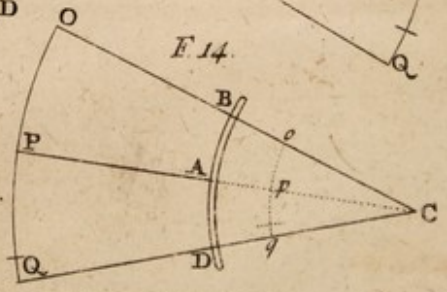
F. 11.



F. 12.



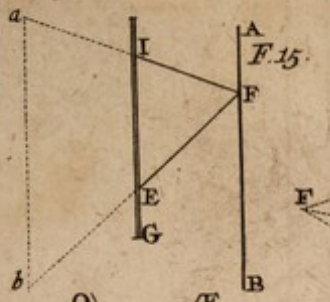
F. 13.



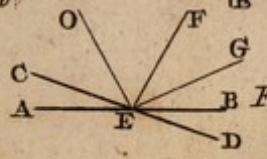
F. 14.

Mansfeld f.

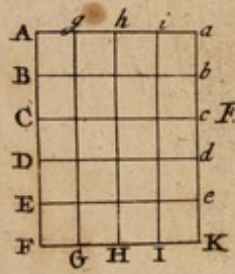
Tab. II.



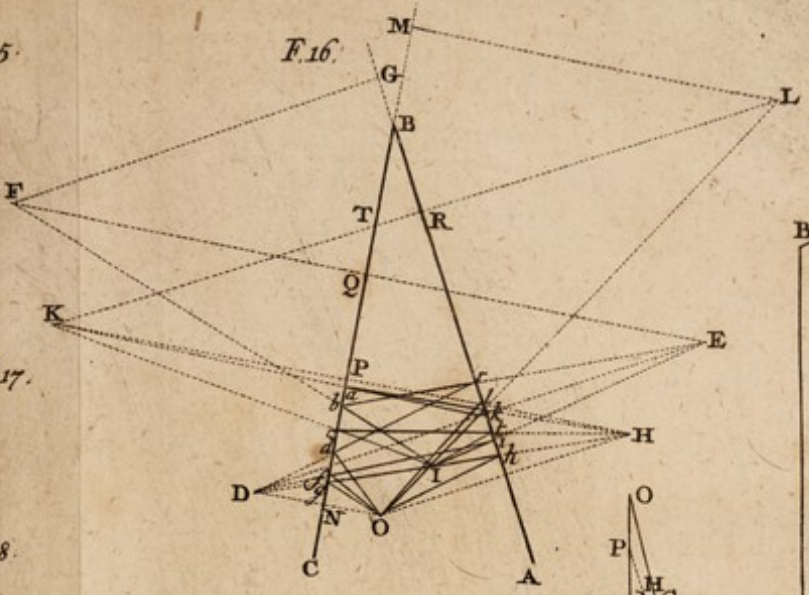
F. 15.



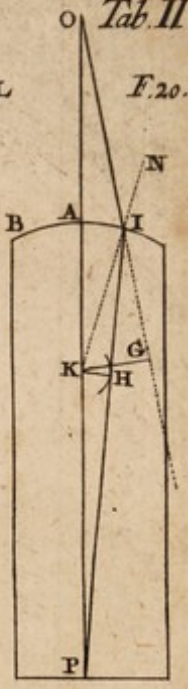
F. 17.



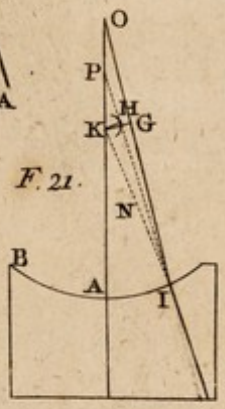
F. 18.



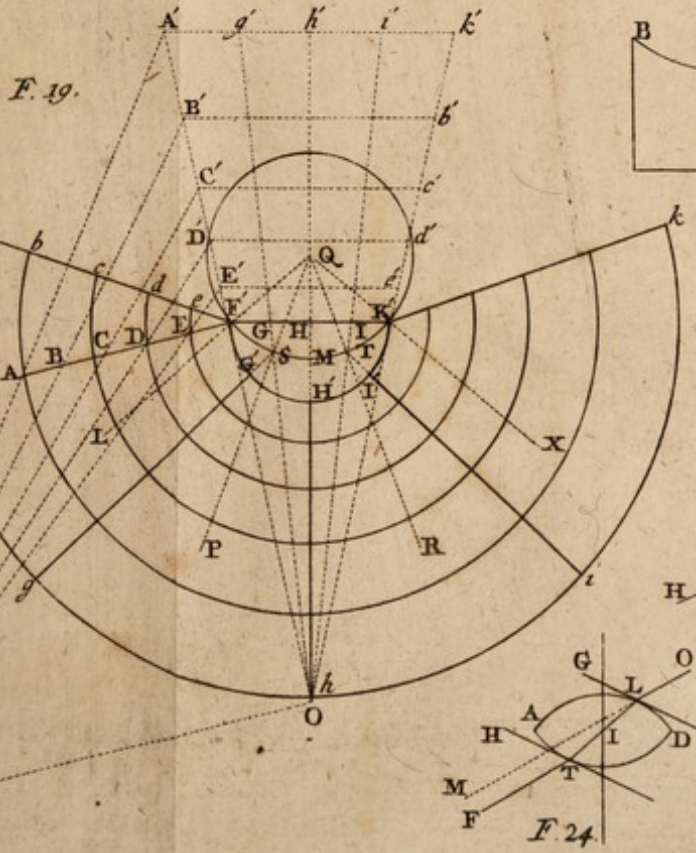
F. 16.



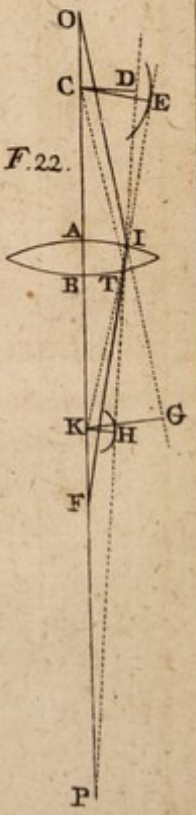
F. 20.



F. 21.



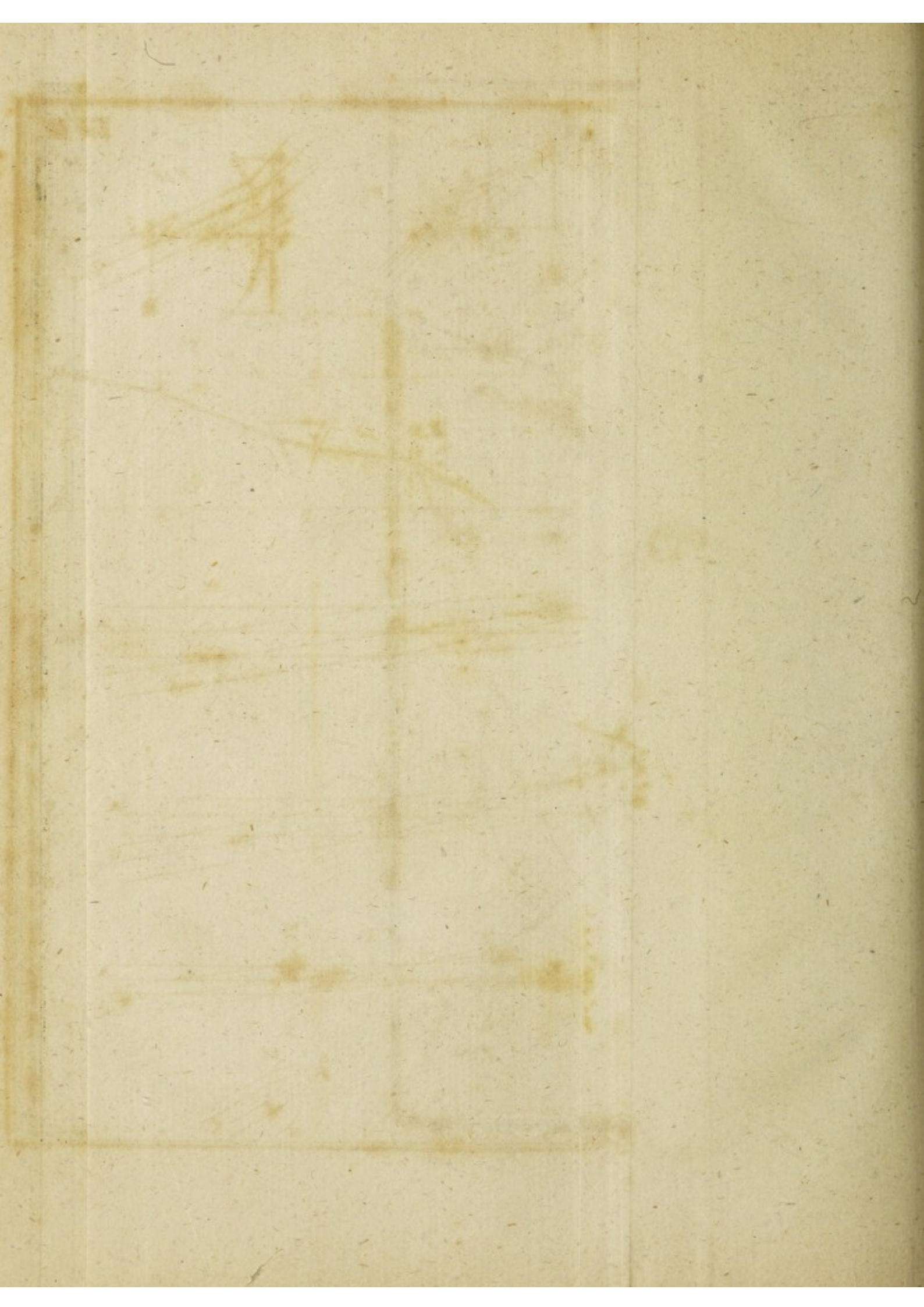
F. 19.



F. 22.

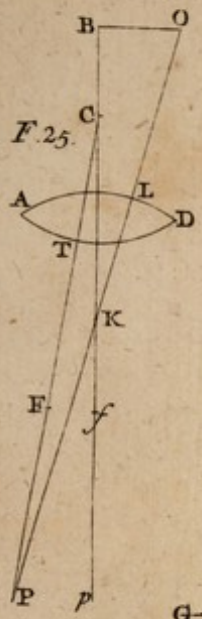
F. 23.

F. 24.

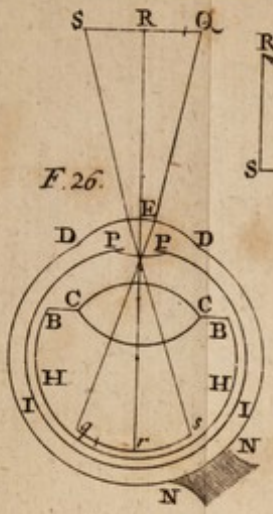


Tab. III.

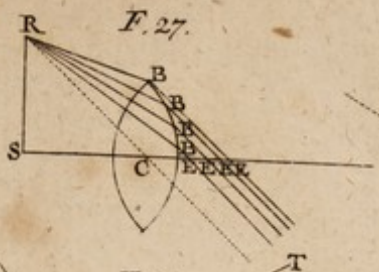
F. 25.



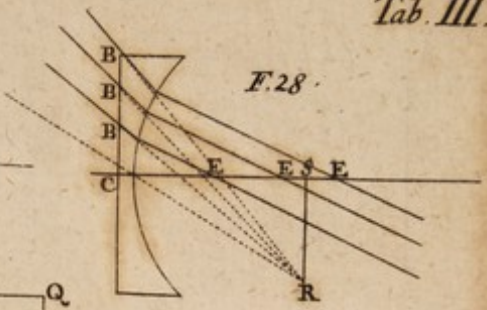
F. 26.



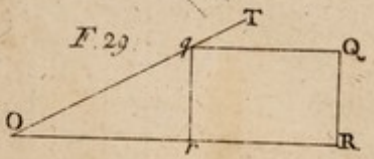
F. 27.



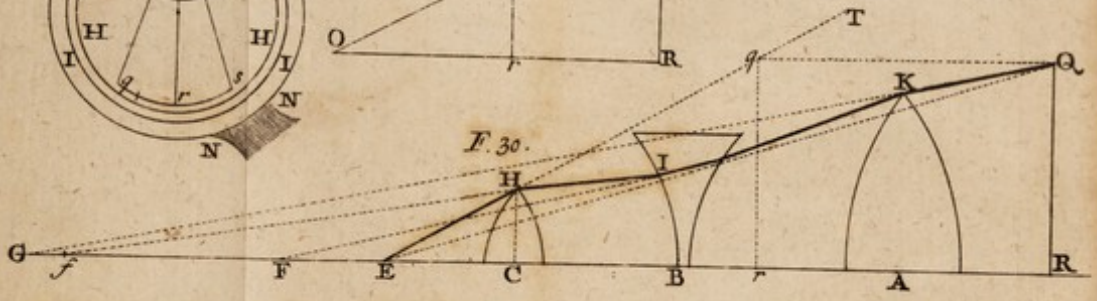
F. 28.



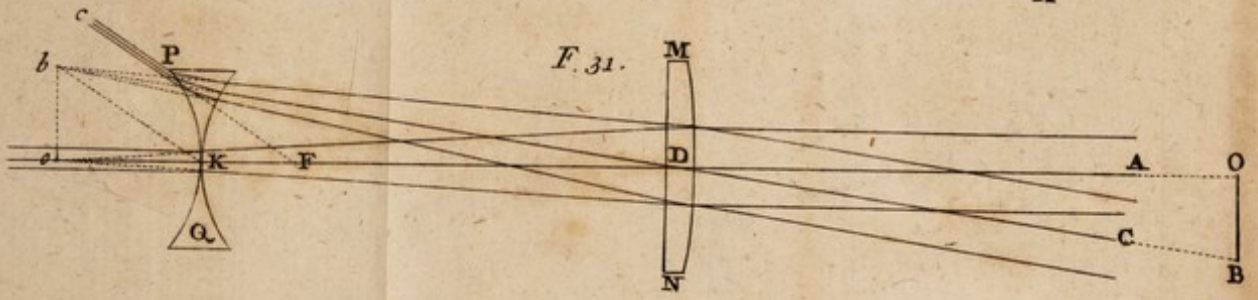
F. 29.



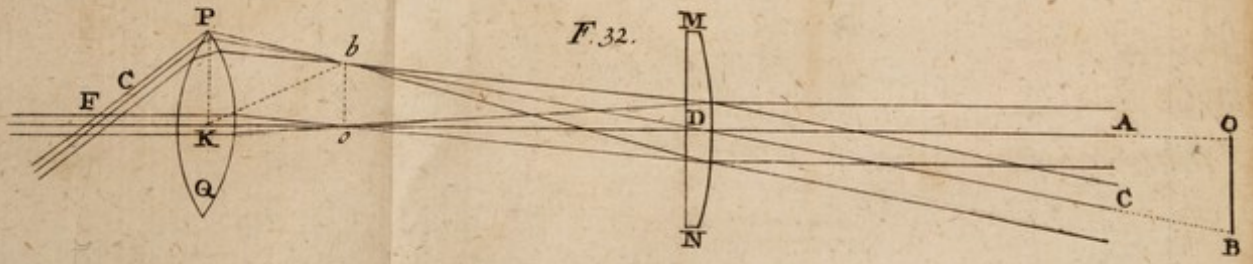
F. 30.



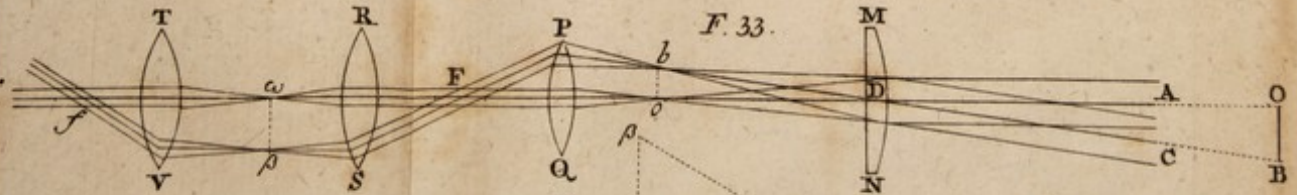
F. 31.



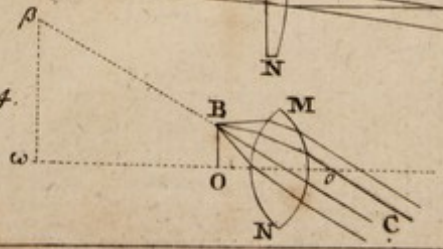
F. 32.

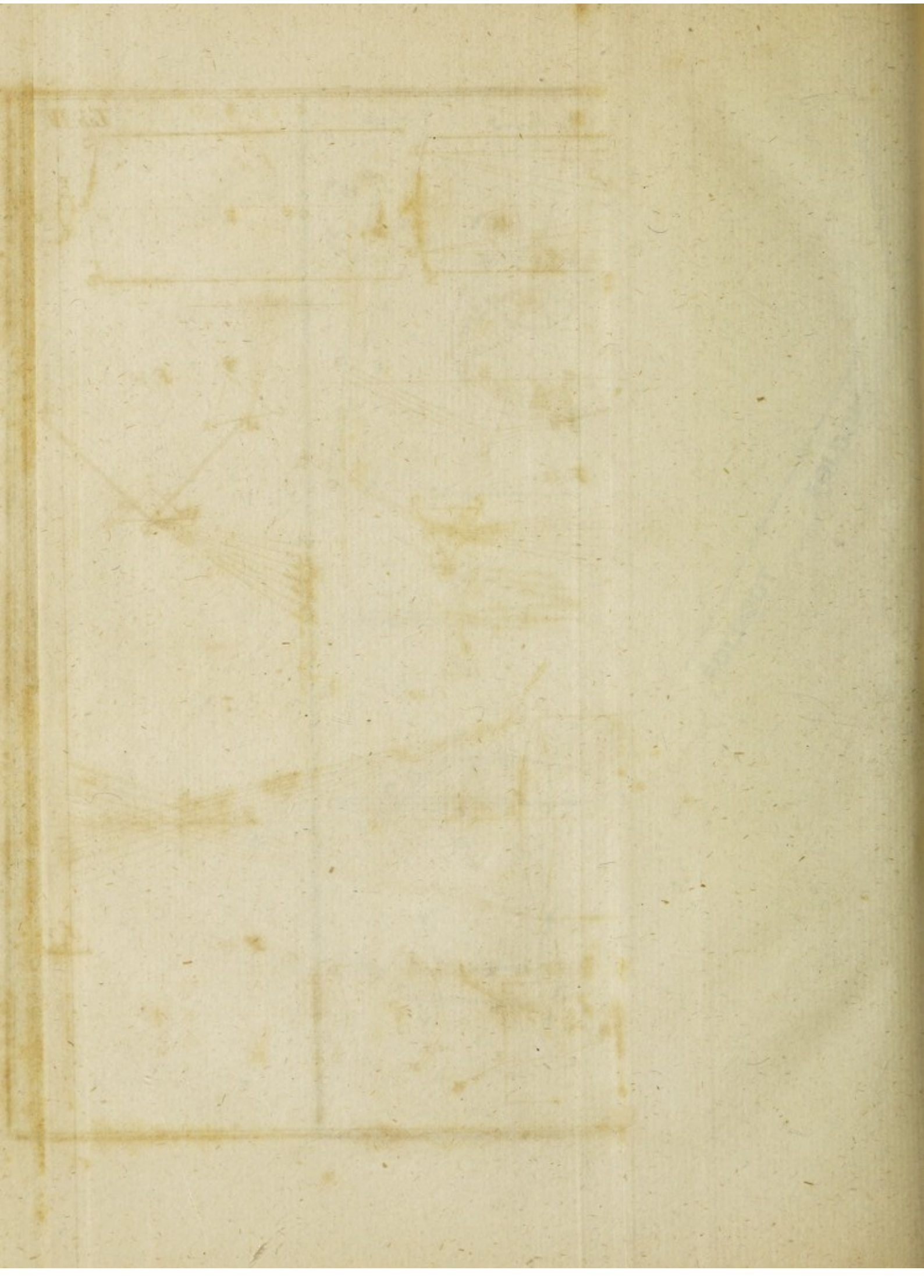


F. 33.

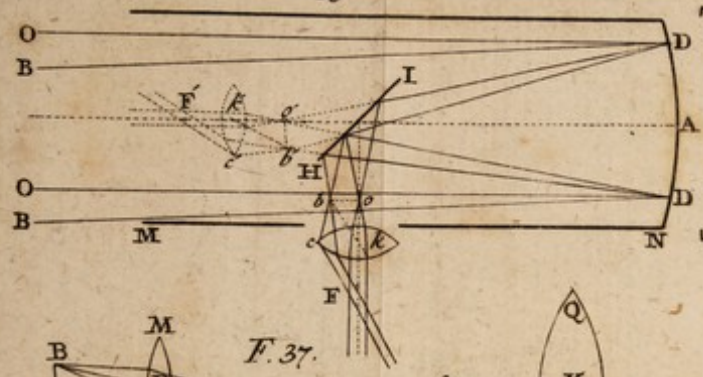


F. 34.

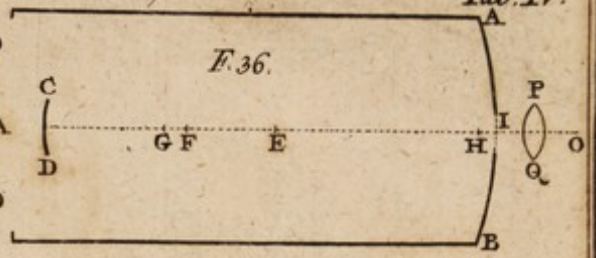




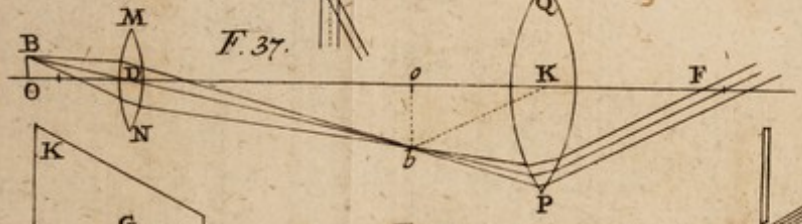
F. 35.



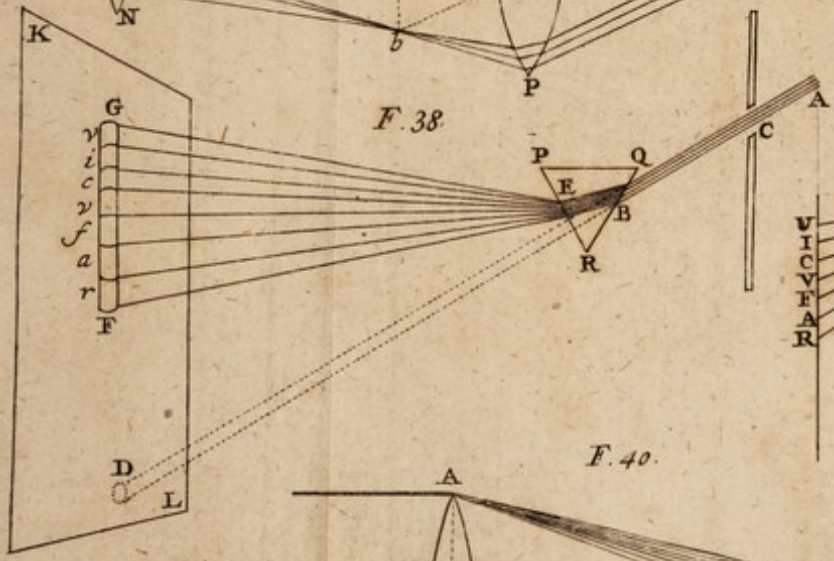
F. 36.



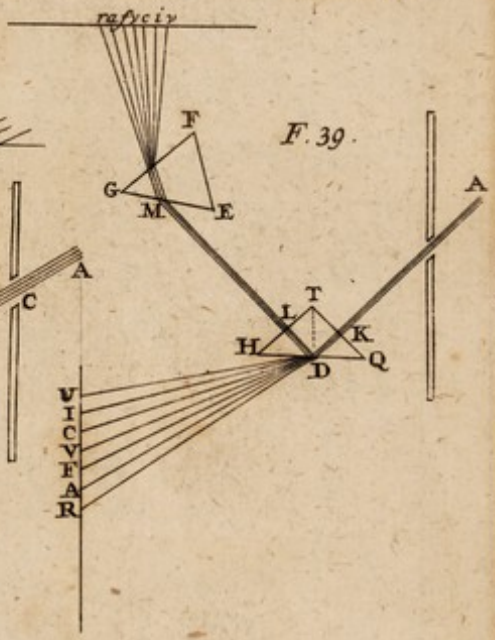
F. 37.



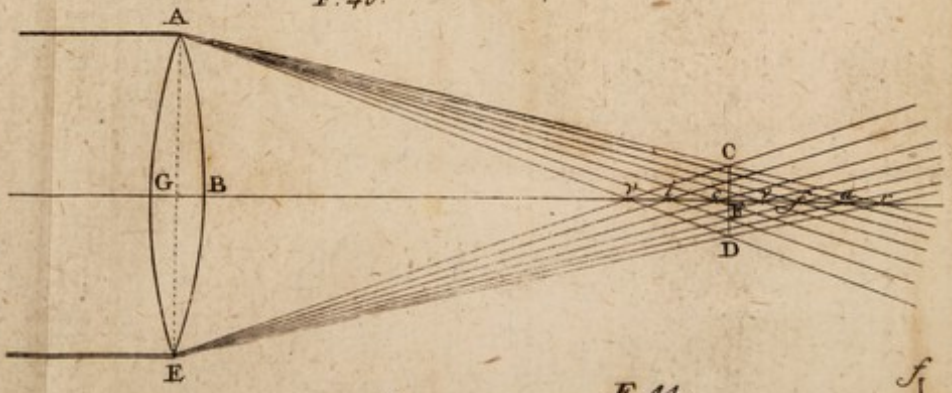
F. 38.



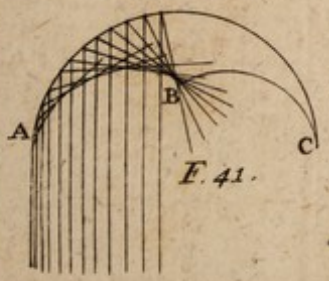
F. 39.



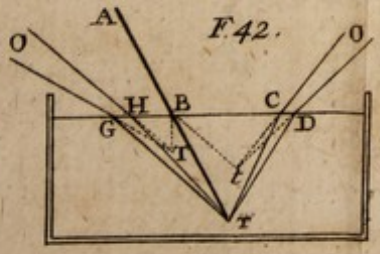
F. 40.



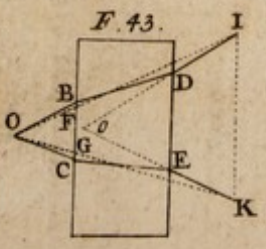
F. 41.



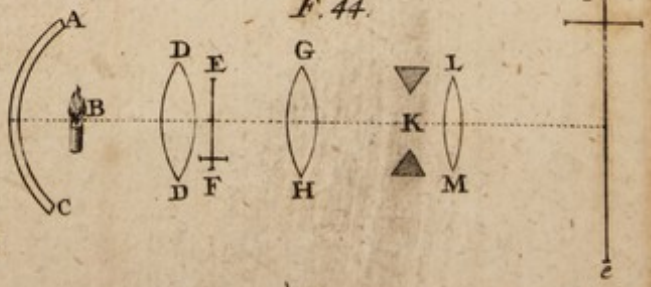
F. 42.

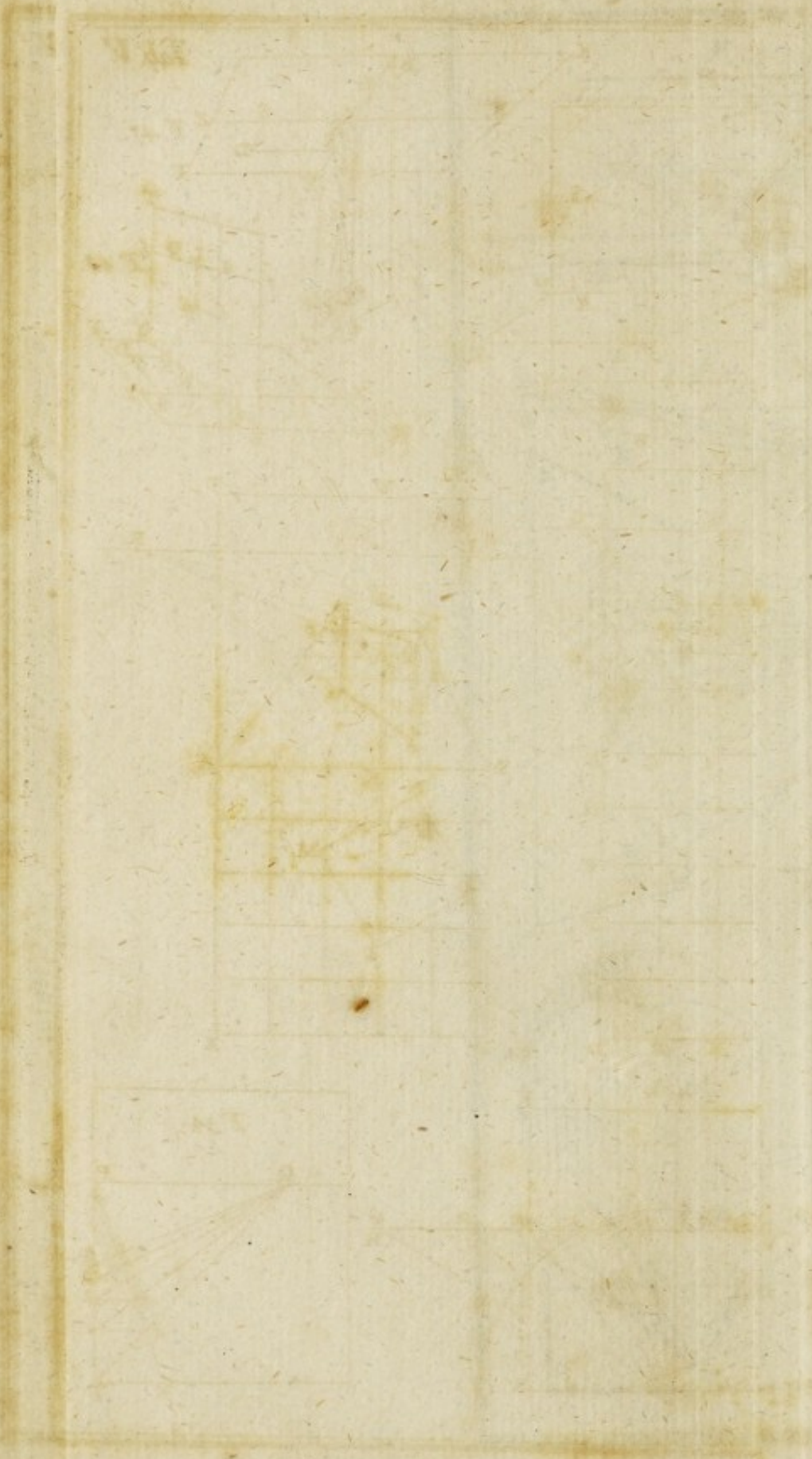


F. 43.

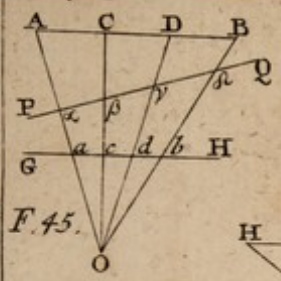


F. 44.

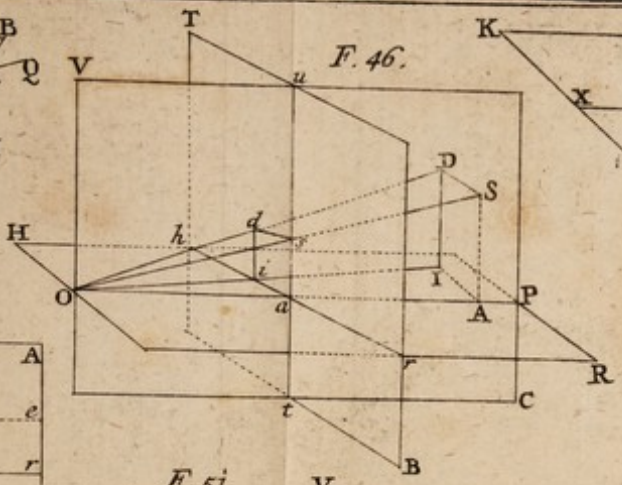




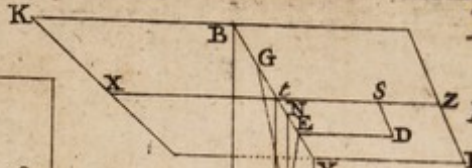
Tab. V.



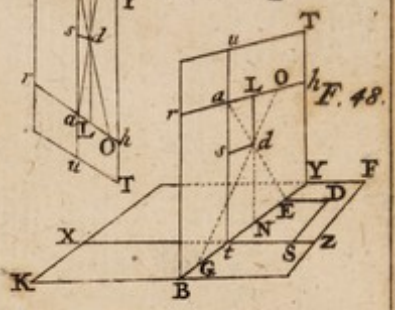
F. 45.



F. 46.



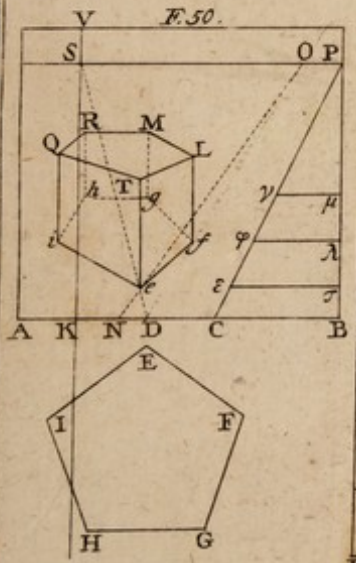
F. 47.



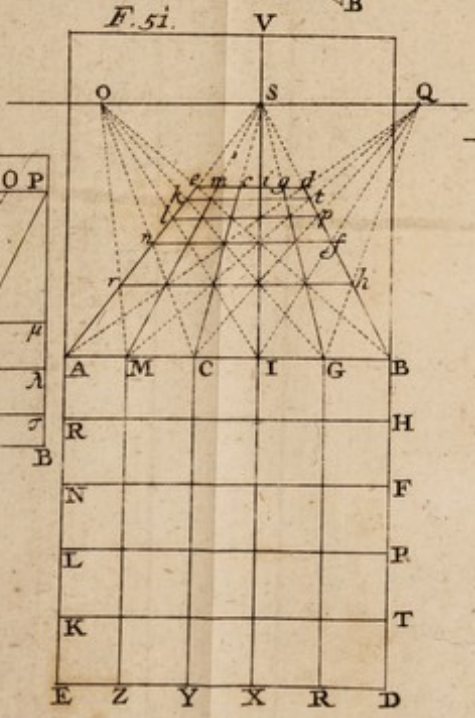
F. 48.

F. 49.

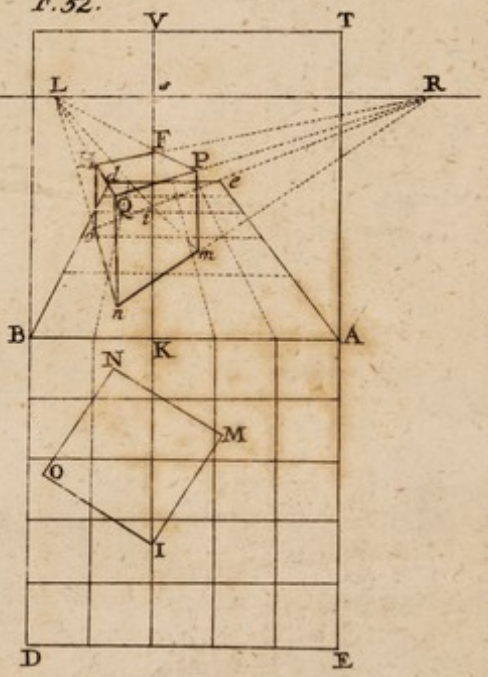
T	b	u	A
E	d	s	e
h	i	a	r
L	K	t	B



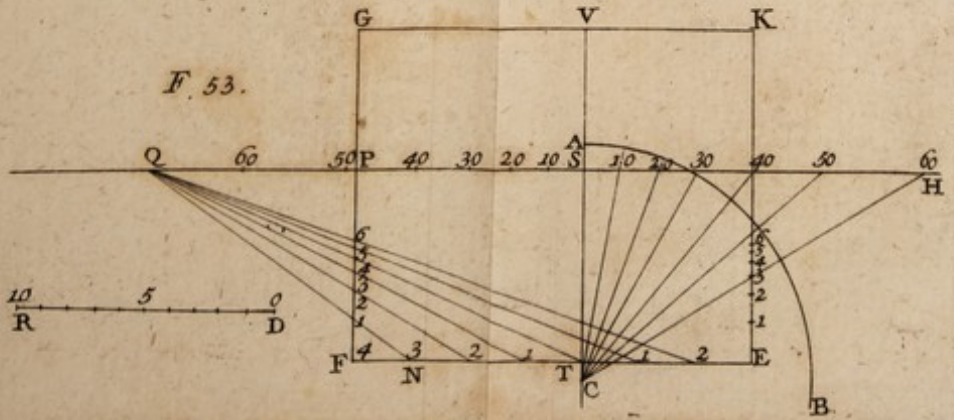
F. 50.



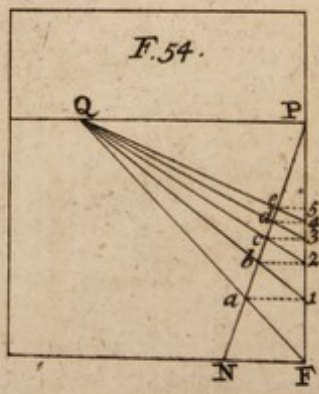
F. 51.



F. 52.



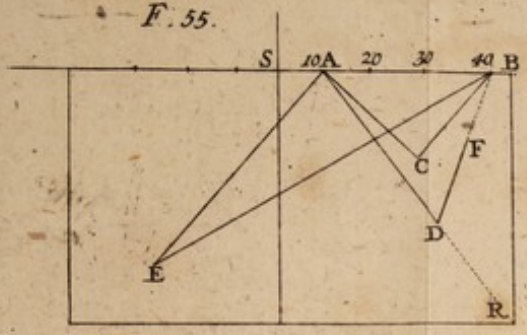
F. 53.



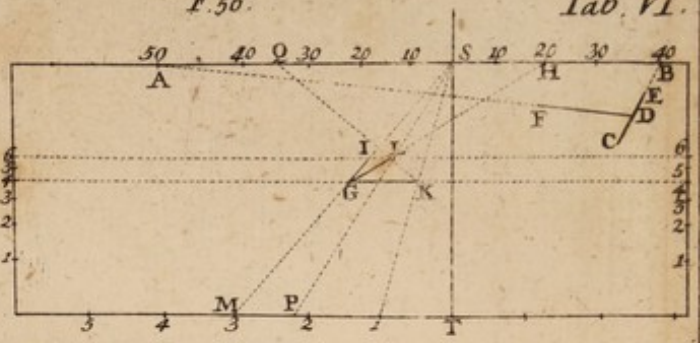
F. 54.

Tab. VI.

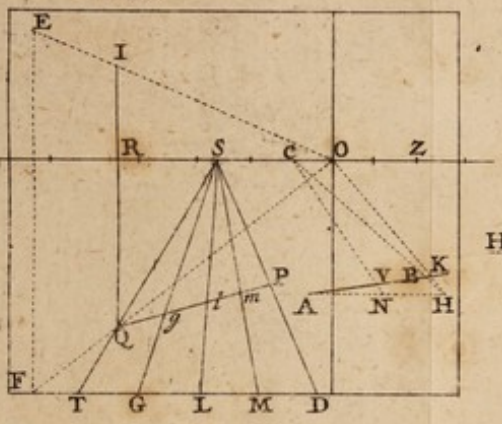
F. 55.

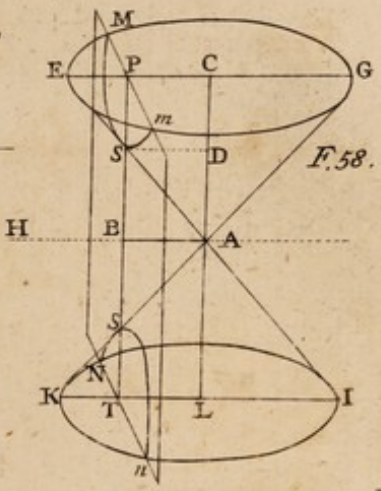


F. 56.



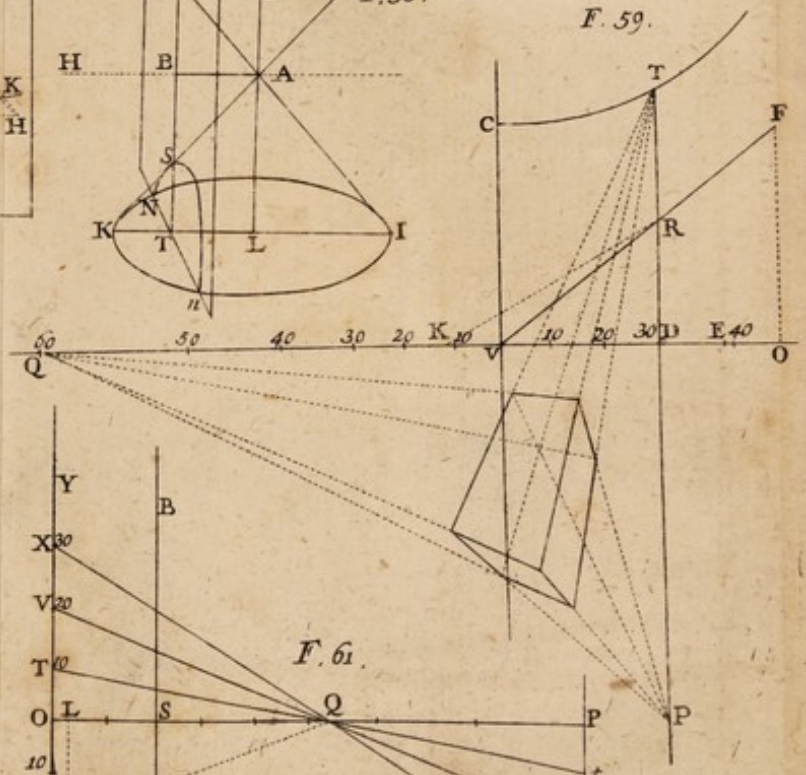
F. 57.



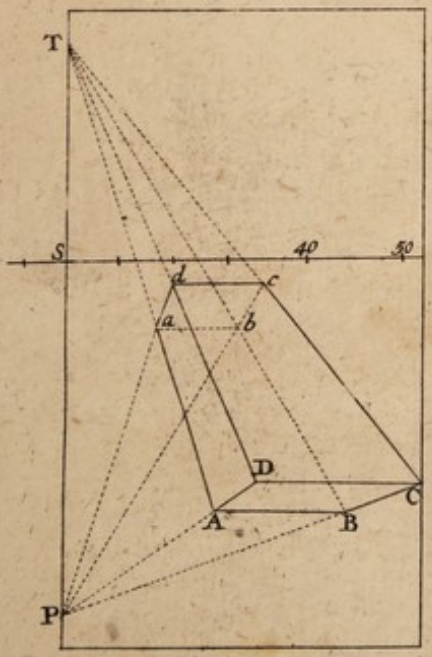


F. 58.

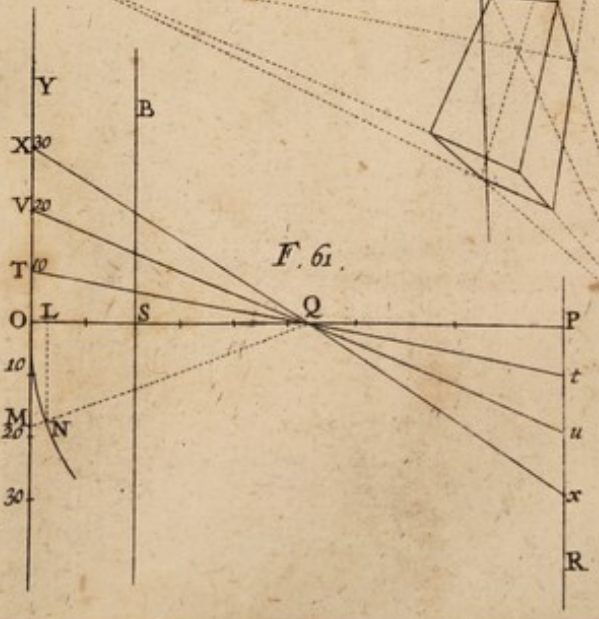
F. 59.

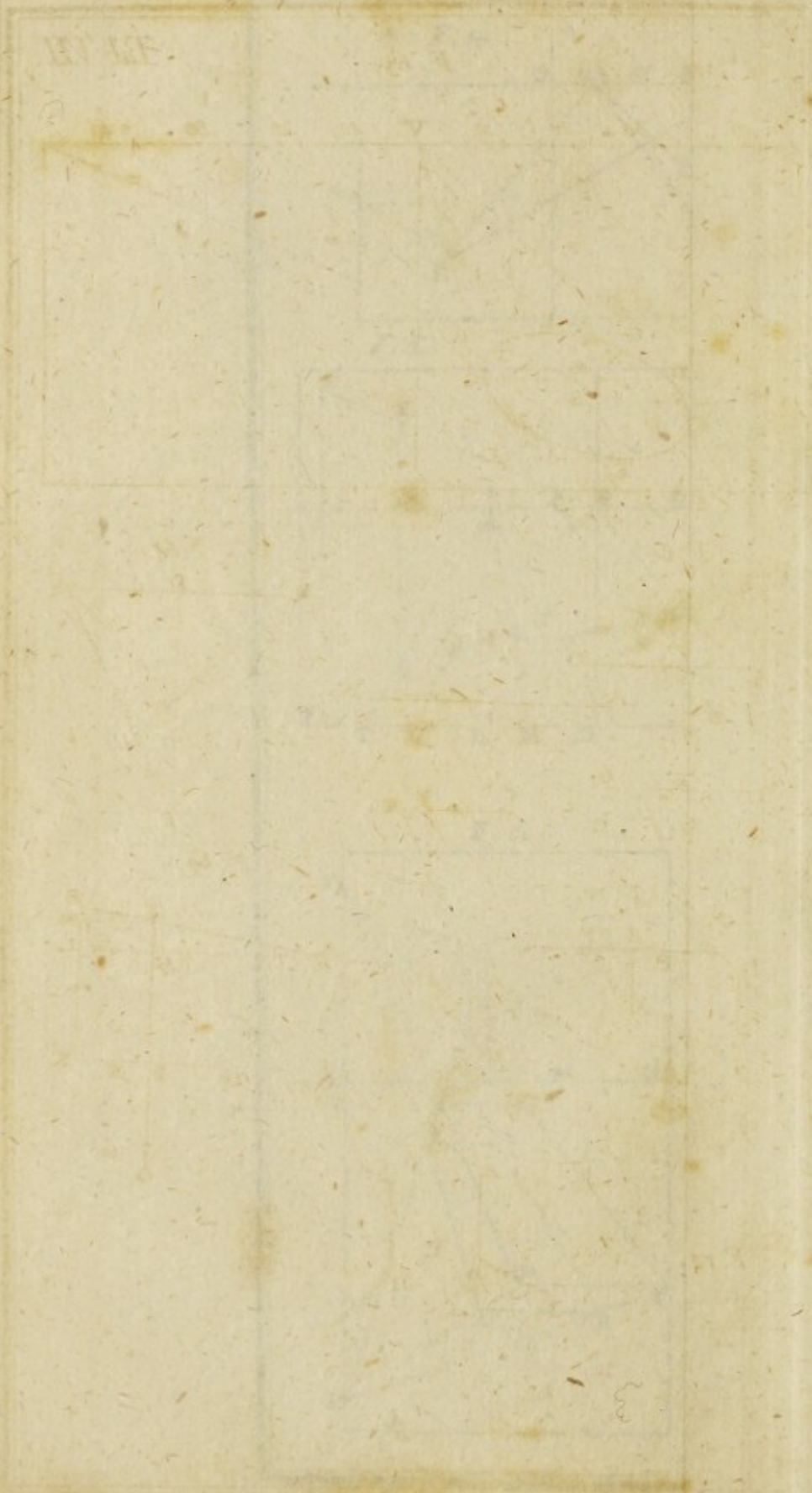


F. 60.



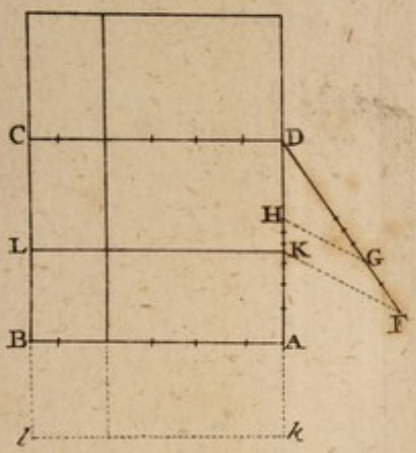
F. 61.



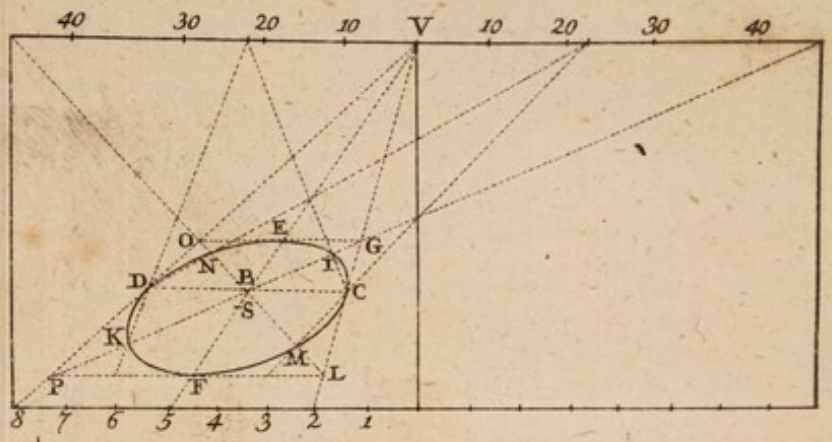


Tab. VII.

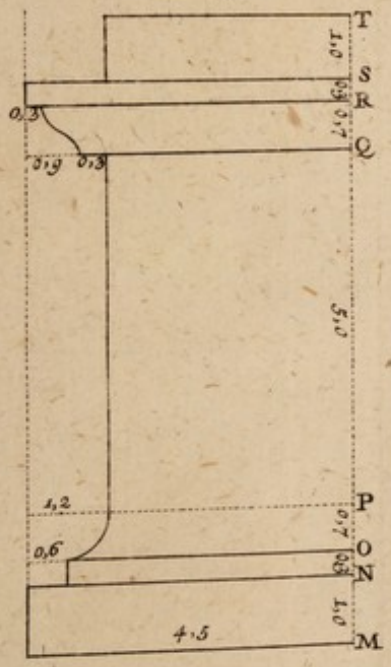
F. 62.



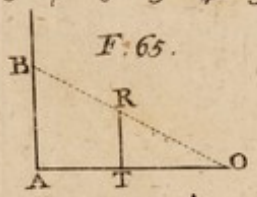
F. 63.



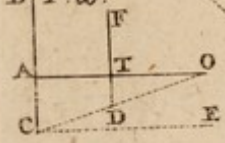
F. 64.



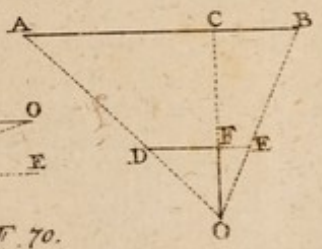
F. 65.



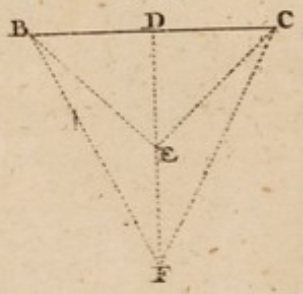
F. 66.



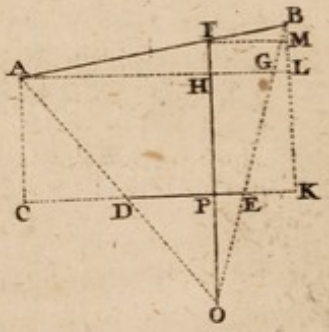
F. 67.



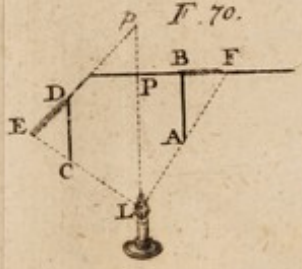
F. 68.



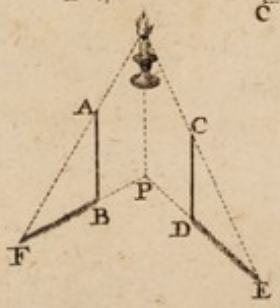
F. 69.



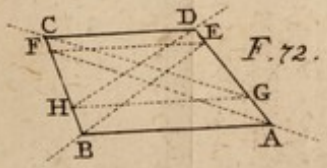
F. 70.



F. 71.

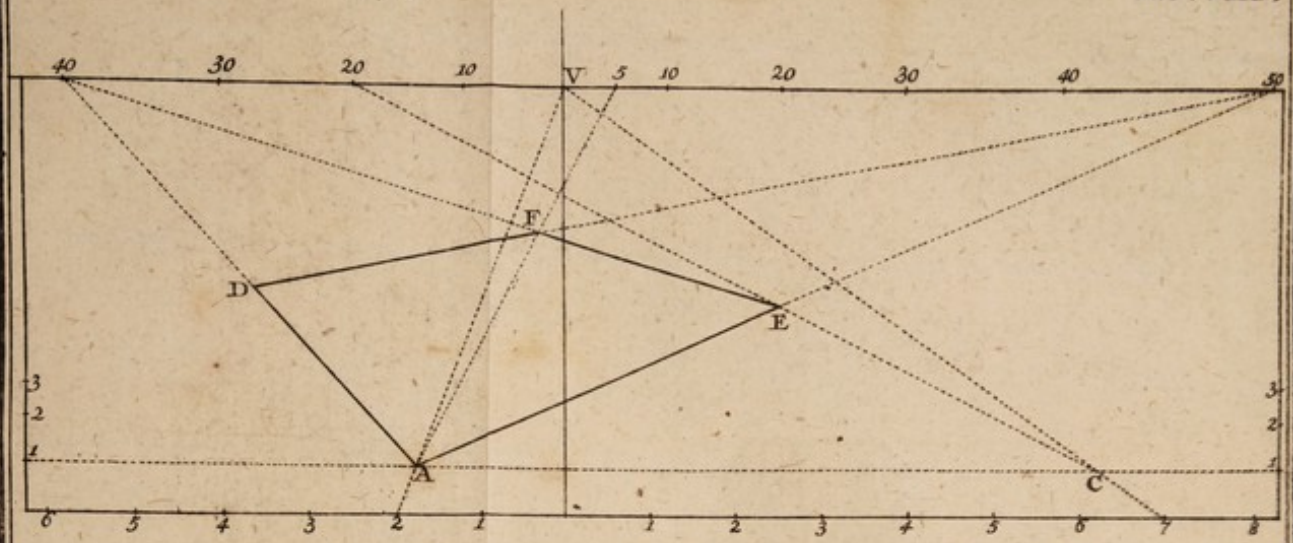


F. 72.

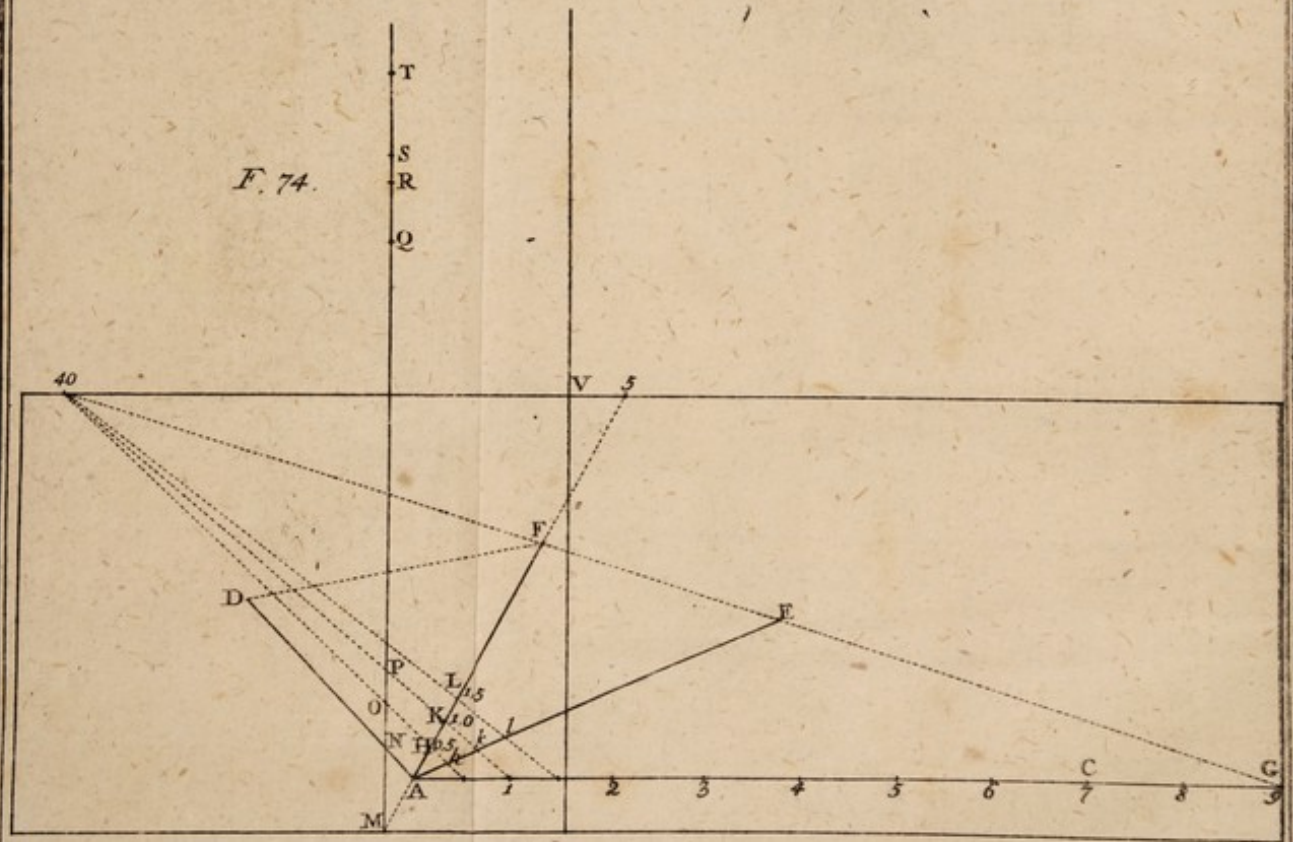


F. 73.

Tab. VIII.

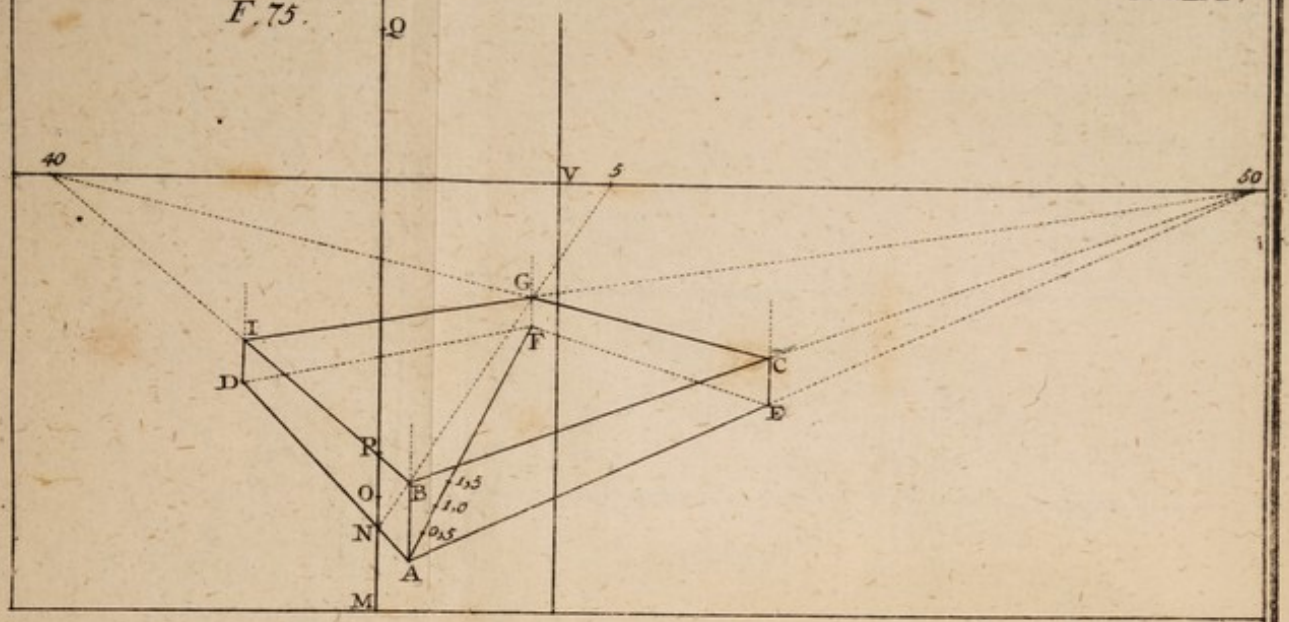


F. 74.

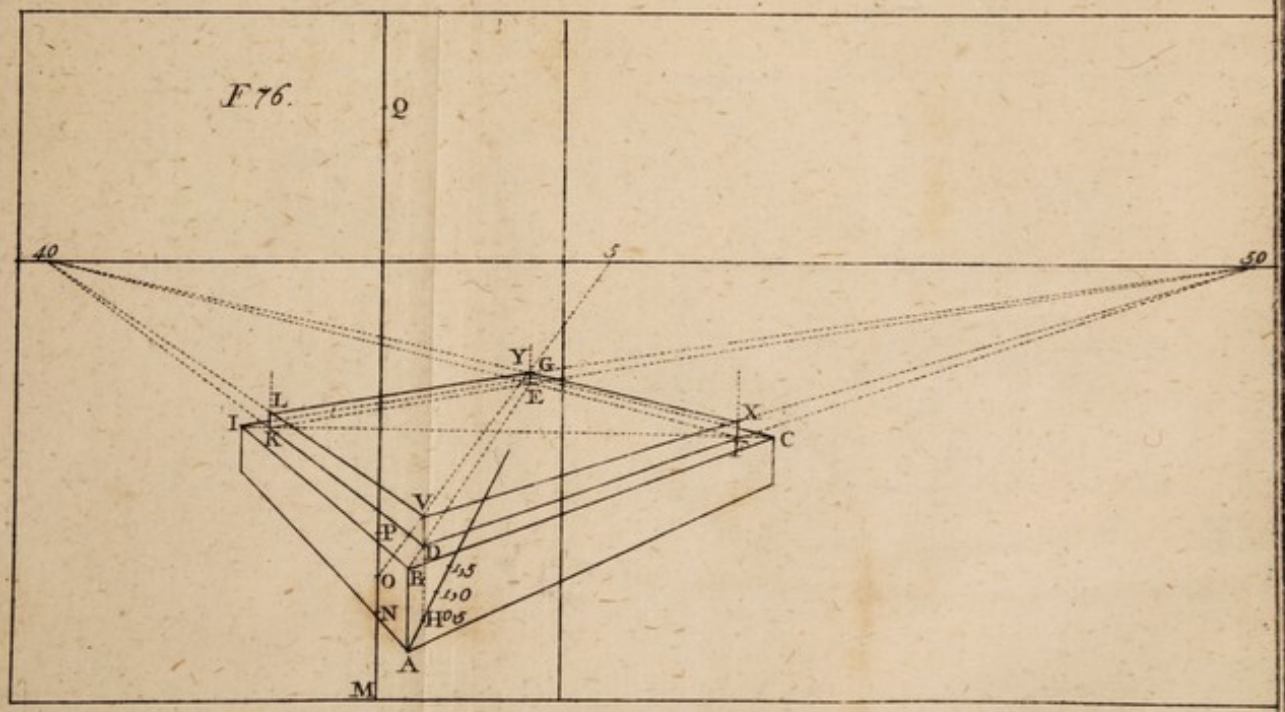


Tab IX.

F. 75.

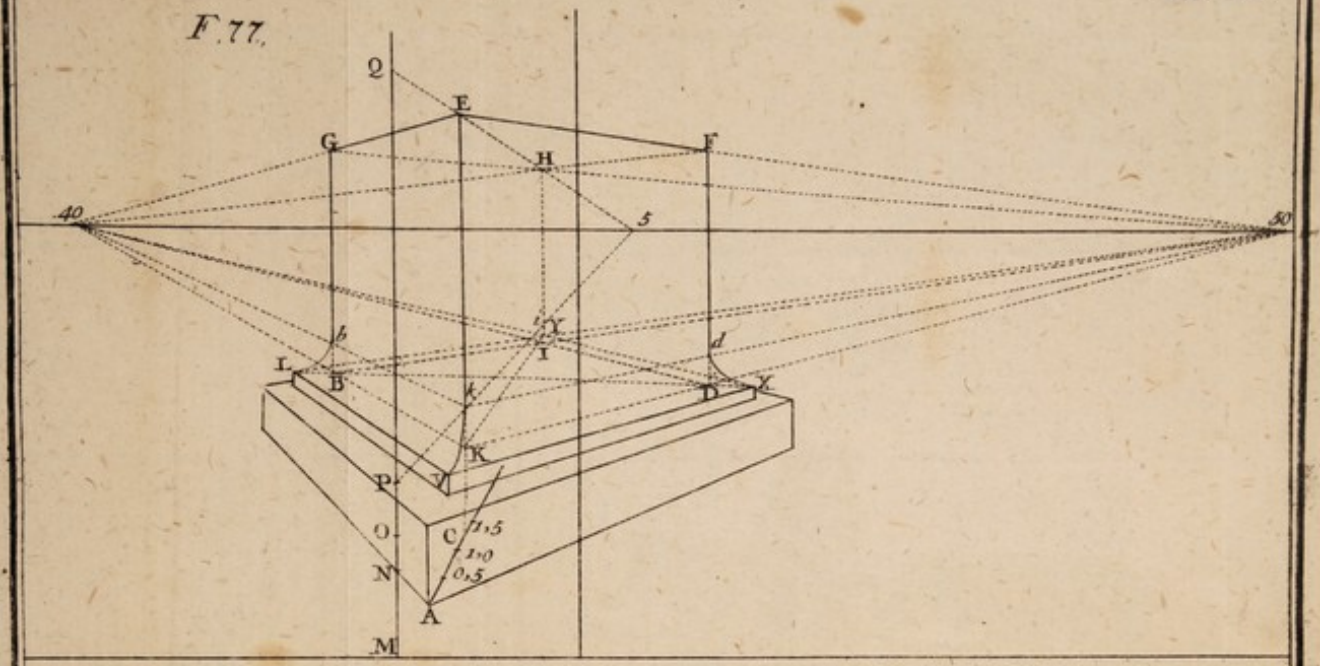


F 76.

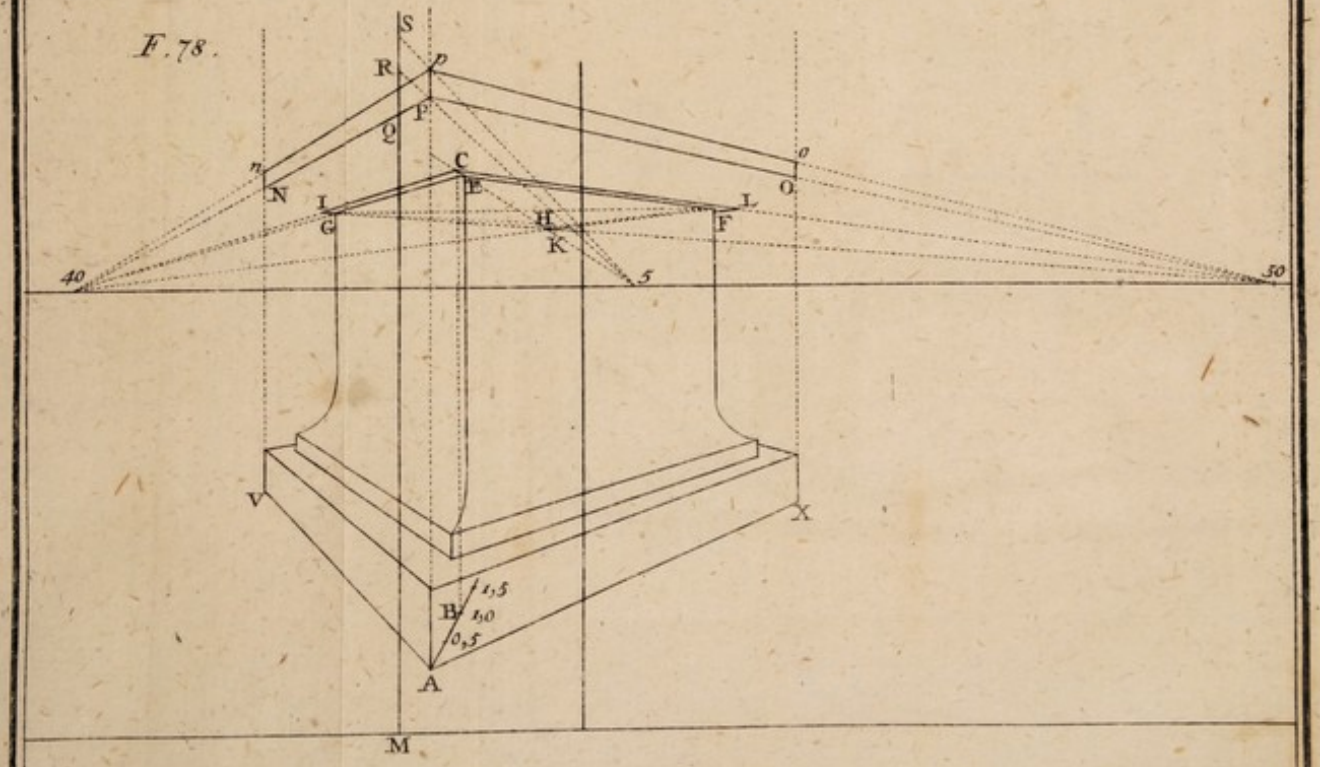


Tab. X.

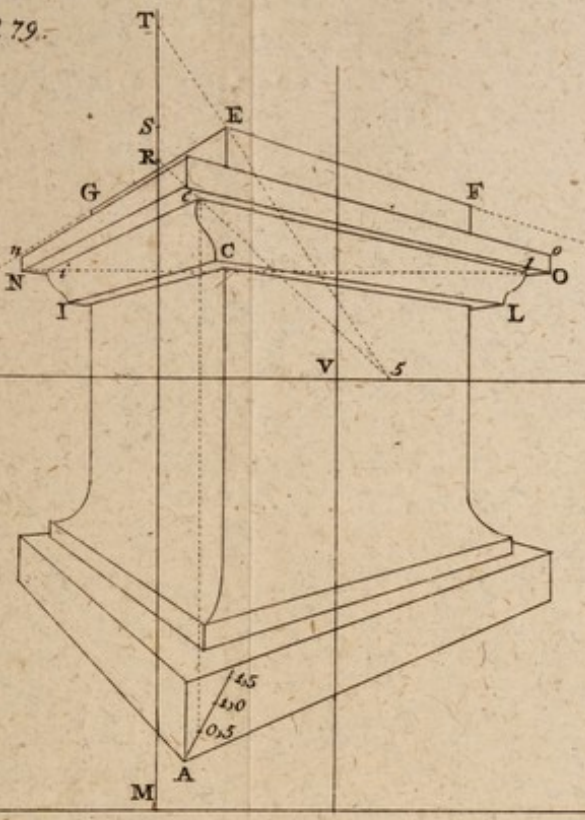
F. 77.


Q
E
G
H
F
40
5
50
b
I
d
L
B
k
D
X
K
P
Y
O
C
1,5
1,0
0,5
N
A
M

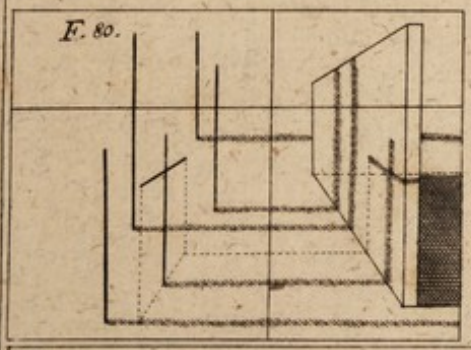
F. 78.


S
R
p
P
Q
n
o
C
N
E
O
I
L
G
H
F
K
40
5
50
V
X
1,5
B
1,0
0,5
A
M

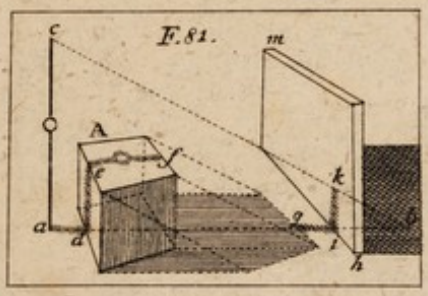
F. 79.

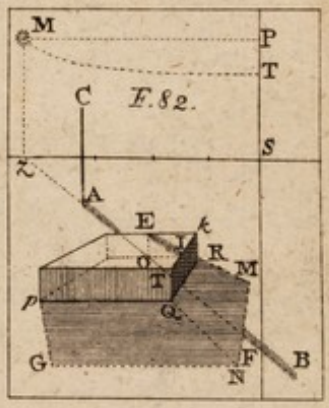


F. 80.



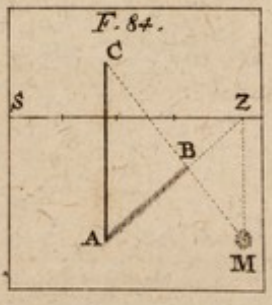
F. 81.

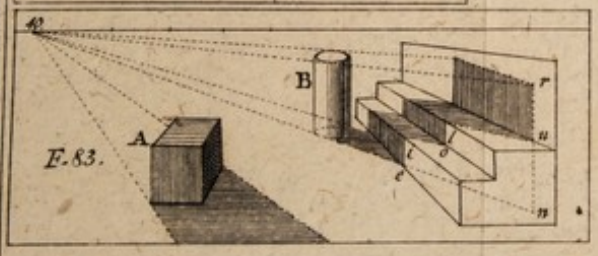




F. 82.

F. 84.

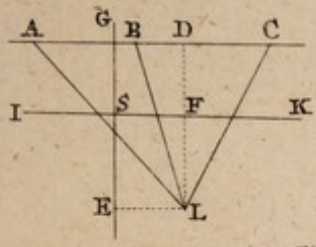




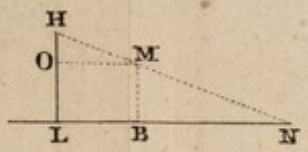
F. 83.

Tab. XII.

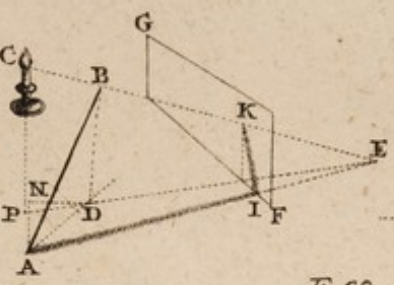
F. 85.



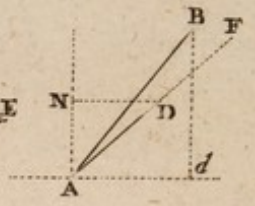
F. 86.



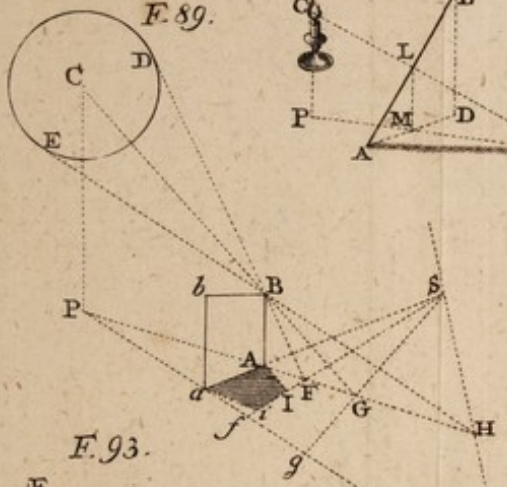
F. 87.



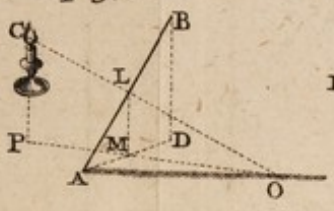
F. 88.



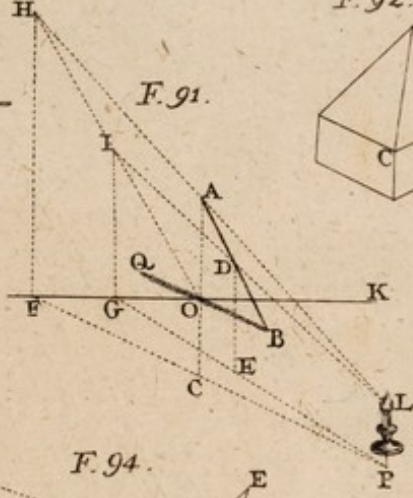
F. 89.



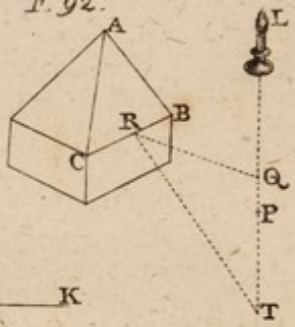
F. 90.



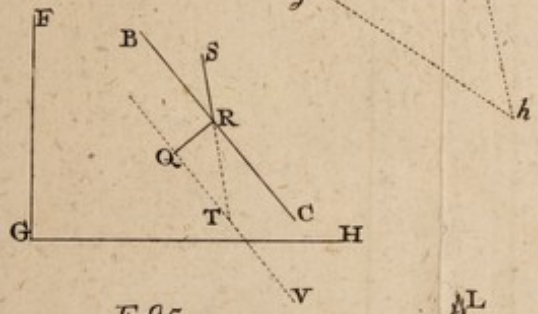
F. 91.



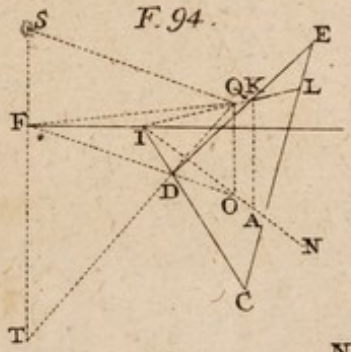
F. 92.



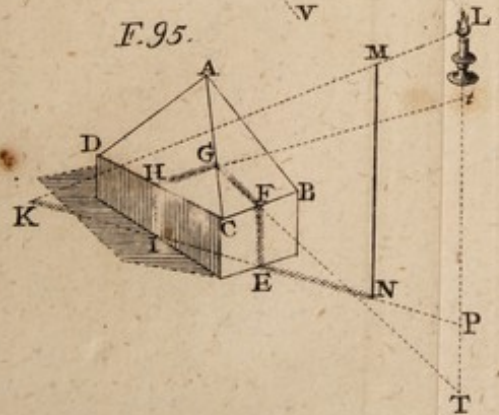
F. 93.



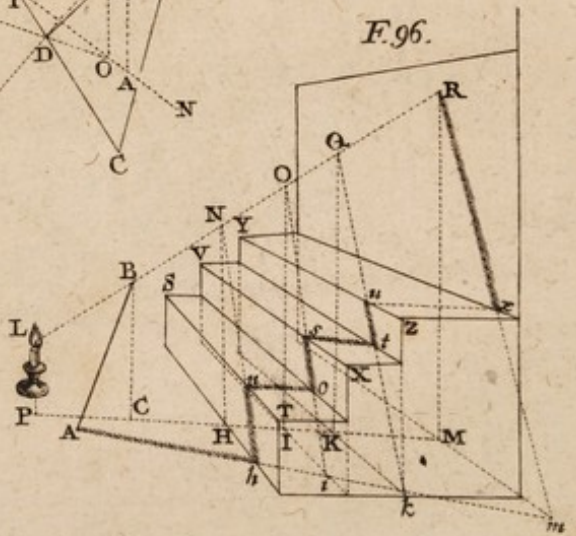
F. 94.



F. 95.

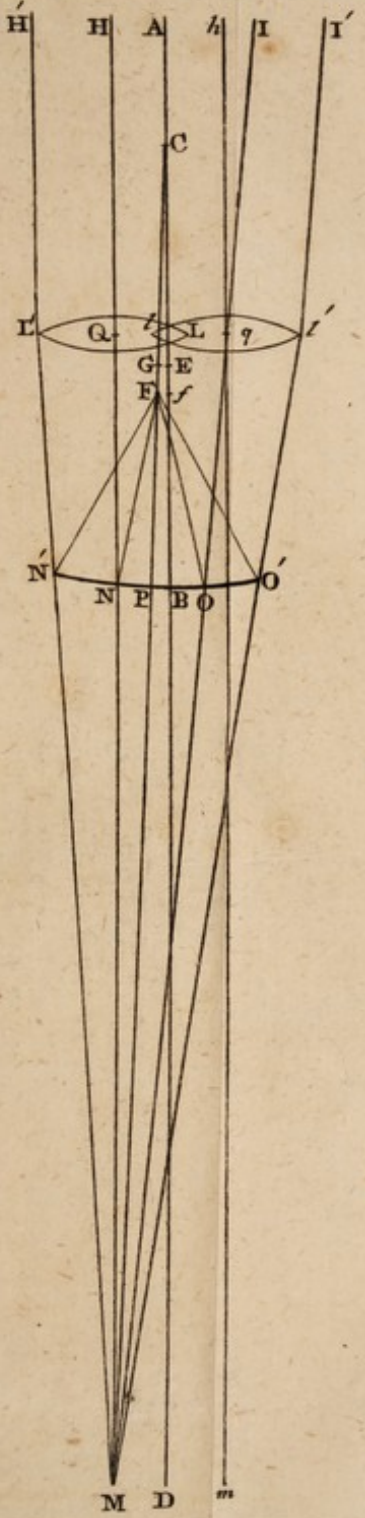


F. 96.

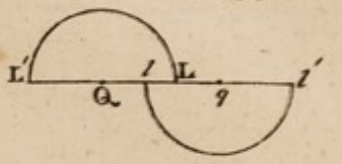


Tab XIII.

F. 1.



F. 2.



CLARISSIMI VIRI

D. DE LA CAILLE,

ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ, SUECICÆ, ET BORUSSICÆ,
NEC NON INSTITUTI BONONIENSIS MEMBRI, AC PROFESSORIS
MATHESEOS IN COLLEGIO MAZARINIANO PARISIIS

LECTIONES ELEMENTARES ASTRONOMIÆ GEOMETRICÆ, ET PHYSICÆ,

EX

EDITIONE PARISINA ANNI MDCCLV

IN LATINUM TRADUCTÆ

A

C. S. E S. J.

A. MDCCLVII.

VIENNÆ & PRAGÆ,

TYPIS ET SUMTIBUS JOANNIS THOMÆ TRATTNER, CÆS. REG.
MAIEST. AULÆ TYPOGRAPHI ET BIBLIOPOLÆ.

LECTORI BENEVOLO.

Paucis te volò, Lector benevole! Si quid cauſæ fuerit, cur e Gallico in Latinum Sermonem hunc librum traduxerim, roges, omnes eas a me tibi exponi credito, quæ Authorem, ut eum conſcriberet, impulerunt; nec illam quidem omiſeris omnino, quam de conſuetis ſuis in Collegio Mazariniano exercitationibus refert; locum ſolum muta, privatum ſubſtitue publico. Quod ad ſtylum, intelligi volui: qui æque omnes oderim libros, quos alieno loco aſſutæ elegantiæ obſcuriores reddunt, ut amem eos, qui cum candida ſimplicitate rem exponunt, Grammaticorum non verentur obeliſcos. At tandem cur in tanto etiam apud nos ſcientiarum nitore aliena offerimus? Fateor, vix a me impetrem, leporem venator ut alta in nive *ſecter*, & poſitum tangere *nolim*. *Denique, ad quæ Lectorem frequenter Author remittit, elementorum citationem, non omittendam putavi, tum quod fieri poſſit, ut alterius etiam opera Latinitate donata Tironi Aſtronomiæ Gallicæ linguæ ignaro uſui ſint, tum quod aliis, qui eo adminiculo non egent, nihil inde incommodi metuerim. Ceterum Algebræ, ac Geometriæ inſtitutiones tot, tamque variæ proſtant, ut qui ad Aſtronomiam accedunt, facile interea, quidquid ex Authoris elementis petere jubentur, aliunde ſupplere poſſint.*

EXTRAIT

DES REGISTRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES DU 20 AOUT 1746.

Messieurs Bouguer & Maraldi qui avoient été nommés pour examiner les *Leçons d'Astronomie* de M. l'Abbé de la Caille, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression : en foi de quoi j'ai signé le présent certificat. A Paris ce 21 Août 1746.

GRANDJEAN DE FOUCHI,

Secr. perp. de l'Ac. Royale des Sciences.

INDEX
ARTICULORUM COMMENTATIONIS ISAGOGICÆ IN TRIGONOMETRIAM SPHÆRICAM.

Pag.

ARTICULUS I. Definitiones & Notiones Trigonometriæ ſphæricæ - - 1
ARTICULUS II. De proprietatibus generalibus triangulorum ſphæricorum - 4
ARTICULUS III. Formulæ trigonometricæ - - - - - - - 7
ARTICULUS IV. Analogiæ pro calculo triangulorum rectangulorum ſphæricorum 11
ARTICULUS V. Theoria calculi triangulorum obliquangulorum - - - 17
ARTICULUS VI. Solutio omnium caſuum, qui in triangulis obliquangulis occurrere poſſunt - - - - - - - - - - - 19
ARTICULUS VII. Diverſæ formulæ Trigonometriæ ſphæricæ - - - 23

INDEX
SECTIONUM, CAPITUM, ET ARTICULORUM LECTIONUM ELEMENTARIUM ASTRONOMIÆ.

SECTIO I, complectens partem primam Aſtronomiæ ſolaris - - - 31
CAPUT I. De ſtellis fixis - - - - - 32
CAPUT II. De Planetis
ARTICULUS I. De diverſis planetarum motibus generatim, & eorum natura 35
ARTICULUS II. De legibus motus Planetarum Primariorum - - - 37
ARTICULUS III. De revolutione annua Planetarum - - - - 38
ARTICULUS IV. De via, quam ſequuntur Planetæ - - - - 38
ARTICULUS V. De cauſis inæqualitatis motuum planetarum - - - 40
ARTICULUS VI. De figura orbitæ planetarum - - - - - 44
ARTICULUS VII. De hypotheſi phyſica ad inveniendam curvam, quam Planeta deſcribit, & determinandam legem inæqualitatum in diverſis orbitæ locis 44
ARTICULUS VIII. Principia Mechanicæ, quibus tota Aſtronomia Phyſica innititur 45
ARTICULUS IX. De proprietatibus motus compoſiti ex vi inſita, ſeu æquabiliter agente, & centrali - - - - - - - 54
ARTICULUS X. De curvis, ad quas planetarum Trajectoriæ revocandæ 65
ARTICULUS XI. De ratione diſtribuendi inæqualitates planetarum in diverſis orbitæ locis - - - - - - 69
ARTICULUS XII. Varia problemata de motu planetarum in orbitis ellipticis 73
ARTICULUS XIII De lege in genere, ſecundum quam vis centralis agit in planetas in trajectoriis conicis motos; & peculiariter de iis, quæ orbitis ellipticis ſunt propria - - - - 79
CAPUT III. De legibus motus Cometarum.
ARTICULUS I. De phænomenis motus cometarum e ſole ſpectatorum generatim, & de hypotheſi phyſica, quæ eidem explicando ſerviat - 86

Pag.

ARTICULUS II. De legibus peculiaribus corporum in trajectoria parabolica motorum, quæ simul exemplo illustrantur - - 89
ARTICULUS III. De ratione distribuendi inæqualitates cometarum in diversis orbitarum parabolicarum locis - - - 93
SECTIO II. Complectens partem primam Astronomiæ Terrestris - 100
CAPUT I. De illusionibus opticis a revolutione diurna telluris circa axem suum pendentibus
ARTICULUS I. De revolutione diurna planetarum in genere, deque ejus causa 103
ARTICULUS II. De phænomenis generalibus a motu diurno telluris pendentibus 105
ARTICULUS III. De motu apparente solis e duplici motu vero telluris proveniente - - - - - 107
ARTICULUS IV. De phænomenis particularibus, quorum causa est motus diurnus telluris - - - - - 110
ARTICULUS V. De ratione observandi, & calculandi accuratius phænomena motus diurni astrorum, prout is ad circulos cuivis telluris loco proprios refertur - - - - - 116
ARTICULUS VI. De ratione determinandi positionem syderum respectu circulorum fixorum sphæræ cælestis - - - 119
ARTICULUS VII. De obliquitate eclipticæ, & quomodo puncta illius ad æquatorem referantur - - - - 122
ARTICULUS VIII. De mensura temporis - - - 123
ARTICULUS IX. De ascensione recta, & declinatione syderum - 128
ARTICULUS X. De præcipuis usibus ascensionis rectæ, & declinationis syderum 130
CAPUT II. De Illusionibus opticis in phænomenis Astrorum, quarum causa est motus telluris annuus - - - - 133
ARTICULUS I. Theoria motuum apparentium & relativorum; ac de eorum projectione orthographica - - - - 133
ARTICULUS II. Applicatio Theoriæ præcedentis ad phænomena pendentia a motu telluris annuo - - - - 143
ARTICULUS III. De motu apparente stellarum fixarum, quem efficit motus telluris annuus - - - - - 144
ARTICULUS IV. De motibus relativis planetarum, quorum causa est motus telluris annuus - - - - - 150
CAPUT III. De illusionibus opticis in phænomenis motus diurni, quarum causa est situs observatoris in superficie telluris - - 153
CAPUT IV. De illusionibus opticis, quæ pendent a refractione radiorum luminis in transmissu per Atmosphæram telluris - - 161
SECTIO III. Complectens partem alteram astronomiæ terrestris; regulas calculi motuum planetarum & cometarum a revolutione diurna telluris non pendentium; & diversas methodos stabiliendi Theoriam ex observationibus in superficie telluris institutis
CAPUT I. De theoria planetarum, prout e terra videntur - - 164
ARTICULUS I. De motibus planetarum ad planum eclipticæ relatis, tam solis, quam telluris respectu - - - - 164
ARTICULUS II. Expositio generica totius ordinis calculi necessarii ad inveniendam longitudinem & latitudinem planetæ e sole & terra visam pro tempore dato - - - - - 167
ARTICULUS III. Enumerantur elementa necessaria ad stabiliendam theoriam planetarum e sole & terra visorum, & simul exponitur methodus hac in materia observanda - - - - 169

ARTI-

Pag.

ARTICULUS IV. De melioribus methodis ſtabiliendi elementa theoriæ ſolis, cum exemplis applicatis ad obſervationes, quæ ad determinationem horum elementorum ſunt inſtitutæ - - - 171
ARTICULUS V. Methodus reducendi omnes obſervationes planetarum in ſuperficie telluris inſtitutas ad eas, quæ eodem tempore fierent, ſi obſervator in ſole collocaretur - - - - 177
ARTICULUS VI. Diverſæ methodi inveniendi elementa theoriæ planetarum ex obſervationibus in terra inſtitutis - - - 178
ARTICULUS VII. De lumine & figura planetarum - - 181
CAPUT II. Theoria cometarum e terra viſorum - - 184
ARTICULUS I. De calculo motus cometarum e terra ſpectati - 185
ARTICULUS II. Methodus determinandi omnia elementa theoriæ alicujus cometæ ex obſervationibus in terra inſtitutis - - 187
ARTICULUS III. De calculo cometarum in orbitis ecliptici - 199
SECTIO IV. Complectens partem alteram Aſtronomiæ ſolaris ſive explicationem legum motus diurni planetarum, ut e ſole ſpectantur - 200
ARTICULUS I. De phænomenis generalibus motus diurni - 201
ARTICULUS II. De iis, quæ ex allatis phænomenis immediate conſequuntur: de diebus ac noctibus, eorumque diverſa longitudine: de viciſſitudine tempeſtatum anni: de ſolſtitiis & æquinoctiis - - 204
ARTICULUS III. De cauſa generali horum phænomenorum - 205
ARTICULUS IV. De obliquitate ecliptica: de diverſo ſitu polorum æquatoris reſpectu ſolis: de declinatione & aſcenſione recta ſolis - 207
ARTICULUS V. De temporibus rotationis planetarum circa ſuos axes; de tempore vero & medio - - - - 210
ARTICULUS VI. De differentia meridianorum; de longitudinibus, & latitudinibus Geographicis; de methodo Geographorum - - 212
ARTICULUS VII. De altitudinibus ſolis, & earum variationibus - 214
ARTICULUS VIII. Phænomena expoſita Geometrice & Trigonometrice determinantur - - - - - 216
ARTICULUS IX. Quædam obſervanda circa theoriam præcedentem; & de præceſſione æquinoctiorum - - - - 219
SECTIO V. Complectens partem tertiam Aſtronomiæ ſolaris, ſive explicationem motuum planetarum ſecundariorum e ſole viſorum - 220
SECTIO VI. Continens partem tertiam aſtronomiæ terreſtris, ſive explicationem theoriæ lunæ e terra viſæ; & hinc ducta analogia, aliorum ſatellitum, ut e ſuis primariis ſpectantur
CAPUT I. Theoria motuum lunæ - - - - 231
ARTICULUS I. De phaſibus lunæ - - - - 232
ARTICULUS II. Enumerantur præcipua elementa theoriæ motuum lunæ ex obſervationibus aſtronomicis deducta - - - 234
ARTICULUS III. De natura vis centralis lunæ reſpectu terræ; & ducta hinc analogia, de natura vis centralis planetarum reſpectu ſolis - 236
ARTICULUS IV. De cauſis phyſicis, quæ diverſas inæqualitates lunæ in revolutione ſynodica efficiunt - - - - 237
ARTICULUS V. De combinatione cauſarum phyſicarum, quæ regularem motum lunæ perturbant - - - - 240
ARTICULUS VI. Exponuntur effectus, qui ex viribus tribus allatis, ac inter ſe compoſitis oriuntur - - - - 241

Pag.

ARTICULUS VII. De libratione lunæ - - - 248
ARTICULUS VIII. De inæqualitatibus motus telluris e gravitate lunæ provenientibus - - - - - 249
ARTICULUS IX. Explicatio & calculus inæqualitatum apparentium in motu aſtrorum, quæ ab inæquali præceſſione æquinoctiorum pendent: cum methodo calculandi omnes motus apparentes fixarum, comprehenſa etiam earum aberratione - - - - 252
CAPUT II. De calculo eclipſium ſatellitum e ſuperficie planetæ primarii viſarum
ARTICULUS I. De determinatione phaſium eclipſium lunæ & ſolis - 258
ARTICULUS II. De uſu obſervationum eclipſium ſolis & lunæ - 269
ARTICULUS III. Determinatio graphica occultationum ſtellarum per lunam 273
ARTICULUS IV. Methodus conſtruendi ſchema univerſale phaſium eclipſeos ſolaris - - - - - 274
CONCLUSIO. Animadverſiones in ſyſtema Phyſicum Aſtronomiæ - 278

MONI-

MONITUM AUTHORIS.

Mirabilis ſyderum ordo, ſtupenda motuum varietas, ſtellarum fixarum ſplendor, innumerabilis copia, qua cælum omne collucet, in immenſum porrecta ſpatia, cometarum aſpectus, ac phænomena prorſus ſingularia; paucis, quidquid cælum omni momento noſtris offert oculis, nunquam non hominum ſciendi avidam mentem tenuit. Verum hæc ſingula prodigia, quæ etiam animum maxime hebetem percellunt, & quorum notitia vel iis momenti permagni videtur, qui ea carent, eo admirabiliora evadunt, quo in ea penetratur profundius, quo motrices horum corporum cauſæ evolvuntur magis, quo accuratioribus calculis motus tam varii ſubjiciuntur, combinatis inter ſe tot virium effectis, jam conſpirantium, jam ſecum ipſis confligentium; quæ nihilominus duabus modo teneantur legibus adeo ſimplicibus, ut nemo unquam alias, ſi quid conjectura aſſequimur, quæ tot efficiendis rebus aptæ ſint, æque planas excogitarit.

Verum ſpectaculum tam illuſtre, tam digna capaciſſimarum etiam mentium occupatio, oblectandis modo animis facta conſebuntur, ſi nos non perpetuo incitent, ut conditoris Dei magnitudinem, ac ſapientiam admiremur, ut eum celebremus laudibus, ut noſtram gratitudinem teſtatam faciamus; ſi non ſit, quod in humanæ ſocietatis bonum inde derivemus. At enim Aſtronomia certe arbitra eſt civilium temporum, fulcrum Hiſtoriæ, Chronologiæ & Geographiæ anima, dux unica navigantium.

Mirum eſt, quantum Aſtronomiæ limites ſuperioribus duobus ſæculis ſint prolati, præcipue tuborum opticorum, & horologiorum pendulis inſtructorum inventis, & quod Europæ Principes peculiari eam favore complecterentur. Nemo ſane erit, qui negare auſit, eminuiſſe ea in re Reges noſtros, nec fuiſſe quidquam, in quo horum vota eruditi Galliæ viri ſint fruſtrati. Et quamvis Galliæ terrarum orbis magnum illud ingenium non debeat, quod legibus cæleſtium motuum methodo tam ſublimi evidentiam conciliavit, attamen illud in acceptis referet, quod obſervationes eas ſuppeditarit, ſine quibus leges illæ, quas divinando aſſecutus Keplerus omnis Theoriæ ſuæ fundamentum conſtituit, fortaſſis inter erudita adhuc haberentur commenta; aut earum cum cæleſtibus phænomenis conſenſus felici tribueretur in conjectando audaciæ, quam falſi quivis damnaturus ſit, quem cælum ſpectandum fors præbebit, non viſus antea planeta.

Poſtquam receptis Newtoni calculis uſus ille exolevit, quo inter omnes ſuperiorum temporum Aſtronomos convenerat, ut hypotheſis quævis, quæ phænomena ſalva præſtaret, admitteretur; poſtquam hac theoria duce eo pervenimus, ut inæqualis aſtrorum motus ſola virium in corpora cæleſtia agentium analyſi exponatur, ſervata illa lege duplici, quam diximus; poſtquam denique a triginta fere annis in obſervationibus faciendis quam accuratiſſime peculiaris adhibetur induſtria, Aſtronomia ad novum Indies perfectionis gradum provehitur. Complures magni nominis Geometræ huc ſuam contulerunt operam, delectu feliciore, & ampliore commodo, quam non pauci, qui poſt Newtonum in re eadem ſunt verſati; etenim Problematum ſolutionibus univerſalibus relictis, Theoriam cum obſervationibus accuratiſſimis comparantes novas condiderunt regulas, quibus pars Aſtronomiæ practica, quæ calculis occupatur, non parum

auctior ditiorque est reddita. Verum illud etiam plerumque evenit, ut quo inventa ejusmodi subtilius excogitata sunt, eo plus difficultatis in usu objiciant, nisi jam antea cœlestium motuum rationes, calculorum methodi, principia denique Physica, quibus Theoria hæc nova immititur, velut in numerato habeantur.

Quare Lectiones, quas liber hic offert, lectioni eruditorum id genus voluminum, varias Astronomiæ partes pertractantium, quæ magno jam numero in lucem emissa sunt, viam sternent. Mihi vero ad eas conscribendas causæ fuit, tum ut consuetis in Collegio Mazariniano exercitationibus præberent materiam, tum quod nulla apud nos alia extarent elementa, quæ Geometricam Astronomiæ partem cum Physica ordine debito conjungerent. Illud autem in iis conatus sum, ut quæ & recens & vetus Astronomia scitu digna suppeditat, complecterentur omnia: tum etiam ut eam tenerem methodum, qua apud lectorem & inquirendi nova desiderium, & altius penetrandi cupiditatem, & ad calculos revocandi singula, ac per se se experiundi amorem accenderem.

At enim, cum, ut explicarentur, lectiones hæ conscriptæ sint, facere non debui, ut per singula discurrerem longius: quin in tanta rerum pertractandarum copia, demonstrationes in arctum contrahendæ fuerunt; quamvis curæ mihi maxime fuit, ut ne quid perspecuitati officerem, dum velut necessitate quadam & rebus per se abstractis, & scribendi generi adeo conciso tenebras offundi non nullas compertum haberem; quas ut discuterem, præcipuis tum observationum, cum etiam calculorum methodis exempla adhibui; demonstrationes, peculiaria theoremata, observationes illustrationi destinatas, minore exhibenda charactere curavi, tum ne cœptæ jam ratiocinationes interrumperentur, tum ne lector alibi quærere cogeretur, quæ ab Astronomia aliena quidem, usus tamen sunt non modici. Et quoniam mihi propositum erat tam modernorum, quam antiquorum inventa, ac methodos praxi Astronomicæ commodiores hoc libro exhibere, facile quisque intelliget, nihil eum complexurum aliud, quam quod e celebriorum Geometrarum, & Astronomorum scriptis desumpsi, adeo ut præter ordinem, rerumque delectum nihil a me quispiam expectet. Nec tamen compilatoris notam ab iis vereor, qui, quid libri Astronomici adhuc procusi contineant, norunt. Si expositionem physicam motuum lunæ demas, cujus fundamenta Gravesandii sunt, cetera omnia ita accommodavi, ut ab iis, qui elementa mathematica a me tradi solita perceperunt, facile comprehendi possint. Atque hæc, ut ea, quam dixi, ratione præstarem, & rei Astronomicæ notitia, & habitudo, quam viginti annorum tractatione continua acquisiveram, suadebant.

Inter methodos varias hoc libro occurrentes plures sunt, quæ positioni falsi immittuntur; id quod facit, ut indirectæ sint, eaque careant elegantiæ specie, quæ tantopere arridet Geometris. Sed quoniam & minus implicatæ, & intellectu faciliores, & usus expeditoris sunt, non exigua Astronomiæ commoda præstant; quin cum via non minus tuta, & breviore ad eadem nos deducant, methodis directis præferri debent, quæ sæpe ad pompam potius, si dicere fas est, & elegantiam excogitatæ videntur, hoc est, quarum theoria pulcherrima, usus haud æque securus, quod eam in observationibus exigant accurationem, quam frustra expectes.

Quod ad citationes, quas frequentes parentheseos notis inclusas liber exhibet, eæ, si solis numeris fiant, harum ipsarum lectionum Astronomiæ paragraphos notant; quod si vocem Elem. præfixam habent, ad elementa Algebræ & Geometriæ, An. 1747 edita lectorem remittunt, quæ singulis annis prælego.

COM-

COMMENTATIO ISAGOGICA IN TRIGONOMETRIAM SPHÆRICAM.

ARTICULUS I.

Definitiones & Notiones Trigonometriæ ſphæricæ.

1.

Trigonometria Sphærica eſt ſcientia calculandi triangula, quæ in ſuperficie globi ex tribus arcubus circulorum maximorum fiunt.

Itaque circuli minores calculum trigonometricum non ingrediuntur, tum quod non ejusdem ſint magnitudinis, uti circuli maximi, ſed radiis diverſis deſcribantur; cum etiam quod eorum plana non eundem ſemper axem ſecent, nec aliud commune omnibus ſit punctum, quemadmodum omnes circuli maximi per ſphæræ centrum neceſſario tranſeunt.

2. Si concipiatur diameter per centrum ſphæræ ad planum circuli maximi perpendicularis, ea *axis* circuli; extrema vero illius puncta, ejusdem *poli* dicuntur.

3. Hinc ſequitur 1*mo*, *inter polum & quodvis circuli maximi peripheriæ punctum ſemper arcum* 90° *intercipi, menſura hac in ſuperficie ſphæræ accepta.*

4. *2do: data in ſphæra circumferentia circuli maximi, inveniri polos illius:* nempe ope circini cruribus arcuatis inſtructi, qui propterea circinus ſphæricus dicitur: cruribus enim ad quartam peripheriæ partem diductis, alterum in quovis circuli puncto figitur, altero arcus utrinque in ſphæræ ſuperficie deſcribitur. Tum eadem manente apertura, rurſus in alio ejusdem circuli puncto fixo crure altero, priores arcus interſecantur. Quatuor horum arcuum duplex interſectio utrumque determinat polum 90° a peripheria circuli maximi dati diſtantem.

Et viciſſim: *dato polo circuli maximi, is deſcribitur* ope ejusdem circini ad quadrantem peripheriæ aperti, ut ſcilicet ejus crura 90° gradus ſphæræ, ſeu alterius circuli in plano deſcripti, ſed ejusdem cum ſphæra diametri, intercipiant: crure enim uno in polo dato, tanquam centro, fixo, alterum circumductum in ſuperficie globi petitum circulum maximum deſcribit.

5. *3tio idem eſſe, ſive e polo circino ſphærico circulus maximus, aut quivis ejus arcus deſcribatur, ſive circini alius cruribus rectis præditi crus alterum in centro ſphæræ figatur, altero autem ad diſtantiam radii aperto in ſuperficie ejusdem deſcriptio fiat.* Et generatim: *ut circulus aut ejus arcus quilibet in ſphæræ ſuperficie deſcribatur, circini crus alterum in quovis axis illius puncto* A *tanquam centro poſitum eſſe poteſt.* Tum enim circulus talis velut baſis coni recti conſideratur, apicem in puncto A habentis, qui proinde a circuli illius peripheria undique æqualiter diſtat.

6. *4to. Quemvis circulum maximum ſphæræ habere polos ſibi proprios*, ut adeo *idem punctum plurium circulorum maximorum polus eſſe nequeat.*

7. THEOREMA I. *Duo quivis circuli maximi in ſuperficie Sphæræ deſcripti ſe mutuo bifariam ſecant.*

Etenim cum utriuſque circuli planum per centrum ſphæræ tranſeat, communis planorum interſectio ſit recta oportet, quæ itidem per centrum tranſit, & utrinque in utriusque peripheria terminatur; atqui talis recta eſt diameter utrique circulo communis; & omnis diameter ſecat circulum bifariam, igitur &c.

8. Hinc infertur: *a duobus arcubus circulorum maximorum, qui minores ſint* 180. *gradibus, in ſuperficie ſphæræ ſpatium comprehendi non poſſe.* Quippe ſi ſe interſecent ad aliquem angulum, ab una usque ad alteram interſectionem ſemicircumferentia intercipi debet: at enim per hypotheſin arcus ſunt minores dimidia peripheria, igitur ſpatium in ſuperficie ſphæræ claudere non poſſunt.

9. Definitio. *Menſura anguli ſphærici eadem eſt, ac inclinationis planorum utriusque circuli maximi, qui interſectione ſua eum angulum efficiunt.*

10. Unde ſequitur 1mo, *arcum* FE *circuli maximi, e vertice* B *anguli cujusvis ſphærici* EBF (fig. 1.) *tanquam polo, deſcriptum eſſe menſu-*

ram ejus anguli. Et univerſim: *arcum quemvis* f e, *e vertice* B *deſcriptum, & inter crura* B F, B E *anguli cujusvis ſphærici* F B E *interceptum, eſſe menſuram illius anguli.* Sint enim A E B C A, & A F B C A, plana duorum ſemicirculorum, qui interſectione ſua angulum ſphæricum F B E efficiunt: evidens eſt 1*mo* (Elem 630.) radiis E C, & F C in utroque plano ad communem interſectionem A B normalibus ductis, angulum F C E eſſe æqualem inclinationi planorum, quam arcus F E centro C deſcriptus menſurat: ſed idem arcus (5) e polo B deſcribitur: ergo & arcus circuli maximi polo B deſcriptus menſurat angulum ſphæricum F B E. 2*do* evidens quoque eſt, quod ſi *c e*, *c f* in utroque plano ad communem interſectionem A B perpendiculares in quolibet puncto *c* ducantur, eæ futuræ ſint ambæ in plano ad A B perpendiculari, adeoque in plano circuli parallelo ad circulum maximum Polo B deſcriptum: Hinc A B eſt communis horum duorum circulorum axis, & angulus *e c f* æqualis angulo E C F, ejusque menſura *f e* (arcus centro *c* deſcriptus) itidem æqualis inclinationi planorum A E B C A, & A F B C A (Elem. 630.). Atqui idem arcus *f e* e puncto B in axe A B accepto deſcribitur (5): quare quilibet arcus *f e* e vertice B anguli ſphærici deſcriptus, & inter ejus crura F B, E B interceptus, eſt menſura ejusdem anguli.

11. Sequitur 2*do*: *ſi prolongentur arcus angulum ſphæricum* F B E *comprehendentes, donec rurſus ſe interſecent in* A, *angulum* F A E *fore æqualem angulo* F B E *partesque productas eſſe eorum arcuum complementa.* Etenim cum arcus ſeſe denuo interſecare nequeant, niſi in diſtantia 180°; uterque arcus B F A, B E A erit 180°. Et quoniam B polus eſt arcus F E, menſuræ anguli F B E; arcus hic a punctis A & B 90° utrinque diſtat: igitur A alter polus eſt arcus F E, qui (arcus) eſt adeo communis angulorum F B E, F A E menſura.

12. ſequitur 3*tio*: *punctum ab interſectione duorum circulorum* 90 *gradibus remotum eſſe punctum maximæ diſtantiæ eorum circulorum; & reciproce punctum maximæ diſtantiæ* 90 *gradibus ab interſectione eſſe remotum.*

13. Sequitur 4*to*: *Angulos ſphæricos duorum arcuum ſe interſecantium ad verticem oppoſitos, eſſe inter ſe æquales.* Quippe eadem eſt utrinque duorum planorum ſe interſecantium inclinatio.

14. Sequitur 5*to*: *ſi arcus alteri arcui inſiſtat, effici duos angulos, quorum alter alterius complementum eſt.*

Sequitur 6*to*: quodvis triangulum ſphæricum A B C (fig. 8.) conſiderari poſſe tanquam baſin pyramidis e ſphæra ſectæ A B C D, cujus vertex ſit in centro ſphæræ, & plana ſint ſectores circulorum maximorum radiis D A, D B, D C, & arcubus A B, B C, C A comprehenſi. Atque ſic apparet, in triangulo ſphærico quemvis angulum eſſe æqualem inclinationi planorum horum; & quod-

vis latus esse æquale angulo sectoris, quem latus illud terminat.

15. THEOREMA 2. *Arcus circuli maximi inter polos duorum circulorum maximorum interceptus, est æqualis arcui, qui mensurat inclinationem eorum circulorum, sive angulum sphæricum, quem intersectione sua efficiunt.*

Quoniam enim axis cujusvis circuli maximi ad planum sui circuli perpendicularis est, & per centrum sphæræ transit; plana duorum circulorum coincidere nequeunt, quin hoc ipso etiam axes coincidant; nec alterum ad alterum inclinari potest, nisi tantundem eorum axes inclinentur: igitur angulus ab axium inclinatione factus æqualis est angulo inclinationis planorum. Sed Angulum axium metitur arcus circuli maximi in superficie sphæræ inter eorum extrema interceptus, hoc est inter polos circulorum; ergo arcus inter polos duorum circulorum maximorum interceptus metitur angulum sphæricum ab iisdem circulis factum.

16. Corollarium 1. *Si angulus sphæricus sit rectus, arcus qui cum altero hunc angulum comprehendit, per alterius cruris polum transit; & viciſſim.*

Nam si (fig. 1.) angulus FBE sit rectus, est arcus FE 90 graduum: itaque punctum E ab arcu AFB nonaginta gradibus distat, adeoque ejus polus est. Similiter punctum F est polus arcus AEB.

17. Corollarium 2. *ut e puncto dato ad arcum datum ducatur arcus perpendicularis*, describendus est arcus circuli maximi, qui per polum arcus dati & punctum datum transeat.

18. Corollarium 3. Si duo, aut plures arcus ad eundem sint perpendiculares, omnes sese in illius polo, sive in distantia 90 graduum ab illo arcu intersecant. Et e converso, arcus, qui duos, pluresve alios in distantia 90 graduum a communi eorum intersectione secat, eosdem secat perpendiculariter.

ARTICULUS II.

De proprietatibus generalibus triangulorum sphæricorum.

19. THEOR. III. *Si e tribus angulis* A, B, C (fig. 2.) *trianguli sphærici tanquam polis, describantur tres arcus* FE, FD, DE, *qui novum triangulum* FDE *constituant, quodlibet latus hujus novi trianguli est complementum anguli illius, quo tanquam polo, descriptum est; & quivis angulus hujus novi trianguli est complementum lateris prioris trianguli* ABC, *sibi oppositi.*

DEMONSTR. Quoniam A est polus arcus FGHE, distantia punctorum A & E est 90 graduum. Et quia C est polus arcus DMNE,

DMNE, etiam distantia punctorum C & E, est nonaginta graduum: quare E est polus arcus NACG. Eodem modo ostenditur, F esse polum arcus IABH, & D arcus MBCL. His positis

1*mo.* Tam arcus FI, quam LD est 90 graduum, adeoque DL+FI = 180°, aut DL+FL+LI = 180° : aut DF+LI = 180° : igitur DF est complementum arcus LI, partis communis quadrantum FI, & DL (Elem. 427.). Atqui LI, cum habeat polum B, est mensura anguli ABC, quare DF est etiam complementum anguli ABC. Simili modo demonstratur, arcum GH, mensuram anguli A, esse complementum arcus FE; & arcum NM, qui metitur angulum C, esse complementum arcus DE.

2*do.* Cum tam arcus BL, quam AH sint 90 graduum, eorum pars communis AB est complementum arcus IABH, qui metitur angulum F: & similiter arcus AC est complementum anguli E, & BC anguli D ad 180°.

20. THEOR. IV. *Duo quævis latera trianguli sphærici simul sumpta sunt tertio majora.*

DEMONSTR. Arcus circuli maximi inter duo puncta sphæræ est via brevissima, qua ab uno ad alterum in superficie sphæræ perveniri potest; via igitur, quæ inter eadem puncta angulum facit, hoc est duo reliqua latera trianguli, longior est.

21. THEOR. V. *Latus quodvis trianguli sphærici semicirculo minus est.*

DEMONSTR. Quivis angulus sphæricus comprehenditur duobus arcubus circularibus, qui ab uno intersectionis puncto ducti, antequam se denuo intersecent, tertio arcui occurrunt; atqui nova intersectio fit in distantia 180 graduum (8); nullus igitur 180° continere potest.

22. THEOR. VI. *Summa trium laterum trianguli sphærici semper minor est 360 gradibus.*

DEMONSTR. Sit triangulum ABC (fig. 3.) Producantur duo quævis latera AB, AC donec se intersecent in D. Arcus ACD, ABD uterque est 180°. Jam vero DC+DB > BC (per 20): quare si utrique addatur AC+AB, erit AC+AB+DC+DB > BC+AC+AB, hoc est duo semicirculi ACD, ABD simul sumpti majores sunt tribus lateribus AC, AB, BD simul sumptis.

23. THEOR. VII. *Summa trium angulorum trianguli sphærici semper major est 180°; sed minor 540°, aut sex rectis.*

DEMONSTR. 1*mo.* Summa trium angulorum trianguli ABC (fig. 2.) una cum summa trium laterum trianguli DEF facit ter 180 gradus aut 540° (19). Sed summa trium laterum trianguli DEF minor est bis 180 gradibus (per 22). Ergo summa trium angulorum trianguli ABC major esse debet 180 gradibus.

2*do*. Quivis angulus ſphæricus minor eſt 180 gradibus, igitur ſumma trium quorumvis angulorum minor eſt ter 180 gradibus.

24. COROLL. I. *Triangulum ſphæricum poteſt habere tres angulos rectos, imo tres obtuſos.*

25. COROLL. II. *Datis duobus angulis trianguli ſphærici, non datur hoc ipſo tertius, ut in planis triangulis.*

Obſerva. Quo arcus, latera trianguli ſphærici conſtituentes, plurium graduum ſunt, eo magis etiam ſumma angulorum ultra 180 accreſcit. Tunc enim magis a triangulo rectilineo ejusmodi ſphæricum differt.

26. THEOR. VIII. *Duo triangula ſphærica æqualia ſunt, 1mo ſi tria latera unius æqualia ſunt lateribus homologis alterius, ſingula ſingulis; 2do Si duo latera homologa æqualia æqualem angulum comprehendunt. 3tio Si duo anguli homologi æquali lateri adjacentes æquales ſunt. 4to Si tres anguli unius ſunt æquales angulis alterius, ſinguli ſingulis.*

DEMONSTR. Partis primæ, ſecundæ & tertiæ eadem eſt, ac quæ in triangulis rectilineis adhibetur. (Elem. 506. & ſeq.) Pars quarta inferius N. 105. demonſtrabitur.

27. THEOR. IX. *In omni triangulo iſosceli* A B C (fig. 4.) *duo anguli* B & C, *æqualibus lateribus* A C, A B *oppoſiti, æquales ſunt: Et ſi in triangulo duo anguli* B & C *æquales ſint, latera* A C, A B *angulis æqualibus oppoſita etiam ſunt æqualia.*

DEMONSTR. 1*mo* Accipiantur in A B & A C arcus æquales A E, & A D, ducanturque B D & E C. Evidens eſt, triangula A B D, A E C eſſe æqualia, utpote lateribus A E, A C; A D, A B æqualibus angulum communem A comprehendentibus (per 26.) adeoque etiam B D = E C. Præterea ablatis ex A B & A C per hypoth. æqualibus A E, & A D, manet E B = D C; & B C eſt latus commune triangulorum E B C, D C B; quare cum tria latera tribus, ſingula ſingulis æqualia ſint, etiam anguli homologi B & C æquales eſſe debent.

2*do* Si angulus B æqualis ſit angulo C, erit etiam A B = A C. Accipiatur enim E B = D C, & iterum ducantur arcus B D, E C. Erunt (per 26) △ △ E C B, B D C æqualia, cum lateribus E B, B C, & D C, B C angulos B & C per hypotheſim æquales comprehendant. Unde 1*mo* eſt E C = B D; 2*do* D B C = E C B, & conſequenter etiam complementum illius B D A æquatur hujus complemento C E A; 3*tio* D B C = E C B, atque hinc, cum E B C = D C B per hypotheſin, etiam E C A = D B A. Sunt ergo in triangulis A D B, A E C latera B D, E C, angulique adjacentes A D B, A B D æquales angulis A E C, & A C E; ac tertius A communis

munis utrique: quare (per 26) tota triangula æqualia ſunt, & latus AE = lateri AD; additisque partibus æqualibus EB, DC, eſt AEB = ADC.

28. COROLL. *Triangulum æquiangulum eſt ſimul æquilaterum, & viciſſim æquilaterum eſt ſimul æquiangulum.*

29. THEOR. X. *In omni triangulo ſphærico* ABC (fig. 5.) *latus* BC, *oppoſitum angulo majori* A, *majus eſt; &* AC, *oppoſitum angulo minori* B, *minus eſt.*

DEMONSTR. Cum angulus A major ſit angulo B (per hypoth.), fiat DAB = DBA, erit (per 27) AD = BD, & AD + CD = BD + CD: ſed (per 20) AD + CD > AC; ergo etiam BD + CD, ſive latus BC oppoſitum angulo majori A, majus eſt latere AC, oppoſito angulo minori B.

ARTICULUS III.

Formulæ Trigonometricæ.

30. Cum maxima pars regularum in calculis Aſtronomicis fundetur in proprietatibus ſinuum & tangentium, earum formulas, quarum frequentior eſt uſus, hic ſubjicere placuit.

Atque ut breviores evadant, his notis utemur: *ſ* vel *ſin* ſignificat ſinus; *coſ* coſinus: *tang* tangens: *cot* cotangens; R vel 1 Radius aut ſinus totus.

31. In omnibus hiſce formulis A & B deſignant duos arcus circulorum vel duos angulos quoscumque, quorum major ſit A; ſupponitur tamen uterque minor 90 gradibus; & hinc in formularum applicatione ad caſus particulares nihil in earum ſignis mutandum eſt, quamdiu anguli vel arcus infra 90 gradus erunt. Verum ubi hunc numerum graduum aliquis eorum excedit, ſignum ejus coſinus vel cotangentis mutandum eſt in contrarium. Etenim ex ipſo intuitu figuræ ſinum, coſinum, tangentem, & cotangentem alicujus arcus 90 gradibus minoris repræſentantis apparet, omnes has lineas ad eandem partem centri illius arcus ſitas eſſe, contra vero coſinum & cotangentem arcus complementi ad ſemicirculum ad partem oppoſitam reſpectu ſinus ſui & tangentis cadere. unde infertur, ſigna ſinuum & tangentium eadem eſſe, ſive acuti ſive obtuſi ſint anguli: ſed ſigna coſinuum & cotangentium in acutis eſſe contraria ſignis in obtuſis.

32. Præterea ſupponitur radius R = 1; unde fere in omnibus formulis ſinus totus omiſſus eſt. Sed facile eſt eum in qualibet

rursus exhibere, si sive ipse sive ejus quadratum, aut cubus pro coefficiente, aut denominatore cujusvis termini accipiatur.

FORMULÆ.

33. I. $\int A = cos\int A \times tang\ A = \frac{cos\int A}{cot A}$

34. II. $cos\int A = sin A \times cot A = \frac{\int A}{tang A} = \frac{\int 2A}{2 sin A}$.

35. III. $tang A = \frac{\int A}{cos\int A} = \frac{R^2}{cot A}$.

36. IV. $cot A = \frac{cos\int A}{sin A} = \frac{R^2}{tang A}$.

37. V. $cot A \times tang A = R^2$.

38. VI. $\frac{1}{2}\int 2A = cos\int A \times \int A = \frac{\int^2 A}{tang A} = \int^2 A \times cot A$.

39. VII. $R + cos\int A = 2cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\int A}{tang \frac{1}{2} A}$.

40. VIII. $R - cos\int A = 2\int^2 \frac{1}{2} A = \int A \times tang \frac{1}{2} A$.

41. IX. $\frac{R - cos\int A}{R + cos\int A} = tang^2 \frac{1}{2} A$.

42. X. $\frac{R + tang A}{R - tang A} = \frac{R}{tang (45° - A)} = tang (A + 45°)$. $si A > 45°$, erit $\frac{tang A + R}{tang A - R} = \frac{R}{tang (A - 45°)}$.

43. XI. $\frac{cos\int A - \int A}{cos\int A + \int A} = tang (45° - A)$. Et $si A > 45°$, $\frac{sin A - cos\int A}{\int A + cos\int A} = tang (A - 45°)$.

44. XII. $\frac{\int A}{cos\int A + sin A} = \frac{R - cos\int A}{\int A} = tang \frac{1}{2} A$.

45. XIII. $\int (A \mp B) = \int A \times cos\int B \mp \int B \times cos\int A$.

46. XIV. $cos\int (A \mp B) = cos\int A \times cos\int B \mp \int A \times \int B$.

47. XV. $\frac{\int (A + B)}{\int (A - B)} = \frac{tang A + tang B}{tang A - tang B}$.

48. XVI. $\frac{cos\int (A + B)}{cos\int (A - B)} = \frac{cot A - tang B}{cot A + tang B} = \frac{cot B - tang A}{cot B + tang A}$.

49. XVII. $\int A + \int B = 2 \times \int (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times cos\int (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$.

50. XVIII. $\int A - \int B = 2 \times cos\int (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times \int (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$.

51. XIX. $cos\int A + cos\int B = 2 \times cos\int (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times cos\int (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$.

52. XX. $cos\int B - cos\int A = 2 \times \int (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times \int (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$.

53. XXI. $\frac{\int A + \int B}{\int A - \int B} = tang (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times cot (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B) = \frac{tang (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B)}{tang (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)}$.

54. XXII. $\frac{\int A + \int B}{cos\int A + cos\int B} = tang (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B)$.

55.

55. XXIII. $\frac{\int A+\int B}{cof B-cof A}=cot(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A)$.

56. XXIV. $\frac{fin\,A-fin\,B}{cof A+cof B}=tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$

57. XXV. $\frac{\int A-\int B}{cof B-cof A}=cot(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$.

58. XXVI. $\frac{cof B-cof A}{cof B+cof A}=tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\times tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)=\frac{tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)}{cot(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}$.

59. XXVII. $\int A\times\int B=\frac{1}{2}cof(A-B)-\frac{1}{2}cof(A+B)$.

60. XXVIII. $\int A\times cof B=\frac{1}{2}\int(A+B)+\frac{1}{2}\int(A-B)$.

61. XXIX. $cof A\times\int B=\frac{1}{2}\int(A+B)-\frac{1}{2}\int(A-B)$.

62. XXX. $cof A\times cof B=\frac{1}{2}cof(A+B)+\frac{1}{2}cof(A-B)$.

DEMONSTRATIO.

Formulæ I, II, III, IV, V, VI, & XIII demonſtrantur in trigonometria plana. Fig. 11 exhibet triangula ſimilia APK, PCD, quorum laterum valor ex ſola inſpectione facile colligitur. Eſt autem in iis AP: PK = PC (=2PK): PD, hinc $PD=\frac{2PK^2}{AP}$, quæ eſt formulæ VII pars prima.

In △△ ICD, APK eſt porro AP: AK = IC (=2AK): $ID=\frac{2AK^2}{AP}$, quæ pars prima form. VIII.

In △△ ICD, PIH, PCD habetur CD: ID = PI: IH (=2Ah), hoc eſt: $\int A : R-cof A=2R : 2tang\frac{1}{2}A$; quod ſuppeditat alteram partem formulæ VIII. Deinde eſt PD: CD = PI: IH, ſeu $R+cof A : \int A=2R : 2tang\frac{1}{2}A$ quod dat alteram formulæ VII partem, atque una formulas IX, & XII. Nempe PD: DC = DC: DI, adeoque PD: DI = $PD^2 : DC^2 = PA^2 : Ah^2$ ſive $R+cof A : R-cof A=R^2 : tang^2\frac{1}{2}A$, ſive (cum R=1) = $1 : tang^2\frac{1}{2}A$, quod formulam IX exhibet. Formulæ XII pars prima habetur ex hac analogia PD: DC = PA: Ah. Pars ſecunda ex iſta: CD: ID = PA: Ah.

Quia (Elem. 740) $cof^2=R^2-\int^2$; habetur $cof(A\mp B)=R^2-\frac{(\int A\times cof B\mp cof A\times\int B)^2}{R^2}$,

(eſt enim $\int(A\mp B)=\frac{\int A\times cof B\mp cof A\times\int B}{R}$) ſive - - - - - -

$$=\frac{R^4-\int^2 A\times cof^2 B-cof^2 A\times\int^2 B\mp 2\int A\times cof A\times\int B\times cof B}{R^2}.$$

Atqui eſt $R^2=\int^2 A+cof^2 A$; & $R^2=\int^2 B+cof^2 B$; igitur $R^4=\int^2 A\times\int^2 B+cof^2 A\times\int^2 B+\int^2 A\times cof^2 B+cof^2 A\times cof^2 B$; qui valor ſi ſubſtituatur, & facta reductione extrahatur radix, formula XIV naſcetur.

Ex formula XIII colligitur eſſe $\int(A+B):\int(A-B)=\int A\times cof B+cof A\times\int B : \int A\times cof B-cof A\times\int B$. Dividatur ſecunda ratio per $cof A\times cof B$, habebitur $\int(A+B) : \int(A-B)=\frac{\int A\times cof B}{cof A\times cof B}+\frac{cof A\times\int B}{cof A\times cof B}\left(=\frac{\int A}{cof A}+\frac{\int B}{cof B}\right) : \frac{\int A\times cof B}{cof A\times cof B}-\frac{cof A\times\int B}{cof A\times cof B}\left(=\frac{\int A}{cof A}-\frac{\int B}{cof B}\right)$, & hinc $\frac{\int(A+B)}{\int(A-B)}=$ (ſi pro $\frac{\int}{cof}$ juxta formul. III accipiatur tangens) $\frac{tang A+tang B}{tang A-tang B}$, quæ eſt formula XV.

Sit in Fig. 12, KR arcus minor quem B vocavimus, & KD major A. Ducta ad DE perpendiculari RIH, patet arcum RG esse $=A+B$; $DR=A-B$; $IG=\int A+\int B$; $IH=cof A+cof B$; $ID=\int A-\int B$; $IR=cof B-cof A$. Dein dividatur RG bifariam in S, & DR in P, ducaturque tangens RM. Ex constructione liquet, esse $RM=tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$; $RL=tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$; $ST=\int(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$; $CT=cof(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$; $RQ=\int(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$; $CQ=cof(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$; denique $HG=2cof(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$; Nam arcus $HV=RK=GSK-DR$; & arcus $VGR=180°$; igitur arcus $GVH=HV+VGK-GSK=GSK-DR+180°-GSK=180°-DR$. Quare chorda $HG=2\int(90°-\frac{1}{2}DR)=2cof(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$. His positis ob triangula rectangula CST, CRM, DIR, HIG similia; (præterquam enim quod omnia sint rectangula, $RS=\frac{1}{2}RG$, hinc $RCS=RDG,=RHG$) item IGR, IDH, CRL (quia $PR=\frac{1}{2}DR$, & ideo $LCR=DHR=DGR$); habentur sequentes analogiæ; $ID:IR=CR:RM$, seu $\int A-\int B:cof B-cof A=1:tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$; & $CR:RM=ON:CC=cot(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B):1$; ergo $IR:DI=1:cot(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$ sive $cof B-cof A:\int A-\int B=1:cot(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)=\frac{\int A-\int B}{cof B-cof A}$, quæ est formula XXV.

$ID:IG=RL:RM$, id est $\int A-\int B:\int A+\int B=tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B):tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$ Est enim $ID:IH=LR:CR$,

& $IH:IG=CR:RM$

exæq.dir. $ID:IG=LR:RM$. Divid. consеq. per antec. habetur 2da pars form. XXI.

Quia porro semper est $tang:R=R:cot$, erit $tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B):1=1:cot(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$ & $tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)=\frac{1}{cot(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}$; subst ituatur hic valor in $\frac{tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)}{tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}$, fiet $tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\times cot(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$, quæ est pars prima eiusdem formulæ.

$IH:IG=CR:RM$, seu $cof A+cof B:\int A+\int B=1:tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$ quæ est formula XXII.

$IG:IR=CR:RL$, seu $\int A+\int B:cof B-cof A=1:tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B$; est autem per paulo ante demonstrata $tang=\frac{1}{cot}$; igitur est $\int A+\int B:cof B-cof A=1:\frac{1}{cot(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}$. Et divid. antec. per conс. habetur formula XXIII.

$IH:ID=CR:RL$, $cof A+cof B:\int A-\int B=1:tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$, quæ est formula XXIV.

$IG:HG=ST:CS$, $\int A+\int B:2cof(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)=\int(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B):1$, seu $CS:ST=HG:IG$; hinc habetur formula XVII.

$DI:DR(=2RQ)=CT:CS=\int A-\int B:2\int(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)=cof(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B):1$; hinc elicitur formula XVIII.

$HI:HG=CT:CS$, $cof A+cof B:2cof(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)=cof(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B):1$, hinc ducitur form. XIX.

$RI:DR=ST:CS$; $cof B-cof A:2\int(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)=\int(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B):1$ exhibet form. XX.

Formula XXVI deducitur ex XXII & XXIII. Cum enim fit per illam $\frac{\int A+\int B}{cof A+cof B}=tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$; & per hanc $\frac{\int A+\int B}{cof B-cof A}=cotang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)=\frac{1}{tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}$ (nempe quia per superius dicta $tang=\frac{1}{cot}$, erit etiam $tang\times cot=1$, & $cot=\frac{1}{tang}$) fiet $\frac{cof A+cof B}{\int A+\int B}:\frac{cof B-cof A}{\int A+\int B}=\frac{1}{tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)}:tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$

Omisso in prima ratione communi denominatore, & divisis consequentibus per terminos antecedentes habetur formulæ pars prima; si vero loco $\frac{1}{tang(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)}$ ponatur $cot(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$, altera pars prodit.

Formula X obtinetur ex XXVI, supponendo $B=90°-A$; tunc enim $\frac{1}{2}B=$

$45° - \frac{1}{2}A$, conſequenter $cos\, B = ſA, ſB = coſA$; & rationes $coſB + coſA : coſB - coſA = cot\,(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : tang\,(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ (ſcilicet pro $tang\,(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$ ponendo $\frac{1}{cot\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)}$, & pro $cot\,(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ ſubſtituendo $\frac{1}{tang\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}$) abeunt in has: $ſA + coſA : ſA - coſA = cot\,45°\,(= R) : tang\,(\frac{1}{2}A - 45° + \frac{1}{2}A)$ ſeu: $tang\,(A - 45°)$.

Formula XI ſequitur ex X. Cum enim ex paullo ante poſitis habeatur $\frac{coſA+ſA}{coſA-ſA} = \frac{R}{tang\,(45°-A)}$, fiet $coſA + ſA = \frac{coſA \times R}{tang\,(45°-A)} - \frac{ſA \times R}{tang\,(45°-A)}$; dividantur omnia per $coſA$, & ponatur R pro $\frac{coſA}{coſA}$, ac $tang\,A$ pro $\frac{ſA}{coſA}$, habebitur $R + tang\,A = \frac{R^2}{tang\,(45°-A)} - \frac{tang\,A \times R}{tang\,(45°-A)}$. Diviſis omnibus per $R - tang\,A$, habetur formula X.

Formula XXVII derivatur ex XIV, quæ dat $coſ(A+B) = coſA \times coſB - ſA \times ſB$; & $coſ(A-B) = coſA \times coſB + ſA \times ſinB$; unde fit $2\,ſA \times ſB = coſ(A-B) - coſ(A+B)$, & conſequenter $ſA \times ſB = \frac{1}{2}\,coſ(A-B) - \frac{1}{2}\,coſ(A+B)$.

Formulæ XXVIII, XXIX, & XXX eodem prorſus modo ex XIII & XIV deducuntur.

ARTICULUS IV.

Analogiæ pro calculo triangulorum rectangulorum ſphæricorum.

Pro reſolutione rectangulorum triangulorum quorumvis ſphæricorum, A repræſentet ſemper angulum rectum: B & C reliquos duos; tum fiant analogiæ, quæ ſequente tabella exhibentur

TABULA

Pro resolutione casuum omnium possibilium triangulorum sphæricorum A B C, *ad* A *rectangulorum.*

	Data	*quæ sita.*	*Analogiæ*	*Quæsita sunt* 90° *minora*
63	AB, AC	B C	R : *cos* AB = *cos* AC : *cos* BC	si AB & AC sunt ejusdem speciei.
64		B	R : *sin* AB = *cot* AC : *cot* B	si AC < 90°.
65		C	R : *cot* AB = *sin* AC : *cot* C	si AB < 90°.
66		A C	*cos* AB : R = *cos* BC : *cos* AC	si BC & AB sunt ejusdem speciei.
67	AB, BC	B	R : *tang* AB = *cot* BC : *cos* B	si BC & AB sunt ejusdem speciei.
68		C	*sin* BC : *sin* AB = R : *sin* C	si AB < 90°.
69		A C	R : *sin* AB = *tang* B : *tang* AC	si B < 90°.
70	AB, B	B C	R : *cot* AB = *cos* B : *cot* BC	si AB & B sunt ejusdem speciei.
71		C	R : *cos* AB = *sin* B : *cos* C	si AB < 90°.
72		A C	R : *tang* AB = *cot* C : *sin* AC	dubium
73	AB, C	B C	*sin* C : *sin* AB = R : *sin* BC	dubium
74		B	*cos* AB : *cos* C = R : *sin* B	dubium
75		A B	*cos* AC : *cos* BC = R : *cos* AB	si BC & AC sint ejusdem speciei.
76	AC, BC	B	*sin* BC : *sin* AC = R : *sin* B	si AC < 90°.
77		C	R : *tang* AC = *cot* BC : *cos* C	si AC & BC sint ejusdem speciei.
78		A B	R : *tang* AC = *cot* B : *sin* AB	dubium
79	AC, B	B C	*sin* B : *sin* AC = R : *sin* BC	dubium
80		C	*cos* AC : *cos* B = R : *sin* C	dubium
81		A B	R : *sin* AC = *tang* C : *tang* AB	si C < 90°.
82	AC, C	B C	R : *cot* AC = *cos* C : *cot* BC	si AC & C sint ejusdem speciei.
83		B	R : *cos* AC = *sin* C : *cos* B	si AC < 90°.
84		A B	R : *tang* BC = *cos* B : *tang* AB	si BC & B sint ejusdem speciei.
85	BC, B	A C	R : *sin* BC = *sin* B : *sin* AC	si B < 90°.
86		C	R : *cos* BC = *tang* B : *cot* C	si BC < 90°.
87		A B	R : *sin* BC = *sin* C : *sin* AB	si C < 90°.
88	BC, C	A C	R : *tang* BC = *cos* C : *tang* AC	si BC & C sint eiusdem speciei.
89		B	R : *cos* BC = *tang* C : *cot* B	si BC & C sint ejusdem speciei.
90		A B	*sin* B : *cos* C = R : *cos* AB	si C < 90°
91	B, C	A C	*sin* C : *cos* B = R : *cos* AC	si B < 90°
92		B C	R : *cot* B = *cot* C : *cos* BC	si B & C sint eiusdem speciei.

De usu hujus tabulæ.

93. Tabulæ usus expeditus est, atque ex unius primæ lineæ explicatione facile tota intelligi potest. Præscribit nempe, ut si trianguli rectanguli alicujus sphærici *dentur duo latera* A B, A C, *& quæratur hypotenusa* B C, *fiat hæc analogia: ut radius est ad sinum complementi lateris* A B, *ita sinus complementi lateris* A C *ad sinum complementi hypotenusæ* B C. Sed quoniam arcus 90° minores eorumque complementa

ta

ta ad duos rectos eosdem sinus, cosinus, tangentes, cotangentes habent (Elem. 727), in ultima columna tabulæ additur: *quæsita esse minora* 90 *gradibus* (in exemplo scilicet proposito hypotenusam BC) *si* AB, *&* AC *ejusdem speciei sunt*, hoc est *vel ambo* 90 *gradibus majora, vel ambo minora.* Quando vero ex datis determinari nequit, an quæsita sint minora 90°, vox *dubium* adscripta est.

Demonstrationes priorum Analogiarum.

94. THEOR. XI. *Si in triangulo rectangulo* ABC (fig. 7) *producantur latera* BC *in* G, AC *in* I, BA *in* D, *donec* CG, CI, BD *fiant* 90°; *ac præterea polo* B *describatur arcus* HED, *ita ut* HE *sit* 90°: *demum polo* C *ducatur arcus* HIG; *fient duo triangula rectangula* CEF, HIF, *quorum partes vel æquales sunt partibus trianguli* ABC, *vel earum complementa.*

Demonstr. 1*mo* enim cum B sit polus arcus FED, sunt BE, BD singuli 90°, & ad FED perpendiculares (per 18); eodem modo cum FED, FCA insistant arcui BAD perpendiculariter, sunt singuli 90°, & communis eorum intersectio F est polus arcus BAD: quare triangulum FCE est ad E rectangulum; ejus angulus ad F, quem mensurat arcus AD, est complementum lateris BA; latus FE, complementum lateris ED, quod est mensura anguli B; hypotenusa CF complementum lateris CA, & latus CE complementum lateris BC.

2*do*. Quoniam arcus HE, est 90°, & perpendicularis ad arcum CEG, H est polus ejusdem CEG (16), & HIG itidem 90° (3). Rursus CI, CG cum sint 90°, arcui HIG insistunt perpendiculariter; igitur HIF est rectangulum ad I; ejus latus HI est complementum lateris IG, mensuræ anguli BCA; latus IF = CA (nam CA, IF habent commune complementum CF); hypotenusa HF est æqualis angulo ABC, ex eadem ratione; nam FE est commune complementum ad quadrantem tam arcus ED (mensuræ anguli ABC) quam arcus HF, atque ideo HF = ED: angulus FHI æquatur hypotenusæ BC; & HFI complemento lateris AB.

95. Theor. XII. *In omni rectangulo triangulo est: ut radius ad sinum hypotenusæ, ita sinus anguli unius ex obliquis ad sinum lateris oppositi.*

Demonstr. Sit triangulum sphæricum ABC (fig. 8) ad A rectangulum arcubus sectorum DCB, DBA, DAC comprehensum. Ex quovis puncto F intersectionis DA planorum angulum rectum efficientium erigatur perpendicularis FG, concipiaturque planum GFE per FG transiens & ad intersectionem DB planorum DCB, DBA normale; erit angulus FEG mensura inclinationis eorundem

planorum, ſeu anguli ſphærici ABG (Elim. 630). His poſitis, in triangulo EFG rectangulo ad F (cum GF ſit perpendicularis plano DAB), eſt FG : GE = *ſin* FEG : R. (Elem. 747). Et in △FDG rectangulo ad F eſt pariter GD : FG = R : *ſin* GDF. Igitur etiam FG . GD : GE . FG = *ſin* FEG × R : R × *ſin* GDF (Elem. 307); & diviſa prima ratione per FG, altera per R, fit (Elem. 295) DG : GE = *ſin* FEG : *ſin* GDF.

Jam vero in triangulo DEG ad E rectangulo eſt GD : GE = R : *ſin* GDE; quare etiam habetur R : GDE = *ſin* FEG : *ſin* GDF; hoc eſt, radius eſt ad ſinum hypotenuſæ BC, ut *ſin* ABC ad *ſinum* lateris oppoſiti AC.

96. *Coroll.* I. Atque hæc eſt Analogia N. 85. poſita. Si accipiatur obliqus angulus C, eſt N. 87; invertendo, fient illæ, quæ N. 76 & 79 ponuntur. Et ſi invertatur analogia N. 87, naſcentur N. N. 68. & 73.

II. Per Theorema præcedens in triangulo rectangulo FCE (fig. 7) eſt R : *ſin* FC = *ſin* CFE : *ſin* CE; & ſubſtitutis æquivalentibus ex triangulo ABC, habebitur (94) R : *coſ* AC = *coſ* AB : *coſ* BC, quæ eſt analogia N. 63, & inverſe fient illæ, quæ NN. 66 & 75 ſunt propoſitæ.

III. In eodem triangulo eſt porro: R : *ſin* FC = *ſin* C : *ſin* FE. Aut facta ſubſtitutione R : *coſ* AC = *ſin* C : *coſ* B. Quæ eſt N. 83, & invertendo NN. 80 & 91.

IV. In triangulo HIF habetur R : *ſin* HF = *ſin* F : *ſin* HI, & ſubſtituendo æquivalentes, R : *ſin* B = *coſ* AB : *coſ* C. hoc eſt, analogia N. 71; & inverſe NN. 74 & 90.

97. Theor. XIII. *In omni triangulo rectangulo eſt: ut ſinus totus ad ſinum lateris unius angulum rectum comprehendentis, ita tangens anguli obliqui huic latcri adjacentis ad tangentem lateris oppoſiti.*

Demonſtr. Manentibus omnibus ut in theor. præced. in triangulo FED (fig. 8) ad E rectangulo, eſt (Elem. 747) FE : FD = *ſin* F . DE : R. Et in triangulo FGD rectangulo in F (Elem. 748) FD . FG = R : *tang* FDG, quare ex æquo directe FE : FG = *ſin* FDE : *tang* FDG. Jam vero in triangulo FGE ad F rectangulo pariter eſt FE : FG = R : *tang* FEG, igitur etiam R : *tang* FEG = *ſin* FDE : *tang* FDG; hoc eſt, ſinus totus ad tangentem anguli ABC, ut ſinus lateris AB ad tangentem lateris AC, & permutando &c.

Corollar. I. Hæc eſt analogia N. 69; Et ſi ſubſtituatur pro angulo obliquo angulus C, N. 81.

II. Invertendo analogiam N. 69 habetur : *tang* B : R = *tang* AC : *ſin* AB. Et eſt præterea (Elem. 737): *tang* B : R = R : *cot* B atque ideo R : *cot* B = *tang* AC : *ſin* AB, quæ eſt anal. N. 78.

III. In

III. Invertendo analog. N. 81 fit *tang* C : R = *tang* A B : *ſin* A C. ſed etiam (Elem. 737) : *tang* C : R = R : *cot* C, ergo etiam R : *cot* C = *tang* A B : *ſin* A C. Quæ eſt anal. N. 72.

IV. In triangulo F C E (fig. 7) per theor præſens eſt R : *ſin* F E = *tang* F : *tang* C E & ſubſtitutis æquivalentibus (per N 94) R : *cof* B = *cot* A B : *cot* B C quæ eſt analogia N. 70. Quod ſi jam hæc poſtrema analogia generaliter exprimatur : ut ſinus totus ad coſinum anguli unius obliqui, ita tangens lateris huic angulo adjacentis ad cotangentem hypotenuſæ, evidens eſt, etiam haberi R : *cof* C = *cot* A C : *cot* B C. quæ eſt analogia N. 82.

V. In eodem triangulo F C E eſt etiam R : *ſin* C E = *tang* C : *tang* F E : & (per N. 94) ſubſtitutis æqualibus R : *cof* B C = *tang* C : *cot* B, habetur analogia N. 89. Cum igitur per hanc analogiam ſit ſinus totus ad coſinum hypotenuſæ, ut tangens anguli unius ex obliquis eſt ad cotangentem alterius, patet, haberi quoque R : *cof* B C = *tang* B : *cot* C. quæ eſt analogia N. 86.

VI. In triangulo H I F (fig. ead.) habetur : R : *ſin* H I = *tang* H : *tang* I F, & ſubſtitutione æqualium R : *cof* C = *tang* B C : *tang* A C. quæ eſt analogia N. 88. Vi igitur hujus analogiæ habetur univerſim : ſinus totus ad coſinum unius ex angulis obliquis, ut tangens hypotenuſæ ad tangentem lateris illi angulo adjacentis : quare habetur R : *cof* B = *tang* B C : *tang* A B, analogia N. 84.

VII. In eodem triangulo H I F eſt R : *ſin* I F = *tang* F : *tang* H I; & ſubſtitutis æqualibus R : *ſin* A C = *cot* A B : *cot* C, quæ eſt analogia N. 65. Et quoniam ex hac univerſim patet, eſſe ſinum totum ad ſinum lateris unius angulum rectum comprehendentis, ut eſt *cot* lateris alterius ad *cot* anguli huic alteri lateri oppoſiti, erit quoque R : *ſin* A B = *cot* A C : *cot* B, quæ eſt anal. N. 64.

VIII. Analogiam N. 70. invertendo habetur *cot* A B : R = *cot* B C : *cof* B. Eſt vero (Elem. 737) *cot* A B : R = R : *tang* A B, ergo etiam R : *tang* A B = *cot* B C : *cof* B. Quæ eſt analog. N. 67.

IX. Invertendo analogiam N. 89. fit *tang* C : R = *cot* B : *cof* B C. Jam eſt etiam *tang* C : R = R : *cot* C. Igitur & R : *cot* C = *cot* B : *cof* B C, quæ eſt anal. N. 92.

X. Denique invertendo analogiam N. 88. obtinetur *tang* B C : R = *tang* A C : *cof* C. Sed etiam *tang* B C : R = R : *cot* B C, unde R : *cot* B C = *tang* A C : *cof* C. Quæ eſt anal. N. 77.

Demonſtratur ratio magnitudinis angulorum & laterum inter ſe, quæ in præcedentis tabulæ ultimo laterculo ſingulis analogiis adſcripta eſt.

98. Theorema XIV. *Quivis angulus obliquus in triangulo rectangulo eſt ejusdem ſpeciei cum latere ſibi oppoſito;* hoc eſt minor 90 gradibus, ſi latus

latus ei oppoſitum minus eſt; major, ſi latus oppoſitum eum numerum graduum excedit.

Demonſtr. Sit in triangulo ABC rectangulo ad A (fig. 9) latus AB minus 90°; dico, angulum C fore acutum. Producatur enim latus AB in D donec AD = fiat 90°; erit D polus arcus AC, & ducto DC, angulus ACD rectus, conſequenter pars illius BCA acutus.

Eodem modo patet, poſito AB 90°, fore angulum oppoſitum C rectum: Et ſi ponatur AC > 90°, accipiaturque AB = 90°, & jungatur BC, angulus BCA rectus erit, adeoque ACD obtuſus.

99. Theorema XV. *Si duo latera angulum rectum comprehendentia ſint ejusdem ſpeciei, hypotenuſa eſt minor* 90°; *& ſi ſint diverſæ ſpeciei, hypotenuſa* 90 *gradus excedit.*

Demonſtr. Sit primo in triangulo BAC (fig. 7) ad A rectangulo utrumque latus AB, AC minus 90 gradibus, erit etiam hypotenuſa BC minor. Productis enim lateribus BA in D; AC in F, donec ſingula æquentur 90 gradibus, liquet, B eſſe polum circuli maximi DF per D tranſeuntis, & qui (per N. 18) Arcui AC (quoniam ad A angelus rectus) occurrere nequit, niſi in diſtantia 90°, adeoque extra triangulum ABC. Eſt igitur EB = 90°, & hinc BC < 90°.

Sint ſecundo latera AB, AC (fig. 3) trianguli ABC ad A rectanguli ſingula majora 90 gradibus, dico hypotenuſam BC fore minorem 90 gradibus. Etenim producantur latera AC, AB, donec ſe interſecent in D, fiet triangulum CDB rectangulum in D (per N. 13) cujus hypotenuſa BC eſt eadem ac triangnli ABC; quoniam DC, DB ſunt complementa laterum AC, AB ad ſemicirculum, ſingula minora ſunt 90 gradibus; igitur per caſum primum in △ DCB hypotenuſa BC < 90°.

Sit tertio in triangulo rectangulo ABC (fig. 10) latus AB > 90°, & latus AC < 90°, erit hypotenuſa BC > 90°. Producatur enim AC in F, ut fiat 90 graduum, quoniam ad A rectus, eſt F polus lateris AB. Quod ſi igitur in BA accipiatur BD = 90°, ducaturque DF, liquet, B eſſe polum arcus DF, adeoque BE eſt 90°, & per conſequens BC > 90°.

100. *Corollar.* I. Quoniam (per N. 98) anguli obliqui ſunt ejusdem ſpeciei cum lateribus ſibi oppoſitis, ſequitur, *hypotenuſam fore minorem* 90 *gradibus, ſi anguli obliqui ſint ejusdem ſpeciei; at majorem, ſi hi anguli ſint diverſæ ſpeciei.*

101. II. Et e converſo: *ſi hypotenuſa trianguli rectanguli eſt minor* 90 *gradibus, anguli obliqui, & latera rectum comprehendentia ejusdem ſunt ſpeciei; ſed ſi hypotenuſa* 90 *gradibus major eſt, diverſæ.*

102. III. *Si in triangulo rectangulo hypotemusa & unum latus sunt ejusdem speciei, latus alterum cum angulo sibi opposito sunt minora* 90 *gradibus; sed si hypotemusa & unum latus sunt diversæ speciei, latus alterum cum angulo sibi opposito majora sunt* 90 *gradibus.*

103. Observa. Casus, in quibus dubium est de specie laterum, admodum rari in calculo Astronomico emergunt, pro quo in triangulis rectangulis non adhibentur nisi arcus 90 gradibus minores. Dum enim arcus iis majores occurrunt, producti intelliguntur donec se rursus intersecent, eorumque complementa ad duos rectos calculantur. Ut si (fig. 3) calculandum proponeretur triangulum ABC, ad evitandam molestiam calculus in triangulo BCD institueretur, cujus omnia latera minora sunt 90 gradibus, uti & anguli præter D. Cognitis autem partibus trianguli BC*D*, etiam partes prioris ABC cognoscuntur.

ARTICULUS V.

Theoria calculi triangulorum obliquangulorum.

104. Theor. XVI. *In quovis triangulo sphærico* ABC (fig. 16) *semper est: ut sinus anguli unius* A *ad sinum lateris sibi oppositi* BC*; ita sinus anguli alterius B ad sinum lateris* AC *eidem angulo oppositi.*

Demonstr. Ducto enim arcu GD ad AB perpendiculari, triangulum ABC in duo triangula rectangula dividitur ACD, BCD. Quare est (per 95) R:*sin* AC = *sin* A : *sin* CD,
& R:*sin* BC = *sin* B : *sin* CD, igitur R × *sin* CD = *sin* AC × *sin* A = *sin* BC × *sin* B, (per Elem. 300). consequenter *sin* A:*sin* BC = *sin* B:*sin* AC. Elem. 302.

105. Corollar. *si in duobus triangulis sphæricis omnes tres anguli æquales sunt, singuli singulis; etiam latera sunt æqualia, & tota triangula æquantur; & e converso.* Etenim anguli æquales, & latera æqualia habent etiam sinus eosdem.

106. Theor. XVII. *Si ducto ex vertice* C *trianguli cujusvis arcu* CD *ad* BA *perpendiculari, triangulum in duo rectangula, & latus oppositum* BA *in duo segmenta* AD *&* BD *dividatur*, erunt 1*mo* sinus segmentorum AD & BD reciproce proportionales tangentibus angulorum adjacentium A & B; aut in ratione directa cotangentium eorundem. Nam in triangulo rectangulo ADC (per 96) habetur R: *sin* AD = *tang* A : *tang* CD. Et in triangulo rectangulo BCD est R: *sin* DB = *tang* B: *tang* CD. Quare R × *tang* CD = *sin* AD × *tang* A = *sin* DB × *tang* B. Et hinc *sin* AD:*sin* BD = *tang* B: *tang* A = *cot* A: *cot* B. (Elem. 737)

107. *Secundo Cosinus eorundem segmentorum sunt in ratione cosinuum laterum adjacentium* AC, BC. Etenim in triangulis rectangulis ADC, BCD (per 63) habetur R : *cos* DC = *cos* AD : *cos* AC, & R : *cos* DC = *cos* DB : *cos* BC. Igitur *cos* AD : *cos* AC = *cos* DB : *cos* BC.

108. *Tertio, Cosinus angulorum* BCD, DCA *sunt in ratione directa cotangentium laterum* BC, & AC, *vel reciproca tangentium eorundem.*

Nempe in triangulis ADC, BCD (per 82) est
R : *cot* DC = *cos* BCD : *cot* BC, &
R : *cot* DC = *cos* DCA : *cot* AC; adeoque *cos* BCD : *cos* DCA = *cot* BC : *cot* AC = *tang* AC : *tang* BC.

109. *Quarto sinus angulorum* BCD, DCA, *qui fiunt per arcum* CD, *sunt in ratione cosinuum angulorum* B & A. Est enim (per 83)
R : *cos* DC = *sin* DCA : *cos* A &
R : *cos* DC = *sin* BCD : *cos* B. Ergo etiam *sin* BCD : *sin* DCA = *cos* B : *cos* A.

110. Theor. XVIII. *In omni triangulo sphærico* ABC *(fig. 4.) est* $\cos A = \frac{\cos BC - \cos AC \times \cos AB}{\sin AC \times \sin AB}$.

Nam 1*mo* ducto arcu BD ad AC normali, in triangulo rectangulo ABD (per 88) habetur R : *tang* AB = *cos* A : *tang* AD. hinc *tang* AD = *tang* AB × *cos* A (Radio existente = 1); Est vero (per 33) *sin* AD = *cos* AD × *tang* AD; ergo etiam *sin* AD = *cos* AD × *tang* AB × *cos* A. 2*do*: In triangulo ABC (per 107), est *cos* DC : *cos* AD = *cos* BC : *cos* AB. Igitur *cos* DC × *cos* AB = *cos* BC × *cos* AD; sed *cos* DC = *cos* (AC − AD) = (per 46) *cos* AC × *cos* AD + *sin* AC × *sin* AD = (substituto valore de *sin* AD superius invento) *cos* AC × *cos* AD + *sin* AC × *cos* AD × *tang* AB × *cos* A. Quod si hic valor *cos* DC substituatur, fiet *cos* AC × *cos* AD × *cos* AB + *sin* AC × *cos* AD × *tang* AB × *cos* A × *cos* AB = *cos* BC × *cos* AD. Divisis omnibus per *cos* AD, & loco *tang* AB × *cos* AB substituto *sin* AB (per 33), obtinetur *cos* AC × *cos* AB + *sin* AC × *cos* A × *sin* AB = *cos* BC, adeoque *sin* AC × *cos* A × *sin* AB = *cos* BC − *cos* AC × *cos* AB, dividendo per *sin* AC × *sin* AB tandem fit $\cos A = \frac{\cos BC - \cos AC \times \cos AB}{\sin AC \times \sin AB}$.

111. Theor. XIX. *In omni triangulo sphærico* ABC *habetur hæc proportio:* $\sin AB \times \sin AC : \sin(\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AC) \times \sin(\frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC) = R^2 : \sin^2 \frac{1}{2}A$.

Ponatur R = 1. Per (40) est $2\sin^2 \frac{1}{2}A = 1 - \cos A = \frac{\sin AB \times \sin AC}{\sin AB \times \sin AC} - \frac{\cos BC + \cos AB \times \cos AC}{\sin AB \times \sin AC}$ (110) $= \frac{\sin AB \times \sin AC + \cos AB \times \cos AC - \cos BC}{\sin AB \times \sin AC} =$ (46)

cos

$\frac{cos(AB-AC)-cosBC}{sinAB \times sin\,AC}$. Ergo per (52) $2sin^2\frac{1}{2}A =$ $\frac{2sin(\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}AC)\times sin(\frac{1}{2}BC-\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC)}{sinAB \times sinAC}$. Ex qua æquatione analogia propoſita, omiſſo coefficiente conſtante 2, eruitur.

112. Obſerva. Quoniam hæc duo theoremata univerſalia ſunt, facile transpoſitis literis eadem reliquis duobus angulis applicantur: Aut ſi dentur tres anguli, ope theorematis III, latera inveniri poſſunt. (vid. Artic. VII.)

ARTICULUS VI.

Solutio omnium caſuum, qui in triangulis obliquangulis occurrere poſſunt.

Caſus omnes, qui in diverſis triangulis obliquangulis emergere poſſunt, commode ad 12 problemata revocantur, inter quæ octo ſunt, in quibus triangulum obliquangulum ad duo rectangula reduci debet, ducto ſcilicet arcu ex vertice unius anguli ad latus oppoſitum perpendiculari. Jam vero hic arcus vel cadit intra triangulum datum, vel extra illud in latus productum. Quare inquirendum eſt primum, quibusnam in caſibus utrumvis contingat.

113. Theor. XX. *Arcus* C D *ex quovis angulo* C *trianguli ſphærici in latus oppoſitum* A B *perpendicularis, cadit intra triangulum* (fig. 16), *ſi anguli reliqui* A & B *ſint ejusdem ſpeciei; idem vero arcus cadit extra triangulum, ſi reliqui duo anguli* A & B *ſint diverſæ ſpeciei* (fig. 14. & 15).

Demonſtr. Cadat primo C D (fig. 16) intra triangulum; erunt hoc ipſo anguli B & A ejusdem ſpeciei, hoc eſt vel uterque minor, vel uterque major recto. Nam (per 98) in triangulo C A D rectangulo ad D, angulus A eſt ejusdem ſpeciei cum latere oppoſito C D; ex eadem ratione in triangulo B C D rectangulo ad D, angulus B eſt ejusdem ſpeciei cum latere eodem C D; igitur quando C D cadit intra triangulum, reliqui duo anguli ſunt ejusdem ſpeciei; adeoque etiam converſa vera eſt.

Cadat 2*do* arcus perpendicularis C D (fig. 14 & 15) extra triangulum, erunt anguli A & B diverſæ ſpeciei. Etenim rurſus (per 98) in triangulo C D B ad D rectangulo angulus B eſt ejusdem ſpeciei cum latere ſibi oppoſito C D; & in triangulo C A D angulus A eſt ejusdem ſpeciei cum latere eodem C D; quare anguli C B D, C A D ſunt ejusdem ſpeciei. Sed cum (fig. 14) angulus C B D ſit complementum anguli C B A ad duos rectos, & neuter ſit rectus (per hypotheſin), ſunt inter ſe diverſæ ſpeciei; quare cum C B D ſit ejusdem cum C A D ſpeciei, debent C A B, & C B A

esse diversæ: Eodem modo (fig. 15) CAB est complementum anguli CAD, qui est ejusdem cum B speciei, adeoque CAB est diversæ speciei ab utroque CAD, CBD.

114. Theor. XXI. *Si duo minora latera* AC, & CB *trianguli* ACB *sint ejusdem speciei, arcus perpendicularis ex angulo* C *ad basin* AB *ductus intra triangulum cadet.* (fig. 13).

Demonstrat. Ex maximo latere AB accipiatur AF = AC, & BE = BC, & descriptis arcubus CF & CE ducantur ad eosdem perpendiculares AH & BG. His ita constitutis, in triangulis rectangulis FAH, EGB, latera FH, GE necessario 90 gradibus minora sunt, cum æquentur dimidiis CF & CE, a perpendiculis bisectis ob æqualia crura AC, AD, & BC, BE; integris CF & CE 180. gradibus minoribus existentibus (per 21). Quare si ponantur latera AC & BC, aut his æqualia AF, & BE, minora 90 gradibus, in triangulis rectangulis FHA, BGE, hypotenusa AF cum latere HF, & hypotenusa BE cum latere GE sunt ejusdem speciei, adeoque (per 102) angulus F & E acutus; & hinc in triangulo FCE arcus perpendicularis ad basin FE ex C ductus cadet intra triangulum (per 113). Si autem supponantur CB = BD, & AC = AF majora 90 gradibus, in iisdem triangulis hypotenusæ AF, BE sunt cum lateribus FH & EG diversæ speciei, hinc anguli AFH, BEG obtusi uterque (per 102) adeoque iterum ejusdem speciei & (per 113) perpendicularis arcus CD rursus in basim FE incidet.

115. Problema I. *Datis duobus angulis & latere uni horum opposito invenire latus alteri datorum angulorum oppositum.*

Angulus, cui opponitur latus datum, dicatur A; alter datus vocetur B, tertius incognitus sit C. Fiat hæc proportio (104):

$$\sin A : \sin B = \sin BC : \sin AC.$$

Ex datis determinari nequit species lateris AC, potestque 90 gradibus vel majus vel minus esse.

116. Problema II. *Iisdem datis invenire angulum tertium.*

Fiant eædem denominationes, quæ in Probl. I, & ducatur ex C arcus perpendicularis ad AB; tum fiant hæ duæ proportiones (fig. 14, 15, & 16)

$$R : \cos BC = \tan B : \cot BCD \ (86).$$

$$\cos B : \cos BAC = \sin BCD : \sin ACD \ (109).$$

Quod si A & B sint ejusdem speciei, summa angulorum BCD, ACD; si vero illi sint diversæ speciei, differentia horum erit æqualis angulo quæsito C.

117. Probl. III. *Iisdem datis invenire latus inter angulos datos interceptum.*

Iis-

Iisdem iterum positis denominationibus, & arcu perpendiculari ex C in latus quæsitum ducto, fiant sequentes analogiæ: (fig. 14, 15, & 16)

R : *cos* B = *tang* B C : *tang* B D (84).

tang A : *tang* B = *sin* B D : *sin* A D (106).

Si A & B sint ejusdem speciei, erit summa B D + A D = A B; si vero sunt diversæ speciei, erit differentia A D — B D vel B D — A D = A B, latus quæsitum.

118. Problema IV. *Datis duobus angulis & latere intercepto, invenire aliud latus.*

Angulus, cui opponitur latus quæsitum, vocetur B, alter datus dicatur C, tertius A. Ex angulo C præterea ducatur ad latus oppositum arcus perpendicularis C D, fiatque hæc analogia: (fig. 14, 15, & 16).

R : *cos* B C = *tang* B : *cot* B C D (86).

Summa vel differentia angulorum B C D, & dati B C A, prout positio perpendicularis exiget, erit angulus A C D.

Tum inferatur ulterius

cos B C D : *cos* A C D = *cot* B C : *cot* A C (108).

Quod si angulus A C D est ejusdem speciei cum angulo B, erit A C < 90°. Si A C D & B sunt diversæ speciei, erit A C > 90°.

119. Problema V. *Iisdem datis invenire angulum tertium.*

Anguli dati dicantur B & C, quæsitus A, & ducatur ex C arcus perpendicularis in latus oppositum. Tum inferatur (fig. 14, 15, & 16).

R : *cos* B C = *tang* B : *cot* B C D (86).

Summa vel differentia angulorum B C D & B C A pro diversa perpendicularis positione, dabit angulum A C D. Dein fiat

sin B C D : *sin* A C D = *cos* B : *cos* A (109).

Quod si jam angulus B C D sit minor angulo cognito B C A, angulus quæsitus A est ejusdem speciei, ac datus B, sed si B C D > B C A, anguli A & B sunt diversæ speciei (113).

120. Problema VI. *Datis duobus lateribus cum angulo uni eorum opposito, invenire angulum oppositum alteri lateri dato.*

Angulus datus dicatur A; comprehensus a duobus lateribus datis vocetur B, tertius C. Inferatur

sin B C : *sin* A B = *sin* A : *sin* C (104).

Ex datis constare nequit, utrum angulus C sit acutus, an obtusus.

121. Problema VII. *Iisdem datis invenire latus tertium.*

Angulus datus vocetur B, oppositus lateri quæsito C, tertius

A; ex C ducatur arcus perpendicularis in latus quæsitum, & inferatur: (fig. 14, 15, & 16).

R : *tang* B C = *cos* B : *tang* B D (84).

cos B C : *cos* A C = *cos* B D : *cos* A D (107)

Si jam B C & A C sint ejusdem speciei, summa B D + A D = A B (114); si diversæ, differentia inter B D & A D erit latus quæsitum A B.

122. Problema VIII. *Iisdem datis reperire angulum comprehensum a lateribus datis.*

Dicatur angulus datus B, quæsitus C, tertius A. Ex C ducatur in latus oppositum arcus perpendicularis, & inferatur (fig. 14, 15, & 16):

R : *cos* B C = *tang* B : *cot* B C D (86).

cot B C : *cot* A C = *cos* B C D : *cos* A C D (108).

Si A C & B C sint ejusdem speciei, summa angulorum B C D, A C D; si diversæ, differentia eorundem erit quæsitus C.

123. Problema IX. *Datis duobus lateribus cum angulo comprehenso, invenire alium angulum.*

Angulus datus vocetur B, quæsitus A, tertius C; & ducto ex C arcu perpendiculari fiat: (fig. 14, 15, & 16)

R : *tang* B C = *cos* B : *tang* B D (84).

Accipiatur summa vel differentia B D, & A B, prout perpendicularis C D intra vel extra triangulum ceciderit, & habebitur A D, Inferatur porro:

sin A D : *sin* B D = *tang* B : *tang* A (106).

Jam prout A B majus vel minus fuerit, quam B D; ita angulus A erit ejusdem vel diversæ speciei cum angulo dato B.

124. Problema X. *Iisdem datis reperire latus tertium.*

Angulus datus sit B, sitque B C latus datorum minus, B A majus; ex C ducatur arcus perpendicularis C D, qui fere semper intra triangulum cadet, præcipue si angulus B sit acutus. Fiat (fig. 14, 15, & 16):

R : *tang* B C = *cos* B : *tang* B D (84).

Subtrahatur B D ex B A, vel si C D cadat extra triangulum versus B, addantur B D & B A; aut denique si C D cadat extra triangulum versus A, subducatur B A ex B D, & habebitur A D. Tum fiat iterum

cos B D : *cos* A D = *cos* B C : *cos* A C (107).

Prout jam A D ejusdem vel diversæ speciei fuerit cum C D, aut cum angulo A, ita latus A C 90 gradibus majus vel minus erit.

125. Problema XI. *Datis tribus lateribus trianguli invenire angulum quemvis.*

Angu-

Angulus quæsitus dicatur A, alii B & C. Fiat (per 111)
ut factum ex sinubus laterum A B & B C
ad factum ex sinibus duorum excessuum semi summæ trium laterum supra singula latera A B & A C; *ita quadratum radii ad quadratum sinus dimidii anguli* A.

126. Problema XII. *Datis tribus angulis invenire latus quodvis.*

Latus quæsitum sit B C, angulus ei oppositus A. Inferatur
ut factum ex sinubus angulorum B & C
ad factum ex cosinubus duorum excessuum semisummæ trium angulorum supra singulos B & C;
ita quadratum radii ad quadratum cosinus dimidii lateris B C.

Hæc analogia supponit triangulum datum A B C intra aliud D E F (fig. 2), cujus omnes partes sunt complementa partium oppositarum trianguli A B C. (per 19).

127. Observa. Triangulum rectilineum considerari potest instar sphærici, cujus arcus ita sunt exigui, ut a rectis non differant, adeoque cum sinubus & tangentibus congruant. Hinc trigonometriæ planæ applicari possunt formulæ trigonometriæ sphæricæ quas cosinus & cotangentes non ingrediuntur, modo pro voce *sinus* vel *tangens lateris* substituatur *latus*. Exempli causa si tria latera trianguli rectilinei dentur, angulus quivis reperiri potest per analogiam Problematis XI. hunc in modum:
ut factum ex duobus lateribus angulum quæsitum comprehendentibus
ad factum ex duobus excessibus semisummæ trium laterum supra singula ea latera;
ita quadratum radii ad quadratum sinus dimidii anguli quæsiti.

ARTICULUS VII.

Diversæ formulæ trigonometriæ sphæricæ.

128. Quamvis ex analogiis in præcedentibus allatis omnia trigonometriæ sphæricæ problemata solvi possint, utile tamen admodum est, easdem solutiones diversis modis exhibere; usus hujus varietatis præcipuus est in substitutionibus faciendis, dum in calculi Astronomici regulas algebraice inquiritur; sæpe enim fit, ut deinceps patebit, ut earum ope regulæ multo simpliciores, & elegantiores reddantur. Demonstrationibus sequentium formularum dandis non immorabor, tum quod plurimæ jam in superioribus Articulis demonstratæ sint, tum quod reliquæ nihil difficultatis habeant. Illos solummodo casus generatim indicabo, in quibus maximum usum habent.

In omnibus vero formulis hisce supponuntur anguli & latera trianguli sphærici 90 gradibus minora: quod si itaque casus ferat, ut majora ea sint, ad Notam Articuli III. N. 31 positam recurrendum erit, ut signorum debita permutatio fiat.

I.

In triangulo ſphærico quovis ABC *ad* A *rectangulo, ſemper eſt.*

129. $\sin B = \frac{\cos C}{\cos AB} = \frac{\sin AC}{\sin BC}$

130. $\tang B = \frac{\cot C}{\cos BC} = \frac{\tang AC}{\sin AB}$

131. $\cos B = \cot BC \times \tang AB = \sin C \times \cos AC = \frac{1}{2}\sin(C+AC) + \frac{1}{2}\sin(C-AC)$.

132. $\cot B = \tang C \times \cos BC = \cot AC \times \sin AB$.

133. $\sin C = \frac{\cos B}{\cos AC} = \frac{\sin AB}{\sin BC}$

134. $\tang C = \frac{\cot B}{\cos BC} = \frac{\tang AB}{\sin AC}$

135. $\cos C = \sin B \times \cos AB = \cot BC \times \tang AC = \frac{1}{2}\sin(B+AB) + \frac{1}{2}\sin(B-AB)$

136. $\cot C = \tang B \times \cos BC = \sin AC \times \cot AB$.

137. $\sin AB = \cot B \times \tang AC = \sin C \times \sin BC = \frac{1}{2}\cos(C-BC) - \frac{1}{2}\cos(C+BC)$.

138. $\tang AB = \cos B \times \tang BC = \tang C \times \sin AC$.

139. $\cos AB = \frac{\cos BC}{\cos AC} = \frac{\cos C}{\sin B}$

140. $\cot AB = \frac{\cot BC}{\cos B} = \frac{\cot C}{\sin AC}$.

141. $\sin AC = \cot C \times \tang AB = \sin B \times \sin BC = \frac{1}{2}\cos(B-BC) - \frac{1}{2}\cos(B+BC)$.

142. $\tang AC = \tang B \times \sin AB = \cos C \times \tang BC$.

143. $\cos AC = \frac{\cos B}{\sin C} = \frac{\cos BC}{\cos AB}$.

144. $\cot AC = \frac{\cot B}{\sin AB} = \frac{\cot BC}{\cos C}$.

145. $\sin BC = \frac{\sin AB}{\sin C} = \frac{\sin AC}{\sin B}$.

146. $\tang BC = \frac{\tang AC}{\cos C} = \frac{\tang AB}{\cos B}$.

147. $\cos BC = \cos AC \times \cos AB = \cot C \times \cot B = \frac{1}{2}\cos(AC+AB) + \frac{1}{2}\cos(AC-AB)$.

148. $\cot BC = \cos C \times \cot AC = \cos B \times \cot AB$.

Nota I. ſi latus unum trianguli obliquanguli ſit 90°, illud litera A deſignetur, reliqua duo dicantur B & C, anguli vero denotentur per BC, AC, AB, prout ſcilicet concurſu laterum binorum B & C, A & C, A & B formantur: formulæ eædem hujus trianguli partibus inveniendis ſervient.

Nota II. liquet, NN. 131, 135, 137, 141, 147, ultimas expreſſiones conſtare ex quantitatibus ſola additione & ſubtractione connexis, adeoque eas haberi poſſe ſine Logarithmorum ſubſidio. Verum obſervandum hic, quod angulus vel arcus, qui priore loco enunciatur, major ſupponatur, illo, qui ſubjicitur. Exempli cauſa in Formula N. 131 ſupponitur $C > AC$. Quod ſi itaque contrarium evenerit, ordo terminorum in hiſce invertendus erit, & ponendum in allato exemplo $\frac{1}{2}\sin(AC+C) + \frac{1}{2}\sin(AC-C)$.

II.

II.

In quovis triangulo sphærico A B C *semper est*

149. $\sin A = \frac{\sin BC \times \sin C}{\sin AB} = \frac{\sin BC \times \sin B}{\sin AC}$.

150. $\sin B = \frac{\sin AC \times \sin A}{\sin BC} = \frac{\sin AC \times \sin C}{\sin AB}$.

151. $\sin C = \frac{\sin AB \times \sin B}{\sin AC} = \frac{\sin AB \times \sin A}{\sin BC}$.

152. $\sin AB = \frac{\sin BC \times \sin C}{\sin A} = \frac{\sin AC \times \sin C}{\sin B}$.

153. $\sin AC = \frac{\sin AB \times \sin B}{\sin C} = \frac{\sin BC \times \sin B}{\sin A}$.

154. $\sin BC = \frac{\sin AC \times \sin A}{\sin B} = \frac{\sin AB \times \sin B}{\sin C}$.

155. $\cos A = \frac{\cos BC - \cos AC \times \cos AB}{\sin AC \times \sin AB} = \cos BC \times \sin B \times \sin C - \cos B \times \cos C$.

156. $\cos B = \frac{\cos AC - \cos AB \times \cos BC}{\sin AB \times \sin BC} = \cos AC \times \sin C \times \sin A - \cos C \times \cos A$.

157. $\cos C = \frac{\cos AB - \cos AC \times \cos BC}{\sin AC \times \sin BC} = \cos AB \times \sin A \times \sin B - \cos A \times \cos B$.

158. $\cos AB = \sin AC \times \sin BC \times \cos C + \cos AC \times \cos BC = \frac{\cos C + \cos A \times \cos B}{\sin A \times \sin B}$.

159. $\cos AC = \cos B \times \sin AB \times \sin BC + \cos AB \times \cos BC = \frac{\cos B + \cos C \times \cos A}{\sin C \times \sin A}$.

160. $\cos BC = \cos A \times \sin AC \times \sin AB + \cos AB \times \cos AC = \frac{\cos A + \cos B \times \cos C}{\sin B \times \sin C}$

161. $\tang A = \frac{\sin B}{\cot BC \times \sin AB - \cos B \times \cos AB} = \frac{\sin C}{\cot BC \times \sin AC - \cos AC \times \cos C}$

162. $\tang B = \frac{\sin C}{\cot AC \times \sin BC - \cos C \times \cos BC} = \frac{\sin A}{\cot AC \times \sin AB - \cos AB \times \cos A}$.

163. $\tang C = \frac{\sin B}{\cot AB \times \sin BC - \cos B \times \cos BC} = \frac{\sin A}{\cot AB \times \sin AC - \cos AC \times \cos A}$.

164. $\tang AB = \frac{\sin BC}{\cot C \times \sin B + \cos B \times \cos BC} = \frac{\sin AC}{\cot C \times \sin A + \cos AC \times \cos A}$.

165. $\tang AC = \frac{\sin BC}{\cot B \times \sin C + \cos C \times \cos BC} = \frac{\sin AB}{\cot B \times \sin A + \cos AB \times \cos A}$.

166. $\tang BC = \frac{\sin AC}{\cos AC \times \cos C - \sin C \times \cot A} = \frac{\sin AB}{\cos B \times \cos AB - \sin B \times \cot A}$.

167. $\cot A = \frac{\cot BC \times \sin AB}{\sin B} - \cos AB \times \cot B = \frac{\cot BC \times \sin AC}{\sin C} - \cos AC \times \cot C$.

168. $\cot B = \frac{\cot AC \times \sin BC}{\sin C} - \cos BC \times \cot C = \frac{\cot AC \times \sin AB}{\sin A} - \cos AB \times \cot A$.

169. *cot*

169. $\cot C = \frac{\cot AB \times \sin AC}{\sin A} - \cos AC \times \cot A = \frac{\cot AB \times \sin BC}{\sin B} - \cos BC \times \cot B.$

170. $\cot AB = \frac{\cot C \times \sin B}{\sin BC} + \cos B \times \cot BC = \frac{\sin A \times \cot C}{\sin AC} + \cot AC \times \cos A.$

171. $\cot AC = \frac{\cot B \times \sin C}{\sin BC} + \cos C \times \cot BC = \frac{\cot B \times \sin A}{\sin AB} + \cot AB \times \cos A.$

172. $\cot BC = \frac{\cot A \times \sin C}{\sin AC} + \cos C \times \cot AC = \frac{\cot A \times \sin B}{\sin AB} + \cot AB \times \cos B.$

III.

In triangulo quovis sphærico ABC, *ubi* A > B *aut* BC > AC, *semper habetur*

173. $\tang \frac{1}{2}AB = \frac{\sin(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B) \times \tang(\frac{1}{2}BC-\frac{1}{2}AC)}{\sin(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)} = \frac{\cos(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B) \times \tang(\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AC)}{\cos(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}.$

174. $\cot \frac{1}{2}C = \frac{\sin(\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AC) \times \tang(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}{\sin(\frac{1}{2}BC-\frac{1}{2}AC)}.$

si AB > AC

175. $\cot \frac{1}{2}A = \frac{\tang(\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}B) \times \sin(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC)}{\sin(\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}AC)} = \frac{\tang(\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}B) \times \cos(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC)}{\cos(\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}AC)}.$

176. Nota. Præter alios usus formulæ primæ & tertiæ etiam ille est in resolutione horum duorum problematum: datis A, B, & AB invenire BC & AC. Nam ex prima parte primæ formulæ invenitur differentia inter BC & AC; & ex secunda parte eorum summa. Simili ratione per tertiam formulam reperitur summa & differentia de B&C, datis AB, AC, & A.

IV.

ANALOGIÆ DIFFERENTIALES.

In quovis triangulo sphærico ABC

I Si angulus A & latus AC ei adjacens sit constans, est

177. $d\,AB : d\,BC = R : \cos B = \sin AB \times \sin BC : R \times \cos AC - \cos AB \times \cos BC = R : \cos AC \times \sin C \times \sin A - \cos C \times \cos A.$

si $A = 90°$, $d\,AB : d\,BC = \tang BC : \tang AB.$

si $B = 90°$, $d\,AB : d\,BC = R : \cos d\,AB = \cos d\,BC : \cos CD.$

178. $d\,AB : d\,B = \tang BC : \sin B = \tang BC \times \sin BC : \sin AC \times \sin A.$

179. $d\,AB : d\,C = \sin BC : \sin B = \sin^2 BC : \sin AC \times \sin A = \sin AC \times \sin A : \sin^2 B = \sin BC \times \sin AB : \sin C \times \sin AC = \sin A \times \sin^2 AB : \sin AC \times \sin^2 C.$

si $B = 90°$, $d\,AB : d\,C = \cot d\,AB : \cot d\,C = R : \sin BC.$

180. $d\,BC : d\,B = \tang BC : \tang B.$

si $B = 90°$, $d\,BC : d\,B = \sin(BC + d\,BC) : R = \sin BC : \sin(B + d\,B).$

181. $d\,BC : d\,C = \sin BC : \tang B = \sin A \times \sin AC : \tang B \times \sin B = \sin^2 BC \times \cot AC - \sin BC \times \cos BC \times \cos C : R^2 \times \sin C.$

si $BC = 90°$, $d\,BC : d\,C = \tang d\,BC : \sin d\,C = R : \cot B.$

182. $d\,B : d\,C = \cos BC : R = \cos A + \cos B \times \cos C : \sin B \times \sin C = \cos A \times \sin AC \times \sin AB + \cos AC \times \sin AB : R.$

si $A = 90°$, $d\,B : d\,C = \cot C : \tang B.$

si $B = 90°$, $d\,B : d\,C = \sin d\,B : \sin d\,C = \cos BC : R.$

II. Si

II. Si angulus A, & latus ei oppositum BC sit constans, est

183. $dAB : dAC = cof C : cof B = cof AB \times fin AB - cof AC \times cof BC \times fin AB : cof AC \times fin AC - cof AB \times cof BC \times fin AC.$

184. $dAB : dB = R \times fin AB : tang C \times cof AC = tang AC \times cof C : R \times fin B = tang AC \times fin AB : tang C \times fin AC = tang AC \times cof BC - fin AC \times cof AB : fin B \times fin AB \times fin AC.$

185. $dAB : dC = tang AB : tang C.$
si $A = 90°$, $dAB : dC = fin AC : R.$
si $B = 90°$, $dAB : dC = cot\, dAB : cot\, dC = R : fin BC.$

186. $dAC : dB = tang AC : tang B.$
si $A = 90°$, $dAC : dB = fin AB : R.$
si $B = 90°$, $dAC : dB = cot\, dAC : cot\, dB = R : fin AB.$

187. $dAC : dC = R \times fin AC : tang B \times cof AB = tang AB \times cof B : R \times fin C.$
si $A = 90°$, $dAC : dC = \frac{1}{2} fin\, 2AC : R.$

188. $dB : dC = cof AC : cof AB = cof B \times tang AB \times fin BC + cof BC : R.$

III. Si duo latera AB, AC sint constantia, est

189. $dA : dB = fin BC \times R : fin AC \times cof C = R \times fin A : fin B \times cof C = fin BC \times tang C : fin AC \times fin C = tang C \times fin A : fin B \times fin C = fin BC \times tang C : fin B \times fin AB = fin^2 BC : cof AB - cof AC \times cof BC = fin AB \times fin A : fin AC \times \frac{1}{2} fin\, 2C = R : fin^2 B \times cof AB - fin B \times cof B \times cot A.$

190. $dA : dC = fin BC \times R : fin AB \times cof B = R \times fin A : fin C \times cof B = fin BC \times tang B : fin AB \times fin B = tang B \times fin BC : fin AC \times fin C = tang B \times fin A : fin C \times fin B = fin^2 BC : cof AC - cof AB \times cof BC.$

191. $dA : dBC = R : fin AC \times fin C = R : fin AB \times fin B = R \times fin BC \times fin C : fin A \times fin B \times fin^2 AB.$

192. $dB : dBC = cot C : fin BC = R \times cof C : fin A \times fin AB = R : tang C \times fin BC = cot C \times fin B : fin A \times fin AC = R : \frac{cot AB}{fin B} - \frac{cot BC}{tang B} = cot AB - cof B \times cot BC : fin B = cof AB \times fin B - cot A \times cof B : fin AB.$
si $AC = 90°$, $dB : dBC := tang BC : fin^2 B \times tang B.$

193. $dBC : dC = fin BC : cot B = fin A \times fin AC : R \times cof B = fin BC \times tang B : R = fin A \times fin AB : cot B \times fin C = R : \frac{cot AC}{fin C} - \frac{cot BC}{tang C} = fin AC : cof AC \times fin C - cof C \times cot A.$
si $AB = 90°$, $dBC : dC = fin^2 C \times tang C : tang BC.$

194. $dB : dC = tang B : tang C = fin AC \times cof C : fin AB \times cof B = fin B \times cof C : fin C \times cof B.$

IV. Si duo anguli A & B sint constantes, est

195. $dAB : dAC = R \times fin C : fin B \times cof BC = R \times fin AB : fin AC \times cof BC.$

196. $dAB : dBC = R \times fin C : fin A \times cof AC = R \times fin AB : fin BC \times cof AC.$
si $A = 90°$, $dAB : dBC = fin C : cof AC = fin B \times fin AB : \frac{1}{2} R \times fin\, 2AC.$

197. $dAB : dC = R : fin B \times fin BC = R : fin A \times fin AC.$
si $A = 90°$, $dAB : dC = R : fin AC.$

198. $dAC : dBC = tang AC : tang BC.$
si $A = 90°$, $dAC : dBC = cof C : R.$

199. $dAC : dC = cot BC : fin C = R \times cof BC : fin AB \times fin A.$

200. $dBC : dC = cot AC : fin C = R \times cof AC : fin AB \times fin B.$

Explicatio & uſus harum formularum.

201. In triangulo ſphærico ſex occurrunt partes conſiderandæ, videlicet tres anguli, & tria latera; formulæ autem differentiales exhibent rationem ſeu legem, juxta quam ternæ quævis partes ex ſex illis mutantur, quando in quarta aliqua mutatio minima fieri ſupponitur: reliquis duabus conſtantibus & invariabilibus exiſtentibus. In exemplo, ſi in quovis triangulo ABC (fig. 6), Angulo A & latere ei adjacente AC conſtantibus, ſupponatur latus AB creſcere quantitate minima per BD exhibita, fiet angulus ACB æqualis angulo ACD, & angulus ABC mutabitur in ADC, latusque BC in CD abibit. Ope præcedentium formularum omnes hæ mutationes ad calculum revocari poſſunt, eoque accuratiorem, quo prima mutatio BD minor fuerit. Uti ſi quis variationem lateris CB, dum in CD tranſit, calculare velit, inveniet per primam analogiam N. 177, quod mutatio lateris AB (quæ litera *d* exprimitur, *differentiam*, vel *differentiale* ſignificante) ſit ad mutationem lateris BC, ut ſinus totus ad coſinum anguli B.

202. Equidem arculo BD exiguo exiſtente ut a recta non differat, ſi centro C radio CB deſcribatur arculus BF, habebitur triangulum BDF, quod pro rectilineo haberi poſſit, & ad F rectangulum: angulus D quam minimum differt ab angulo B, ut eidem æqualis cenſeatur, latus FD eſt incrementum lateris BC quæſitum; Eſt vero (Elem. 747) DF ad DB ut ſinus anguli DBF (ſive coſinus anguli D) ad ſinum totum. Atque hunc in modum omnes reliquæ formulæ demonſtrari poſſunt.

Ratio altera in eadem formula (177) non eſt niſi ſubſtitutio valoris coſinus B e N. 156 petita, nempe $= \mathit{ſin}\,AB \times \mathit{ſin}\,BC : R \times \mathit{coſ}\,AC - \mathit{coſ}\,AB \times \mathit{coſ}\,BC$. Idem de tertia ſentiendum.

203. Dedimus autem, quot potuimus, rationes diverſas, ut, quæ commodiſſima fuerit, ſeligatur, quæ ſcilicet non contineat niſi quantitates datas, vel prius inventas. Ut ſi in triangulo ABC angulus B foret incognitus, & ſcirentur tria latera, ratio ſecunda formulæ, licet magis compoſita, cæteris præferenda eſſet. Denique ſi ſolum A, C, & AC darentur, eligenda eſſet tertia ratio. Idem de aliis dicendum.

Obſervanda circa uſum Logarithmorum in calculis trigonometricis.

204. I. In uſu Logarithmorum tot decades characteriſticæ addi vel ab ea reſecari poſſunt, quot expedire viſum fuerit; quemadmodum in formulis Algebraicis ſemper licet unitatem, vel quamvis ejus potentiam, pro coefficiente, aut denominatore aſſumere. Exempli gratia, ſi logarithmus ab alio ſubducendus major ſit illo, a quo ſubtrahi deberet, characteriſtica minoris decade aucta ſupponitur. Quod eodem recidit, ac ſi ejus valor per unitatem multiplicaretur.

205. II. Quando analogia vel formula quæpiam ſubtractionem unius vel plurium logarithmorum exigit, ea evitari poteſt, & commodius in unam additionem mutari. Hinc loco logarithmorum ſubtrahendorum accipiantur eorum *complementa Arithmetica*; nomine autem complementi Arithmetici intelligitur differentia alicujus Logarithmi a Logarithmo ſinus totius. Exempli cauſa ſi ſubtrahendus ſit logarithmus ſinus 28°, 12′, 10″, nempe 9, 67449, ejus loco ſcribatur 0, 32551. Idem de Logarithmis numerorum ordinariorum intelligendum eſt. Logarithmus Numeri 6053 eſt 3, 78197, qui ſubtractus a 10, 00000 relinquit ejus complementum Arithmeticum 6, 21803.

Hæc

Hæc autem ſubtractio Logarithmi a 10, 00000 &c. ut acquiratur complementum Arithmeticum fit facillime ſine ſcriptione ex ſola inſpectione tabulæ: nam a ſiniſtra verſus dextram pergendo notæ ſingulæ logarithmi ſubtrahendi ſubtrahantur a totidem novenariis, quot ſunt zeri in 10, 00000 &c. (excepto ultimo ad dextram, qui decadem valet) etiam characteriſtica 10, pro novenario habita, & reſiduum ſemper ſcribatur. Idem enim obtinetur, ſive hac ratione ſubtractio peragatur, ſive log. 10, 00000 ſubſcribatur alter logarithmus ſubtrahendus, & ſubtractio lege ordinaria a dextra initio ſumpto fiat.

Logarithmus tangentis eſt complementum Arithmeticum logarithmi cotangentis, & viciſſim, niſi quod differentia debeat accipi a logarithmo quadrati radii, cujus characteriſtica eſt 20; id quod manifeſtum ex formula, qua habetur $tang\ A = \frac{R^2}{cot\ A}$. Similiter ex formula $cosec\ A = \frac{R^2}{sin\ A}$ (quæ eadem ratione, qua prior, demonſtratur) complementum Arithmeticum ſinus eſt logarithmus coſecantis; & complementum Arithmeticum coſinus eſt logarithmus ſecantis; adeo, ut dum complementum Arithmeticum ſinus alicujus arcus A adhibetur, revera coſecans A pro $\frac{1}{sin\ A}$ ſubſtituatur.

206. III. Quando in calculo adhibetur aliqua formula ex duobus terminis compoſita, aut generatim dum logarithmus quæritur, qui ſummæ vel differentiæ duorum numerorum, quorum logarithmi ſolummodo dantur, reſpondet, ſequente methodo procedendum eſt:

Primo. Ut habeatur logarithmus ſummæ Numerorum, quorum logarithmi dantur, & characteriſticæ eorum æquales ſint, atque majores vel minores quam 8 aut 9, reducenda eſt utraque ad 9 addendo vel ſubtrahendo tot unitates, quot neceſſe eſt, ut 9 adæquent. Dein major eorum logarithmorum conſiderandus eſt tanquam logarithmus ſinus A, & minor, ut logarithmus ſinus B. Inventis jam in tabulis ſinuum A & B, colligantur in unam ſummam logarithmus de 2, logarithmus ſemiſummæ A + B, & logarithmus coſinus ſemi differentiæ eorundem, & juxta formulam (49) $sin\ A + sin\ B = 2 \times sin(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ habebitur logarithmus, a cujus characteriſtica decas additis vel ſubtractis tot unitatibus, quot characteriſticis datorum additæ vel ſubtractæ ſunt, ſubtrahi debet.

Exemplum. Sint dati logarithmi 3, 45894, & 3, 79393; addatur 6 ad characteriſticas, habebuntur 9, 45894, logarithmus ſinus $B = 16°.43'.12''$. & 9, 79393, logarithmus ſinus $A = 38°, 28', 38''$. Igitur $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = 27°, 35', 55''$. & $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = 10°.52'.43''$.

Log. de 2 - - - - - - - - - -	0, 30103
Log. $sin(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$ - - - - -	9, 66584
Log. $cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ - - - - -	9, 99212
Summa - - - - - - - - -	19, 95899
Subtrahantur 10 + 6 =	16,
Log. quæſitus - -	3, 95899.

Si characteriſticæ logarithmorum datorum ſint inæquales, addatur vel ſubtrahatur ab utraque idem unitatum numerus, donec characteriſtica majoris ſit 9, reliquus calculus ut in exemplo priore peragatur.

Secundo. Ut inveniatur logarithmus differentiæ numerorum logarithmis datis competentium, eædem obſervandæ ſunt regulæ, atque ad formulam $\mathit{ſin}\,A - \mathit{ſin}\,B = 2 \times \mathit{coſ}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \mathit{ſin}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ applicandæ.

Sequens exemplum, quæ in tribus ſuperioribus obſervationibus dicta ſunt, illuſtrabit. In triangulo ſphærico ABC dentur $AB = 36°$, $AC = 40°$, & $BC = 48°$. Quæratur angulus A juxta formulam $\mathit{coſ}\,A = \frac{\mathit{coſ}\,BC - \mathit{coſ}\,AC \times \mathit{coſ}\,AB}{\mathit{ſin}\,AC \times \mathit{ſin}\,AB}$. (155)

coſ AC - - -	9, 88425	- - complem. Arithm. *ſin* AC - - - - - -	0, 19193
coſ AB - - -	9, 90796	- - complem. Arithm. *ſin* AB - - - - - -	0, 23078
Igitur *coſ*AC×*coſ*AB	9, 79221	- - 38°, 17′, 50″ Log. 2 - - - - - -	0, 30103
compl. de BC - - - - - - -		42. 0 0	
		Summa 80°, 17′, 50″. ſemiſ. 40°. 8′. 55″. log. *coſ*	9, 88331
		Different. 3, 42, 10. ſemid. 1 .51. 5. log. *ſin*	8, 50930
		Log. *coſ* A - -	9, 11635

Eſt itaque angelus $A = 82°.29'.19''$.

(*) Si complementa Arithmetica in hoc exemplo accipiantur juxta regulam præſcriptam ab authore, eorum ultimæ notæ unitate deficiunt.

ASTRO-

ASTRONOMIÆ GEOMETRICÆ ET PHYSICÆ LECTIONES ELEMENTARES.

SECTIO PRIMA.

Complectens partem primam Aſtronomiæ Solaris.

1.

Ita univerſum hunc tractatum adornabimus, ut præter Geometrica principia ab omnibus admiſſa nihil nobis poſtulemus, veluti daretur quispiam (quem obſervatorem deinceps appellabimus) qui Geometria inſtructus, ſed Aſtronomiæ hactenus rudis, nihilominus Aſtrorum deſcriptionem exactam dare cuperet, idque methodo in obſervationibus, ac legitimo ratiocinio fundata, quare gulæ cæleſtium motuum tanta accuratione ſtabiliantur, ut, quo ſingula aſtra loco, temporis puncto quovis dato, ſeu id præterierit jam, ſeu futurum ſit, oculo in quavis mundi plaga collocato, apparere debeant, reperiri poſſit.

2. Atque ut ordine progrediamur, ſupponemus primo obſervatorem noſtrum in ipſo ſolis centro conſtitutum, indeque ei cælum univerſum contueri licere, quemadmodum nobis nocte ſerena dimidii aſpectus datur, alterius dimidii intuitum terræ noſtræ opacitate prohibente.

3. Quod ſi itaque obſervator noſter cæli figuram examinet, ea exacte ſphærica apparebit, ſyderaque omnia inſtar punctorum luminoſorum in cava hujus ſphæræ ſuperficie hærentium videbuntur, cujus centrum ſol, ipſeque adeo obſervatoris oculus occupet. Verum advertet illico, ex hoc apparente cæli ſtatu veram figuram haud quaquam colligi poſſe, nec propterea ſolem in centro collocandum, nec aſtrorum eandem eſſe ab eo diſtantiam. Quippe experimur quotidie, non poſſe nos de diverſa objectorum nos ambientium diſtantia certum judicium ferre, quamdiu in eodem loco immoti perſtamus, niſi forte ejusmodi ſint, de quibus uſu quodam, & experientia ſcimus, nos in iis dijudicandis alias haud

dece-

deceptos fuiſſe. At enim id genus oculorum judicium, cui fidere poſſimus, ad perpauca extenditur, ac fere ad prius jam cognitas objectorum dimenſiones, ad motum proprium, denique ad motus eorum objectorum, quorum quæ nobis propiora ſint, legitimo aliunde deducto ratiocinio ſtatuere poſſumus. Accidit certe id homini in vaſta quapiam planitie longius jam ſpatium progreſſo, quæ nulli adſita monti, nihil, qua in omnem partem porrigitur, oculis ſpectandum offert, præter arbores, quæ inæquabili, atque anguloſo ambitu viſui limitem ponunt. Hic profecto, ſi fidem oculis habeat, ſpatium hoc omne circulare eſſe judicabit, ſe ſe in centro, arbores exacte in circumferentia poſitas; cum alter quispiam ab hoc longiore intervallo remotus ſimili prorſus ratione exiſtimabit, ſe in centro ingentis circuli conſtitutum, arbores, hominemque illum alterum, in peripheria collocatas. Neque unquam hi duo ab errore ſeſe expedient, quamdiu in loco eodem perſtant, atque ambientia eos objecta ſitum præſentem conſervant; at ubi hic mutatus fuerit, alterque eorum, aut ambo moveri cæperint, ex motuum diverſitate, adhibitis Opticæ, Geometriæque regulis, judicare poterunt, quænam objectorum ceteris, quantumque viciniora ſint.

4. Ubi obſervator noſter longiore tempore ſydera conſideraverit attente, duplex eorum genus notabit; alterum per cæleſtia ſpatia undique diſperſorum, inæquali præditorum lumine, at ſemper immotorum, quæ propterea *ſtellas fixas*, aut ſimplici nomine *ſtellas* appellabit: alterum eorum, quæ inæquali velocitate ſolem ambiunt, atque ideo *ſtellæ errantes*, vel *Planetæ* dicenda ſunt.

CAPUT I.

De ſtellis fixis.

5. Antequam ad alia progrediatur obſervator noſter, illud concludet, 1*mo* ſatis eſſe, ſi ſtellarum fixarum, quoniam motu carent, exacta fiat deſcriptio, atque ordo earum, ſitusque, quem perpetuo inter ſe conſervant, per obſervationes determinetur. 2*do*. Easdem tanquam puncta fixa, & terminos comparativos conſiderandas eſſe, ad quos motus Planetarum referantur: cum enim ex ſtatione unica nulla alia motuum menſura haberi poſſit, quam per angulos, ſub quibus ſpatia percurſa obſervatori apparent, neceſſe eſt, ut ad hos definiendos ſtellæ fixæ adhibeantur tanquam totidem puncta luminoſa in cavitate ſphæræ fixa, cujus radius indefinitus ſit, oculo obſervatoris in centro conſtituto. At-

que

que hæc hypotheſis, quam fingimus, extra erroris periculum eſt, quod angulorum magnitudo a laterum eos comprehendentium longitudine nullo modo dependeat.

Ex hoc ſtellarum uſu apparet etiam neceſſitas catalogi accurati, in quo earum poſitio reſpectiva quam exactiſſime fieri poſſit, ſit determinata; unde ab iſto conficiendo Aſtronomiæ initium dandum.

6. Itaque obſervator inprimis eas in plures claſſes ſecundum luminis vivacitatem diſtribuet, ac maxime quidem illuſtres *ſtellas primæ magnitudinis* dicet; paullo his ſplendore inferiores vocabit *ſtellas ſecundæ magnitudinis*, itaque deinceps, ut tandem eas, quæ oculo nullo telescopio adjuto non niſi cum difficultate aliqua percipiuntur, *ſextæ magnitudinis* appellet; *ſeptimæ* vero, *octavæ* &c. cenſeat illas, quæ non niſi tuborum opticorum ſubſidio cernuntur.

7. Qua in re ut confuſioni præcaveatur, poſſitque deinceps quævis ſtella denotari, quin opus ſit ſingulis ſingula imponere nomina, omne cæli ſpatium in minora quædam certum ſtellarum numerum comprehendentia tribuet, in quorum ſingulis figuram quampiam, quæ commoda viſa fuerit, depinget, arietem v. g., taurum, draconem, Herculem &c. ita quidem, ut in eam ſtellæ omnes, quæ in eo ſpatio continentur, referri poſſint, certiſque figuræ partibus, a quibus nomen ſortiantur, reſpondeant.

Ponamus in tali quapiam area certo cæli ſtellati ſpatio reſpondente taurum depictum eſſe: ſtella, quæ cum oculo figuræ hujus congruet, *oculus tauri*; quæ ad extremum cornu collocabitur, *cornu tauri* dicetur, & ſic de reliquis. Hac ratione ſi qua nova inter ſtellas illas detegatur, facile erit, regionem cæli deſignare, in qua viſa fuerit, dicendo nimirum, eam eſſe in cornu, aut verſus frontem tauri.

Stellas porro intra aream ejusmodi figuræ comprehenſas *conſtellationem* appellabit.

8. Denique quemadmodum in Geometria Practica, dum regionem aliquam in charta repræſentamus, ſupponimus, objecta quævis terna in illa exiſtentia triangulum efficere, cujus latera ope catenæ menſoriæ, aliove inſtrumento inveſtigamus, unumque triangulum alteri per latera communia connectimus; ita quoque obſervator noſter finget, ſtellam quamvis cum duabus aliis ad libitum aſſumptis triangulum ſphæricum conſtituere, cujus latera ſint arcus ſphæræ cæleſtis apparentis inter ſtellas intercepti: & quoniam ipſe in centro horum arcuum collocatus eſt, eosdem ope quadrantis vel ſectoris (cujus radius debitam habeat longitudinem, ut gradus, minuta, & ſecunda diſcerni poſſint) metiri poterit.

Poſtquam hac ratione arcus determinavit, qui diſtantias ſingularum ſtellarum a duabus, tribusve aliis metiuntur, ſtellas in ſuperficiem globi transferet, ac in ea conſtellationes depinget, aut chartas generales, particularesve conficiet: prorſus ut in ſuperficie globi terreſtris omnia loca telluris deſignantur, quorum diſtantia a ſeſe invicem cognita eſt, aut chartæ univerſales, aut topographicæ conſtruuntur.

9. Cum tellus, quam incolimus, plerumque ſtellarum partem nobis occultet, veteres Aſtronomi regionem cæli ſibi cognitam in præcipuas quadraginta octo conſtellationes partiti ſunt, quarum nomina Urſa minor, Urſa major, Draco, Cepheus, Caſſiopea, Andromeda, Perſeus, Auriga, Corona Borealis, Hercules, Lyra, Cygnus, Serpentarius ſive Ophiuchus, Serpens, Sagitta, Aquila, & Antinous, Delphinus, Equuleus, Pegaſus, Trigonum Boreale, Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo, Libra, Scorpius, Sagittarius, Capricornus, Aquarius, Piſces, Cetus, Orion, Eridanus, Lepus, Canis major, Canis minor, Argonavis, Hydra, Crater, Corvus, Centaurus, Lupus, Ara, Corona Auſtralis, Piſcis Auſtralis. Sed cum labente tempore navigationis beneficio terræ antiquis incognitæ detectæ eſſent, maxime a tercentis circiter annis, in quibus ſtellæ polo Auſtrali, ſeu Antarctico, viciniores, ideoque in Europa non conſpiciendæ, videri poſſunt, eæ in duodecim novas conſtellationes redactæ ſunt, dicunturque Pavo, Grus, Toucan, Phœnix, Dorado, Piſcis volans, Hydrus, Chamæleon, Muſca, Avis Indica, Triangulum Auſtrale, Indus.

10. Figuræ hiſce conſtellationibus tributæ, non aliunde duxerunt originem, quam a phantaſia eorum, qui primi illis impoſuerunt nomina. Aliud de priſcis illis dicendum, quæ e ceremoniis & ritbus ſacris apud Æthiopes, Ægyptios, Phœnices, atque Chaldæos deſumptæ ſunt. Græci partem earum adoptarunt, partem immutarunt novis nominibus, ac figuris e Mythologia petitis. Qua de re complures eruditæ lucubrationes prodierunt, quas, qui volet, conſulet.

11. Antiquiſſimæ obſervationes, quæ ad nos uſque pervenerunt, a Timochari, & Ariſtillo, 300 circiter ante Chriſtum natum annis factæ ſunt. Poſt hæc 130 fere annis ante æram Chriſtianam Hipparchus Rhodius catalogum fixarum viſibilium confecit, quem poſt 260 annos Ptolomæus Alexandrinus Aſtronomus revidit, & publicavit, 1026 ſtellarum nomina & poſitionem continentem, e quibus 1022ab Hipparcho determinatæ fuerant. Atque hoc uno Catalogo Aſtronomi uſque ad ſextum decimum ſæculum utebantur. Circiter annum 1437 Ulugh-Beig Tartarorum Princeps Ptolomaico accuratiorem confici curavit; ac Tycho-Brahe A. 1600; Hevelius 1670; Flamſteedius 1690 ſuum quisque catalogum prioribus & ampliorem, & accuratiorem dederunt. Hevelius novis conſtellationibus lacunas ab antiquis relictas implevit, quem ea in re Flamſteedius, & maxima Aſtronomorum pars ſecuti ſunt.

Ioannes Bayerus, natione Germanus, chartas cæleſtes æri inciſas publici juris fecit A. 1603, in quibus omnes conſtellationes ſchematismis ſuis exhibentur, ſtellas, quibus quæque conſtat, comprehendentibus. Atque ut ſingulæ ſtellæ expedite, breviterque indicari poſſent, iis ſingulas Græci, Latinive Alphabeti litteras appoſuit, vocando unam α, alteram β &c., ordine fere magnitudinis ſervato. Hanc denominandi rationem moderni Aſtronomi imitantur, dum frequentiſſime ita ſtellas indicant, ut dicant v. g. η Urſæ majoris, γ Draconis &c, dum ſtellam ſecundæ magnitudinis in extrema cauda Urſæ majoris, vel lucidam capitis Draconis intelligi volunt.

12. Ut nomina & ſitus ſtellarum addiſcantur, opus eſt vel tabulis majoribus cæleſtibus quales ſunt, quas Bayer, P. Pardies, Royer, Senex, Flamſteed in Atlante cæleſti ediderunt; vel ſaltem globo cæleſti bene grandi. Tum nocte innubi ſtellæ quæpiam paſſim cognitæ quærendæ, quales ſunt v. g. quas vulgus *Gallinam Glocitantem* vocat, ſeu ſex ſtellularum

larum congeries, ab Aſtronomis Plejades dictæ in conſtellatione tauri; aut vero quas *tres Reges* appellant, quæ in cingulo Orionis ſunt; vel denique ſeptem illæ, quæ plauſtrum nominantur, ſuntque præcipuæ ſeptem urſæ majoris. Ubi ejusmodi in cælo occurrerint, eædem in charta quærantur, quæ ita diſponenda erit, ut ſtellæ in ea depictæ eundem quam proxime ſitum referant intuenti, quem in cælo habent: ab his ſi ad vicinas, indeque ad alias tranſeatur, nomen, ſitus, ordo, figura conſtellationum reperietur, dum ea, quæ in cælo apparent, cum charta diligenter ſemper comparantur.

13. Quod ad locum verum, quem quævis ſtella in univerſo occupat, quod ad diſtantiam a ſole, ad naturam, magnitudinem, numerum, utilitatem, ac finem peculiarem, ob quem a Deo ſingulæ creatæ ſunt, attinet, nihil equidem certi obſervator noſter ſtatuere poterit. Cum enim æque immotæ ſint, ac ſol, nullam baſin habere poteſt, qua data artificio trigonometrico diſtantiam metiatur. Et cum præterea eo ſemper plures deteget, quo perfectioribus telescopiis uſus fuerit, non immerito de certo earum numero ineundo deſperabit. Verum e tanta luminis vivacitate, atque quod ſolis inſtar motu careant, conjecturam admodum probabilem ducet, eas totidem eſſe ſoles, hoc eſt, natura, magnitudine, ac lumine huic aſtro fere æquales, ac propterea, quemadmodum iſtud, in centris totidem ſyſtematum planetarum habitabilium, quorum motus regant, collocatas. In hac hypotheſi ſtellis fixis ea applicare licebit, quæ in ſole detexerit; quin etiam diſtantiarum tum inter ſe, tum a ſole, rationem utcunque inire, idque ex diverſa cujusque luminis intenſitate, quæ ſecundum Optices leges rationem inverſam quadratorum diſtantiarum ab obſervatore ſequitur.

CAPUT II.

De Planetis.

ARTICULUS I.

De diverſis Planetarum motibus generatim, & eorum natura.

14. Deſcriptionem fixarum determinatio motus Planetarum excipiet, quorum quidem

I. Imprimis obſervator noſter ſex numerabit, qui omnes verſus eandem plagam circa ſolem moventur, ſimilem fere viam ſecuti, ſed diſſimili admodum celeritate. Unde nomina iis ſua imponet, certosque characteres ſeliget, quibus ſingulos deſignet. Dicet *Mercurium*, qui omnium movetur celerrime, hacque eum

nota distinguet (☿), reliquos sequentibus signis ac nominibus indicabit: *Venerem* ♀, *Terram* ♁, *Martem* ♂, *Jovem* ♃, *Saturnum* ♄.

15. II. Advertet, Terræ semper adesse tanquam comitem exiguam quamdam stellulam, Jovi quatuor, quinque Saturno, quæ planetas suos jam præcedunt, jam sequuntur: nunc per medium eorum discum transeunt, nunc sub eodem, dum eius latitudinem emetiantur, latent. Has *Planetas secundarios*, aut *satellites*, aut *lunas* appellabit.

16. III. Observabit, diversis temporibus apparere corpora, quæ cum sub initium exigua, obscura, limbo male terminato, & tardissimi motus videantur, brevi dein crescunt, luce ac celeritate sensibiliter aucta usque ad certum terminum, post quem iterum iisdem fere gradibus magnitudo, lumen ac velocitas eorum deficit, quibus accreverat, dum tandem penitus dispareant. Atque hujusmodi quidem corpora versus omnem cæli plagam deteget, alia aliis, oppositisque directionibus progredientia. Hæc *cometas* dicet.

17. IV. Superficie planetarum primariorum attentius considerata, notabit in ea partes quasdem ceteris obscuriores (quas *maculas* vocabit): has videbit situm perpetuo mutare, ab uno versus alterum limbum progredi, postea sub planeta occultari, denuo ad priorem redire limbum, itaque constante quadam ratione motum continuare. Præterea animadvertet, hasce maculas, dum a limbo versus medium discum accedunt, semper latiores fieri; contrahi vero, dum inde versus alterum abeunt, in quo constitutæ, servata priore, quam in medio habebant, altitudine, tenuis fili instar apparent. Denique observabit, tempus, quo in disco planetæ videntur, aliquantum brevius esse illo, quo in ejus parte aversa latent, dum a limbo, in quo videri desinunt, ad priorem revertuntur.

Ex his concludet, maculas corpori planetæ inhærere, planetasque globos esse circa axes suos motos, ideoque singulis duos simul ineſſe motus, alterum, quo circa axem suum exiguo tempore convertuntur; alterum, quo solem ambiunt. Duplex hic motus ita fere peragitur, ac si globulus exiguus in superficie magni cujusdam globi incederet. Prior horum motuum, *diurnus* vel *rotationis* dicitur; alter *annuus* vel *revolutionis*.

18. Antequam telescopia inventa fuissent (quod circa A. 1609. evenit) nemo quidquam de motu rotationis suspicabatur. Keplerus nihilominus, Astronomus Germanus, qui circa ea tempora floruit, in suis hypothesibus physicis eum soli attribuit, id, quod postea ex observationibus confirmatum est. Nam deprehensum est, solem intra 25½ dies circa axem volvi, Jovem 9^h 56′; Martem 24^h. 40′, Venerem 23^h, 20′, terram 23^h. 56′. 4″, Ingens distantia, ac luminis debilitas in Saturno; exilitas Mercurii, ac solis vicinia impediverunt quidem adhuc, quo minus hic motus in planetis

netis istis determinaretur; attamen analogia cum ceteris magnam adfert verisimilitudinem, etiam istos motu vertiginis circa axem moveri.

19. Quod macularum naturam concernit, evidens est, quoniam planetæ non, ut stellæ, propria luce fulgent, sed a sole collustrati eam tantum versus nos reflectunt, uti ex sequentibus patebit, evidens, inquam, est, maculas nihil aliud esse, quam partes quasdam superficiei planetarum minus aptas luci reflectendæ, quales forent maria, sylvarum tractus &c. Et certe quisque facile concipit, terram e magna distantia visam ita apparituram maculis conspersam, uti diversæ eius partes in globo artificiali depinguntur. Sic maria lumen fere totum absorbentia tractus quosdam obscuros exhiberent; insulæ exiguæ, emergentesque scopuli lucidissima puncta viderentur, majores continentes luminosæ apparerent, hinc inde clarioribus, obscurioribusque partibus distinctæ. Nam terræ cultæ, lacubus & diversis aquis interruptæ, sylvis consitæ, minus incidentis luminis remittere possunt; at vero partes ceteris candidiores, majorum montium arida juga, aut perpetuis nivibus rigentia magnam eius copiam reflectant, est necesse. Quin etiam si melioris notæ telescopio, 12 aut 15 pedes longo, lunarem globum consideremus, facile in eo valles ac montes distinguimus. Quapropter verisimile fit, planetas aut habitatos esse, aut saltem habitabiles, telluris nostræ instar. Quo de argumento legi possunt Fontenellius de pluralitate mundorum, & Hugenius in Cosmotheoro.

ARTICULUS II.

De legibus motus Planetarum Primariorum.

20. Primum est, dum in leges motuum planetarum inquiritur, ut certa quædam mensura stabiliatur, ad quam eorum velocitates exigantur. Itaque tempus & spatium in cælo quodpiam assumendum est, quoniam velocitas ab his duabus rebus desumitur, eaque major est, qua spatium majus minore tempore percurritur, & ex opposito. Verum Geometra in centro motus orbicularis constitutus spatia reipsa percursa determinare nequit: siquidem ad hoc necesse est, ut corporum in orbem motorum distantia sciatur, id, quod fieri non potest. Quare spatiorum loco observator angulos adhibebit, seu arcus apparentes, quos in cava cæli superficie Planetæ describere videntur.

21. Quod ad tempus pertinet, arbitrarium est, qua quis ratione illud mensurare velit, modo eadem id semper fiat. Unde observator eum in finem revolutiones diurnas Planetæ, cujus libuerit, assumet, v. g. telluris nostræ, cujus unam circa axem rationem, respectu ad solem habito, *diem* appellabit: id tempus rursus in 24 partes æquales, sive *horas* dividet; horam in 60 *minuta*, minutum in 60 *secunda* &c. Denique supponet, tum diei initium haberi, cum certa quædam macula in telluris superficie notata, v. g. quam urbs Parisina efficeret, directe soli opponitur: tum item diem finiri, cum eadem macula ad priorem situm præcise redierit.

22. Duplici itaque inſtrumentorum genere opus obſervatori, quibus Planetarum motus determinet, altero quidem circulo, aut portione circuli in gradus, minuta, ac ſecunda accuratiſſime diviſi, quo angulos, ſive arcus deſcriptos ab iis metiatur; altero horologio, cujus motus quam maxime æquabilis, horas, minuta, & ſecunda temporis exacte indicante.

ARTICULUS III.

De revolutione annua Planetarum.

23. Ubi obſervator noſter quam accuratiſſime temporis punctum annotavit, quo ſinguli planetæ ad certam aliquam ſtellam fixam venerunt, atque tempus obſervavit, quo deinceps ſæpius ad eandem redierunt, cum qua eos prima vice conſpexit, deprehendet, *revolutionum ſingularum intervalla ejusdem planetæ uſque ad eandem fixam æqualia eſſe*, earumque tempora eſſe, ut in ſequente tabella exhibentur.

Tempus revolutionis annuæ

MERCURII	87	dies	23	hor.	15½	minut.
VENERIS	224	- -	16	- -	48⅓	
TELLURIS	365	- -	6	- -	9¼	
MARTIS	686	- -	23	- -	30½	
JOVIS	4332	- -	12	- -	0	
SATURNI	10759	- -	8	- -	0	

ARTICULUS IV.

De via, quam ſequuntur Planetæ.

24. Hac in re tria examinanda ſunt obſervatori: *Primo* an omnes partes curvæ, quam planeta aliquis deſcribit, ſint in eodem plano, aut vero orbita ſit duplicis curvaturæ hoc eſt, nulli certo plano affixa. *Secundo* ſiquidem hæc curva in eodem ſit plano, videndum, an ſit in plano circuli maximi ſphæræ cæleſtis, an alterius minoris. *Tertio* inquirendum, an omnium planetarum orbitæ in uno eodemque ſint plano, an potius in diverſis, ad ſe ſe invicem diverſimode inclinatis.

25. Ut

25. Ut his dubiis lumen affundatur, advertet obſervator, quod ſi omnes ſucceſſive ſtellas (ternas ſemper, vel quaternas accipiendo) per quas via planetæ accurate tranſit, comparet, omnes in eadem præciſe linea occurrant: qua de re certiorem ſe reddet ope fili tenſi, & aliquantum ab oculo remoti. Unde inferet, orbitam planetæ eſſe curvam in plano circuli maximi deſcriptam: nam plana circulorum maximorum omnia in ſphæræ centro ſe interſecant; juxta filum vero tenſum ſi aſpiciatur, ſitus talis circuli determinatur: igitur & ſtellæ, quæ in eo filo poſitæ videntur, ſunt in plano circuli maximi. Atque hac ratione priora duo dubia ſublata ſunt.

26. Eadem methodo deteget etiam, quod quamvis plana orbitarum diverſorum planetarum parum admodum ad ſe ſe invicem inclinentur, nihilominus tamen ſenſibiliter ſint diverſa: id, quod evidentius adhuc in conjunctione Planetarum apparet: quandoquidem fere ſemper contingit, ut alter ſupra alterum tranſeat, & quidem intervallo aliquot graduum.

27. Ulterius obſervabit, viam, quam planetæ inſiſtunt, ſucceſſive tranſire per conſtellationes Arietis, Tauri, Geminorum, Cancri, Leonis, Virginis, Libræ, Scorpii, Sagittarii, Capricorni, Aquarii, Piſcium. Et quoniam ea e ſenis planetarum orbitis componitur, quæ jam a ſe divergunt, jam accedunt iterum, ac ſe interſecant; latiorem aliquam faſciam, aut Zonam efformare videtur: fere quemadmodum in terra, dum plures peculiares orbitæ pone invicem ducuntur, quæ nunc parallelæ procurrant, nunc aliquantum a ſe invicem diſcedant, dum rurſus ſe interſecent, omnes ſimul latam quamdam viam currulem conſtituunt. Faſciam hanc obſervator *Zodiacum* vocabit, ejusque totum ambitum, initio a ſtella, qua libuerit, ſumpto, v. g. a prima Arietis, in duodecim partes æquales dividet, quas *ſigna* appellabit. Signum igitur quodvis triginta gradus occupabit, ac nomen ducet vel a numero ordinis quo poſt ſtellam illam pro principio diviſionis aſſumptam occurrit, vel a ſigno correſpondente. Ita dicetur ſignum primum, vel, ſignum arietis; ſignum ſecundum, aut ſignum tauri &c.

28. Antiqui Græcorum Aſtronomi, a quibus nomina & figuram conſtellationum etiamnum habemus, pro primo Zodiaci puncto ſtellam ♈ in auricula Arietis poſuerunt, quippe quæ prima erat conſtellationis, in qua ſol in æquinoctio verno verſabatur. Et eo quidem tempore quævis conſtellatio ſuo ſigno, cujus nomen gerebat, accurate reſpondebat: ſic conſtellatio arietis primum, tauri ſecundum ſignum &c. occupabant. Verum quoniam punctum æquinoctiale ſingulis annis 50″ contra ſignorum ordinem redit, ut in ſequentibus videbimus, ſtellæ omnes tantundem progredi videntur: ac ab illo jam tempore ♈ arietis fere integro ſigno eſt promota; ex quo fit, ut conſtellationes non amplius ſuis ſignis reſpondeant, quamvis hæc antiqua ſua nomina ſemper retineant. Sic conſtellatio arietis modo fere tota eſt in ſigno tauri, conſtellatio tauri in ſigno Geminorum &c. ut ex chartis cæleſtibus colligi poteſt.

Ex

Ex modernis Aſtronomis plurimi motus cæleſtes a puncto, in quo reipſa æquinoctium fit, computant; aliqui tamen a ♈ Arietis. Sed iſti, ut cum prioribus conſentiant, in omnibus ſuis calculis differentiam inter ſtellam illam, & punctum æquinoctiale verum addunt.

29. Ad exprimenda commodius ſigna Zodiaci, certi quidem characteres inventi ſunt, quos quisque ſibi perſpectos reddere debet ac familiores. En illos in ſequente tabella

Aries - - -	♈	Leo - - -	♌	Sagittarius - - -	♐
Taurus - - -	♉	Virgo - - -	♍	Capricornus - - -	♑
Gemini - - -	♊	Libra - - -	♎	Aquarius - - -	♒
Cancer - - -	♋	Scorpius - - -	♏	Piſces - - -	♓

Illud etiam opportune hic monendum, vocem *Signi* paſſim adhiberi ad ſignificandos 30 gradus, quin ad gradus Zodiaci attendatur. Sic cum dicitur, punctum unum cæli ab altero duobus ſignis diſtare, nihil aliud intelligitur, quam arcum inter duo illa puncta interceptum ſexaginta graduum eſſe.

ARTICULUS V.

De cauſis inæqualitatis motuum Planetarum.

30. Ubi obſervator noſter ſingillatim Planetarum motus curioſius conſideraverit, intelliget illico, eorum celeritatem inæquabilem eſſe. Atque præcipuam ſtudii ſui partem exiſtimabit, ut legem hujus inæqualitatis detegat. Qua in re ut certi aliquid ſtatuat, ac de cauſa inæquabilis illius motus ſecurus eſſe poſſit, ſiquidem unica ſit, a qua dependeat; aut ſi plures concurrant, ut ſingularum actiones ſeparatim cognoſcat, ac evolvat; & ut denique modum earum agendi penitus perſpectum ſibi reddat, conſtituat ſingulis diebus hora eadem cujusvis planetæ locum in ſua orbita durante ſaltem una revolutione integra obſervare. Sic ad eruendam theoriam Mercurii, ſupponamus ab obſervatore noſtro ſingulis diebus in ipſo meridie loca ejus in orbita per inſtrumenta ita determinata eſſe, ut in tabula mox ſubjicienda exhibentur; hoc eſt obſervatum eſſe numerum ſignorum, graduum, minutorum, & ſecundorum arcus cæleſtis inter centrum Mercurii, & illam ſtellam intercepti, cum qua in ſua orbita conjunctus videbatur, quando ſignum arietis ingrediebatur, & quidem menſura arcus juxta directionem motus planetæ accepta, id, quod *ſecundum ordinem ſignorum* fieri dicitur.

31. Ob-

31. Obſervationibus iſtis diligenter expenſis, acceptaque differentia ſingulorum locorum Mercurii, uti ea a regione binarum quarumvis, expoſita eſt, ut motus diurnus, & celeritas angularis vera, quam quovis die habuit, obtineatur, ulterius obſervator indagabit *Primo*, an non inæqualitates ejusmodi ſolum apparentes ſint, aut ex eo proveniant, quod Mercurius diſtantiam relate ad ſolem tantummodo mutet, quamvis motus in ſe ſit ſemper uniformis? Etenim experientia docemur, corpus motu æquabili latum videri eo celerius progredi, quo minor eſt ejus diſtantia, & ex oppoſito; adeo ut Lex Optica ſit, *inæqualitates apparentes celeritatum æqualium eſſe in ratione reciproca diſtantiarum ab oculo ſpectatoris. Secundo:* an inæqualitas iſta reipſa haberi poſſit, ac motus planetæ jam velocior, jam tardior eſſe, quin propterea diſtantia ejus a ſole mutetur. *Tertio* denique, an non ab utraque hac cauſa conjunctim proficiſcatur?

Ut dubitationes iſtæ tollantur, obſervandum eſt, quod dum corpora ad majorem diſtantiam, quam prius habuerint, recedunt, eorum diametri apparentes minuantur, ut altera etiam lex ſit in Opticis, *quod quando anguli, ſub quibus objectum videtur, exigui ſunt, diametri ſint in ratione reciproca diſtantiæ ab oculo.* Ex duabus his Optices regulis facile concluditur, celeritates apparentes ejusdem objecti motu æquabili lati eſſe in ratione directa angulorum, ſub quibus ejus diametri videntur. Unde obſervator noſter ſequentes duas regulas deducet:

32. I. *Si inæqualitas motus planetarum vera eſt, & unice ex mutatione velocitatis in diverſis orbitæ locis dependet, non mutata diſtantia a ſole; eorum diametri ſub eodem conſtanter angulo videri debent.*

33. II. *Si motus planetarum in ſe uniformis eſt, & inæqualitas tantum apparens, quæ ſolum ex mutata diſtantia a ſole proveniat; eorum celeritates, quas temporibus æqualibus habent, & arcus, quos iisdem temporibus percurrunt, ſunt ut eorum diametri.*

34. Supereſt jam, ut videamus, an aliqua iſtarum regularum locum habeat. Hinc obſervator noſter diverſis temporibus ſumma accuratione angulos, ſub quibus Diameter Mercurii videtur, determinabit, maxime vero tum, quando ejus celeritas maxima eſt, & minima. Inveniet vero angulum hunc ab illo tempore, quo celeritatem minimam habet, ſemper creſcere, uſque dum ad celeritatem maximam perveniat: & viciſſim. Ita tempore celeritatis maximæ obſervabit angulum eſſe $25''. 23'''$; & quando celeritas minima eſt, $16''. 37'''$. Ex quo evidenter colligitur, primam regulam locum haud habere; & ſiquidem orbita Mercurii circulus

ſit, ſolem non eſſe in ejus centro, quoniam diſtantiam ab eo perpetuo mutat.

35. Aſſumpta itaque altera regula fiat hæc proportio: ut diameter minima 16″. 37‴ eſt ad celeritatem minimam 2°, 44′, 20″ inter diem 9 & 10 Auguſti obſervatam: ita diameter maxima 25″. 23‴ eſt ad celeritatem maximam, quam aliquando Mercurius habere poteſt, ſi ſecunda hæc regula locum habeat. Reperitur autem quartus terminus 4°, 11′, 5″; & ex obſervatione inter diem 26 & 27 Junii celeritas Mercurii erat 6°, 23′, 27″. Igitur infertur *primo*, inæqualitates planetarum non eſſe mere apparentes, & unice ex diverſa eorum a ſole diſtantia pendere. *Secundo*, quia celeritas maxima obſervata excedit 2°, 12′, 22″, illam, quæ juxta ſecundam regulam per calculum deducta fuit, neceſſe eſt, ut dum Planetæ ad ſolem accedunt, motus acceleracionem veram acquirant, quæ cum apparente illa, atque ex vicinia majore pendente conjungenda eſt: atque ita *inæqualitas motus planetarum habet cauſam alteram Phyſicam, alteram Opticam; hoc eſt, partim eſt realis & vera, partim apparens.*

36. Veteres Aſtronomi omnes inæqualitatem Phyſicam & Opticam confuderant in unam, quæ res omnem eorum theoriam evertit, quoniam hac ratione erroneas rationes diſtantiarum neceſſe eſt inferri. Keplerus primus utriuſque cauſæ exiſtentiam demonſtravit, oſtenditque, utramlibet æqualiter fere in hunc effectum influere. Videatur ejus liber, cui titulus: *Aſtronomiæ pars Optica*. pag. 341.

Diſtan-

Distantiæ Mercurii a prima stella Arietis, in ipso meridie observatæ.

A.1740.	sig.	grad.	min.	sec.	differentiæ				sig.	grad.	min.	sec.	differentiæ		
					°	′	″						°	′	″
Jun. d. 14.	0.	2.	4.	30	.5.	2.	37.	Jul. d. 30.	7.	15.	8.	57	.2.	54.	11.
15.	0.	7.	7.	7	.5.	12.	23.	31.	7.	18.	3.	8	.2.	52.	15.
16.	0.	12.	19.	30	.5.	22.	14.	Aug. d. 1.	7.	20.	55.	23	.2.	50.	27.
17.	0.	17.	41.	44	.5.	31.	53.	2.	7.	23.	45.	50	.2.	49.	2.
18.	0.	23.	13.	37	.5.	41.	20.	3.	7.	26.	34.	52	.2.	47.	45.
19.	0.	28.	54.	57	.5.	50.	12.	4.	7.	29.	22.	37	.2.	46.	36.
20.	1.	4.	45.	9	.5.	58.	31.	5.	8.	2.	9.	13	.2.	45.	44
21.	1.	10.	43.	40	.6.	5.	53.	6.	8.	4.	54.	57	.2.	45.	8.
22.	1.	16.	49.	33	.6.	12.	12.	7.	8.	7.	40.	5	.2.	44.	43.
23	1.	23.	1.	45	.6.	17.	17.	8.	8.	10.	24.	48	.2.	44.	24.
24.	1.	29.	19.	2	.6.	20.	49.	9.	8.	13.	9.	12	.2.	44.	20.
25.	2.	5.	39.	51	.6.	23.	0.	10.	8.	15.	53.	32	.2.	44.	33.
26.	2.	12.	2.	51	.6.	23.	27.	11.	8.	18.	38.	5	.2.	44.	48.
27.	2.	18.	26.	18	.6.	22.	20.	12.	8.	21.	22.	53	.2.	45.	25.
28.	2.	24.	48.	38	.6.	19.	29.	13.	8.	24.	8.	18	.2.	46.	10.
29.	3.	1.	8.	6	.6.	15.	20.	14.	8.	26.	54.	28	.2.	47.	14.
30.	3.	7.	23.	26	.6.	9.	42.	15.	8.	29.	41.	32	.2.	48.	17.
Jul. d. 1.	3.	13.	33.	8	.6.	2.	53.	16.	9.	2.	29.	49	.2.	49.	37.
2.	3.	19.	36.	1	.5.	55.	8.	17.	9.	5.	19.	28	.2.	51.	8.
3.	3.	25.	31.	9	.5.	46.	31.	18.	9.	8.	10.	36	.2.	53.	10.
4.	4.	1.	17.	40	.5.	37.	25.	19.	9.	11.	3.	46	.2.	55.	13.
5.	4.	6.	55.	5	.5.	27.	52.	20.	9.	13.	58.	59	.2.	57.	23.
6.	4.	13.	22.	57	.5.	18.	10.	21.	9.	16.	56.	22	.3.	0.	1.
7.	4.	17.	41.	7	.5.	8.	21.	22.	9.	19.	56.	23	.3.	2.	48.
8.	4.	22.	49.	28	.4.	58.	33.	23.	9.	22.	59.	11	.3.	5.	55.
9.	4.	27.	48.	1	.4.	49.	2.	24.	9.	26.	5.	6	.3.	9.	20.
10.	5.	2.	37.	3	.4.	39.	46.	25.	9.	29.	14.	26	.3.	12.	56.
11.	5.	7.	16.	49	.4.	30.	40.	26.	10.	2.	27.	22	.3.	17.	10.
12.	5.	11.	47.	29	.4.	22.	24.	27.	10.	5.	44.	32	.3.	21.	24.
13.	5.	16.	9.	53	.4.	14.	33.	28.	10.	9.	5.	56	.3.	26.	2.
14.	5.	20.	24.	26	.4.	6.	28.	29.	10.	12.	31.	58	.3.	31.	7.
15.	5.	24.	30.	54	.3.	58.	4.	30.	10.	16.	3.	5	.3.	36.	36.
16.	5.	28.	29.	38	.3.	52.	9.	31.	10.	19.	39.	41	.3.	42.	20.
17.	6.	2.	21.	47	.3.	45.	43.	Sep. d. 1.	10.	23.	22.	1	.3.	48.	25.
18.	6.	6.	7.	30	.3.	39.	47.	2.	10.	27.	10.	26	.3.	55.	20.
19.	6.	9.	47.	17	.3.	34.	2.	3.	11.	1.	5.	46	.4.	2.	23.
20.	6.	13.	21.	19	.3.	28.	48.	4.	11.	5.	8.	9	.4.	9.	54.
21.	6.	16.	50.	7	.3.	23.	57.	5.	11.	9.	18.	3	.4.	17.	49.
22.	6.	20	14.	4	.3.	19.	20.	6	11.	13.	35.	52	.4.	25.	48.
23.	6.	23.	33.	24	.4.	15.	17.	7.	11.	18.	1.	40	.4.	35.	0.
24.	6.	26.	48.	41	.3.	11.	19.	8.	11.	22.	36.	40	.4.	43.	52.
25.	7.	0.	0.	0	.3.	7.	44.	9.	11.	27.	20.	32	.4.	53.	19.
26.	7.	3.	7.	44	.3.	4.	27.	10.	0.	2.	13.	51	.5.	2.	54.
27.	7.	6.	12.	11	.3.	1.	31.	11.	0.	7.	16.	45	.5.	12.	42
28.	7.	9.	13.	42	.2.	58.	51.	12.	0.	12.	29.	27	.5.	22.	31.
29.	7.	12.	12.	33	.2.	56.	24.	13.	0.	17.	51.	58			

ARTICULUS VI.

De figura orbitæ Planetarum.

37. Ex ulteriore obſervationum allatarum examine patebit obſervatori noſtro *Primo:* velocitatem Mercurii inde a maxima, quam 26 die Junii annotavit, uſque ad minimam die 9 Auguſti obſervatam regulariter admodum decreſcere, ac poſtea iterum eadem regularitate augeri, qua prius imminuta fuit, ita quidem, ut æquali utrimque ab his duobus terminis intervallo eadem ſit. *Secundo* circa eosdem celeritatis creſcentis, & decreſcentis limites, minorem ejus eſſe inæqualitatem, magisque ibi accedere ad uniformem. *Tertio* Limites hos ſex ſignis a ſe invicem, ſive orbitæ dimidio diſtare, ac temporis intervallum, quo ab altero ad alterum pervenit, eſſe 44 dierum, dimidium ſcilicet revolutionis annuæ Mercurii tempus. *Quarto* ubi Mercurius primis Septembris diebus, ad eadem loca, in quibus menſe Junio obſervatus fuerat, rediit, eum eadem celeritate in iisdem cæli locis moveri.

38. Hinc autem obſervator ſequentia deducet: Primo *Curvam, a planeta deſcriptam, regularem eſſe, & in ſe redire.* Secundo *duos celeritatis maximæ & minimæ terminos* (quos generali vocabulo *Apſides* dicet; & *ſuperiorem* quidem, vel *Aphelium*, illud orbitæ punctum, in quo celeritas eſt minima; *inferiorem* vero, aut *perihelium* alterum, in quo celeritas eſt maxima) *eſſe reſpectu ſolis diametraliter oppoſitos*, ut linea eos conjungens (quæ *linea apſidum* vocatur) curvæ diameter eſſe debeat per ſolis centrum tranſiens. Tertio *ſitum lineæ apſidum ad ſenſum conſtantem manere, eamque verſus eadem cæli puncta ſemper dirigi*, quandoquidem (23) obſervatum eſt, reditum planetæ ad eandem fixam, cum qua obſervatus prius fuit, æquali ſemper tempore haberi, ejusque velocitates in iisdem cæli locis æquales eſſe. Quarto *cauſam motus planetæ in æquali utriuſque a linea apſidum diſtantia æqualiter agere.*

ARTICULUS VII.

De hypotheſi Phyſica ad inveniendam curvam, quam planeta deſcribit, & determinandam legem inæqualitatum in diverſis orbitæ locis.

39. Illud nunc reſtat, ut duce Mechanica, inveniatur hypotheſis aliqua phyſica, in qua Planeta alternis vicibus ad ſolem accedat, & ab eodem recedat; motum acceleret, & retardet iis legibus, quæ cum obſervationibus conſentiant, ita ut ex hac hypo-

theſi

theſi ope Arithmeticæ & Geometriæ ſtatutis calculi regulis inveniri poſſit, quidquid ſeu lapſis retro temporibus obſervatum eſt, ſeu deinceps in his motibus continget.

40. Quod ut cum methodo fiat, & certitudine, quam poſſumus ſperare, maxima, obſervator ſequentia ex ordine principia Mechanices in mentem revocabit.

ARTICULUS VIII.

Principia Mechanicæ, quibus tota Aſtronomia Phyſica innititur.

AXIOMA I. *Effectus ſunt proportionales ſuis cauſis.*

Hoc eſt: effectus ea ratione creſcit vel decreſcit, qua actio cauſæ eum producentis creſcit, vel decreſcit.

42. AXIOMA II. *Nullum corpus ex ſe ipſo ſtatum motus vel quietis mutare poteſt, in quo ſemel eſt poſitum.*

43. Hinc ſequitur Primo: *Corpus, quod ſemel movetur, ſemper motum iri, niſi ſit cauſa aliqua, quæ ejus motum extinguat.*

44. *Secundo:* Corpus, cui vis ad motum juxta certam directionem impreſſa eſt, ſemper movendum eſſe directione & celeritate illi vi competente, quin unquam per ſe alterutram mutet. Quare *Corpus quod vi impreſſa movetur, de ſe ſemper linea recta, & motu æquabili moveri perget.*

45. Tertio: *Corpus in motu conſtitutum non poſſe celeritatem ſuam minuere, niſi nova ei vis, cum prima magis oppoſita, quam conſpirans, imprimatur; nec poſſe etiam celeritatem augere, niſi novam recipiat vim, quæ cum prima magis conſpiret, quam oppoſita ſit.*

46. Quarto: *Corpus motum non poſſe deſcribere polygonum aliquod, niſi a cauſa quadam a via rectilinea detorqueatur, quæ tunc in illud ſemper ſub nova directione agat, quando ad extremum alicujus lateris illius polygoni pervenit.*

47. AXIOMA III. *Corpus, quod agit in alterum, vel potentia quævis agens in corpus, ſemper invenit reſiſtentiam ſuæ actioni æqualem, & ejus directioni oppoſitam.* Id, quod alias ſic efferri ſolet: *actioni ſemper æqualis & contraria eſt reactio.*

Etenim nequit concipi actio Phyſica ſine obſtaculo, hoc eſt, ſine reſiſtentia. Imo nequit cogitari actio major, quam ſit obſtaculum; ſi enim vis major, quam ad effectum producendum neceſſaria ſit, adhibeatur, exceſſus ille inutilis eſt, nihilque agit: & ſi actio minor ſit, quam obſtaculum, effectum non habebit, ſed deſtruetur a reſiſtentia obſtaculi æquali, & directe oppoſita. Si lapidem funi alligatum manu traham, funis tota ſua longitudine æqualiter tenditur, manifeſto indicio, reſiſtentia lapidis tantundem eum retrahi verſus lapidem, quantum verſus me a manu trahitur. Nam ſi funis hic

ita tenſus circa medium ſcindatur, pars, quam manu teneo, verſus me elaſticitate ſua reſilit, pars vero lapidi alligata verſus lapidem: atqui ſi a manu ſola tractus fuiſſet, non item a lapide, evidens eſt, eam partem, quæ lapidi alligatur, non ſecus ac alteram, verſus manum trahentem niſuram, nequaquam autem verſus lapidem.

48. Mechanici *vim inertiæ* appellant proprietatem illam communem corporum, qua nituntur in ſtatu, quem ſemel habent, perſiſtere, atque omni ejus mutationi reſiſtunt.

49. Definitio I. *Motus uniformis* ſive *æquabilis* dicitur, quem corpus per actionem inſtantaneam potentiæ alicujus recipit; ſeu quo temporibus æqualibus ſpatia æqualia percurrit.

50. II. *Motus uniformiter acceleratus* eſt, qui in corpore repetitis continuo actionibus æqualibus, celeritatem ſingulis tempuſculis æqualibus æqualiter augentibus, producitur.

51. THEOREMA I. *Si corpus motu æquabili fertur, ſpatia temporibus æqualibus percurſa ſunt ut celeritates; quæ vero celeritate eadem percurruntur, ſunt ut tempora; & celeritates, quibus ſpatia æqualia deſcribuntur, ſunt reciproce ut tempora.*

Patet enim, ſpatium motu æquabili percurſum tempore dato, v. g. uno minuto tanto fore majus, quo major eſt celeritas mobilis. Quod ſi altero minuto temporis celeritas ſit dupla, vel tripla, etiam ſpatium, quod deſcribetur, erit duplum vel triplum, adeoque ſemper in ratione celeritatis. Simili ratiocinio in reliquis theorematis partibus utendum. Ita evidens eſt, corpus celeritate eadem motum eo majus percurſurum ſpatium, quo longiore tempore movetur; & ſi corpus ſpatia æqualia deſcribit, celeritatem tanto fore majorem, quo breviore tempore tale ſpatium percurrit.

52. THEOREMA II. *In motu æquabili ſpatia* E *&* e, *corporibus* A *&* B, *temporibus* T *&* t, *celeritatibus* V *&* v *deſcripta, ſunt inter ſe ut facta* V T, v t, *nempe celeritatum in tempora; ſeu* E : e = V T : v t.

Demonſtratio. Ponamus corpus A celeritate *u*, æquali celeritati *v* corporis B, tempore T percurrere ſpatium *ε*. Quod ſi jam hoc ſpatium *ε* cum ſpatio E, quod celeritate V deſcribit, comparemus; quoniam tempus T idem eſt, habebimus (per 51) E : *ε* = V : u. Et ſi idem ſpatium *ε* conferatur cum ſpatio *e* a corpore B eadem celeritate, ſed tempore t, deſcripto, erit *ε* : *e* = T : t. Quare compoſitis rationibus eſt (Elem. 307) E *e* : *ε e* = V T : v t, ſeu (Elem. 296) E : *e* = V T : v t.

53. Obſerva I. Apud Mechanicos rationem conſtantem mutationis duarum quantitatum heterogenearum, & quæ alias inter ſe comparari nequeunt, exprimi per ſimplicem aliquam æquationem. Exempli cauſa, dum intelligi volunt, ſpatia eſſe ſemper ut tempora, ſcribunt *e* = *t*, quamvis in ſe ſpatia nunquam coæquari tempori alicui poſſint, utpote cum illa ſint extenſio permanens, hoc autem ſucceſſiva, adeoque prorſus ab illis heterogenea. Verum expreſſio ejusmodi nihil aliud ſignificat, quam ſpatia in eadem ratione creſcere vel decreſcere, qua tempus augetur vel minuitur. Ut denotent, celeritates eſſe in ratione reciproca temporum, ponunt

nunt $u = \frac{1}{t}$. Nam ratio reciproca directæ inſtar ſcribi poteſt; modo termini illius pro denominatoribus, & unitas pro numeratore ſumatur. (Elem. 299). Ut exprimant, quantitatem aliquam nullam ſubire mutationem, ſed eandem conſtanter manere, eam unitati æqualem faciunt. Hanc methodum ſi ſequamur, ita in compendio Theorema I. exponi poteſt: *in motu uniformi*, *ſi* $t = 1$, $e = v$; *ſi* $v = 1$, $e = t$; *& ſi* $e = 1$, $v = \frac{1}{t}$. Et Theorema II: *in motu æquabili* $e = v\,t$.

54. II. Dum in formula aliqua generali quantitas conſtans, vel quæ talis ſupponitur, vel factum aut quotus quantitatum conſtantium occurrit, formula ſimplicior redditur, quin ratio variabilium in ea contentarum mutetur, ſi in locum quantitatis conſtantis unitas ſurrogetur, facta reductione, quam hæc ſubſtitutio exigit. Uti v. g. in hoc exemplo $e = vt$; ſi tempus ponatur conſtans, erit $t = 1$, pro t ſubſtituta 1, erit $e = v.1$, vel $e = v$, quod oſtendit, tempore aſſumpto conſtante, ſpatium eſſe ut celeritatem. Si ſit formula $p = \frac{abx}{qs}$, quæ valorem abſolutum quantitatis p exprimit, & ſupponatur *ab* eſſe factum ex duabus quantitatibus conſtantibus, habebitur $p = \frac{x}{qs}$, quod ſignificat, quod quamvis valor abſolutus quantitatis p ſit $\frac{abx}{qs}$, variatio tamen de p fiat in eadem ratione, qua quotus variabilis x per alteram variabilem qs diviſæ creſcit vel decreſcit. Ut adeo formula poſt ſimilem ſubſtitutionem factam non niſi rationem variationis de p exprimat.

55. Corollarium. Cum in motu æquabili ſit $e = v\,t$, erit $v = \frac{e}{t}$, *&* $t = \frac{e}{v}$.

56. THEOREMA III. *Motus quivis utcunque acceleratus vel retardatus, quo curva quælibet deſcribitur, conſiderari poteſt, tanquam compoſitus ex infinitis motibus æquabilibus & rectilineis, qui ſinguli tempuſculis infinite parvis, ex quibus tempus finitum illius motus conſtat, durent. Supponi præterea poteſt, omnem mutationem celeritatis & directionis ſemper fieri in initio talis tempuſculi infinite parvi, ita ut per tale tempuſculum poſtea utraque eadem maneat.*

Etenim tempuſculis ſingulis infinite parvis mobile non niſi momentaneum progreſſum in ſpatio facit; progreſſus iſti momentanei inter ſe quidem inæquales eſſe poſſunt, & diverſas habere directiones, ſi alter alteri comparetur; at in uno eodemque ſeparatim accepto nihil inæquabile, mutationis nihil concipi poteſt.

57. THEO-

57. THEOREMA IV. *In motu uniformiter accelerato, velocitates sunt ut tempora; seu* $u = t$.

Nam cum mobile quolibet temporis momento æquali novam vim æqualem acquirat, consequenter etiam æqualem celeritatis gradum, summa omnium horum incrementorum æqualis est summæ omnium momentorum, quibus acquiruntur; & ideo velocitates semper sunt ut tempora a principio motus computata.

58. THEOREMA V. *Spatium* e *tempore finito* t *motu uniformiter accelerato percursum, est dimidium illius, quod mobile velocitate* v *quam in fine temporis* t *acquirit, motu æquabili eodem tempore describisset.*

Dividatur tempus t in infinita tempuscula æqualia; celeritates, quas mobile in fine cujuslibet tempusculi habet, erunt ut hæc progressio Arithmetica $1\frac{\infty}{u}$, $2\frac{\infty}{u}$, $3\frac{\infty}{u}$, $4\frac{\infty}{u}$ - - - $\infty\frac{\infty}{u}$. Et quia (56) durante quovis tempusculo minimo motus est æquabilis, adeoque etiam spatium est ut velocitas, quam eo tempusculo mobile habet; eadem progressio repræsentat spatia singulis tempusculis percursa, & summa totius progressionis est ut spatium totum tempore t descriptum. Sed summa progressionis (Elem. 280) æqualis est facto ex summa termini primi & ultimi $1\frac{\infty}{u} + u$ in dimidium terminorum numerum ducta, sive in $\frac{t}{2}$, id est, in numerum dimidium omnium tempusculorum, ex quibus t constat; igitur spatium totum exhibetur per $\left(1\frac{\infty}{u} + u\right)\frac{t}{2} = \frac{ut}{2}$, quia $1\frac{\infty}{u} = 0$ (Elem. 360).

59. THEOREMA VI. *Spatia ab eodem mobili motu uniformiter accelerato percursa, sunt ut quadrata temporum, quibus describuntur; vel ut quadrata celeritatum in fine temporum acquisitarum.*

Si enim in formula $e = \frac{tv}{2}$, substituatur $t = v$ (*p* 57), fiet $e = \frac{tt}{2}$, vel $e = \frac{vv}{2}$, seu cum 2 sit quantitas constans, $e = uu = tt$.

60. Scholium I. Gradus & incrementa celeritatis, quæ mobile singulis instantibus acquirit, consequenter etiam quantitas spatii percursi, ab intensione vis acceleratricis in mobile agentis dependent. Unde vis acceleratrix minor minores etiam velocitatis gradus producet, quam altera major, & mobile iisdem temporibus spatia minora describet; nihilominus tamen velocitates istæ semper erunt in ratione simplici temporum, & spatia cum iis descripta in ratione duplicata. Itaque *si vires acceleratrices diversæ sint, spatia sunt in ratione composita ex simplici virium, & duplicata temporum.* Dicatur vis acceleratrix quælibet f; dabuntur sequentes formulæ generales: $e = ftt$, $f = \frac{e}{tt}$, $t = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{f}}$.

61. Ut

61. Ut generatim demonſtretur, eſſe $e = ftt$, ſeu ſpatia percurſa eſſe ut facta ex viribus acceleratricibus in quadrata temporum, ſint duo corpora A & B, quæ ſpatia E & e temporibus T & t, viribus acceleratricibus F & f deſcribant; dico eſſe $E : e = FTT : ftt$. Supponatur primo corpus A moveri vi acceleratrice f tempore T, & deſcribere ſpatium ε. Quod ſi jam hoc ſpatium ε comparetur cum ſpatio E eodem tempore T a corpore A deſcripto, erit $E : \varepsilon = F : f$. Et ſi idem ſpatium ε conferatur cum ſpatio e a corpore B vi eadem acceleratrice tempore t percurſo, eſt: $\varepsilon : e = TT : tt$. Igitur compoſitis rationibus (Elem. 296) fiet $E\varepsilon : \varepsilon e = E : e = FTT : ftt$.

62. Scholium II. Experientia conſtat, corpora verſus ſuperficiem Planetæ deſcendentia motu uniformiter accelerato cadere; diciturque vis acceleratrix, quæ hunc effectum producit, *gravitas*. Quin certis experimentis & legitimo ratiocinio detectum eſt, corpora circa Telluris ſuperficiem libere cadentia, & quibus aer ſenſibiliter non reſiſtit, intra primum minutum ſecundum lapſus $15\frac{1}{10}$ ped. conficere. In formulis igitur præcedentibus poni poteſt $f = 15.1$. ped. quando t in minutis ſecundis habetur, & corpora prope Telluris ſuperficiem ſupponuntur eſſe.

63. Scholium III. Concipi quoque poteſt *vis retardatrix uniformis*, quæ quovis tempuſculo æquali in mobile agat æqualiter, & directione contraria ejus motui, ut adeo mobile æqualibus tempuſculis æquales celeritatis gradus amittat. Atque talis vis retardatricis eædem erunt proprietates, ſed oppoſite ſumptæ, ac vis acceleratricis, temporibus & ſpatiis iis computatis, quibus vis retardatrix totum corporis motum extinxit. Ita ſi lapis in altum projiciatur, ejus gravitas fit vis retardatrix, ejus aſcenſum impediens; at poſtquam totum ejus motum ſurſum extinxit, fit rurſus vis acceleratrix uniformis, qua corpus iisdem accurate celeritatis gradibus deſcendit, iisdemque temporibus, quibus aſcendit.

64. THEOREMA VII. *Si duæ vires quæcumque eodem inſtanti temporis impellant idem corpus juxta eandem rectam directione* { *eadem* / *vel* / *oppoſita* }; *corpus movebitur motu æquabili in eadem recta verſus plagam directionis* { *communis* / *vel* / *fortioris* }; *& celeritas ejus erit æqualis* { *ſummæ* / *vel* / *differentiæ* } *celeritatum, quas ſingulæ vires ſeparatim communicarent. Idem intelligendum eſt, de viribus quotcunque impellentibus, quæ juxta eandem rectam agerent.*

Hæc neceſſario ex I Axiomate (41) conſequuntur.

65. Corollarium. Quoniam actiones duarum virium ſecundum eandem rectam, & directione eadem mobile impellentium in unam ſummam adduntur, & ex actionibus directe oppoſitis minor deſtruitur, ita ut tantum differentia majoris ſuperſit, ſequitur, quod ſi duarum virium directiones ſub aliquo angulo concurrant, actiones nec ſimpliciter conſpirent, nec etiam ſimpliciter oppoſitæ ſint, ſed partim conſpirent, partim opponantur invicem, adeoque etiam ex parte addendæ ſint, ex parte altera ab altera ſubtrahenda, prout ſcilicet rectæ directiones obliquas exhibentes partim ex ſitu eodem, partim ex oppoſito participant.

66. Lemma. *Si* (fig. 17) *ſumatur* C B *pro radio, qui concurrat oblique cum plano* D B (reſpectu cujus conſequenter nec coincidit, nec parallelus eſt, nec perpendicularis, ſed ex utroque ſitu participat) *ſinus* C A *anguli obliquitatis* C B A *exprimet id, quod radius* C B *ex ſitu perpendiculari participat reſpectu plani* D B; *& ſinus complementi ejusdem anguli* A B, *exprimet id, quod habet ex ſitu congruente, ſeu parallelo.*

Recta B C ſitum quendam medium inter parallelum & perpendicularem ad planum D B obtinet; & concipi poteſt, quaſi deſcriberetur progreſſibus momentaneis alicujus puncti, qui alternatim ſint perpendiculares & paralleli ad hoc planum D A, ita ut hi progreſſus figuram graduum ſeu ſcalæ cujusdam efforment, quamvis ob exilitatem ſingulorum eorum collectio unicam rectam exhibeat. In hac hypotheſi autem liquet, ſummam omnium progreſſuum ad A B perpendicularium æquari rectæ A C; & ſummam omnium progreſſuum momentaneorum parallelorum plano, eſſe æqualem rectæ A B: quare A C exhibet id, quod C B participat ex ſitu perpendiculari; & A B, quod ex parallelo ad D B habet; & ſumpta C B pro radio, eſt C A ſinus anguli obliquitatis C B A; A B vero coſinus; igitur &c.

67. THEOREMA VIII. *Si corpus* C *impellatur ſimul a duabus viribus* (fig. 18) *quæ ſint ut* A C, *&* C D, *ita ut ſi a ſola vi* A C *impelleretur, tempore* T *deſcriberet motu æquabili rectam* C A; *& ſi a ſola vi* C D *impelleretur, eodem tempore percurreret æquabiliter rectam* C D: *corpus motu æquabili eodem tempore* T *deſcribet diagonalem* C B *parallelogrammi, cujus latera ſunt* C A *&* C D.

Quoniam directiones C A & C D angulum aliquem efficiunt, actiones virium impellentium corpus C partim conſpirant, & per duas rectas congruentes exprimi debent; partim oppoſitæ ſunt, & exhibendæ per rectas ad directionem partium conſpirantium perpendiculares, ſed oppoſitas. Et quia corpus de ſe nullam vim habet ad motum vel directionem aliquam, evidens eſt, primo, illud moveri non poſſe, niſi partes actionum impellentium oppoſitæ ex integro deſtruantur, id, quod fieri nequit, niſi eæ partes inter ſe æquales ſint, & per perpendiculares æquales exprimantur. Secundo corpus nec poſſe ſequi directionem C A, nec directionem C D, ſed tantum directionem partium conſpirantium; itaque prorſus debere in ea directione moveri, ac ſi ab unica ſummæ earum æquali impelleretur, & hinc debebit etiam tempore T motu æquabili rectam deſcribere, quæ æquatur ſummæ linearum, actiones conſpirantes exponentium. Quod ſi jam A D jungens puncta A & D biſecetur in I, & per C & I ducatur indefinita C B, erit hæc directio actionum conſpirantium.

Nam perpendicula A E & D F ex punctis A & D in rectam C B demiſſa hac ratione fient æqualia, ob triangula A E I, I F D æqualia, in quibus omnes tres anguli, ſinguli ſingulis, & hypotenuſæ A I & I D æquantur. Quare eadem perpendicula

A E

AE & DF partes oppoſitas actionem virium AC & DC exhibebunt, ut oportet; & itidem rectæ coincidentes CE & CF repræſentabunt partes conſpirantes. Unde ſi fiat CB=CE+CF, corpus C motu æquabili tempore T deſcribet rectam CB. Sed quia CB=CE+CF, erit EB=CF; & ob triangula FID, IEA rectangula & æqualia, & FI=IE, eſt quoque CI=IB. Ductis itaque AB & DB, in quadrilatero CABD diagonales AD, CB ſe invicem biſecant, & utrinque triangula ſimilia & æqualia efficiunt; quare hoc quadrilaterum parallelogrammum eſſe debet (Elem. 522).

68. Corollarium I. Cum diagonalis ſemper ſit in plano parallelogrammi, corpus a duabus viribus ſimul impulſum movebitur in eodem plano, in quo ſunt directiones virium impellentium.

69. Corollarium II. Vis unica, quæ corpus tempore T ex C uſque in B movere poſſet, eundem affectum præſtaret, ac vires CA & CD ſimul agentes. Quare illa pro his ſubſtitui poterit; & *viciſſim vi cuilibet duæ aliæ ſubſtitui poſſunt, quarum ſingulæ corpus per ſingula latera contigua parallelogrammi eodem tempore impellerent, quo illa per diagonalem.* Quando ejusmodi ſubſtitutio fit, vis illa, pro qua aliæ ſurrogantur, *in duas reſolvi dicitur.*

70. Corollarium III. *Si vis finita agit directe in planum immobile, vel, quod idem eſt, in corpus, cujus maſſa infinita ſit, ejus actio in preſſionem illi vi æqualem deſinit, quin aliquem motum finitum communicet.*

Quia enim actio illius vis finitæ diſtribui debet in partes finitas magnitudine, ſed numero infinitas corporis infiniti impellendas, quælibet pars finita non niſi infinite parvum impulſum ſentire poteſt, conſequenter non niſi motum infinite parvum, id eſt nullum, acquirit. Atque ſic etiam actio talis vis in preſſionem plani immobilis deſinit.

71. *Sed ſi vis finita, & per* CB (fig. 19) *expreſſa, agit in planum immobile* AE *directione obliqua* CB, *illud tantum premit, quantum* CB *ex directione perpendiculari participat.* Atque hinc *reſolvitur in duas, quarum una* CA *perpendicularis, altera* CD *plano parallela*, ita, ut CB ſit parallelogrammi ACDB diagonalis. *Recta* CA *repræſentat illam, quæ in planum agit, & per ejus reſiſtentiam deſtruitur;* CD *vero alteram parallelam, quæ nihil agit, adeoque nec deſtruitur.* Quod ſi itaque potentia quævis, quæ tempore finito T corpus ex C in B uſque moveret, ageret in idem corpus in B ſuper plano immobili AE collocatum, eidem non plus motus communicaret, quam ut tempore hoc T rectam BE, alteri CD parallelam & æqualem, percurreret; attamen illud ſimul plano vi per CA exhibita apprimeret.

72. Scholium. Diximus quidem in demonſtratione hujus Theorematis, partes virium oppoſitas per AE, DF (fig 18) repræſentatas ex integro deſtrui; verum apparet facile, effectum realem harum actionum directe oppoſitarum eſſe, ut corpus in diagonali CB retineant: AE nempe impedit, ne corpus verſus D deſcendat, & illud verſus A extrudit; per DF vero fit, ne aſcendat verſus A, ſed verſus D repellatur: hinc corpus perpetuo in diagonali manere cogitur; & proprie loquendo, nulla pars actionis ita prorſus deſtruitur, ut nullum effectum realem habeat.

73. THEOREMA IX. *Corpus a duabus simul viribus impulsum, quarum directiones angulum efficiunt, describit lineam rectam, si vires impellentes sint ejusdem rationis*, hoc est, utraque æquabiliter agat: vel utraque eadem lege acceleret vel retardet; *sed si sint diversæ rationis, describet curvam aliquam (quæ generali vocabulo* Trajectoria *appellatur) cujus natura a virium impellentium ratione, qua singulis momentis agunt, dependet.*

Demonstratio. Sint vires duæ quævis corpus C (fig. 20 & 21) directionibus CD & CA impellentes, quarum una tempusculis tribus minimis illud ex C in D; altera ex C in A moveret. Si CD & CA dividantur singulæ in tres partes secundum rationem, quæ inter vires, quas exponunt, intercedit; & parallelogramma GE, HF & AD compleantur, patet *primo*, corpus in fine primi tempusculi fore in I; post secundum in K, & denique finito tertio in B. Cum enim tempuscula sint minima, utraque vis durantibus singulis æquabiliter agit. Quare cum in primi principio corpus impellatur a duabus viribus, quarum una separatim agente veniret ex C in E, & altera sola impellente ex C in G, eodem tempusculo elapso in I esse debet. Sed quia prima duo tempuscula simul sumpta adhuc tempus infinite parvum constituunt, præscindendo a primo tempusculo supponi potest, corpus impelli in ipso motus initio a duabus viribus, quarum una ex C in F, altera eodem tempore ex C in H illud promoveret, & hinc corpus in fine hujus temporis in extremo diagonalis CK puncto esset. Simili ratione quoniam omnia tria tempuscula non nisi tempus infinite parvum simul efficiunt, insuper habitis primis duobus tempusculis supponi potest, corpus ab initio moveri a duabus viribus, ab una versus D, ab altera eodem tempore versus A, ita ut in fine temporis in B esse debeat.

74. Patet *secundo*, quod viribus ejusdem rationis existentibus (fig. 20), rectæ CA, CD sint similiter divisæ, adeoque CE, CF, CD sint proportionales partibus CG, CH, CA, & quia in parallelogrammis GE, HF, AD anguli CEI, CFK, CDB æquantur, & latera EI, FK, DB æqualia sunt lateribus CG, CH, CA, consequenter proportionalia lineis CE, CF, CD, triangula CEI, CFK, CDB similia sunt (Elem. 559); & hinc cum eorum anguli ad C æquales sint, & latera CE, CF, CD in eadem recta, etiam latera CI, CK, CB in eadem recta esse debent, adeoque & puncta C, I, K, B. Quare si vires impellentes ejusdem sint rationis, corpus in linea recta movetur.

75. Verum si vires sint diversæ rationis, uti si (fig. 21) CD repræsentet vim æquabiliter agentem; CA vero vim uniformiter motum accelerantem, rectæ EI, FK, DB non sunt proportionales

nales rectis CE, CF, CD; nam CG minor est, quam GH; dum CE alteri EF æquatur: hinc etiam triangula CEI, CFK, CDB haud quaquam sunt similia; & angulis eorum ad E, F, D æqualibus existentibus, anguli ad C inæquales sunt. Quare cum eorum latera CE, CF, CD in eadem recta jaceant; latera CI, CK, CB nequeunt esse in una recta, & hinc neque puncta C, I, K, B.

76. Si CA accipiatur pro diametro Curvæ CIKB, erunt CG, CH, CA abscissæ, & parallelæ GI, HK, AB semiordinatæ; aut vero si curva ad rectam CD referatur, parallelogramma GE, HF, AD erunt facta ex semiordinatis in abscissas, seu parallelogramma coordinatarum (Elem. 775). Jam vero (Elem. 767) natura curvæ dependet a ratione constante, quam habet functio quæpiam abscissarum ad functionem semiordinatarum; igitur natura curvæ dependenter a duabus viribus simul agentibus, & diversæ rationis, descriptæ pendet a ratione, quæ quovis instanti inter illas vires intercedit.

Exempli causa, in hypothesi priore (75) curva CIKB est parabola. Cum enim vis per CD exhibita æquabiliter agere supponatur, spatia CE, CF, CD sunt ut tempora, adeoque eadem, vel æqualia GI, HK, AB exponent tempora ab initio motus elapsa. Et quia vis directione CA agens uniformiter motum accelerat, spatia CG, CH, CA sunt inter se ut quadrata temporum (per 59), seu ut quadrata rectarum GI, HK, AB. Quare Curva CIKB talis naturæ est, ut abscissæ CG, CH, CA sint inter se ut quadrata semiordinatarum GI, HK, AB, sive est Parabola (Elem. 821).

77. Quod ut in exemplo generali magis pateat: sit (fig. 22) *corpus* P *impulsum a duabus viribus*, *altera æquabili*, per cujus actionem corpus nitatur continuare motum eadem directione, quam in fine cujuslibet tempusculi habet; *altera*, *ut libet*, *variabili*, *sed perpetuo versus punctum fixum* S *tendente*, *versus quod etiam corpus* P *continuo impellit*; *describet hoc corpus curvam* PQpO, *quæ semper cavitatem puncto* S *obvertit*.

Nam si tempus quodvis finitum, quo motus iste durat, dividatur, in tempuscula infinite parva & æqualia, supponaturque corpus P primo tempusculo percurrisse spatium PQ, atque in principio secundi recipere actionem versus S, quæ sit ut QG; evidens est, corpus P, quod sola vi æquabili agente secundo tempusculo describsisset QF = PQ, & in eadem directione, percurrere motu composito diagonalem Qp parallelogrammi QFpG, ac in fine hujus tempusculi fore in p. Eadem ratione elapso tertio tempusculo corpus foret in E, ita ut pE = Qp, nisi in p no-

va actione, quæ fit ut pH, verſus S impelleretur, (eſt autem pH = QG, ſi vis verſus S tendens eſt conſtans; ſed ſi variabilis eſt, pH & QG erunt inæquales) atque ideo diagonalem pO deſcribere cogetur. Hunc in modum vis æquabilis cum altera, corpus verſus punctum S perpetuo impellente, concurrens facit, ut curvam verſus S cavam deſcribat, cujus natura itidem a ratione harum duarum virium inter ſe, & directione, qua ſingulis inſtantibus agunt, dependet. Vis autem illa, quæ corpus continuo verſus punctum aliquod fixum, tanquam centrum, urget, propterea *vis centralis*, vel *centripeta* dicitur.

78. Si v. g. SQ (fig. 23) ſit perpendicularis ad PF, ſive directionem vis æquabilis, & quantitates PI, QG, pH, quibus ſingulis inſtantibus corpus P verſus S retrahitur a vi centrali, ſint æquales quantitatibus QR, pF, OE, quibus ſequendo directionem vis æquabilis ab eodem puncto S recedere conatur, manifeſtum eſt, Curvam PQpO, eſſe circulum, cum viribus compoſitis corpus perpetuo in eadem a puncto S diſtantia maneat.

79. Apparet itaque, motum aſtrorum circa ſolem viribus ſimili ratione inter ſe compoſitis poſſe attribui; unde leges ejusmodi motuum compoſitorum examinandæ ſunt, ut, num phænomenis congruant, ſtatui poſſit.

ARTICULUS IX.

De proprietatibus motus compoſiti ex vi inſita, ſeu æquabiliter agente, & centrali.

80. THEOR. I. *Trajectoria vi inſita & centrali deſcripta non poteſt habere punctum flexus contrarii, vel regreſſus* (cum ſemper cavitatem (77) puncto eidem fixo obvertere debeat) *ſed ceteris paribus tanto majorem habet curvaturam, quanto majorem rationem vis centralis ad vim inſitam habet; & viciſſim.*

Sic arcus P Q p (fig. 22) magis curvus eſt, quam arcus QpO, cum vis centralis in Q per QG expoſita majorem rationem habeat ad QF, quam vis centralis in p per pH deſignata ad vim inſitam pE, conſequenter vis centralis in Q magis corpus a recta retrahit, quam in p.

81. Hoc ut univerſim obtineat, neceſſe eſt, ut vis inſita æquabilis in omnibus curvæ punctis eadem quantitate exprimatur, & ut directio vis centralis cum directione vis inſitæ eundem ſemper faciat angulum. Atque hoc intelligendum eſt ſub conditione in Theoremate adjecta: *ſi cætera ſint paria.*

82. THEO-

82. THEOREMA II. *Trajectoria viribus expositis descripta, est semper in eodem plano cum centro* S, *& prima directione vis insitæ* P F.

Etenim cum Q p sit diagonalis parallelogrammi lateribus Q G, Q F descripti, in eodem cum Q G (seu Q S) & Q F est plano. Similiter p O est in eodem plano cum p H, seu p S, & p E, sive Q E, hoc est in eodem cum Q p. Idem est de ceteris.

Observa. Quando dicimus *vis æquabilis; vis constans, aut uniformis, vel vis projectionis, aut insita æquabilis vel constans*, non intelligimus, eam vim æquali tempore semper æqualem actionem habere: quin manifestum est, rectas Q F, p E, per quas actiones illæ exponuntur, inæquales esse.

Nam quovis instanti per concursum vis centralis afficitur, & aliter, aliterque determinatur, fitque novi semper parallelogrammi diagonalis. Atque hinc etiam provenit inæqualitas celeritatum. Constantem igitur eo solum fine hanc vim appellamus, ut a centrali, quæ semper est vis acceleratrix, quemadmodnm deinceps videbimus, distinguamus.

83. THEOREMA III. *Area arcu quovis trajectoriæ, & duobus radiis ex centro virium* (qui *Radii Vectores* dicuntur) *ad extrema arcus puncta ductis comprehensa, est semper ut tempus, quo arcus is describitur.*

Nam *primo* areæ triangulorum S P Q, S Q F, verticem communem S, & bases P Q, Q F æquales habentium, æquales sunt. Sed etiam triangulorum S Q F, S Q p super basi eadem S Q, & inter parallelas S Q, & p F existentium areæ æquantur (Elem. 593); Quare etiam triangulorum S Q P, S Q p areæ æquales sunt. Eodem modo demonstratur, aream S Q p esse æqualem areæ S p O: & hinc areæ, quas æquali tempore radius vector verrit, æquales sunt.

Secundo. Si tertium tempusculum, quo corpus P motu composito percurrit p O, esset duplum secundi, quo descripsit Q p; tempusculo tertio corpus P vi insita percurreret p E, duplam de Q p, & hinc area trianguli S p E, (vel æqualis S p O) esset etiam dupla trianguli S Q p. Idem est de quavis alia ratione temporis.

Observa: cum area quævis finita sit summa infinitarum areolarum infinite parvarum, quarum quælibet tempusculo correspondenti proportionalis est, sintque totidem elementa areæ, quot tempuscula, sequitur, aream finitam esse tempori correspondenti finito proportionalem.

84. Corollarium I. *Tempus, quo describitur arcus* P Q (fig. 24), *est ad tempus, quo percurritur arcus* r m, *ut sector* P S Q *ad sectorem* S r m. Atque hæc est una ex celebratis duabus legibus a Keplero statutis.

85. Corollarium II. Si arcus P Q est admodum parvus, sector P S Q a triangulo rectilineo non differt, & arcus P M, centro S, radio S P descriptus pro eius altitudine haberi potest. Si igitur *t repræsentet tempus valde parvum, quo percurritur* P Q, erit $t = PM \cdot SQ$;

vel

vel $t = SR.PQ$. Nam (Elem. 594) facta hæc sunt ut area trianguli SPQ.

86. THEOREMA IV. *Celeritas corporis in quovis trajectoriæ puncto* Q (fig. 24) *est reciproce ut perpendiculum* SR, *e centro virium ad tangentem in puncto* Q *demissum; id est* $u = \frac{1}{SR}$.

Nam $t = SR.PQ$; & simul, ob t admodum exiguum, est $t = \frac{PQ}{u}$; adeoque $SR.PQ = \frac{PQ}{u}$; inde fit $u = \frac{1}{SR}$.

87. THEOREMA V. *Celeritas corporis in diversis orbitæ* MLQ *locis* L, l, λ (fig. 25) *vel uniformiter acceleratur, vel uniformiter retardatur, prout radius vector cum curva (vel ejus tangente) angulum acutum*, CLS; *rectum*, Cl O; *vel obtusum* C λ R *fecerit versus* Q, *quo tendit motus corporis.*

Demonstratio. Dum radius vector ad tangentem obliquus est, velut CL ad LS, vis centralis per LF designata resolvi debet in duas partes; alteram F*m*, sive *n*L, ad tangentem normalem quæ exponit veram vis centralis actionem in loco L, qua corpus in orbita retinetur; alteram F*n*, seu *m*L, cujus directio *m*L est eadem, cum directione, quam corpus per vim insitam sequitur, adeoque ejus celeritatem auget. Sed in puncto λ pars φλ, vel μλ, vis centralis φλ directionem oppositam habet directioni corporis ex vi insita; quare ejus celeritas hac parte imminui debet. Tandem in puncto l, ubi radius vector ad tangentem perpendicularis, vis centralis *f l* non amplius resolvi potest.

88. Corollarium. *Celeritas corporis in circulo revoluti viribus centralibus ad centrum circuli tendentibus, manet semper æquabilis.* Nam radii vectores ad hanc curvam sunt semper perpendiculares (Elem. 459).

89. I. *Velocitas angularis vera* corporis tempore dato, est angulus, quem ad centrum virium radii vectores, arcum dato tempore descriptum intercipientes, comprehendunt.

90. II. *Motus medius*, vel *velocitas angularis media* vocatur, quam haberet corpus, cujus motus respectu centri virium esset semper æquabilis. Invenitur itaque pro tempore dato ex hac analogia: *ut tempus revolutionis integræ ad* 360°, 0′, 0″; *ita tempus datum ad motum medium ei competentem.*

91. Lemma I. *Ut angulus quispiam* P (fig. 52); *arcus, a quo mensuratur*, A; *& radius hujus arcus* R, *inter se comparari possint, sequentes habentur formulæ* $A = P.R$; $P = \frac{A}{R}$; & $R = \frac{A}{P}$.

Demonstratio. Sit alter angulus *p*, ejus arcus *a*, radius *r*, erit $A : a = P.R : p.r$. Nam si accipiatur arcus Q radio R descriptus, qui etiam metitur angulum *p*, est (Elem.

(Elem. 581) $Q : a = R : r$; jam quia arcus Q & A eodem radio descripti sunt, est quoque $A : Q = P : p$; ergo compositis his duabus utrinque rationibus, fiet $A . Q : a . Q = R . P : r . p$, sive $A : a = P . R : p . r$, & hinc $A = P . R$.

Lemma II. *Si duæ quantitates habeant exiguam differentiam, media inter eas Geometrice proportionalis est eadem cum media Arithmetice proportionali;* & ideo *quadratum mediæ Arithmetice proportionalis æquabitur facto extremarum.*

Demonstratio. Inter quantitates, x, & $x + \frac{1}{\infty}$, media arithmetice proportionalis est $x + \frac{1}{2\infty}$ (Elem. 274); & media geometrice proportionalis est $\sqrt{\left(xx + \frac{1}{\infty}\right)}$ sive (quia $\frac{1}{4\infty\infty}$ est infinitesima 2di ordinis) $\sqrt{(xx + \frac{x}{\infty} + \frac{1}{4\infty\infty})} = x + \frac{1}{2\infty}$.

92. THEOREMA VI. *Celeritas angularis vera* u *corporis arcum exiguum* PQ *tempore eodem admodum parvo describentis* (fig. 24) *est reciproce ut quadratum distantiæ* SI *puncti* I, *in quo erat corpus in medio temporis, a centro virium* S; *sive* $u = \frac{1}{SI^2}$.

Demonstratio. Velocitas angularis *u* exponitur per angulum PSQ, cujus mensura est arcus PM circularis centro S descriptus. Quare (per 91) est $u = \frac{PM}{SP}$. Sed si tempora sint eadem, & admodum parva, sector PSQ in quovis trajectoriæ loco pro triangulo rectilineo ejusdem ubique areæ haberi debet (85); cujus propterea altitudo PM est in ratione reciproca basis SQ (Elem. 596); hoc est $PM = \frac{1}{SQ}$; unde facta substitutione est $u = \frac{1}{SP.SQ}$; atqui sumpto tempore admodum parvo, radiorum SP & SQ differentia est valde exigua; Hinc (per Lemma II) $SP . SQ = SI^2$; & $u = \frac{1}{SI^2}$.

93. Corollarium. *Igitur si observentur anguli ad centrum virium a planeta in sua trajectoria temporibus exiguis descripti*, qui v. g. sint tantum 500ma vel 600ma pars totius revolutionis periodicæ; *ratio distantiarum ab eodem centro inveniri poterit, consequenter figura traiectoriæ determinari.*

Manifestum est, rationes distantiarum & figuram orbitæ ea solum accuratione determinari, qua celeritas angularis vera tempore admodum exiguo determinatur. Sed enim fere impobibile est, ut hæc exacte determinetur ex immediata motus Planetæ per tam breve tempus observatione, cum quævis observatio, non obstante quacunque sollicitudine & deligentia, exiguis quibusdam erroribus obnoxia sit, quocumque etiam instrumento fiat. Iam vero error exiguus in angulo exiguo dimetiendo commissus, in distantia magna, quæ inde deducitur, admodum sensibilem producit errorem. Quare in negotio adeo lubrico effectus errorum in observationibus inevitabilium quantum possibile est, diminui debent.

Optima autem methodus, quæ adhiberi poſſit ad determinandum motum angularem verum alicujus planetæ, eſt, ſi per temporis intervalla fere æqualia, uti ſingulis, vel alternis diebus, obſerventur tria, vel quatuor loca planetæ, ita ut differentiæ ſingulorum ſe ſe conſequentium octo vel novem gradus non excedant. Poſtea *interpolantur* hæ obſervationes, vel eorum differentiæ ſucceſſivæ; hoc eſt, differentiæ per obſervationes erutæ in minores & plures dividuntur, minoribus temporis intervallis reſpondentes, ita tamen, ut ſequantur eandem legem, quæ in integris (antequam ita dividerentur) obſervatur. Hac ratione errores obſervationum in majorem multo numerum diſtributi ſingulas partes minus afficiunt, & fere inſenſibiles fiunt. Explicabimus itaque hanc methodum, cujus frequens admodum in Matheſi practica eſt uſus.

Methodus interpolandi

95. Methodus, & formulæ, quæ ſequuntur, eædem fere ſunt cum illis, quas dedit D. Mayer. (vid. Monument. Academ. Petropolit. Tom. 2. pag. 180.)

Sint duæ ſeries quantitatum quarumcunque $\begin{matrix} m & n & p & q & r & s \\ a & b & c & d & e & f \end{matrix}$

Ita, ut cuivis termino ſeriei ſuperioris reſpondeat terminus in ſerie inferiore, certa lege e ſuperiore deductus. Terminos ſuperioris ſeriei appellabimus *radices*, inferioris vero terminos vocabimus *functiones* ſuperiorum correſpondentium. Duplex de his inſtitui poteſt quæſtio, *primo*; ſi detur radix quævis alia x: quæ ſit ejus functio? *Secundo* ſi detur aliqua alia functio y: quæ radix ei correſpondeat? Problema utrumque per methodum interpolandi ſolvitur.

Quod ſi daretur lex, qua functiones ex radicibus ſuis determinantur, omnis difficultas ſublata eſſet; illud igitur hic agendum, ut ipſa lex reperiatur, quam ſeries datæ ſequuntur. Newtonus rem Theoremate generali abſolvit: nos viam paucis exponemus.

Ponatur, *primo*, quamvis ſeriem tantum duobus terminis conſtare, $\begin{matrix} m & n \\ a & b \end{matrix}$ legemque, qua ex radice functio determinatur, hac formula $g + hx$ contineri, in qua x exponit radicem quamvis; g, & h, quantitates conſtantes, quarum valor a valore quantitatum a & b dependet, quique ſequente methodo inſtituto calculo determinatur. Fiat primo $x = m$; habebitur æquatio $g + hm = a$. Dein ponatur $x = n$; & altera æquatio dabitur $g + hn = b$. Eruatur per ſubſtitutionem ex his duabus æquationibus valor de g, & h, habebitur $g = \frac{an - bm}{n - m}$; & $h = \frac{b - a}{n - m}$. Unde lex $g + hx$ erit $\frac{an - bm}{n - m} + \frac{(b - a)}{(n - m)}x$.

Ponatur *ſecundo*, quamvis ſeriem conſtare terminis tribus, $\begin{matrix} m & n & p \\ a & b & c \end{matrix}$ & legem formula generali exprimi $g + hx + kxx$.

Eodem modo quæretur valor de g, h, k ope trium æquationum, nempe $g + hm + kmm = a$; $g + hn + knn = b$; $g + hp + kpp = c$.

Factis debitis ſubſtitutionibus reperietur

$$g = \frac{an - bm}{n - m} + \left(\frac{a(p - n) - b(p - m) + c(n - m)}{(n - m)(p - m)(p - n)} \right) mn.$$

$$h = \frac{b - a}{n - m} + \left(\frac{a(p - n) - b(p - m) + c(n - m)}{(n - m)(p - m)(p - n)} \right) (-n - m).$$

$$k = \frac{a(p - n) - b(p - m) + c(n - m)}{(n - m)(p - m)(p - n)}.$$

Ex

Ex quibus facile lex generalis $g + hx + kxx$ deducitur.

Ponatur *tertio*, quamvis seriem habere quatuor terminos, & legem generalem esse $g + hx + kxx + lx^3$: fient quatuor æquationes, posita x successive æquali radicibus m, n, p, q, ex quibus, ut supra factum est, valores constantium g, h, k, l, deducentur. Et sic deinceps.

Supponi potest cum Newtono, per quamvis radicem exhiberi abscissam alicujus curvæ, & per ejus functionem designari correspondentem semiordinatam: atque hac ratione resolvetur problema: *Curvam parabolici generis per data quotcumque puncta transeuntem describere.*

Ut usum interpolationum faciliorem redderemus, valorem constantium g, h, k, l, pro diversis casibus, qui emergere possunt, calculavimus, formulasque ad inveniendas radices maximis vel minimis functionibus respondentes, & vicissim, dedimus, juxta methodum de maximis & minimis. En illas:

I. *Formula pro datis tribus radicibus, & tribus functionibus.*

96. Formula generalis est $kx^2 + hx + g$; formula pro maximo vel minimo $x = -\frac{h}{2k}$.

CASUS I.

Si dentur $m\ n\ p$ / $a\ b\ c$

$$k = \frac{a(p-n) - b(p-m) + c(n-m)}{(p-n)(p-m)(n-m)}$$

$$h = \frac{b-a}{n-m} - k(n+m)$$

$$g = \frac{an - bm}{n-m} + kmn$$

CASUS II.

$o\ n\ p$ / $o\ b\ c$

$$k = \frac{cn - bp}{pn(p-n)}$$

$$h = \frac{bpp - cnn}{pn(p-n)}$$

$$g = o$$

CASUS III.

$o\ 1\ 2$ / $o\ b\ c$

$$k = \tfrac{1}{2}c - b$$

$$h = 2b - \tfrac{1}{2}c$$

$$g = o$$

II. *Formula pro quatuor radicibus, & quatuor functionibus.*

97. Formula generalis est $lx^3 + kx^2 + hx + g$; formula pro maximo vel minimo $x = \pm\sqrt{\left(\frac{kk}{9ll} - \frac{h}{3l}\right)} - \frac{k}{3l}$.

CASUS I.

Si dentur $m\ n\ p\ q$ / $a\ b\ c\ d$

$$l = \frac{\left\{\begin{array}{l} a(q-p)(p-n)(q-n) - b(q-p)(q-m)(p-m) \\ +c(n-m)(q-m)(q-n) - d(p-m)(p-n)(n-m) \end{array}\right.}{(p-m)(n-m)(q-p)(p-n)(q-m)(n-q)}$$

$$k = \frac{a(p-n) - b(p-m) + c(n-m)}{(p-n)(p-m)(n-m)} - l(m+n+p)$$

$$h = \frac{b-a}{n-m} - l(mm+nn+mn) - k(n+m)$$

$$g = \frac{an-bm}{n-m} + lmn(n+m) + kmn$$

CASUS II.

$o\ n\ p\ q$ / $o\ b\ c\ d$

$$l = \frac{cnq(q-n) - bpq(q-p) - dnp(p-n)}{npq(p-n)(q-p)(n-q)}$$

$$k = \frac{cn-bp}{pn(p-n)} - l(n+p)$$

$$h = \frac{b}{n} - lnm - kn$$

$$g = o$$

CASUS III.

$o\ 1\ 2\ 3$ / $o\ b\ c\ d$

$$\left\{\begin{array}{l} l = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c + \frac{1}{6}d \\ k = 2c - \frac{5}{2}b - \frac{1}{2}d \\ h = 3b - \frac{3}{4}c + \frac{1}{3}d \\ g = o \end{array}\right.$$

98. III. *Formula pro duabus seriebus* - - $\left\{\begin{array}{l} o.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4. \\ o.\ b.\ c.\ d.\ e. \end{array}\right.$

Lex $g + hx + kx^2 + lx^3 + fx^4$.

$$\begin{array}{l} f = \frac{1}{24}e - \frac{1}{8}d + \frac{1}{4}c - \frac{1}{6}b \\ l = -\frac{1}{4}e + 1\frac{1}{6}d - 2c + 1\frac{1}{2}b \\ k = \frac{11}{24}e - 2\frac{1}{8}d + 4\frac{3}{4}c - 4\frac{1}{3}b \\ h = -\frac{1}{4}e + 1\frac{1}{3}d - 3c + 4b \\ g = o. \end{array}$$

99. IV. *Formula pro duabus seriebus* - - $\left\{\begin{array}{l} o.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5. \\ o.\ b.\ c.\ d.\ e.\ \varphi. \end{array}\right.$

Lex $g + hx + kx^2 + lx^3 + fx^4 + \lambda x^5$.

$$\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{120}\varphi - \frac{1}{24}e + \frac{1}{12}d - \frac{1}{12}c + \frac{1}{24}b \\ f = -\frac{1}{12}\varphi + \frac{1}{24}e - d + \frac{13}{12}c - \frac{7}{12}b \\ l = \frac{7}{24}\varphi - \frac{41}{24}e + \frac{42}{12}d - \frac{59}{12}c + \frac{137}{24}b \\ k = -\frac{5}{12}\varphi + \frac{61}{24}e - \frac{13}{2}d + \frac{467}{12}c - \frac{167}{12}b \\ h = \frac{1}{6}\varphi - \frac{5}{4}e + \frac{10}{3}d - 35c + 10b \\ g = o \end{array}$$

Ex

Exempla, & usus præcedentium formularum.

100. I. Si quæratur locus orbitæ, in quo Mercurius fuit tempore dato, v. g. die 27. Iunii hora 7; is invenietur per casum primum secundæ formulæ, interpolando observationes 25, 26, 27 & 28 Iunii, & ponendo $m = 25$, $n = 26$, $p = 27$, $q = 23$; item $a = 2^s . 5°. 39'. 51''$; $b = 2^s . 12°. 2'. 51''$, $c = 2^s . 18°. 26'. 18''$; $d = 2^s . 24°. 48'. 38''$. Posthæc quæritur per casum primum hujus formulæ $l x^3 + k x^2 + h x + g$ functio radici respondens $27 \frac{7}{24} = x$. Verum calculus sit admodum prolixus. Ut igitur brevior reddatur, primo omitti ubique potest 2^s, habita solum graduum, minutorum & secundorum ratione. *Secundo* quia radices 25, 26, 27, 28 sunt in progressione arithmetica, iis sequentes substitui possunt: 0, 1, 2, 3, illo probe notato, quod 0 respondeat diei 25 Iunii, 1, 2, & 3, sequentes tres, nempe 26^{tum}, 27^{mum}, & 28^{vum} ejus mensis exhibeant. *Tertio* compendiosior adhuc fiet, si ponatur functio prima $a = 0$, accepta pro b differentia $6°. 23'. 0''$ inter primam & secundam functionem; pro c differentia $12°. 46'. 27''$ inter primam & tertiam; pro d differentia $19°. 8'. 47''$ inter functionem primam & quartam: his omnibus ad secunda reductis, habetur $b = 22980''$, $c = 45987''$; $d = 68927''$; & res ad casum III formulæ II reducta est. Si substitutiones dictæ pro inveniendis valoribus constantium l, k, h, fiant, reperietur $l = 15\frac{2}{3}$; $k = 60\frac{1}{2}$, $h = 22935\frac{1}{6}$, $g = 0$: ita formula legis interpolandi abit in hanc $-15\frac{2}{3} x^3 + 60\frac{1}{2} x^2 + 22935\frac{1}{6} x$; in qua per hypothesin quæstionis propositæ est $x = 2d. 7h.$ vel $x = 2\frac{7}{24}$, aut $x = 2. 29167$; hoc valore in formula substituto, ea reducitur ad $52689''$, sive $14°. 38'. 9''$. Atque hæc est differentia inter primam & quæsitam functionem: quod si igitur addantur $2^s . 5°. 39'. 51''$, invenitur locus Mercurii pro tempore dato $2^s . 20°. 18'. 0''$.

II. Si quæratur velocitas angularis Mercurii pro eodem tempore, seu, quod idem est, si petatur arcus apparens, quem Mercurius intra tempus breve (cujus dimidium diei 27 Iunii horam septimam præcedit, dimidium sequitur) descripsit, v. g. ab hora 6 usque ad 8^{vam}; in eadem formula fiat primo $x = 2\frac{6}{24}$, aut $x = 2\frac{1}{4}$; & formula erit $51732''$; postea ponatur $x = 2\frac{8}{24}$, sive $x = 2\frac{1}{3}$; & formula reducetur ad $53645'' \frac{3}{4}$; inter has differentia est $1913'' \frac{3}{4} = 31'. 53''. 45'''$, quæ est celeritas angularis Mercurii tempore duarum horarum pro die 27 Iun. 7 *h.*

101. Simili ratione velocitas angularis pro tempore quovis dato reperietur, v. g. pro die 25 Iun. 15 h. Si scilicet primo fiat $x = \frac{14}{24}$, & secundo $x = \frac{16}{24}$: facta substitutione obtinetur uterque locus verus Mercurii in sua orbita pro die 25 Iun. 14 h. & 16 h quorum differentia est velocitas angularis vera competens Mercurio ad d. 25 Iun. 15 h.

102. III. Si quæratur tempus, quo Mercurius fuit in loco dato orbitæ (quod inversum problematis prioris) v. g. $2^s . 20°. 18'. 0''$; subtrahenda est prima functio $2^s . 5°. 39'. 51''$, residuo ad secunda reducto fiat æquatio cubica $-15\frac{2}{3} x^3 + 60\frac{1}{2} x^2 + 22935\frac{1}{6} x = 52689$, cujus radices sunt $x = 2\frac{7}{24}$; $x = 39\frac{1}{16}$; $x = -37\frac{1}{8}$: apparet autem solam primam esse quæsitam; reliquæ ad solutionem nihil conferunt: Quare Mercurius fuit in loco dato $2^s . 20°. 18'. 0''$ die 27 Iun. 7 h. $0'. 0''$.

103. Si extractio radicum nimis longa videatur; aut difficulter statui possit, quænam ex inventis radicibus solutioni serviat? hoc incommodum sequente ratiocinio evitari potest: cum Mercurius die 27. Iunii in ipso meridie fuerit $2^s . 18°. 26'. 18''$, distabat tunc a loco dato $1°. 51'. 42''$; tempus igitur, quo fuit in loco dato, incidit in eundem diem post meridiem, & radix x debet esse 2 plus fractione, quæ invenitur proxime ex hac analogia: ut motus Mercurii $6°. 22'. 20''$ a die 27 usque ad 28 Iun. ad diem unum, ita $1°. 51'. 42''$ ad 0. 292 proxime. Quare si ponatur $x = 2. 292$, & in primo æquationis membro hic valor substituatur, prodit 52696. 6, quod secundum membrum 52689 excedit $7''. 6$. Ex quo colligitur, radicem assumptam esse justo

ſto majorem. Unde ſiat $x = 2.291$; & facta ſubſtitutione ſit æquatio 52673. 7, juſto minor. Denique inferatur: ut differentia æquationum duarum ex aſſumptis radicibus reſultantium 22. 9, ad differentiam ipſarum radicum aſſumptarum 0. 001; ita exceſſus primæ æquationis 7″. 6, ad exceſſum radicis primæ aſſumptæ 0. 00033. Quare hoc exceſſu a prima radice ſubtracto ea reperitur $x = 2.29167$,

104. Obſerva I. Data radice functio reperitur per ſolam ſubſtitutionem; at ſi functio detur, correſpondens radix non niſi per æquationem invenitur.

105. II. Quando tam radices, quam functiones datæ certa lege & admodum uniformiter creſcunt, vel decreſcunt, ſatis erit ad interpolandum, ſi ex utraque ſerie tres termini accipiantur, ſeu dein radices creſcant functionibus decreſcentibus; ſeu his creſcentibus decreſcant illæ. Verum ſi radicum aut functionum differentiæ ſint valde inæquales; aut ſi etiam ſat æquales quidem ſint, attamen ab initio creſcant, & poſtea decreſcant, vel viciſſim; aut denique ſi differentiæ ſint partim poſitivæ, partim negativæ, tum ſaltem quatuor radices, totidemque functiones, vel etiam plures ex utraque ſerie termini adhibendi ſunt; id quod, ut vidimus, ſæpe per formulas præcedentes fieri poteſt. Totus enim hic calculus non niſi approximatio quædam eſt: ex quantitatibus æquis intervallis acceptis ratio earum, quæ interjacent inter illas, eruitur ex hypotheſi, quod inæqualitas earum certam legem ſequatur: qua ratione eo propius ad verum acceditur, quo intervalla minora ſunt, & inæqualitas terminorum datorum minus irregularis, aut lex reperta veræ vicinior, quam reipſa incrementa illa vel decrementa ſequuntur.

106. Interpolari etiam poſſunt differentiæ radicum datarum, tum ut inveniatur radix tempori dato correſpondens, tum ut reperiatur maxima vel minima omnium, quæ dari poſſint, ope formularum pro maximo vel minimo. Hac ratione plures obſervationes calculum ingrediuntur, quo interpolatio accuratior evadit. v. g. in ſequente tabula

Jun.	*Loca Mercurii*				*Differentiæ primæ.*			*Differentiæ ſecundæ*			
die 24.	I^{s}.	29°.	19′.	2″							
					. . . 6°.	20′.	49″				
25.	2.	5.	39.	51				. . . + 2′.	11″	= a =	0′. 0″
					. . . 6.	23.	0				
26.	2.	12.	2.	51				. . . + 0	27	= b =	1. 44
					. . . 6.	23.	27				
27.	2.	18.	26	18				. . . — 1.	7	= c =	3. 18
					. . . 6.	22.	20				
28.	2.	24.	48.	38				. . . — 2.	52	= d =	5. 3
					. . . 6.	19.	28				
29.	3.	1.	8.	6							

acceptæ ſunt ſex obſervationes a die 24 uſque ad 29 Iunii, cum 5 earum differentiis, quæ *differentiæ primæ* appellantur, & 4 harum differentiarum differentiis, quæ *differentiæ ſecundæ* dicuntur. Manifeſtum autem eſt *primo*, terminum, quo Mercurius velocitatem maximam habuit, inter hos ſex dies contineri. *Secundo* quatuor differentias ſecundas reſpondere diebus 25, 26, 27 & 28 Iunii. *Tertio* quoniam primæ duæ ex his ſecundis differentiis ſunt poſitivæ, reliquæ duæ negativæ, tempus, quo Mercurius velocitatem maximam habuit, debere illud fuiſſe, quo differentia ſecunda fuit æqualis zero, ſive 2′. 11″ decrevit. Unde ſi e regione dierum 25, 26, 27 & 28 Iun. ſcribantur 0, 1, 2, 3, & a, b, c, d pro differentiis ſecundis, ponaturque prima $= 0$, a reliquis autem tribus ejus differentiæ accipiantur; habebitur pro interpolatione per caſum III formulæ ſecundæ Generalis (97) $l = -3\frac{1}{2}$, $k = 15\frac{1}{2}$, $h = -116$, $g = 0$. Quare his in æquatione cubica ſubſtitutis, fiet $-3\frac{1}{2}x^3 + 15\frac{1}{2}x^2 - 116x = 131''$; cujus radix $x = 1.286$ dat tempus, quo Mercurius velocitatem maximam habuit, quod itaque reſpondet diei 26 Iun. 6 h. 52′.

107. THEOREMA VII. *Si ex centro virium* S (fig. 28) *deſcribatur circulus* T M N, *cujus area æqualis areæ a trajectoria quavis* A N P M *in ſe redeunte comprehenſæ*; primo *dum corpus trajectoriam deſcribens eſt in punctis*

punctis M & N, *ubi circulus trajectoriam secat, ejus velocitas angularis vera est æqualis mediæ: minor vero in omnibus punctis trajectoriæ extra circulum existentibus; major in illis, quæ cadunt intra circulum.* Secundo *dum corpus circa intersectionum puncta versatur, eo citius ejus velocitas angularis vera a media discrepabit, quo angulus intersectionis major fuerit.*

Demonstratio. Quoniam centrum circuli T M N coincidit cum centro virium, & ejus area æquatur areæ a trajectoria comprehensæ; patet (88), quod si corpus moveretur in hoc circulo, eumque describeret eodem empore, quo trajectoriam, consequenter etiam circuli radius verreret sectores æquales sectoribus, quos eodem tempore radius vector verrit in trajectoria; ejus velocitas angularis vera foret semper æqualis velocitati mediæ: jam vero, quando corpus versatur in punctis N vel M suæ trajectoriæ, idem est, ac si in circulo tum moveretur; quare ejus velocitas angularis vera mediæ æqualis esse debet. Verum dum corpus suæ trajectoriæ arcum N A M percurrit, radii vectores longiores sunt radiis circuli, adeoque cum areæ sectorum trajectoriæ semper æquales sint areis, quas in circulo radius verreret eodem tempore, radii vectores eas areas comprehendentes ad centrum S angulum minorem efficere debent. Unde toto tempore, quo corpus in parte orbitæ N A M versatur, ejus celeritas angularis vera minor est, quam media. Oppositum prorsus evenire debet, dum corpus arcum N P M percurrit. Sunt itaque *puncta* N & M *termini accelerationis & retardationis motus angularis veri respectu motus medii.* Et hinc velocitas angularis vera nullibi accurate æquatur mediæ, præterquam in dictis punctis N & M; nec etiam æqualitas inter has velocitates ad sensum habetur, nisi quatenus exigui arcus ad N & M trajectoriæ congruunt ad sensum cum arcubus exiguis circuli: Sed quo angulus curvilineus A N M major est, eo minus trajectoria cum circulo congruit: itaque quo major est angulus, quo trajectoria circulum intersecat, eo citius circa puncta N & M velocitas angularis vera a media discrepet, est necesse.

108. THEOREMA VIII. *In omni trajectoria regulari* (hoc est in tali, in qua radii vectores S B, S E; vel S G, S F; vel S D, S C, (fig. 26) qui cum linea apsidum P S A utrinque ad S angulos æquales efficiunt, inter se quoque æquales sunt) *est* primo: *tempus, quo corpus ab una apside* P *ad alteram* A *pervenit, semirevolutioni periodicæ accurate æquale.* Nam ob æqualem utrinque a linea apsidum distantiam, celeritas in D & C; in G & F; in E & B eadem esse debet, iisdemque momentis per arcum P G A decrescere, quibus per alterum A F P crescit. Secundo *tempus, quo a quovis alio puncto* E *ad oppositum* C *pervenit, est semirevolutione longius, si interea per apsidem superio-*

riorem transire debet; sed idem est semirevolutione brevius, si per apsidem inferiorem P *transit.* Etenim quando ex E in C per apsidem superiorem A transit, celeritas motus per totum arcum EGA decrescere debet, & non crescit, nisi per exiguum arcum CA; ex opposito vero, dum ex C per apsidem imam P ad E transit, celeritas per totum arcum CFP augetur, & solum per exiguum arcum PE decrescit.

109. Corollarium I. Hinc eruitur expedita methodus determinandi tempus transitus planetæ alicujus per lineam apsidum, & positionem ejusdem lineæ. Exempli causa, quoniam notum est (38), orbitam Mercurii esse admodum regularem, & ejus motum circa apsides satis æquabilem, ex inspectione observationum, quas supra (post 36) retulimus, illico apparet, Mercurium fuisse in perihelio circa diem 26 Junii, & in aphelio versus 9 Augusti, quoniam motus diurnus a 26 ad 27 fuit 2°. 44′. 20″, quæ velocitas est omnium minima; & a 9 Augusti usque ad 10 fuit 6°. 23′. 27″, quæ est velocitas omnium maxima. En igitur rationem, qua calculus ineundus.

26 Jun. in Meridie locus ☿ - - -	2ˢ.	12°.	2′.	51″.
9 Aug. in Meridie - - - - - - -	8.	13.	9.	12
Differentia	6.	1.	6.	21

Hæc differentia ostendit Mercurium a 26 Junii usque ad meridiem 9 Augusti ultra sex signa integra confeciſſe 1°. 6′. 21″. Quærendum jam est, qua hora diei 26ᵗᵃ Junii ☿ fuerit in loco opposito illi, in quo fuit 9 Augusti in ipso meridie, sive qua fuerit in 2ˢ. 13°. 9′. 12″. Itaque facienda est hæc proportio: ut 6°. 23′. 27″. ad 24 h. 0′. 0″; ita 1°. 6′. 21″ ad 4 h. 9′. 10″. quare reperitur Mercurius fuisse in opposito puncto meridiei nonæ Augusti die 26 Jun. 4 h. 9′. 10″. Hoc intervallum temporis est 43 d. 19 h. 50′. 50″, quod a dimidia revolutione deficit 3 h. 46′. 56″, existente semirevolutione 43 d. 23 h. 37′. 46″. Itaque hoc temporis intervallo Mercurius non transiit per suum aphelium, nec illud nona Augusti in meridie adhuc attigit. Ut igitur sciatur, qua hora ad illud pervenerit, fiat hæc analogia: ut 3°. 39′. 7″, scilicet excessus velocitatis diurnæ Mercurii in perihelio supra velocitatem ejusdem diurnam in aphelio, ad 6°. 23′. 27″. seu ad velocitatem diurnam in perihelio; ita 3 h. 46′. 56″, ad 6 h. 37′. 8″, sive ad tempus, quo die 9 Augusti per aphelium transiit. Cum vero Mercurius tunc motum diurnum habuerit 2°. 44′. 20″; sequitur, quod 6 h. 37′. 8″ fuerit in 8ˢ. 13°. 54′. 31″: & hinc aphelium Mercurii est in 8ˢ. 13°. 54′. 31″. 110. 11.

110. II. Accuratius inveniretur tempus & locus perihelii per interpolationem obſervationum dierum 25, 26, 27 & 28 Junii, & dierum 8, 9, 10 & 11 Auguſti. Reperiretur quippe die 26 Jun. 4 h. locus Mercurii 2ˢ. 13°. 6′. 46″; & 8 h. idem inveniretur 2ˢ. 14°. 10′. 41″. 5, adeoque velocitas angularis vera intra 4 horas haberetur 1°. 3′. 55″. 5, quæ eſt velocitas maxima Mercurii in perihelio. Eodem modo locus Mercurii die 9 Aug. 4 h. prodiret 8ˢ. 13°. 36′, 35″; & 8 h. eſſet 8ˢ. 14°. 3′. 58″, & hinc velocitas angularis vera intra 4 horas 27′. 23″. 1, quæ eſt minima Mercurii in aphelio. Unde concluderetur, tranſitum Mercurii per Perihelium contigiſſe die 26 Jun. 6 h. 59′. 27″; & perihelium ejus eſſe in 2ˢ. 13°. 54′. 30″.

111. Quoniam veritas præcedentium theorematum a nullo ſyſtemate Aſtronomico dependet, reſtat, ut examinemus, quæ nam curvæ a planetis deſcriberentur, ſi moverentur viribus altera quidem conſtante & æquabili; altera vero acceleratrice & verſus ſolem tanquam centrum tendente.

ARTICULUS X.

De curvis, ad quas Planetarum trajectoriæ revocandæ.

112. Curva, quæ ſe prima offert, eſt circulus; & quia obſervatum eſt, (34) planetas ſingulis momentis mutare diſtantiam a ſole, nequaquam ſupponi poteſt, ſolem in centro exiſtere.

113. Trajectoria itaque Mercurii nequit eſſe circulus, niſi ſaltem ſupponatur ſolem exiſtere in aliquo puncto S extra centrum C ſito (fig. 27), ex quo rectæ ad circumferentiam ductæ exhibeant diverſas Mercurii a ſole diſtantias. Ut autem cognoſcatur, num hæc hypotheſis cum phænomenis congruat, ducenda eſt *primo* per S & C linea apſidum PA, in qua PS exponit minimam; AS vero maximam Mercurii a ſole diſtantiam; perihelio ejusdem in P; aphelio in A exiſtente. *Secundo* puncto S tanquam centro, radio = CA, deſcribendus eſt circulus MTNIM, cujus area conſequenter æquatur areæ a trajectoria aſſumpta comprehenſæ, quique trajectoriam in M & N ſecet. *Tertio* ſumma, qua fieri poteſt, accuratione determinanda eſt ratio rectarum SP, SA, SN vel SM, id, quod independenter ab hypotheſi trajectoriæ circularis ex ſolis obſervationibus hunc in modum fieri poteſt. Etenim manifeſtum eſt, maximam velocitatem angularem Mercurii eſſe in P; minimam in A, & mediam (107) in N: eſt vero velocitas angularis maxima tempore 4 horarum inventa 1°. 3′. 55″. 5; & minima

eodem tempore 27′. 23″. 1; & ut media habeatur, fiat (90): ut 87 d. 23 h. 15′. 32″, ſive tempus revolutionis integræ Mercurii, ad 360°. 0′. 0″. 0‴; ita 4 h. 0′ 0″ ad 40′. 55″. 4 ſeu velocitatem angularem mediam tempore 4 horarum.

114. Hinc facile reperietur ratio rectarum SN, SP, SA. Supponatur enim SN 1000 partium, erit (per 92) ut velocitas maxima 1°. 3′. 55″. 5 ad velocitatem mediam 40′. 55″. 4; ita SN^2 ad SP^2; invenitur SP partium 800. 111, qualium SN eſt 1000. Similiter eſt velocitas minima 27′. 23″. 1 ad velocitatem mediam 40′. 55″. 4, ut SN^2 ad SA^2. Hinc SA eſt 1222. 441 partium ejusmodi.

115. Quod ſi jam trajectoria PNAM ſit circulus æqualis alteri TNIM, ſumma rectarum SP, SA æquari debet duplo radio SN, quod evidenter cum obſervationibus pugnat, deberet enim eſſe 2022. 552 = 2000. Quare trajectoria MPNA circulus eſſe nequit.

116. Et alias etiam nota circuli proprietas eſt (Elem. 563) quod ſegmenta rectarum quarumvis extra centrum ſe interſecantium ſint in ratione reciproca. Sic eſt SA : SB = SD : SP. Et (Elem. 308) $SA^2 : SB^2 = SD^2 : SP^2$. Interpolando jam obſervationes 16ta, 17, & 18 Julii, reperitur velocitas vera angularis Mercurii pro quatuor horis (quæ nempe ei competit duabus horis ante, & duabus poſt tranſitum per 6ſ. 2°. 13′. 51″, qui locus verſus D ſitus eſt) æqualis 38′, 11″. 5; & interpolando obſervationes 9, 10, & 11 Septembris invenitur velocitas vera angularis pro duabus horis ante, & duabus poſt tranſitum per 0ſ. 2°. 13′. 51″ (qui locus priori ad D oppoſitus verſus B jacet) æqualis 49′. 41″. Quare debet eſſe (per 92) 38′. 11″. 5 : 49′. 41″ = $SB^2 : SD^2$. Sed eſt quoque 1°. 3′. 55″. 5 : 27′. 23. 1″ = $SA^2 : SP^2$; unde ſi trajectoria eſt circulus, habetur hæc proportio: 1°. 3′. 55.″5 : 38′. 11″. 5 = 49′. 41″ : 27′. 23″. 1. Quod evidenter falſum; factis extremorum & mediorum inæqualibus prodeuntibus. Et ut æqualia forent, terminus ultimus eſſe deberet 29′. 41. Multum igitur abeſt, ut Trajectoria Mercurii ſit circulus.

117. Diſcrimen ejus a circulo utcunque advertitur, ſi attendatur, quod cum diſtantia media SN ſit minor, quam ſemiſumma rectarum SP, SA, curva, quam Mercurius deſcribit, ad puncta M & N magis compreſſa eſſe debeat, quam verſus A & P; atque hæc curvaturæ diverſitas magis ellipſi, quam circulo, convenit, cujus eadem ſemper eſt curvatura. Hujusmodi argumento utebatur Keplerus, ut evinceret, ellipſin circulo, quo omnes ante eum Aſtronomi utebantur, ſubſtituendam eſſe.

118. Altera curva, quæ circulum excipit, ellipſis eſt. Et quia ſinguli planetæ durante una revolutione tantum ſemel veniunt ad aphelium, & ſemel ad perihelium, evidens eſt, ſolem non

non poſſe in centro ellipſis collocari: id enim ſi eſſet, dictum phænomenon bis ſingulis revolutionibus eveniret: nam eſſent planetæ bis in aphelio, dum per extrema axis majoris tranſirent; & bis in perihelio, dum extrema axis minoris attingerent. Quare ſol alibi collocandus eſt; & locus, qui velut connaturaliter ſe offert, videtur alteruter focus eſſe.

Poſito itaque ſole in foco S ellipſis P M A N (fig. 28), ex obſervationibus dimenſiones hujus ellipſis deducere oportet, ac videre, an omnes inter ſe congruant.

119. Liquet autem *primo*, axem majorem A P ellipſeos debere eſſe æqualem ſummæ diſtantiarum Aphelii S A, & perihelii S P: quod ſi igitur centro S deſcribatur circulus T N M, cujus area areæ ellipſis æqualis ſit, axis major A P juxta calculum paullo ante (115) initum debet eſſe partium 2022. 552, qualium radius S N 1000 continet. *Secundo* cum area circuli areæ ellipticæ æqualis ponatur, ejus diameter debet eſſe media proportionalis inter axes ellipſeos (Elem. 898). Et hinc reperitur axis minor ellipſeos B b partium 1977. 699; & parameter K k (quæ (Elem. 817) eſt tertia proportionalis ad A P & B b) partium 1933. 84.

120. His poſitis, ſi orbita Mercurii ſit elliptica, ſequitur, quod dum tribus ſignis, ſive 90 gradibus utrinque a linea apſidum diſtat, ejus diſtantiæ a ſole S K & S k inter ſe æquales ſint, & ſimul ſumptæ æquentur (Elem. 801) parametro axis majoris. Cum itaque linea apſidum tranſeat per 2^s. 13°. 54′. 31″, & per 8^s. 13°. 54′. 31″. (109), velocitas angularis vera Mercurii in 5^s. 13°. 54′. 31″, & 11^s. 13°. 54′. 31″ æqualis eſſe debet. Quod ſi jam obſervationes 12, 13, & 14 Julii; nec non 5, 6 & 7 Septembris interpolentur, reperitur Mercurius fuiſſe in 5^s. 13°. 54′. 31″ die 11 Julii 11 h. 30′½ cum celeritate 43′. 44″. 7 intra 4 horas; & in 11^s. 13°. 54′. 31″ die 6 Septemb. 1 h. 42′ cum celeritate 43′. 44″. 5 intra quatuor horas. Unde ſi fiat (92) ut 43′. 44″. 6 ad velocitatem angularem mediam 40′. 55″. 4; ita SN^2 ad Sk^2 vel SK^2, invenitur S K = 966. 972, cujus duplum, ſeu K k, eſt 1933. 94, quæ a 1933. 84 non niſi quantitate vix ſenſibili differt.

121. Si etiam per alterum focum I ducantur ſemiordinatæ I R, vel I r, quarum quævis æquatur ſemiparametro (Elem. 801) ſive 966. 92 partibus, in triangulo rectangulo S I r vel S I R datur I R, ſeu I r, & I S (id eſt differentia inter S A & S P) = 422. 330. Hinc reperitur angulus R S I, ves r S I 66°. 24′. 18″, ſive 2^s. 6°. 24′. 18″. Et quia linea S A tranſit per 8^s. 13°. 54′. 31″; linea S r transibit per 6^s. 7°. 30′. 13″; & S R per 10^s. 20°. 18′. 49″. Quodſi trajectoria ſit ellipſis, velocitas angularis in 6^s. 7°. 30′. 13″, & 10^s. 20°. 18′. 49″

eadem esse debet ; & SR+RI, vel Sr+rI æquatur axi majori AP (Elem. 795). Interpolando vero observationes dierum 16, 17 & 18 Julii, item 30 & 31 Augusti, ac 1 Septembris, in iis locis velocitas angularis reperitur utrobique 36′. 44″. 5; & inde distantia SR vel Sr eruitur 1055. 373 partium, cui si addatur RI = 966. 92, fiunt 2022. 293; quod ab axe majore 2022. 552 sensibiliter non differt.

122. Ex his igitur apparet, per observationes licere, omnia puncta A, P, M, N, K, k, R, r in ellipsi collocare, in cujus foco S sol existat.

123. Alter modus experiundi, an præsens hypothesis observationibus conformis sit, est, si accipiantur tria planetæ loca in orbita, & ratio distantiarum iisdem correspondentium a sole per velocitates angulares, quas ibi planeta habet, determinetur; postea sectio conica, in cujus foco sol existat, per illa tria loca transiens describatur (Elem. 882). Quod si hæc sectio ellipsis fuerit, ejusque dimensiones cum dimensionibus jam prius determinatis conveniant, dubium esse haud poterit, Mercurium reipsa ellipsin describisse. Verum quia solutio usitata hujus problematis generalis in praxi parum tuta est, quando ellipseos axes parum inter se differunt; nos hac methodo deinceps non alio fine utemur, nisi ad determinandas dimensiones orbitarum planetariarum, ubi jam constiterit, eas ellipticas esse.

124. Postquam observator noster similes observationes aliorum planetarum fecerit, iisdemque eas pertractaverit calculis, concludet tandem: *omnes Planetas primarios moveri in ellipsibus, quarum focum communem sol occupat; velocitatum vero inæqualitates ejusmodi esse, ut areæ inter radios vectores, & arcus cujusvis ellipsis comprehensæ, sint proportionales temporibus, quibus ii arcus describuntur.* Vide tabulam Artic. XIII, qua dimensiones ellipsium omnium planetarum exhibentur.

125. Observa I. Distantia foci S, in quo est sol, a centro C ellipsis, quam planeta describit, CS, vocatur *eccentricitas* orbitæ: atque æquatur semidifferentiæ distantiarum Aphelii SA, & perihelii SP.

126. In praxi Astronomica semiaxis major orbitæ ellipticæ alicujus planetæ poni solet = 1; aliæ dimensiones in fractionibus decimalibus exprimuntur. Hunc morem si sequamur, erit in orbita Mercurii CA seu CP = 1, SN sive SM = 0. 98885; SA = 1. 20881; SP = 0. 79119; & hinc eccentricitas CS = 0. 20881; CB = 0. 977824.

ARTI-

ARTICULUS XI.

De ratione distribuendi inæqualitates planetarum in diversis orbitæ locis.

127. Determinatis ex observationibus ellipsium, quas singuli planetæ describunt, dimensionibus, nec non eorum apheliis, atque epocha, qua per aphelium quisque transiit, constituta, nihil amplius deest observatori, quo minus locum planetæ cujuslibet in sua orbita pro tempore dato calculare possit, quam ut reperiat methodum assignandi angulum ad solem inter aphelium, & radium vectorem ad locum planetæ ductum, in quo tempore dato existit, comprehensum. Angulus iste dicitur *Anomalia vera.*

128. Ponamus igitur, calculandum esse locum verum Mercurii ad meridiem diei 26 Augusti An. 1740.

Differentia temporis dati & epochæ transitus Mercurii per suum aphelium (quæ est 9 Aug. 1740. 6 h. 37′. 0″) (vid. tabulam Articul. XIII) est 16 d. 17. h. 23′. 0″. Sit AMPHA (fig. 30) orbita Mercurii, cujus axis major AP, minor GH, aphelium in A, perihelium in P, Sol in foco S. Supponamus locum verum Mercurii in sua orbita esse in M: inveniendus est angulus, seu anomalia vera ASM.

129. In circulo ADPE super axe majore AP tanquam diametro descripto, quem *eccentricum* vocabimus, accipiatur arcus AD, qui invenitur ex hac analogia, ut tempus revolutionis integræ planetæ est ad 360°. 0′. 0″; ita tempus ab ultimo transitu ejusdem per suum aphelium usque ad datum elapsum (quod in casu nostro est 16 d. 17 h. 23′) ad arcum AD, 68°. 26′. 28″. Hic arcus *Anomalia media* Mercurii dicitur.

130. Ducatur radius DC. Evidens est, quoniam areæ, quarum unum latus æquale, vel idem est, sunt in ratione reliquorum laterum (Elem. 595) esse sectorem ACD ad circulum integrum, ut est arcus AD ad integram peripheriam, sive ut 16 d. 17 h. 23′. 0″ ad 87 d. 23 h. 15′. 32″. Sed cum per hypothesin M sit locus verus Mercurii, area ASM est ad ellipsin integram in eadem ratione temporum expositorum: quare erit etiam area ASM ad aream ACD, ut est area tota elliptica ad aream totam circularem; id est (Elem, 895) ut GH ad PA.

131. Per punctum M ducatur semiordinata MI, quæ producta secet eccentricum in N. Erunt etiam areæ ASM, ASN inter se ut GH ad AP (Elem. 896). Unde habetur ASM: ACD = ASM: ASN; adeoque (Elem. 306) area ACD = ASN.

132. Componitur vero ACD ex sectoribus ACN, & NCD; & ASN ex sectore ACN & triangulo NCS: quare ablato sectore communi ACN, manet NCD = NCS. Sed NCD = $\frac{1}{2}$ NC·ND; & NCS = $\frac{1}{2}$ NC. ST; igitur erit arcus ND rectæ ST, ad NC productam perpendiculari, æqualis.

133. At quoniam nec circuli, nec ellipseos quadratura habetur Geometrica, recta ST arcui ND exacte æqualis inveniri non potest: interea per approximationem ad libitum continuandam sequente methodo res utcunque conficitur.

134. Inveniendum est primo, cui arcui eccentrici eccentricitas CS æqualis esset, si quidem in circulum curvaretur. Et quia radius circuli æquatur 57°. 17′. 44″$\frac{4}{5}$; (id quod patet ex hac analogia: ut 355 ad 180°. 0′ 0″; ita 113. ad 57°. 17′ 44″$\frac{4}{5}$) facienda est sequens proportio: uCA (= 1): CS (= 0.20881) = 57°. 17′. 44″$\frac{4}{5}$: 11°. 57′. 50″. 2. Quartus terminus erit valor CS ad gradus circuli reductæ. Ulterius inveniendus est valor arcus AN talis, ut sit æqualis cum AD — ST. Hunc in finem assumatur valor aliquis, qui commodus judicabitur, v. g. ponatur AN = 60°; erit in triangulo rectangulo CST angulus C 60 graduum, & latus CS 11°. 57′. 50″. 2; reperietur ST (Elem. 747) 10°. 21′. 40″. Inde porro prodit AD — ST = 58°. 4′. 48″; indicio scilicet, arcum AN esse justo majorem assumptum. Ponatur itaque AN = 58°. 4′. 48″; & resumpto calculo trianguli CST reperietur ST = 10°. 9′. 17″; hinc AD — ST = 58°. 17′. 11″, justo minor; ex quo colligitur, AN aliquantulum augendum esse. Hinc si tertio sumatur AN = 58°. 17′. 11″, & resolvatur iterum triangulum CST, obtinetur ST = 10°. 10′. 39″, & AD — ST = 58°. 15′. 49″. Quare in hac tertia suppositione excessu peccatum est. Unde si quarto ponatur AN = 58°. 15′. 49″, repetitus calculus dat ST = 10°. 10′. 30″, & AD — ST = 58°. 15′. 58″, ubi apparet, valorem AN justo minorem assumptum fuisse. Denique arcu AN = 58°. 15′. 58″ assumpto, fit ST = 10°. 10′. 31″, & AD — ST = 58°. 15′. 57″; iterum justo major. Apparet autem, valores assumptitios alternatim excessu, & defectu peccare quidem, sed ita, ut tamen propius semper ad verum valorem arcus AN accedant. Et certe si ponatur AN = 58°. 15′. 57″, invenitur ST = 10°. 10′. 31″; & AD — ST = 58°. 15′. 57″. Qui valor etiam in secundis cum vero congruit; adeoque in ultima suppositione non nisi unico secundo erratum fuit. Arcus hic quæsitus; sive angulus ACN, cujus mensura est, dicitur *Anomalia vera Eccentrici.*

135. Centro M, radio MF describatur semicirculus, cui occurrat SM producta in O; erit (Elem. 564) SO (sive SM + MF

MF = 2CA): SR (seu SF + FR = 2CS + 2FI = 2CI = 2 *cos* ACN) = SF: SQ (sive 2CS: SM − MF). Unde est etiam 1: *cos* ACN = CS: ½SM − ½MF = CS × *cos* ACN. Et hinc (Elem. 232) SM = 1 + CS × *cos* ACN. Hoc posito est (Trig. 41) $\frac{1-cos\,ASM}{1+cos\,ASM} = tang^2 \frac{1}{2}$ ASM. Jam vero in triangulo rectangulo SMI habetur (Elem. 747) SM (seu 1 + CS × *cos* ACN): R = SI (seu CS + CI = CS + *cos* ACN): *cos* ASM = $\frac{CS + cos\,ACN}{1 + CS \times cos\,ACN}$.

Quare $\frac{1-cos\,ASM}{1+cos\,ASM} = \frac{1 + CS \times cos\,ACN - CS - cos\,ACN}{1 + CS \times cos\,ACN + CS + cos\,ACN} =$
$\frac{1 - CS - cos\,ACN \times (-CS + 1)}{1 + CS + cos\,ACN \times (CS + 1)} = \frac{SP - cos\,ACN \times SP}{SA + cos\,ACN \times SA} = \frac{SP}{SA} \times$
$\frac{1-cos\,ACN}{1+cos\,ACN} = \frac{SP}{SA} \times tang^2 \frac{1}{2}$ ACN. Ex duobus his valoribus de $\frac{1-cos\,ASM}{1+cos\,ASM}$ inter se comparatis eruitur $tang^2 \frac{1}{2}$ ASM = $\frac{SP}{SA} \times tang^2 \frac{1}{2}$ ACN. Unde est SA: SP = $tang^2 \frac{1}{2}$ ACN: $tang^2 \frac{1}{2}$ ASM, hinc $\sqrt{SA}$: $\sqrt{SP}$ = *tang* ½ ACN: *tang* ½ ASM. Ex hac analogia invenitur ASM = 48°. 32′. 30″; & hic angulus additus ad positionem lineæ apsidum SA, 8ˢ. 13°. 54′. 30″, exhibet locum lineæ SM, sive Mercurii, 10ˢ. 20°. 27′. 0″, qui non nisi 22″ differt ab eo, qui in tabula post articul. 5 notatur.

136. Observa I. Differentia inter anomaliam mediam & veram vocatur *æquatio centri planetæ*. In exemplo proposito est æquatio centri 19°. 53′. 58″; sive angulus CKS. Quod si jam supponantur rectæ CD, SM circa puncta C & S ita rotari, ut simul ab aphelio usque ad perihelium perveniant; inde rursus eodem tempore redeant ad aphelium, evidens est, angulum anomaliæ mediæ ACK per totum semicirculum ADP fore externum respectu anguli ASK anomaliæ veræ; sed in altero semicirculo PEA, angulus PCK anomaliæ mediæ erit semper internus respectu anguli PSK anomaliæ veræ. Unde si anomalia semper versus eandem partem sumatur, anomalia media excedit veram ab aphelio usque ad perihelium; sed vera excedit mediam a perihelio usque ad aphelium. Ex quo conficitur, *æquationem centri*, qua cum anomalia media utimur ad inveniendam anomaliam veram, *esse subtractivam ab aphelio usque ad perihelium, sive in primis sex signis anomaliæ mediæ; & eandem esse additivam a perihelio usque ad aphelium, sive in posterioribus sex signis anomaliæ mediæ.*

137. II. Quando eccentricitas planetæ est valde parva, arcus DN sensibiliter a recta non differt, & sector NCD pro triangulo

lo rectilineo haberi potest ; quod cum æquale sit triangulo NCS, eandemque habeat basin, etiam altitudinem eandem habere debet. Itaque DN & ST in tali casu sunt perpendicula æqualia, & DS parallela ad TN. Unde ducta DS in triangulo DCS nota sunt CD, CS, angulusque comprehensus DCS, qui est complementum ad duos rectos anomaliæ mediæ ACD, quare in hac hypothesi ex unica analogia inveniri potest angulus DSC æqualis angulo NCA, cujus mensura est arcus AN. Imo ut prolixitas calculi in planetis, quorum orbitæ sunt magis eccentricæ, evitetur, ab hac ipsa analogia initium faciendum est potius, quam ut valor arcus AN fortuito assumatur.

In exemplo: in calculo superiore repertus fuisset angulus DSC seu arcus AN, primo 58°. 13′. 0″, & hinc ST = 10° 10′ 11″.5; deinde 10°. 10′. 33″; tandem 10°. 10′. 31″.

Verum ne attentio in tot simul partes distrahatur, quando similes calculi ineundi, observator noster, quidquid superioribus ratiociniis expositum est, sequentibus regulis comprehendet.

Regulæ calculi, sive analogiæ, ope quarum anomalia media reducitur ad veram in orbita elliptica.

128. I. *Ut distantia Aphelii ad distantiam perihelii, ita tangens dimidiæ anomaliæ mediæ ad tangentem arcus addendi ad dimidiam anomaliam mediam.*

Summam hinc ortam vocabo *anomaliam approximatam eccentrici.* Analogia modo exposita instituitur sequente ratione: logarithmus distantiæ aphelii subtrahitur a logarithmo distantiæ perihelii, differentia est logarithmus constans, qui semper addendus est logarithmo tangentis dimidiæ anomaliæ mediæ, ut reperiatur logarithmus tangentis arcus quæsiti.

Si anomaliæ approximatæ sic inventæ & anomaliæ mediæ differentia non sit major 1½ gradu, eadem anomalia approximata ab anomalia vera eccentrici non differet 1 secundo, ideoque NT & SD quam proxime erunt parallelæ, quippe angulo ACN anomaliæ veræ eccentrici nequidem 1 secundo integro ab angulo ASD differente. Unde in hoc casu opus non est ulteriore calculo ; sed solummodo analogia § VI. facienda.

II. *Ut semiaxis major ad eccentricitatem ; ita* 57°. 17′. 44″.8 (sive 20626″.8, cujus logarithmus est 5.3144251) *est ad numerum secundorum, quem* A *voco.*

III. *Ut radius ad numerum secundorum* A; *ita est sinus anomaliæ eccentrici approximatæ* (§. I. inventæ) *ad numerum secundorum, qui subductus ab anomalia media dat alteram anomaliam approximatam eccentrici.*

IV. *Ut*

IV. *Ut radius ad numerum ſecundorum* A ; *ita eſt ſinus anomaliæ ſecundæ approximatæ eccentrici ad numerum ſecundorum, qui ſubtractus ex anomalia media dat tertiam anomaliam approximatam eccentrici.*

V. Hæc analogia tamdiu repetitur, accepto ſemper pro tertio termino ſinu anomaliæ approximatæ ultimo repertæ, donec inveniantur duæ conſequenter anomaliæ approximatæ accurate æquales, quæ erunt anomalia vera eccentrici.

VI. *Ut radix quadrata diſtantiæ aphelii ad radicem quadratam diſtantiæ perihelii ; ita eſt tangens dimidiæ anomaliæ veræ eccentrici ad tangentem dimidiæ anomaliæ veræ quæſitæ.*

Analogia ultima inſtituitur addendo dimidium logarithmi conſtantis (§. I. reperti) ad logarithmum tangentis dimidiæ anomaliæ eccentrici.

ARTICULUS XII.

Varia problemata de motu Planetarum in orbitis Ellipticis.

139. Problema I. *Datis ellipſeos dimenſionibus, anomaliam veram datam convertere in anomaliam mediam.*

Reſolutio. Fiat: *Ut radix quadrata diſtantiæ perihelii ad radicem quadratam diſtantiæ aphelii ; ita eſt tangens dimidiæ anomaliæ veræ ad tangentem dimidiæ anomaliæ eccentrici.* Fiat ſecundo: *ut radius ad ſinum anomaliæ eccentrici modo repertæ ; ita eſt eccentricitas orbitæ ad ſecunda reducta,* (exiſtente ſemiaxe majore 57°. 17′. 44″. 8) *ad numerum graduum, minutorum & ſecundorum, addendum anomaliæ eccentrici, ut habeatur anomalia media.* Utraque analogia inverſa eſt earum, quæ præcedente articulo ſunt expoſitæ.

140. Problema II. *Datis dimenſionibus ellipſeos* A G P H, *invenire diſtantiam* S M, *quæ anomaliæ veræ datæ* A S M *competit.*

Reſolutio. $SM = \frac{\text{diſtant. perih.} \times \text{diſt. aphel.}}{\text{diſt. perihel.} + \text{eccentricitate} \times 2\,\text{ſin}^2\,\frac{1}{2}\,\text{anom. veræ}}$;

vel vero $SM = \frac{\text{diſt. perih.} \times \text{diſt aphel.}}{\text{ſemiax. major.} - \text{eccentricitate} \times \text{coſ. anom. veræ}}$.

Demonſtratio. Jungantur M & F ; erit $\frac{1}{2}$ S M + $\frac{1}{2}$ S F + $\frac{1}{2}$ F M = S A. Eſt vero (Trig. 127) S F × S M, ſive 2 C S × S M: S A − S F × S A − S M, ſeu S P × S A − S M = 1 : $ſ^2\,\frac{1}{2}$ A S M. Igitur $SM = \frac{SP \times SA}{SP + 2CS \times ſ^2\,\frac{1}{2}\,ASM}$. Et quia (Trig. 40) R − *coſ* = $2ſ^2\,\frac{1}{2}$; habetur $2CS \times ſ^2\,\frac{1}{2}\,ASM = CS - CS \times coſ ASM$: ergo $SM = \frac{SP \times SA}{SP + CS - CS \times coſ ASM} = \frac{SP \times SA}{CP - coſ\,ASM \times CS}$.

141. Scholium. Conſtructa juxta regulas articulo præcedente traditas tabula æquationum centri alicujus planetæ, ſi quis etiam tabulam logarithmorum diſtantiarum a ſole condere velit, is commode ſequente analogia utetur: *Sinus anomaliæ veræ in ellipſi eſt ad ſinum anomaliæ veræ eccentrici, ut ſemiaxis minor ad diſtantiam quæſitam.*

142. Problema III. *Datis ſemiaxibus ellipſis*, v. g. (fig. 32) C A = 1, & C G = 0. 977824, *invenire punctum* M *cui competit æquatio centri maxima, ipſamque hanc æquationem maximam.*

Reſolutio. *primo* Accipiatur radix differentiæ quadratorum ſemiaxium C A, C G, quæ erit eccentricitas C S = 0. 20881. Ex foco S tanquam centro, radio S M = 0 98885, quæ eſt media proportionalis inter C A & C G, deſcribatur arcus ſecans ellipſin in M; etit M locus verus planetæ pro tempore, quo maxima æquatio centri ei competit.

Secundo. Ex puncto M ducatur ad alterum focum recta M F, dabuntur in triangulo F M S tria latera; ſcilicet S F æquale duplæ eccentricitati, S M, & M F, quod æquatur exceſſui axis A P ſupra S M: ex his itaque invenitur angulus A S M, anomaliæ veræ pro tempore æquationis maximæ, 80°. 57′. 26″. (Trig. 127); adeoque anomalia media correſpondens eſt 105°. 0′. 29″. 5, & utriuſque differentia dat æquationem centri quæſitam 24°. 3′. 3″. 5.

173. Problema IV. *Ex obſervationibus alicujus Planetæ invenire ejus æquationem maximam.*

Reſolutio. Non alia re opus eſt, quam ut determinentur duo tempora, ſcilicet ante, & poſt tranſitum planetæ per lineam apſidum, quibus erat in duobus ellipſeos locis, ad quæ ductus radius vector eſt medius proportionalis inter ſemiaxes; id, quod difficile non eſt, quoniam tunc ejus velocitas vera æquatur velocitati mediæ (107). Exempli cauſa, ex tempore revolutionis ſcitur velocitas media Mercurii diurna 4°. 5′. 32″. 5; invenire itaque oportet bina tempora, quibus velocitas vera Mercurii eadem eſt intra 24 horas.

Ex tabula obſervationum ſuperius (poſt articulum 5) relata apparet, motum diurnum Mercurii circa 15 Julii & 4 Septembris fuiſſe 4°. 5′. Interpolandæ itaque ſunt differentiæ obſervationum dierum 13, 14, 15 & 16 Julii, ut inveniatur tempus, quo differentia eſſe debuit 4°. 5′. 32″. 5: & reperietur id eſſe a die 14 Julii, 2 h. 49′, uſque ad diem 15, 2 h. 49′; Unde ipſum temporis momentum, quo accurate diſtantiam mediam habuit, fuit die 14 Julii 14 h. 49′. Et ſi interpolentur loca vera Mercurii obſervata diebus 14, 15, & 16 Julii, invenitur die 14 Julii 14 h. 49′ fuiſſe in 5°. 22°. 57′. 27″.

Simi-

Similiter interpolando differentias inter obſervationes dierum 3, 4, 5, & 6 Septembris, & loca vera Mercurii diebus 3, 4 & 5 obſervata, invenitur habuiſſe diſtantiam mediam die 3 Septembris 22 h. 14′ ½, in 11ˢ. 4°. 49′. 10″.

Differentia inter hæc duo loca vera eſt 5ˢ. 11°. 51′. 43″, quæ eſt motus verus, ſive ſumma velocitatum, quas Mercurius habuit toto intervallo, inter unam & alteram diſtantiam mediam. Tempus autem, quo hoc intervallum percurrit, eſt 52 d. 7 h. 25′½, & quo motu æquabili confeciſſet 6ˢ. 29°. 58′. 33″ (quippe cum intra 87 d. 23 h. 15′. 32″ percurrat 12 ſigna). Differentia eſt inter duos hos motus 48°. 6′. 50″, cujus dimidium 24°. 3′. 25″ eſt ſumma inæqualitatum Mercurii a tranſitu per lineam apſidum uſque ad terminum, quo inæqualitas velocitatum mediæ & veræ evaneſcit, conſequenter eſt æquatio maxima quæſita.

144. Obſerva. Si orbita ſit parum eccentrica, interpolatione opus non eſt, ut momentum temporis obtineatur, quo planeta diſtantiam mediam habuit: ſatis eſt, ſi ejus motus verus diurnus, quem ſucceſſive habet, comparetur, quippe diei intervallo celeritate media vix diſcrepante a vera. In exemplo a meridie 14 Iulii uſque ad meridiem 4 Septembris motus verus Mercurii erat 5ˢ. 14°. 43′. 43″, & medius 7ˢ. 20° 48′. 7″; ex quo maxima æquatio eſt 24°, 2′. 12″. Item a meridie diei 15 Julii uſque ad meridiem 4 Septembris motus verus erat 5ˢ. 10°. 37′. 15″; & medius 6ˢ. 28°. 42′. 35″, adeoque æquatio maxima eſt 24°. 2′. 50″, quæ a priori non differt, niſi propter notabilem inæqualitatem velocitatis Mercurii intervallo inter 14 & 15 Julii: at in orbitis parum eccentricis hæc inæqualitas ab uno uſque ad alterum diem vix eſt ſenſibilis.

145. Problema V. *Data æquatione maxima planetæ, invenire ejus eccentricitatem, aliasque ellipſis, quam deſcribit, dimenſiones.*

Ex calculo Problematis III, & conſtructione figuræ 30, vel 32, quæ ad inveniendam æquationem centri adhibetur, liquet, quod, dum ea æquatio maxima eſt, perpendiculum ST fere congruat cum eccentricitate CS, & quod eccentricitas ad arcum circuli reducta paullo minor ſit (134) dimidia æquatione maxima, ita, ut quo minor eſt orbitæ eccentricitas, eo hæ quantitates propius ad æqualitatem accedant. Unde fieri poteſt hæc proportio: *ut* 57°. 17′. 44″. 8 *ad dimidiam æquationem maximam planetæ; ita ſemiaxis ellipſeos major ad terminum quartum, qui in orbitis parum eccentricis ſenſibiliter ab eccentricitate non differt; in iis autem, quæ magis ſunt eccentricæ, eccentricitate paullo minor eſt.*

146. Ut itaque vera eccentricitas in caſu poſteriore reperiatur, inſtituendus eſt ſequens calculus, qui deinceps pro norma erit.

Data æquatione maxima Mercurii 24°. 3′. 3″.5, fiat: ut 57°. 17′. 44″. 8 ad 12°. 1′. 31″. 7; ita ſemiaxis major ellipſis Mercurii (qui pro 1 aſſumitur) eſt ad CS fere. Invenietur 0. 209881. Hoc valore de CS tanquam vero aſſumpto, quærenda eſt per Problema præcedens æquatio maxima centri, nam ſi hæc inveniretur 24°. 3′. 3″.5, eccentricitatis CS valor 0. 209881 verus fuiſſet aſſumptus; ſed æquatio illa major prodire debet; & quia æquationes maximæ ſunt fere ut eccentricitates, valor aſſumptus de CS imminuendus eſt, prout æquatio maxima reperta, & cum vera collata, exiget.

147. Hunc in finem determinetur radius SM, medius proportionalis inter ſemiaxes CA, CG; quod fiet, ſi accipiatur $SM = \sqrt{(1 - CS^2)}$. Nam $CG^2 = CA^2 - CS^2$: eſt vero CA : SM = SM : CG, ſive 1 : SM = SM : $\sqrt{(1 - CS^2)}$; igitur $SM^2 = \sqrt{(1 - CS^2)}$ (Elem. 316) & $SM = \sqrt[4]{(1 - CS^2)}$. Unde ſi ponatur CS = 0. 209881, invenietur SM = 0. 9888004.

148. His poſitis, reperietur angulus MSF 80°. 53′. 32″, & anomalia media correſpondens 105°. 4′. 1″ (139), hinc maxima æquatio prodit 24°. 10′. 29″. Quare fiat denique: ut 24°. 10′. 29″ ad 24°. 3′. 3″.5, ita eccentricitas aſſumpta 0. 209881 ad eccentricitatem veram 0. 2088066.

149. Obſerva. Quamvis hic calculus eccentricitatis indirectus ſit, præſtat tamen methodo deducendi dimenſiones ellipſium Planetarum ex diſtantiis per velocitates angulares cognitis, quoniam errores, qui in obſervatione velocitatum angularium admittuntur, longe magis influunt in diſtantias inde deductas, quam errores in obſervanda æquatione maxima contingentes influant in eccentricitatem. Nam ratio diſtantiarum aphelii & perihelii Mercurii (114) determinata eſt ex collatis inter ſe arcubus 1°. 3′. 55″½ & 27′. 23″, nempe exiguis, quorum alter vix alterius duplum excedit; cum potuiſſet reperiri ex inæqualitate 48°, pendente ex ſola eccentricitate, tempore dimidiæ revolutionis Mercurii.

150. Problema VI. *Dato tempore revolutionis planetæ, & tribus locis veris in orbita, invenire eccentricitatem, lineam apſidum, & tempus tranſitus proximi per eandem lineam.*

Loca ad ſolutionem maxime opportuna ſunt, ſi obſerventur duo vicina illis, quæ habent diſtantiam mediam; & tertius prope lineam apſidum.

151. Solutio directa hujus problematis magnis premitur difficultatibus; & quoniam uſum non habet, niſi in planetis, quorum theoria ſatis cognita eſt, methodum indirectam quidem, ſed expeditam, & ſummæ accurationis capacem adferemus. Fundatur in poſitione falſi, qua ſcilicet problema proxime ſolutum ſumitur.

Sint

Sint igitur exempli causa loca data Mercurii ex observationibus sequentibus:

	Locus verus				*Differentia*		
die 15 Julii . . .	5ˢ.	24°.	30′.	54″	. . . 70°.	24′.	3″.
6 Aug. . . .	8.	4.	54.	57	. . . 103.	6.	43.
7 Sept. . . .	11.	18.	1.	40			

Ex tempore revolutionis periodicæ Mercurii invenitur, quod intervallo 22 dierum, scilicet a 15 Julii usque ad 6 Augusti, motu medio percurrat 90°. 2′. 0″; & a 6 Augusti usque ad 7 Septembris 130°. 57′. 27″. Hoc posito res eo recidit, ut inveniatur eccentricitas, & positio axis majoris alicujus ellipseos, in qua 90°. 2′. 0″ motus medii respondeant 70°. 24′. 3″ motus veri: item 130°. 57′. 27″ motus medii dent 103°. 6′. 43″ motus veri.

152. Sit I A *p* (fig. 34) orbita quæsita, *p a* linea apsidum; I, A & P loca tria per observationes data, S sol; erunt anguli I S *a*, A S *a*, *a* S P anomaliæ veræ temporibus singularum observationum respondentes. Manifestum autem est, inventa una ex his anomaliis, haberi etiam reliquas, ob angulos I S A, A S P cognitos. Quæratur itaque ab initio circiter situs lineæ S *a* respectu horum angulorum, sive inveniatur, intra quæ ex datis tribus locis cadat aphelium: unde fiat: ut 70°. 24′ ad 90°. 2′; ita sunt 103°. 7′ ad 131°. 53′. Quartus terminus, major quam 130°. 57′, ostendit, 130°. 57′ habere ad 103°. 7′ minorem rationem, quam 90°. 2′ ad 70°. 24′, atque ideo motum verum fuisse tardiorem a 6 Augusti usque ad 7 Septembris, quam a 15 Julii usque ad 6 Augusti: & quoniam ex theoria fere cognita hujus planetæ scitur, Mercurium 6 Augusti non procul fuisse ab aphelio, recte infertur, quod eo die nondum illud transierit, ideoque linea S *a* intra S A & S P cadere debeat. Præterea notum est, eccentricitatem ellipsis, quam describit Mercurius, esse circiter = o, 21, semiaxe majore supposito = 1. Ex quo assumatur primo eccentricitas = o. 205, & fiat duplex hypothesis anguli A S *a*; in una statuatur 8 graduum, in altera novem; erit angulus I S *a* ex prima hypothesi 78°, 24′. 3″, ex secunda vero 79°, 24′. 3″; & in priori quidem hypothesi 8°, & 78°. 24′. 3″ respondentes anomaliæ mediæ facile (139) reperiuntur 11°. 50′. 55″, & 101°. 58′. 52″, quarum differentia 90°. 7′. 57″ excedit 90°. 2′. 0″ quantitate 5′. 57″, scilicet erroris primæ hypotheseos. Similiter in altera hypothesi angulis 9°, & 79°. 24′. 3″ competunt anomaliæ mediæ 13°. 19′. 25″, & 102°. 59′. 51″; & earum differentia est 89°. 40′. 26″, quæ a 90°. 2′ deficit 21′. 34″, nempe errore secundæ hypo-

theſeos. Quoniam hi duo errores contrarii ſunt, alter nempe poſitivus, negativus alter; inferatur, ut ſumma eorundem 27′. 21″ ad 1°. 0′. 0″, ſeu differentiam anomaliarum pro veris aſſumptarum in duplici hypotheſi; ita error ex hypotheſi prima emergens 5′. 57″ ad 12′. 59″, qua quantitate angulus A S *a* augendus eſt, ut error dictus corrigatur. Hinc facienda eſt tertia hypotheſis, & angulus A S *a* ponendus 8°. 12′. 59″, conſequenter I S *a* = 78°. 37′. 2″; erunt anomaliæ mediæ reſpondentes his duobus angulis 12°. 10′. 5″; & 102°. 12′. 5″, quarum differentia 90°. 2′. 0″ accurate, qualem intervallum inter primas duas obſervationes exigit: atque problema ſolutum eſſet, ſi anomalia vera *a* S P ad mediam reducta, additaque anomaliæ mediæ 12°. 10′. 5″, daret 130°. 57′. 27″ pro motu medio correſpondente angulo A S P; ſed quia ſubtractis 8°. 12′. 59″ ex 103°. 6′. 43″, anomalia media reſiduo 94°. 53′. 44″ competens invenitur inito calculo 117°. 50′. 13″. quæ addita ad 12°. 10′. 5″ efficit 130°. 0′. 18″; ſequitur, quod licet primo aſſumpta quantitas eccentricitatis congruat cum primis duabus obſervationibus, in tertia tamen errorem 57′. 9″ producat.

153. Aſſumatur igitur *ſecundo* eccentricitas = 0. 21; & poſito A S *a* prima vice = 8°, deinde = 9°, calculus in utraque hypotheſi ad modum prioris repetatur: invenietur, debuiſſe A S *a* = 9°. 12′. 43″ ſtatui, & I S *a* = 79°. 36′. 46″, ut anomaliæ mediæ prodirent 13°. 45′. 48″, & 103°. 47′. 48″, quarum differentia 90°. 2′. 0″ intervallo temporis a 15 Julii ad 6 Auguſti competit. Ut hypotheſeos hujus veritas examinetur, ſubducantur 9°. 12′. 43″ ex 103°. 6′. 43″; habebitur *a* S P = 93°. 54′. 0″, cui anomalia media convenit 117°. 28′. 47″. Huic addantur 13°. 45′. 48″, fiet 131°. 14′. 35″, quod excedit motum medium 130°. 57′. 27″ angulo A S P reſpondentem quantitate 17′. 8″: adeoque eccentricas nunc aſſumpta quamvis ſatisfaciat primæ & ſecundæ obſervationi, in tertia tamen hunc relinquit errorem per exceſſum. Qui ut tollatur, fiat: *ut* 1°. 14′. 17″ *(ſeu ſumma errorum ex utraque eccentricitatis aſſumptitia quantitate emergentium) ad* 17′. 8″, *ſeu errorem ex aſſumptione ſecunda enatum; ita* 0. 005, *id eſt differentia eccentricitatum aſſumptarum, ad* 0. 001153, *id eſt ad errorem eccentricitatis ſecundo aſſumptæ; Et ita etiam eſt differentia anomaliarum pro veris aſſumptarum in utraque hypotheſi, nempe* 59′. 44″, *ad* 13′. 46″, *ſeu errorem hypotheſeos ſecundæ.* Hinc ut ſecunda hypotheſis corrigatur, aſſumenda eſt eccentricitas = 0. 208847; & A S *a* = 8°. 58′. 57″. ex quibus reperitur, anomaliis A S *a* = 8°. 58′. 57″, & I S *a* = 79°. 23′. 0″, nec non *a* S P = 94°. 7′. 47″, reſpondere anomalias medias 13°. 23′. 38″; 103°. 25′ 43″, & 117°, 33′, 45″, ex quibus obtinentur 90°. 2′. 5″ & 130°. 57′. 23″ motus medii, fere ut ex tempore periodico deducuntur.

154. Quod

154. Quod si itaque anomalia vera $ASa = 8^\circ. 58'. 57''$ addatur loco vero $8^s. 4^\circ. 54'. 57''$, habetur locus verus aphelii in $8^s. 13^\circ. 53'. 54''$. Et si fiat *ut* 360° *ad tempus revolutionis Mercurii; ita anomalia media* $13^\circ. 23'. 38''$ *est ad* 3 d. 6 h. 33'; reperitur, quod Mercurius per aphelium suum transierit die 9 Augusti 6 h. 33'. Denique eccentricitas orbitæ = 0. 28847; quæ omnia cum præcedentibus fere congruunt.

ARTICULUS XIII.

De lege in genere, secundum quam vis centralis agit in planetas in trajectoriis conicis motos; & peculiariter de iis, quæ orbitis ellipticis sunt propria.

155. Quoniam motus planetarum æquabilis non est, vis centralis, qua in orbitis suis retinentur, variabilis sit, oportet. Et quamvis res per se scitu digna sit lex illa, secundum quam in diversis distantiis vis centralis agit; ex eo tamen capite præsens disquisitio se se præcipue commendat, quod magnam utilitatem conjunctam habeat, ut diversi planetæ inter se comparari possint. Hac animadversione excitatus observator noster, examen theoriæ virium centralium sequentibus theorematis prosequetur.

156. THEOREMA I. *Vis centralis variabilis quæcunque, tempore admodum exiguo pro uniformi acceleratrice habenda est.*

Hoc Theorema demonstrabitur, si ostendatur, quod spatia, quæ corpus dependenter a vi centrali quacunque versus centrum describeret, sint inter se ut quadrata tempusculorum, ex quibus tempus aliquod datum t (59) & admodum breve, compositum est.

Sint P, Q, p (fig. 33) tria puncta arcus infinite parvi trajectoriæ cujuscunque APD. Cum hic arcus tempore admodum parvo t motu æquabili describatur (56), spatia PQ, Pp sunt inter se ut partes temporis a puncto P computati. Sit PK tangens ejusdem arcus, adeoque directio, quam corpus in P constitutum sequeretur, si vi centrali destitueretur, solaque vi insita constante impelleretur. Ex centro virium S per puncta P, Q, p ducantur radii vectores SP, SQ, Sp, qui producti occurrant tangenti in R & F. Patet *Primo*, partes QR, pF inter arcum, & tangentem interceptas exponere actiones vis centralis, cum sint spatia, quibus corpus a via rectilinea PK deflexit, & versus centrum S accessit. *Secundo* quia radii vectores, & hinc etiam particulæ interceptæ QR, pF, sunt infinite propinquæ, esse easdem inter se parallelas.

157. Per

157. Per eadem puncta P, Q & p describatur circulus curvam osculans, cujus arcus cum arcu curvæ infinite parvo congruet (Elem. 468): sit hujus circuli diameter PN ad tangentem communem (Elem. 459) perpendicularis. Denique ducantur per Q & p, QI, pi ad tangentem PK; tum etiam QE, pH ad diametrum PN normales; & conjungantur Np, NQ.

His ita constitutis, triangula PQN, PpN pro rectilineis habenda sunt (Elem. 568), arcubus tam exiguis PQ, Pp a rectis nil differentibus: atque ideo est (Elem. 561) EP:PQ=PQ:PN; & PH:Pp=Pp:PN: consequenter (Elem. 316) PQ^2=PE. PN; & Pp^2=PH. PN; & PQ^2:Pp^2=PE. PN:PH. PN=PE (=QI): PH (=pi) (Elem. 296); ut adeo habeatur PQ^2:Pp^2=QI:pi. Sed ob QI, pi, & QR, pF parallelas, triangula RQI, Fpi similia sunt; quare est QI:pi=QR:pF=PQ^2:pP^2. Igitur si corpus viribus altera insita æquabili, altera centrali quacumque describit trajectoriam quamvis APD, effectus vis centralis (per QR, pF expositi) per arcum quemcumque admodum exiguum Pp, sunt ut quadrata temporum per QP, pP exhibitorum, quibus partes illius arcus describuntur.

158. Corollarium I. Viribus igitur centralibus applicari possunt formulæ motus uniformiter accelerati (60), & vis centralis f quævis tempore admodum parvo t agens ita generatim exprimi, $f=\frac{e}{tt}$. Et quia isthic pF repræsentat spatium, quo a tangente versus centrum S hæc vis corpus admovit tempusculo descripti arculi Pp, eadem formula ita exhibenda est: $f=\frac{pF}{tt}$.

159. Corollarium II. Unde si tempuscula t sumantur æqualia, erit f=pF, hoc est: *tempusculis infinite parvis æqualibus vires centrales sunt inter se ut rectæ pF inter extremum* p *arculorum descriptorum, & tangentem curvæ in altero extremo* P, *interceptæ, & ad radium vectorem* SP *parallelæ.*

160. Corollarium III. Inde porro deducuntur *aliæ formulæ generales diversæ, vim centralem exprimentes.* Nam *primo:* cum tempora exhibeantur per areas inter duos radios vectores, & arcum descriptum comprehensas (83); tempus infinite parvum quo corpus percurrit arculum PQp, exprimi poterit per triangulum SPp, sive quia tangens PF ob pF infinite parvam ab arculo Pp non differt, per triangulum SpF; sunt autem (Elem. 594) areæ horum triangulorum ut facta SP. pM, & ST. PF; hinc tt=SP^2. pM^2=ST^2. PF^2; unde habentur formulæ, $f=\frac{pF}{SP^2.pM^2}=\frac{pF}{ST^2.PF^2}$.

161. *Secun-*

161. *Secundo* Productis PS & FS, donec occurrant circumferentiæ circuli oſculatoris PBN, fiet (Elem. 565) pF : PF = PF : pB; & cum pP per hypotheſin ſit arcus infinite parvus, chordæ PV, pB ſunt infinite propinquæ, adeoque PV = pB; & hinc $pF = \frac{PF^2}{PV}$. Hic valor in ſecunda præcedentium duarum formularum ſubſtituatur pro pF, fiet nova formula $f = \frac{1}{ST^2 \cdot PV}$.

162. *Tertio* denique in triangulis rectangulis ſimilibus STP, PVN habetur SP : ST = PN (= 2 PG) : PV; adeoque $PV = \frac{ST \cdot 2PG}{SP}$; & $PV \cdot ST^2 = \frac{ST^3 \cdot 2PG}{SP}$. Si in ultima formula hic valor ſubſtituatur, ea abit in hanc, $f = \frac{SP}{SP^3 \cdot 2PG}$.

163. Theorema II. *Vis centralis ad focum ſectionis conicæ tendens eſt in ratione reciproca duplicata radii vectoris.*

Demonſtratio. Exhibeat ellipſis APHL (fig. 35) ſectionem conicam a corpore P deſcriptam vi centrali f, ad focum S tendente, Demonſtrari debet, eſſe $f = \frac{1}{SP^2}$.

Etenim *Primo* ob triangula SPT, QPV ſimilia habetur SP : ST = PQ : QV; & SP + PQ : ST + QV = SP : ST. Eſt vero (Elem. 796) SP + PQ = 2CA; & ST + QV = 2CK, quia ob CS = CQ, perpendicularis CK eſt inter perpendiculares alias QV, ST media arithmetice proportionalis: ergo etiam 2CA : 2CK = SP : ST = CA : CK ſeu PD. Porro (Elem. 863) CA : PD = CN : CB; quare SP : ST = CN : CB; & hinc $ST = \frac{CB \cdot SP}{CN}$.

Secundo. Sit PG radius oſculi ſeu curvaturæ in P ſectionis conicæ; erit (Elem. 886) $PG = \frac{CN^2}{PD}$. Eſt autem $PD = \frac{CA \cdot CB}{CN}$; ergo $PG = \frac{CN^3}{CA \cdot CB}$. His poſitis

Subſtituatur valor de ST & PG in formula generali $f = \frac{SP}{ST^3 \cdot 2PG}$, eadem pro ſectione conica, ad cujus focum S vis centralis tendit, erit $f = \frac{SP \cdot CN^3 \cdot CA \cdot CB}{SP^3 \cdot CB^3 \cdot 2CN^3} = \frac{CA}{SP^2 \cdot CB^2 \cdot 2} = \frac{CA}{SP^2 \cdot 2CB^2}$ & omiſſis conſtantibus CA, $2CB^2$, $f = \frac{1}{SP^2}$.

164. Præcedens demonſtratio facile equidem hyperbolæ applicatur; at non item Parabolæ, cui unicus tantum focus. Ne igitur veritas theorematis in parabola ſine demonſtratione relinquatur, ſit (fig. 71.) parabolæ APR ſemiordinata PO, radius oſculi PG, diameter ad punctum P, PQ: erit ex natura hujus curvæ (Elem. 827) AH = AO, & (Elem. 807) Anguli QPR, SPH, SHP æquales, adeoque (Elem. 499) SH=SP. Et quoniam perpendiculum ST in baſin trianguli iſoſcelis demiſſum ex vertice HSP, eandem biſecat, eſt HT=TP. Igitur ob $HA=\frac{1}{2}HO$ & $HT=\frac{1}{2}HP$, erit DP= 2TS, & propterea (Elem. 297) HA: HT=HO: HP. Unde ducta AT, triangula HTA, HPO ſimilia (Elem: 559) & rectangula ſunt, cum PO ſit ſemiordinata ad axem. Eſt igitur AT perpendiculum ex angulo recto STH in hypotenuſam HS demiſſum; & ideo (Elem. 561) SH (ſive SP): ST=ST: SA, adeoque $ST^2=SP.AS$, & $ST^6=SP^3.AS^3$. His poſitis, radius curvaturæ in P, nempe PG, eſt (Elem.887) $=\frac{DP^3}{4AS^2}$ ſive ob DP=2ST, $PG=\frac{8ST^3}{4AS^2}$, & $2PG=\frac{4ST^3}{AS^2}$. Unde facta ſubſtitutione in formula $f=\frac{SP}{ST^3.2PG}$, fiet $f=\frac{SP.AS^2}{ST^3.4ST^3}=\frac{SP.AS^2}{4ST^6}=\frac{SP.AS^2}{4SP^3.AS^3}=\frac{1}{4SP^2.AS}$; & omiſſis conſtantibus, $f=\frac{1}{SP^2}$.

165. THEOREMA III. *Si plura corpora viribus centralibus ad focum communem tendentibus, quæ ſint in ratione reciproca duplicata diſtantiæ, ſectiones conicas deſcribant circa centrum virium, erunt*

I. *Areæ, quas radii vectores æquali tempore verrunt, in ratione ſubduplicata parametrorum axium principalium cujusvis ſectionis.*

Sit enim parameter axis principalis $=\pi$, erit (Elem. 817) $\pi=\frac{2CB^2}{CA}$ (Fig. 35). Adeoque $f=\frac{CA}{SP^2.CB^2}$ reducitur ad hanc expreſſionem $f=\frac{1}{SP^2.\pi}$; quod idem pro parabola ex formula $f=\frac{1}{4SP^2.AS}$ invenitur, ſi π pro 4AS ſubſtituatur (Fig. 71). Eſt autem (160) $f=\frac{pF}{SP^2.pM^2}$; adeoque $\frac{1}{SP^2.\pi}=\frac{pF}{SP^2.pM^2}$. Sed per hypotheſin eſt pF (quod exponit vim centralem) (163) $=\frac{1}{SP^2}$; hinc $\frac{pF}{\pi}=\frac{pF}{SP^2.pM^2}$, & $\pi=SP^2.pM^2$, ſeu $\sqrt{\pi}=SP.pM$. Atqui $SP.pM$ eſt ut ſector PSp &c.

166. II. *Celeritas corporis cujusvis eſt in quovis puncto trajectoriæ in ratione directa ſubduplicata parametri axis principalis, & reciproca ſimplici perpendiculi ex foco demiſſi ad tangentem in puncto, in quo eſt corpus; ſive* $u=\frac{\sqrt{\pi}}{ST}$. (Fig. 35 & 71.)

Etenim celeritas tempore infinite parvo eſt ut arcus pP eo tempuſculo deſcriptus; & ob triangula rectangula SPT, pMP ſimilia,

milia, eſt S T : SP = pM : pP, ſive pP = $\frac{\text{SP. } p\text{M}}{\text{S T}}$. Eſt autem (165) SP. pM = $\sqrt{\pi}$; adeoque pP, ſive $u = \frac{\sqrt{\pi}}{\text{S T}}$.

167. III. *Si trajectoriæ, in quibus corpora moventur, ſint ellipſes, area tota cujuslibet eſt in ratione compoſita ex ſubduplicata parametri axis majoris, & ſimplici temporis revolutionis integræ; ſeu* a = $t\sqrt{\pi}$.

Nam tempus t revolutionis periodicæ eſt tanto majus, quo area tota ellipſeos major eſt, & quo minorem ejus partem tempore dato corpus deſcribit. Quare tempus revolutionis eſt ut area integra a ellipſeos directe, & ut ſector s, quem tempore dato deſcribit, reciproce, id eſt, $u = \frac{a}{s}$. Eſt autem (165) $s = \sqrt{\pi}$; ergo $t = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$, & $t\sqrt{\pi} = a$.

168. IV. *Si trajectoriæ ſint ellipſes, tempus periodicum t cujusvis corporis eſt ut radix quadrata cubi axis majoris d ellipſeos; ſive* $t = \sqrt{d^3}$.

Sit axis minor = b, parameter axis majoris = π; erit (Elem: 817) $d\pi = bb$; & $d^3\pi = b^2 d^2$. Eſt vero area ellipſis ut rectangulum axium, hoc eſt (Elem. 899) $a = bd = t\sqrt{\pi}$ (167), conſequenter $b^2 d^2 = tt\pi$, & hinc etiam $d^3\pi = tt\pi$, ac $d^3 = tt$, ſive $t = \sqrt{d^3}$.

169. Corollarium I. Eſt itaque $d = \sqrt[3]{tt}$, imo etiam $\frac{1}{2}d = \sqrt[3]{tt}$, quæ formula etiam locum habet in circulo, vi centrali ad centrum circuli tendente.

170. Corollarium II. Hinc ſequitur, quod *ex temporibus revolutionum planetarum datis deduci poſſit ratio axium majorum ellipſium, quas ſinguli deſcribunt:* Quare ſi ratio dimenſionum in ſingulis ellipſibus per obſervationes determinetur, omnes eæ dimenſiones in partibus ſcalæ alicujus communis exhiberi poſſunt. Atque hæc eſt altera binarum legum Kepleri.

Exempli gratia: Accipiatur axis major ellipſis, quam percurrit tellus, pro menſura communi ſive ſcala dimenſionum omnium aliarum orbitarum, & ponatur diviſus in 20000 partes æquales; fiat dein: ut tempus periodicum telluris 365d. 6h. 9′. 15″, ad tempus periodicum Mercurii 87d. 23h. 15′. 32″, ita radix quadrata de 800000000000, cubo ſcilicet axis orbitæ telluris 20000, ad 681204, radicem quadratam de 464039000000, ſive de cubo axis majoris orbitæ Mercurii, cujus radix cubica eſt 7742. Item fiat: ut 2, axis major orbitæ ☿ ſuperius (126) determinatus, ad 7742; ita axis minor 1.855648, & eccentricitas 0.20881 ſunt ad 7570, axem minorem; & 810, eccentricitatem ejusdem in partibus ſcalæ communis. Hac ratione reperiuntur dimenſiones ſequente tabula exhibitæ.

Tabula exhibens elementa Theoriæ Planetarum e Sole ſpectatorum.

	Mercurii.	Veneris.	Telluris.	Martis.	Iovis.	Saturni.
Tempus revolutionum periodicarum.	87 d. 23 h. 15½′	224 d. 16 h. 48⅘′	365 d. 6 h. 9¼′	686 d. 23 h. 30½′	4332 d. 12 h.	10759 d. 8 h
Dimenſiones ellipſium, ſuppoſita diame. circ. inter axes media proportio. & in 2000000 partes æquales diviſa. — axis major	2022555	2000022	2000142	2004343	2001161	2001624
axis minor	1977696	1999971	1999857	1995669	1998839	1998377
eccentricitas	211165	7141	16881	93134	48188	56982
Dimenſiones ad axem majorem orbitæ Telluris, tanquam ad ſcalam communem relatæ. — axis major	7742	14466	20000	30474	104020	190758
axis minor	7570	14465	19997	30342	103899	190448
eccentricitas	810	152	168	1415	2505	5430
diſtant. media	3872	7233	10000	15203	51980	95302
Situs aphelii a ſtella ♈ Arietis computatus.	☌ ° ′ ″ 7. 13. 54 30.	☌ ° ′ ″ 9. 7. 49. 20	☌ ° ′ ″ 8. 8. 42. 45	☌ ° ′ ″ 4. 1. 49. 50	☌ ° ′ ″ 5. 10. 30. 40	☌ ° ′ ″ 7. 29. 26. 15
Epocha tranſitus per aphelium.	9 Aug. 1740 6 h. 37′ 0″	23 Ian. 1743 15 h. 33′ 30″	29 Dec. 1744 3 h. 1′ 0″	12 Ian. 1745 8 h. 41′ 0″	9 April. 1744 13 h. 0′ 0″	5 Sept. 1723 0 h. 0′ 0″
Diametri ex ſole in diſtantia media viſæ.	″ 21	″ 29	″ 21	″ 12	″ 37	″ 16
Ratio diametrorum verarum	0, 38	1, 00	1	0, 87	9, 16	7, 26
Ratio ſuperficierum	0, 15	1, 00	1	0, 75	83, 87	52, 73
Ratio ſoliditatum	0, 05	1, 00	1	0, 65	768, 10	382, 80

171. Scho-

171. Scholium I. Ratio itaque distantiarum singulorum planetarum a sole beneficio calculi obtenta est, quæ per solas observationes haberi nequaquam poterat.

172. Scholium II. Quod si observetur angulus, sub quo diameter planetæ apparet, quando est in distantia aliqua in partibus scalæ communis cognita, etiam ratio superficierum, & soliditatum obtinetur. *Primo* enim liquet, diametrum veram planetæ esse tantomajorem, quo majorem arcum in sphæra cœlesti subtendere videtur, & simul quo major est ejus distantia; ut adeo *diametri veræ planetarum sint inter se ut facta arcuum, quos in cœlo subtendunt, in distantias eorum ob oculo observatoris.*

173. *Secundo* patet, cum superficies sphærarum sint inter se (Elem. 705) ut quadrata; & soliditates (Elem. 718) ut cubi diametrorum verarum; *superficies veras planetarum esse ut facta quadratorum arcuum a diametris subtensorum in quadrata distantiarum eorundem ab observatore; soliditates autem veras esse ut facta cuborum arcuum, quos diametri subtendere videntur, in cubos distantiarum ab oculo observatoris.*

Atque his principiis innititur calculus, quo tabula præcedente ratio diametrorum, superficierum, & soliditatum planetarum exhibita est.

174. THEOREMA IV. *Si vis centralis ad focum tendens, qua corpus ellipsin describit, paullo magis crescat, vel decrescat, quam in ratione reciproca duplicata radii vectoris; corpus non amplius eandem ellipsin describet, nisi ea supponatur circa focum mobilis: & in hac hypothesi axis major inclinabitur in eam partem, versus quam corpus movetur, vel in oppositam, prout scilicet vis centralis aucta, vel diminuta ultra rationem reciprocam duplicatam radii vectoris fuerit.*

Demonstratio. Quoniam vis insita æquabilis, sive projectionis, a nulla alia afficitur, quam a vi centrali (82); quamdiu vis centralis lege eadem agit, tamdiu corpus in trajectoria eadem, in eodem plano descripta, eundemque situm conservante, moveri debet: & si quidem hæc trajectoria sit ellipsis, lex vis centralis semper est (163), ut agat in ratione reciproca duplicata radii vectoris. Quod si itaque lex hæc mutetur, distantiæ corporis a centro virium in singulis trajectoriæ suæ punctis, eædem manere nequeunt cum illis, quibus puncta ellipseos immobilis ab eodem foco distabant. Supponamus itaque corpus circa apsidem superiorem suæ ellipseos versari, & versus inferiorem progredi, ita, ut directione versus focum manente, vis centralis paullo minor fiat, quam pro ratione reciproca duplicata radii vectoris: tum vero necesse est, ut radius vector longior evadat, corpore non amplius tanta vi, ac prius, versus focum nitente. Atque ita vel corpus extra ellipsin antea descriptam exibit, ut aliam curvam percurrat; vel vero supponi debet, ellipsin ipsam circa focum suum ita moveri, ut talem semper situm obtineat, in quo corpus ejus circumferentiam deserere non

poſſit. Quod ſi ponatur, evidens eſt, apſidem ſuperiorem debere verſus eandem plagam, in quam tendit corpus, promoveri, cum puncta huic apſidi vicina ceteris longius a foco, in quo centrum virium eſt, diſtent. Itaque in hac hypotheſi axis major ellipſis progredi debet verſus partem, in quam corpus movetur, & quidem eo celerius, quo decrementum vis centralis majus fuerit. Oppoſitum evenire debet, ſi ponatur vis centralis augeri: tunc enim corpus majore vi, quam prius, verſus focum nitens, ellipſeos peripheriam deſcriberet, ac aliam curvam intra ellipſin deſcriberet, niſi ipſa ellipſis circa focum ſuum rotaretur, ut eæ circumferentiæ partes ſemper corpus attingerent, quæ diſtantiam a foco novæ vi centrali competentem habent. Facile autem perſpicitur, id fieri non poſſe, niſi apſis ſuperior a corpore removeatur, utpote circa quam diſtantiæ a foco nimis magnæ ſunt: unde in hac hypotheſi apſis in partem contrariam motui corporis tendere debet, celeritate augmento vis centralis proportionali.

175. Obſerva I. Conſideranti patet, hypotheſin ellipſeos circa focum ſuum motæ locum non poſſe in omnibus caſibus habere, quibus vis centralis mutari poteſt; unde ſi id fieri ſupponatur, neceſſe eſt, ut decrementum vel incrementum vis centralis majus non ſit, quam ut corpus ad diſtantiam aphelii, vel perihelii moveatur, ac inſuper eadem mutatio virium per motum debitum lineæ apſidum compenſetur: alias impoſſibile eſt, ut corpus ſemper in circumferentia ellipſeos maneat.

II. Quod hic de ellipſi dicitur, cum proportione alteri cuivis trajectoriæ applicari poteſt, modo mutentur, quæ curvatura orbitæ, & ſpecies vis centralis agentis mutari exigunt.

176. Corollarium. Si igitur ex obſervationibus conſtiterit, ſitum lineæ apſidum mutatum fuiſſe, id argumento erit, interea variationem aliquam in lege vis centralis contigiſſe; Et ſi quidem linea apſidum motum continuum & periodicum habeat, is effici debet per actionem aliquam, quæ perpetuo cum vi centrali concurrit, eamque modificat.

CAPUT III.

De legibus motus cometarum.

ARTICULUS I.

De phænomenis motus Cometarum ex ſole ſpectatorum generatim, & de hypotheſi phyſica, quæ eidem explicando ſerviat.

Poſt accuratum, & ſecundum omnes circumſtantias exactum examen curſus plurium cometarum, obſervator noſter ſequentia tanquam ex ipſis obſervationibus certa deducet. 177.

177. I. *Phænomenon.* Directio motus cometarum non tendit in eandem plagam, neque eorum orbitæ in eadem fere cæli regione deſcribuntur; ſed alii *directi* ſunt, hoc eſt, moventur ab occidente verſus ortum, ut planetæ; alii ſunt retrogradi, ſive ab ortu in occaſum tendunt. Quidam a parte cæli borea verſus auſtrum; quidam ab auſtro verſus boream motus ſuos peragunt, ita ut eorum orbitæ diverſiſſimæ verſus omnem partem ſeſe interſecent.

178. II. *Phænomenon.* Nullus cometa per integram ſuam revolutionem conſpicuus eſt; ſed quidam tempore apparitionis ſuæ deſcribunt arcum 80, vel 100 graduum, alii majores, ut 150, 200, 250, 300 &c. graduum.

179. III. *Phænomenon.* Cometæ videntur eo majorem portionem ſuæ orbitæ deſcribere, quo majorem habent velocitatem; & ex oppoſito.

180. IV. *Phænomenon.* Cometarum velocitas, & diameter apparens ſemper creſcit a tempore primæ apparitionis, usque dum ad medium arcus, quem percurrunt, pervenerint; tum rurſus iisdem gradibus & celeritas, & diameter minuitur, quibus accreverat; ita ut in æqualibus a medio puncto orbitæ viſibilis diſtantiis cometarum celeritates & diametri æquales ſint.

181. V. *Phænomenon.* Cometæ ſemper videntur moveri in circulo maximo ſphæræ cæleſtis.

182. Univerſim inter motus cometarum & planetarum primariorum exactiſſima eſt analogia, & nullum diſcrimen niſi duabus in rebus: *Primo*, quod directio cometarum nullam certam cæli plagam reſpiciat, ſed quaquaverſum tendat, ubi ex oppoſito planetæ omnes eandem pene viam ſequuntur. *Secundo*, quod cometæ non obſerventur integras revolutiones abſolvere.

183. Ex omnibus autem iſtis obſervator concludet primo, *cometas non habere certum aliquem zodiacum in cælo*, ut ſuum habent planetæ. Secundo *eorum trajectorias non eſſe rectas, neque curvas, quæ convexitatem ſoli obvertant*, ſaltem ſi agatur de iis cometis, qui 180 gradibus plures deſcribunt: eſt enim impoſſibile, ut recta utcunque longa, & utcunque poſita, vel curva verſus oculum convexa, ſub angulo 180 graduum appareat: ſed vero ſimilius eſt, *cometarum orbitas eſſe curvas verſus ſolem cavas, quarum rami utrinque in infinitum abeunt*, uti ſunt parabola vel hyperbola: vel ſaltem *quæ in ſe non redeunt, niſi ad diſtantiam fere infinitam a ſole.* Tertio *cometas ad diverſas diſtantias prope ſolem tranſire*, eosque viciniores fieri ſoli, qui celerius moveri, ac majorem deſcribere arcum videntur; & ex oppoſito. Quarto, *eorum orbitas eſſe curvas regulares, viribus motricibus certam & conſtantem legem ſequentibus.* Quinto, *Quamvis orbitam in uno eodemque plano totam eſſe,*

nec

nec extra illud excurrere. Denique *admodum probabile esse, cometas moveri legibus motui planetarum analogis*, hoc est, *retineri in orbitis duplici vi, altera insita, seu projectionis, æquabili; altera acceleratrice centrali versus solem tendente, & in ratione functionis alicujus eorum distantiarum a sole variabili*, id, quod satis indicat regularis acceleratio, & retardatio motus, cavitas trajectoriæ soli semper obversa, & maxime analogia inter diametros apparentes, velocitates, & distantias.

184. Neque obest huic hypothesi duplex illud discrimen inter cometas, & planetas superius annotatum. Nam cum *Primo* motus projectionis nulli determinatæ directioni sit affixus, sed versus quamcumque plagam æqualiter fieri possit, nihil sane impedire potest, quo minus a dextra versus sinistram; a sinistra versus dextram; a meridie versus septentrionem, a septentrione versus meridiem tendat. Jam vero cum positio plani, in quo motus compositus ex projectione, & vi centrali peragitur, unice a situ centri virium, & directione primi impulsus vis insitæ dependeat; nihil certe obstare poterit, quo minus sydus aliquod in orbita longe ab aliorum orbitis diversa moveatur, præsertim cum primus astrorum motor a nulla prorsus re determinetur, ut in hanc potius ea plagam, quam in aliam impellat. *Secundo.* Si orbita alicujus planetæ sit adeo eccentrica, ut ejus diameter in aphelio constituti sub angulo infinite parvo videatur; manifestum est, eam, consequenter etiam ipsum planetam, in aphelio invisibilem esse; atque hinc apparere nequit, nisi quando circa perihelium versatur; & universim nusquam planeta visibilis esse debet, nisi in distantiis non nimium a sole remotis, & quando ejus diameter angulum aliquem sensibilem facit.

185. His ita constitutis hypothesis naturæ maxime congrua hæc interea observatori nostro videbitur, donec ulterioribus observationibus vel stabiliatur penitus, vel evertatur: *Cometas omnes moveri in ellipsibus valde eccentricis, quarum plana per solem in communi earum foco constitutum transeant; motus vero eorum iisdem legibus accelerari, & retardari, quibus planetæ subsunt.* Atque hinc theoria planetarum etiam cometis sufficit.

186. Sed quoniam calculus astronomicus in ellipsibus valde eccentricis admodum prolixus & intricatus est (138); & cometæ non apparent nisi parte exigua temporis revolutionis; denique curvatura ellipseos, cujus foci magnam habent distantiam, versus vertices axis majoris, valde vicina est curvaturæ parabolæ (est enim (Elem. 806) parabola nihil aliud, quam ellipsis, cujus foci distantiam infinitam habent): licebit *citra errorem sensibilem orbitæ cometarum visibili portionem parabolæ substituere.*

187. Ex

187. Ex hypotheſi, quod orbitæ cometarum ellipticæ ſint, & ejusdem naturæ cum trajectoriis planetarum, niſi quod majorem habeant eccentricitatem, conſequitur, cometas debere ſtatas habere periodos, atque ideo plures jam ſæpius in reditu obſervari potuiſſe; denique reditum ipſum prædici, ac omnia futuræ apparitionis phænomena præſciri. Et ſane eo jam provecta eſſet res Aſtronomica, ſi ſuperiorum ætatum Aſtronomi accuratas nobis cometarum ſibi viſorum obſervationes transmiſiſſent. Verum quia partem maximam cometas pro Meteoris habebant, ſive pro corporibus ex diverſa materia in aere temere conflatis, poſtea exardeſcentibus, ac paulatim conſumtis, quæ ab aere ambiente ſine certa lege deferrentur, operæ pretium ſe facturos haud putarunt, ſi eorum curſum accuratius obſervarent; ſed ſatis illis fuit annotaſſe, hoc illove anno cometam majorem minoremve, viſum eſſe, qui hanc, aut illam conſtellationem percurrerit. Fortaſſe etiam nullum prorſus ad nos antiquius monumentum apparentium cometarum perveniſſet, niſi tanquam funeſti nuncii alicujus magni infortunii imminentis fuiſſent habiti. Nondum duo abierunt ſæcula, cum cometæ accurate obſervari cœperunt; & ab illo tempore non niſi 40 fuerunt, quorum motus cum neceſſariis circumſtantiis annotati. Nil igitur mirum eſt, quod eorum reditus nondum prædici poſſit. Tempora eorum periodica longiſſima ſunt, cum eorum velocitas circa aphelia exigua eſſe debeat. Si exempli cauſa cometæ diſtantia a ſole in aphelio ſit centies major, quam in perihelio, ejus velocitas angularis in aphelio decies millies minor eſt, quam in perihelio; & hinc ſi in perihelio tempore unius diei deſcribat unum gradum; in aphelio 10000 diebus, ſeu plus 27 annis opus eſt, ut gradum unicum percurrat. Duo ſolum hucuſque fuerunt cometæ, quorum tempus revolutionis utcunque ſciatur, alter obſervatus annis 1531, 1607, & 1682, qui adeo circa annum 1758 rediturus ſit; alter, qui circa finem anni 1680 valde magnus apparuit: & collatis inter ſe diverſis hiſtoriæ monumentis, admodum vero ſimile videtur, eum eſſe eundem cum illis, qui an. 1106, 531, & circa mortem Cæſaris ſunt viſi, cujus tempus periodicum conſequenter eſt 575 annorum. Rediiſſe autem tunc cometa cenſendus eſt, ſi poſitio & dimenſio ejus orbitæ congruat proxime cum iis, quæ in jam prius obſervatis per calculum methodo in ſequentibus exponenda (Sect. IV. Cap. II. Art. 2.) inſtitutum deprehenduntur. Tum vero intervallum temporis inter eorum tranſitum per perihelium dat tempus periodicum, vel ejus multiplum, quod ex hiſtoria apparitionum cometarum ſuperioribus ſæculis viſorum comprobandum eſt.

188. Legibus corporum in trajectoriis conicis motorum præcedente capite generatim expoſitis, reſtat ſolum, ut eas in particulari parabolæ & cometis applicemus.

ARTICULUS II.

De Legibus peculiaribus corporum in trajectoria parabolica motorum, quæ ſimul exemplo illuſtrantur.

189. THEOREMA I. *Velocitas u in quovis loco* P *Parabolæ, eſt ad velocitatem* V, *qua corpus viribus centralibus circulum deſcriberet, centro virium exiſtente centro circuli, cujus radius æqualis radio vectori* SP (fig. 71.), *ut* $\sqrt{2}$ *ad* 1; *ſeu quod idem eſt, ut* 2 *ad* $\sqrt{2}$.

Demonſtratio. $u = \frac{\sqrt{4AS}}{ST}$ (166) $= \frac{\sqrt{4AS}}{\sqrt{SP.AS}}$ (164) $= \frac{2}{\sqrt{SP}}$; igitur $uu = \frac{4}{SP}$. Eſt vero circulus (cujus radius SP) nihil aliud,

quam ellipsis, cujus parameter est 2 SP (Elem. 801), & in hac celeritas V est constans (88); hinc $V = \frac{\sqrt{2SP}}{SP}$, & $VV = \frac{2SP}{SP^2} = \frac{2}{SP}$; consequenter *uu*: $VV = \frac{4}{SP} : \frac{2}{SP} = 4 : 2 = 2 : 1$; & $u : V = 2 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 1$.

190. THEOREMA II. *Velocitas angularis corporis existentis in extremitate semiordinatæ ex foco, in quo est centrum virium, ad axem erectæ, est subquadrupla velocitatis, quam idem corpus habet in vertice sectionis, foco viciniſſimo, si sectio sit parabola; sed major quam* $\frac{1}{4}$, *si sectio sit ellipsis; eadem denique minor, si sit hyperbola.*

Cum enim velocitates semper sint in ratione reciproca duplicata distantiæ, velocitas corporis in vertice sectionis est ad velocitatem ejusdem in extremitate semiordinatæ ex foco ductæ, ut quadratum hujus semiordinatæ ad quadratum distantiæ foci a vertice. Atqui semiordinata per focum transiens est in parabola dupla distantiæ foci a vertice; in ellipsi autem minor, quam dupla illa distantia; & in hyperbola major, quam dupla; igitur ratio reciproca duplicata distantiarum in Parabola est 4 ad 1; in ellipsi est minor, quam 4 ad 1; in hyperbola major, quam 4 ad 1.

191. Corollarium. Hinc deducitur, ex observato motu cometæ, facile posse judicium ferri, an ad sensum in ellipsi moveatur, consequenter an ejus reditus intra tempus non adeo magnum sperari possit; an vero describat parabolam, nec nisi post longum admodum intervallum rediturus sit, ex hypothesi scilicet, quod portio illa parabolæ orbitæ apparentis sit revera pars ellipseos valde eccentricæ: an denique percurrat hyperbolam, ac ideo reditus illius penitus desperandus sit. Etenim si observetur cometa, quando celeritatem maximam habet, & in distantia 90 graduum utrinque a loco celeritatis maximæ, reperiaturque, quod velocitas in ea distantia sit sensibiliter major, quam $\frac{1}{4}$ velocitatis maximæ, recte concludetur, cometam etiam ad sensum in ellipsi deferri: sed si ea deprehendatur accurate $\frac{1}{4}$ velocitatis maximæ æqualis, aut vero tam exigua sit ab hac quantitate differentia, ut merito erroribus, qui inter observandum evitari non possunt, adscribi queat, statuetur cometæ orbita ad sensum parabolica. At illud vix eveniet, ut velocitas in dicta distantia notabiliter minor inveniatur, quam $\frac{1}{4}$ velocitatis maximæ: id enim si esset, cometa corpus esset, quod in spatiis cælestibus in infinitum abiret, nec unquam ad solem reverteretur.

192. THEOREMA III. *Tempus, quo cometa ex Parabolæ vertice* A (*sive suo perihelio*) *venit in* M, *ubi* (fig. 73) *semiordinata per focum* S *transiens secat Parabolam*, *seu* quod eodem recidit, *tempus, quo cometa e sole* S *visus a suo peri-*

perihelio ad 90° digreditur, eſt ut tempus, quo percurreret circulum integrum, cujus radius foret æqualis diſtantiæ ejus in perihelio a ſole A S.

Demonſtratio. Nam tempora hæc forent inter ſe, ut area parabolica A S M ad aream circularem, cujus radius A S: atqui ratio harum arearum in omnibus omnino parabolis eadem eſt: eſt enim (Elem. 891) area A S M ſemper pars duodecima de 16 AS^2, ſive $= \frac{4}{3}$ AS^2, adeoque eſt ſemper ut AS^2: & area circuli radio A S deſcripti eſt itidem ut AS^2 (Elem. 609); ergo area parabolica A S M eſt ad aream circuli, cujus radius A S, in ratione conſtante.

193. Supponamus interea, arcum diſtantiæ veræ cometæ ab aliqua ſtella, per quam cometæ orbita tranſit, ſingulis diebus in ipſo meridie obſervatum eſſe, uti ſequente tabula annotatur:

Diſtantiæ Cometæ a Stella.

meridie		s	°	′	″	Differentiæ °	′	″
May d.	1.	0.	5.	26.	42	. .1.	4.	0.
	2.	0.	6.	30.	42	. .1.	6.	31.
	3.	0.	7.	37.	13	. .1.	9.	15.
	4.	0.	8.	46.	28	. .1.	12.	5.
	5.	0.	9.	58.	33	. .1.	15.	7.
	6.	0.	11.	13.	40	. .1.	18.	22.
	7.	0.	12.	32.	2	. .1.	21.	50.
	8.	0.	13.	53.	52	. .1.	25.	28.
	9.	0.	15.	19.	20	. .1.	29.	24.
	10.	0.	16.	48.	44	. .1.	33.	31.
	11.	0.	18.	22.	15	. .1.	38.	4.
	12.	0.	20.	0.	19	. .1.	42.	45.
	13.	0.	21.	43.	4	. .1.	47.	50.
	14.	0.	23.	30.	54	. .1.	53.	29.
	15.	0.	25.	24.	23	. .1.	59.	1.
	16.	0.	27.	23.	24	. .2.	4.	45.
	17.	0.	29.	28.	9	. .2.	11.	37.
	18.	1.	1.	39.	46	. .2.	18.	36.
	19.	1.	3.	58.	22	. .2.	25.	53.
	20.	1.	6.	24.	15	. .2.	33.	40.
	21.	1.	8.	57.	55	. .2.	41.	54.
	22.	1.	11.	39.	49	. .2.	50.	29.
	23.	1.	14.	30.	18	. .2.	58.	19.
	24.	1.	17.	29.	37	. .3.	8.	57.
	25.	1.	20.	38.	24	. .3.	18.	20.
	26.	1.	23.	56.	44	. .3.	27.	50.
	27.	1.	27.	24.	34	. .3.	37.	45.
	28.	2.	1.	2.	19	. .3.	47.	18.
	29.	2.	5.	49.	37	. .3.	56.	21.
	30.	2.	9.	46.	8	. .4.	5.	30.
	31.	2.	13.	51.	38	. .4.	13.	29.
Junii	1.	2.	17.	5.	7	. .4.	20.	33.
	2.	2.	21.	25.	40	. .4.	26.	27.
	3.	2.	25.	52.	7	. .4.	30.	52.
	4.	3.	0.	22.	59	. .4.	33.	46.
	5.	3.	4.	56.	45	. .4.	43.	55.

Diſtantiæ Cometæ a Stella.

meridie		s	°	′	″	Differentiæ °	′	″
Jun. d.	6.	3.	9.	31.	40	. .4.	34.	20.
	7.	3.	14.	6.	0	. .4.	32.	2.
	8.	3.	18.	38	2	. .4.	28.	4.
	9.	3.	23.	6.	6	. .4.	22.	41.
	10.	3.	27.	28.	47	. .4.	15.	56.
	11.	4.	1.	44.	43	. .4.	8.	12.
	12.	4.	5.	52.	55	. .3.	59.	36.
	13.	4.	9.	52.	31	. .3.	50.	28.
	14.	4.	13.	42.	59	. .3.	40.	57.
	15.	4.	17.	23.	56	. .3.	31.	11.
	16.	4.	20.	55.	7	. .3.	21.	23.
	17.	4.	24.	16.	35	. .3.	11.	54.
	18.	4.	27.	28.	29	. .3.	1.	25.
	19.	5.	0.	30.	54	. .2.	53.	28.
	20.	5.	3.	24.	22	. .2.	44.	40.
	21.	5.	6.	9.	2	. .2.	36.	24.
	22.	5.	8.	45.	26	. .2.	28.	24.
	23.	5.	11.	13.	50	. .2.	21.	0.
	24.	5.	13.	34.	50	. .2.	13.	32.
	25.	5.	15.	48.	22	. .2.	7.	36.
	26.	5.	17.	55.	58	. .2.	0.	58.
	27.	5.	19.	56.	56	. .1.	55.	3.
	28.	5.	21.	51.	59	. .1.	49.	36.
	29.	5.	23.	41.	35	. .1.	44.	22.
	30.	5.	25.	25.	57	. .1.	39.	38.
Julii	1.	5.	27.	5.	35	. .1.	34.	59.
	2.	5.	28.	40.	34	. .1.	30.	45.
	3.	6.	0.	11.	19	. .1.	26.	45.
	4.	6.	1.	38.	4	. .1.	23.	1.
	5.	6.	3.	1.	5	. .1.	19.	29.
	6.	6.	4.	20.	34	. .1.	16.	11.
	7.	6.	5.	36.	45	. .1.	13.	3.
	8.	6.	6.	49.	48	. .1.	10.	12.
	9.	6.	8.	0.	0	. .1.	7.	16.
	10.	6.	9.	7.	16	. .1.	4.	50.
	11.	6.	10.	12.	6			

194. Ex consideratione harum observationum patet, cometæ velocitatem maximam fuisse inter dies quintam & sex am Junii. Determinandum itaque est ipsum temporis momentum, quo cometa velocitatem maximam habuit, & quanta ea fuerit pro tempore exiguo, veluti pro 4 horis; id, quod fieri potest interpolatione differentiarum secundarum, quæ ex observationibus dierum 3, 4, 5, 6, 7, & 8 Junii deducuntur, uti jam (106) explicatum est; aut vero interpolari poterunt quatuor consequenter observationes æqualibus intervallis ante & post diem 6 Junii acceptæ, & duplex tempus quæri, quo cometa eandem habuit velocitatem angularem. Utraque hac methodo reperietur, quod cometa die 5 Junii 16 h. o'. o'' per suum perihelium transierit, quod fuit 3ˢ. 8°. o'. o'', existente velocitate angulari intra 4 horas 45'. 50''.

195. His positis, ordinata ad axem per focum parabolæ, quæ describi a cometa assumitur, transiens secat parabolam in oˢ. 8°. o'. o'' ex una; & ex altera parte in 6ˢ. 8°. o'. o'', quibus in locis cometa circa 3 May & 9 Julii fuit. Ac interpolando observationes 2, 3 & 4 May, reperitur fuisse in oˢ. 8°. o'. o'' die 3 May. 8 h. o'. o'', cum velocitate angulari intra quatuor horas 11'. 28''. Similiter ex interpolatione observationum 8, 9 & 10 Julii invenitur velocitas angularis die 9 Julii in ipso meridie (quo nempe fuit in 6ˢ. 8°. o'. o'') fuisse 11'. 27''. 5. pro quatuor horis. Ex quo apparet, has velocitates non modo esse sensibiliter æquales, sed etiam fere subquadruplas velocitatis in perihelio 45'. 50''. Quare hæc tria puncta trajectoriæ cometæ, in quibus fuit 3 May 8 h., 5 Junii 16 h. & 9 Julii in meridie, in parabola existunt, ita ut medium sit vertex, reliqua duo in extremitatibus ordinatæ ad axem per focum transeuntis.

196. Ut sciatur, an omnia reliqua puncta trajectoriæ sint in eadem parabola, accipienda est velocitas aliqua angularis, quam inter duo ex præcedentibus punctis cometa habuit, uti dum in 5ˢ. 13°. 34'. 50'' fuit, sive dum a perihelio 65°. 34'. 50'' abfuit die 24 Junii; quæ quidem per interpolationem reperitur 22'. 53'' pro duabus horis ante, & totidem post meridiem. Supponatur dein A P M (fig. 73) orbita parabolica, in cujus vertice A perihelium, sol in foco S, directrix parabolæ B C, locus cometæ die 24 Junii in P, angulo P S A 65°. 34'. 50'' existente; erit velocitas cometæ in A 45'. 50''; & in P 22'. 53''. Inde ratio distantiarum SA, SP erui potest: posita enim S A 1000 partium, fiat: ut 22' 53'' ad 45' 50''; ita S A² est ad S P² = 2002913, cujus radix est 1415. Datis itaque in triangulo rectangulo P SQ latere S P = 1415, & angulo ad S = 65°. 34'. 50'', invenitur SQ = 585. Est autem ex natura parabolæ P S = P C = B Q, adeoque P S + S Q = B S = 2 S A; & hinc summa de P S & S Q debebit

bebit esse dupla distantiæ SA; & id quidem ita habet; nam 1415 + 585 = 2000.

197. Observa. An hypothesis recte assumta sit, ita etiam indagari potest: nempe ex tribus velocitatibus angularibus haberi possunt tres rectæ magnitudine & positione datæ: quæritur dein, quænam e sectionibus conicis, & cujus dimensionis, per earum extrema transeat. (Elem. 882).

Pluribus cometis ad hujusmodi calculos revocatis, noster observator inferet

198. I. *Orbitas cometarum esse ad sensum parabolicas, in quarum foco sol existat, quæque iisdem prorsus legibus describantur, quibus Planetæ suas percurrunt.*

199. II. *Diversorum cometarum orbitas discerni posse* primo *ex ratione velocitatum, quas habent in suis periheliis: ex his enim eruitur ratio parametrorum parabolarum, quæ sunt quadruplæ distantiarum in perihelis.* Secundo *ex loco cæli, vel vicinia alicuius stellæ fixæ, prope quam cometæ fuerunt in perihelio.* Tertio *ex constellationibus, per quas semitæ cometarum transeunt, consequenter ex positione planorum circulorum maximorum, in quibus orbitæ describuntur.* Quarto denique *ex diversitate diametrorum, quando cometæ sunt in perihelio.* Unde cometa unus, idemque censendus est, dum idem fuerit locus perihelii, eadem velocitas maxima in perihelio, idem planum orbitæ, eadem diameter apparens in iisdem trajectoriæ locis.

200. III. *Ipsum denique numerum cometarum per longam observationum seriem determinari posse, collatis inter se diversis orbitarum dimensionibus ex ipsis observationibus deductis.* Verum id non nisi plurium sæculorum labore præstari potest.

ARTICULUS III.

De ratione distribuendi inæqualitates Cometarum in diversis orbitarum parabolicarum locis.

201. Quoniam cometæ iisdem legibus subsunt, quas planetæ observant, liquet jam, eorum inæqualitates in diversis orbitæ locis ita distribuendas esse, ut sint areæ, quas radius vector verrit, temporibus proportionales. Itaque iisdem principiis calculus eorum anomaliæ veræ innititur, quibus pro planetis usi sumus; & illud præterea observandum, quod hæ anomaliæ computari debeant ab ipso perihelio, temporibus itidem a transitu per illud sumtis. Unde huc res redit, ut solvatur problema sequens: *Datis parametro parabolæ, differentia inter tempus datum, & transitum cometæ per suum perihelium, positione perihelii, sive axis parabolæ, invenire anomaliam*

veram cometæ, hoc eſt angulum ad ſolem inter perihelium, & locum cometæ pro tempore dato interceptum. Verum hoc problema ad tria alia reducitur, quæ ſubjicimus:

202. PROBLEMA I. *Invenire æquationem, quæ exprimat rationes inter anomaliam veram cometæ; inter tempus, quo eandem conficit; & inter tempus, quo 90° a ſuo perihelio digreditur.*

Reſolutio. Sit t tangens dimidiæ anomaliæ alicujus veræ A S P (fig. 73), ſit a tempus, quo cometa a perihelio ad 90° digreditur; b tempus, quo ab eodem ad locum P pervenit; diſtantia in perihelio a ſole S A = 1: dico, æquationem quæſitam eſſe $3at + at^3 = 4b$.

Demonſtratio. Ex puncto P erigatur perpendicularis ad tangentem P D, ducatur etiam ſemiordinata P Q, & jungatur P A, erit *Primo* angulus P D A = $\frac{1}{2}$ A S P. Nam demiſſo ad P T perpendiculo S N, ob triangulum P S T iſoſceles, eſt angulus P S N = $\frac{1}{2}$ A S P; & ob triangula rectangula P S N, T P D ſimilia, eſt P D A = N S P = $\frac{1}{2}$ A S P. *Secundo* erit $\frac{1}{2}$ P Q = t. Etenim ſi D Q accipiatur pro radio, eſt P Q tangens anguli P D Q. Eſt autem (Elem. 824) D Q = 2 A S, ergo A S accepto pro radio, eſt P Q dupla tangentis anguli P D Q, ſeu P Q = $2t$; ergo $\frac{1}{2}$ P Q = t. Erit *tertio* A Q = tt. Nam in triangulo rectangulo T P D habetur (Elem. 561) Q D: P Q = P Q: Q T, conſequenter Q T = $2tt$: eſt vero (Elem. 827) 2 A Q = Q T, adeoque A Q = tt. Erit *quarto* area ſectoris parabolici A S P = $t + \frac{1}{3}t^3$. Quippe area trianguli rectanguli Q A P = $\frac{1}{2}$ P Q. Q A = $t \times tt = t^3$; & hinc area ſegmenti A O P A = $\frac{1}{3}t^3$. Nam (Elem. 889) hæc area eſt $\frac{1}{6}$ P Q. Q A = $\frac{1}{6}$ de $2t$. $tt = \frac{1}{3}t^3$. Similiter area trianguli A P S = $\frac{1}{2}$ A S. P Q = $\frac{1}{2} \times 2t = t$: ergo area ſectoris A S P = $\frac{1}{3}t^3 + t$. Erit *quinto* area ſectoris A S M O A = $\frac{4}{3}$; eſt enim (Elem. 888) = $\frac{2}{3}$ A S. S M, ſive $\frac{2}{3}$. 1. 2; ergo = $\frac{4}{3}$. Denique tempus a eſt ut eadem area A S M O A; & tempus b ut A S P O A. Habetur igitur hæc proportio: a: $\frac{4}{3} = b$: $t + \frac{1}{3}t^3$; & inde æquatio $3at + at^3 = 4b$.

203. Corollarium I. *Datis temporibus* a & b *reperitur tangens dimidiæ anomaliæ veræ* P S A, *ſi reſolvatur hæc æquatio tertii gradus* $t^3 + 3t = \frac{b}{\frac{1}{4}a}$, id quod in praxi facile hunc in modum præſtatur. Sit triangulum A B C ad A rectangulum (fig. 72), cujus unum latus A B ponatur = 1, alterum A C = $\frac{b}{\frac{1}{2}a}$; quæratur ejus hypotenuſa B C, & inveniantur duæ mediæ proportionales inter B C + A C & B C − A C; harum differentia erit valor t.

204. Opor-

204. Oporteat exempli causa invenire locum verum cometæ pro meridie diei 21 Junii. A transitu ejus per perihelium die 5 Junii 16 h. (194) usque ad 21 Junii merid. intercedunt 15 d. $\frac{1}{3}$; adeoque $a = 33\frac{1}{3}$, $b = 15\frac{1}{3}$; hinc $t^3 + 3t = \frac{15\frac{1}{3}}{8\frac{1}{3}}$. Ponatur AC = $\frac{15\frac{1}{3}}{16\frac{2}{3}} = 0.92$; ergo (Elem. 756) hypotenusa BC = 1.3588; BC + AC = 2.2788; & BC — AC = 0.4388: duæ mediæ proportionales sunt 1.3159, & 0.7599; earum differentia 0.5560; cujus logarithmus 9.7450748 est idem cum logarithmo tangentis 29°. 4′ 27″$\frac{1}{2}$, cujus duplum est angulus PSQ = 58°. 8′. 55″; qui additus ad 3ˢ. 8°. 0′. 0″, verum locum perihelii, dat locum verum cometæ pro meridie diei 21 Junii 5ˢ. 6°. 8′. 55″.

205. Corollarium II. Si formula $3at + at^3 = 4b$ reducatur ad hanc $\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t = \frac{b}{a}$, eruitur, quod *si in diversis parabolis sit eadem anomalia vera, tempus, quo in singulis a perihelio ad eam corpus pervenit, sit ut tempus, quo ab eodem perihelio ad distantiam 90° digreditur, & vicissim.* Nam si eadem sit utrobique anomalia vera, est $\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t$ quantitas constans; adeoque $\frac{b}{a}$ exprimit rationem constantem temporum, quibus eadem anomalia vera in utraque parabola percurritur, ad tempora, quibus cometæ ad distantiam 90° a perihelio perveniunt.

206. Corollarium III. Data anomalia vera, & tempore, quo cometa a perihelio ad 90° digressus est, invenitur tempus respondens anomaliæ datæ ex æquatione $b = \frac{3}{4}at + \frac{1}{4}at^3$, seu $4b = 3at + at^3$.

207. Corollarium IV. Data anomalia vera, & tempore correspondente, reperitur tempus, quo cometa a perihelio ad 90° pervenit, ex æquatione $a = \frac{4b}{3t + t^3}$. Quod si itaque inveniendum sit tempus, quo cometa, cujus distantia in perihelio sit eadem cum distantia media telluris a sole, a perihelio ad 90° pervenire possit, sequens calculus fiat.

208. Quoniam tellus intra dies 365, horas 6, minuta 9 orbitam percurrit: ejus velocitas intra horam unam est 2′. 27″. 50‴. 5. Est autem, ob distantias per hypothesin æquales a centro virium, velocitas in parabola ad velocitatem in circulo, ut $\sqrt{2}$ ad 1 (189); ergo velocitas cometæ in suo perihelio intra horam reperitur 3′. 29″. 4‴$\frac{3}{4}$; & hinc habetur $4b = 4$ horis $= \frac{1}{6}$ diei, cujus logarithmus est 9.[2]2218487; & logarithmus tangentis $t = 1′. 44″. 32‴\frac{3}{8}$ est 6.7048558: addito logarithmo de 3, habetur logarithmus de $3t$ = 7.1819771. Logarithmus vero de t^3 est 0.1145674, cui respondet

fra-

fractio decimalis adeo exigua, ut ejus notis præfigi debeant novem zeri, quæ consequenter tuto negligitur. Unde subtractis 7.1819771 ex 9.2218487, relinquitur 2.0398716, cui logarithmo respondent 109, 6154 dies, sive valor de *a*. Cometa igitur cujus distantia in perihelio eadem foret cum distantia media telluris a sole, intra 109 dies, 14 h. 46′. 12″ a perihelio suo ad distantiam 90 graduum veniret.

209. PROBLEMA II. *Invenire æquationem, quæ exprimit rationem distantiæ cometæ in suo perihelio* S A (fig. 73), *alicujus anomaliæ veræ* A S P, *& radii vectoris, seu distantiæ a sole* S P.

Resolutio. Sit *p* distantia in perihelio; *c* cosinus dimidiæ anomaliæ veræ; *r* sinus totus; *d* radius vector, sive distantia cometæ a sole: erit $c\,c\,d = p\,r\,r$.

Demonstratio. Quia S N est perpendicularis ad P T, angulus N S P æquatur dimidio A S P, consequenter S P N est complementum dimidiæ anomaliæ veræ. Quod si jam accipiatur S P pro sinu toto, habetur $r : \sin S\,P\,N\,(=c) = SP : SN$; & $r : c = SP : SN$. Est vero (164) $SP : SN = SN : AS$; & (Elem. 318) $SP^2 : SN^2 = SP\,(=d) : AS$ (sive *p*): igitur etiam $r^2 : c^2 = d : p$, & $c\,c\,d = p\,r\,r$.

210. Corollarium. *Si in diversis parabolis habeatur eadem anomalia vera, radii vectores ei convenientes sunt ut distantiæ in perihelis.* Cum enim ratio $cc : rr$ constans sit, erit etiam $d : p$ constans.

211. PROBLEMA III. *Distantias in perihelis diversorum cometarum in communi aliqua scala exhibere; assumta v. g. distantia media telluris a sole pro unitate.*

Resolutio. Fiat: *ut* 109 *d* 14 h. 46′. 12″ *ad tempus, quo cometa a suo perihelio ad* 90° *digreditur, ita est unitas ad radicem quadratam cubi distantiæ in perihelio, quæ quæritur.* Exempli gratia pro cometa articuli 193 erit: 109 d. 14 h. 46′. 12″ : 33 d. 8 h. = 1 : 0.304093, cujus quadratum est 0.92472552649; radix cubica 0.4522, quæ est distantia hujus cometæ in perihelio.

Demonstratio. Tempus, quo cometa a suo perihelio digrederetur ad 90°, est ut tempus, quo describeret circa solem, tanquam centrum, circulum, cujus radius *p* æqualis distantiæ cometæ in perihelio: quia scilicet tempora semper sunt in ratione arearum; & posita A S = *p* (fig. 72) area A S M O A fit (Elem. 888) $\frac{1}{3}pp$, consequenter ut pp (54), in qua ratione etiam est circulus radio A S descriptus. Est autem (168) tempus revolutionis in circulo ut radix quadrata cubi diametri, sive etiam radii; ergo tempus, quo cometa a perihelio ad 90° digreditur, est ut $\sqrt{p^3}$. Itaque si distantia cometæ in perihelio determinanda sit in partibus scalæ, in qua pro unitate assumitur distantia media telluris a sole, facienda est hæc analogia: ut 109, 6154 dies (tempus scilicet, quo a perihelio cometa pervenit

ad

ad 90° in parabola, in qua distantia in perihelio æquatur distantiæ mediæ telluris a sole) ad tempus, quo cometa quivis alter a perihelio suo ad 90° digreditur; ita 1 (quia $\sqrt{1^3} = 1$) est ad $\sqrt{p^3}$.

212. Corollarium. Ex his, & prius demonstratis inferes, quod *si anomaliæ veræ in quacunque parabola semel rite sint calculatæ, eæ usui esse possint pro quovis alio cometa, cujus distantia in perihelio datur.* Si enim eædem sint in diversis parabolis anomaliæ veræ, radii vectores d sunt ut distantiæ a periheliis (210); sive (Elem. 308) $\sqrt{d^3}$ est ut $\sqrt{p^3}$. Atqui $\sqrt{p^3}$ est (211) ut tempus; quo a perihelio ad distantiam 90° cometæ perveniunt: & quando anomaliæ veræ sunt eædem (205), hoc tempus est etiam ut tempus, quo eædem anomaliæ conficiuntur a perihelio; igitur dum eædem sunt anomaliæ veræ in diversis parabolis, $\sqrt{p^3}$ est ut tempus, quo a perihelio ad easdem anomalias cometæ perveniunt. Unde constructa tabula anomaliarum verarum ad singulos dies a transitu cometæ per suum perihelium in parabola quacunque, v. g. in qua distantia in perihelio sit æqualis distantiæ mediæ telluris a sole (quæ supponatur = 1) ea servire potest pro inveniendis anomaliis veris alterius cujuscunque cometæ ex sequente analogia: *ut radix quadrata cubi distantiæ cometæ in perihelio ad unitatem; ita est intervallum inter transitum ejusdem per suum perihelium & tempus quodvis aliud, ad tempus, quo cometa (pro quo tabula constructa est) ad eandem anomaliam veram pervenit.*

213. Hunc in finem sequens tabula constructa est: cujus usus magis ex sequentibus patebit. Interea tamen is ostendi potest in exemplo N. 204, si scilicet fiat: ut radix quadrata cubi de 0.4522, sive 0.304093, est ad 1, ita $15\frac{1}{3}$ dies ad 50.4232 dies, quibus in tabula respondent 58°. 8′. 55″, quemadmodum supra directe per calculum inventum est.

214. Observa. Logarithmus radicis quadratæ cubi alicujus quantitatis obtinetur, si accipiatur medietas tripli logarithmi illius quantitatis. Triplum enim logarithmi alicujus quantitatis est logarithmus cubi ejusdem (Elem. 342); & dimidium logarithmi est logarithmus radicis quadratæ (Elem. 343).

Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera	Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera	Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera	Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera
	° ′ ″		° ′ ″		° ′ ″		° ′ ″
1	1. 23. 37.	51	58. 37. 2.	101	86. 49. 55.	151	101. 31. 47.
2	2 47. 12.	52	59. 25. 1.	102	87. 13. 2.	152	101. 45. 6.
3	4. 10. 40.	53	60. 12. 15.	103	87. 35. 53.	153	101. 58. 18.
4	5. 34. 0.	54	60. 58. 44.	104	87. 58. 26.	154	102. 11. 22.
5	6. 57. 8.	55	61. 44. 30.	105	88. 20. 43.	155	102. 24. 19.
6	8. 20. 2.	56	62. 29. 32.	106	88. 42. 43.	156	102. 37. 9.
7	9. 42. 38.	57	63. 13. 52.	107	89. 4. 26.	157	102. 49. 52.
8	11. 4. 54.	58	63. 57. 30.	108	89. 25. 53.	158	103. 2. 27.
9	12. 26. 46.	59	64. 40. 28.	109	89. 47. 5.	159	103. 14. 56.
10	13. 48. 14.	60	65. 22. 45.	110	90. 8. 1.	160	103. 27. 18.
11	15. 9. 14	61	66. 4. 23.	111	90. 28. 42.	161	103. 39. 34.
12	16. 29. 43.	62	66. 45. 22.	112	90. 49. 8.	162	103. 51. 42.
13	17. 49. 39.	63	67. 25. 43.	113	91. 9. 20.	163	104. 3. 44.
14	19. 9. 1.	64	68. 5. 27.	114	91. 29. 17.	164	104. 15. 40.
15	20. 27. 47.	65	68. 44. 34.	115	91. 49. 0.	165	104. 27. 29
16	21. 45. 53.	66	69. 23. 5.	116	92. 8. 30.	166	104. 39. 13.
17	23. 3. 19.	67	70. 1. 1.	117	92. 27. 45.	167	104. 50. 50.
18	24. 20. 3.	68	70. 38. 22.	118	92. 46. 48.	168	105. 1. 20.
19	25. 36. 3.	69	71. 15. 9.	119	93. 5. 37.	169	105. 13. 45.
20	26. 51. 17.	70	71. 51. 23.	120	93. 24. 13.	170	105. 25. 4.
21	28. 5. 45.	71	72. 27. 4.	121	93. 42. 37.	171	105. 36. 17.
22	29. 19. 25.	72	73. 2. 13.	122	94. 0. 48.	172	105. 47. 25.
23	30. 32. 16.	73	73. 36. 51.	123	94. 18. 47.	173	105. 58. 27.
24	31. 44. 17.	74	74. 10. 58.	124	94. 36. 34.	174	106. 9. 23.
25	32. 55. 27.	75	74. 44. 34.	125	94. 54. 9.	175	106. 20. 14.
26	34. 5. 45.	76	75. 17. 40.	126	95. 11. 32.	176	106. 30. 59.
27	35. 15. 11.	77	75. 50. 18.	127	95. 28. 44.	177	106. 41. 39.
28	36. 23. 45.	78	76. 22. 28.	128	95. 45. 45.	178	106. 52. 13.
29	37. 31. 25.	79	76. 54. 9.	129	96. 2. 35.	179	107. 2. 43.
30	38. 38. 11.	80	77. 25. 23.	130	96. 19. 14.	180	107. 13. 7.
31	39. 44. 4.	81	77 56. 10.	131	96. 35. 42.	181	107. 23. 26.
32	40. 49. 3.	82	78. 26. 30.	132	96. 52. 0.	182	107. 33. 40.
33	41. 53. 9.	83	78. 56. 25.	133	97. 8. 7.	183	107. 43. 50.
34	42. 56. 19.	84	79. 25. 55.	134	97. 24. 4.	184	107. 53. 54.
35	43. 58. 35.	85	79. 54. 59.	135	97. 39. 51.	185	108. 3. 54.
36	44. 59. 58.	86	80. 23. 37.	136	97. 55. 28.	186	108. 13. 48.
37	46. 0. 27.	87	80. 51. 55.	137	98. 10. 56.	187	108. 23. 38.
38	47. 0. 2.	88	81. 19. 48.	138	98. 26. 14.	188	108. 33. 23.
39	47. 58. 44.	89	81. 47. 18.	139	98. 41. 23.	189	108. 43. 5.
40	48. 56. 34.	90	82. 14. 25.	140	98. 56. 22.	190	108. 52. 41.
41	49. 53. 32.	91	82. 41. 10.	141	99. 11. 13.	191	109. 2. 13.
42	50. 49. 38.	92	83. 7. 33.	142	99. 25. 54.	192	109. 11. 40.
43	51. 44. 52.	93	83. 33. 36.	143	99. 40. 27.	193	109. 21. 3.
44	52. 39. 15.	94	83. 59. 17.	144	99. 54. 50.	194	109. 30. 22.
45	53. 32. 48.	95	84. 24. 38.	145	100. 9. 6.	195	109. 39. 37.
46	54. 25. 31.	96	84. 49. 39.	146	100. 23. 13.	196	109. 48. 47.
47	55. 17. 26.	97	85. 14. 20.	147	100. 37. 12.	197	109. 57. 53.
48	56. 8. 31.	98	85. 38. 42.	148	100. 51. 2.	198	110. 6. 55.
49	56. 58. 48.	99	86. 2. 44.	149	101. 4. 45.	199	110. 15. 53.
50	57. 48. 18.	100	86. 26. 28.	150	101. 18. 20.	200	110. 24. 47.

Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera			Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera			Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera			Intervallum dierum inter transit. per perihelium	Anomalia vera		
	°	′	″		°	′	″		°	′	″		°	′	″
202	110.	42.	23.	304	121.	35.	36.	510	132.	33.	15.	1100	144.	35.	31.
204	110.	59.	43.	308	121.	54.	23.	520	132.	54.	51.	1200	145.	42	42
206	111.	16.	49.	312	122.	12.	47.	530	133.	15.	50.	1300	146.	42.	20.
208	111.	33.	40.	316	122.	30.	51.	540	133.	36.	15.	1400	147.	35.	45.
210	111.	50.	17.	320	122.	48.	34.	550	133.	56.	7.	1500	148.	24.	1.
212	112.	6.	40.	324	123.	5.	58.	560	134.	15.	27.	1600	149.	7.	55
214	112.	22.	48.	328	123.	23.	2.	570	134.	34.	17.	1700	149.	48.	6.
216	112.	38.	44.	332	123.	39.	48.	580	134.	52.	39.	1800	150.	25.	5
218	112.	54.	26.	336	123.	56.	16.	590	135.	10.	33.	1900	150	59.	17.
220	113.	9.	56.	340	124.	12.	26.	600	135.	28.	0.	2000	151.	31.	2.
222	113.	25.	13.	344	124.	28.	19.	610	135.	45.	1.	2100	152.	0.	37.
224	113.	40.	17.	348	124.	43.	57.	620	136.	1.	40.	2200	152.	28.	19
226	113.	55.	10.	352	124.	59.	17.	630	136.	17.	54.	2300	152.	54.	18.
228	114.	9.	51.	356	125.	14.	23.	640	136.	33.	45.	2400	153.	18.	45.
230	114.	24.	21.	360	125.	29.	13.	650	136.	49.	16.	2500	153.	41.	48.
232	114.	38.	40.	364	125.	43.	49.	660	137.	4.	25.	2600	154.	3.	28.
234	114.	52.	47.	368	125.	58.	10.	670	137.	19.	15.	2700	154.	24.	6.
236	115.	6.	43.	372	126.	12.	18.	680	137.	33.	44.	2800	154.	43.	46.
238	115.	20.	30.	376	126.	26.	12.	690	137.	47.	57.	2900	155.	2.	31.
240	115.	34.	5.	380	126.	39.	53.	700	138.	1.	51.	3000	155.	20.	23
242	115.	47.	31.	384	126.	53.	21.	710	138.	15.	28.	3100	155.	37.	26.
244	116.	0.	46.	383	127.	6.	37.	720	138.	28.	48.	3200	155.	53.	43
246	116.	13.	52.	392	127.	19.	40.	730	138.	41.	51.	3300	156.	9.	17.
243	116.	26.	49.	396	127.	32.	32.	740	138.	54.	40	3400	156.	24.	10.
250	116.	39.	36.	400	127.	45.	12.	750	139.	7.	15.	3500	156	38.	27.
252	116.	52.	14.	404	127.	57.	40.	760	139.	19.	33.	3600	156.	52.	10.
254	117.	4.	43.	408	128.	9.	58.	770	139.	31.	39.	3700	157.	5.	22.
256	117.	17.	3.	412	128.	22.	6.	780	139	43.	30.	3800	157.	18.	7.
258	117.	29.	15.	416	128.	34.	2.	790	139.	55.	9	3900	157.	30.	27.
260	117.	41.	18.	420	128.	45.	49.	800	140.	6	35	4000	157.	42.	25.
262	117.	53.	13.	424	128.	57.	25.	810	140.	17.	48	4100	157.	53.	56.
264	118.	5.	0.	428	129.	8.	52.	820	140.	28	50	4200	158.	5	4.
266	118.	16.	39.	432	129.	20.	10.	830	140.	39	39	4300	158.	15.	51.
268	118.	28.	10.	436	129.	31.	17.	840	140.	50	18.	4400	158.	26.	16.
270	118.	39.	33.	440	129.	42.	16.	850	141.	0.	45.	4500	158.	36	22.
272	118.	50.	49.	444	129.	53.	7.	860	141.	11.	2.	4600	158.	46.	9.
274	119.	1.	57.	448	130.	3.	48.	870	141	21.	9.	4700	158.	55.	38.
276	119.	12.	58.	452	130.	14.	21.	880	141.	31.	5.	4800	159.	4.	50.
278	119.	23.	52.	456	130.	24.	46.	890	141.	40.	52.	4900	159.	13.	45.
280	119.	34.	39.	460	130.	35.	3.	900	141.	50.	30	5000	159.	22.	26
282	119.	45.	19	464	130.	45.	10.	910	141.	59.	58.	5500	160.	2.	39.
284	119.	55.	52.	468	130.	55.	13.	920	142.	9.	17.	6000	160.	38.	10.
286	120.	6.	18.	472	131.	5.	6.	930	142.	18.	28	6500	161.	9.	44.
288	120.	16.	38.	476	131.	14.	52	940	142.	27.	30.	7000	161.	38.	19.
290	120.	26.	52.	480	131.	24.	31.	950	142.	36.	24	7500	162.	4.	7.
292	120.	36.	59.	484	131.	34.	3.	960	142.	45.	10.	8000	162.	27.	45.
294	120.	47.	0.	488	131.	43.	27.	970	142.	53.	48.	8500	162.	49.	26.
296	120.	56.	55.	492	131.	52.	45.	980	143.	2.	19.	9000	163.	9.	26
298	121.	6.	44	496	132.	1.	56.	990	143.	10.	42.	9500	163.	27.	54.
300	121.	16.	27.	500	132.	11.	1.	1000	143.	18.	57.	10000	163.	45.	7.

SECTIO SECUNDA

Complectens partem primam Aſtronomiæ Terreſtris,

Sive

Expoſitionem præcipuorum Phænomenorum cæleſtium e tellure ſpectatorum.

Obſervator noſter e centro ſolis in Telluris ſuperficiem translatus, præprimis ad ſequentia duo generalia phænomena advertet.

215. Phænomenon I. *Cælum inſtar ſphæræ cavæ apparet, in cujus centro oculus obſervatoris ſit collocatus; & quamvis is in ſuperficie telluris ſit conſtitutus, non tamen ultra medietatem cæli videt; neque viſus ad magnam ſuperficiei telluris partem porrigitur, ſed undique in circulo terminatur.*

Id phænomenon explicatu facile eſt. *Primo* cælum tanquam ſphæra apparet, in cujus centro videtur eſſe oculus in ſuperficie terræ conſtitutus: cujus rei eadem eſt ratio, ob quam cælum e ſole ſpectatum ſphæricum videretur, ſole centrum occupante (3). Idem contingere deberet in quovis alio loco hujus univerſi, qui ſemper pro centro ſphæræ cavæ haberetur, in cujus circumferentia omnia reliqua objecta viſibilia intra univerſum contenta poſita apparerent.

216. *Secundo.* Si concipiatur planum indefinitum per oculum, qui in centro ſphæræ poſitus videtur, tranſiens, id ſphæram in duo hemiſphæria apparenter æqualia ſecare debebit; & ſectio hujus plani in ſuperficie ſphæræ circulum maximum conſtituet (Elem. 666). Oculo jam in O conſtituto (fig. 36), in ipſa fere ſuperficie telluris convexa C N L, radii viſuales, qui quaquaverſum ex oculo in ſuperficiem terræ ducuntur, ejusdem tangentes fiunt, adeoque in plano tangente indefinito exiſtunt (quod *planum horizontale obſervatoris* appellatur) quo cælum in duo hemiſphæria æqualia dividitur, quorum alterum ſupra verticem obſervatoris ſemper aſpectabile eſt; alterum vero infra ejus pedes nunquam fit viſibile. Quamdiu enim oculus in O manet, nullus ad eum radius lucis infra O Q vel O P tranſiens pertingere poteſt: atque ita non ſolum nihil ultra cæli dimidium videri poteſt, ſed etiam nulla alia objecta terreſtria præterquam in plano tangente Q O P ſita. Hinc etiam eſt, quod e majore diſtantia res in ſuperficie terræ poſitæ cerni nequeant, niſi oculus ad aliquam altitudinem, v. g. ad M, elevetur: tunc enim viſus longius porrigitur, & radiis L M, M N terram tangentibus, ac undique conum efformantibus, in cujus apice oculus exiſtit, terminatur. In hoc quo-

que

que caſu plus quam dimidium cæli videri poteſt. Illud etiam contingere poteſt, ut oculus in loco aliquo infra reliquam ſuperficiem telluris depreſſo conſtituatur, vel vero objectis elevatioribus undique ambiatur, ut ne quidem medietatem cæli conſpicere queat. Sic aſpera, & inæquabilis telluris ſuperficies in cauſa eſt, cur non ſemper viſus circulo maximo ſphæræ cæleſtis terminetur.

217. Sed quoniam horizon eſt terminus maxime oppo tunus, primumque obvius, ad quem mo us cæleſtes referantur, duplex diſtingui debet: alter phyſicus, ſeu *ſenſibilis*, qui nihil aliud eſt, quam curva illa, quæ oculo utcunque conſtituto viſum in cælo terminat; alter *horizon rationalis*, ſive verus, eſtque circulus maximus ſphæræ cæleſtis apparentis, oculo obſervatoris in ejus centro poſito, cujus planum terram tangit, cælumque in duo hemiſphæria dividit. Atque ad hunc velut terminum aſcenſus & deſcenſus corporum cæleſtium refere ur, ita ut ea dicantur *elevata*, ſeu *ſupra horizontem*, quæ in hemiſphærio ſuperiore, ac viſibili exiſtunt; illa vero *depreſſa*, aut *infra horizontem*, quæ ſunt in altero hemiſphærio. Nos deinceps hunc poſteriorem intelligemus, quando ſimplici voce horizontis, ſine alio adjecto, uſi fuerimus.

218. His ita poſitis, ſi per centrum C, & per oculum obſervatoris in O conſtitutum producatur radius C O Z indefinite, is ad horizontem rationalem perpendicularis erit, cujus planum terram in O tangit: & punctum Z, per quod in cælo tranſire videtur, directe vertici obſervatoris imminebit, ac undique ab horizonte rationali æqualiter diſtabit; ipſa autem recta O Z (Elem. 624) plano horizontis perpendiculariter inſiſtet. Itaque (Trig. 2) punctum Z erit polus hujus horizontis, qui *Zenith* vocatur.

219. Hujus puncti complures ſunt utilitates haud contemnendæ. *Primo* enim ejus ope invenitur, quantum punctum quodvis in horizonte ſenſibili acceptum diſtet ab horizonte rationali. Nam ſi angulus radiis ex Zenith, & puncto illo ad oculum ductis comprehenſus ſit 90 graduum, inferetur, hoc punctum in utroque ſimul horizonte exiſtere; at ſi is angulus data quantitate minor, majorve ſit eo graduum numero, tantundem ſupra, aut infra horizontem rationalem eſſe illud punctum concludetur.

220. *Secundo.* Quo angulus ad oculum inter Zenith & ſydus quodvis major minorve fuerit, eo illud ſydus horizonti vel vicinius erit, vel ab eodem remotius, conſequenter eo minorem, vel majorem altitudinem habebit: ita, ut terminus maximæ altitudinis poſſibilis ſit ipſum Zenith. Et univerſim *menſura altitudinis alicujus ſtellæ eſt arcus, qui concipitur in cælo ad horizontem perpendicularis per ſtellam ductus, ſive complementum arcus inter centrum ſtellæ & zenith intercepti.*

221. *Tertio.* Quamdiu obſervator in eodem loco immotus manet, eundem horizontem, idemque Zenith habet; quam primum vero locum mutat, ejus horizontale planum in alio loco, quam prius, tellurem tangit, & linea a Zenith per hoc punctum contactus ad centrum terræ ducta comprehendit angulum cum linea e priore Zenith ad idem centrum ducta, adeoque etiam in cælo alteri, a priore diverſo puncto reſpondet: duo autem horizontes iſti ſunt ad ſeſe inclinati ſub angulo, cujus menſura eſt arcus cæleſtis inter utrumque Zenith interceptus. (Trig. 15).

222. Phænomenon II. *Omnia ſydera diverſimode moveri videntur. Imprimis enim tam ſtellæ fixæ, quam planetæ, cometæ, & ipſe ſol videntur ſingulis diebus circa terram in circulis admodum inæqualibus, ad ſenſum tamen parallelis, moveri: quædam enim deſcribunt circulos adeo exiguos, ut prorſus immota appareant; alia vero magnos admodum, magnaque cum velocitate percurrunt. Quævis ſtella fixa ſemper videtur in eodem moveri circulo; at ſol & planetæ jam magnos, jam parvos, quandoque ab horizonte multum remotos, alias eidem vicinos peragrant. Denique planetæ nonnunquam in eodem ſitu reſpectu fixarum perſtant; tum quibusdam fiunt viciniores; ac rurſus ab iis in partem oppoſitam recedunt &c.*

Hæc phænomena maximam partem adſcribenda ſunt illuſionibus opticis a duplici motu telluris provenientibus, altero revolutionis annuæ circa ſolem; altero rotationis diurnæ circa axem. Conſtat enim experientia, hominem in navi conſidentem & æquabiliter provectum, omnesque recipientem directiones, quæ navi imprimi poſſunt; conſtat, inquam, talem aliquem ſibi facile perſuadere, ſe cum navi ſua immotum ſtare, & objecta vicina extra navem poſita in partem motui navis oppoſitam progredi.

223. Hæc hominis perſuaſio eo firmior erit, quo navis, qua vehitur, fuerit major: tunc enim diverſæ partes, diverſisque diſtantiis undique circa eum poſitæ, & numero plures ſunt, & eundem reſpectu ejus ſitum perpetuo ſervant. Et certe ſi ſupponamus, talem hominem ita manere quietum, ut caput immotum teneat, vultu in eandem partem ſemper verſo, imagines rerum in navi exiſtentium, quæ in oculos incurrere poſſunt, in eodem ſemper retinæ loco depinguntur: unde fieri debet, ut eas non modo tanquam quiescentes conſideret, ſed etiam velut terminos, ad quos alia objecta viſibilia referat, & moveanturne, an ſtent, examinet: quoniam itaque progrediente navi tota, quidquid extra eam immobile & fixum eſt, omni momento ſitum reſpectu oculi illius hominis mutare debet, imagines harum rerum in oculi fundo diverſas ſucceſſive partes occupant, atque ideo hiſce etiam motus omnis, qui reipſa in navi eſt, adſcribetur. Et ſane nunquam ab errore hoc ſeſe expediet,

pediet, si judicium ex sensu ferre pergat, nec ratiociniis Geometricis animum flectat in oppositum.

224. Verum observator noster de duplici telluris motu persuasus, altero quo anni tempore ellipsin circa solem percurrit, altero, quo intra viginti quatuor horas circa axem suum vertitur, facile advertet, idem sibi in terra constituto accidere, quod homini, de quo diximus, in navi posito: & quoniam ingens rerum in horizonte sensibili collocatarum est numerus, quæ una cum observatoris oculo telluris motum participant, hæc illusio majorem multo vim habere debet.

225. Quæ cum ita sint, triplicis causæ, quæ motus cæleſtium corporum e superficie telluris spectanti illudit, effectus observator noster inter se distinguere debet: & primo quidem, quod ipse immotus videatur, cum tamen dietim circa tellurem vertatur. Deinde quod etiam quiescere appareat, quamvis ingentem orbitam circa solem intra annum percurrat. Tandem, quod se existimet in centro eorum circulorum constitutum, quos sydera singulis diebus circa tellurem describere videntur, cum illud non nisi ad centrum telluris sit referendum.

Caput I.

De illusionibus opticis a revolutione diurna telluris circa axem suum pendentibus.

Articulus I.

De revolutione diurna planetarum in genere, deque ejus causa.

226. Theorema I. *Si in spatiis liberis sphæra perfecte rotunda, & homogenea, simul recipiat unum vel plures impulsus juxta ejusdem sui circuli maximi planum & directionibus ad superficiem suam obliquis, ea acquiret duplicem motum, alterum æquabilem rotationis circa illius circuli maximi axem eundem semper situm conservantem; alterum translationis, itidem æquabilem, & in plano ejusdem circuli maximi.*

Demonstratio. Sit (fig. 40) globi exacte rotundi planum circuli maximi EBN, quod *planum æquatoris sphæræ vocabimus.* Exponat AB directionem, & quantitatem impulsus juxta hoc planum: evidens est, quod si AB congrueret cum aliquo axe hujus globi, adeoque perpendicularis esset ad superficiem, globus eadem directione æquabiliter moveretur; sed quia AB ad superficiem obliqua est, ea resolvi de-

debet (71) in duas alias, alteram nempe ad ſuperficiem normalem, alteram parallelam, aut potius in tangentem, ita, ut BO, BH ſint latera parallelogrammi HO, cujus diagonalis BI = AB. Illud etiam per ſe patet, quod BO exprimat eam partem impulſus AB, qua globus in plano æquatoris directione BL progreditur (68); & quod BH repræſentet alteram partem, quæ puncto ſuperficiei B imprimit niſum a centro C per tangentem BH recedendi, quæ conſequenter inſtar vis projectilis habenda eſt, punctum B verſus H impellentis: ſed quia partes omnes globi cohærent, & ſeparationi reſiſtunt, punctum B tantundem verſus centrum C retrahitur, quantum per vim BH ab eodem recedere nititur; atque ideo in circulum circa centrum C motu æquabili movebitur, aut quod idem, circa axem per C tranſeuntem. Igitur ex impulſu AB globus æquabiliter circa axem ad planum æquatoris perpendicularem rotatur, & ſimul in eodem plano motu itidem æquabili progreditur.

II. Quod ſi globo ita affecto novus addatur impulſus DE juxta idem æquatoris planum, eodem modo is debebit in duas partes reſolvi, alteram EP, globum directione EK, & celeritate EP æquabiliter moventem; alteram EF, quæ eum rurſus æquabiliter circa axem ejusdem æquatoris vertere conatur. Fiat jam CK = EP, & CL = BO, globus hac duplici vi impulſus movebitur æquabiliter per diagonalem CM (74) in plano æquatoris ſitam; & ſimul circa axem æquatoris vi EF + BH, utraque ſcilicet verſus eandem plagam conſpirante, ſitumque eundem reſpectu ſuperficiei globi obtinente.

227. Corollarium. *Motus rotationis eo majorem habet velocitatem reſpectu motus translationis, quo impulſus directio ad ſuperficiem magis obliqua eſt.*

228. THEOREMA II. *Diverſæ vis centralis actiones in globum motu uniformi translationis & rotationis præditum, non afficiunt motum rotationis, ſed ſolummodo motum translationis, juxta qualecunque circuli maximi planum eæ fiant.*

Demonſtratio. Supponatur (fig. 40) globus PIQK, ut theoremate præcedente expoſitum eſt, circa axem ſuum PQ rotari, interea vi centrali directione CS in eundem agente, ita, ut CS per centrum tranſeat, ideoque ad globi ſuperficiem ſit perpendicularis. Manifeſtum eſt, actionem vis centralis non debere in duas alias reſolvi, quarum una ſit tangens; ſed effectum totum ejus eſſe, ut utrumque hemiſphærium IQK, KPI, verſus S admoveat, cum in utrumque æqualiter vis iſthæc agat. Quare id ſolum præſtare poteſt, ut motum translationis vel acceleret, vel retardet, prout ad ejus velocitatem diverſam habuerit rationem: item ut ſingulis momentis ejus directionem mutet, & ut globus curvam deſcribat,

motu

motu rotationis ſemper manente æquabili, juxta idem planum, circa eundem axem ſitum ſuum perpetuo conſervantem.

229. Corollarium. *Inæqualitates motus annui planetarum nihil officiunt motui diurno æquabili*, quoniam eæ a vi centrali proveniunt (163).

ARTICULUS II.

De phænomenis generalibus a motu diurno Telluris pendentibus.

230. Quia terra ſingulis diebus circa axem ſuum volvitur, ſingula ejus ſuperficiei puncta toti ſucceſſive cælo obvertuntur, atque circulos deſcribunt, quorum plana ad axem perpendicularia, & centra omnia in eodem axe exiſtunt. Sunt itaque hi circuli omnes inter ſe paralleli, quemadmodum elementa ſphæræ concipiuntur (Elem. 661). Hinc vero ſequitur I: *Omnia ſydera debere videri ſingulis diebus circa axem telluris in circulis parallelis moveri, velut ſi forent in ſuperficie ſphæræ telluri concentricæ.*

231. Sola duo extima axis, circa quem terra volvitur, puncta locum non mutant, reliqua omnia circulos percurrunt, eo quidem majores, quo a duobus illis punctis fixis, ſive *polis*, magis diſtant, ita ut maximus ſit, qui inter eadem eſt medius, qui etiam *æquator* appellatur, eſtque circulus maximus ſphæræ terreſtris; ceteri vero paralleli, æquali a medio utrinque intervallo accepti, inter ſe ſint æquales. Porro radii horum circulorum ſunt ſinus arcuum, qui diſtantiam eorum a polo viciniore metiuntur; aut vero coſinus arcuum, diſtantiam ab æquatore metientium.

Et quoniam tota terræ ſuperficies eodem tempore, id eſt intra diem, ſemel circumagitur, diverſorum punctorum velocitates (51) ſunt inter ſe, ut ſpatia, ſive ut circulorum, quos percurrunt, peripheriæ, ſeu etiam ut eorum radii.

232. Sequitur II: *Duo debere eſſe in cælo puncta* (fig. 41) P & Q, *quæ fixa appareant, in quibus ſi qua ſtella exiſteret, ea omni motu apparente careret. Sunt autem hæc puncta, productione axis* p q *telluris* p e q z *determinata, poli circuli maximi ſphæræ cæleſtis* E Z Z, *qui fit plano æquatoris terræ* e z z *producto. Et ſydera omnia videri debent circa hos polos, aut potius circa axem* P Q, *diverſos circulos deſcribere velocitatibus iisdem proportionalibus.*

233. Ut methodus in expoſitione reliquorum phænomenorum ſervetur, dicemus polum P *Arcticum*, *Borealem*, vel *Septentrionalem*, qui plagæ boreali reſpectu eorum, qui Europam incolunt, obvertitur, ac prope conſtellationem urſæ minoris exiſtit; polum vero Q *Antarcticum*, *Auſtralem*, ſeu *Meridionalem*, qui priori directe opponitur, & Europæis verſus meridiem jacet.

234. Circulus ſphæræ cæleſtis, quem intra viginti quatuor horas ſtella quævis deſcribere videtur, *parallelus* illius ſtellæ vocatur; *declinatio* vero ſyderis, ſive paralleli illius, eſt arcus circuli maximi diſtantiam ſyderis vel paralleli, ab æquatore menſurans. Si ſtella ex parte poli borealis P fuerit, ejus declinatio dicetur *Borealis*; ſi vero ex parte poli Auſtralis Q, *Auſtralis*.

235. Si e centro telluris C per quodvis punctum in ſuperficie *m* ducatur recta C*m*, donec occurrat ſuperficiei ſphæræ cæleſtis in M, punctum M, dum terra motu diurno circumvolvitur, deſcribet parallelum L M M L, parallelo terreſtri *l m m l* a puncto *m* deſcripto reſpondentem: & ſi porro M C producatur in partem oppoſitam uſque in T, punctum T alterum parallelum in cælo T T V V, priori L M M L æqualem, & ejusdem declinationis, deſcribet, cui in terra reſpondet parallelus *t t u u*.

236. Inferes autem hinc *primo*: parallelum in ſphæra cæleſti cum correſpondente terreſtri L M M L & *l m m l* eſſe parallelos inter ſe, & elementa ſimilia coni eundem cum terra axem, & verticem in centro C habentis. *Adeoque parallelus ſphæræ cæleſtis nequit eſſe in eodem plano cum parallelo terreſtri correſpondente; ſed ſolus æquator cæleſtis* E Z Z *cum terreſtri* e z z *in eodem ſunt plano*, quia utriuſque planum fit ejusdem radii C Z, ad axem P Q normalis, rotatione.

237. Inferes *ſecundo*: Si ſtella aliqua motu diurno per Zenith obſervatoris tranſit, id indicio eſſe, parallelum ſtellæ correſpondere parallelo obſervatoris. Unde ſi menſura arcus M Z, quo ſtella illa M ab æquatore cæleſti diſtat, accipiatur, habetur etiam arcus *m z*, ſive diſtantia obſervatoris ab æquatore terreſtri. Et hinc *arcus qui diſtantiam obſervatoris ab æquatore terreſtri metitur, eſt æqualis declinationi ſtellæ per ejus Zenith tranſeuntis*; ita quidem, ut ſi ſtellæ ſint fixæ, & obſervator locum mutet, ex differentia declinationis ſtellarum per ſuum Zenith in diverſis locis tranſeuntium ſcire poſſit, quot gradibus ad æquatorem acceſſerit, vel receſſerit.

238. Inferes denique, *punctum ſphæræ cæleſtis, in quo eſt Zenith alicujus loci in tellure, eundem locum repræſentare, ita ut per Zenith quivis locus telluris deſignari poſſit*. Etenim parallelus cæleſtis per hoc Zenith tranſiens determinat parallelum terreſtrem loci; & declinatio paralleli cæleſtis menſurat diſtantiam loci ab æquatore telluris: circulus denique maximus ex hoc Zenith tanquam polo in ſphæra cæleſti deſcriptus, horizontem loci deſignat.

Atque hinc, quando per decurſum peculiaria alicui loco telluris phænomena explicanda erunt, eum locum ſæpe non aliter, quam per ſuum Zenith deſignabimus.

ARTI-

ARTICULUS III.

De motu apparente ſolis e duplici motu vero telluris proveniente.

239. Quoniam ſol centrum eſt motus annui aſtrorum, opportunum duximus, antequam longius progrediamur, ut quinam ejus motus apparentes ſint futuri, examinemus. Dum terra motu vertiginis intra diem circa axem ſuum, & intra annum circa ſolem revolvitur, in ſole, qui reipſa immobilis manet, duplex apparere debet motus, alter ſcilicet diurnus, & communis omnibus aſtris, circa axem æquatoris terræ, alter annuus circa terram in plano orbitæ telluris; hinc etiam ad terram propius accedere, & ab eadem rurſus recedere videbitur, prout terra ipſa motu vero ei vicinior vel remotior facta fuerit.

240. Ut motus hic annuus apparens rite concipiatur, e centro ſolis S (fig. 37) radio in infinitum producto intelligatur in plano orbitæ telluris deſcriptus circulus A M P N, & in duodecim partes æquales, quæ totidem ſigna zodiaci repræſentent, diviſus: ſit *amp n* orbita telluris elliptica, cujus alter focus eſt S. Quoniam radii circuli ſunt per hypotheſin infiniti, diametri orbitæ terræ evaneſcunt, & omnia ejus puncta pro centro circuli A M P N haberi poſſunt.

His poſitis ſi e terra in aphelio *a* conſtituta ducatur recta *a* S A, ſol in oppoſito puncto cæli A apparere debebit, ſex ſignis diſtans. Poſtea terra in *m* translata, ſol in M videbitur, eoque intervallo temporis arcum A M percurriſſe. Eodem modo quando terra ad ſuum perihelium *p* pervenerit, ſol in P, ſex ſignorum diſtantia, erit, & ſic deinceps. Unde conſtat, videri ſolem arcus A M, M P, P N, N A percurrere eo tempore, quo revera tellus in ſua orbita arcus *am*, *mp*, *pn*, *na* reſpective deſcribit. Et quoniam tellus hos arcus diverſa velocitate, & mutata ſingulis momentis diſtantia a ſole percurrit; etiam ſol in arcubus circuli A M, M P, P N, N A eadem inæquali celeritate moveri, & jam majore, jam minore diametro videbitur, prout nempe terra vicinior, vel remotior erit, id, quod efficiet, ut ſol putetur ad terram accedere, aut ab eadem recedere.

241. Ex his autem generatim ſequitur *primo*, *quod quando ſolum agitur de diverſis punctis ſuperficiei ſphæræ cæleſtis, in quibus ſol videtur, ſupponi is poſſit in circulo infinite magno* P M A N (quem in ſequentibus *Eclipticam* appellabimus) *reipſa moveri, oculo obſervatoris in centro conſtituto. Itaque ellipſis, quam terra deſcribit, tum eum ſolum uſum habebit, ut inveniatur ratio diverſarum diſtantiarum terræ a ſole pro tempore dato, ac vera directio radii viſualis in centro ſolis terminati.*

Exempli cauſa quando terra ex *a* in *b* pervenit, ſol arcum eclipticæ A B percurriſſe videbitur: & anomalia vera terræ *a* S *b* determinabit anomaliam veram ſolis A S B in ecliptica; longitudo vero rectæ S *b* repræſentabit diſtantiam veram terræ a ſole. Idem intelligendum eſt de planetis & cometis, dum ad ſuperficiem cavam ſphæræ cæleſtis referuntur.

242. Sequitur ſecundo: *Dato* (ſive ex obſervatione, ſive ex calculo) *vero loco terræ in ſua orbita, dari etiam additis vel ſubtractis ſex ſignis verum locum ſolis in ecliptica*, ita, ut theoria motus ſolis e terra viſi ſit eadem cum theoria motus terræ e ſole ſpectatæ. Et quoniam nulla alia cauſa eſt, ob quam ſoli aliquis alter motus annuus apparens attribui poſſit, præter motum annuum telluris; deinceps non aliter de motu ſolis in ecliptica loquemur, quam ſi verus eſſet.

243. Sequitur tertio: *Reſpectu obſervatoris in tellure conſtituti planum eclipticæ eſſe maxime opportunum, ut ad illud motus planetarum, & cometarum in diverſis orbitis referantur*; quemadmodum etiam planum æquatoris commodiſſimum eſt, ad quod poſitio parallelorum, quos ſtellæ ob motum rotationis diurnæ telluris deſcribere videntur, exigatur.

244. Ut motus annuus terræ cum diurno recte concilietur, obſervandum eſt, quod ſi planum eclipticæ idem eſſet cum plano æquatoris, vel ſi axi stelluris ad planum eclipticæ foret perpendicularis; ſol quotidie eundem ob motum vertiginis terræ circulum deſcribere videretur, isque ipſe foret æquator, nec ulla ſolis haberetur declinatio: tunc enim percurrendo motu annuo eclipticam, ſucceſſive per omnes ſtellas in æquatore ſitas tranſiret, & hinc motu diurno in eodem cum illis circulo revolveretur. Sed quoniam ſingulis diebus alios parallelos deſcribere videtur, evidens eſt, planum eclipticæ aliud eſſe a plano æquatoris, atque ad hoc ſub aliquo angulo inclinari.

245. Quæ cum ſint, ſol motu annuo tempore revolutionis unius diurnæ uno fere gradu in circulo aliquo maximo, velut N B T L N (fig. 42) qui eclipticam repræſentat, & æquatorem E B Z L E in duas partes æquales ſecat (Trig. 7), progredi debet. Supponamus *Primo*, ſolem die quopiam eſſe in B, communi eclipticæ & æquatoris interſectione; deſcribet igitur tunc motu diurno æquatorem, atque omni declinatione carebit. Altero die uno gradu ex B verſus A progreſſus motu diurno percurret parallelum ab æquatore paululum diſtantem; & ſic prout magis verſus A ſemper progredietur, ita longius ab æquatore recedet, declinatione boreali creſcente, & in parallelis minoribus ſingulis diebus movebitur; v. g. cum in A fuerit, eo die parallelum A I V A deſcribet. Supponatur *Secundo* ſol in T, 90 gradibus, ſive tribus ſignis ab interſectione æquatoris

toris B, ubi ante tres ſcilicet menſes fuerat: erit tunc in puncto eclipticæ ab æquatore maxime diſtante (Trig. 12), cum declinatione boreali omnium, quas habere poteſt, maxima, & viciniſſimus polo boreali; denique motu diurno circulum parallelum omnium minimum O T percurret. *Tertio*, ubi per tres inſequentes menſes ex T in L deſcendit, continuo æquatori fit vicinior, ejus declinatio borealis decreſcit, paralleli, quos dietim deſcribit, fiunt majores, & quando ad L, alteram nempe eclipticæ cum æquatore interſectionem, pervenerit, nullam habebit declinationem, & eo die æquatorem iterum percurret. *Quarto.* Sol ex L verſus N digreſſus in parte cæli auſtrali videbitur, aucta perpetuo declinatione ejus auſtrali, & parallelis diurnis decreſcentibus, donec in N, tribus ſignis ab L, fuerit, ubi maximam declinationem auſtralem attingit, minimumque omnium parallelum N D deſcribit. *Quinto.* Inde denique continuato motu ad B rurſus accedet, imminuta ſemper declinatione auſtrali, atque anno circumacto, iterum in æquatore ſine declinatione erit, novam revolutionem iisdem comitantibus phænomenis inchoaturus.

246. Quia ſol continuo in ecliptica progreditur, liquet porro, *parallelos, quos ſingulis diebus deſcribere videtur, non eſſe veros circulos, ſed ſpirales quasdam*, quas ductus fili globo pluries circumplicati efformaret. Peracta enim revolutione diurna integra, ſol non in eodem puncto eſt, unde parallelum illius diei inchoavit, ſed aliquantum ſupra, aut infra illud, prout arcus eclipticæ, quem illo die motu annuo confecit, diverſum reſpectu æquatoris ſitum habet.

247. Minimi duo paralleli, quos ſol percurrit, O T, N D, *tropici* dicuntur, quod ſcilicet termini ſint maximæ ab æquatore elongationis, indeque iterum ad æquatorem *revertatur*. Ex his autem polo boreali vicinus appellatur *tropicus cancri*, & qui in hemiſphærio auſtrali eſt, *tropicus capricorni*, quia cum ſol in iis verſatur, vel eſt in tertio eclipticæ ſigno, quod *cancer* vocatur, vel in nono, ſeu in *capricorno*.

248. Interſectiones æquatoris & eclipticæ B & L, *puncta æquinoctialia* ob eam rationem, quam inferius adferemus (274), dicuntur; & quidem punctum B, per quod ſol a tropico capricorni ad tropicum cancri tranſit, eſt *punctum æquinoctii verni*, aut *punctum primum arietis*; alterum vero L, per quod ſol a cancro ad capricornum venit, eſt *punctum æquinoctii autumnalis*, ſive *punctum primum libræ*.

249. Puncta T, N, 90 gradibus, ſeu tribus ſignis a punctis æquinoctialibus diſtantia, ſunt *puncta ſolſtitialia*, quod ſol, quando circa ea verſatur, veluti *ſtationarius* relate ad planum æquatoris videatur. Exhibeat enim (fig. 43) B Z T medietatem æquatoris; B L T

medietatem eclipticæ; B & T puncta æquinoctialia: L punctum solstitiale: patet ex ipsius figuræ inspectione, arcum *l* L λ, qui aliquot gradus continet, quos sol tum in ascensu versus L, tum in descensu ab eodem, percurrit, esse ad sensum parallelum cum correspondente arcu æquatoris z Z ζ: itaque toto tempore, quo arcum *l* L λ describit, sol non videtur mutare distantiam ab æquatore, & per aliquot dies eandem habere declinationem.

250. Punctum T (fig. 42) quod propius est ad polum borealem, dicitur *punctum solstitii æstivi;* N vero *punctum solstitii hyemalis*, quod sol ea puncta attingat, quando Europæis æstas, ac hyems est.

251. Ut diversa astrorum positio commodius ad planum eclipticæ & æquatoris referri possit, concipiantur adhuc duo circuli maximi; alter B S L R, per polos eclipticæ R & S, & puncta æquinoctialia B & L transiens, quem contra communem Astronomorum morem *colurum æquinoctiorum* appellabo; alter R P Z Q E, qui rursus per polos eclipticæ R & S, & simul per polos æquatoris P & Q, transeat. Hic circulus, *colurus solstitiorum* dictus, est ad æquatorem & eclipticam (Trig. 16) normalis, simulque per puncta solstitialia T & N transit.

252. Ex diversis horum circulorum usibus illum hic referre est visum, qui coluro solstitiorum proprius est, nempe quod ob perpendicularem ad æquatorem & omnes parallelos situm, eorum distantiis, seu declinationi metiendæ serviat. Sic arcus I Z, vel V E est mensura declinationis paralleli V A I, adeoque etiam solis in puncto eclipticæ A versantis. Similiter arcus T Z vel O E, & Z D vel E N, aut denique R P, Q S sunt mensura declinationis maximæ solis, sive anguli a planis æquatoris & eclipticæ comprehensi, qui *angulus obliquitatis eclipticæ* appellatur.

ARTICULUS IV.

De Phænomenis Particularibus, quorum causa est motus diurnus Telluris.

253. Ponamus I, observatorem esse in alterutro polo telluris constitutum, velut in polo arctico: linea per ejus Zenith transiens coincidet cum axe æquatoris, & ipse polus P cum ejus Zenith, horizon cum æquatore E Z z (fig. 44). Hinc omnes stellæ inter hunc polum & æquatorem, sive quarum declinatio est borealis, videbuntur circa C P moveri, ad horizontem parallele; quæ vero in æquatore sunt, perpetuo horizontem radent; denique quæ declinationem australem habent, manebunt semper invisibiles.

254.

254. Unde generatim, *ſi obſervator in aliquo polo conſtitutus ſit, non niſi medietatem ſtellarum videre poteſt; nulla ſtella motu diurno oritur vel occidit, nulla aſcendit, vel deſcendit reſpectu horizontis, nec movetur oblique ad eundem, ſed ſemper parallele; cujuſque altitudo eſt ſemper eadem cum declinatione.*

Atque ob hunc paralleliſmum motuum reſpectu horizontis, quando obſervator in alterutro polo conſtitutus eſt, *ſphæra parallela* dicitur.

255. Verum ſol, & alia ſydera, quæ in orbita propria per diverſas ſtellas fixas tranſeunte moventur, plano æquatoris eam in duas partes, alteram borealem, alteram auſtralem, ſecante, neceſſario, dum a puncto interſectionis ſuæ orbitæ cum æquatore ſemper magis recedunt, etiam parallelos diurnos ſingulis momentis mutant, ita ut nequeant ſupra horizontem obſervatoris apparere, quamdiu in parte auſtrali orbitæ verſantur, neque etiam poſſint non apparere toto eo tempore, quo partem borealem percurrunt: exempli cauſa ſol, qui eclipticam intra annum percurrit, ſex menſibus integris ſupra horizontem videri debet; ſex aliis ſub eodem latere. Supponamus enim eum imprimis in aliquo puncto æquinoctiali conſtitutum; videbitur motu diurno horizontem radere: poſtea altius ſemper aſcendet, & motu diurno circulos ad ſenſum horizonti parallelos deſcribet, prout ejus declinatio borealis in ecliptica progredientis augetur. Spatio trium menſium ad tropicum ♋ & maximam ſuam altitudinem ſupra horizontem, quæ obliquitati eclipticæ æqualis eſt, attinget: inde rurſus tribus menſibus verſus horizontem ad alterum punctum æquinoctiale deſcendet, quod ubi attigerit, horizontem verret: poſtea infra illum deſcendet, nec amplius ſpatio ſemeſtri, quo partem eclipticæ borealem conficit, videbitur. Itaque *ſub polis unica tantum dies, & unica tantum nox eſt anni ſpatio, ſed quarum utraque ſex menſibus durat.*

Idem de planetis dicendum eſt, quorum orbitæ ad planum eclipticæ, quam terra percurrit, aliquantum inclinatæ, in duas partes æquales ab æquatore ſecantur; ita Saturnus per quindecim annos ſemper ſupra horizontem apparere debet, Jupiter per ſex &c.

256. II. Ponamus obſervatorem in æquatore telluris conſtitutum. Linea C Z per ejus Zenith ducta erit in plano æquatoris cæleſtis, atque ideo ad ejus axem P Q perpendicularis, qui in plano horizontali obſervatoris jacebit. Verum hoc ipſum planum horizontale debebit per centra A, B, C, F, G, H &c. omnium parallelorum, quos aſtra motu diurno percurrunt, tranſire, conſequenter eos normaliter in partes æquales ſecare, quarum altera verſus Z, ſemper eſt ſupra horizontem; altera medietas verſus E infra eundem.

257. Ita-

257. Itaque universim *sub æquatore omnia sydera singulis diebus sex horis ascendunt, totidemque descendunt, ac post occasum duodecim horis sub horizonte latent: ipso vero ortus-, vel occasus momento horizontem perpendiculariter secant;* & propter hunc situm observator in æquatore constitutus dicitur *sphæram rectam* habere.

258. Quod ad planetas & alia sydera motu proprio in suis orbitis lata attinet, ea quoque sex fere horis ascendere, sex aliis descendere debent, neque eorum motus ab illo, qui in stellis fixis apparet, alia re differt, nisi quod fixæ semper eosdem, hæc autem singulis diebus alios parallelos describant, majores, minoresve, prout majorem vel minorem declinationem habent, aut etiam prout in suis orbitis ab intersectione cum æquatore plus minusve remota sunt.

259. Hinc *sub æquatore toto anni tempore omnes dies, & omnes noctes sunt duodecim horarum.*

260. III. Ponamus observatorem ab æquatore versus alterutrum polum progredi, v. g. versus arcticum. Videbitur linea per ejus Zenith transiens semper magis ab æquatoris plano versus ejusdem axem, sive partem borealem recedere, ideoque planum æquatoris magis semper versus partem australem telluris inclinari. Polus borealis successive supra horizontem attolletur, australis vero infra eundem deprimetur. v. g. si postquam observator 30 gradibus ab æquatore versus boream progressus est, subsistat, linea per Zenith ducta erit C *f* (fig. 44): circulus maximus *h* F *r*, ad cujus planum C *f* perpendicularis, ejus horizon; planum æquatoris E C Z a Zenith 30 gradibus distabit, & ad horizontem sub angulo 60 graduum inclinabitur, quem arcus Z C *r* metitur: polus P supra horizontem elevationem 30 graduum, cujus mensura est angulus *h* C P, habebit; & polus Q totidem gradibus erit infra horizontem depressus.

261. Ex his infertur I. *Quod in quocunque telluris loco observator constitutus sit, semper distantia æquatoris a Zenith æqualis sit elevationi poli supra horizontem, & elevatio æquatoris semper æquetur distantiæ Zenith a polo.*

262. II. Quod paralleli inter polum & æquatorem sub eodem angulo ad horizontem inclinentur, qui ex parte polo supra horizontem existenti opposita æquatur complemento elevationis poli. Atque inde qui inter polum & æquatorem situs est, dicitur habere *sphæram obliquam.*

263. III. Quod *omnia sydera motu* diurno parallelos describentia *debeant videri oblique supra horizontem ascendere, postea iterum oblique versus eundem descendere.*

264. IV.

264. IV. Quod *omnes ſtellæ*, quarum paralleli viciniores ſunt polo, quam polus horizonti, hoc eſt, *quarum complementum declinationis minus eſt elevatione poli cognominis, perpetuo ſupra horizontem videantur, nec occumbere vel oriri poſſint.* Exempli cauſa ſtella, quæ deſcribit parallelum I K, nequit deſcendere infra horizontem: dum enim circa polum volvitur, punctum I, infimum illius paralleli, nondum horizontem *h* F *r* attingit. At vero *nulla ſtella in aliquo parallelo, velut* X Y, mota, *cujus complementum declinationis minus eſt altitudine poli diverſi nominis*, hoc eſt, minus depreſſione poli Q, *ſupra horizontem videri poteſt*, quia punctum Y illius paralleli ſupremum, nondum horizontem *r* F *h* attingit.

265. V. Quod omnes paralleli, qui in ſphæra obliqua ab horizonte ſecari poſſunt, ſecentur in duas partes inæquales, (excepto æquatore, utpote circulo maximo): & quoniam motus diurnus aſtrorum eſt æquabilis, tempus, quo ſingulæ ſtellæ ab ortu ſuo uſque ad occaſum ſupra horizontem manent, determinatur a numero graduum portionis paralleli ſupra horizontem extantis: (hinc etiam ea pars paralleli vocatur *arcus diurnus* ſyderis; altera, quæ infra horizontem intercipitur, *arcus nocturnus*). Arcus diurni *i* M *l*, *m* O *n*, eo plures gradus continent, quo paralleli polo P conſpicuo ſunt propiores; & ex oppoſito arcus diurni *s* S *t*, *u* V *x* eo pauciores habent gradus, quo a polo infra horizontem depreſſo minus ſunt remoti: ita quidem, ut ſolus æquator in partes æquales *p* Z *q*, *p* E *q* dividatur, quippe qui ſolus ex omnibus parallelis eſt circulus maximus.

266. VI. Quod arcus diurnus *i* M *l* alicujus paralleli ſemper ſit æqualis arcui nocturno *u* T *x* alterius, qui eandem declinationem verſus polum oppoſitum habet, cum bini quivis ejusmodi paralleli L *m* M *i* L, T *x* V *u* T inter ſe æquentur (235), & reſpectu axis P Q eundem ſitum habeant, horizonte per centrum ſphæræ transeunte, ac eam in duo hemiſphæria æqualia & ſimilia, inferius ſcilicet, & ſuperius dividente.

267. VII. Hinc *in ſphæra obliqua omnia ſydera, quæ ſunt in æquatore, duodecim horis ſunt ſupra horizontem; duodecim ſub eodem: reliqua vero eo diutius ultra duodecim horas ſunt viſibilia ſupra horizontem, quo eorum declinatio verſus polum elevatum ſupra horizontem major eſt; aut vero tanto minore duodecim horis tempore verſantur ſupra horizontem, quo majorem verſus polum depreſſum habent declinationem. Et quantum mora ſupra horizontem alicujus ſtellæ duodecim horas excedit, tantumdem, alterius eandem verſus polum oppoſitum declinationem habentis tempus apparitionis ab iis deficit.*

268. VIII. Quod ad maximam altitudinem attinet, ad quam aſtra aſcendere poſſunt, in hypotheſi, qua obſervatorem in parallelo 30 graduum collocavimus, manifeſtum eſt, eas tantummodo

ſtellas poſſe per Zenith *f* tranſire, quarum declinatio borealis eſt 30 graduum; eas autem, quarum declinatio 30° major verſus boream, debere eodem exceſſu magis verſus polum a Zenith diſtare, quando culminant; & ex oppoſito, quarum declinatio borealis 30° minor, a Zenith verſus æquatorem eadem quantitate in culminatione fore remotas. Porro quæ in ipſo æquatore ſunt, in maxima altitudine 30 gradibus a Zenith diſtant; denique quæ in hemiſphærio auſtrali ſunt, tanto majorem a Zenith verſus auſtrum habent diſtantiam, quanto major eſt earum declinatio; ita ut illæ, quarum declinatio auſtralis eſt 60 graduum, horizontem tantum radant, quin ſupra eum aſcendere poſſint. Ex dictis autem conſequitur, *altitudinem maximam, ad quam ſtella aſcendere poteſt* (quæ *altitudo meridiana* dicitur, cum ſit in medio arcus diurni) *dari, ſi detur altitudo poli reſpectu loci, in quo eſt obſervator, & declinatio ſtellæ.*

269. IX. Si concipiatur circulus maximus PZQEP per polos P & Q tranſiens, & ſimul per Zenith *f*, ejus planum ſecat plana æquatoris & horizontis perpendiculariter (Trig. 16), atque axis æquatoris PQ, omniumque parallelorum centra, debent in eodem eſſe, & hinc omnes paralleli per illud ad angulos rectos, & biſariam dividuntur. Unde arcus hujus circuli inter Zenith, & quemvis parallelum interceptus, menſurat veram diſtantiam paralleli a Zenith, ſive diſtantiam illius puncti paralleli, quod ad Zenith maxime accedit, & in quo ſtella eum parallelum deſcribens maximam habet altitudinem ſupra horizontem. Igitur altitudo meridiana ſtellæ ſemper menſuranda eſt per arcum hujus circuli inter horizontem & ſtellam, quando ad planum illius circuli motu diurno pervenit, interceptum. Atque ob hanc cauſam hic circulus *Meridianus* vocatur.

270. Eſt itaque *Meridianus circulus maximus ſphæræ cæleſtis, per polos æquatoris, & Zenith loci alicujus in tellure ductus, qui arcus diurnos omnium parallelorum in partes æquales ſecat, & ad cujus planum ſtella motu rotationis terræ pervenit eo momento, quod inter ejus ortum & occaſum medium eſt; in quo denique maximam quam habere poteſt, altitudinem ſupra horizontem loci illius attingit.*

271. Et quia terra eſt globus ſphæræ cæleſti concentricus, interſectio plani meridiani cæleſtis cum tellure efficit meridianum terreſtrem correſpondentem.

272. Hinc autem rurſus deducitur, quod quodlibet punctum ſuperficiei telluris, cum habeat ſuum proprium Zenith, debeat etiam habere ſuum proprium meridianum, tam in ſuperficie ſphæræ cæleſtis, quam in ipſa tellure. Et quia omnia puncta peripheriæ meridiani in ſphæra cæleſti ſunt reipſa totidem Zenith reſpectu omnium punctorum, quibus meridianus terreſtris correſpondens conſtat, ſequi-

ſequitur *omnia puncta ſuperficiei terræ in ejusdem circuli maximi per polos æquatoris tranſeuntis plano ſita, eſſe ſub eodem meridiano tam cæleſti, quam terreſtri.*

273. X. Quoniam meridianus quemvis parallelum biſecat, & per ejus punctum maxime ſupra horizontem elevatum tranſit, ſequitur, quod etiam debeat tranſire per punctum paralleli infra horizontem maxime depreſſum. Et hinc ſtellæ, quæ ob viciniam poli ſupra horizontem elevati nunquam occidunt, quemadmodum ad maximam altitudinem pertingunt, dum inter polum P, & Zenith *f* ad planum meridiani, velut ad K appellunt; ita minimam habent altitudinem, quando poſt 12 horas ad idem planum in I inter horizontem & polum redeunt.

274. Quod ad planetas ſpectat, eorum phænomena a ſitu diverſorum parallelorum pendent, ad quos in propria orbita progredientes ſucceſſive perveniunt. Sic in quovis telluris loco, dum ſol in interſectione æquatoris, & eclipticæ verſatur, duodecim horis ſupra horizontem, & totidem infra eundem eſt, adeoque dies nocti æquatur, unde etiam ea interſectionum puncta nomen *æquinoctialium* traxerunt. At dum ſol extra hæc puncta eſt, dies erit nocte longior, vel brevior, prout arcus diurnus tum major vel minor portio paralleli fuerit.

In exemplo, ſi obſervator in hemiſphærio boreali ſit collocatus, & ſol in tropico ♑, ubi (245) maximam habet declinationem auſtralem, arcus diurnus eſt omnium per totum annum minimus, & hinc dies tunc maxime a 12 horis deficit. Verum ut magis ſemper ſol ad æquatorem accedit, ita arcus diurnus creſcit; & cum eo elapſis tribus menſibus pervenerit, dies exacte 12 horarum erit. Inde per tres conſequentes menſes dies creſcere pergit, donec ſol tropicum ♋, & maximam ſimul declinationem borealem attingat; tum vero arcus diurnus omnium eſt maximus, & dies tantum excedit duodecim horas, quantum in tropico ♑ verſante ſole defecerat. Sed ut denuo ſol ad æquatorem propius ſemper accedit, ita dies iisdem gradibus minuitur, donec in æquinoctio ſequente duodecim horas æquet: tandem dum ſol ad tropicum ♑ redierit, dies eandem, quam ab initio, longitudinem habebit.

275. Ex hac dierum inæqualitate, variaque altitudinis, ad quam ſol ſupra horizontem venit, ratione, quæ ſimilibus cauſis adſcribenda eſt, anni tempeſtatum diverſitas pendet. Dum enim ſol in tropico altero, qui polo infra horizontem depreſſo vicinus eſt, verſatur, parum admodum aſcendit, & exiguo tempore ſupra horizontem moratur: unde ejus radiorum vis modica ſentitur, tum quod admodum oblique incidant, tum etiam quod tam brevi tempore aerem calefacere nequeant, id, quod hyemem dicimus. Ex

oppoſito dum ſol in tropico altero eſt, maximam habet altitudinem, radios fere ad perpendiculum emittit, & longiore multo tempore ſupra horizontem manet, unde aer incaleſcit, quod æſtatem efficit. Denique ſole prope puncta æquinoctialia exiſtente hæc omnia medium quoddam obtinent, ac inde Ver, Autumnuſque habentur.

ARTICULUS V.

De ratione obſervandi, & calculandi accuratius phænomena motus diurni aſtrorum, prout is ad circulos cuivis telluris loco proprios refertur.

276. Ex omnibus, quæ articulo ſuperiore dicta ſunt, abunde liquet, *Phænomena particularia motus diurni aſtrorum a duabus rebus pendere, ſcilicet a ſitu obſervatoris reſpectu æquatoris terreſtris*, aut quod eodem recidit, *ab altitudine poli ſupra horizontem; & a declinatione ſyderum.* Ut itaque regulæ certæ ſtatuantur, per quas omnia, quæ his phænomenis ad circulos alicujus loci determinati proprios, meridianum, inquam, & horizontem, relatis peculiaria ſunt, eruantur, altitudo poli, & declinatio aſtrorum nota ſint, oportet.

277. Optima autem methodus determinandi elevationem poli ex obſervatione, quando locus aliquot gradibus ab æquatore diſtat, eſt, ſi accipiatur inſtrumento in gradus, minuta, & ſecunda accurate diviſo maxima altitudo *h* K, & poſt 12 horas minima *h* I unius e ſtellis, quæ nunquam occidunt. Nam cum talis ſtella ſemper ad eandem diſtantiam circa polum circumeat, elevatio poli in medio duarum altitudinum *h* K & *h* I conſiſtere debet.

Si obſervator æquatori ſit vicinior, altitudines ſolis meridianæ, dum in uno & altero tropico verſatur, accipiendæ ſunt. Etenim ſi hæ altitudines accurate æquales ſint, locus obſervatoris eſt in ipſo æquatore; at ſi fuerint inæquales, earum ſemidifferentia erit altitudo poli ſupra horizontem, & quidem borealis vel auſtralis, ut altitudo ſolis in tropico ♋, vel in tropico ♑ major fuerit.

278. Elevationis poli ſic invnetæ complementum P*f*, vel *r* Z eſt elevatio æquatoris (261). Declinatio vero ſyderis cujusvis facile determinatur, ſi obſervetur ejus altitudo meridiana, quod fit ope quadrantis vel ſectoris circuli exacte diviſi, cujus planum verticaliter erectum ſimul per polum tranſit: in hoc enim ſitu inſtrumentum exhibet portionem meridiani cæleſtis in ſuos gradus diviſi. Unde ſi notetur, cui gradui ſydus reſpondeat, dum ad hoc planum venit, ejus altitudo meridiana habetur, quæ cum elevatione æquatoris collata illius loci, in quo obſervatio inſtituta eſt, dat arcum meridiani inter

ter æquatorem & ſydus comprehenſum, qui declinationem ſyderis metitur.

279. Unde univerſim concluditur, *quod ſi ex his tribus duo quævis dentur, nempe elevatio poli, declinatio ſyderis, ac ejus altitudo meridiana, tertium hoc ipſo habeatur, cum ſint arcus ejusdem meridiani.*

280. Ceteræ affectiones motus diurni per calculum trigonometriæ ſphæricæ eruuntur, & poſitio ſphæræ cæleſtis pro eo tempore, pro quo calculus faciendus eſt, in aliquo ſchemate utcunque repræſentatur.

Quod ut exemplo aliquo illuſtremus, ſit HPNH (fig. 38 & 39) meridianus loci, Z ejus Zenith, P polus ſupra horizontem, HN dimidius horizon, TV dimidius æquator, erit PN elevatio poli, & ZP, ejus complementum, elevatio æquatoris. Sit ſtella quævis extra meridianum in E: ducatur per polum P & ſtellam E arcus circuli maximi PEA, qui æquatori ad angulos rectos inſiſtet (Trig. 16); arcus EA, inter æquatorem & ſtellam interceptus, æquatur declinationi, & EP diſtantiæ illius a polo. Ducatur etiam arcus circuli maximi per Zenith, & ſtellam ZEB, qui erit normalis ad horizontem HN: pars illius EB erit altitudo ſtellæ ſupra horizontem; & complementum EZ diſtantia a Zenith. Denique deſcribatur parallelus LR, quem ſtella percurrere videtur: arcus inter meridianum & ſtellam RE erit ejus diſtantia a meridiano; RC vero inter meridianum & horizontem comprehenſus, arcus ſemidiurnus. Itaque R eſt punctum meridiani, per quod ſtella tranſire debet, dum ad planum illius venit; & C punctum ortus vel occaſus in horizonte. Sed ut omnes quæſtiones complectamur, quæ de poſitione alicujus ſtellæ ex motu diurno inſtitui poſſunt, ſingulis arcubus in citato ſchemate exhibitis ſua tribuenda ſunt nomina, quod ea res magnum in praxi aſtronomica uſum habeat.

281. Quadrans circuli e Zenith ad horizontem perpendicularis, ut ZB, ZF, ZC dicitur *verticalis*, & in hoc accipienda eſt altitudo alicujus ſyderis. Ex his verticalibus ille, qui per interſectionem æquatoris & horizontis tranſit, ut ZF, appellatur *verticalis primarius*, & meridianum ad Zenith Z ad angulos rectos ſecat.

282. Arcus horizontis HB, inter meridianum & verticalem quemvis ZB interceptus, ſive angulus ad Zenith HZB a meridiano, & verticali ZB comprehenſus, eſt *azimuthum* illius verticalis, aut ſyderis in eo verticali exiſtentis.

283. *Amplitudo ſyderis* eſt arcus horizontis FC, ſive angulus FZC, inter verticalem primarium ZF, & punctum C, ubi parallelus ſyderis REL horizontem ſecat, interceptus. Dicitur autem amplitudo *ortiva*, ſeu *occidua*, prout punctum C vel ad ortum, vel ad occaſum ſyderis ſitum fuerit.

Ex

Ex conſtructione autem præcedentium ſchematum, & proprietatibus ſphæræ facile deducitur, quod ſub ſphæra obliqua

284. Primo *ſtella durante revolutione diurna omni momento ſuum azimuthum & verticalem mutet.*

285. *Secundo* quod ſydus, cujus declinatio eſt verſus polum infra horizontem depreſſum, non poſſit tranſire per verticalem primarium, nec arcum azimuthalem 90 graduum, vel majorem habere.

286. *Tertio* Quod *ſtella fixa* (quæ quotidie ad ſenſum eundem parallelum deſcribit) *non mutet amplitudinem*, ſed ſemper in eodem puncto horizontis oriatur, & occidat. *At illa ſydera, quæ in orbitis propriis motum annuum habent, perpetuo amplitudinem mutent, quæ ſingulis diebus dependet a declinatione paralleli, quem percurrunt.*

287. Quarto *quod ſtellæ, quæ in æquatore ſunt, careant amplitudine*, cum ſemper oriantur, & occidant in puncto horizontis 90 gradibus a meridiano diſtante. Hinc etiam punctum horizontis a meridiano 90 gradibus verſus ortum remotum, dicitur *punctum verum ortus*; & quod totidem gradibus a meridiano verſus occidentem diſtat, appellatur *punctum verum occaſus.*

288. Quinto *Quod duo ſydera, quæ ſunt in eodem parallelo, habeant eandem amplitudinem: ſed dum ad eandem meridiani partem verſantur, nequeunt habere idem azimuthum, nec eandem altitudinem.*

289. Sexto *Quod duo ſydera, quæ ſunt in eodem verticali, habeant idem azimuthum, ſed nequeunt habere eandem altitudinem, nec eandem declinationem, conſequenter nec eandem amplitudinem.*

290. His ita habentibus, ſi in triangulo ſphærico E Z P ex his quinque tria dentur, videlicet Z P, complementum elevationis poli; angulus Z P E, diſtantiæ ſyderis a meridiano (eſt enim (Trig. 10) ejus menſura arcus R E); latus P E, complementum declinationis ſyderis; latus Z E, complementum ejus altitudinis; angulus P Z E, complementum azimuthi ad duos rectos: ex his, inquam, ſi tria dentur, reliqua duo per calculum trigometricum facile reperientur una cum angulo Z E P qui fit ad ſydus E a verticali E Z, & circulo declinationis E P, qui angulus in pluribus calculis aſtronomicis uſui eſt.

291. Similiter in triangulo Z P C, in quo Z C eſt ſemper 90°, ſi duo dentur ex his quatuor, latus Z P, complementum elevationis poli; latus P C, complementum declinationis ſyderis parallelum R C L deſcribentis; angulus Z P C, quem menſurat arcus ſemidiurnus; angulus P Z C, complementum amplitudinis, aut vero ſumma ex amplitudine, & 90°: calculo trigonometrico ſemper reliqua duo inveniuntur (Trig. 148).

Solet

Solet autem calculus hujus ſecundi caſus inſtitui in triangulo FCG ad G rectangulo cum arcus PC per polum ductus æquatori ad G inſiſtat ad angulos rectos. Nam in hoc triangulo angulus CFG, quem horizon & æquator efficit, eſt complementum elevationis poli (261); latus GC æquatur declinationi paralleli RL; Latus FG complemento arcus ſemidiurni: eſt enim complementum arcus æquatoris TG, qui æqualis eſt (Trig. 10) arcui ſemidiurno RC; hypotenuſa denique FC eſt amplitudo ſyderis. Itaque e quatuor iſtis ſi duæ quævis partes dentur, reliquæ duæ facile reperientur.

292. Obſerva. Diſtantia ſyderis a meridiano, aut vero illius arcus ſemidiurnus, poſſunt dari vel quæri tam in tempore, quam in gradibus. Ut arcus in gradibus datus reducatur ad tempus, facienda eſt ſequens proportio: *ut* 360°. 0′. 0″ *ad gradus, minuta, ſecuncunda arcus dati; ita ſunt horæ, minuta, & ſecunda temporis, quo ſydus revolutionem integram diurnam abſolvit, ad horas, minuta, ſecunda temporis quæſiti.* Quando vero tempus in gradus convertendum eſt, dicta proportio inverti debet. Hujus rei fundamentum eſt in æquabili motu revolutionis diurnæ.

ARTICULUS VI.

De ratione determinandi poſitionem ſyderum reſpectu circulorum fixorum ſphæræ cæleſtis.

293. Quoniam ſydera revolutione diurna ſucceſſive per plana diverſorum circulorum particularium tranſeunt, qui in cavitate indefinita ſphæræ cæleſtis concipiuntur, uti ſunt horizon & meridianus, quorum ſitus conſtans non eſt, niſi reſpectu loci determinati in ſuperficie telluris; obſervationibus in his particularibus circulis factis utendum eſt, ad determinandam poſitionem eorundem ſyderum reſpectu circulorum communium cuivis ſuperficiei terreſtris puncto, hoc eſt, reſpectu æquatoris, eclipticæ, & colurorum, qui licet motu diurno ſphæræ ſimul abripiantur, nihilominus tamen certum & conſtantem ſitum conſervant in ſphæra, e quocunque telluris loco eos obſervator conſideret.

294. Ut ſitus alicujus puncti in ſuperficie quacunque determinari poſſit, neceſſario inveniri debet ejus diſtantia a duobus aliis punctis fixis, aut a duabus lineis, quarum ſitus diverſus, attamen conſtans ſit in illa ſuperficie. Licet vero angulus, quem illæ lineæ efficiunt, poſſit eſſe rectus, acutus, vel obtuſus; eſt tamen multo commodius, ſi is rectus ſit: nam cum diſtantiæ puncti a duabus

bus illis lineis ſint perpendiculares ad easdem, tum conſtructio, tum etiam calculus expeditior eſt. *Itaque, quamvis poſitio ſyderis determinari poſſit, reſpectu circulorum in ſphæra fixorum, per arcus duos, qui menſurent diſtantiam illius a duobus punctis fixis & determinatis reſpectu circulorum illorum, aut a duobus circulis fixis quibuscunque; expedit tamen adhibere diſtantias a duobus circulis fixis, qui ſibi invicem ad angulum rectum inſiſtunt.*

295. Sic ut commodius ſitus ſyderis determinetur, haberi debet vel ejus diſtantia ab ecliptica & a circulo maximo eclipticam in puncto dato ad angulum rectum ſecante; vel diſtantia ab æquatore, & a circulo maximo eidem in puncto determinato perpendiculariter inſiſtente; vel denique diſtantia a duobus circulis maximis quibuſcunque fixis, & ſe ſe invicem ſub angulo recto interſecantibus, quales ſunt coluri. Sed quia motus telluris alter fit in ecliptica, alter juxta planum æquatoris, patet, priores duas methodos ceteris omnibus præferendas eſſe.

296. Sit itaque P B Q D P (fig. 45) colurus ſolſtitiorum; P, Q poli æquatoris; B C D dimidius æquator; E, T poli eclipticæ; G C I dimidia ecliptica, ejusque interſectio C cum æquatore punctum æquinoctiale ♈; G punctum ſolſtitiale ♋, & I punctum ſolſtitiale ♑; E C T ſit medietas coluri æquinoctiorum; & quoniam eſt dimidium circuli maximi, ac in puncto dato C eclipticæ ad angulos rectos inſiſtit, ſervire debet determinationi ſitus aſtrorum juxta primam methodum. Et ſi porro per idem punctum C, & polos æquatoris deſcribatur dimidius circulus maximus P C Q, qui ad æquatorem erit perpendicularis (Trig. 16), is in altera methodo adhiberi poterit.

297. Eſto ſydus in puncto quovis A. *Primo* ſi per A deſcribatur circulus K A L non maximus, & ad eclipticam parallelus, per ejus polos vero E, T ſemicirculus maximus E A T ad eclipticam perpendicularis, determinabitur ſitus puncti A reſpectu eclipticæ per quantitatem arcus A R, qui eſt diſtantia ab ecliptica, & *latitudo* ſyderis dicitur; & reſpectu coluri E C T per arcum A N paralleli ad eclipticam, ſive per arcum ipſius eclipticæ R C eundem numerum graduum continentem (Trig. 10), qui eſt *longitudo ſyderis*.

Secundo. Si per A ducatur parallelus æquatori H A F; & per polos P, Q ſemicirculus maximus P A Q ad æquatorem normalis, ſitus puncti A reſpectu æquatoris determinatur arcu A O, ſive diſtantia illius ab æquatore, quæ *declinatio ſyderis* vocatur; reſpectu circuli conſtantis P C Q vero arcu paralleli A M, ſeu arcu æquatoris O C ejusdem numeri graduum, qui eſt *aſcenſio recta ſyderis*.

298. *Itaque* I. *duplex methodus determinandi ſitum ſyderis reſpectu circulorum in ſphæra fixorum, quæ ceteris præferenda eſt, eo reducitur, ut primo inve-*

inveniatur ejus longitudo & latitudo; Secundo ut reperiatur aſcenſio recta, & declinatio.

299. II. *Longitudo ſyderis eſt arcus eclipticæ inter primum punctum* ♈, *& arcum per ſyderis centrum ad eclipticam perpendiculariter ductum comprehenſus.* Numeratur autem per tricenos ſemper gradus, ſeu per ſigna, initio a *o* facto uſque ad 12 ſigna, ſequendo ordinem conſtellationum Zodiaci.

300. *Latitudo ſyderis eſt arcus circuli maximi e centro ſyderis ad eclipticam perpendicularis.* Hæc eſt *borealis* vel *auſtralis*, prout ſydus vel ex parte poli eclipticæ borealis, vel auſtralis fuerit.

301. III. *Aſcenſio recta ſyderis eſt arcus æquatoris inter primum punctum* ♈, *& interſectionem circuli maximi per centrum ſyderis ad æquatorem normalis interceptus.* Numeratur per gradus, a *o* uſque ad 360°, ſervato conſtellationum ordine.

302. *Declinatio ſyderis eſt arcus circuli maximi e centro ſyderis ad æquatorem perpendiculariter ducti.* Eſt vel borealis, vel auſtralis, ut jam ſupra (234) vidimus.

303. IV. Dimidium alicujus circuli maximi, ut E A T in polis eclipticæ utrinque terminati, & per ſydus A ducti, dicitur *circulus latitudinis ſyderis*, quod in eo latitudines ſyderum accipiantur, per quæ hic circulus tranſit. Simili ratione dimidius circulus maximus per ſydus A tranſiens & polis æquatoris terminatus, vocatur *circulus declinationis ſyderis*, cum declinatio ſyderis in eo exiſtentis menſuretur per arcum illius inter æquatorem, & ſydus interceptum.

304. Ex his deducitur *primo*, quod *omnia ſydera, quæ ſunt in eodem circulo latitudinis, habeant eandem longitudinem; & quæ ſunt in eodem circulo declinationis, habeant eandem aſcenſionem rectam.*

305 *Secundo:* Quod *aſcenſionem rectam* O C *alicujus ſyderis* A *etiam exhibeat angulus ad polum æquatoris* A P C, *a circulo declinationis* P C Q *per primum punctum* ♈ *tranſeunte, & a circulo declinationis* P A Q *per ſydus ducto comprehenſus.* Similiter *longitudo ſyderis* R C *deſignari poteſt angulo* A E C *ad polum eclipticæ, a coluro æquinoctiorum* E C T, *& circulo latitudinis ſyderis* E A T *comprehenſo.*

306. Datis igitur in triangulo P E A latere P E, ſive diſtantia poli eclipticæ a polo æquatoris, id eſt (Trig. 15) obliquitate eclipticæ; aſcenſione recta & declinatione ſyderis A, inveniri poteſt ejus longitudo, & latitudo; aut vero ſi dentur P E, longitudo, & latitudo ſyderis, reperietur ejus aſcenſio recta, & declinatio. Nam angulus A P E æquatur ſummæ ex recto E P M, & M P A, aſcenſionis rectæ ſyderis: A E P vero eſt complementum longitudinis A E C; latus A P complementum declinationis; & E A complementum latitudinis. Quodſi detur P E cum aſcenſione recta &

declinatione, in triangulo PEA habentur PE, angulus EPA, & latus PA; ſi præter PE detur longitudo & latitudo, in eodem triangulo nota ſunt PE, AE, & angulus his lateribus comprehenſus PEA. Ac generatim *ſi dentur tria quævis ex his quinque : obliquitas eclipticæ, aſcenſio recta ſyderis, ejus declinatio, longitudo, & latitudo, reliqua duo per regulas trigonometriæ ſphæricæ inveniri poſſunt.*

307. Sicut vero objectum Aſtronomiæ practicæ illud eſt potiſſimum, ut determinetur ſitus aſtrorum in cælo pro momento temporis dato; ita facile apparet, rem eo reduci, ut hæc tria habeantur: *Primo* ut cognoſcatur obliquitas eclipticæ: *Secundo* ut menſuretur tempus; *Tertio* ut obſervetur aſcenſio recta & declinatio cujuslibet ſyderis, cum utraque immediate e phænomenis motus diurni deducatur; inde autem ope calculi facile etiam longitudo & latitudo innoteſcet.

308. Cognita accurate longitudine & latitudine, aut etiam aſcenſione recta & declinatione duorum ſyderum, eorum ope etiam eadem in tertio quovis inveniri poſſunt, ſi ſcilicet inſtrumento accipiantur arcus inter priora duo & tertium intercepti : tunc enim in triangulo ſphærico, quod tria illa aſtra conſtituunt, latera duo actuali menſuratione habentur, & tertium e ſitu reſpectivo duorum ſyderum jam cognito facile deducitur: unde per calculum locus tertii reſpectu priorum duorum determinatur, conſequenter reſpectu quoque æquatoris & eclipticæ. Atque ita ferebat praxis aſtronomorum ante pendulorum inventionem.

ARTICULUS VII.

De obliquitate eclipticæ, & quomodo puncta illius ad æquatorem referantur.

309. Obliquitas eclipticæ res eſt ſummi momenti in Aſtronomia, cum omnes calculos triangulorum ſphæricorum ingrediatur, ubi de æquatore & ecliptica agitur.

Evidens autem eſt, quod cum obliquitas eclipticæ æqualis ſit (252) maximæ, quam ſol habere poteſt, declinationi, hoc eſt, quam habet, dum in tropicis verſatur; obſervanda ſit inſtrumento exacte elaborato altitudo meridiana centri ſolis ipſo die ſolſtitii, & quod differentia inter hanc altitudinem, & elevationem æquatoris in loco, in quo obſervatio inſtituitur, ſit declinatio tropici. Aut vero, quod accuratius, obſervanda eſt altitudo meridiana ſolis in utroque tropico, e quo facile diſtantia tropicorum innoteſcit, cujus dimi-

dimidium eſt diſtantia cujusvis tropici ab æquatore, ſive obliquitas eclipticæ. Exemplum, altitudo vera centri ſolis in tropico capricorni A. 1751 in promontorio Bonæ Spei obſervata fuit 79°. 33′. 3″; & in tropico cancri A. 1752, eadem fuit 32°. 36′. 31″; differentia 46°. 56′. 32″ dat intervallum tropicorum; & dimidium illius 23°. 28′. 16″ eſt obliquitas eclipticæ.

310. Obſerva I. Ex ſequentibus apparebit, obliquitatem eclipticæ variationi cuidam periodicæ 18″ obnoxiam eſſe, propter quam obliquitas ex obſervatione modo relata ad finem An. 1751 debuit 4″½ minor evadere, quam non computata ea variatione fuiſſet; ita ut obliquitas media eclipticæ tum reipſa fuerit 23°. 28′. 20″½.

311. II. Extra dubium videtur, obliquitatem eclipticæ valde lente decreſcere, uno circiter minuto intra 130 vel 140 annos. Nam in obſervationibus ſuperioribus ſæculis omnibus tum a Græcis, tum ab Arabibus & Sinenſibus inſtitutis reperitur aliquot minutis major, quam nunc obſervetur. Obſervationes conſtantes ſæculi proxime elapſi definiunt eam ſaltem 23°. 29′; nulla e modernis eam 23°. 28′. 40″ majorem ſtatuit. Si medium accipiatur magni numeri obſervationum ſolſtitialium in Meridiana S. Petronii Bononiæ in Italia factarum ab An. 1667 uſque ad 1670, omniaque rite expendantur, variationis quoque ſuperius annotatæ ratio habeatur, ea pro An. 1668 prodit 23°. 28′. 54″; Et collatis magno item numero ſimilibus obſervationibus eodem inſtrumento accurate rectificato ab A. 1731 uſque ad 1734 inſtitutis, & ad eadem principia reductis, pro A. 1733 reperitur 23°. 28′. 29″. Omnes hæ rationes ſufficiunt, ut diminutio obliquitatis eclipticæ tanquam certa ſumatur.

312. Obliquitate eclipticæ methodo expoſita reperta, calculo admodum ſimplici omnia ejus puncta ad æquatorem referuntur, hoc eſt, invenitur cujuslibet puncti aſcenſio recta, & declinatio. Sit exempli cauſa S (fig. 45) punctum datum eclipticæ ICG, & ab ♈ puncto primo (quod ſupponatur in C) 28 gradibus remotum. Ducatur e puncto S arcus SO ad æquatorem DCB perpendicularis, qui erit declinatio puncti S; CO vero arcus æquatoris ejus aſcenſio recta: angulus CSO eſt inclinatio circuli declinationis puncti S ad eclipticam, qui angulus in multis calculis uſum habet. Jam in triangulo rectangulo OSC, in quo angulus SCO æquatur obliquitati eclipticæ, quam hic ſuppono 23°. 28′. 20″, reperitur (Trig. 85 vel 87) declinatio OS 10°. 46′. 38″; aſcenſio recta OC (Trig. 84 vel 88) 25°. 59′. 56″; angulus CSO, ab ecliptica & circulo declinationis comprehenſus (Trig. 86 vel 89) 69°. 1′. 22″. Sed hæc & alia id genus in tabulis aſtronomicis jam ad calculum revocata habentur pro ſingulis eclipticæ gradibus.

ARTICULUS VIII.

De menſura temporis.

313. Cum tellus circa axem ſuum motu æquabili (229) gyretur, revolutiones diurnæ aſtrorum æquali tempore abſolvuntur, adeoque

que valde opportune ad deſignandum tempus adhibentur. Sed quia hæ revolutiones non niſi ſucceſſive fiunt, & alterum ſydus poſt alterum ſuum circulum perficit, isque motus perpetuo continuatur, non modo unum aliquod præ reliquis ſeligendum eſt, cujus revolutiones pro menſura temporis adhibeantur, ſed etiam certus terminus ſtatuendus, ex quo initium ſingularum revolutionum ducatur. Jam vero ſol telluris reſpectu reliqua omnia ſplendore ſine comparatione ſuperat: atque ideo ejus revolutiones dimetiendo tempori aptiſſimas ipſa natura commendare videtur, horizonte tanquam termino, a quo eorum initium computetur, adhibito. Interea tamen cum telluris incolæ ſol non niſi reſpectu horizontis ſenſibilis oriatur & occidat, qui circulus admodum irregularis eſt, raro cum horizonte rationali congruit, ſæpe vaporibus ſolem occultantibus, ejusque radiis detortis figuram varie deformantibus oppletus eſt: ac præterea dies per horizontem terminati notabiliter creſcant ac decreſcant, adeoque nimis inæquales ſint; obſervator Meridianum præferet velut terminum revolutionum diurnarum, ac principium diei conſtituet ipſum meridiei momentum, quo ſcilicet ſolis centrum ad planum ſui meridiani appellit.

314. Itaque *dies Aſtronomicus eſt intervallum temporis elapſi inter momentum, quo centrum ſolis per planum meridiani tranſiit, & quo, peracta integra revolutione, ad idem rurſus redit.*

315. Si ſol omni motu alio apparente careret, præterquam revolutionis diurnæ, aſcenſionem rectam haud unquam mutare videretur, ſed ſingulis diebus rediret ad meridianum cum iisdem ſtellis fixis, ſive cum illis, quarum aſcenſio recta eadem foret, ac puncti illius, in quo ſol exiſteret. Sed quia præterea annuam in ecliptica revolutionem facit, ſemper verſus ortum progrediendo, ac in plagam motui diurno, qui fit ab ortu in occaſum, oppoſitam; atque propterea omni die ad aliud punctum æquatoris referri debet, manifeſtum eſt, quod ſi ſol hodie cum certa ſtella meridianum tranſit, cras eadem ſtella ad meridianum pertingente, hoc eſt revolutione diurna integre peracta, is adhuc futurus ſit ad partem orientalem meridiani eo intervallo, quo motu annuo interea ab illo æquatoris puncto, cui hodie reſpondet, receſſerit. Igitur ſol non niſi poſt aliquod tempus appulſum ſtellæ ad meridianum ſequitur, cum ſcilicet punctum novum æquatoris ei reſpondens illuc pervenerit. Die ſequente adhuc tardius ſequetur ſtellam, ita, ut elapſis ſex menſibus ea 12 horis ſolem præcedat, & poſt annum, quo ſol totum percurrit zodiacum, die integro; quippe quæ tercenties ſexageſies ſexies Meridianum tranſierit, ſole non niſi tercenties ſexageſies quinquies tranſeunte.

316. Hinc

316. Hinc dies Aſtronomicus æqualis eſt ſummæ e revolutione integra ſtellæ fixæ, & parte tercenteſima ſexageſima quinta revolutionis: ſive accuratius: *menſura diei aſtronomici ſunt 360 gradus æquatoris plus arcu eiusdem reſpondente arcui eclipticæ, quem ſol illo die percurrit*, & qui *motus diurnus ſolis in aſcenſione recta* appellatur.

317. Infertur autem hinc I, quod licet revolutiones terræ omnes ſint æquales, attamen *dies aſtronomici inter ſe aliquantum inæquales eſſe debeant*, quod motus telluris in ecliptica reipſa ſit inæqualis, quo ſingulis diebus arcus jam majores, jam minores deſcribit; quod item inæquales ſint arcus æquatoris & eclipticæ correſpondentes propter obliquitatem horum circulorum. Unde horologium, cujus motus foret maxime æquabilis, vix unquam ab uno ad alterum meridiem 24 horas elapſas oſtendere poſſet accurate, ſed aliquot ſecundis plus vel minus, prout arcus æquatoris, qui motum ſolis diurnum in aſcenſione recta metitur, ex duplici hac cauſa creſcit, vel decreſcit.

318. II. Quod ut partes temporis ope horologii, cujus motus æquabilis ſemper eſſe debet, metiri liceat, duplex tempus, aut dies diſtingui debeat: ſcilicet dies *verus*, ſive *apparens*, qui eſt intervallum temporis inter momentum tranſitus veri centri ſolis per meridiem, & momentum reditus ejusdem; & tempus ſive dies *medius*, eſtque intervallum inter unum & alterum meridiem, quale ſemper obſervaretur, ſi motus diurnus ſolis in aſcenſione recta eſſet æquabilis. Horologia recte conſtructa tempus medium oſtendere debent; tempus verum ex obſervationibus ſolis deducitur, & per horologia ſolaria exacte elaborata determinatur.

319. Dies tam verus, quam medius, dividitur ſemper in 24 horas, ſive 86400″. Mos etiam apud Aſtronomos obtinet, ut dies ab uno meridie ad alterum numerentur, quin in horas duodecim matutinas, & totidem veſpertinas diſtribuantur: etenim horas matutinas ad præcedentem diem referunt, dicuntque exempli gratia, die 15 Januarii, hora 17; cum e more civili dicendum eſſet: die 16 Januarii, hora 5 matutina. Hinc diſtinctio inter tempus civile & aſtronomicum profluxit. Die juxta tempus medium computato per meridianum ultra 360 æquatoris gradus tranſeunt adhuc 59′. 8″, qui eſt motus diurnus medius ſolis in aſcenſione recta. Die juxta tempus verum ſumto præter 360 æquatoris gradus tranſit per meridianum *arcus competens motui diurno vero in aſcenſione recta*. Sic quando ſol eſt in apogæo, ejus motus diurnus verus in aſcenſione recta eſt 1°. 2′. 6″; igitur tunc intra diem temporis veri per meridianum tranſeunt 361°. 2′. 6″: & ſi fiat, ut 360°. 59′. 8″ ad 24 h. 0′. 0″ temporis medii; ita 361°. 2′. 6″ ad 24 h. 0′. 12″ temporis veri: reperitur ſole in apogæo verſante dies temporis veri 12″ longior die temporis medii.

320. Dies temporis veri nequit æqualis esse diei temporis medii, nisi motu diurno vero solis in ascensione recta 59′. 8″ existente, id quod 11 Februarii, 14 May, 26 Julii & 1 Novembris contingit: omnibus aliis diebus differentia aliqua esse debet inter meridiem verum, hoc est, inter momentum, quo centrum solis re ipsa per meridianum transit, & meridiem temporis medii, hoc est, momentum, quo centrum solis per meridianum transiret, si ejus motus in ascensione recta æquabilis esset. Exiguæ porro differentiæ inter singulos dies temporis medii & veri, successive accrescunt, ut post tempus longius discrimen sit admodum notabile, quod nosse sane decet, si ope horologiorum tempus metiamur.

321. Calculus, quo utriusque temporis differentia ad momentum datum reperitur, facilis est: nam æquatur differentiæ in tempus conversæ inter locum medium solis in ecliptica pro tempore dato (qui est ejus ascensio recta media); & inter ascensionem rectam veram.

Apud omnes fere astronomos jam habentur tabulæ, quæ differentias istas ad calculum revocatas exhibent. Dicuntur *Tabulæ æquationis temporis, vel horologiorum.*

322. Ex dictis sequitur *primo*, quod si horologium accurate ad tempus medium sit ordinatum, singulis minutis secundis, quæ ostendit, arcus æquatoris 15″. 2‴. 28⁗ per meridianum transeat: est enim hic quotus e divisione 360°. 59′. 8″ per 86400″ emergens.

323. *Secundo:* Cum revolutio integra stellæ fixæ respondeat 360 gradibus æquatoris, dies vero temporis medii 360°. 59′. 8″; differentia 59′. 8″ in tempus conversa, nempe 3′. 56″, ostendit stellam quotidie tempus medium debere 3′. 56″ prævertere; aut quod idem est, revolutionem stellæ fixæ, sive rotationem telluris fieri inter 23 h. 56′. 4″ temporis medii.

324. *Tertio:* Hinc si examinandum sit, an motus horologii cum tempore medio congruat, videndum, an accurate ostendat 23 h. 56′. 4″ elapsas esse a transitu stellæ fixæ per certum terminum usque ad reditum ad eundem absoluta revolutione integra. Quantum intervallum observatum prædictum tempus excedet vel ab eo deficiet, tantum horologium supra tempus medium accelerat, vel retardat.

325. Interim ut tempus verum cognoscatur, ex observatione inveniendum est, quale momentum temporis horologium ostenderit, centro solis in meridiano existente. Est autem sol tum in meridiano, quando cessat ascendere supra horizontem, & rursus descendere incipit: & cum hæc vicissitudo e sola rotatione æquabili telluris pendeat, momentum meridiei accurate medium est inter

duo

duo alia, quibus eandem altitudinem cum in aſcenſu, tum in deſcenſu attingit. Itaque ſi aliquo ante meridiem tempore notetur tempus in horologio, quo certa altitudo centri vel limbi ſolis obſervata fuit; & poſt meridiem rurſus obſervetur tempus in horologio, quo centrum, vel idem limbus eandem habet altitudinem; medium inter illa duo tempora erit, quod horologium in ipſo meridie oſtendit. Exemplum: Pariſiis 29 Septembris 1744 ope quadrantis Aſtronomici obſervata fuit altitudo ſuperioris, ſive borealis limbi ſolis 22°, horologio monſtrante 8 h. 19′. 52″ mane, & poſt meridiem eodem oſtendente 3 h. 16′. 18″; medium inter utrumque tempus eſt 11 h. 48′. 5″: hoc igitur tempus notabatur a pendulo centro ſolis ad meridianum appellente.

Eadem methodo determinari poteſt fixarum, & planetarum tranſitus per Meridianum.

326. Obſerva. Methodus expoſita, quæ *altitudinum correſpondentium* dicitur, non modo omnium eſt ſimpliciſſima, ſed & maxime accurata, cum facile ſit determinare momentum (errore, ſi quis irrepat, ſaltem unum ſecundum non excedente), quo ſydus filum ſubtiliſſimum in foco tubi, in quadrantibus, aliisve inſtrumentis obſervandis altitudinibus deſtinatis, tenſum contingit. Obſervatio porro eo tutior eſt, quo ſydus a meridiano remotius, ſeu verticali primario vicinius fuerit, quia tunc aſcenſus vel deſcenſus illius velocior eſt. Neque in hunc finem neceſſe eſt, ut inſtrumentum ſit adeo exacte elaboratum, aut ut vera ſyderis altitudo accurate accipiatur; ſed ſufficit, modo eadem altitudo, quæcunque ea ſit, determinari poſſit; ad quod requiritur, ut radius quadrantis duobus, tribuſve pedibus non ſit minor. Præterea accipiendæ ſunt plures altitudines diverſæ tam ante tranſitum per meridianum, quam poſt eundem, ut verum tranſitus momentum veluti a pluribus principiis ſeſe mutuo verificantibus inferre liceat: & ſi qua inter ea notetur differentia, medium quoddam ex omnibus ſumitur. Verum ſi cum rigore loquamur, hæc methodus accurata non eſt, niſi pro ſtellis fixis, & illis ſyderibus, quæ declinationem intervallo temporis obſervationibus correſpondentibus interjecti non mutant. Quod ſi enim ſydus interea habuerit motum in declinatione, ut v. g. ad polum ſupra horizontem elevatum propius acceſſerit, ejuſque altitudo meridiana dietim creſcat; in deſcenſu poſt meridiem tardius ad eam altitudinem perveniet, quæ in plaga orientali in aſcenſu obſervata fuit, adeoque medium inter tempora obſervata momentum tranſitus per meridianum juſto tardius exhibet, quam reipſa fuerit. Ex oppoſito ſi motus in declinatione fiat verſus polum infra horizontem depreſſum, ſydus citius a meridie attinget illam altitudinem, quæ in aſcenſu notata fuit, & medium inter utrumque tempus obſervatum verum momentum tranſitus per meridianum prævertet. Atque hoc contigit in exemplo ſuperius allato: tunc temporis ſolis motus in declinatione verſus Auſtrum fiebat, eoque deprimebatur aliquantum, ut poſt meridiem citius ad altitudinem 22 graduum perveniret, atque ideo meridies ex altitudinibus correſpondentibus ita erutus nempe 11 h. 48′. 5″, verum præceſſit.

Quamvis autem error ex mutatione declinationis ſolis nunquam excedat 30″ tempus meridiei veri, quocunque in loco quis verſetur alioqui habitabili; attamen ſi tempus verum accurate cognoſci debeat, errores iſtiusmodi ad calculum revocandi ſunt, ut meridies ex obſervationibus altitudinum correſpondentium inventus corrigi poſſit.

In hunc finem ſit RPZH (fig. 48) meridianus loci, in quo obſervatio inſtituta; Z Zenith; HR horizon; P polus; EQ æquator; S locus ſolis ante meridiem obſervatus & ad meridianum ac horizontem relatus; SD, ejus altitudo, quam in illo loco habuit.

buit. Si e puncto S ducatur ad polum arcus SP, erit SI ſolis declinatio, & angulus EPS æqualis ejus diſtantiæ a meridiano (290). Producatur DS uſque ad Zenith, erit SZ complementum altitudinis obſervatæ. Ducatur item per S circulus minor AV horizonti parallelus (dicitur autem talis circulus *Almucantarath*); & alter RSL parallelus æquatori, qui erit parallelus ſolis pro tempore obſervationis matutinæ. Sit jam MN parallelus ejusdem pro tempore obſervationis pomeridianæ, ita ut MR deſignet diſtantiam horum parallelorum, ſive mutationem declinationis inter utramque obſervationem factam: liquet, temporis momentum poſt meridiem obſervatum eſſe illud ipſum, quo parallelus ſolis MN ſecat Almucantarath AV, ſole in T exiſtente, cum ſcilicet altitudines TF, SD æquales ſunt. Quod ſi jam per T deſcribatur TP, erit angulus EPT diſtantia ſolis a meridiano tempore obſervationis pomeridianæ; hinc angulus TPS, ſive arcus eum menſurans, in tempus converſus, addi in hoc caſu debet tempori obſervationis a meridie factæ, ut meridies verus reperiatur.

Ut obtineatur angulus TPS, differentia angulorum ZPS, ZPT; obſervandum eſt, triangulum TZP non differre a triangulo PZS, niſi quatenus latus TP differt a latere SP quantitate RM, ſive mutatione declinationis: itaque triangulum TPS calculari poterit ope alicujus formulæ differentialis trigonometriæ ſphæricæ (Trig. 192). Neque requiritur, ut laterum PZ, PS, SZ quantitas ſit exacte cognita; ſufficit, ſi modo ſciatur quantitas variationis RM. Ex his principiis ab Aſtronomis conditæ ſunt *tabulæ Æquationis altitudinum correſpondentium*, quæ paſſim in eorum libris occurrunt.

ARTICULUS IX.

De aſcenſione recta, & declinatione ſyderum.

327. Declinatio ſyderum facile cognoſcitur, ſi obſerventur eorum altitudines meridianæ, & cum elevatione æquatoris loci, in quo obſervationes inſtituuntur, conferantur. Aſcenſio recta per menſuram temporis determinatur. Cum enim omnia ſydera, quæ ſunt in eodem circulo declinationis, habeant eandem aſcenſionem rectam (305) & circulus declinationis ſit circulus maximus ad æquatorem normalis; dum tota ſphæra cæleſtis circumvolvitur, omnia circulorum declinationum plana ſucceſſive, alterum poſt alterum, veniunt ad planum Meridiani (qui etiam circulus maximus eſt ad æquatorem perpendicularis) & cum eo congruunt. Unde Primo: *Omnia ſydera, quæ eodem tempore per meridianum tranſeunt, habent tunc eandem aſcenſionem rectam.* Secundo: *Quæ vero diverſis temporibus veniunt ad meridianum, eorum aſcenſionum rectarum differentiæ ſunt proportionales differentiis temporum, quibus ad meridianum ſingula appellunt.* Exempli cauſa: Stellæ fixæ revolutionem integram abſolvere debent intra 23 h. 56′. 4″ penduli recte conſtituti (324): quod ſi igitur ope ejusmodi horologii, & quadrantis in plano meridiani fixi, aut quod adhuc tutius, per altitudines correſpondentes obſervatum fuit, ſtellam aliquam una v. g. hora citius vel tardius per meridianum tranſiviſſe, quam aliud quodpiam ſydus, invenietur, quot gradibus aſcen-

aſcenſio recta ejus ſtellæ major vel minor ſit quam alterius ſyderis, ſi fiat hæc proportio: ut 23 h. 56′. 4″, ſeu tempus revolutionis integræ fixarum, ad 360°. 0′. 0″ æquatoris, qui hoc tempore per meridianum tranſeunt; ita hora una differentiæ eſt ad 15°. 2′. 28″, differentiam aſcenſionum rectarum. Unde cognita aſcenſione recta alterutrius, etiam alterius aſcenſio recta per hanc obſervationem obtinetur.

328. Si horologium, quo utimur, non ſit directum ad tempus medium, proportio hunc in modum facienda eſt: *Ut tempus elapſum horologii durante revolutione integra fixarum eſt ad* 360°; *ita tempus in eodem horologio inter utriusque ſyderis tranſitum per meridianum obſervatum eſt ad differentiam aſcenſionum rectarum.*

329. Hinc ſequitur, *ad determinandam aſcenſionem rectam ſyderis cujusvis*, imo omnium, *ſatis eſſe, ſi detur aſcenſio recta ſtellæ unius, ſi habeatur horologium, cujus motus æquabilis ſit, & poſſit determinari tempus monſtratum ab eodem horologio in tranſitu illius ſyderis, & ſtellæ fixæ per meridianum.*

330. Sed en methodum optimam inveniendi aſcenſionem rectam ſtellæ alicujus primariæ, ad quam dein ceteræ referri poſſint. Die quadam, dum ſol non longe adhuc ab æquinoctio receſſit, ejusque motus diurnus in declinatione 17 vel 18 minutis minor non eſt, obſervetur ejus altitudo meridiana, & inveniatur ſive per altitudines correſpondentes, ſive aliter, differentia aſcenſionis rectæ ſolis, & ſtellæ, quam quis elegerit, pro ipſo meridie. Poſtea quando ſol poſt proximum ſolſtitium ad eundem parallelum redit, eadem obſervatio repetatur, ut nempe reperiatur arcus æquatoris (ut in ſequente exemplo patebit) reſpondens motui ſolis in aſcenſione recta toto temporis intervallo, quo ad eundem parallelum redivit, hoc eſt, quo obtinuit eandem a ſolſtitio diſtantiam: patet enim, cum dimidium hujus arcus ſit diſtantia ſolis a coluro ſolſtitiorum in æquatore accepta, quod etiam ſit complementum ejus diſtantiæ a puncto æquinoctiali, hoc eſt, aſcenſionis rectæ: hac itaque ratione habebitur aſcenſio recta ſolis, & ex differentia obſervata in ſtella, dabitur etiam aſcenſio recta ſtellæ.

Exemplum: Pariſiis die 12 Aprilis A. 1749. fuit altitudo meridiana centri ſolis 49°. 58′. 33″, & altitudinibus correſpondentibus ſolis & Lucidæ Lyræ magno numero acceptis eorum differentia in aſcenſione recta pro ipſo meridie deducta eſt 103°. 50′. 54″. Dein 30 Auguſti ejusdem Anni obſervata fuit altitudo meridiana ſolis 50°. 3′. 8″; & differentia aſcenſionis rectæ a Lucida Lyræ reperta 241°. 43′. 26″. Diſcrimen 4′. 35″ inter altitudines meridianas oſtendit, quod ſi altitudo meridiana ſolis, aut, quod idem eſt, ejus declinatio die 12 Aprilis major fuiſſet 4′. 35″, ſol fuiſſet in eodem

accurate parallelo, in quo fuit die 30 Auguſti in ipſo meridie. Et quia motus diurnus ſolis accurate in tabulis Aſtronomicis exhibetur, inito calculo reperitur, quod a die 12 uſque ad meridiem 13 Aprilis, ſol confecerit in aſcenſione recta 55′, 10″. 4, & in declinatione 21′. 45″. 4. Hinc fiat: ut 21′. 45″. 4 ad 55′, 10″. 4; ita ſunt 4′, 35″ ad 11′, 37″. Quare dum die 12 Aprilis declinatio ſolis 4′. 35″ crevit, eodem tempore differentia aſcenſionis rectæ ſolis & Lucidæ Lyræ crevit 11′. 37″; & eo momento, quo eodem die habuit eandem declinationem, quam habuit 30 Auguſti in meridie, differentia aſcenſionum rectarum ſolis & Lucidæ Lyræ fuit 104°. 2′. 31″. Subtractis 104°. 2′ 31″ ex 241° 43′ 26″ relinquitur motus ſolis in aſcenſione recta, quam habuit toto intervallo, quo ad eundem parallelum redivit, nempe 137°, 40′, 55″; huic addenda ſunt 18″, quia etiam ſtella eodem tempore habuit exigum motum in aſcenſione recta pendentem a triplici cauſa, quæ variationem aliquam in loca fixarum inducit, & in ſequentibus exponetur (vid. Sect. VI. C. I. Art. 9); habeturque tum ſumma 137°. 41′. 13″. Hic arcus a coluro ſolſtitiorum bifariam ſecatur; adeoque ejus dimidium 68°, 50′, 36″. 5 eſt arcus æquatoris inter colurum ſolſtitiorum, & locum ſolis interceptus, quando die 12 Aprilis pervenit ad eundem parallelum, in quo in ipſo meridie diei 30 Auguſti fuerat: complementum igitur 21°. 9′. 23″.5 eſt vera aſcenſio recta ſoli eo momento competens. Et quia tunc differentia aſcenſionis rectæ lucidæ lyræ fuit 104°. 2′. 31″, quibus hæc ſolem præcedebat, reperitur tandem aſcenſio recta apparens lucidæ lyræ fuiſſe eodem momento 277°. 6′. 52″. 5.

ARTICULUS X.

De præcipuis uſibus aſcenſionis rectæ, & declinationis ſyderum.

331. Inter præcipuos uſus, quos aſcenſio recta & declinatio ſyderum habet, eſt, quod inveniendæ eorum longitudini & latitudini ſerviant, ut jam vidimus (306).

332. Præterea ex aſcenſione recta intelligitur ordo, juxta quem ſydera dietim revolvuntur, uti etiam intervallum temporis, quo alterum alteri ſuccedit, maxime reſpectu meridiani.

333. Ex eadem per calculum inveniri poteſt, qua hora quodvis ſydus per meridianum tranſeat. En autem methodum: *Accipe differentiam inter aſcenſionem rectam ſyderis illius, & ſolis pro meridie diei, de quo quæſtio eſt; hanc converte in tempus, ita ut uni horæ reſpondeant 15 gradus; habebis intervallum temporis prope verum inter meridiem, & tranſitum ſyderis*

deris per meridianum. Si ſydus ſit ex parte occidentali ſolis, ſive ſi ejus aſcenſio recta minor ſit, quam aſcenſio recta ſolis, intervallum temporis repertum & a 12 horis ſubtractum dabit tempus transitus ſyderis per meridianum ante meridiem; ſed ſi ſydus ſit ex parte orientali ſolis, ſeu ejus aſcenſio recta major ſit, quam ſolis, hoc tempus incidet in horas pomeridianas.

334. Sed, ut diximus, primus hic calculus non oſtendit verum momentum temporis, quo ſydus ad meridianum pervenit, ſed ſolummodo vero propinquum, quod ſcilicet in eo ſupponatur, nec ſoli, nec ſyderi, eo intervallo eſſe motum proprium in aſcenſione recta. Quare ut verum tranſitus per meridianum tempus reperiatur, præterea calculanda eſt aſcenſio recta tam ſolis, quam alterius ſyderis pro eo tempore, quod per priorem calculum inventum eſt; earum differentia in tempus converſa dabit tempus verum quæſitum.

In exemplo, ſupponamus die quadam in ipſo meridie aſcenſionem rectam Martis eſſe 112°. 18′; & ſolis 183°. 42′: differentia 71°. 24′ in tempus converſa eſt 4 h. 45′. 36″; & quia aſcenſio recta Martis minor eſt, quam ſolis; citius Mars ad meridianum pervenire debet, quam ſol (332) idque circa 7 h. 14′. 24″ ante meridiem. Calculetur pro hoc tempore aſcenſio recta Martis, & ſolis, reperietur illa quidem 112°, 13′, 12″; hæc vero 183°, 30′, 10″; quarum differentia 71°, 16′, 58″ ad tempus reducta, dat tempus tranſitus Martis per meridiem 7 h. 14′. 52″ mane.

Illud manifeſtum eſt, hunc calculum inſtitui ratione inverſa ejus, quæ ſervatur, cum ex obſervato tranſitu per meridianum ſyderum aſcenſio recta invenitur (327).

335. Præſens calculus etiam adhiberi poteſt ad examinandum horologium: ſi enim notetur tempus ab horologio monſtratum, dum ſydus, cujus aſcenſio recta nota eſt, per meridianum tranſit, & tempus tranſitus per calculum inveniatur, ex collatione utriusque temporis patebit, an tempus ab horologio oſtenſum congruat cum vero; aut quantum horologium differat.

336. Quartus uſus jam expoſitis analogus eſt, quod *reperiri poſſit pro tempore dato diſtantia alicujus ſyderis a meridiano loci dati*, aut quod idem eſt (290) angulus ad polum a meridiano loci, & circulo declinationis per ſydus ducto comprehenſus. Hunc in finem *intervallum inter tempus datum & meridiem præcedentem convertatur in gradus* (ita ut horæ uni reſpondeant 15 gradus): *hi addantur aſcenſioni rectæ ſolis* e tabulis Aſtronomicis *pro tempore dato* repertæ: ſumma exhibebit punctum æquatoris tempore dato per meridianum tranſiens. *Ab hac*

eadem ſumma (additis, ſi nimis parva ſit, 360 gradibus) *ſubtrahatur aſcenſio recta ſyderis*: reſiduum erit angulus ad polum quæſitus.

337. Cum æquatio temporis (321) ſit differentia inter longitudinem mediam ſolis, & ejus aſcenſionem rectam veram; ſi tempus detur medium, idem calculus inſtituetur, converteturque hoc tempus medium in gradus, quindecim uni horæ tribuendo; qui addentur longitudini ſolis mediæ, ſumtæ ſcilicet e tabulis, quæ huic tempori competit: tandem a ſumma aſcenſio recta ſyderis ſubtrahetur.

338. Et quia angulus ad polum meridiano loci & circulo declinationis ſyderis comprehenſus per motum diurnum ſingulis ſecundis temporis mutatur 15″, *ſi detur hic angulus*, per calculum, inverſum prioris *reperitur tempus*, *quo fuit quantitatis datæ*, modo ſciatur, an ſydus ex parte orientali, an ex occidentali meridiani tum fuerit: *addatur enim angulo dato* (ſi ſydus fuit ad partem occidentalem), *vel ejus complemento ad* 360 *gradus* (ſi ad orientem fuit ſydus) *aſcenſio recta ſyderis: a ſumma ſubtrahatur aſcenſio recta ſolis: reſiduum in tempus converſum* (15 *gradibus uni horæ tributis*) *dabit tempus verum quæſitum.* Aut etiam angulo dato, vel ejus complemento ad 360 gradus addita aſcenſione recta ſyderis, a ſumma ſubtrahatur ſolis longitudo media; reſiduum in tempus converſum erit tempus quæſitum medium.

339. Hinc autem apparet, unum e præcipuis uſibus aſcenſionis rectæ & declinationis ſyderis, eſſe, *ut reperiatur tempus verum e theoria ſolis cognita, & altitudine hujus ſyderis ad partem orientalem vel occidentalem meridiani obſervata.* Datis enim hac altitudine, declinatione ſyderis, & elevatione poli, invenitur (290) angulus ad polum ZPE (fig. 38 & 39) inter ſydus E & meridianum PZ comprehenſus: habito porro hoc angulo, & aſcenſione recta ſyderis, reperitur tempus verum, quo illa altitudo obſervata fuit.

340. Et viciſſim (qui eſt alter uſus aſcenſionis rectæ & declinationis ſyderum) inveniri poteſt altitudo ſyderis pro tempore dato, ſi quæratur ejus diſtantia a meridiano pro eodem tempore, & calculetur latus EZ ejusdem trianguli ſphærici EPZ.

341. Denique declinatio ſyderis etiam uſum habet (279) in invenienda ejus altitudine meridiana, amplitudine ortiva vel occidua (291) atque arcu ſemidiurno, ſi detur altitudo poli: & viciſſim uno ex his tribus dato, reperitur elevatio poli.

CAPUT

CAPUT II.

De illuſionibus Opticis in phænomenis aſtrorum, quarum cauſa eſt motus telluris annuus.

Poſtquam præcipuas proprietates illuſionum Opticarum e motu telluris diurno, ſive rotationis, pendentium expoſuimus, ordo poſcit, ut illas quoque explicemus, quarum occaſio eſt motus terræ annuus. Sed ut rite intelligantur, præmittenda eſt theoria motuum, quos ejusmodi illuſiones Opticæ afficiunt, quique motus apparentes ſive relativi dici ſolent.

ARTICULUS I.

Theoria motuum apparentium & relativorum; ac de eorum projectione orthographica.

342. *Motus apparens* objecti dicitur, quem obſervator in motu conſtitutus, & nihilominus ſe in puncto aliquo fixo quieſcere exiſtimans, attribuit objecto quieſcenti. *Motus relativus* objecti eſt, quem obſervator motus, ſeque quieſcere credens, attribuit objecto itidem moto.

343. *Locum verum oculi* in ſequentibus vocabo illud univerſi punctum, in quo tempore dato reipſa obſervatoris oculus eſt conſtitutus; *locum vero oculi putatitium* dicam illum in univerſo, in quo obſervator ſeſe quieſcere arbitratur.

344. Cum iſthic ſolum de motu circulari agatur, *orbita oculi* vocabitur nobis via, quam obſervator in hoc univerſo re ipſa percurrit; *planum orbitæ oculi*, erit illud planum, in quo ea orbita deſcribitur: *orbita optica* via, quam objectum in cælo percurrere videtur.

345. *Projectio orbitæ opticæ* eſt figura, quam in plano ultra orbitam opticam ſito efformant radii viſuales e loco putatitio oculi per omnia puncta orbitæ opticæ ducti, & in illo plano terminati, ſive (ut exemplo ſenſibili ad juvandam imaginationem utamur) eſt figura umbræ ab orbita in planum aliquod projectæ, ſi ea e loco putatitio oculi illuminaretur.

Si radii viſuales terminentur in illo plano ad angulos rectos, erit *projectio orthographica.*

346. *Planum comparationis* eſt, quod per locum putatitium oculi, & objectum tranſit, & ad planum orbitæ oculi normale eſt. Itaque

si objectum fixum est, planum quoque comparationis est fixum; si objectum movetur, etiam hoc planum est mobile, & quidem eadem velocitate angulari, qua objectum movetur.

347. Problema. *Datis positione loco putatitio oculi* S (fig. 46), *& quotcunque punctis* A, B, C *orbitæ veræ, quam mobile in plano quovis describit, cum punctis* a, b, c, *in quibus reipsa oculus iisdem temporibus existit; determinare viam opticam mobilis.*

Resolutio. Ductis rectis A *a*, B *b*, C *c*, agantur per S æquales & parallelæ S α, S β, S γ, singulæ singulis: erunt puncta α, β, γ via optica. Nam cum v. g. recta S α sit æqualis & parallela rectæ *a* A, punctum α respectu puncti S habet eundem situm, eandemque distantiam, quam habet A relate ad *a*. Igitur observator existimans se esse in S, objectum a se in α videri putare debet. Idem est de reliquis punctis β, γ &c.

348. Corollarium I. *Itaque locus verus, & putatitius oculi; locus item verus & opticus objecti semper sunt in extremis laterum oppositorum parallelogrammi:* sive locus verus objecti, & locus putatitius oculi sunt semper in extremis unius e diagonalibus parallelogrammi; & locus opticus objecti cum loco vero oculi sunt in extremis alterius diagonalis.

349. Corollarium II. *Et locus opticus objecti habet semper situm oppositum loco vero oculi.*

350. Corollarium III. *Si objectum sit immobile in* A (fig. 47) *orbita optica* $\alpha\beta\gamma$ *est linea æqualis orbitæ veræ oculi* a b c, *& in plano parallelo sita.* Nam ob parallelogramma *a* α, *b* β, *c* γ, quorum plana in diagonali communi S A se intersecant, & bases S *a*, S *b*, S *c* sunt in eodem plano, in quo est orbita oculi; etiam A α, A β, A γ his basibus æquales & parallelæ in eodem plano, & quidem plano orbitæ oculi parallelo, esse debent, angulosque α A β, β A γ angulis *a* S *b*, *b* S *c* æquales facere. Ergo puncta α, β, γ sunt in linea æquali lineæ *a b c*, & in plano parallelo, sed situ oppositio.

351. Corollarium IV. *Si objectum sit immobile, & in eodem plano cum oculo, etiam ejus orbita optica est in hoc plano.*

352. Corollarium V. *Si objectum immobile sit in loco putatitio oculi, videtur esse in extremitate radii æqualis & ejusdem directionis cum radio, qui e loco vero oculi ad centrum ducitur.* Sic si oculus moveatur in circulo vel ellipsi, in cujus centro est objectum & locus putatitius oculi; objectum in extremitate diametri per oculum ductæ apparet, adeoque videtur eam orbitam describere, in qua oculus movetur.

353. Corollarium VI. *Si objectum sit immobile, arcus ab eo in orbita optica descriptus æquatur arcui, quem oculus in sua orbita vera percurrit.*

354. Obſerva. In ſequentibus ſupponam, orbitam oculi eſſe circulum, & ejus locum putatitium centrum. In hac vero hypotheſi, ſi obiectum ſit immobile ſive extra, ſive intra hanc orbitam ſitum, manifeſtum eſt (350), ejus orbitam opticam itidem fore circulum, quem deinceps *Epicyclum* obiecti vocabo.

355. Lemma I. *Planum circuli minoris* HL (fig. 50) *circulo maximo ſphæræ* QI *paralleli, inclinatur ad planum* FG, *tangens ſphæram in puncto circuli minoris* H, *quantitate complementi arcus diſtantiæ paralleli a circulo maximo* QH: *& radius ejusdem circuli minoris* HL *eſt ad radium circuli maximi* QI, *ut coſinus diſtantiæ* QH *eſt ad ſinum totum.*

Angulus enim MHL inclinationis plani FG cum plano paralleli HL, eſt complementum anguli LHI æqualis angulo HIQ, cujus menſura eſt arcus HQ. Eodem modo patet, HL eſſe coſinum arcus QH.

356. Lemma II. *Si ex omnibus peripheriæ punctis* A, M, D, B, C (fig. 53) *circuli in plano* OK *ad planum alterum* OG *inclinato deſcripti demittantur ad planum* OG *perpendiculares* Aa, Mm, Dd, Bb, Cc &c., *eæ omnes terminabuntur in circumferentia Ellipſeos* adbc, *cujus axis major* ab *erit æqualis & parallelus circuli diametro illi, quæ plano* OG *eſt parallela, ſive interſectioni* ON *planorum communi; axis vero minor* cd *reſpondebit diametro circuli* CD *ad planum* OG, *ſive ad interſectionem* ON *perpendiculari, ita ut hic axis minor* cd *ſit ad axem majorem* ab, *ut eſt coſinus inclinationis planorum* OG, *&* OK *ad ſinum totum.*

Demonſtratio. Cum diameter AB circuli ſit plano OG parallela; item perpendiculares ad idem planum A*a*, B*b* ſint parallelæ inter ſe, figura A*ab*B eſt parallelogrammum rectangulum, & hinc AB = *ab*. Dein ob diametrum CD ad interſectionem ON, perpendicularem, uti etiam ad alteram diametrum AB; utraque, tam AB, quam ON ab eadem biſecatur, & planum *c*VC, in quo ſunt perpendiculares C*c*, D*d*, eſt ad planum OG normale, & a planis parallelis *b*NB, *a*OA æquidiſtans. Quare *primo ab* ſecatur bifariam & ad angulos rectos per *cd*. *Secundo* angulus *c*VC æquatur inclinationi planorum OG & OK (Elem. 630). *Tertio* ob triangula rectangula *c*VC, *f*VF, *d*VD ſimilia, partes *df*, *fc* rectæ *dc*, æquantur inter ſe, quia etiam pars DF parti FC æqualis eſt. Itaque cum *ab* ſit axis ellipſeos; *cd*, quæ *ab* ſecat normaliter & bifariam, & viciſſim biſecatur, debet eſſe alter axis. *Quarto* In iisdem triangulis eſt *cd*: CD (ſeu *ab*) = *c*V: VC. Eſt vero (Elem. 747) *c*V ad VC, ut coſinus anguli *c*VC ad ſinum totum: ergo axes *cd*, *ab* ſunt inter ſe, ut coſinus inclinationis planorum ad ſinum totum.

Demonſtrandum itaque eſt, curvam *abcd* eſſe ellipſin. Ducatur in circulo ſemiordinata quævis MP, demittanturque ad planum OG perpendicula M*m*, P*p*. Quoniam punctum P eſt in diametro AB, perpendicularis P*p* erit parallela ad A*a*, B*b*, & in eodem plano cum rectangulo A*ab*B: conſequenter in lineam *ab* cadet, ita ut ſit *ap* = AP, & *pb* = PB. Sed quia PM eſt ad AB & ON perpendicularis, & ad DC parallela; planum *p*XP, in quo ſunt perpendicula P*p*, M*m*, eſt ad planum *c*VC parallelum; & hinc *pm* ad *ab* normalis, & ſemiordinata curvæ *acdb*. Ob eandem rationem triangula *p*XP, *m*XM, *c*VC, *d*VD ſimilia ſunt, & *pm*: PM = *cd*: CD ſive *ab*; adeoque etiam *pm*²: PM² = *cd*² : *ab*². Eſt autem (Elem. 562) PM² = AP. PB = *ap*. *pb*; conſequenter *pm*² : *ap*. *pb* = *cd*² : *ab*², quæ eſt proprietas ellipſeos (Elem. 820).

357. Co-

357. Corollarium I. Projectio orthographica circuli A C B D eſt ellipſis *a b c d* (345).

358. Corol. II. Ob paralleliſmum planorum ſimilium *f d* D F, *p m* MP, & rectarum *a b*, A B, eſt *p m*: P M = *d f*: D F, & P F = *p f*: itaque projectio *d m* arcus cujusvis D M eſt ejusmodi, ut ſemiordinata *m* H ad axem minorem ellipſis ſit æqualis ſinui P F arcus D M. Eſt enim *m* H = *p f* = P F; & ſemiordina ad axem majorem *m p* eſt ad coſinum M P ejusdem arcus D M, ut eſt *f d* ad F D, ſive ut axis minor ellipſis ad axem majorem (Elem. 895).

359. Corollarium III. Si detur ellipſis *a c d b* (fig. 49) quæ ſit projectio orthographica alicujus circuli, debeatque ea dividi in gradus, ſive in arcus dati numeri graduum, deſcribatur ſuper axe majore circulus *a* M D *b* C, iſque in gradus dividatur, ſeu accipiantur in eo arcus D M, D M &c. dati numeri graduum, initio diviſionis ſumpto a puncto, per quod diameter cum aliquo axe congruens tranſit, velut hic C D. Tum e ſingulis diviſionis punctis M, M &c. demittantur perpendicula M P, M P &c., quæ interſectione ſua determinabunt puncta correſpondentia in projectione elliptica *m*, *m* &c. Nam abſciſſæ F P, F P &c. ſunt ut ſinus arcuum D M, D M &c, & ſemiordinatæ P *m*, P *m* &c. ſunt ad correſpondentes ſemiordinatas circuli P M, P M &c. ut axis minor ad majorem.

360. Corollarium IV. Si projectio elliptica infinite contrahatur, ita ut tota coincidat cum axe ſuo majore *a b* (id, quod ſemper evenire debet, dum oculus in plano circuli projiciendi poſitus eſt) diviſio ita inſtituetur: nempe e medio puncto hujus axis majoris accipiantur ſuper eo partes F P, F P &c, quæ ſint in ratione ſinuum reſpondentium numero graduum dato.

361. Scholium. *Diviſio ellipſis in gradus ſuos etiam inſtitui poteſt ope circuli c* N *d* O *ſuper axe minore deſcripti*, & in arcus *d* I, *d* I &c. totidem graduum diviſi, quot arcus D M, D M &c. continent; ſi ſcilicet ſinus iis correſpondentes I H, I H &c. producantur, donec ellipſi occurrant, quod in iisdem punctis *m*, *m* &c. fiet. Cum enim arcus D M, *d* I ſint ejusdem numeri graduum, eorum ſinus & coſinus ſunt inter ſe, ut eorum radii F D, F *d*. Hinc *primo* eſt K M (vel F P): H I = F D: F *d*. Eſt vero (Elem. 895) H *m*: H I = F D: F *d*; itaque H *m* = F P, & uterque circulus determinat punctum *m* in eadem ab axe *c d* diſtantia. *Secundo*: P M (vel F K): F H = F D: F *d*; ſed etiam P M: P *m* = F D: F *d*; quare F H = P *m*, & uterque circulus determinat punctum *m* in eadem diſtantia ab axe *a b*: ergo debent idem punctum ellipſeos determinare.

362. *Hinc vero deducitur methodus expedita ſimul deſcribendi, & ut libuerit, dividendi ellipſin, vel ejus portionem quamvis, ſuper axibus datis* a b, c d. Etenim ſi ſuper utroque axe deſcribantur circuli, eorumque arcus D M, *d* I accipiantur ſimiles & præſcripti numeri graduum, diviſionis initio facto a diametro aliqua communi utrique circulo, velut C D; rectæ M P ad diametrum C D parallelæ & per omnia puncta M ductæ, interſectione ſua cum rectis H *m* ad alteram diametrum *a b* parallelis, & per correſpondentia diviſionis puncta I tranſeuntibus, determinabunt totidem puncta ellipſeos *m*, *m* &c.

363.

THEOREMA I. *Si orbita vera oculi ſit circulus, & objectum immobile ab oculo diſtantiam quaſi immenſam habeat; projectio orbitæ opticæ* ACBD (fig. 53), *cum in ſuperficie ſphæræ cæleſtis exiguum admodum ſpatium* ONGI *occupet, quod pro plano haberi poteſt, eſt ellipſis* acbd, *cujus axis major* ab *eſt parallelus plano orbitæ oculi* QR, *& æqualis arcui cæleſti* ab, *quem radii* Sa, Sb *e loco imaginario oculi* S *ad extrema puncta diametri* ab *plano* ONGI *parallelæ ducti intercipiunt; & axis minor* cd *eſt in plano comparationis, ſive in plano ad planum orbitæ oculi* QR *perpendiculari: axis vero minor eſt ad majorem, ut ſinus arcus* QO, *qui metitur diſtantiam plani orbitæ oculi* QR *a plano orbitæ opticæ* OK, *eſt ad ſinum totum.*

Demonſtratio. Quoniam per hypotheſin circulus ACBD fere infinite diſtat ab oculo S; & radii e centro ad ſuperficiem ſphæræ ducti eidem ſunt perpendiculares, evidens eſt rectas *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd* &c. eſſe inter ſe parallelas, & ad planum ONGI, ad alterum planum OK inclinatum, normales. Quare (356) curva *acbd* eſt ellipſis, cujus axis major æquatur diametro AB circuli ACBD; & axis minor *cd* eſt perpendicularis ad planum orbitæ oculi, ſeque habet ad axem majorem, ut ſinus arcus QO ad ſinum totum.

364. Corollarium I. Projectio *acb* partis circuli ACB verſus oculum ſitæ, ſive oculo propioris, eſt portio ellipſeos maxime ſupra planum oculi elevata, ſeu ut verius dicamus, maxime ab hoc plano remota: ex oppoſito projectio *bda* partis circuli BDA, quæ eſt ex altera parte oculi, ſeu quæ ab oculo magis diſtat, eſt ellipſeos pars inferior, hoc eſt plano orbitæ oculi viciniſſima.

365. Corollarium II. Quo planum orbitæ opticæ magis accedit ad ſitum perpendicularem reſpectu plani orbitæ veræ oculi, eo magis ejus projectio dilatatur, & ad circulum propius accedit; ita ut ſi orbita optica reſponderet polo Z circuli maximi, in cujus plano eſt orbita oculi, ejus projectio eſſet circulus, quia tunc axis uterque ellipſeos fieret æqualis; verum ſi orbita optica ſit in eodem plano cum orbita oculi, ejus projectio eſt ellipſis ita contracta (axe minore exiſtente infinite parvo) ut proprie non ſit niſi linea recta æqualis axi majori, ſive diametro orbitæ opticæ.

366. Corollarium III. Itaque ſi objectum aliquod cæleſte F ſit immobile, & diſtantiam ingentem ab oculo obſervatoris habeat, qui ſe in centro S circuli, quem reipſa percurrit, quieſcere exiſtimat; hoc objectum *primo* non debet apparere in vero loco *f*, in quo terminatur radius viſualis; ſed ſingulis revolutionibus oculi in ſua orbita videbitur circa verum locum *f* ellipſin *acbd* deſcribere, conſequenter putabitur jam directione *acb* (dum unam ellipſeos medietatem deſcribit); jam directione oppoſita *bda* moveri, dum alteram medietatem percurrit. Dicitur autem objectum in tali ca-

ſu primo quidem eſſe *directum*, poſtea vero *retrogradum*. *Secundo.* Idem obiectum videbitur habere celeritates admodum inæquales : nam quando circa extrema *c* & *d* axis minoris eſt, ſpatium, quod deſcribit, directe in oculum incurrit, adeoque magna tum celeritate moveri putatur; poſtea motum eo magis retardat, quo propius ad vertices ellipſeos *a* & *b* accedit, quia ſcilicet arcus, quos ibi deſcribit, ſunt magis obliqui ad radios viſuales; ita quidem, ut quando verſatur in extremitate utravis axis majoris ſuæ ellipſeos, videatur velut *ſtationarium*, ſeu immobile tam reſpectu progreſſionis directæ, quam retrogradationis, de quibus diximus; poſtea directionem mutat iterum, & ſic deinceps.

367. Corollarium IV. *Cognita magnitudine diametri orbitæ veræ oculi, & arcus cæleſtis* a b, *quem ſubtendit axis major projectionis orbitæ opticæ* a b, *cognoſci etiam poteſt diſtantia loci putatitii oculi a centro orbitæ opticæ objecti, hoc eſt, ab ipſo objecto.*

Nam tunc radii viſuales e loco putatitio oculi ad duo extrema axis majoris ducti ſunt crura æqualia trianguli iſoſcelis, cujus baſis eſt idem axis. Igitur recta e loco putatitio oculi ad punctum medium hujus axis ducta hoc ipſum triangulum iſoſceles in duo triangula rectangula æqualia dividit (Elem. 500), in quorum utrovis notus eſt angulus, quem medietas arcus *a b* metitur, & latus ei oppoſitum, æquale dimidio axi *a b*: quare per trigonometriam inveniri poteſt quantitas perpendicularis ad centrum orbitæ opticæ ductæ.

368. Lemma III. Si peripheriæ circuli A B C in eodem plano inſiſtat alter circulus A M D P (fig. 56), qui ponatur ab initio non habere alium motum, quam rotationis circa proprium centrum O juxta ſitum literarum A, M, D, P; manifeſtum eſt, quod quamvis quodlibet ejus punctum A, dum peripheriam totam percurrit, omnes poſſibiles directiones reipſa habeat, nihilominus ſi ejus motus ad centrum S referatur, ſolummodo duas directiones inter ſe oppoſitas habeat; alteram quam *directam* vocabo, dum ſemicirculum M D P deſcribit, qui dicatur *ſemicirculus ſuperior*; alteram quam appellabo *retrogradam*, dum *ſemicirculum inferiorem* P A M percurrit.

Sed ſi præterea ſupponatur, quod centrum O circuli A M D P moveatur directione O I N, ita ut circulus hic rotæ inſtar ſuper peripheria A B C volvatur, tum vero evidens eſt *primo*, quod via centri O ſit circulus major, quam A B C, & eidem concentricus.

369. Evidens eſt *ſecundo*, quod punctum A ad circumferentiam A B C non redeat, niſi poſtquam totam ſui circuli peripheriam emenſum eſt, & præterea arcum ejus B L, qui tot gradus continet, quot arcus A B, inter punctum A, e quo digreſſum eſt, & punctum B, in quo iterum rediit, interceptus. Nam ſi punctum A in digreſſu ſuo e puncto aliquo fixo infinite diſtante videatur per radium O H, ejus revolutio circa centrum proprium tunc reipſa abſolvitur, quando redit ad talem ſitum, ut per radium ad idem punctum fixum ductum cerni poſſit, quippe in hac hypotheſi circulus A B C omni extenſione ſenſibili caret: itaque ſi puncto A in B exiſtente per centrum I ducatur I L h ad A H parallela, hæ duæ reſpectu puncti fixi infinite diſtantis coincidunt in unam lineam: eſtque punctum L illud, in quo deberet exiſtere A, ut cenſeretur revolutionem integram circa centrum ſuum O confeciſſe. Quare cum non in L, ſed in B exiſtat,

ſtat, prærer circulum ſuum integrum, etiam arcum BL deſcripſit, qui tot gradus continet, quot arcus OI, ſeu AB, ob parallelas Ih & AH. Verum ſi motus referatur ad punctum S, quando A rurſus ad peripheriam in B redit, ſolum circumferentiam ſui circuli AMDP deſcripſiſſe videtur.

Tertio. Quod ſi notetur via, quam deſcribit punctum A, dum circulo AMDP ſemel ſuper ABC voluto a peripheria hujus digreſſum ad eandem redit, habebitur curva A*e*Q*g*B; & dum ſecundo ita volvitur, rurſus curva BKC deſcribetur, quæ *epicyclois* dicitur, & ſic in ſingulis volutionibus. Poteſt vero eſſe triplex caſus.

370. Caſus I. Si circulus ABC interea maneat immobilis, dum alter AMDP ſuper ejus peripheria volvitur (fig. 56); ſingulæ epicycloides, ut A*e*Q*g*B appellantur *ſimplices*, ſeu *ordinariæ*, quibus ſequentes conveniunt proprietates:

Primo: Quacunque inæquali celeritate circulus volvatur, ſemper arcus AB (quem *baſin* epicycloidis dicimus) æquatur peripheriæ circuli AMDP.

Secundo: Si arcus OI, ſimilis arcui AB, dividatur in quatuor partes æquales in punctis E, F, G, erit E locus centri circuli AMDP, dum punctum A quartam ſuæ viæ partem in circumvolutione deſcripſit. Idem eſt de punctis F, G, I, in quibus centrum erit poſt quemvis viæ quadrantem, donec punctum A ad peripheriam ABC redeat. Itaque ſi per F producatur radius SF, donec occurrat epicycloidi in Q, erit Q vertex epicycloidis, & pars radii QT ejus axis, diametro circuli AMDP æqualis. Et ſi centro E, radio AO deſcribatur arcus circuli ad partes puncti O, is occurret epicycloidi in *e*, in quo eſt punctum A, centro circuli O in E exiſtente. Simili ratione reperitur, punctum A in *g* exiſtere, dum centrum in G verſatur: ex quo ſequitur, arcum A*e* deſcribi, quando punctum A eſt retrogradum, & dimidium ſui ſemicirculi inferioris percurrit; arcum vero *e*Q*g*, dum deſcribit motu directo ſemicirculum ſuum ſuperiorem; denique arcum *g*B, dum punctum A retrogradum alterum dimidium ſui circuli inferioris conficit.

Tertio. Vertex epicycloidis Q eſt in medio arcuum A*e*Q, Q*g*B æqualium, & ſimiliter ſitorum reſpectu axis QT.

Quarto. Arcus A*e*, *g*B cavi verſus axem TQ, magis ad eum vergere debent, quoniam reſpondent motui retrogrado puncti A, cujus directio ejusmodi eſt; at vero introrſum prorſus flecti, ut fit in figura 54, non poſſunt; nam cum via centri OI excedat ſingulas revolutiones æquales arcui AB, qui circuli AMDP peripheriam adæquat; motus hujus centri directione OIN magis impellit punctum A verſus K, quam idem motu rotationis circa ſuum centrum O in retrogradatione in oppoſitum feratur.

Quinto. Tranſitus puncti A epicycloides deſcribentis ex arcu prioris Q*g*B in arcum ſequentis BK fit per angulum in B: nam poſtquam punctum A deſcripto ultimo latere infinite parvo epicycloidis AQB ad punctum B pervenit, illico per primum latus infinite parvum epicycloidis BKC iterum aſcendit, nullo prorſus ſpatio inter hæc duo latera interjecto.

Sexto. Hinc punctum A e puncto S ſpectatum, ſemper apparet directum; verum motus ejus per totum arcum A*e*Q acceleratur; in vertice Q nanciſcitur velocitatem maximam, quæ dein per arcum Q*g*B ita decreſcit, ut in puncto B videatur expirare; poſtea denuo motus acceleratur per arcum BK.

371. Caſus II. Si interea, dum circulus AMDP ſuper ABC volvitur, etiam ipſe circulus ABC circa ſuum centrum S eadem directione rotetur (fig. 55); aut generatim, ſi centrum circuli AMDP majore velocitate angulari progrediatur in circulo OIN, quam punctum A in peripheria AMDP moveatur, epicylois a digreſſu puncti A a peripheria ABC uſque ad ejus reditum deſcripta eſt *prolongata*, cui ſequentes proprietates manifeſte competunt:

Primo. Cum circulo ABC quieſcente nihilominus punctum A in epicycloide ſimplici continuo verſus C progrediatur, omneſque arcus hujus epicycloidis, ſut ſucceſ-

ſive deſcribuntur, ita ad C magis accedant; ſi præterea ponatur ipſe circulus ABC eadem directione rotari, neceſſe eſt, ut celeritas puncti A verſus eandem partem major ſit, quam dum deſcribit epicycloidem ſimplicem, & hinc ſpatia ſic deſcripta majora eſſe debent, & baſis epicycloidis AB æquatur ſummæ e circumferentia circuli AMDP, & illo arcu circuli ABC, quo is ipſe interea rotatus eſt, dum punctum A ab eo digreſſum iterum rediit ad eundem.

Secundo. Si motus utriusque circuli ſit æquabilis, puncta E, F, G, arcum OI in quatuor partes æquales ſecantia, determinant eodem modo, ut ſuperius de epicycloide ſimplici diximus, arcus A*e*, *e*Q, Q*g*, *g*B reſpondentes motui puncti A in partibus ſuperioribus & inferioribus ſui circuli; ſic etiam habetur axis TQ diametro AD æqualis; & arcus A*e*Q, Q*g*B ſunt inter ſe æquales, & ſimiliter reſpectu axis poſiti.

Tertio. Arcus A*e*, *g*B eo minus ad axem vergunt, quo major eſt celeritas circuli ABC.

Quarto. Tranſitus puncti deſcribentis epicycloidem ab arcu Q*g*B ad arcum BK non fit per angulum, ſed per curvam ad B tanto latiorem, quanto celeritas circuli ABC eſt major. Quippe tunc velocitate exiſtente majore punctum A eo magis oblique per arcum Q*g*B deſcendit; & ubi ad B pervenit, exiguum quoddam ſpatiolum ſuper ABC adhuc deſcribit, antequam per arcum BK rurſus aſcendat, ita ut tranſitus in curva *g*BK fiat.

Quinto. Punctum A e puncto S viſum ſemper manet directum, ejusque velocitas ab A uſque in Q creſcit; hinc uſque ad B minuitur; verum in B non eſt nulla, ſed ſolummodo velocitati angulari circuli ABC æqualis.

372. Caſus III. Si interea, dum punctum A ad peripheriam circuli ABC redeat, hic circulus directione oppoſita circa ſuum centrum rotetur; aut generatim, ſi centrum circuli AMDP in circulo OFI minore velocitate progrediatur, quam punctum A in peripheria AMDP moveatur, epicyclois fiet *contracta*. Caſus hic complures alios in ſe complectitur; ſed ne hanc theoriam citra neceſſitatem implicatam reddamus, id ſolum in præſens ſupponemus, quod velocitas circuli ABC retrogradientis minor ſit velocitate puncti A in ſua peripheria AMDP lati. In hac hypotheſi

Primo. Si circulus ABC (fig. 54) eſſet immobilis, nullum epicycloidis punctum eſſet retrogradum; ſed quia ABC retrogreditur, ejus velocitas augere debet velocitatem puncti A in ſemicirculo ſuo inferiore, in quo ſit retrogradum; & ex oppoſito in ſemicirculo ſuperiore, in quo eſt directum, minuere. Ex quo fieri debet, ut extenſio epicycloidis quoad ſpatia in peripheria ABC ſingulis revolutionibus ab A verſus C confecta contrahatur, ejuſque baſis AB æquetur ſolum differentiæ inter peripheriam AMDP, & arcum illum circuli ABC, quo is interea regreſſus eſt, dum punctum A ad eundem rediit.

Secundo. Suppoſito utriusque circuli motu æquabili, iterum ut ſuperius reperiuntur arcus A*e*, *e*Q, Q*g*, *g*B partibus inferioribus & ſuperioribus circuli AMDP reſpondentes; item axis TQ = AD, & arcus A*e*Q, Q*g*B ſimiles & æquales, ſimiliterque reſpectu axis TQ poſiti.

Tertio. Arcus A*e*, *g*B, retrogradationi puncti A reſpondentes, eo magis verſus axem QT curvantur, quo velocitas circuli ABC major eſt; & flectuntur etiam introrſum, ita, ut contiguarum epicycloidum arcus ſeſe interſecent, quod punctum A, dum eos deſcribit, feratur duplici motu oppoſito directioni verſus C.

Quarto. Tranſitus puncti A per punctum B fit in curva introrſum flexa *g*B*m*, quia dum deſcripto ultimo latere infinite parvo arcus Q*g*B, ad B advenit, velocitate retrogradientis circuli ABC abripitur, & ſpatiolum aliquod exiguum verſus *m* deſcribit, antequam per arcum B*m*K iterum aſcendat.

Quinto. Punctum A e puncto S conſideratum, videri debet, jam directum, jam retrogradum, jam etiam immobile ſive *ſtationarium*. Ductis enim ex S tangentibus S*m*, S*n*, S*t*, S*y*, liquet, punctum A fore directum, dum deſcribit arcum *n*Q*g t*, cujus nempe

nempe omnia puncta verſus C diriguntur: quando autem pervenit ad tangentem S*t*, apparebit *ſtationarium*, hoc eſt, nec verſus C, nec verſus O tendet eo tempore, quo arcum, qui cum tangente proxime congruit, percurrit. Denique in arcu *t* B *m* erit retrogradum, qui arcus ſcilicet inter tangentes comprehenditur. Ubi ad *m* pervenit, iterum fit ſtationarium, tum in arcu *m* K *y* directum; donec ad *y* ſtationarium, & poſtea rurſus retrogradum appareat, ac ſi deinceps. Atque hac ratione in ſingulis revolutionibus in ſuo circulo punctum A fit bis ſtationarium, ſemel directum, & ſemel retrogradum.

Sexto. Porro manifeſtum eſt, velocitatem angularem puncti A fore nullam, dum eſt ſtationarium; poſtea creſcere, dum vel ad verticem epicycloidis, vel ad infimum ejus punctum, in quo peripheriam circuli A B C iterum contingit, pervenit, quibus in locis velocitas maxima videtur, quod hi arcus oculo obſervatoris in S directe ſint expoſiti; poſtea motus retardatur uſque dum fiat iterum ſtationarium.

Septimo. Arcus retrogradationis *t* B *m*, eo major eſt, quo velocitas angularis circuli regredientis A B C eſt major.

373. Corollarium. Ex his illud generatim deducere licet, in ejusmodi motibus ſpeciem epicycloidis pendere a ratione magnitudinis baſis A B ad peripheriam circuli, in qua movetur punctum A.

374. Scholium. Si in primo & ſecundo caſu motus utriusque circuli non eſſet æquabilis, epicycloides naſcerentur minus regulares, axis T Q non tranſiret per medium inter arcus A *e* Q, Q *g* B, qui nec æquales, nec ſimiliter poſiti eſſent, ſed alter altero magis prolongaretur, prout duarum celeritatum combinatio, magis in hanc, quam in alteram partem conveniret. Nihilominus tamen forma epicycloidis hæc fere, quam deſcripſimus, ſemper prodiret; hoc eſt, curvatura ad B imitaretur eam, quam fig. 54 & 55 depinximus.

Ex generali hac theoria nihil deducemus, niſi quod exponendis phænomenis motuum planetarum, prout in noſtro ſyſtemate ſolari diſpoſiti ſunt, applicari debet.

375. THEOREMA II. *Si objectum & oculus moveantur uniformiter velocitatibus angularibus* V, u, *in circulis concentricis, quorum radii ſint* R & r, *verſus eandem partem, loco putatitio oculi exiſtente in centro: orbita optica objecti eſt curva compoſita e tot epicycloidibus, quot vicibus oculus ex eadem parte ad planum comparationis pervenit; epicycloides autem hæ ſunt vel ſimplices, vel prolongatæ, vel contractæ, prout* V R — V r *vel eſt æquale, vel majus, aut minus, quam* u r — V r, *oculo circulum interiorem percurrente; at ſi is in circulo exteriore feratur, ſpecies epicycloidum dependet a ratione, quam habet* u r — u R *ad* V R — u R.

Demonſtratio. Si objecto quieſcente oculus moveatur in circulo, puteturque in centro ſuæ orbitæ quieſcere, nunquam objectum in loco ſuo proprio videt, ſed apparet ei circa locum ſuum proprium circulum deſcribere, æqualem illi, quem ipſe oculus percurrit, & celeritate eadem (352). Itaque ſi tam objectum, quam oculus una moveantur in circulis concentricis, motus objecti reſpectu loci putatitii oculi videri debet compoſitus e duplici, altero revolutionis in epicyclo circa locum verum objecti; altero progreſſionis centri hujus epicycli in orbita objecti. Atque hinc objectum reſpectu loci putatitii oculi ita ſe habet, ut punctum A (fig. 54, 55, & 56) relate ad S; conſequenter orbita optica objecti

debent esse tot epicycloides sese continuo ordine excipientes, quoties oculus ad planum comparationis versus eandem partem redit (quippe non prius videri potest objectum unam in epicyclo revolutionem confeciſſe respectu puncti S, quam oculus ad dictum planum redierit): species autem harum epicycloidum dependet a ratione magnitudinis absolutæ peripheriæ epicycli, sive orbitæ oculi, ad magnitudinem arcus AB, similis arcui OI, quem objectum percurrit interea, dum oculus ad planum comparationis redit.

I. Ut jam duæ hæ magnitudines rite exprimantur, observandum est, quod cum oculus & objectum moveantur versus easdem partes, oculus ad planum comparationis non redeat, nisi excessu celeritatis suæ supra celeritatem objecti. Unde si fiat hæc proportio: ut excessus $u - V$ velocitatum angularium oculi & objecti, quæ habentur eodem tempore, est ad V velocitatem objecti eodem tempore; ita 360°, seu summa omnium excessuum velocitatum angularium, quos oculus acquirere respectu objecti debet, ut ad planum comparationis possit redire, sunt ad $\frac{360^\circ \times V}{u - V}$, summam velocitatum angularium objecti tempore, quo oculus ad planum comparationis redit; ex hac, inquam, proportione habetur $\frac{360^\circ \times V}{u - V}$ pro angulo OSI, vel ASB, qui æquatur summæ velocitatum angularium objecti. Est autem radius arcus AB, mensurantis angulum ASB, $SO - AO = R - r$; & (91) arcus omnis æquatur angulo in radium ducto; itaque magnitudo absoluta arcus AB est $\frac{360^\circ \times V}{u - V}(R - r)$. Ob eandem rationem magnitudo peripheriæ epicycli APDM est $360^\circ \times r$: adeoque arcus AB est ad epicyclum APDM, ut $\frac{360^\circ \times V}{u - V}(R - r)$ ad $360^\circ \times r$, sive ut $\frac{V}{u - V} \times (R - r)$ ad r; aut ut $VR - Vr : ur - Vr$; vel denique ut $\frac{R - r}{r}$ ad $\frac{u - V}{V}$.

376. II. Si orbita objecti MDP (fig. 57) sit intra orbitam oculi, ut si is percurrat arcum *ab* intervallo reditus sui ad planum comparationis ex eadem parte; centrum S orbitæ veræ objecti videbitur (353) arcum æqualem OI describere; & quia eodem tempore objectum semel in peripheria sui circuli MDP revolvitur, oculo, cujus locus imaginarius est in S, apparet eodem tempore in circulo ipsi MDP æquali semel circuire, quo centrum S arcum OI describit. Hinc orbita optica objecti rursus debet videri composita ex epicycloidibus AQBKC, quarum species dependet a ratione arcus AB ad peripheriam circuli MDP. Arcus porro

AB

AB æquatur ſummæ celeritatum angularium oculi intervallo reditus ſui ad planum comparationis; & radius hujus arcus eſt $r-R$; MDP vero reperitur ut prius $= 360^\circ \times R$; & hinc arcus $AB = \frac{360^\circ \times u}{V-u}(r-R)$: ergo ſpecies epicycloidum pendet a ratione $ur - uR$ ad $VR - uR$, ſeu $\frac{r-R}{R}$ ad $\frac{V-u}{u}$.

377. Corollarium I. *Sive velocitates objecti & oculi ſint æquabiles, ſive non ſint æquabiles, locus apparens objecti ſemper eſt in vertice epicycloidis, dum loco vero oculi exiſtente in plano comparationis, locus oculi putatitius eſt inter oculum & objectum: & locus apparens objecti eſt ſemper in arcu infimo epicycloidis, quando locus verus oculi exiſtentis in plano comparationis eſt ſimul inter objectum & locum putatitium oculi, aut vero quando objectum eſt inter locum verum & putatitium oculi.* Nam vertex epicycloidis eſt punctum ex omnibus maxime remotum a centro S, & arcus infimus epicycloidis eſt eidem centro S viciniſſimus: jam vero liquet (Elem. 546), quod oculus in plano comparationis, & trans locum ſuum putatitium reſpectu objecti exiſtens, ab eo maximam, quam poteſt acquirere, habeat diſtantiam: contra vero dum eſt cis locum ſuum putatitium, aut dum objectum eſt inter oculum, & locum ejus putatitium S, minimam omnium diſtantiam ab objecto habeat: igitur in primo caſu locus apparens objecti eſt maxime omnium remotus a loco putatitio oculi; & in aliis duobus eſt eidem omnium viciniſſimus.

378. Corollarium II. Projectiones epicycloidum in ſuperficie ſphæræ cæleſtis debent eſſe epicycloides quædam ellipticæ, quarum axes TQ ſint inter ſe, ut ſinus arcuum cæleſtium, qui metiuntur diſtantiam plani oculi a plano epicycli objecti (363); & vertices Q, K debent apparere maxime vicini plano oculi; extrema vero puncta A, B, C maxime remota a plano orbitæ oculi (364).

ARTICULUS II.

Applicatio Theoriæ præcedentis ad phænomena pendentia a motu Telluris annuo.

379. Ut theoria ſuperiore articulo expoſita rite ad phænomena cæleſtia, quorum cauſa eſt annuus motus telluris, applicetur, obſervandum eſt *Primo*, planum quod generaliter dicimus orbitæ oculi, in noſtro caſu eſſe planum eclipticæ. *Secundo* orbitam oculi eſſe eam ellipſin, quam tellus reipſa ſingulis annis circa ſolem deſcribit, ſed quæ a circulo non multum differt, axe ejus majo-

majore ad minorem se habente ut 2000, 142 ad 1999, 857. *Tertio.* Cum videatur sol ipse in hac ellipsi circa terram moveri, ac terra centrum omnium motuum cæleſtium occupare, quamvis id multum abſit a vero; ſequitur, locum putatitium oculi eſſe in vero ſolis loco. *Quarto.* Planum comparationis eſſe planum circuli maximi ad eclipticam perpendicularis, ac per ſolem & ſydus, quod obſervatur, tranſeuntis. Eſt itaque (303) planum circuli latitudinis. Dum oculo in hoc plano conſtituto ſol & ſydus ex eadem parte videntur, ſydus eandem cum ſole longitudinem habet, diciturque *cum ſole eſſe in conjunctione*, id, quod uno tantum modo fieri poteſt, ſi orbita ſyderis orbitam telluris ambiat; at duplici ratione evenire idem poteſt, quando ſyderis orbita intra orbitam telluris ſita eſt. Tunc enim videbitur ſol cum ſydere ad eandem partem, ſed vel ſydus ultra ſolem, quæ *conjunctio ſuperior* eſt; vel cis eundem, & intra terram, quæ *conjunctio inferior* dicitur. Verum oculo in plano comparationis inter ſydus & ſolem verſante, hæc duo centum octoginta gradibus in longitudine differre videntur, & dicitur *ſydus tunc eſſe in oppoſitione cum ſole.* Aſt generatim ſydus eſſe *in Syzygiis* dicitur, quando vel in conjunctione, vel in oppoſitione conſtitutum eſt. Denique oculo a plano comparationis ita remoto, ut arcus eclipticæ inter ſolem & planum circuli latitudinis ſyderis interceptus ſit 90°, dicitur ſydus eſſe *in quadratura cum ſole.*

ARTICULUS III.

De motu apparente ſtellarum fixarum, quem efficit motus telluris annuus.

380. Juxta theoriam motus apparentis, ſi ſtellæ ſunt reipſa fixæ & immobiles, debent videri ſingulis annis deſcribere exiguam aliquam ellipſin, quæ ſcilicet eſt earum epicycli, ſive orbitæ opticæ projectio. Axis major hujus ellipſeos debet eſſe parallelus plano eclipticæ (363) & æqualis chordæ arcus cæleſtis, quem ſubtendit diameter epicycli ſtellæ, ſive diameter orbitæ telluris, quæ eidem æqualis eſt (350): hinc axis iſte eo minorem ſubtendit arcum, quo ſtella (quæ videtur in ipſa ſuperficie ſphæræ cæleſtis eſſe) a terra eſt remotior (31). Axis minor debet eſſe normalis ad planum eclipticæ, hoc eſt, debet eſſe in plano circuli latitudinis, qui ad eclipticam perpendicularis determinat ſtellæ longitudinem: præterea ratio hujus axis minoris ad majorem eſt ut ſinus latitudinis ſtellæ ad ſinum totum. In hac ellipſi ſtella videri debet in extremitate inferiore axis minoris, aut rectius, in extremitate plano eclipti-

eclipticæ propiore, dum cum ſole eſt in conjunctione (364); ſed dum eſt in oppoſitione, apparere debet in extremitate ſuperiore axis minoris: eadem videbitur in extremitate axis majoris orientali, quando, tellure in parte orbitæ ſuæ occidentali verſante, eſt in quadratura cum ſole; & quando eſt in quadratura, tellure verſante in parte orientali ſuæ orbitæ, apparebit in extremitate occidentali axis majoris.

381. Hinc ſequitur I: *Quod dum ſtella eſt in conjunctione vel oppoſitione cum ſole, videatur in ſua vera longitudine*, quia videtur in plano circuli latitudinis, quod per ſtellam, ſolem, & oculum tranſit; verum eo tempore *non videtur in ſua vera latitudine*: nam in conjunctione, dum ſtella eſt in extremitate inferiore axis minoris ſuæ ellipſeos, ejus latitudo eſt minima, ſeu a vera differt, quantum unquam differre poteſt. Ex oppoſita ratione ejus latitudo eſt maxima in oppoſitione. *Et dum ſtella eſt in quadraturis, ejus latitudo apparens eſt æqualis veræ:* tunc enim ſtella eſt in axe ellipſeos ſuæ majore, parallelo ad eclipticam, & per verum ſtellæ locum tranſeunte; *ſed hoc tempore ejus longitudo a vera maxime differt.* Denique in quocunque alio, extra hos quatuor, ſitu ſtella ſit, locus ejus verus tam in longitudine, quam in latitudine a loco apparente differt.

382. *Parallaxis orbis annui* dicitur differentia inter locum verum ſyderis e ſole viſi, & ejus locum apparentem e tellure ſpectati. Differentia in longitudine vocatur *parallaxis longitudinis*; & differentia in latitudine, *parallaxis latitudinis.* Ita dicimus, parallaxin orbis annui in ſyzygiis eſſe nullam in longitudine; ſed maximam in latitudine: in quadraturis parallaxin orbis annui eſſe nullam in latitudine; ſed maximam in longitudine.

383. II. Sequitur: *quamvis ſtellam debere videri directam per ſex menſes*, in ſemiellipſi ſcilicet inferiore, hoc eſt, dum ab una quadratura per conjunctionem ad alteram quadraturam pergit; *& per ſex alios menſes retrogradam* in ſemiellipſi ſuperiore, dum ab una quadratura per oppoſitionem ad alteram movetur: denique *videri ſtationariam* in utraque quadratura cum ſole.

384. Ex obſervationibus accuratiſſimis noſtris inſtitutis temporibus, & inſtrumentis ſumma diligentia elaboratis, conſtat hos motus in fixis eſſe inſenſibiles, ut certum ſit apud Aſtronomos, axem majorem ellipſium ſtellarum maxime illuſtrium non ſubtendere arcum 3 vel 4 ſecundis majorem: ex quo eruitur (367) earum diſtantiam eſſe prope infinitam, ut quæ 28000000000000 leucas ‡ excedat, diametro orbis annui terræ exiſtente circiter 54525000 leucarum, ut ſequente Capite videbimus.

‡ gall.

Sed cum Aſtronomi proxime elapſi ſæculi adverterent variationes annuas admodum notabiles in omnibus fixis, vehementer

mirabantur, quod eas longe aliis legibus fieri cernerent, quam quas nunc expoſuimus: erant enim ſtellæ tum in extremitatibus axis minoris ſuarum ellipſium, quando juxta regulas præcedentes debuiſſent in extremitatibus axis maioris obſervari. Hæc diverſitas effecit, ut aſtronomi in operationibus ſubtilioribus non niſi magna cum cautela ſtellis fixis uterentur, ne ſcilicet motus ejusmodi incogniti, qui *aberratio fixarum* dicebantur, in aliquem eos errorem conjicerent. Verum cum D. Moulineux & dein D. Bradley has variationes maxima accuratione determinandas ſibi ſumerent, poſterior tandem veram cauſam phyſicam hujus motus apparentis detexit, regulasque condidit, ut ejus ratio in obſervationibus fixarum habeatur; id quod paucis hic exponimus.

385. *Primo.* Certum eſt, obſervationibus Satellitum Jovis (ut per decurſum patebit) ſuffragantibus, lumen, quo nobis objecta redduntur viſibilia, indigere tempore admodum ſenſibili, quo ab objecto ad oculum perveniat, dum objectum valde magnam habet diſtantiam. V.g. radius a ſole emiſſus ad terram non pertingit, niſi tempore 8 minutis majore elapſo.

386. *Secundo.* Certum præterea eſt, quod cum de præſente objecto certi non fiamus, niſi per impreſſionem radiorum luminoſorum in noſtros oculos, non niſi dependenter ab hac impreſſione de figura, & ſitu objecti judicemus; ita exiſtimamus objectum ſemper in linea recta ſitum, ſecundum quam impreſſio in oculum facta eſt; & licet radii ab objecto exeuntes ad nos non perveniant, niſi reflexi, fracti, ac a via detorti, quæcunque demum hujus cauſa fuerit; nihilo tamen minus judicamus, objecta eſſe in ea directione poſita, quam habent radii, cum oculum noſtrum ſubeunt, non autem in ea, quam habent, quando ab objecto egrediuntur.

387. His ita habentibus, ſi terra nullum haberet motum, radius luminis celeritate finita quacunque a ſtella egreſſus, & ad noſtrum oculum pertingens, quin ab aliqua cauſa phyſica a via ſua recta ſit detortus, oſtenderet ſtellam in ſitu ſuo vero, qualecunque tandem tempus inſumeret, ut inde ad nos veniret. Idem contingeret, ſi quidem terra moveretur, at velocitas luminis velocitatem terræ infinities excederet, quippe reſpectu celeritatis infinitæ terra quieſcere cenſenda foret. Verum ſi velocitas luminis habeat ad velocitatem terræ rationem finitam, impreſſio radii in oculum nec percipitur juxta directionem propriam, nec juxta directionem terræ, ſed inſtar ictus in planum mobile, ſecundum diagonalem parallelogrammi ſuper directione radii, & tangente orbitæ telluris in eo loco, in quo radius ad eam pervenit, deſcripti (hæc enim tangens eſt actualis directio, quam eo momento tellus habet) & cujus latera ſunt in ratione velocitatum, ſeu ſpatiorum a lumine,

&

& tellure eodem tempore confectorum: atque ita locus apparens ſtellæ debet eſſe illud cæli punctum, in quo hæc diagonalis terminatur.

Sit exempli cauſa TLQI (fig. 60) circulus infinite magnus, exhibens eclipticam, P ejus polus, S centrum, in quo eſt ſol; CFD orbita telluris: QPET circulus latitudinis per ſtellam quamvis E deſcriptus, cujus longitudinem in T, & latitudinem TE determinat: ſit TQ interſectio plani circuli latitudinis cum plano eclipticæ; & ponatur primo locus terræ in C, conſequenter ſtella (379) in conjunctione cum ſole exiſtente, juncta CE, & tangente Cc ducta (quæ tunc ad planum circuli latitudinis TPQ erit perpendicularis), accipienda eſt in CE pars quælibet CB, ac proportio ſequens facienda: ut celeritas luminis eſt ad celeritatem terræ eodem tempore; ita eſt CB ad Co (v. g. cum ſciatur, quod lumen intra 8′, 7″ temporis a ſole ad terram perveniat, & quod eodem tempore terra conficiat arcum 20″ ſuæ orbitæ, fiet BC = CS, ac analogia iſta: *ut radius ad tangentem* 20″; *ita eſt* CB *ad* Co). Super CB & Co conſtruatur parallelogrammum CBAo: liquet, ejus diagonalem cum latere BC comprehendere angulum 20″, & productam uſque ad ſuperficiem ſphæræ cæleſtis in χ, determinare locum apparentem ſtellæ.

388. Si ſupponatur orbita telluris circularis, & velocitas tam luminis, quam terræ æquabilis, adeoque in ratione conſtante, evidens eſt, quod ſi ſciretur tempus, quo lumen e ſtellis fixis ad nos uſque pervenit, haberetur valor de CE: & ex hac analogia: ut radius ad CE, ita tangens arcus a terra percurſi eo tempore, quo lumen conficit CE, eſt ad Cc; daretur parallelogrammum Ccχ E (quod *parallelogrammum aberrationis* dicam) ſimile parallelogrammo CBAo. Porro manifeſtum eſt, parallelogrammi hujus planum ſingulis annis debere revolutionem integram facere, quoniam ejus ſitus dependet a poſitione conſtante ſtellæ, & ſimul a poſitione variabili tangentis orbitam telluris in eo ſemper loco, in quo tellus verſatur. Sed quia ob diſtantiam fere infinitam fixarum a ſole & terra, tota orbita telluris BDC ſolummodo puncti alicujus ſenſibilis S rationem habet, ſupponi poteſt, planum parallelogrammi aberrationis verti circa rectam SE, a ſtella ad ſolem ductam, & quidem celeritate angulari rotationis æquali illi, qua terra circa ſolem movetur.

389. His poſitis, cum latus Cc ſit in plano eclipticæ, alterum ei parallelum Eχ, quodque diſtantiam loci veri ſtellæ ab ejus loco apparente metitur, debet circulum deſcribere, cujus planum eſt plano eclipticæ parallelum, & hinc projectio hujus circuli in ſuper-

ficie sphæræ cæleſtis eodem modo fit, ac alicujus epicycli, hoc eſt, fit elliptica, ut axis major ſit plano eclipticæ parallelus, minor vero majori ad angulos rectos inſiſtat, ſitque ratio axium, quæ eſt radii ad ſinum latitudinis ſtellæ. Sed enim motus apparens ſtellæ in hac ellipſi alia longe ratione fieri debet, quam motus apparens in elliptica projectione epicycli. Nam quando planum parallelogrammi aberrationis eſt perpendiculare ad planum circuli latitudinis T P Q (id, quod fit in ſyzygiis, cum tunc E χ ſit ad planum T P Q normalis), E χ, quæ metitur aberrationem, coincidit cum arcu circuli minoris eclipticæ paralleli, & per verum locum ſtellæ tranſeuntis: itaque in ſyzygiis aberratio tota fit in longitudine, & ſimul omnium maxima; cum ex oppoſito parallaxis orbis annui tunc ſit maxima in latitudine, & nulla in longitudine. Quando planum anguli aberrationis coincidit cum plano T P Q (quod fit, quando terra a ſyzygiis 90° abeſt, adeoque ſtella cum ſole eſt in quadratura) aberratio tota fit in latitudine, & quidem maxima, quippe ſtella in extremitate axis minoris ſuæ ellipſeos apparente; eſtque tunc nulla in longitudine: cum iterum contrarium accidat in parallaxi orbis annui. In omni alia poſitione plani anguli aberrationis, tam in longitudine, quam in latitudine locus apparens a vero differt.

390. Si ulterius concipiatur circulus declinationis R V X per ſtellam E deſcriptus, adeoque per centrum ellipſeos aberrationis, patet, quod quando ſtella videtur in interſectionibus ellipſeos cum hoc circulo, nullam appareat habere aberrationem in aſcenſione recta, quoniam tam locus ejus verus, quam apparens eſt in eodem circulo declinationis; & quando ſtella eſt in extremitatibus illius diametri ſuæ ellipſeos, quæ circulum R V X ſecat ad angulos rectos, nullam habebit aberrationem in declinatione, tam loco ejus vero, quam apparente exiſtente in eodem ad æquatorem parallelo.

Verum quia omnes declinationum circuli eclipticæ oblique inſiſtunt (præter colurum ſolſtitiorum) fieri non poteſt, ut ſtella eo tempore, quo tellus in ſua orbita 90° percurrit, a termino, in quo aberratio in aſcenſione recta nulla eſt, ad eum, in quo nulla eſt aberratio in declinatione, perveniat: & hinc quando aberratio in aſcenſione recta eſt maxima, ea non eſt nulla in declinatione, & viciſſim.

391. Graphice aberratio ſtellarum determinatur pro tempore dato, ſi deſcribatur circulus $\delta \chi \beta \varphi$ (fig. 58), cujus diameter horizontalis $\delta\beta$ deſignet arcum paralleli ad eclipticam, in quo ſtella ſita eſt; & verticalis $\chi\varphi$ portionem circuli latitudinis, ut adeo locus verus ſtellæ ſit in centro E. Dividantur radii E δ, E β in tot partes, quot unitates continet quartus terminus in hac proportione: *ut coſinus latitudinis ſtellæ eſt ad ſinum totum; ita ſunt* 20″ *ad numerum*

rum quartum. Atque hac ratione arcus paralleli ad eclipticam E♑, E♋ dividentur in numerum ſecundorum iisdem competentium. Pariter radii E♌, E♍ dividantur in 20″, quippe qui reſpondent arcubus circuli maximi. Denique circulus ♑♌♍♋ in ſigna & gradus ſecetur, ita, ut punctum ♑ reſpondeat longitudini ſtellæ; ordo autem ſignorum a ſiniſtra verſus dextram in ſuperiore parte circuli ſcribatur, ut ♑ denotet occaſum, ♋ ortum, ♌ ſeptentrionem, & ♍ meridiem. In radio E♌ accipiatur EC, quæ ſit ad E♌, ut eſt ſinus latitudinis ſtellæ ad ſinum totum: & (362) axibus ♋♑, CD deſcribatur ellipſis ♋C♑D, quæ erit projectio circuli aberrationis ſtellæ. Supponamus hanc ellipſin conſtructam eſſe pro ſtella, cujus longitudo ſit 12° ♉, & latitudo borealis 36°; ſolem vero tempore dato eſſe in 14° ♏. E puncto *m*, quod in circulo reſpondet 14° ♏, demittatur ad ♋♑ perpendicularis *m*N; erit M in ellipſi (359) locus apparens ſtellæ, perpendicularis MP vel NE ejus aberratio in longitudine, ſeu numerus ſecundorum, quo ſtella apparet orientalior, quam ſit reipſa; & perpendicularis MN=EP aberratio in latitudine.

Si deſideretur aberratio ſtellæ in aſcenſione recta, & declinatione, prius determinanda eſt poſitio circuli declinationis reſpectu circuli latitudinis.

Itaque ſit (fig. 45) locus verus ſtellæ in A (denominationes arcuum & circulorum hujus ſchematis vide N. 296 & 297); erit AE 54°, quod eſt complementum latitudinis AR: arcus GR, ſeu angulus PEA vero 48°, quæ eſt diſtantia 12° ♉ a proximo coluro ſolſtitiorum. In triangulo ſphærico APE datur igitur AE=54°, EP=23°. 28′½, & angulus AEP; hinc (Trig. 124) reperitur AP complementum declinationis ſtellæ 41°. 0′, & angulus PAE 26°. 50′, pars autem borealis circuli declinationis ſtellæ AP divergit a circulo latitudinis AE verſus orientem. Hinc (fig. 58) ita ducenda eſt diameter FG, ut ex parte orientali radii E♌ cum eo faciat angulum 26°. 50′, quæ circulum declinationis ſtellæ deſignabit. Dividantur radii EG, EF in 20 ſecunda, & ducatur altera diameter IH ad FG normalis, quæ exhibebit arcum paralleli ad æquatorem per ſtellam tranſeuntis; radii porro EI, EH in tot ſecunda dividantur, quot reperiuntur ex ſequente analogia: *ut coſinus declinationis ſtellæ eſt ad ſinum totum; ita ſunt 20″ ad numerum quæſitum,* qui in exemplo propoſito erit 30″½. Denique demiſſis ad FG & IH perpendiculis ML, & MQ, erit EQ=ML menſura aberrationis in aſcenſione recta, & EL=MQ metietur aberrationem in declinatione.

Methodum calculi aberrationum fixarum in ſequentibus dabimus. (vid. Sect. VI. C. I. Art. IX.)

ARTICULUS IV.

De motibus relativis Planetarum, quorum cauſa eſt motus telluris annuus.

392. Extra dubium eſt, obſervatori in ſuperficie telluris conſtituto, ejusque motum annuum planetis attribuenti, qui ſuum etiam habent motum in propriis orbitis, (25) quarum plana exiguis angulis ad planum eclipticæ inclinantur, debere videri hos planetas deſcribere epicycloides ellipticas admodum compreſſas. Sed quia orbita telluris ambitur (170) ab orbitis ♂, ♃ & ♄, contra vero ipſa intra ſe complectitur orbitas ♀ & ☿, commodum fuerit, planetas in duas claſſes reſpectu telluris tribuere, ac ♂, ♃ & ♄ vocare *planetas ſuperiores*; ♀ vero & ☿ *planetas inferiores.*

Ut jam ſciatur, cujus ſpeciei epicycloidem quisque planeta deſcribat, in ſuperioribus ratio arcus ab iis percurſi ad epicycli peripheriam ſumenda eſt $RV-rV$ ad $ru-rV$; in inferioribus autem $ru-Ru$ ad $RV-Ru$: ubi V exprimit velocitatem angularem planetæ, R radium orbitæ illius; u velocitatem angularem telluris, & r ſemidiametrum ſuæ orbitæ.

Omnibus jam magnitudine media acceptis, & ſumtis velocitatibus angularibus diurnis, $u=59'$, & $r=100$, erit

Pro ♄ $R=953$, $V=2'$;	hinc	$RV-rV : ru-rV = 1706 : 5700$.
Pro ♃ $R=520$, $V=5'$;		$RV-rV : ru-rV = 2100 : 5400$.
Pro ♂ $R=152$, $V=31'\frac{1}{2}$;		$RV-rV : ru-rV = 1638 : 2750$.
Pro ♀ $R=72$, $V=96'$;		$ru-Ru : RV-Ru = 1652 : 2664$.
Pro ☿ $R=38$, $V=245'\frac{1}{2}$;		$ru-Ru : RV-Ru = 3658 : 7082$.

393. Hinc I: *Omnes planetæ deſcribunt epicycloides contractas*, & quidem eo magis contractas, quo in rationibus allatis antecedens minor eſt termino conſequente.

394. II: *Omnes planetæ ſuperiores ſunt directi, quando ſunt in conjunctione cum ſole* (372); *retrogradi, dum ſunt in oppoſitione; & ſtationarii ante & poſt oppoſitionem.* Et quoniam planetæ inferiores non poſſunt ſoli opponi (quippe terra nunquam inter eos & ſolem verſante), ſed duplicem habent conjunctionem (379), evidens eſt, *planetas inferiores eſſe directos in conjunctione ſuperiore, retrogrados in conjunctione inferiore, & ſtationarios aliquo tempore eam præcedente, & conſequente.*

395. III. *Velocitas apparens planetarum tam directorum, quam retrogradorum augetur ab uno termino, in quo ſunt ſtationarii, uſque ad alterum, in*

quo

quo iterum fiunt ſtationarii (372)*: velocitas maxima in motu directo eſt in conjunctione; velocitas maxima in motu retrogrado habetur in oppoſitione ſuperiorum, & in conjunctione inferiore planetarum inferiorum.*

396. IV. *Dum planetæ ſunt in ſyzygiis, non habent parallaxin orbis annui in longitudine, hoc eſt, eorum longitudo eſt eadem, ſive e ſole, ſive e tellure ſpectentur; aut vero ſi planetæ inferiores ſint in conjunctione inferiore, eorum longitudo e terra viſa differt a longitudine ſpectata e ſole accurate* 180°, in his enim caſibus, ſol, terra, & planeta ſunt in eodem circulo latitudinis (379). Sed quoniam orbitæ a planetis deſcriptæ aliquantum inclinantur ad eclipticam, adeoque planetæ aliquam ubique latitudinem habent, præterquam dum ſunt in interſectione plani ſuæ orbitæ cum plano eclipticæ, ſequitur, *in ſyzygiis parallaxin orbis annui in latitudine eſſe admodum ſenſibilem; extra ſyzygias vero hanc parallaxin adverti tam in longitudine, quam in latitudine.*

397. Obſerva. Rationes ſuperius (392) allatæ accuratiores futuræ erant, ſi quidem e tabulis Aſtronomicis acceptæ fuiſſent velocitates veræ angulares planetarum, eorumque veræ diſtantiæ a ſole in ſyzygiis. V. g. dum Mars eſt in oppoſitione, & ſimul in aphelio (quod evenit, quando oppoſitio contingit circa 20 Februarii) maximam habet a terra diſtantiam, quam in hoc aſpectu unquam acquirere poteſt; eſtque tum $V = 26'.12''$, ſeu $1572''$, $R = 16652$; $u = 1°.0'.20''$, $r = 9898$; adeoque $RV - rV : ru - rV = 100 : 191$. Quando autem Mars in ſua oppoſitione eſt in perihelio (quod fit, oppoſitione incidente circa 25 Auguſti) habet minimam diſtantiam a terra, quæ in tali aſpectu dari poteſt; & eo tempore eſt $V = 38', 2''$; $R = 13822$; $u = 58'.0''$, $r = 10099$. Itaque $RV - rV : ru - rV = 100 : 143$.

Unde conſequitur, epicycloidem Martis eſſe magis contractam, dum eſt in aphelio, quam dum eſt in perihelio, idque in ratione 191 ad 143; adeoque Mars in aphelio longiore tempore, & majore cum velocitate debet eſſe retrogradus, quam in perihelio.

398. Epicyclois cujuslibet planetæ facile utcunque in plano eclipticam repræſentante deſcribi poteſt. Cum enim planetarum orbitæ exiguam ad eclipticam inclinationem habeant, earum projectio ab ipſis ſenſibiliter non differt; & cum præterea parum ſint eccentricæ, ad ſenſum pro circulis concentricis & motu æquabili deſcriptis haberi poſſunt. Deſcribantur itaque duo circuli concentrici, quorum diametri ſint in ratione axis majoris orbis annui telluris ad axem majorem orbitæ planetæ, cujus epicyclois deſideratur. Diviſo dein circulo orbitam telluris exhibente in tot partes æquales, quot libuerit, verbi gratia in gradus denos, fiat: ut $365\frac{1}{4}$ dies ſunt ad tempus revolutionis planetæ; ita ſunt 10 gradus ad numerum graduum, quos planeta in ſua orbita eodem tempore

de-

deſcribit, quo tellus 10 in ſua conficit. Numerus graduum inventus toties, quoties fieri poteſt, in circumferentiam circuli planetæ orbitam repræſentantis transferatur. Aſſumatur locus tam telluris in ſua orbita, quam planetæ, & quæratur (347) hujus locus opticus. Quod ſi hæc operatio continuetur per omnia, quæ ſequuntur, diviſionum utriusque orbitæ puncta, habebuntur omnia loca optica planetæ competentia locis veris terræ & planetæ; & ſi hæc loca optica conjungantur curva, ea componetur ex epicycloidibus planetæ.

CAPUT III.

De illuſionibus opticis in phænomenis motus diurni, quarum cauſa eſt ſitus obſervatoris in ſuperficie telluris.

399. Ex illuſionibus opticis, quas ſuperius (225) expoſuimus, conſectaneum eſt, ut obſervator in telluris ſuperficie conſtitutus, ſeque in centro revolutionum diurnarum ſyderum (quod idem eſt cum centro terræ) poſitum exiſtimans, quasdam inæqualitates in his revolutionibus animadvertat, quanquam eæ uniformes videantur. Atque hoc ipſum jam nobis explicandum eſt, iisdem adhibitis principiis.

400. Sit P (fig. 61) locus obſervatoris in ſuperficie terræ *h*P*r*G; *hr*D planum horizontis rationalis; Z ejus zenith in ſuperficie ſphæræ cæleſtis; C centrum revolutionis diurnæ, conſequenter locus putatitius oculi; HA*a*R circulus horizontis in ſphæræ cæleſtis ſuperficie terminatus; HZR planum verticalis primarii obſervatoris; CZLA planum meridiani; & ILK circulus parallelus, quem ſydus aliquod L revolutione diurna deſcribere videtur.

401. Sit jam ſydus in quovis puncto *l* ſui paralleli: obſervator illud re ipſa videt per radium P*l*; ſed quia exiſtimat ſe eſſe in centro C, putat illud a ſe videri per radium C*m*, parallelum & æqualem radio P*l*; ut adeo locus apparens ſyderis ſit in *m*, verus in *l* (347). Eodem modo reperiuntur loca apparentia M, μ, reſpondentia veris L, λ.

402. Angulus *l*C*m* ad centrum terræ inter locum verum & apparentem ſyderis comprehenſus, dicitur *parallaxis ſyderis*, quin aliud addatur. Hic angulus, quia P*lm*C eſt parallelogrammum, æquatur angulo P*l*C. Hinc *parallaxis ſyderis reſpectu obſervatoris, eſt angulus ad ſydus, comprehenſus inter centrum telluris, & locum in ſuperficie, in quo eſt obſervator.* Aut etiam dici poteſt: *parallaxin ſyderis eſſe inclinationem duorum radiorum viſualium ad ſydus ductorum, alterius quidem e centro telluris; alterius vero ex illo ſuperficiei puncto, in quo obſervator eſt conſtitutus.*

403. De-

402. Deducitur porro hinc I, quod *ſi ſtricte loquamur, parallaxis non dependeat per ſe a motu diurno ſyderis*; ſed tamen ejus effectus in hujus motus phænomenis præcipue ſentiantur.

404. II. Quod cum parallaxis efficiat, ut ſydera in aliis cæli punctis appareant, quam in quibus reipſa ſunt, eadem debeat immutare longitudinem, latitudinem, aſcenſionem rectam, & declinationem eorum. Atque hinc dicitur *parallaxis longitudinis* differentia inter longitudinem e centro viſam, quæ vocatur *longitudo vera*; & illam, quæ videtur e loco obſervatoris, quæ appellatur *longitudo apparens*. Simile dicendum de *parallaxi latitudinis, aſcenſionis rectæ, declinationis, altitudinis &c.*

405. *Triangulum parallacticum* eſt triangalum C P *l*, vel huic æquale *l* C *m*.

406. THEOREMA I. *Parallaxis ſyderis eſt tota in circulo verticali*: ſeu, quod idem eſt: *planum trianguli parallactici eſt ſemper in plano verticali, ſeu ad horizontem obſervatoris perpendiculari.*

Demonſtratio. Si per Zenith Z, & locum ſyderis verum *l*, deſcribatur circulus verticalis Z *l a*, ejus planum tranſibit per centrum C, & per locum obſervatoris P: itaque puncta P, C, *l* exiſtent in hoc plano; & quia P *m* eſt parallelogrammum, etiam punctum *m*, conſequenter angulus parallacticus *l* C *m*, ſunt in ejusdem verticalis plano.

407. Corollarium I. *Si duo ſydera appareant in eodem verticali, ſunt etiam in eodem reipſa.*

408. Corollarium II. *Parallaxis ſyderis tantum afficit altitudinem*; aut ſi mavis: *effectus generalis parallaxis ſyderis conſiſtit in eo, quod faciat, ut ſydus appareat vicinius horizonti, aut remotius a Zenith, quam ſit reipſa.*

409. Corollarium III. *Quando ſydus in revolutione ſua diurna venit ad tale punctum, in quo ejus verticalis ſecatur ad angulum rectum a circulo quovis alio, reſpectu hujus circuli parallaxin non habet.* Sic quando eſt in meridiano, quem parallelus ſyderis ſecat perpendiculariter, (269.) reſpectu hujus paralleli parallaxin non habet, hoc eſt, caret parallaxi in aſcenſione recta, quæ ſolam efficit declinationem. Tunc enim circulus declinationis congruit cum verticali ſyderis: & hinc locus viſus e centro terræ, & locus viſus ab obſervatore ſunt uterque in eodem circulo declinationis, adeoque eadem eſt utriuſque aſcenſio recta (304). Eodem modo dum ſydus eſt in verticali, qui eclipticæ inſiſtit ad angulum rectum; hic verticalis coincidit cum circulo latitudinis; quare parallaxis tantum afficit latitudinem, & nulla eſt reſpectu longitudinis.

Punctum eclipticæ, in quo a verticali perpendiculariter ſecatur, dicitur *Nonageſimus;* eſt enim utrinque in æquali diſtantia (conſequenter 90°) a duobus punctis interſectionis cum horizonte. Nam cum ecliptica ſit circulus maximus ad horizontem inclinatus, ad omnes verticales obliqua eſt, excepto illo, cujus planum per ejus polos tranſit: at vero verticalis tranſiens per polos alicujus circuli maximi, eſt ſimul ad eum circulum maximum, ſimul ad horizontem perpendicularis: quare (Trig. 18) utrique in diſtantia 90° ab eorum communi interſectione occurrit.

410. THEOREMA II. *Manente eadem ſyderis a centro telluris diſtantia, eſt ſemper ſinus parallaxis altitudinis, ut ſinus diſtantiæ apparentis a Zenith, ſive ut coſinus altitudinis apparentis.*

Demonſtratio: In triangulo PCL, eſt (Elem. 746) PC: CL = *ſin* PLC: *ſin* LPC = *ſin* ZPL (Elem. 727) = *ſin* ZCM. & in triangulo PC*l*, habetur etiam PC: C*l* vel CL = *ſin* P*l*C: *ſin* CP*l* = *ſin* ZP*l* = *ſin* ZC*m*. Igitur *ſin* PLC: *ſin* ZCM vel ZPL = *ſin* P*l*C: *ſin* ZC*m* vel ZP*l*.

411. Corollarium I. *Parallaxis nulla eſt, quando ſydus eſt in Zenith; & maxima, dum ſydus eſt in horizonte.* In primo enim caſu triangulum parallacticum totum coincidit cum recta CPZ, & parallaxis eſt ut ſinus 0°. In caſu altero triangulum parallacticum eſt rectangulum, ut CPλ, & parallaxis eſt ut ſinus totus. Hinc parallaxis maxima ſyderis dicitur *parallaxis horizontalis.*

412. Corollarium II. *Effectus quoque parallaxis eſt, quod diameter ſyderis eo appareat major, quo id altius ſupra horizontem elevatur, quamvis maneat eadem a centro telluris diſtantia.* Cum enim eo parallaxis ſit major, quo vicinior eſt horizontali, parallaxis limbi inferioris ſyderis major eſt parallaxi limbi ſuperioris: unde neceſſe eſt, ut limbi iſti appareant a ſe remotiores differentia eorum parallaxeon, & hinc diameter videbitur aucta. Sunt autem ſinus parallaxeon ut ſinus diſtantiarum a Zenith; & differentia ſinuum eſt eo major, quo ipſi ſinus ſunt minores; igitur differentiæ parallaxeon eo fiunt majores, quo ſydus puncto verticali Zenith fit vicinius, aut altius ſupra horizontem aſcendit; conſequenter ejus diameter tanto magis videbitur aucta.

413. THEOREMA III. *Sinus parallaxeon ſyderum in eadem altitudine apparente ſupra horizontem, ſed in diverſis a centro telluris diſtantiis, ſunt in ratione reciproca diſtantiarum.*

Demonſtratio. Etenim ſi ſupponantur in linea P*l* duo ſydera conſtituta, alterum in *l*, alterum in *t;* aut vero ſydus, quod ſemel viſum fuit in *l*, alia vice fore in *t*, ob inæquales orbitæ ſuæ dimenſiones ſcilicet; erit in triangulis P*l*C, P*t*C, PC: C*l* = *ſin* P*l*C:

P*l*C: *ſin* *l*PC; & PC: C*t*=*ſin* P*t*C: *ſin* CP*t* vel *l*PC: Igitur PC× *ſin* *l*PC=C*l*× *ſin* P*l*C = C*t*× *ſin* P*t*C. Et hinc (Elem. 302) C*l*: C*t*=*ſin* P*t*C: *ſin* P*l*C.

414. Corollarium. *Sinus parallaxeon horizontalium ſunt in ratione reciproca diſtantiarum a centro telluris.*

415. THEOREMA IV. *Sinus parallaxis horizontalis ſyderis eſt ſemper ut ſinus anguli, ſub quo videtur ſemidiameter horizontalis ſyderis.*

Demonſtratio. Parallaxis horizontalis P λ C eſt menſura anguli, ſub quo videtur ſemidiameter terræ P C ex centro ſyderis in λ. Ex eadem ratione angulus, ſub quo e centro telluris videtur ſemidiameter ſyderis in λ, eſt reſpectu hujus ſyderis, parallaxis horizontalis terræ: & ſinus parallaxeon horizontalium terræ debent quoque eſſe in ratione reciproca diſtantiarum diverſarum a centro ſyderis in λ (413). Ex quo conficitur, ſinus parallaxeon horizontalium ſyderis reſpectu terræ eſſe in eadem ratione, in qua ſunt ſinus parallaxeon horizontalium terræ reſpectu ſyderis in λ: aut, quod idem eſt, ſinus parallaxeon horizontalium ſyderis e terra viſi, eſſe in ratione ſinuum ſemidiametrorum horizontalium illius ſyderis.

416. Corollarium. *Sufficit igitur, ſemel exacta obſervatione parallaxin ſyderis horizontalem, & ſemidiametrum ejus horizontalem determinaſſe, ut deinceps ex alterius actuali menſura altera reperiatur.*

417. Obſerva. *Si ſydus tantum a terra diſtet, ut ejus parallaxis horizontalis gradum unum non excedat*, ſinus diverſarum ejus parallaxeon coincidunt cum arcubus, qui eas metiuntur: quare tunc ſemper *pro ſinu parallaxeos* ipſa *parallaxis* adhiberi poteſt.

418. THEOREMA V. *Si dentur tria quævis ex his quinque: diſtantia vera oculi a ſydere, diſtantia vera ſyderis a centro telluris, magnitudo abſoluta ſemidiametri terræ, altitudo vera vel apparens ſyderis, angulus parallacticus; etiam reliqua inveniuntur.*

Demonſtratio. Etenim tunc in triangulo rectilineo parallactico dantur tres partes, ex quibus artificio trigonometrico ſemper reliquæ duæ determinari poſſunt.

419. Corollarium. *Itaque obſervator in ſuperficie telluris conſtitutus poteſt invenire diſtantiam ſyderum veram a centro telluris ope eorum parallaxis, maxime horizontalis*, quæ commodiſſime ad hoc adhibetur, utpote omnium maxima.

420. THEOREMA VI. *Per parallaxin ſyderum fit, ut appareant remotiora a meridiano, quam reipſa ſint.*

Demonſtratio. Omnes verticales ſunt arcus ex eodem Zenith ducti, qui eo magis a ſe ſe invicem divergunt, quo ad horizontem propius accedunt, per parallaxin vero ſitus aſtrorum in ſuis

verticalibus conſervatur, & ſolum magis verſus horizontem deprimitur, quam vere ſit: itaque per parallaxin ſydera videri debent remotiora a meridiano (qui itidem eſt unus e verticalibus), quam reipſa ſint.

421. Corollarium I. *Effectus parallaxeos eſt, ut ſydera videantur tardius oriri, ac citius, quam reipſa, occidere.*

422. Corollarium II. *Si ſydus parallaxi obnoxium motu proprio ab occidente in orientem tendit ad conjunctionem cum aliqua ſtella, conjunctio videbitur citius contingere* (quam ſi parallaxi careret), *quando ſydus verſatur in parte cæli orientali; & tardius, ſi ſit ex parte occidentali.*

De parallaxi horizontali Syderum.

Ex pluribus methodis ab Aſtronomis ad obſervandam parallaxin horizontalem ſyderum excogitatis duas ceteris præferendas iſthic ſubjiciemus.

423. Prima quidem, in praxi tutior, duos requirit obſervatores ſub eodem meridiano conſtitutos; alterum in hemiſphærio terræ boreali, alterum in auſtrali, utrumque ſaltem 30° ab æquatore remotum, ut arcus cæleſtis meridiani inter utriuſque Zenith comprehenſus ſit, quam fieri poteſt, maximus. Uterque obſervator determinare debet eo momento temporis, quo ſydus, de cujus parallaxi agitur, ad meridianum appellit, ejus diſtantiam a ſuo Zenith, & ſimul diſtantiam ſui Zenith ab eadem ſtella fixa, quæ fere in eodem cum ſydere parallelo eſt. Quod ſi jam differentia inter diſtantiam puncti verticalis unius obſervatoris a ſydere, & diſtantiam ejusdem puncti verticalis a fixa, ſit accurate eadem, & verſus eandem partem, cum differentia inter diſtantiam puncti verticalis alterius obſervatoris a ſydere, & diſtantiam ejusdem puncti verticalis a ſtella fixa; ſydus non habet parallaxin ſenſibilem: ſed ſi dicta differentia non eſt utrobique eadem, exceſſus majoris ſupra minorem, ſiquidem ſint verſus eandem partem; aut utriuſque ſumma, ſi ſint in partes oppoſitas, indicabit parallaxin horizontalem ope ſequentis analogiæ: *ut ſumma ſinuum diſtantiarum ſyderis ab utriuſque obſervatoris Zenith eſt ad ſinum totum; ita eſt exceſſus, vel ſumma differentiarum modo reperta ad parallaxin horizontalem ſyderis.*

424. Exemplum: die 6 Octobris A. 1751 in Urbe Capitis Bonæ Spei, cujus latitudo Auſtralis eſt 33°. 55′, hora 10½ veſperi, obſervavi, quod Marte ad meridianum appellente in diſtantia a Zenith 25°. 2′, ejus limbus borealis fuerit 26″. 7 ſeptentrionalior, quam ſtella λ Aquarii. Eodem die, eodemque tempore D. Wargen-

gentin Holmiæ, cujus latitudo Borealis eſt 59°. 21′, obſervavit, Martem in meridiano a Zenith 68°. 14′ abfuiſſe, ejuſque limbum borealem dicta ſtella Aquarii fuiſſe 6″. 6 auſtraliorem. Ex quo liquet, parallaxin Martis ſenſibilem eſſe, ad quam inveniendam ſervit ſumma 33″. 3. Eſt autem ſinus 68° 14′ æqualis 9287, & de 25°. 2′ eſt 4231; Quare eorum ſumma 13518 eſt ad ſinum totum 10000; ut 33″. 3 ad 24″. 64, quæ eſt parallaxis Martis horizontalis.

Etenim cum Holmia & Caput Bonæ Spei ſint fere ſub eodem Meridiano, & planum æquatoris inter utrumque locum transeat, ſunt 33″. 3 ſumma quantitatum, quibus parallaxis Martem æquatori juſto viciniorem in his duobus locis exhibuit, & cum parallaxis tantum afficiat declinationem (409), ea erat ſimul parallaxis altitudinis: ſunt vero parallaxes altitudinis (410) ut ſinus diſtantiarum apparentium a Zenith; & parallaxis horizontalis eſt ut ſinus totus; igitur

425. Obſerva I. Si uterque obſervator foret in eodem hemiſphærio reſpectu ejusdem poli, loco ſummæ adhibenda eſſe differentia ſinuum.

426. II. Si uterque obſervator non foret ſub eodem meridiano, attendi deberet motus ſyderis in declinatione intervallo temporis, quo a meridiano unius obſervatoris ad meridianum alterius pervenit.

427. III. Suppoſita parallaxi horizontali Martis 24″. 64 die 6 Octobris A. 1751, facile per reſolutionem trianguli CPλ, in quo CP = 1, reperitur, quod ejus diſtantia Cλ a terra tunc fuerit 8371½ ſemidiametrorum terreſtrium. Et quia e Theoria Phyſica (171) non ſolum rationes dimenſionum orbitarum planetarum ad ſcalam aliquam communem relatarum (quam ſcalam ſuppoſuimus (170) partium 20000 æqualium) eruimus; ſed etiam methodum calculandi pro tempore dato locum, & diſtantiam planetæ cujusvis a ſole in partibus ejusdem ſcalæ; Si ex hac theoria, & methodo, quam mox tradituri ſumus (477), quæratur diſtantia Martis a terra pro 6 Octobris A. 1751, hor. 10½ veſpert. invenietur magnitudo abſoluta ſcalæ ope hujus analogiæ: ut diſtantia Martis a terra in partibus ſcalæ (in noſtro exemplo 4354) eſt ad diſtantiam Martis in ſemidiametris terræ 8371½; ita ſunt 20000, partes omnes ſcalæ communis, ad 38460 ſemidiametros terreſtres, quæ erit vera & abſoluta magnitudo ſcalæ.

428. IV. Itaque ope parallaxis horizontalis unius tantum planetæ, valor omnium dimenſionum in tabula Num. 170 exhibitarum ad menſuras communes cognitas, ut leucas, hexapedas &c. redu-

reduci poteſt; quippe ſemidiametro terræ, quæ paſſim 1432 leucarum ſtatuitur, per menſurationes exactas cognita, ac fere 19611500 ped. Paris. Reg. continente. Mars, dum eſt in oppoſitione, & Venus in conjunctione inferiore huic diſquiſitioni præ aliis commodi ſunt, quia ſcilicet terræ tum ſunt viciniſſimi.

429. V. Cum aſſumpta ſcala 20000 partium æqualium, ſit axis major ellipſeos terræ, ejus medietas 10000, ſive diſtantia media terræ a ſole, eſt 19230 ſemidiametrorum terreſtrium. Quod ſi itaque fiat, ut 19230 ad 1; ita ſinus totus eſt ad ſinum parallaxeos horizontalis ſolis; hæc reperietur 10″. 72: & cum præterea ſemidiameter ſolis e terra viſa in diſtantia media ſit 16′, 2″, ſequitur, diametrum ſolis eſſe ad diametrum terræ (415), ut 16′, 2″ ad 10″. 72, ſive proxime ut 90 ad 1; ſuperficiem ſolis eſſe majorem ſuperficie terræ 8053 vicibus; denique ſoliditate excedi terram a ſole 722700^es fere. Verum omnes hæ dimenſiones ob exilitatem maximam parallaxeos repertæ, accuratæ eſſe haud poſſunt.

430. Secunda Methodus id commodi habet, quod uno tantum opus ſit obſervatore. Sed ut accurate adhibeatur, neceſſe eſt *primo*, ut tribus quatuorve continuis diebus determinetur ſyderis, cujus parallaxis petitur, aſcenſio recta reſpectu ſtellæ fixæ in eodem fere parallelo exiſtentis, tempore tranſitus utriuſque per meridianum, ut per interpolationes inveniri poſſit vera mutatio aſcenſionis rectæ ſyderis reſpectu ſtellæ intervallo temporis aſſumpti.

Secundo. Die ex his (quibus obſervationes inſtituentur) aliquo differentia aſcenſionis rectæ ſyderis & ſtellæ obſervanda eſt ipſo momento, quo ſydus ad meridianum appellit, itemque ſex fere horis ante vel poſt tranſitum per meridianum; aut quod adhuc melius, hæc differentia accipienda eſt quinque vel ſex horis ante tranſitum ſyderis per meridianum, in ipſo tranſitu, & quinque vel ſex horis poſt tranſitum.

Tertio. Si differentiæ repertæ ſint æquales motui proprio ſyderis in aſcenſione recta intervallo temporis inter obſervationes reſpondenti, ſydus parallaxi ſenſibili caret; at ſi eæ excedant motum proprium, exceſſus erit (420) parallaxis in aſcenſione recta, ſiquidem duarum obſervationum altera facta eſt in meridiano exiſtente ſydere, altera ante vel poſt tranſitum per eundem: aut vero hic exceſſus erit ſumma duarum parallaxeon in aſcenſione recta, ſi e tribus obſervationibus prima inſtituta fuit ante tranſitum ſyderis per meridianum, tertia poſt tranſitum.

Quarto. Fiat: *ut factum ex ſinu diſtantiæ apparentis ſyderis a meridiano (aut ex ſumma ſinuum diſtantiarum apparentium ante, & poſt tranſitum per meridianum obſervatarum) in coſinum elevationis poli obſervatoris, eſt ad fa-*

ctum

tum ex ſinu toto in coſinum declinationis ſyderis; ita eſt differentia inventa ad parallaxin horizontalem ſyderis.

431. Ut veritas hujus analogiæ demonſtretur, ſit H E Z P (fig. 59.) medietas Meridiani cœleſtis, P polus, Z zenith obſervatoris, H Q R horizon, E A Q æquator, L R parallelus ſyderis M, cujus parallaxis quæritur. Deſcripto per M & Z verticali, ſive circulo altitudinis Z T; & per P & M circulo declinationis M P, angulus Z P M metitur veram diſtantiam ſyderis a meridiano. Eſto M *m* parallaxis altitudinis; erit *m* locus apparens ſyderis. Ducatur *m* P, erit angulus Z P *m* menſura diſtantiæ apparentis ſyderis a meridiano. Manifeſtum eſt, eſſe M D parallaxin in aſcenſione recta; quare etiam angulus M P *m*, cuius menſura eſt is arcus, & quo diſtantia apparens a meridiano differt a diſtantia vera, erit itidem parallaxis in aſcenſione recta. Dicatur parallaxis horizontalis B; erit (409) R : B = *ſin* Z *m* : M *m*. Igitur M *m* = B × *ſin* Z *m*. Et dum triangulum, Z P *m* mutatur in Z P M per differentiam M *m* lateris Z M, angulo M Z P, & latere Z P manentibus conſtantibus, eſt (Trig. 179) *ſin* Z P *m* × *ſin* Z P : *ſin* P *m* × *ſin* Z *m* = *d* Z P *m* : *d* Z *m*, ſive M *m*, ſive B × *ſin* Z *m*. Itaque diviſione per *ſin* Z *m* fit *ſin* Z P *m* × *ſin* Z P : *ſin* P *m* = *d* Z P *m* : B, quæ erat analogia propoſita.

Calculus Parallaxeon.

432. Problema I. *Datis parallaxi horizontali ſyderis, ejus aſcenſione recta & declinatione, ac elevatione poli, invenire parallaxin altitudinis pro tempore dato.*

Reſolutio. Ex tempore dato, & aſcenſione recta itidem data quæratur (336) diſtantia ſyderis a Meridiano; qua inventa, & datis declinatione, nec non elevatione poli quæratur etiam ejus altitudo ſupra horizontem (290). Sit locus verus ſyderis in M (Fig. 59) (denominationes partium hujus figuræ vide N. 431): fiat: *ut ſinus totus ad coſinum altitudinis M T; ita parallaxis horizontalis eſt ad parallaxin aliam*, qua ex altitudine M T ſubtracta, fiat ulterius: *ut ſinus totus ad coſinum altitudinis dicta ratione imminutæ; ita eſt parallaxis horizontalis ad parallaxin altitudinis quæſitam M m.* Ex prima enim analogia obtinetur non niſi parallaxis, quæ eſt in ratione ſinus altitudinis veræ M T, adeoque non accurata; eadem tamen ſatis exacta eſt, ut habeatur proxime altitudo apparens *m* T, in cujus ratione vidimus (410) eſſe parallaxin veram *m* M.

433. Problema II. *Iisdem datis reperire parallaxin in aſcenſione recta & declinatione.*

Reſo-

Reſolutio. In parvo triangulo *m* D M ad ſenſum rectilineo & rectangulo ad D, eſt M*m* parallaxis altitudinis, M D menſura anguli M P D, qui eſt parallaxis in aſcenſione recta, & *m* D parallaxis in declinatione; & angulus *m* M D eſt complementum anguli Z M P, ob rectum ad D. Jam vero hoc triangulum ita ſolvi poteſt (Trig. 120): *ſinus diſtantiæ ſyderis a Zenith* M Z *eſt ad ſinum ejus diſtantiæ a meridiano* M P Z; *ut eſt ſinus diſtantiæ poli a Zenith* Z P, *ad ſinum anguli* Z M P, *a verticali & circulo declinationis comprehenſi.* Hoc habito eſt *ſinus totus ad coſinum anguli* Z M P *a verticali & circulo declinationis comprehenſi, ut eſt parallaxis altitudinis m* M *ad parallaxin declinationis m* D. Denique *coſinus declinationis ſyderis eſt ad ſinum anguli a verticali & circulo declinationis comprehenſi, ut eſt parallaxis altitudinis m* M *ad parallaxin aſcenſionis rectæ* M P D (Trig. 179).

Manifeſtum eſt, in his regionibus ſeptentrionalibus, per parallaxin in declinatione reddi declinationem borealem apparentem vera minorem, & declinationem auſtralem vera majorem; & vidimus per parallaxin in aſcenſione recta ſyderum a meridiano diſtantia aucta, eorum aſcenſionem rectam apparentem vera majorem fieri ante tranſitum per meridianum; & vera minorem poſt tranſitum.

434. Obſerva. Parallaxis aſcenſionis rectæ & declinationis independenter ab altitudine ſyderis, & ejus angulo parallactico reperiri poteſt, ſi fiat: *parallaxis aſcenſionis rectæ* æqualis *parallaxi horizontali ductæ in coſinum elevationis poli, & in ſinum diſtantiæ apparentis ſyderis a meridiano; & diviſæ per ſinum diſtantiæ apparentis ſyderis a polo ſupra horizontem elevato.* Demonſtratio ſupra data jam eſt (431). *Parallaxis declinationis* autem æqualis eſt *parallaxi horizontali ductæ in ſinum elevationis poli, ductæ in ſinum diſtantiæ apparentis ſyderis a polo; ſubtracto facto ex parallaxi horizontali in coſinum altitudinis poli, & in coſinum diſtantiæ apparentis ſyderis a meridiano, nec non in coſinum diſtantiæ apparentis ſyderis a polo ſupra horizontem elevato.* Verum hic notandum, eſſe caſum, in quo loco ſubtrationis facienda eſt additio facti poſterioris e parallaxi horizontali in tres dictos coſinus; nempe quando diſtantia ſyderis a meridiano, & ejus diſtantia a polo, altera quidem minor, altera vero major eſt 90 gradibus. Poſtrema hæc formula facile eruitur e poſtrema analogia formulæ primæ differentialis Trigonometriæ ſphæricæ.

Fædem formulæ applicari poſſunt parallaxi longitudinis & latitudinis non ſine calculi compendio; nempe: *parall. longit.* = *parall. horiz* × *ſin. altitudinis nonageſimi* × *ſin. diſtant. appar. ſyderis a nonageſ. totum diviſ. per coſin latit. appar. ſyderis.* Et *parallax. latit.* = *parall. horiz.* × *coſ. altit. nonageſ.* × *coſ. latit. appar. ſyderis* — *parall. horiz.* × *ſin. alt. nonag.* × *coſ. diſt. appar. ſyderis a nonag.* × *ſin. lat. app. ſyderis.* Signum — mutatur in +, quando diſtantia apparens ſyderis a nonageſimo, & ejusdem diſtantia a polo ecliptica ſupra horizontem elevato, ac per latitudinem determinata, altera eſt 90 gradibus major, altera minor.

CAPUT

CAPUT IV.

De illuſionibus opticis, quæ pendent a refractione radiorum luminis in transmiſſu per Atmoſphæram telluris.

435. Præter tres ſuperioribus tribus Capitibus recenſitos illuſionum fontes quartus adhuc ſupereſt, refractio ſcilicet radiorum lucis, quæ in omnes obſervationes aſtronomicas turbationem invehit.

436. I. Experientia, & regulis Dioptrices certum eſt, radios luminis a via rectilinea detorqueri, quam primum oblique in medium diverſæ naturæ ab illo, e quo veniunt, incurrunt, atque hoc ita, ut ſi medium, quod ſubeunt, ſit denſitatis uniformis, radii ſolummodo ad aliquem angulum inflectantur, poſtea novam directionem illo flexu acquiſitam exacte ſequantur; at ſi medium, in quod incidunt, ſit denſitatis variabilis, exempli cauſa, ſi denſitas creſcat in certa profunditatis ratione, radii magis ſemper curventur, magnitudine, & ſitu angulorum curvaturæ certam aliquam legem ſequente, quæ ſit ut functio quæpiam profunditatis.

Hoc vero eſt, quod accidit radiis luminis e ſyderibus ad noſtros oculos pertingentibus: Terræ enim BOF (fig. 51) jam vicini immerguntur ſemper magis maſſæ aereæ GCH, cujus denſitas eo major ſemper eſt, quo terræ propior: itaque niſi perpendiculariter incidant, hoc eſt, niſi eorum directio ſit verſus centrum terræ P, adeoque niſi tranſeant per zenith obſervatoris, radii, velut AC, detorquentur, & in curvam CDO inflectuntur, cujus cavitas centro terræ P obvertitur, & longitudo dependet a ſpatio, quod in tranſitu per atmoſphæram, quæ totam tellurem ambit, emetiuntur radii; curvaturæ vero ſpecies tum a denſitate diverſorum ſtratorum aeris ſibi invicem incumbentium, & per quæ radii transmittuntur; tum etiam ab obliquitate incidentiæ. Denique hæc curva eſt in plano verticali: quippe juxta Dioptrices leges angulus refractionis eſt in plano perpendiculari ad ſuperficiem refringentem in puncto incidentiæ. Jam vero diverſa atmoſphæræ ſtrata ſuperficies habent tum inter ſe, tum cum terra concentricas: itaque planum ad ſuperficiem atmoſphæræ perpendiculare, eſt etiam perpendiculare ad ſuperficiem terræ; igitur eſt planum verticale.

437. II. Certum quoque eſt, quod obſervator, percepta per impreſſionem radiorum luminis in oculos objecti præſentia, judicet objectum in directione, qua impreſſio fit, ſitum eſſe (386): igitur ſi radius ab aſtro aliquo in A emiſſus, oculum per viam curvam CDO ſubeat, exiſtimabit objectum eſſe in directione illius ex-

tremi curvæ hujus, quod oculum attingit; hoc eſt, putabit objectum eſſe in recta O *a*, curvam in puncto O tangente, ubi ad oculum venit. Hinc vero apparet

438. *Radios luminis a ſyderibus ad zenith exiſtentibus emiſſos, non eſſe refractioni obnoxios.*

439. *Refractionem totam eſſe in altitudine, hoc eſt, effectum refractionis eſſe, ut aſtra appareant viciniora ad zenith, aut altiora ſupra horizontem, quam reipſa ſint.*

440. *Per refractionem fieri, ut arcus diſtantiæ apparentis duorum ſyderum ſemper ſit minor arcu diſtantiæ veræ:* namque cum refractio ſydera in eorum verticalibus circulis attollat, qui in zenith concurrunt, facit ſimul, ut huic puncto concurſus verticalium videantur viciniora, conſequenter etiam viciniora inter ſe.

441. *Ceteris omnibus paribus, omnia ſydera eandem habere refractionem, dum ſunt in eadem ſupra horizontem altitudine,* quippe refractione non pendente a diſtantia ſyderis ab obſervatore, ſed a quantitate aeris ſolum, quem radii trajicere debent, antequam ad oculum perveniant: at vero aer ſeſe non extendit ultra 16 vel 17 leucas a ſuperficie terræ.

442. *Refractionem eo eſſe majorem,* hoc eſt, differentiam inter altitudinem veram, & altitudinem apparentem ſyderis eſſe eo majorem, *quo ſydus obſervatum longius abeſt a Zenith.* Ita radius A O refractionem majorem patitur, quam radius E O, qui vicinior ad zenith, & minus aeris tranſire debet, & magis accedit ad perpendiculum.

443. *Sydera reipſa eſſe adhuc infra horizontem, quando jam in horizonte videntur;* itaque *videntur citius oriri, & tardius occidere, quam juxta leges ſolius motus diurni telluris oporteat.*

444. *Igitur clarum eſt, effectum refractionis eſſe directe oppoſitum effectui parallaxeos, quamvis utraque easdem fere leges ſequatur.* Atque hinc data refractione ſyderis pro certa altitudine, ut ſupra (433), calculari poteſt mutatio per eam aſcenſioni rectæ, & declinationi ſyderis inducta. Et univerſim eodem calculo ſitus apparens aſtrorum ab erroribus tum per parallaxin, tum per refractionem inductis expurgari poteſt, ſi pro elemento calculi accipiatur differentia inter parallaxin & refractionem altitudini ſyderis competentem.

445. Ulterius porro liquet, *refractiones ſyderum debere eſſe inconſtantes, & omnibus variationibus, quæ in atmoſphæra contingunt, obnoxias.* Sic aere puriore, & calore magis rarefacto eæ erunt minores; quod etiam e ſitu loci pendebit, uti verſus æquatorem, in vertice magnorum montium: ex oppoſito refractiones fient majores aere humidiore, denſioreve.

446. At-

446. Atque hinc conſequi, *nec poſſe ſtatui methodum exactam eas immediate ex ſyderum obſervationibus deducendi, nec hypotheſin phyſicam, quam in iis calculandis in omni caſu ſequi liceat.*

447. Obſerva I. Experientia docuit, refractionem horizontalem eſſe admodum inconſtantem, ut quæ quandoque ſit 32′, alias 36′ aut 37′; præterea eam admodum irregulariter mutari uſque ad altitudinem 10, vel 12 graduum: hinc maximam partem parum tribuitur obſervationibus factis, quando ſydera erant horizonti valde vicina. Denique in altitudine 45 gradus ſuperante eam eſſe minorem 1′, ac inde uſque ad zenith admodum æquabiliter decreſcere.

448. II. Refractio facit, ut ſolis diſcus in ortu vel occaſu ſuo appareat ovalis: quippe cum effectum non habeat, niſi ſecundum circulos verticales, diametrum horizontalem nil mutat: at vero limbos conjungit aliquantum, in quibus diameter verticalis terminatur.

449. III. Ad determinandas refractiones, Aſtronomi altitudines ſyderum obſervatas conferunt cum iis, quas per calculum pro eodem tempore repererunt. Adhibent autem ſolem, cujus theoria eſt minime ambigua, vel ſtellam quampiam notabiliorem, cujus declinatio ſit rite determinata, & quæ vel per ipſum zenith, vel prope illud, tranſeat.

450. Præter refractiones Aſtronomicas atmoſphæra etiam efficit peculiare quoddam phænomenon, quod *crepuſculum* dicimus: eſtque tenuis illa lux, quæ jam longe ſolis ortum præcedit, ac ſenſim augetur; quæ etiam diu poſt ſolis occaſum perſtat, & inſenſibiliter tandem extinguitur, nocte concubia ſubſequente. Sole nondum altius infra horizontem loci alicujus in ſuperficie telluris depreſſo, ejus radii in atmoſphæram incidentes franguntur, reflectuntur, atque ad eum locum eo copioſiores perveniunt, quo aer eſt purior, & ſol horizonti adhuc propior. Obſervatum eſt, hanc lucem percipi mane ſole adhuc 18 circiter gradibus infra horizontem exiſtente, neque veſperi citius expirare, quam ſol ad eandem profunditatem pertingat. Unde conſequens eſt; *nocte ſtricte ſumpta carere locum, quando ſol media nocte 18 gradibus non deſcendit infra horizontem:* id quod Pariſiis toto menſe Junio contingit; & in regionibus magis adhuc ad Septentrionem ſitis crepuſculum continuum eo longiore tempore circa ſolſtitium æſtivum perdurat, quo polo arctico ſunt viciniores. Idem fit in hemiſphærio auſtrali, ſole circa tropicum ♑ verſante.

451. V. Poteſt etiam per calculum inveniri hora ortus vel occaſus apparentis ſolis; immo etiam tempus initii crepuſculi matutini, quod *primum diluculum* dici ſolet, aut finis veſpertini, ſi reſolvatur triangulum ſphæricum Z P C (fig. 38 & 39) cujus tria latera

nota ſunt: nempe ZP, complementum elevationis poli; PC, diſtantia ſyderis a polo, quæ ex declinatione data deducitur: & tertium, arcus 90°, 23′, ſi quæratur ortus vel occaſus ſyderis: vel arcus 108°, 0′, ſi quæſtio ſit de crepuſculo. Quod ſi jam angulus ZPC inveniatur, atque in tempus convertatur, habebitur intervallum inter meridiem (ſi ſermo ſit de ſole) & tempus quæſitum, aut generatim inter tranſitum ſyderis per meridianum & tempus quæſitum.

SECTIO TERTIA.

Continens partem alteram Aſtronomiæ Terreſtris; regulas calculi motuum planetarum, & cometarum a revolutione diurna telluris non pendentium; & diverſas methodos ſtabiliendi theoriam ex obſervationibus in ſuperficie telluris inſtitutis.

CAPUT I.

De theoria Planetarum, prout e terra videntur.

452. Dum oculus tot illuſionibus patet, ut planetas, cometasque nec in vera eorum directione, nec in plano, in quo orbitas ſuas deſcribunt, videat, ſane ipſa res obſervatorem in telluris ſuperficie poſitum, atque ex obſervationibus iſthic inſtitutis Theoriam eorum motus veri ſtabilire cupientem, admonet, ut pro termino comparationis planum eclipticæ eligat, in quo ſcilicet oculo conſtituto paucioribus illuſionibus expoſitus eſt.

Verum cum unicus ſol in centro omnium motuum verorum, ac in interſectione planorum omnium orbitarum cæleſtium (14) ſitus ſit, manifeſtum eſt, omnem planetarum theoriam e ſolutione duplicis hujus problematis pendere: *datis motibus e ſole viſis, determinare motus e terra ſpectatos; & viciſſim datis motibus ut in terra apparent; invenire eosdem, ut e ſole viderentur.* Aſt hujus antequam ſolutio dari poſſit, examinandum eſt, ecquid tandem ſtatui queat de motibus planetarum ad eclipticæ planum relatis, eorumque phænomenis tum ſolis, cum etiam terræ reſpectu.

ARTICULUS I.

De motibus planetarum ad planum eclipticæ relatis, tam ſolis, quam terræ reſpectu.

453. Quoniam orbitæ planetarum ſingulæ ſunt in ſingulis planis diverſis (25), attamen omnibus per centrum ſolis tranſeuntibus,

tibus, conſequens eſt, ut recta communis interſectionis cujuslibet plani cum plano eclipticæ itidem per ſolis centrum tranſeat, adeoque puncta duo, in quibus quævis orbita planum eclipticæ ſecat, ſibi e diametro opponantur, ac e ſole 180 gradibus a ſeſe diſtare videantur. Hinc quilibet planeta e ſole ſpectatus, dum integram revolutionem abſolvit, dimidium orbitæ ſuæ ſupra eclipticæ planum, dimidium infra illud deſcribere debet. Quia vero ecliptica eſt circulus maximus ſphæræ cæleſtis apparentis, ejus planum ipſam ſphæram in duo hemiſphæria æqualia, alterum boreale, in quo eſt polus arcticus; auſtrale alterum, in quo polus antarcticus ſitus eſt, dividit. Igitur quivis planeta, dum in altero dimidio ſuæ orbitæ verſatur, habet latitudinem borealem; & dum alterum dimidium deſcribit, latitudinem auſtralem.

454. Puncta illa duo interſectionis orbitæ planetæ cum plano eclipticæ, *nodi planetæ* dicuntur; & *nodus* quidem *aſcendens* illud, per quod a latitudine auſtrali ad borealem tranſit, cujus ſignum eſt ☊: *nodus deſcendens* vero alterum, per quod ex hemiſphærio boreali in auſtrale deſcendit, cujus character eſt ☋.

455. Sit, exempli cauſa, E ☊, P ☋ orbitæ planetæ alicujus ſuperioris (fig. 62); aut inferioris (fig. 63): ſit B ☊ C L ☋ projectio orthographica ejus orbitæ in plano eclipticæ.

Si planeta motu annuo ferretur in hac projectione, ſemper in plano eclipticæ appareret, omnique careret latitudine; ſed quia reipſa orbitam E ☊ P ☋ percurrit, liquet, ejus motum e ſole viſum, & ad orbitam projectionis relatum, eodem modo explicandum eſſe, quo exponitur motus apparens ſolis in plano eclipticæ, & ad æquatorem relatus (245). Si itaque ſupponatur primo planeta in ſuo nodo ☊, nullam iſthic habebit latitudinem; verum in progreſſu verſus P, ejus latitudo augetur, ſemperque fit magis borealis, donec planeta verſetur circa F, 90° a ☊, ubi eſt maxima, & inclinationi orbitæ cum plano eclipticæ æqualis. Ab F hæc latitudo decreſcit uſque ad ☋, ubi nulla eſt; poſtea fit auſtralis, creſcitque uſque ad E, 90° a ☋ diſtante planeta; inde rurſus minuitur, donec ad ☊ perveniat, ac nulla fiat, iterum in borealem mutanda.

456. Menſura latitudinis planetæ in loco quovis P ſuæ orbitæ exiſtentis eſt angulus ad ſolem P S L, a recta e ſole S ad locum verum planetæ P ducta, & ab altera, quæ e ſole S per loci P projectionis punctum L tranſit, comprehenſus, quod punctum perpendiculo P L ad planum eclipticæ demiſſo determinatur.

457. *Diſtantia planetæ a ſole* eſt recta S P; *diſtantia ejus curvata* eſt recta S L.

458. Si ſupponatur planum orbitæ planetæ produci indefinite, donec ſuperficiei ſphæræ cæleſtis occurat, orbita, quæ in ſe eſt elliptica, reſpectu ſolis S (241) fiet circulus maximus N *p* D *b* ſphæræ ejusdem ad planum eclipticæ N *l* D *e* inclinatus, interſectionibus ſeu nodis circulorum in N & D exiſtentibus. Si præterea ponatur initium arietis eſſe in puncto ♈ eclipticæ cæleſtis N *l* D *e*, & e puncto D tanquam polo concipiatur arcus ♈ *b* deſcribi, occurrens orbitæ ptoductæ in *b*, erit punctum *b* illud, a quo longitudines planetæ in ſua orbita computantur. Sic arcus *b* D *p*, ſecundum ordinem ſignorum Zodiaci numeratus, dicitur *longitudo planetæ in ſua orbita.* Demiſſo e puncto *p* arcu *p l* ad planum eclipticæ perpendiculari, erit arcus eclipticæ ♈ D *l longitudo vera planetæ*; & arcus *p l ejus latitudo.* Arcus *b* D orbitæ, eſt *locus nodi aſcendentis*; & arcus eclipticæ ♈ D, *longitudo nodi deſcendentis. Argumentum latitudinis* eſt arcus orbitæ D *p*, nempe diſtantia planetæ a ſuo nodo aſcendente, ſecundum ſignorum ordinem computata. Ex his ſequitur, *in primis ſex ſignis argumenti latitudinis* eſſe *latitudinem borealem*; *in ſex vero poſterioribus ſignis, auſtralem.* Puncta *f* & *g*, 90° a nodis N & D diſtantia vocantur *Limites* planetæ.

459. *Longitudo* vel *latitudo* planetæ e ſole viſa, dicitur *heliocentrica*; at quæ e terra ſpectatur, *geocentrica* appellatur.

460. Latitudini geocentricæ planetæ eadem fere conveniunt, quæ latitudini heliocentricæ: nam *primo* dum planeta in alterutro nodo verſatur, nullam habet latitudinem geocentricam, quod tum cum oculo obſervatoris ſit in eodem plano. *Secundo.* Latitudo geocentrica planetæ eſt borealis vel auſtralis, prout is vel in primis ſex ſignis, vel in poſterioribus argumenti latitudinis fuerit. Quod autem ad quantitatem ejus attinet, ea non ſolum dependet ab argumento latitudinis, ſed etiam a diſtantia planetæ a terra. Sit enim T Q R orbis annuus terræ, T ejus locus, planeta in P exiſtente: patet, ductis rectis T P, T L, latitudinem geocentricam planetæ habere menſuram angulum P T L, angulo ad L recto, quod P L ſit ad planum eclipticæ, in quo eſt orbita telluris, perpendicularis.

461. Longitudo geocentrica planetæ P e tellure in T exiſtente viſi, eſt arcus eclipticæ ♈ D M juxta ſignorum ordinem, inter rectam T ♈ e terra ad primum punctum eclipticæ ductam, & inter alteram, quæ e terra per punctum L projectionis planetæ, uſque ad ſphæræ cæleſtis ſuperficiem in M producitur, interceptus.

462. Cum diſtantia S T reſpectu diſtantiæ ſolis a ſuperficie ſphæræ cæleſtis evaneſcat, patet rectam T ♈ non differre a recta, quæ e ſole ad idem punctum ♈ ducitur, ita ut differentiam inter longitudinem ♈ *l* e ſole viſam, & inter longitudinem viſam e terra,

ra, metiatur arcus cæleſtis M *l*, quem *parallaxin orbis annui* (382) appellant; aut vero angulus S L T, cujus menſura eſt arcus M *l*, utpote radio eclipticæ cæleſtis infinito.

Atqui hic angulus, ceteris omnibus paribus, eo eſt major, quo diſtantia ſolis a terra S T reſpectu diſtantiæ ſolis a loco planetæ ad eclipticam reducto S L major eſt: unde ut longitudo & latitudo heliocentrica planetæ ad longitudinem & latitudinem geocentricam reduci poſſit; ſitus terræ reſpectu ſolis, & ratio diſtantiarum S T, & S L cognoſci debet.

ARTICULUS II.

Expoſitio generica totius ordinis calculi neceſſarii ad inveniendam longitudinem & latitudinem Planetæ e ſole, & terra viſam pro tempore dato.

463. Regula I. Reducatur tempus datum ad tempus medium (321).

464. II. Accipiatur intervallum inter tempus datum ad medium reductum, & inter Epocham proximi tranſitus terræ per ſuum aphelium, & fiat ſequens proportio: ut tempus revolutionis integræ terræ ad intervallum temporis modo repertum; ita ſunt 360 gradus ad anomaliam mediam terræ (129).

465. III. Anomalia media reducatur ad veram (138), addaturque loco vero aphelii terræ; habebitur locus verus heliocentricus terræ in puncto ſuæ orbitæ T (fig. 62 & 63), aut relate ad ſuperficiem ſphæræ cæleſtis in H, ita ut longitudo terræ ſit arcus eclipticæ ♈ D H.

466. IV. Ad locum verum terræ addantur ſex ſigna, ſive 180°; habebitur (242) locus verus ſolis e terra in puncto eclipticæ O viſi, longitudine geocentrica ſolis exiſtente arcu eclipticæ ♈ D H N O.

467. V. Quæratur (140) diſtantia ſolis a terra S T.

468. VI. Pro Planeta fiat: ut tempus revolutionis annuæ planetæ eſt ad intervallum inter tempus datum, & epocham proximi illius tranſitus per ſuum aphelium; ita ſunt 360° ad anomaliam mediam planetæ.

469. VII. Anomalia media reducatur ad veram, & addatur ad locum aphelii Planetæ: erit in P locus verus planetæ in ſua orbita e ſole viſus; aut ſi referatur ad ſuperficiem ſphæræ cæleſtis, in *p*; longitudo vero ejus heliocentrica in ſua orbita arcus ♄ D *p*.

470. VIII.

470. VIII. Inveniatur distantia planetæ a sole SP. Distantiæ autem ST, SP sumendæ sunt in eadem mensura (170), v. g. distantia media terræ a sole posita 10000 partium æqualium.

471. IX. A longitudine heliocentrica Planetæ in sua orbita *b* D *p* subtrahatur *b* D locus nodi ascendentis D; residuum dabit argumentum latitudinis D *p*.

472. X. Inferatur (Trig. 85): *ut sinus totus ad sinum inclinationis orbitæ planetæ* p D l; *ita est sinus argumenti latitudinis* D p *ad sinum latitudinis heliocentricæ* p l.

473. XI. Argumentum latitudinis D *p* reducatur ad distantiam veram loci nodi a puncto projectionis loci Planetæ D *l*, quæ *argumentum latitudinis in ecliptica acceptum* vocari potest: fit autem hæc reductio sequente analogia (Trig. 88): *ut sinus totus est ad cosinum inclinationis orbitæ; ita est tangens argumenti latitudinis* D p, *ad tangentem argumenti latitudinis in ecliptica accepti* D l.

474. Differentia inter D *p* & D *l* in tabulis Astronomicis *reductio* dicitur, quia servit reducendæ longitudini planetæ in sua orbita acceptæ ad *longitudinem*, quæ vocatur *vera*, & ad eclipticam refertur.

475. XII. Argumentum latitudinis in ecliptica acceptum D *l* addatur longitudini nodi ascendentis ♈ D; habebitur longitudo vera heliocentrica planetæ ♈ D *l*.

476. XIII. Distantia S P (470) reperta reducatur ad distantiam curtatam S L hac analogia (Elem. 747): *ut sinus totus est ad cosinum latitudinis planetæ* P S L *e sole visæ; ita est distantia* S P *ad distantiam curtatam* S L.

477. XIV. Inter longitudines heliocentricas terræ & planetæ ♈ D H & ♈ D *l* accipiatur differentia; & in triangulo rectilineo S L T habebitur angulus T S L (qui *angulus ad solem*, seu *angulus commutationis* dicitur) cum lateribus S L, S T. Quæratur (Elem. 752) angulus S T M vel O T M, inter loca solis O, & planetæ M e terra visa (vocatur autem hic *angulus ad terram*, seu *angulus elongationis*); tum vero facile obtinebitur longitudo geocentrica ♈ D M Planetæ, ejus quoque distantia a terra T P vel T L ex eodem triangulo T S L reperietur.

478. XV. Fiat denique: *ut sinus anguli* T S L *ad solem est ad sinum anguli ad terram* L T S; *ita est tangens latitudinis heliocentricæ* P S L, *ad tangentem latitudinis Geocentricæ* P T L.

479. Observa I. Omnes hæ regulæ ex iis, quæ adhuc diximus, manifeste consequuntur: sola ultima analogia demonstrationem desiderat. Pro qua in triangulo S P L habetur (Elem. 748) R: P L = *cot* P S L: S L; & in triangulo rectangulo P T L, est R:

P L

PL = *cot* PTL: TL; consequenter etiam *cot* PSL: *cot* PTL = SL: TL; aut (Elem. 737) *tang* PSL: *tang* PTL = TL: SL. Est autem in triangulo SLT, TL: SL = *sin* LST: *sin* STL, quare etiam est *sin* LST: *sin* STL = *tang* PSL: *tang* PTL.

480. II. Astronomi has operationes compendiosiores reddunt ope Tabularum, quæ calculos jam absolutos continent, atque ita illico reperiunt, quod ex singulis operationibus in præcedentibus regulis præscriptis prodit. Verum quia harum tabularum conditores diversis usi sunt methodis, ut impossibile sit explicationem, quæ omnibus conveniat, dare, cogimur Lectorem ad eos remittere: & alias usus harum tabularum, quarum expositio semper addi solet, expeditus est, ubi semel fundamentum, cui innituntur, rite perceptum est. Id solum monemus, tabulas Astronomicas reliquis celebriores esse D. Cassini A. 1740; & D. Halley A. 1749 vulgatas.

ARTICULUS III.

Enumerantur elementa necessaria ad stabiliendam Theoriam planetarum e sole & terra visorum, & simul exponitur methodus hac in materia observanda.

481. Facile quisque videt, in calculis Articuli præcedentis supponi sequentia cognita, quæ *elementa Astronomica Theoriæ Planetarum* vocantur, quia velut totidem data solutioni problematis generalis superius (452) propositi serviunt. *Sunt autem* 1°. *Tempus revolutionis periodicæ cujuslibet Planetæ.* 2do. *Positio lineæ apsidum.* 3°. *Epocha transitus planetæ per hanc lineam.* 4°. *Eccentricitas Planetæ, e qua desumuntur dimensiones ejus ellipseos.* 5°. *Ratio axis majoris ellipseos cujusvis planetæ ad axem majorem orbitæ telluris.* 6°. *Locus nodi ascendentis Planetæ.* 7°. *Inclinatio orbitæ planetæ ad planum ecliptica.* Præterea sciri debet, an lineæ apsidum, & nodorum cujuslibet Planetæ sint immobiles, an vero motum aliquem habeant; & si quidem moveantur, quam in partem id fiat, quæque sit motus quantitas. Ut itaque Theoria Planetarum stabiliri possit, omnia hæc elementa ex observationibus in terra institutis eruenda sunt. Quem in finem quæ methodi e cognitis meliores adhiberi possint, indicabimus.

482. Theoria motus veri terræ ex observationibus, quæ supponuntur in sole factæ, eadem est cum Theoria motus apparentis solis ex observationibus in terra factis. Verum quoniam Planetæ e terra visi obnoxii sunt parallaxi, quæ omni momento mutationem aliquam in eorum motus veros inducit, ex observationibus in superficie telluris institutis nequeunt elementa horum motuum

ea ratione determinari, qua id fieret, si e sole observari possent. Alia itaque via ineunda est, quam paucis exponemus.

483. Verum ante omnia illud hic observasse juvabit, quod cum motus Planetarum dependeant ab elementis magno numero combinatis, fere impossibile sit, ut omnia hæc elementa simul exacte determinentur calculo quopiam directo meliorum observationum, & in methodo aliqua Geometrica fundato. Hinc ut ad accurationem in elementorum determinatione perveniatur, supponendum est ab initio Problema jam solutum, debetque rudis aliqua determinatio sufficere, æstimatione quadam congrua facta, vel calculo prævio rem utcunque attingente, vel adhibitis elementis, quæ priores Astronomi suppeditarunt. Notitia hæc rudior licet, usui tamen est primo, ut generatim effectus elementorum singulorum inter se discriminentur; ut perspiciantur casus illi, in quibus singula maximum habent influxum, vel in quibus effectum habent tam exiguum, ut tanquam insensibilis tuto negligi possit; quandonam satis sit, elementum aliquod tantum obiter determinatum habere, ut observationi omnes eæ conditiones adsint, quas habere debet, antequam ad alias disquisitiones sit utilis, immo quas habere debet, dum ea utendum est. Præterea ex ea discitur, quo tempore, quave methodo observationes instituendæ sint, ut præ ceteris sive ad generalem elementorum inquisitionem, sive ad peculiarem aliquam adhiberi possint. Denique hæc notitia habet illud commodi, quod tum locus sit *positioni falsi*, quæ via est commodissima, & sæpe etiam tutissima in resolutione problematum magis complicatorum. Itaque ejusmodi elementa rudius determinata eodem modo adhibentur, tanquam vera essent, ad calculandos motus, qui inde eruuntur (ut nempe casus fert, exempli causa in disquisitione Theoriæ Planetarum, ad stabiliendam regulam aliquam Articuli præcedentis), ut postea cum observationibus maxime accuratis conferri possint. Prout jam calculus magis, minusve ab observationibus aberrat, ita Elementa quoque corriguntur novis positionibus factis, quæ priorem emendant calculum, ac observationibus reddent propiorem: ope elementorum ita correctorum iterum ac iterum quæruntur magis accurata: & quidem eæ correctiones jam in uno tantum, jam simul in pluribus adhibentur ex observationibus aliis, alio tempore, aliave methodo institutis. Atque hac ratione tentando varia, combinando, & calculando Theoria motuum cœlestium perficitur. Exempla quædam hujus rei Cap. II. Sect. I. jam dedimus; alia tum per decursum præsentis, tum toto sequente Capite occurrent.

ARTI-

ARTICULUS IV.

De melioribus methodis ſtabiliendi elementa Theoriæ Solis, cum exemplis applicatis ad obſervationes, quæ ad determinationem horum elementorum ſunt inſtitutæ.

484. Poſtquam ars horologiaria, & theoria motus apparentis fixarum ad hunc perfectionis gradum perducta eſt, nulla melior eſt methodus poſitionem ſyderum accurate determinandi, quam ſi obſervetur eorum differentia in aſcenſione recta cum ſtella quapiam, quæ ceteris ad id commodior viſa fuerit; & declinatio ex altitudine meridiana, vel ex differentia declinationis cum ſtella eadem, vel altera, quæ exacte jam ſit obſervata, uti explicuimus Artic. VIII & IX. Cap. I. Sect. II. Verum cum Sol latitudinem nullam, quæ percipi poſſet, habeat, ejus aſcenſionem rectam obſervare ſatis eſt, ut tempus ejus tranſitus per puncta æquinoctialia & ſolſtitialia in ſua orbita reperiatur. Nam dum eſt in punctis æquinoctialibus, ejus aſcenſio recta eſt vel 0°, vel 180°; quando vero verſatur in punctis ſolſtitialibus, aſcenſio recta eſt vel 90°, vel 270°. Ut autem habeatur tempus, quo ſol ad alia orbitæ ſuæ loca pervenit, uti ad puncta diſtantiæ mediæ, ad apſides (quarum altera, nempe aphelium terræ, dicitur *apogæum ſolis*; altera, terræ perihelium, vocatur *perigæum* ſolis) &c. aſcenſio ſolis recta obſervata reducenda eſt ad longitudinem (312): atque inde omnes dimenſiones orbitæ ſolis, quæ eſt ellipſis a terra deſcripta, determinari poterunt, adhibitis iis methodis, quas Sect. I. Cap. II. deſcripſimus.

485. Itaque ut determinetur tempus revolutionis annuæ ſolis, via ſecuriſſima eſt, ſi ex obſervationibus inveniantur duo momenta temporis, quibus ſol eundem accurate ſitum reſpectu ejusdem ſtellæ fixæ habet, ita, ut inter utrumque hoc tempus magnus revolutionum numerus intercedat. Hoc temporis intervallum per revolutionum numerum diviſum dabit tempus revolutionis annuæ.

In exemplo: die 26 Junii 1683, 0 h. 2′. 8″ tempore medio, Pariſiis obſervavit De la Hirius differentiam aſcenſionis rectæ inter ſolem & ſtellam Sirium 2°. 34′, 48″, quæ reducta ad differentiam longitudinis fit 4°. 55′. 18″. Poſt 69 revolutiones die 27 Junii An. 1752, 0 h. 2′, 28″ tempore medio ad Caput Bonæ Spei obſervavi differentiam aſcenſionis rectæ inter ſolem & Sirium 2°. 0′. 2″½: e quo infero (habita ratione motus diurni ſolis 57′, 12″, & differentiæ meridianorum 1 h. 4′. 40″) ſolem fuiſſe in eodem ſitu

reſpectu Sirii die 26 Junii 16 h. 33′, 45″ tempore medio Pariſiis. Intervallum 25202 d. 16 h. 11′, 37″ ſi dividatur per 69, prodit tempus revolutionis annuæ ſolis 365 d. 6 h. 8′. 52″.

486. Obſerva I. Quod ſi obſervationes correſpondentes, quibus ſitus ſolis ad aliquam ſtellam fixam refertur, ſed aliis anni temporibus factæ, ſeu ſole exiſtente in aliis orbitæ ſuæ locis, eadem methodo inter ſe comparentur, nequaquam eadem magnitudo revolutionis annuæ obtinetur. Exempli cauſa die 29 Decembris A. 1683, o h. 2′. 55″ tempore medio, De la Hirius invenit differentiam inter aſcenſionem rectam ſolis, & ſtellam *Aldebaran*, 145°, 43′, 4″, cui reſpondet longitudo 147°, 21′, 10″; & 30 Decembris 1752, o h. 3′. 22″ tempore medio ad Caput Bonæ Spei reperi differentiam aſcenſionis rectæ ſolis, & ejusdem ſtellæ, 145°, 21′, 44″: hac reducta ad longitudinem, & adhibito motu diurno ſolis 1°. 1′. 12″, differentia vero meridianorum eadem, qua in priore caſu, inveni ſolem tempore medio Pariſiis 29 Decembris 1752, 16 h. 26′. 55″ habuiſſe eundem reſpectu *Aldebaran* ſitum, quem An. 1683 habuit: intervallum inter utramque obſervationem eſt 25202 d. 16 h. 24′. 0″, e quo revolutio annua eruitur 365 d. 6 h. 9′. 3″, nempe 11″ major, quam prius inventa.

487. Hoc diſcrimen haud poteſt ex integro attribui exiguis erroribus, qui in obſervationes ſemper ſolent irrepere: etenim collatis obſervationibus menſibus Majo, Junio, Julio, Auguſto inſtitutis, revolutiones annuæ conſtanter reperiuntur minores, quam ex obſervationibus menſibus Novembri, Decembri, Januario & Februario factis: ita quidem, ut ſolæ obſervationes circa finem Martii & Septembris inſtitutæ (ſole verſus puncta diſtantiæ mediæ verſante) eandem largiantur revolutionis annuæ quantitatem; differentia vero maxima ſit, ſi adhibeantur obſervationes circa finem Junii (ſole in Apogæo exiſtente) & Decembris (dum ſol verſus perigæum eſt) factæ.

488. Ex hac inæqualitate autem evidenter conſequitur, *ſolem non habere eandem velocitatem, dum ad idem punctum redit, in quo prius fuerat obſervatus*, id quod fieri nequit, niſi linea apſidum aliquantum moveatur, atque ita iisdem cæli punctis non eadem ſemper ſolis anomalia reſpondeat. Et certe nemo non intelligit, quod ſi ſemel ſol in ſuo apogæo ſit obſervatus, & poſtea, abſoluta integra reſpectu fixarum revolutione, ſoleque ad idem, in quo prius viſus fuerat, cæli punctum redeunte, reperiatur, apogæum non amplius eſſe in eo puncto, ſed aliquantum promotum fuiſſe ultra illud, ſol in hoc loco majorem debeat habere velocitatem, quam quæ apogæo convenire poſſit, conſequenter etiam ad illum citius per-

pervenire, quam ſi apogæum manſiſſet immotum, & hinc tempus revolutionis brevius fieri. Contrarium eveniret, ſi obſervatio fuiſſet in ſolis perigæo inſtituta; aut ſi loco motus juxta ſignorum ordinem, apogæum haberet motum retrogradum. Ex his itaque patet *Primo.* Superius relatas obſervationes oſtendere, *lineam apſidum ſolis moveri juxta ordinem ſignorum: Secundo.* Obſervationes ad determinandam revolutionem annuam maxime idoneas eſſe, quæ inſtituuntur ſole verſante circa puncta diſtantiæ mediæ; aut vero accipiendam eſſe quantitatem aliquam mediam inter revolutiones deductas ex obſervationibus tam in apogæo, quam in perigæo ſolis eodem temporis intervallo factis: atque hæc methodus tutior eſt, quod ſole prope apſides exiſtente aliquot continuis diebus ejus motus ſit uniformis, adeoque obſervationes uno die inſtitutæ accurate reduci poſſint ad eas, quæ duos, tresve dies tardius vel citius ſunt habitæ. Et ex ſupra allatis exemplis ſtatuemus veram quantitatem revolutionis annuæ ſolis 365 d. 6h. 8′. 58″.

489. Obſerva II. Ex comparatione temporum reditus ſolis ad idem æquinoctium, ad idem ſolſtitium, denique ad idem, qualecunque id ſit, eclipticæ punctum, non ſolum inæqualis diverſis anni temporibus revolutio eruitur, verum etiam univerſim minor, quam illa, quam paullo ante determinavimus. Itaque ad evitandas inæqualitates ob motum Apogæi ſolis, comparandæ ſunt obſervationes vel inſtitutæ, dum ſol verſabatur circa idem punctum diſtantiæ mediæ, vel circa duo æquinoctia autumnalia, & circa duo æquinoctia verna eorundem annorum, hoc eſt, ut primis duabus obſervationibus circa æquinoctia ejusdem anni inſtitutis, etiam poſtremæ duæ eodem anno circa æquinoctia fiant, & obſervationes autumnales inter ſe comparentur, & verna cum verna: ut hac ratione accipi poſſit medium inter revolutionem prodeuntem ex obſervationibus circa autumnalia æquinoctia factis, & illam, quæ eruitur ex obſervationibus circa æquinoctia verna inſtitutis. Simili ratione obſervationes etiam accipi poſſunt circa duo ſolſtitia æſtiva, & circa duo ſolſtitia hyberna eorundem annorum factæ. Nobis ſatis fuerit, exemplum prioris caſus addidiſſe. Die 28 Martii A. 1657 Caſſinius obſervavit in magno Gnomone ad D. Petronii Bononiæ altitudinem veram centri ſolis 48°, 15′, 57″, tempore medio Pariſiis 27 Martii 23 h. 28′. 56″. Subtracta hinc elevatione æquatoris 45°. 30′, 40″ remanet declinatio ſolis 3°, 15′, 17″, cui reſpondet 8°, 11′, 32″ ♈, quam longitudinem reduco ad 8°, 11′, 11″ ob rationem mox reddendam (vid. Obſerv. III). Ex obſervata die 28 Martii A. 1749, 0 h. 5′. 7″ tempore medio Pariſiis differentia aſcenſionis rectæ Solis & Procyonis

(cujus aſcenſio recta tum erat 111°, 32′, 42″) 104°, 15′, 8″ reperio, longitudinem ſolis 8°, 11′, 11″ ♈ fuiſſe die 28 Martii 1749, 6 h. 10′. 50″ tempore medio. Intervallum temporis inter utramque obſervationem diviſum per 92 dat revolutionem ſolis 365 d. 5 h. 48′. 43″. Erat autem ſol in his obſervationibus admodum vicinus loco diſtantiæ ſuæ mediæ.

490. Ex his complures ſequelæ magni momenti deducuntur. *Primo. Stabiliendæ ſunt tres ſpecies revolutionum in theoria ſolis;* Nempe revolutio *ſyderea*, quæ eſt tempus reditus ſolis ad eandem ſtellam fixam, eſtque 365 d. 6 h. 8′. 58″. Dein revolutio *tropica*, hoc eſt, intervallum reditus ſolis ad idem punctum eclipticæ, ad eundem colurum, ad eundem tropicum &c., cujus duratio eſt 365 d. 5 h. 48″, 43″. Denique revolutio *anomaliſtica*, tempus reditus ſolis ad eandem apſidem, quæ eſt, ut mox videbimus, 365 d. 6 h. 16′. 0″.

491. *Secundo.* Quoniam ſol ad idem punctum eclipticæ 20′, 15″ temporis citius revertitur, quam revolutionem integram reſpectu fixarum abſolvat, ſequitur, coluros, & hinc puncta æquinoctialia & ſolſtitialia, habere motum retrogradum reſpectu ſolis, arcu circitur 50″ per annum: ex quo fit, ut aſcenſione recta & longitudine a puncto æquinoctiali arietis computatis videatur ſol jam integram deſcripſiſſe eclipticam, dum reipſa non niſi 359°, 59′, 10″ conſecit. Hic motus punctorum æquinoctialium dicitur *præceſſio æquinoctiorum.*

492. *Tertio.* Quia diverſæ anni tempeſtates juxta revolutionem tropicam contingunt, utpote quæ (275) a tranſitu ſolis per puncta æquinoctialia, & ſolſtitialia dependent, hæc revolutio maxime idonea eſt, ut ſit regula temporis civilis & politici, ideoque etiam ei calculi Aſtronomici accommodandi ſunt, quamvis Aſtronomis revolutio ſyderea eſſet opportunior. Itaque ratio habenda eſt differentiæ inter haſce revolutiones, ac ſupponendum, quod 360 gradus eclipticæ reſpondeant tempori 365 d. 5 h. 48′. 43″, licet interea ſol in cælo ſtellato non percurrat niſi 359°, 59′. 10″.

493. *Quarto.* Si ſtellæ ſunt reipſa immobiles, pariterque immobilia ſunt aphelia, nodi, aliaque puncta orbitarum planetariarum; hæc omnia reſpectu punctorum æquinoctialium 50″ ſingulis annis videri debent progredi juxta ſignorum ordinem.

494. *Quinto.* Et quia revolutio anomaliſtica ſolis ſyderea 7′ temporis excedit, conſequens eſt, ut apogæum reſpectu fixarum motu annuo progrediatur 17″, & reſpectu punctorum æquinoctialium circiter 1′, 7″.

495.

495. *Sexto.* Motus apogæi ſolis indicio eſt, vi centrali terræ exiguam quamdam, ſed conſtantem, mutationem alicunde accidere (176). In Sectione VI. Cap. I. Art. VI. cauſam phyſicam adferemus ſimilis motus apogæi Lunæ; & Art. VIII. retrogradationis punctorum æquinoctialium.

496. Habitis jam temporibus diverſarum ſolis revolutionum, omnes dimenſiones ellipſeos, quam deſcribere videtur, inveniri poſſunt ope trium ejus longitudinum, quæ conditionibus magis faventibus, & cum cura obſervatæ ſint, ſecundum methodum num. 150 expoſitam. Exempli cauſa collato ſole cum Sirio ad Caput Bonæ Spei, longitudinem veram ſolis die 30 Septembris A. 1751, 23 h. 49′. 44″ tempore medio inveni 6ˢ, 7°, 51′, 47″½: die 30 Decembris 0 h. 3′. 0″ tempore medio 9ˢ, 8°, 29′, 55″; & die 28 Martii 1752, 0 h. 5′, 2″ tempore medio 0ˢ. 8°, 9′, 27″½. Ex his intuli, locum perigæi ſolis circa finem Anni 1751 fuiſſe 9ˢ. 8°. 45′, 40″; ſolem per illud tranſiviſſe 30 Decembris 5 h. 9′ tempore medio ad Meridianum Pariſinum reducto; eccentricitatem eſſe partium æqualium 16814, quarum diſtantia media terræ a ſole continet 1000000: & hinc maximam æquationem centri 1°, 55′, 36″½.

Intervallum a 30 Decembris Anni 1751, 5 h. 9′ tempore medio usque ad 1 Januarii meridiem A. 1752 tempore medio (eſt autem hic meridies apud omnes fere Aſtronomos *epocha* motus medii ſolis annis biſſextilibus; pridianus vero annis communibus) eſt 1 d. 17 h. 51′, quo ſol motu medio conficit 1°, 45′. 35″: his additis ad locum perigæi 9ˢ, 8°, 45′, 40″, habetur epocha motus medii pro initio Anni 1752, nempe 9ˢ. 10°, 31′, 15″.

497. Multis ejusmodi ſelectis obſervationibus ad ſimilem calculum revocatis, tandem de veris Theoriæ ſolis elementis certi reddemur; & ſi quidem aliquod in iis diſcrimen occurrat medium quoddam inter ea, quæ reperimus, accipiemus.

498. Verum quia Aſtronomus quam minime elementa ſuæ theoriæ hypotheſibus ſuperſtruere debet; decebit ſane, ut poſitio lineæ apſidum, & epocha tranſitus ſolis per eandem, ſecundum methodum N. 109 explicatam; æquatio vero maxima cum eccentricitate juxta N. 143 & 145 inveſtigetur. In exemplo, e comparatione ſolis cum Sirio ejus longitudinem die 30 Junii A. 1751, 0 h. 2′, 55″ tempore medio ad Caput Bonæ Spei inveni 3ˢ. 8°, 8′, 54″; & 30 Decembris 0 h. 3′, 0″ eadem erat 9ˢ. 8°, 29′, 55″: differentia 6ˢ, 0°, 21′, 0″, excedit 180°, 0′, 33″½, quos ſol intra ſemirevolutionem anomaliſticam deſcribit, 20′, 26″½: jam vero motu diurno exiſtente 57′, 12″, ſol exceſſum illum percurrit intra 8 h. 34′, 45″; & ad 180°, 0′, 33″½ e loco, in quo 30 Decembris

bris o h. 3′. o″ fuerat, pervenit die 30 Junii 8 h. 37′, 40″. Intervallum temporis eſt 182 d. 15 h. 15′, 20″, exceditque ſemirevolutionem anomaliſticam 17′, 20″: itaque 30 Junii 8 h. 37′, 40″ ſol nondum ad apogæum pervenerat: fiat: ut 4′, o″ (differentia inter velocitates ſolis in apogæo & perigæo) ad 57′, 12″ (velocitatem diurnam ſolis in apogæo); ita ſunt 17′, 20″ ad 4 h. 7′, 52″: hoc tempore adhuc opus erat, ut ſol apogæum attingeret: tranſiit ergo per apogæum die 30 Junii 1751, 12 h. 45′, 32″ ad Caput Bonæ Spei; Pariſiis vero 11 h. 40′, 52″ tempore medio: & quidem apogæo exiſtente in 3ˢ, 8°, 39′, 12″.

Si comparentur duæ longitudines ſolis ad diem 30 Septembris A. 1751, & 28 Martii 1752 N. 496 relatæ, reperitur, quod hoc intervallo ſol confecerit 180°, 17′, 40″ motu vero: motus medius, tempori inter obſervationes interjecto competens, erat 176°, 26′, 29″: ſemidifferentia 1°, 55′, 35″½ eſt æquatio maxima ſolis, cui tamen addendum eſt 1″, quoniam 28 Martii ſol paullo plus quam uno gradu aberat a puncto ſuæ diſtantiæ mediæ. Eſt igitur æquatio maxima 1°. 55″, 36″½; & eccentricitas 16814 partium.

499. Quod ad revolutionem anomaliſticam attinet, ea invenitur ex comparato tempore tranſitus ſolis per ſuum perigæum die 30 Decembris A. 1751, 5 h. 9′ tempore medio Pariſiis, cum tempore tranſitus ejusdem, deducto ex obſervationibus Norimbergæ a Walthero An. 1487 factis. Juxta has obſervationes (vid. Monum. Acad. Pariſ. A. 1749 pag. 53 & ſeqq.) die 12 Decembris, 12 h. 36′ tempore medio ſol aberat a perigæo 3°, 49′, 36″; & hinc perigæum attigit die 16 Decembris, 6 h. 5′ tempore ad meridianum Pariſinum reducto. Intervallum eſt 96428 d. 23 h. 4′, e quo revolutio una eruitur 365 d. 6 h. 16′, 9″.

Similiter ſol erat in apogæo A. 1503, die 16 Junii, 18 h. o′ juxta meridianum Pariſinum. Vidimus autem, ſolem etiam fuiſſe in Apogæo die 30 Junii 1751, 11 h. 41′: intervallum 90584 d. 17 h. 41′ dat revolutionem unam 365 d. 6 h. 15′, 55″: itaque accepto medio ſtatui poteſt 365 d. 6 h. 16′.

500. Obſerva III. Antequam obſervatio aliqua ſolis ad ſubtiliorem quampiam diſquiſitionem adhibeatur, rationem habere oportet duarum exiguarum inæqualitatum periodicarum, quarum cauſam & modum calculi Sectione VI. Cap. I. Art. VIII. & IX. adferemus. Appellantur vero *variatio*, ſeu *æquatio lunaris*, & *deviatio in longitudine*. Nos in omnibus obſervationibus præſente Articulo allatis utramque præ oculis habuimus.

501.

501. Obſerva IV. Quod ſi Elementa Theoriæ ſolis modo determinata, & quæ veris admodum propinqua cenſeo, aliquantum diſcrepent ab iis, quæ Tabula N. 170 exhibet; cauſa eſt, quod hæc tabula conſtructa ſit ex elementis Tabularum Aſtronomicarum D. Caſſini.

ARTICULUS V.

Methodus reducendi omnes obſervationes Planetarum in ſuperficie Telluris inſtitutas, ad eas, quæ eodem tempore fierent, ſi obſervator in ſole collocaretur.

502. Suppoſita jam theoria ſolis, ſive terræ, exacte cognita, ejus orbitæ dimenſiones tanquam baſis & fundamentum pro operationibus Geometricis aſſumi poſſunt, quæ neceſſariæ ſunt ad inveniendas dimenſiones orbitarum aliorum Planetarum, modo tempora eorum revolutionum interea dentur, quæ, qua ratione inveniantur, ſequente articulo docebimus.

Sit enim locus terræ T in ſua orbita TER, S ſit ſol, & angulus STM menſura obſervatæ differentiæ inter longitudinem ſolis & longitudinem planetæ cujusvis M e terra viſi. Peracta integra revolutione Planeta ad eundem locum M redibit; ſit vero tum terra in R, & obſervetur angulus MRS. Ex Theoria terræ notus eſt angulus TSR cum lateribus ST, SR, atque hinc innoteſcunt (Elem. 760) anguli STR, SRT, & latus TR. Itaque in triangulo TMR habetur latus TR, & anguli MTR, MRT, unde inveniuntur latera MT, MR. Denique in triangulo MST habentur MT, TS & angulus comprehenſus MTS, ex quo reperitur SM diſtantia curtata ſolis a planeta in puncto projectionis orbitæ M, & angulus TSM, qui dat differentiam inter longitudinem terræ ☿ ST, & longitudinem planetæ e ſole viſi ☿ SM.

503. Quod ſi dein quæratur latitudo e ſole viſa, erit (478): ut ſinus anguli MTS ad ſinum anguli TSM; ita tangens latitudinis planetæ, obſervatæ e puncto T, ad tangentem latitudinis illius heliocentricæ.

504. Denique habebitur vera diſtantia planetæ a ſole, ſi fiat (476): ut coſinus latitudinis heliocentricæ planetæ eſt ad ſinum totum; ita diſtantia curtata SM ad diſtantiam quæſitam.

Longitudo, latitudo, & diſtantia eadem reperiri quoque poteſt ope trianguli SRM. Atque hac ratione conſtrui poteſt tabula

plurimarum longitudinum & latitudinum e sole visarum, & simul distantiarum a sole in totidem orbitæ punctis.

505. Spectato systemate Physico, in quo admittitur, actione mutua planetarum & cometarum tam in tempore revolutionum periodicarum, quam in positione lineæ apsidum, eo magis sensibilem variationem produci, quo eorum corpora & majora sunt, & propius ad sese accedunt, hæc methodus non satis tuta est ad stabiliendam theoriam Jovis & Saturni: sed ad reliquos quod attinet, fidenter adhiberi potest.

ARTICULUS VI.

Diversæ Methodi inveniendi elementa Theoriæ Planetarum ex observationibus in terra institutis.

506. I. *Inveniendi tempus revolutionis periodicæ Planetæ.* Cognito circiter tempore revolutionis Planetæ, assumantur duæ observationes, quæ haberi possunt, maximo temporis intervallo a sese remotæ, tumque institutæ, cum planeta in eodem situ respectu ejusdem fixæ, simulque in oppositione (si planeta est ex superioribus); vel in conjunctione (si est ex inferioribus) cum sole fuit. His enim in casibus videtur (396) in eodem loco eclipticæ, ac si e sole spectaretur. Intervallum temporis inter observationes dividatur per revolutionum numerum, & habebitur tempus revolutionis periodicæ respectu fixarum; & quia omnis Planetarum motus a primo puncto Arietis computatur, facienda est hæc analogia: *ut* 360°, 0′, 0″ *sunt ad tempus revolutionis periodicæ respectu fixarum; ita est motus harum in longitudinem tempore ejus revolutionis ad tempus subtrahendum a tempore revolutionis respectu fixarum, ut habeatur tempus revolutionis periodicæ respectu primi puncti arietis.* Sic tempore revolutionis Mercurii fixæ videntur progredi 12″, quibus in tempore respondent 1′, 10″, quæ subtrahi debent, ut obtineatur revolutio Mercurii respectu primi puncti Arietis, quæ invenitur 87 d. 23 h. 14′, 20″. Similiter reperitur revolutio Veneris 224 d. 16 h. 41′, 37″; Martis 686 d. 22 h. 19′. 0″; Jovis 4330 d. 12 h. 27′; & Saturni 10747 d. 2 h. 50′.

507. II. *Inveniendi lineam apsidum, epocham transitus planetæ per eandem, & eccentricitatem.* His utcunque cognitis, seligendæ sunt tres observationes longitudinum & latitudinum planetæ, quarum prima a tertia semirevolutione circiter absit, quæque institutæ sint, Planeta prope loca distantiæ suæ mediæ versante; secunda vero, cum circa lineam apsidum erat. Oportet autem has longitudines & latitudi-

tudines helio centricas esse, sive observatæ sint tempore ad id præscripto, sive methodo N. 502 exposita sint reductæ. Præterea reducendæ sunt longitudines ad orbitam planetæ, subtracto loco ☊ prope cognito, ut habeatur argumentum latitudinis, ad cujus cosinus logarithmum addendus est logarithmus cosinus latitudinis heliocentricæ planetæ: summa erit logarithmus cosinus arcus, qui, addito loco ☊, erit longitudo planetæ reducta. His ita præmissis cetera fiant juxta methodum, & exemplum N. 151 adductum.

508. Observa I. Si habeantur longitudines heliocentricæ ad orbitam reductæ tam circa utrumque distantiæ mediæ punctum, quam circa utramque apsidem; inveniri potest eccentricitas per æquationem maximam, ut N. 109, & 143, & linea apsidum per tempus semirevolutionis.

509. Observa II. Inventis omnium planetarum eccentricitatibus, eæ reducendæ sunt (170) ad scalam aliquam communem, in qua pro unitate assumatur distantia media terræ a sole.

510. III. *Inveniendi positionem lineæ nodorum.*

Prima methodus: Locus observatus planetæ, in quo caret latitudine, reducatur ad locum e sole visum, habebitur locus nodi alterutrius.

511. *Altera methodus*: Observatis tempore & loco conjunctionis, vel oppositionis planetæ cum sole, in quibus ejus latitudo fuit exigua; determinato item per observationem tempore, quo planeta nullam habuit latitudinem, adeoque in suo nodo fuit; ex theoria planetæ Numeris superioribus stabilita quæratur arcus verus in orbita, quem e sole visus percurrere debuit a sua conjunctione vel oppositione usque ad tempus transitus per nodum: hic arcus addatur vel subtrahatur a loco observatæ conjunctionis vel oppositionis: habebitur locus verus nodi.

512. IV. *Inveniendi inclinationem orbitæ planetæ ad planum ecliptícæ.*

Prima methodus: Si habeatur series observationum latitudinum heliocentricarum planetæ circa limites versantis; maxima harum latitudinum determinabit inclinationem orbitæ.

513. *Altera methodus:* Quando sol est accurate in eodem ecliptícæ puncto cum nodo planetæ, atque planeta 90° a sole distat, hoc est, si differentia longitudinum solis & planetæ e terra visi est exacte trium signorum; latitudo planetæ e terra visa est accurate æqualis inclinationi orbitæ. Cum enim terra in hoc casu existat in linea intersectionis planorum ecliptícæ, & orbitæ planetæ; planum anguli, quem ad oculum observatoris efficiunt duo radii, quorum alter ad planetam, alter ad ejus punctum projectionis in ecliptica ducitur, est perpendiculare ad eam intersectionem. Igitur (Elem. 630) angulus ad oculum observatoris est tunc æqualis inclinationi plani utriusque.

514. *Tertia methodus:* Hinc deducitur tertia methodus, quæ in eo consistit, ut quam exactissime observetur longitudo, & latitudo geocentrica planetæ, dum sol per ejus nodum transit, modo ea latitudo minor ne sit inclinatione circiter cognita. Tum fiat: *ut sinus elongationis planetæ a sole observatæ est ad tangentem ejus latitudinis geocentricæ pariter observatæ; ita est sinus totus ad tangentem inclinationis orbitæ.*

Nam sit N S T (fig. 70) linea nodorum planetæ, sol in S, terra in T; P locus planetæ in orbita. Demisso perpendiculo P L ad planum eclipticæ, & ductis P T, L T, erit angulus P T L æqualis latitudini observatæ. Ducatur etiam P R perpendicularis ad lineam nodorum: erit angulus P R L (Elem. 630) æqualis inclinationi plani orbitæ ad eclipticam. Angulus R T L est elongatio planetæ a sole, aut differentia longitudinum solis & planetæ. His ita constitutis in triangulo rectangulo R T L habetur: *r*: T L = *sin* R T L: R L; & in triangulo rectangulo P T L est: *r*: T L = *tang* P T L: P L; quare est etiam *sin* R T L: *tang* P T L = R L: P L. Habetur autem etiam in triangulo P R L, R L: P L = *r*: *tang* P R L; ergo est *sin* R T L: *tang* P T L = *r*: *tang* P R L.

515. V. *Inveniendi, an nodi & aphelia planetarum sint immobilia, an vero moveantur, & quantum.*

Ex observationibus, quæ haberi possunt, maxime a sese distantibus, determinetur tempus duplicis transitus planetæ per suum aphelium, aut per eundem nodum. Si quotus emergens ex divisione temporis inter utrumque transitum per numerum revolutionum planetæ respectu fixarum, est accurate æqualis tempori unius ejusmodi revolutionis, aphelium, & nodi sunt immobiles; si minor est, aphelium, aut nodus, habent motum retrogradum; si major, aphelium vel nodus habent motum directum: atque differentia hujus quoti, & temporis revolutionis periodicæ respectu fixarum indicat quantitatem motus lineæ apsidum, vel nodorum.

516. Observa I. Cum observationes ab astronomis sexto decimo sæculo antiquioribus relictæ & rudes admodum, & paucæ sint, difficillimum est decidere, utrum aphelia & nodi planetarum, aut qua quantitate, moveantur. Complures e modernis astronomis ea supponunt immobilia; quamvis generatim videatur iis tribuendus esse motus aliquis respectu fixarum valde lentus, & quidem apheliis directus, nodis retrogradus. Atque hæc res meretur sane diligentem apud astronomos, & geometras disquisitionem. Interea en tabellam e Cassinianis & Halleyanis contractam, in qua signum + denotat motum annuum directum; & signum — retrogradum respectu fixarum.

	Inclinatio orbitæ	Locus Aphelii pro A. 1700	Locus ☊ pro An. 1700.	Motus aphelii juxta Caſſini	Motus ☊ juxta Caſſini	Motus aphelii juxta Halley	Motus ☊ juxta Halley
	gr.min.ſec.	ſig. gr.min.ſec.	ſig. gr.min. ſe.	ſec.	ſec.	ſec.	ſec.
Saturni	2 30 36	8 28 8 39	3 21 13 29	+ 27	+ 6	+ 30	— 32
Iovis	1 19 30	6 9 26 4	3 7 29 53	+ 6	— 27	+ 22	— 0
Martis	1 50 54	5 0 36 20	1 17 17 25	+ 21	— 17	+ 20	— 12
Veneris	3 23 20	10 6 25 20	2 13 59 25	+ 35	— 17	+ 6	— 19
Mercurii	7 0 0	8 12 34 35	1 14 43 0	+ 29	— 0	+ 2	— 0

517. Obſerva II. Ubi certi fuerimus, tempus revolutionis anomaliſticæ ſenſibiliter differre a tempore revolutionis periodicæ planetæ reſpectu fixarum, quemadmodum ſuperius (506) factum eſt, revolutio anomaliſtica inventa reducenda eſt ad revolutionem reſpectu primi puncti Arietis, eaque deinceps utendum ad inveniendos motus medios planetæ correſpondentes motibus veris obſervatis, adhibita in praxi methodo generali N. 507 citata, & N. 151 expoſita; qua etiam pro ſole N. 496 uſi ſumus.

ARTICULUS VII.

De Lumine & figura Planetarum.

Ex obſervationibus ope tuborum opticorum inſtitutis, ſequentia tanquam indubitata habentur.

518. I. *Planetæ ſunt corpora opaca, ex ſe nullum lumen, ut ſol, habentia: ſed apparent nobis lucida, quia radios e ſole in eorum ſuperficiem incidentes ad nos remittunt*, fere quemadmodum ſpeculum ita radiis ſolaribus expoſitum, ut eos verſus nos reflectat, totum luminoſum apparet.

Nam Mercurius & Venus iisdem phaſibus obnoxii ſunt, quibus luna (vid. Sect. VI. Art. I), ſecundum diverſos aſpectus eorum cum ſole: videntur undique illuminati, ac rotundi, quando verſantur circa conjunctionem ſuperiorem cum ſole; decreſcunt in acceſſu ad conjunctionem inferiorem, in qua prorſus diſparent, ſaltem niſi magnam habeant latitudinem. Quin imo contingit quandoque, ut latitudine 16′ minore exiſtente per diſcum ſolis tranſeant, in quo tanquam maculæ rotundæ, & valde nigræ comparent. Si autem planetæ ita eſſent luminoſi de ſe, ut apparent, eorum lux vel confunderetur cum luce ſolis, & tunc in conjunctionibus ejusmodi videri non poſſent; aut diſtingueretur a ſolari per majorem, minoremve vivacitatem, aut per diverſum colorem.

Similiter Mars ſubjectus eſt phaſibus ſuis, quippe qui exacte rotundus apparet in oppoſitione, in quadraturis vero ſimilem prope figuram refert, ac luna tribus vel quatuor diebus ante aut poſt plenilunium.

In Jove & Saturno ejusmodi phaſes non videntur, quia hi planetæ tantum a nobis diſtant, ut eodem fere modo eos videamus, ac ſi in ſole eſſemus. Verum cum evidenter conſtet, eos umbram in partem a ſole averſam projicere, quam ſi eorum ſatellites ingrediantur, diſparent; & alias etiam iidem ſatellites in diſcum horum planetarum umbram projiciant, quæ diſcerni poſſit, dum inter eos & ſolem exiſtunt; extra dubium eſt, hos quosque planetas, eorumque ſatellites corpora opaca eſſe.

519. II. *Planetæ ſunt corpora globoſa non perfecte rotunda, ſed aliquantum compreſſa, ut eorum axis rotationis ſit paullo minor diametro eorum æquatoris.*

Hæc figura non obſervatur niſi in Jove & Terra: reliqui enim planetæ ſub angulis minoribus videntur, quam ut inæqualitas eorum diametrorum diſcerni poſſit ſenſu. Ceterum facile oſtendi poteſt, quod ſi ſuperficies planetarum, ſeu tota, ſeu partem, ſit obducta materia homogenea fluida, ut in ſuperficie telluris ſunt maria, planetæ motum rotationis habere nequeant, quin verſus polos comprimantur, & ad æquatorem protuberent.

520. In hac enim hypotheſi neceſſe eſt, talem eſſe figuram planetæ, & tota maſſa fluidi, cujus ſingulæ particulæ verſus centrum planetæ gravitant, maneat in æquilibrio. Et certe hæ particulæ per fluidorum naturam, cum facile cuivis impreſſioni cedant, liberrimeque inter ſe moveantur, ad eum ſitum nituntur, quo viribus æqualibus in punctum gravitationis eorum fixum premant, ſe ſeque mutuo circa illud in æquilibrio ſuſtineant. Quod ſit jam planeta eſſet perfecte ſphæricus, æquilibrium cum motu rotationis conjungi haud poſſet; hoc enim motu fieret, ut diverſæ ſuperficiei globoſæ partes deſcriberent circa axem ſuum circulos eo majores, majoreque cum velocitate, quo a polis abeſſent longius, & æquatori propiores. Unde ejusmodi partes reſpective plus virium a ſuis circulis abeundi acquirerent, & per tangentem a centro rotationis diſcedendi. Hic autem niſus, & vis centrifuga earum verſus centrum planetæ gravitationem imminuit; & partes ſuperficiei globi eo minus eſſent graves, quo forent a polis remotiores: hinc partes fluidæ prope æquatorem minore vi reſiſterent niſui partium prope polos ad centrum accedendi, ac propterea attollerentur aliquantum, ſubſidentibus partibus polaribus, itaque figura comprimeretur, fluido a polis recedente, & ad æquatorem protuberante, aut terras, quæ circa æquatorem ſunt, inundante,

quo

quo itidem figura ſphærica mutaretur. Ejusmodi inundatio ne fieret igitur, terram circa æquatorem notabiliter elevari oportuit, ac planetæ figuram verſus polos depreſſam, ad æquatorem vero altius aſſurgentem dari, ut materiæ exceſſu gravitatis imminutionem, quam motus rotationis efficit, compenſante, æquilibrium perſtaret.

521. Hinc vero ſequitur *primo*, quo motus rotationis eſt velocior, eo debere planetam verſus polos magis ſubſidere: ita depreſſio Jovis eſt admodum ſenſibilis, cum ejus rotatio diurna breviore 10 horarum tempore abſolvatur, licet is planeta excedat magnitudine terram 768 vicibus. Secundum exactiſſimas obſervationes ejus diameter æquatoris ſuperat axem per polos tranſeuntem parte $\frac{1}{17\frac{1}{2}}$.

522. *Secundo* infertur, præter æquatorem, & ejus parallelos in ſuperficie planetæ non dari veros circulos, quicunque tandem ducti concipiantur, ut eſt Meridianus, verticales, horizon &c, quorum figura ad ellipſin accedit. Et Meridianus quidem eſt ellipſis, cujus axis minor per polos tranſit, major autem eſt in plano æquatoris, ejusque diametro æqualis.

523. *Tertio*, hinc 360 gradus æquales Meridiani in ſuperficie ſphæræ cæleſtis, non reſpondere 360 partibus æqualibus in ambitu Meridiani in ſuperficie planetæ acceptis. Unde conſequitur, v. g. in terra, arcus Meridiani terreſtris reſpondentes arcubus æqualibus Meridiani cæleſtis non eſſe æquales inter ſe, ſed minores eſſe in partibus telluris, in quibus ſuperficies eſt magis convexa; majores vero, ubi ea planior eſt. Et hinc tandem deducitur: *Gradus Meridiani terreſtris, reſpondentes gradibus meridiani cæleſtis, eſſe eo majores, quo ad polos propius acceditur; eo minores, quo ad æquatorem magis venitur.*

524. Menſuris accurate acceptis deprehenſum eſt, gradui meridiani cæleſtis in terra ſub circulo polari reſpondere circiter 57440 hexapedas; in latitudine 45° vero 57050; denique ad æquatorem 56750.

525. Saturni figura prorſus ſingularis eſt. Planeta hic videtur cinctus corpore quopiam luminoſo formæ ellipticæ, cujus axis major idem ſemper manet, & ad planum orbitæ Saturni 30 fere gradibus inclinatus, eſtque ad diametrum globi Saturni circiter ut 9 ad 4; axis autem minor ſemper variat, cum jam magis panditur, jam contrahitur magis; hinc Saturnus, quando ejus longitudo heliocentrica eſt $20°\frac{1}{2}$ ♊, apparet, uti fig. 65 exhibetur. Poſtea ſequentibus $7\frac{1}{2}$ annis (quarta nempe revolutionis parte) magis ſe ſe contrahit, circa quorum finem non niſi duabus anſis præditus videtur, ut fig. 66: paullo poſt ſolus Saturnus conſpicitur, figura rotonda, velut fig. 67, longitudine ſcilicet ejus heliocentrica exiſtente

ſtente 20°½ ♍; verum elapſo aliquo tempore anſæ denuo comparent, quemadmodum Fig. 68, quæ poſtea aperiuntur ſemper magis, uti prius contrahebantur, ut poſt quartam revolutionis partem Saturnus talis videatur, qualem Fig. 69 depingit. Ab hac phaſi axis minor decreſcit denuo, planeta redit ad anſas, quæ tandem diſparent, & Saturnum ſolum rotundum relinquunt, quod fit in longitudine heliocentrica 20°½ ♈. Inde rurſus redeunt anſæ, easdemque repetunt variationes, quæ ſitui diverſo orbitarum apparentium ſatellitum Saturni ſunt analogæ; hoc eſt, ellipſis lucida, quæ Saturnum comitatur, ad maximam ſuam amplitudinem pervenit, quando orbitæ ſatellitum itidem latiſſimæ ſunt; diſparet autem, dum orbitæ ſatellitum coincidunt cum lineis rectis, Saturno in earum nodis exiſtente. Porro dum latiſſima eſt hæc ellipſis, ratio axium eſt ut 5 ad 2.

526. Ex his phaſibus facile concluditur, Saturnum eſſe in centro corporis circularis tam tenuis, ut dum nobis aciem obvertit, videri nequeat. Planum iſtud Saturnum undique ambit, quin eum contingat, imo ſpatium valde notabile inter interiorem ſuam peripheriam, & corpus planetæ relinquit. Appellatur *annulus Saturni*. Omnes ejus phaſes eodem modo explicantut, ac viæ ellipticæ macularum in ſuperficie planetæ, vel orbitæ ſatellitum circa ſuum primarium, ſi e loco extra eorum orbitas ſito obſerventur, ut in ſectione ſequente videbimus.

CAPUT II.

Theoria Cometarum e Terra viſorum.

527. Motus Cometarum ut e terra ſpectantur, iisdem ſunt obnoxii illuſionibus opticis, quibus curſus planetarum primariorum, quod fons & origo earum ſit duplex telluris motus, & ejus craſſitudo. Verum quod peculiare habent, & ſpectatores maxime allicit, eſt longus quidam tractus lucidus, qui eos plerumque comitatur, *caudaque* dicitur. Fere ſemper in partem ſoli oppoſitam dirigi ur, & tam longitudine, quam ſplendore creſcit, ut cometa ad ſolem propius accedit. Semper eſt major, dum cometa poſt conjunctionem in exigua latitudine factam e radiis ſolaribus emergit. Quando cometa magnam a ſole diſtantiam habet, fere cauda deſtituitur, & luce quadam nebuloſa cingitur, quæ facit, ne limbus diſci diſtincte cernatur, ſed confuſe, maleque terminatus videatur.

528. Jux-

528. Juxta opinionem maxime verisimilem, hæc cauda est vapor actione solis e corpore cometæ elevatus, ad cujus viciniam venit, postquam longo admodum tempore in maxima elongatione multum humiditatis contrahere potuit. Et reipsa observatur cauda eo longior, quo distantia perihelia cometæ minor est, & ex opposito. Sed cum hæc res solum ad Physicam pertineat, nil ultra in ea morabimur.

ARTICULUS I.

De calculo motus Cometarum e terra spectati.

529. Elementa necessaria ad inveniendam longitudinem, & latitudinem Geocentricam cometæ pro tempore dato, sunt 1°. *Tempus, quo cometa fuit in perihelio*, quod pro *epocha* adhibetur. 2°. *Punctum illius orbitæ, in quo est perihelium.* 3°. *Distantia hujus puncti a sole in partibus, quarum unam continet radius orbis annui terræ.* 4°. *Situs nodi ascendentis orbitæ.* 5°. *Angulus inclinationis plani orbitæ cum plano ecliptica.* His elementis cognitis, calculus cometarum vix differt a calculo planetarum, ut ex præceptis, quæ jam præscribemus, & exemplis manifestum erit.

530. Cometa A. 1739, qui erat retrogradus, transivit per suum perihelium die 17 Junii 1739, 10 h. 9′. 30″ tempore medio; locus perihelii in orbita cometæ erat in 3ˢ, 12°, 38′. 40″. Logarithmus distantiæ perihelii a sole erat 9.828388; nodus ascendens in 0ˢ, 27°, 25′, 14″. Denique inclinatio orbitæ 55°, 42′, 44″. Oporteat invenire locum verum e terra visum pro die 17 Aug. 1739, 14 h. 20′ tempore medio.

531. I. *Accipiatur intervallum inter transitum per perihelium, & tempus datum*, quod in præsente casu est 61 d. 4 h. 10′. 30″; *& horæ, minuta & secunda reducantur ad partes decimales diei.* Fient itaque 61. 174 dies.

532. II. *Dimidium tripli logarithmi distantiæ perihelii subtrahatur a logarithmo intervalli inter tempus transitus per perihelium, & datum; residuum erit logarithmus ejusdem intervalli reducti ad tempus, seu dies elapsos a transitu per perihelium orbitæ in tabula generali post* N. 214 *calculatæ.* In nostro exemplo Logarithmus distantiæ perihelii est 9.828388; ejus triplum 9.485164; tripli dimidium 9.742582; Logarithmus de 61.174 est 1.786567, a quo si 9.742582 subtrahatur, relinquitur 2.043985, Logarithmus de 110.6587 die.

533. III. *Quæratur in tabula generali (N. 214) anomalia vera respondens tempori invento; addaturque ea (si cometa directus est) ad locum perihelii, si*

tempus datum ſequitur tranſitum per perihelium; at ſi præcedat, anomalia ſubtrahatur a loco perihelii. Quando cometa eſt retrogradus & tempus datum tranſitum per perihelium præcedit, anomalia vera addenda eſt loco perihelii; ſubtrahenda vero ab eodem, ſi tempus datum ſit poſterius tranſitu per perihelium: habebitur locus verus heliocentricus cometæ in ſua orbita.

Diebus 110 6587 reſpondent in tabula 90°, 21′, 38″, ſive 3ˢ. 0°, 21′, 38″, quæ a loco perihelii 3ˢ, 12°, 38′, 40″ ſubtrahenda ſunt, quia cometa eſt retrogradus, & tempus datum eſt poſterius tempore tranſitus per perihelium. Unde invenitur locus verus heliocentricus cometæ in ſua orbita 0ˢ, 12°, 17′, 1″.

534 IV. *Locus verus nodi aſcendentis ſubducatur a loco vero heliocentrico cometæ; habebitur argumentum latitudinis cometæ* (471).

Itaque ſi 0ˢ. 27°, 25′, 14″ ſubtrahatur a 0ˢ. 12°, 17′, 1″, argumentum latitudinis eſt 11ˢ. 14°, 51′, 47″.

535. V. *inferatur* (473): *ut ſinus totus eſt ad coſinum inclinationis; ita tangens argumenti latitudinis, eſt ad tangentem argumenti latitudinis in ecliptica accepti, & ad locum verum nodi addendi, ut obtineatur locus verus heliocentricus cometæ ad eclipticam reductus* (475), *ſive ejus longitudo vera e ſole viſa.*

Sic argumentum latitudinis reductum ad eclipticam eſt 11ˢ, 21°, 20′, 7″; & longitudo vera cometæ 0ˢ, 18°, 45′, 21″.

536. VI. *Fiat hæc analogia* (472): *ut ſinus totus ad ſinum argumenti latitudinis; ita eſt ſinus inclinationis orbitæ cometæ, ad ſinum ejus latitudinis e ſole viſæ.*

In noſtro exemplo itaque latitudo cometæ e ſole viſa eſt 12°, 27′, 34″, & quidem auſtralis, cum cometa verſetur in ſex ſignis poſterioribus ſui argumenti latitudinis (458).

537. VII. *Calculetur verus locus ſolis, inveniaturque ejus diſtantiæ a terra logarithmus: ab illo ſubtrahantur ſex ſigna, ut ſciatur locus verus telluris e ſole viſus; accipiatur differentia inter longitudinem veram heliocentricam cometæ, & longitudinem terræ e ſole viſam: hæc differentia dabit angulum ad ſolem inter terram & cometam, qui etiam angulus* Commutationis *dicitur.*

In exemplo aſſumto, verus locus ſolis die 17 Auguſti, 14 h. 20′, eſt 4ˢ, 24°, 34′, 36″; & logarithmus ejus diſtantiæ a terra eſt 10.0049⁵⁶; itaque locus verus terræ & ſole viſus eſt 10ˢ, 24°, 34′, 36″: differentia a 0ˢ, 18°, 45′, 21″ dat angulum commutationis, ſeu angulum ad ſolem 1ˢ, 24°, 10′, 45″, ſive 54°, 10′, 45″.

538. VIII. Fiat (209 & 476): *ut quadratum coſinus dimidiæ anomaliæ veræ* (inventæ 533) *eſt ad factum ſinus totius in coſinum latitudinis cometæ e ſole viſæ; ita eſt diſtantia perihelii cometæ ad ejus diſtantiam curtatam.*

Ex hac analogia reperietur logarithmus diſtantiæ curtatæ noſtri cometæ 10.121813.

539. IX.

539. IX. *Accipiatur differentia inter logarithmum diſtantiæ curtatæ, & logarithmum diſtantiæ terræ a ſole, & aſſumta hac differentia pro logarithmo tangentis alicujus, quæratur angulus competens huic tangenti* (Elem. 752); *ab eo ſubducantur* 45°; *reſidui logarithmus tangentis addatur ad logarithmum tangentis complementi anguli dimidii ad ſolem* (N. 537 reperti): *ſumma erit logarithmus tangentis arcus addendi ad illud complementum, ſi diſtantia curtata cometæ a ſole excedit diſtantiam terræ a ſole; ſubtrahendi vero, ſi diſtantia cometæ eſt minor, quam diſtantia terræ: habebitur angulus elongationis, ſive angulus ad terram inter locum ſolis, & locum geocentricum cometæ interceptus: ex quo facile deducitur longitudo cometæ e terra viſa.*

Itaque ex 10.121813 ſubductis 10.004966, reſiduum 10.116847 eſt logarithmus tangentis 52°, 36′, 59″: hinc ſubtrahantur 45°; reſidui 7°, 36′, 59″ tangentis logarithmus addatur logarithmo tangentis 62°, 54′, 37″½ (complementi de 27°, 5′, 22″½, quod eſt dimidium anguli ad ſolem 54°, 10′, 45″): ſumma eſt logarithmus tangentis 14°, 39′, 3″, qui additi ad 62°, 54′, 37″½ (cum cometæ diſtantia excedat diſtantiam telluris a ſole) efficiunt 77°, 33′, 40″½ ſive 2ˢ, 17°, 33′, 40″½ pro angulo elongationis, ſive angulo ad terram inter ſolem, & locum cometæ e terra viſum. Hic angulus ſubtractus a loco ſolis e terra viſo 4ˢ, 24°, 34′, 36″, dat longitudinem geocentricam veram cometæ 2ˢ, 7°, 0′, 55″½ pro die 17 Auguſti 1739, 14 h. 20′ tempore medio.

540. X. *Fiat denique* (478): *ut ſinus anguli ad ſolem* (N. 537 inventi) *eſt ad ſinum anguli ad terram* (N. 539 reperti): *ita eſt tangens latitudinis cometæ e ſole viſæ* (& N. 536 inventæ), *ad tangentem ejus latitudinis e terra viſæ.*

Hinc habetur: ut ſinus 54°, 10′, 45″, eſt ad ſinum 77°, 33′, 40″½; ita eſt tangens 12°, 27′, 34″, ad tangentem latitudinis cometæ geocentricæ 14°, 54′, 4″.

ARTICULUS II.

Methodus determinandi omnia elementa theoriæ alicujus cometæ, ex obſervationibus in terra inſtitutis.

541. Elementa Theoriæ cometarum in terra obſervatorum per methodum directam, & geometricam determinare, res eſt ſummæ difficultatis, tum quod eorum revolutio periodica ſit incognita, cum etiam, quod non ſæpius in conjunctione vel oppoſitione obſervari poſſint, utpote exiguo tempore viſibiles. In

defectu itaque ejusmodi methodi necesse est ad *positionem falsi*, & *prolixum tentamen* recurrere.

Hinc collectis, quot haberi possunt, probis cometæ observationibus, diversa phænomena expendenda sunt, uti inæquales velocitates apparentes cometæ, ejus directio, magnitudo apparens disci, sive nuclei, varii gradus luminis, directio ac celeritas cometæ in oppositione vel conjunctione cum sole &c. Ex his conjectura facienda est *primo*, quo tempore cometa fuerit in perihelio; quod ex eo fere intelligi potest, quo cauda fuit lucidissima; quippe id observari consuevit paullo post transitum per perihelium: at vero, quantum licet, observationes institutæ circa perihelium, calculum ingredi non debent in methodo, quam explicamus: tunc enim distantiæ cometæ a sole non satis inter se differunt, ut vera elementa inveniri possint; sed ut veritas inventorum comprobetur, solum usum habent. *Secundo.* Conjectandum, utrum cometa e sole visus fuerit directus, an retrogradus. *Tertio.* An distantiæ cometæ tempore observationum, quas adhibere visum fuerit, sint respectu distantiæ mediæ terræ a sole (quæ tanquam scala communis omnium mensurarum cælestium assumitur) admodum magnæ, an valde exiguæ. Quin etiam æstimatio facienda est, quantæ eæ distantiæ fuerint. Et quamvis hæc postrema duo nostram conjecturam fefellerint fortassis, calculi tamen secundum methodum sequentem instituendi, mox id nobis indicabunt, idque solum incommodi lapsus ejusmodi habebit, quod operatio pro ejus quantitate prolixior sit futura. Transitus cometæ per oppositionem vel conjunctionem cum sole, mirum, quam calculum facilitet: sed extra hos duos casus, qui sane rari sunt, utendum est, si fieri possit, transitu per nodos.

Itaque *primo* vel cometa transivit per unum e suis nodis circa initium, aut versus finem suæ apparitionis: *secundo* vel transivit per aliquem nodum circa medium suæ apparitionis: *tertio* vel denique habuit toto tempore suæ apparitionis, quo observatus est, ejusdem nominis latitudinem.

Exemplum & calculus Casus I, dum cometa per suum nodum circa initium vel finem suæ apparitionis transivit.

542. Proponatur exempli loco cometa A. 1739, mensibus Majo, Junio, Julio & Augusto Bononiæ a D. Zanotti observatus. Ex historia observationum institutarum & eodem anno Bononiæ typis data, apparet, lumen cometæ, ejusque caudæ vivacissimum fuisse circa dimidium Junii; unde circa hoc tempus in perihe-

rihelio fuiſſe debuit. En compendium obſervationum ad tempus medium, & meridianum Pariſinum reductarum:

		Longitudo		*Latitudo*	
Die 28 Maji	8 h. 48′	7°, 6′, ♋		27°, 9′	Borealis.
Die 25 Iulii	13 h. 59′	16°, 1′, ♊		2°, 27′	Borealis.
Die 27 Iulii	14 h. 8′	15°, 26′, ♊		1°, 3′	Borealis.
Die 2 Auguſti	13 h. 5′	13°, 34′, ♊		2°, 48′	Auſtralis.
Die 4 Auguſti	13 h. 12′	12°, 53′½ ♊		4°, 13′	Auſtralis.
Die 10 Auguſti	12 h. 49′	10°, 33′½ ♊		8°, 53′	Auſtralis.
Die 17 Auguſti	14 h. 20′	7°, 1′, ♊		14°, 57′	Auſtralis.

543. Cum cometa per ſuum nodum deſcendentem circa finem ſuæ apparitionis tranſiverit, interpolandæ ſunt obſervationes dierum 25, 27 Julii & 2 Auguſti, ut habeatur tempus & locus cometæ, in quo fuit ſine latitudine: reperitur autem id 29 Julii 1739, 8 h. 48′ tempore medio, in 14°, 54′ ♊. Calculetur pro hoc tempore locus verus ſolis: qui erit 4ˢ, 6°, 7′, 10″: hinc habetur elongatio occidentalis cometæ 51°, 13′, 10″. Diſtantia ſolis a terra eſt inito calculo 10148½ partium, quarum diſtantia media continet 10000.

544. Seligatur alia obſervatio ab iſta, quam haberi poteſt, maxime remota, & in qua ſimul latitudo cometæ e terra viſa fuit valde magna, uti v. g. diei 28 Maji. Iisdem operationibus reperitur locus ſolis 2ˢ, 6°, 56′, 10″; elongatio orientalis cometæ a ſole 30°, 9′, 50″; diſtantia ſolis a terra 10142 partium.

Intervallum temporis inter ſelectas has poſitiones eſt accurate 62 dierum.

545. His ita habentibus, invenienda ſunt per calculum elementa parabolæ, quæ has quatuor conditiones habet: *primo* ut tranſeat per duo puncta ex poſitionibus ſelectis determinata. *ſecundo* ut ſol ſit in ejus foco. *tertio* ut intervallo 62 dierum cometa poſſit deſcribere ejus arcum inter duo illa puncta interceptum, ſervatis legibus Capite III. Sect. I. ſtabilitis. *quarto* denique, ut præterea tranſeat per punctum determinatum ex tertia aliqua obſervatione, quæ quantum poſſibile, diſtet a duabus prius electis; v. g. per punctum, quod invenitur per obſervationem 17 Auguſti.

Hæc ut præſtentur, Schemate quodam calculus juvetur (vide Fig. 76): adſcribatur ex altera parte *Ortus*, *Occaſus* ex altera: ponatur ſol in S, fiat SK = 10142, erit K locus terræ 28 Maji. Super KS ad ortum conſtruatur angulus elongationis cometæ eo die SKM = 30°, 9′, 50″; ſuper eodem latere SK verſus occaſum fiat angulus KSL = 59°, 11′, motui ſolis a die 28 Maji usque ad 29 Julii; & SL = 10148½: erit L locus terræ pro 29 Julii.

lii. Super SL ponatur angulus versus occidentem SLN = 51°, 13′, 10″, quæ est elongatio cometæ pro eo die.

Quoniam cometa erat in perihelio circa dimidium Junium, ejus distantia a sole die 28 Maji debuit esse multo minor, quam die 29 Julii: hinc æstimatione ex conjectura facta determinentur distantiæ curtatæ cometæ a sole pro his duobus diebus, & fiat SM = 5500 partibus scalæ, quarum SK habet 10142, & SN = 10700. Quibus positis, en ut ulterius in calculo procedendum.

546. *Prima suppositio.* SM = 5500, & SN = 10700.

In triangulo SKM habetur SK = 10142, SM = 5500, & angulus SKM = 30°, 9′, 50″; quæritur SMK ex hac analogia: *ut distantia curtata assumpta* SM, *est ad distantiam terræ a sole* SK; *ita est sinus anguli elongationis* SKM *ad sinum anguli ad cometam* SMK, qui reperitur 67°, 56′, 2″; unde angulus ad solem KSM debet esse 81°, 54′, 8″, & longitudo heliocentrica cometæ 5ˢ, 15°, 2′, 2″, loco terræ K e sole viso in 8ˢ, 6°, 56′, 10″.

Ulterius quæritur latitudo heliocentrica cometæ sequente analogia (478): *ut sinus anguli ad terram* 30°, 9′, 50″ *est ad sinum anguli ad solem* 81°, 54′, 8″; *ita est tangens latitudinis e terra visæ* 27°, 9′, 0″, *ad tangentem latitudinis visæ e sole* 45°, 17′, 49″½.

His peractis invenitur radius vector, seu distantia vera cometæ a sole, ope analogiæ (476): *ut cosinus latitudinis heliocentricæ* 45°, 17′, 49″½, *ad sinum totum; ita est distantia curtata* SM *ad distantiam veram cometæ a sole in plano ejus orbitæ:* quæ reperitur 7818. 84.

547. Transeundum jam ad positionem 29 Julii; & habitis in triangulo SLN latere SL = 10148½, SN = 10700, & angulo SLN = 51°, 13′, 10″, analogia priore adhibita reperitur angulus SNL 47°, 40′, 42″½, indeque angulus ad solem LSN 81°, 6′, 7″½, adeoque longitudo heliocentrica cometæ 0ˢ, 27°, 13′, 17″½.

548. Accepta differentia inter duas has longitudines heliocentricas (quæ est 4ˢ, 17°, 48′, 44″½, seu 137°, 48′, 44″½) construitur triangulum sphæricum M*m*N (fig. 77.) ad M rectangulum, in quo latus MN est 137°, 48′, 44″½, arcumque eclipticæ cælestis repræsentat, quem cometa e sole visus a die 28 Maji usque ad 29 Julii percurrit; latus vero perpendiculare M*m* est 45°, 17′, 49″½, quæ est latitudo heliocentrica cometæ die 28 Maji; arcus denique *m*N exhibet arcum circuli maximi sphæræ cælestis, quem cometa e sole spectatus in plano suæ orbitæ parabolicæ intervallo utriusque observationis percurrere visus est. In hoc porro triangulo facile invenitur latus *m*N, si fiat (Trig. 63): *ut sinus totus ad cosinum lateris* MN, *seu motus cometæ in longitudine heliocentrica intervallo utriusque temporis determinati; ita est cosinus lateris* Mm, *sive latitudinis*

dinis heliocentricæ cometæ, ad cosinum lateris m N, *hoc est, motus cometæ in plano suæ orbitæ eodem intervallo temporis.* Reperitur 121°, 24′, 48″.

549. In plano quodam separato construatur sequens figura (fig. 78): S *m* fiat = 7818. 84; S N = 10700, & angulus *m* S N = 121°, 24′, 48″. centris *m* & N, radiis *m* S & N S, describantur duo arcus, ad quos ducatur tangens communis Q R, & radii ad eam perpendiculares *m* Q, N R; erit Q R directrix parabolæ quæsitæ. Dimittatur ad directricem perpendiculum S P, quod erit axis, respectu cujus quæritur positio angulorum seu anomaliarum verarum *m* S P, N S P, ex hac regula: *ad characteristicam semidifferentiæ logarithmorum radiorum vectorum* S m, S N, *addantur* 10: *summa est logarithmus tangentis arcus* 45° *gradibus minuendi. Accipiatur logarithmus tangentis residui, & ab eo subtrahatur logarithmus tangentis quartæ partis anguli* m S N; *residuum est logarithmus tangentis arcus, cujus summa & differentia cum quarta parte anguli* m S N *dat dimidios angulos, seu anomalias veras quæsitas* m S P, N S P.

In exemplo: logarithmus de S *m* est 3.893142; logarithmus de S N, 4.029384; eorum differentia = 0.136242; ejus medietas = 0.068121: arcus, cui competit logarithmus tangentis 10.068121, est 49°, 28′, 31″: ab hoc subtractis 45°, residui 4°, 28′, 31″ tangentis logarithmus est 8.893582: ab hoc subducitur 9.767602, seu logarithmus tangentis de 30°, 21′, 12″, quæ est quarta pars de 121°, 24′, 48″; residuum 9.125980 est logarithmus tangentis de 7°, 36′, 45″½; cujus differentia a 30°, 21′, 12″ dat dimidium anguli minoris *m* S P (minor enim analogia vera semper adjacet minori radio vectori) 22°, 44′, 26″½; & summa 37°, 57′, 57″½, dimidium anguli N S P. Sunt itaque anomaliæ veræ *m* S P, N S P, 45°, 28′, 53″, & 75°, 55′, 55″.

550. Observa. Regula allata generalis est, seu perpendiculum S P cadat intra angulum N S *m*, seu extra illum. Demonstratio habetur Monument. Acad. Reg. Scient. A. 1746. pag. 431. *

551.

---

* *Nota versoris*: ne Lectorem alio remittam, duo solum ex citatis Monumentis hic adferam, quæ author in suis *reflexionibus super theoria cometarum* ibidem inseruit: primum quidem, regulam hic loci (N. 549) præscriptam, nil aliud continere, quam analogiæ a D. Nicollic repertæ ope logarithmorum executionem; est autem ea analogia sequens: *ut summa radicum quadratarum duorum radiorum vectorum est ad differentiam earundem radicum; ita est cotangens* ¼ *anguli intercepti inter illos duos radios vectores, qui est summa vel differentia duarum anomaliarum verarum; ad tangentem* ¼ *anguli, qui est earum summa vel differentia.* Alterum est hujus ipsius analogiæ demonstratio a Nicolliciana diversa, quam ibidem pag. 429 & 430 author refert, estque ut sequitur:

Sit a = ½ summæ anomaliarum verarum, sive angulorum quæsitorum; x = ½ differentiæ; b = radio vectori majori; c = radio vectori minori; i = distantiæ in perihelio; *r* = radio tabularum sinuum; *cos* denotet cosinum; *s* sinum; *t* tangentem; *cot* cotangentem. Anomalia vera major erit itaque 2 a + 2 x; minor 2 a — 2 x. Juxta septimam

551. Quæratur distantia perihelii hujus orbitæ ex sequente analogia: *ut quadratum radii est ad quadratum cosinus unius dimidiæ ex duabus anomaliis veris* (per præcedentem Articulum jam inventis); *ita est radius vector adjacens illi anomaliæ veræ ad distantiam perihelii* (209).

Sic logarithmus cosinus 22°, 44′, 26″½ est 9.964855; ejus duplum 9.929710 addatur logarithmo de S*m* 3.893142; habetur 3.822852 logarithmus distantiæ perihelii quæsitæ, quæ est 6650½ partium, quarum distantia media terræ a sole est 10000; sed quia hæc plerumque assumitur = 1, erit distantia perihelii 0.66505, cujus logarithmus est 9.822852.

552. E tabula generali N. 214. accipiantur dies distantiæ a perihelio respondentes anomaliis veris: reperientur 36.4781 dies pro 45°, 28′, 53″; & 77.1725 dies pro 75°, 55′, 55″½. Logarithmo eorum summæ 113.6506 addatur dimidium tripli logarithmi distantiæ perihelii: summa est logarithmus de 61.638 diebus: itaque (212) arcus parabolæ inventus non potuit percurri a cometa nisi tempore 61.638 dierum, cum debuisset describi accurate intra 62 dies. Ex quo patet, primas duas distantias curtatas, quas supposuimus, dare parabolam, quæ solum duabus primis e quatuor conditionibus necessariis satisfacit. Itaque facta aliqua correctione in his distantiis alia quærenda est, qua tertia conditio impleatur; tandem ea reperietur, quæ omnes quatuor simul conditiones habet.

553. Igi-

---

analogiam, ut habeantur radii vectores, est $cos^2(a+x) : rr = 1 : b = \frac{rr}{cos^2(a+x)}$;

itaque $\sqrt{b} = \frac{r}{cos(a+x)}$; similiter $\sqrt{c} = \frac{r}{cos(a-x)}$; & hinc $\sqrt{b} : \sqrt{c} = cos(a-x) : cos(a+x)$.

Est autem ex notis formulis summæ & differentiæ arcuum, quæ demonstratæ habentur in pluribus tractatibus de constructione tabularum sinuum, & a D. Mayer Volum. 2. Monum. Acad. Petropol. referuntur, $cos(a-x) : cos(a+x) = cos\,a \times cos\,x + \int a \times \int x : cos\,a \times cos\,x - \int a \times \int x$; ergo $\sqrt{b} : \sqrt{c} = cos\,a \times cos\,x + \int a \times \int x : cos\,a \times cos\,x - \int a \times \int x$. Et hinc $\sqrt{b} \times cos\,a \times cos\,x - \sqrt{b} \times \int a \times \int x = \sqrt{c} \times cos\,a \times cos\,x + \sqrt{c} \times \int a \times \int x$; & $\sqrt{b} \times cos\,a \times cos\,x - \sqrt{c} \times cos\,a \times cos\,x = \sqrt{b} \times \int a \times \int x + \sqrt{c} \times \int a \times \int x$; & $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c} = cos\,a \times cos\,x : \int a \times \int x = \frac{cos\,a}{\int a} : \frac{\int x}{cos\,x}$. Notum autem est, esse $\frac{cos}{\int} = \frac{cot}{r}$: & $\frac{\int}{cos} = \frac{t}{r}$, ex proportione, quæ est inter radium, sinum, cosinum, tangentem, & cotangentem alicujus arcus: itaque erit etiam $\frac{cos\,a}{\int a} : \frac{\int x}{cos\,x} = \frac{cot\,a}{r} : \frac{t\,x}{r} = cot\,a : t\,x$. Unde denique habetur $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c} = cot\,a : t\,x$.

Observa, analogiam septimam, cujus in hac demonstratione author mentionem facit, jam haberi hic N. 209; regulam vero inveniendi tempus, quæ in laudatis monumentis pag. 431. ab authore demonstratur, pariter hic datam esse N. 202.

553. Igitur pro prima correctione ſupponatur, errorem inde provenire, quod diſtantia SM non ſit accurata, atque ideo ea augeatur 100 partibus, retenta SN = 10700. Interetur totus calculus in hac nova ſuppoſitione; prodibunt ſequentia.

554. *Secunda ſuppoſitio.* SM = 5600, & SN = 10700.

In hac hypotheſi longitudines heliocentricæ cometæ ſunt 5ˢ, 12°, 38′, 0″; & 0ˢ, 27°, 13′, 17″½. Latitudo 28 Maji eſt 45°, 26′, 32″½. Logarithmus de S*m* 3.902083. Arcus *m*N 119°, 58′, 43″. Anomaliæ veræ *m*SP, & PSN, 45°, 32′, 40″½, & 74°, 26′, 1″½. Logarithmus diſtantiæ perihelii 9.831591. Dies diſtantiæ a perihelio ex tabula 36. 541, & 74.448. Denique intervallum reductum eſt 62.039 dierum.

555. Ex his liquet, quod aucta SM 100 partibus, augeatur tempus 0.401 diei.

Hinc ad implendam tertiam conditionem, ſeu ad inveniendam parabolam, cujus arcus inter puncta determinata interceptus potuit intra 62 dies accurate deſcribi, quæratur: ſi 0.401 d. reſpondent 100 partibus; quot partes convenient tempori 0.362 d. quod deeſt in prima ſuppoſitione? reperientur 90½. Unde fiat tertia ſuppoſitio, in qua ſumatur SM = 5590½; & SN = 10700.

556. *Tertia ſuppoſitio.* SM = 5590½, & SN = 10700.

Longitudines heliocentricæ reperiuntur 5ˢ, 12°, 50′, 53″, & 0ˢ, 27°, 13′, 17″½. Latitudo M*m* 45°, 25′, 54″. Logarithmus de S*m* 3.901264. Arcus *m*N 120°, 6′, 24″. Anomaliæ veræ 45°, 32′, 8″; & 74°, 34′, 16″. Dies correſpondentes 36.531, & 74.693. Logarithmus diſtantiæ perihelii 9.830802. Denique intervallum reductum 62.001, fere, ut requirit tertia conditio. Supereſt igitur, ut videamus, an hæc parabola ſatisfaciat quartæ conditioni; quod ſi ſit, problema ſolutum erit.

557. Hunc in finem determinentur omnia reliqua elementa orbitæ in tertia hac ſuppoſitione repertæ, quod citra difficultatem fit. Nam I. habetur nodus deſcendens in 0ˢ, 27°, 13′, 17″, cum cometa in hac longitudine heliocentrica nullam habuerit latitudinem. II. Addita anomalia vera diei 29 Julii ad locum verum nodi, hoc eſt, additis 74°, 34′, 16″, ad 0ˢ, 27°, 13′, 17″, habetur locus perihelii in 3ˢ, 11°, 47′ 33″. III. additis ½ logarithmi diſtantiæ perihelii ad logarithmum 74.693 d. numero præcedente repertorum obtinetur intervallum temporis reductum inter tranſitum cometæ per ſuum nodum, & tranſitum ejusdem per perihelium 41.6374 dierum, & momentum tranſitus per perihelium die 17 Junii, 17 h. 30′. IV. denique in triangulo rectangulo Sphærico M*m* N (fig. 77) e cognitis M*m* = 45°, 25′, 54″, & *m*N = 120°, 6′, 24″,

reperitur angulus M N m = 55°, 26′, 16″, qui æquatur inclinationi plani orbitæ cometæ ad planum eclipticæ (Trig. 9).

558. Ex his Elementis quæratur (431) locus verus geocentricus cometæ pro die 17 Auguſti A. 1739, 14 h. 20′, qui reperitur 6°, 55′, 37″ ♊, cum ex obſervatione fuerit 7°, 1′, 0″ ♊. Error itaque eſt in defectu 5′, 23″; adeoque parabola modo inventa non niſi primis tribus conditionibus ſatisfacit.

559. Quare ut habeatur parabola, quæ quartam quoque conditionem impleat, nova fiat ſuppoſitio; ſcilicet, primam diſtantiam S M fuiſſe ab initio recte aſſumptam 5500 partium, erroremque profluxiſſe e ſecunda S N, quæ propterea 100 partibus augeatur, & totus calculus reſumatur.

560. *Quarta ſuppoſitio.* S M = 5500, & S N = 10800.

In hac poſitione longitudines heliocentricæ ſunt 5ˢ, 15°, 2′, 2″; & 0ˢ, 27°, 47′, 4″. latitudo M *m* 47°, 17′, 49″½. Logarithmus de S *m* 3.893142. Arcus N *m* 121°, 6′, 2″. Anomaliæ veræ 44°, 49′, 57″; & 76°, 16′, 5″. Dies correſpondentes 35.8365; & 77.8022. Logarithmus diſtantiæ perihelii 9.824898. Intervallum temporis reductum 61.068. dierum.

561. Hinc vero colligitur, ſi præſens ſuppoſitio cum prima conferatur, ex aucta S N 100 partibus, creviſſe intervallum 0.430 diei. Unde fiat: ut 0.430 ſunt ad 100; ita 0.362 ad 84. Oportebat itaque aſſumere S N = 10784 partium, ut obtineretur intervallum temporis accurate 62. dierum.

562. *Quinta ſuppoſitio.* S M = 5500, S N = 10784.

Longitudines heliocentricæ 5ˢ, 15°, 2′, 2″; & 0ˢ, 27°, 42′, 25″. Latitudo M *m* 45°, 17′, 49″½. Logarithmus de S *m* 3.893142. Anomaliæ veræ 44°, 55′, 54″; & 76°, 12′, 43″. Dies correſpondentes 35.934; & 77.697. Logarithmus diſtantiæ perihelii 9.824588. Intervallum temporis reductum 61.999, idem proxime, ac quod tertia conditio requirit.

Alia elementa, ut ſupra, (557) in hac orbita determinentur. Invenietur ☌ in 0ˢ, 27°, 42′, 25″. Perihelium in 3ˢ, 13°, 55′, 8″. Tempus tranſitus per perihelium die 16 Junii, 23 h. 23′. Inclinatio orbitæ 56°, 8′, 44″.

Ope horum elementorum reperitur locus cometæ geocentricus pro die 17 Auguſti, 14 h. 20′ in 7°, 8′, 42″ ♊; qui locum obſervatum excedit 7′, 42″. Unde nec hæc nova parabola ſatisfacit conditioni quartæ.

563. Supponatur itaque, correctiones factas in diſtantiis aſſumtis S M & S N eſſe proxime proportionales differentiis inter calculum duarum orbitarum repertarum, & obſervationes, inferatur-

que

que : *Ut ſumma errorum, ſeu differentiarum inter utrumque calculum & obſervationes*, 5′, 23″ + 7′, 42″, *eſt ad errorem orbitæ ex tertia ſuppoſitione inventæ* 5′, 23″ ; *ita ſunt* 90½ & 84 *ſeu correctiones factæ in diſtantiis* S M & S N, *ad* 36¾ & 34, *hoc eſt, ad correctiones faciendas, ut obtineatur parabola omnibus quatuor conditionibus prædita.*

564. Illud autem hic obſervandum, quod ſi uterque error eſſet in eandem partem, hoc eſt, ſi uterque conſiſteret in defectu, vel uterque in exceſſu, pro primo analogiæ termino non ſumma, ſed *differentia errorum* adhibenda eſſet.

565. Ut jam repertæ correctiones debite applicentur, facile ex comparatione utriusque calculi cum obſervationibus apparet, S M eſſe in tertia ſuppoſitione juſto majorem, & in quinta juſto minorem aſſumtam. Igitur ex 5590½ ſubtrahendæ ſunt partes 36¾; & ut intervallum temporis ſemper maneat accurate 62 dierum, ad S N in tertia ſuppoſitione addendæ ſunt partes 34: ut denique pro veris diſtantiis curtatis cometæ a ſole ſumantur S M = 5553¾ & S N = 10734. Hinc iterum totus reſumatur calculus.

566. *Sexta ſuppoſitio.* S M = 5553¾, S N = 10734.

Inveniuntur longitudines heliocentricæ 5ˢ, 13°, 42′, 15″; & 0ˢ, 27°, 25′, 14″. Latitudo M *m* 45°, 23′, 9″. Logarithmus de S *m* 3.898045. Arcus *m* N 120°, 30′, 20″. Anomaliæ veræ 45°, 16′, 54″; & 75°, 13′, 26″. Dies correſpondentes 36.280; & 75.872. Logarithmus diſtantiæ perihelii 9.828388. Intervallum temporis reductum 62 dierum.

Ex his deducuntur vera elementa Theoriæ cometæ; nempe locus ☊ in 6ˢ, 27°, 25′, 14″. Locus perihelii in 3ˢ, 12°, 38′, 40″. Tranſitus per perihelium die 17 Junii 10 h. 9½ tempore medio; & inclinatio orbitæ 55°, 42′, 44″.

Suppoſitis hiſce elementis, quæratur locus verus cometæ pro die 17 Auguſti, 14 h. 20′: & quia reperitur (540) in 7°, 0′ 55″½ ♊ cum latitudine Auſtrali 14°, 54′, 4″, quæ ab obſervatis parum differunt, quartæque conditioni ſunt conformia, problema reſolutum cenſeri debet.

567. Obſerva I. Inventa parabola, quæ proxime congruat cum tribus poſitionibus ſelectis cometæ, inutilis foret labor, aliam, quæ exacte iis conveniat, quærere. Etenim tres obſervationes, quæ adhibentur, vel ſupponuntur accuratiſſimæ, vel tantum vero proximæ? ſi primum, impoſſibile eſt reperire parabolam, quæ cum poſitionibus obſervatis perfecte congruat, cum loca illa revera ſint in ellipſi: ſi alterum, caſui tribuendum eſt fortuito, ſi quis in talem incidat parabolam, quæ exacte reſpondeat obſervationi-

bus: immo eadem parabola cum aliis obſervationibus cometæ omnibus haud quaquam accurate congrueret.

568. Obſerva II. Utile eſt, ab initio calculum radiorem quinque primarum ſuppoſitionum inſtituere neglectis ſecundis minutis, & fractionibus, ac diſtantiis S M, S N quingentis, imo mille partibus mutatis, ut diſtantiæ curtatæ ita veris propinquæ obtineantur, ut tum demum calculus novus primarum quinque ſuppoſitionum ineatur, diſtantiis his non plus, quam 60 vel 100 partibus mutandis, ſecundorum etiam, & fractionum ratione habita, ut vera orbita reperiatur.

Examen ſecundi & tertii Caſus.

569. In ſecundo & tertio caſu eadem accurate methodus, quæ in primo, adhibenda eſt, idque ſolum eſt diſcriminis, quod calculi paullo longiores fiant. Præterquam enim, quod obſervationes eæ ſeligendæ ſint, quæ maxime a ſe diſtent, in his duobus caſibus aliæ adhiberi nequeunt, quam in quibus habetur longitudo & latitudo geocentrica cometæ. Hinc *primo* ex duabus diſtantiis curtatis, quæ aſſumuntur, calculandæ ſunt utraque longitudo, & utraque latitudo heliocentrica cometæ cum ſuis diſtantiis S*m*, S*n* a ſole in plano orbitæ.

570. *Secundo.* Loco trianguli ſphærici M *m* N (fig. 77) conſtruenda figura (fig. 79 & 80), in qua circulus P E C repræſentet circulum latitudinis, E C eclipticam, P ejus polum, M longitudinem heliocentricam cometæ in prima obſervatione, N eandem longitudinem in ſecunda obſervatione. Præterea ducendi ſunt circuli latitudinis P M, P N, in quibus accipiendi ſunt arcus M*m* æqualis latitudini heliocentriæ cometæ in prima obſervatione, & N*n* æpualis latitudini in obſervatione ſecunda. Tandem per puncta *m* & *n* deſcribendus eſt circulus maximus O *m n* B, qui exhibet veram orbitam cometæ, cujus nodus in D, inclinatio angulus C D B. Itaque in triangulo ſphærico *m* P *n*, in quo nota ſunt latera P *m*, P *n*, æqualia complementis utriusque latitudinis, & angulus comprehendit *m* P *n*, æqualis differentiæ duorum locorum heliocentricorum cometæ (quippe quem menſurat arcus M N), invenietur (Trig. 124) latus *m n*, menſura anguli ad ſolem inter duo loca cometæ in ſua orbita, quocum etiam conſtruetur figura ſimilis 78ª, calculus quoque eodem modo inſtituetur, ut N. 549 & ſequentibus.

571. *Tertio.* Peracto calculo trium primarum ſuppoſitionum, dum quæruntur elementa reliqua orbitæ, ut N. 557, ut obtineatur nodus, in triangulo *m* P *n* (cujus tria latera & angulus ad P

nota

nota sunt) quæratur angulus nodo propior, ut P *n m*. Tum in triangulo *n* N D ad N rectangulo, habito angulo N *n* D, & latere N *n*, inveniatur latus N D, ut sciatur differentia inter longitudinem cometæ in N, & locum nodi, qui adeo facile determinabitur. Ut porro locus perihelii innotescat, reperiatur in triangulo N *n* D hypotenusa *n* D, quæ est arcus inter nodum, & locum verum cometæ in sua orbita. Jam vero ex calculis figuræ 78 habetur anomalia vera cometæ pro tempore, quo fuit in puncto *n* suæ orbitæ, hoc est, habetur arcus ejus distantiæ a perihelio, ex quo deducitur facile distantia nodi a perihelio, & consequenter positio perihelii. Denique invento angulo *n* D N ejusdem trianguli rectanguli, habetur inclinatio orbitæ.

Observanda circa Tabulam sequentem.

Sequens tabula compendio complectitur, quidquid certi habetur de cometis, atque e scriptis diversorum Astronomorum est excerpta. Viginti septem primi cometæ (exceptis, qui sunt visi A. 1533, 1593, 1678) ab Halleyo calculati, ut etiam ex ejusdem cometographia desumpti fuerunt. De illis qui apparuerunt A. 1723, & 1737, calculum inivit Bradleyus. Visos A. 1533, 1678, & secundum A. 1748 habemus a Struyckio; secundum A. 1743 a Klingenbergio, & primum A. 1748 a Maraldo. Reliquorum calculum ego inivi. Sed non eadem in horum elementis est accuratio & certitudo, utpote cum plures, & maxime primi sex, rudius sint observati; quorumdam vero theoria, uti Annorum 1593, 1699, 1702, & utriusque Anni 1743, ac secundi A. 1748. ex observationibus brevi temporis intervallo habitis deducta sit. Verum longum foret, omnia isthic in particulari discutere.

Tabula Elementorum Theoriæ Præcipuorum Cometarum, qui ad præsens usque tempus observati sunt: Suppositis orbitis Parabolicis.

Annus apparitionis	Locus ☊ S.	G.	M.	S.	Inclinatio orbitæ G.	M.	S.	Locus perihelii S.	G.	M.	S.	Logarithmus distantiæ perihelii	Tempus medium transitus per perihelium ad Meridianum Parisinum Mensis	dies	h.	m.	Directio motus
1337	2	24	21	0	32	11	0	1	7	59	0	9.609236	Junii	2	6	34	Retrograd.
1472	9	11	46	20	5	20	0	1	15	33	30	9.734584	Februarii	28	22	33	Retrograd.
1531	1	19	25	0	17	56	0	10	1	39	0	9.753583	Augusti	24	21	27	Retrograd.
1532	2	20	27	0	32	36	0	3	21	7	0	9.706803	Octobris	19	22	21	Direct.
1533	4	5	44	0	35	49	0	4	27	16	0	9.307068	Junii	16	19	39	Retrograd.
1556	5	25	42	0	32	6	30	9	8	50	0	9.666424	Aprilis	21	20	12	Direct.
1577	0	25	52	0	74	32	45	4	9	22	0	9.263447	Octobris	26	18	54	Retrograd.
1580	0	18	57	20	64	40	0	3	19	5	50	9.775450	Novembris	28	15	9	Direct.
1585	1	7	42	30	6	4	0	0	8	51	0	10.038850	Octobris	7	19	29	Direct.
1590	5	15	30	40	29	40	40	7	6	54	30	9.760882	Februarii	8	3	54	Retrograd.
1593	5	14	15	0	87	58	0	4	26	19	0	9.949926	Julii	18	13	47	Direct.
1596	10	12	12	30	55	12	0	7	18	16	0	9.710058	Augusti	10	20	4	Retrograd.
1607	1	20	21	0	17	2	0	10	2	16	0	9.768490	Octobris	26	3	59	Retrograd.
1618	2	16	1	0	37	34	0	0	2	14	0	9.579498	Novembris	8	12	32	Direct.
1652	2	28	10	0	79	28	0	0	28	18	40	9.928140	Novembris	12	15	49	Direct.
1661	2	22	30	30	32	35	50	3	25	58	40	9.651772	Januarii	26	23	50	Direct.
1664	2	21	14	0	21	18	30	4	10	41	25	10.011044	Decembris	4	12	3	Retrograd.
1665	7	18	2	0	76	5	0	2	11	54	30	9.027309	Aprilis	24	5	24	Retrograd.
1672	9	27	30	30	83	22	10	1	16	59	30	9.843476	Martii	1	8	46	Direct.
1677	7	26	49	10	79	3	15	4	17	37	5	9.448072	May	6	0	46	Retrograd.
1678	5	11	40	0	3	4	20	10	27	46	0	10.092724	Augusti	26	14	12	Direct.
1680	9	2	2	0	60	56	0	8	22	39	30	7.787106	Decembris	18	0	15	Direct.
1682	1	21	16	30	17	56	0	10	2	52	45	9.765877	Septembris	14	7	48	Retrograd.
16.3	5	23	23	0	83	11	0	2	25	29	30	9.748343	Julii	13	2	59	Retrograd.
1684	8	28	15	0	65	48	40	7	28	52	0	9.982339	Junii	8	10	25	Direct.
1686	11	20	34	40	31	21	40	2	17	0	30	9.511883	Septembris	16	14	42	Direct.
1698	8	27	44	15	11	46	0	9	0	51	15	9.839660	Octobris	18	17	6	Retrograd.
1699	10	21	45	35	69	20	0	7	2	31	6	9.871570	Januarii	13	8	32	Retrograd.
1702	6	9	25	15	4	30	0	4	18	41	3	9.810165	Martii	13	14	22	Direct.
1706	0	13	11	40	55	14	10	2	12	29	10	9.629218	Januarii	30	4	32	Direct.
1707	1	22	46	35	88	36	0	2	19	54	56	9.934368	Decembris	11	23	39	Direct.
1718	4	8	43	0	30	20	0	4	1	30	0	10.011380	Januarii	14	23	48	Retrograd.
1723	0	14	16	0	49	59	0	1	12	52	20	9.999414	Septembris	27	16	20	Retrograd.
1729	10	10	32	37	76	58	4	10	22	40	0	10.629552	Junii	25	11	6	Direct.
1737	7	16	22	0	18	20	45	10	25	55	0	9.347960	Januarii	30	8	30	Direct.
1739	6	27	25	14	55	42	44	3	12	38	40	9.828388	Junii	17	10	9	Retrograd.
1742	6	5	38	29	66	59	14	7	7	35	13	9.884049	Februarii	8	4	48	Retrograd.
1743	2	18	21	15	2	19	33	3	2	41	45	9.921690	Januarii	10	20	35	Direct.
1743	0	5	16	25	45	48	20	8	6	33	52	9.716480	Septembris	20	21	26	Retrograd.
1744	1	15	46	11	47	5	18	6	17	10	0	9.347325	Martii	1	8	13	Direct.
1747	4	27	18	50	79	6	20	9	7	2	0	10.342128	Martii	3	7	20	Retrograd.
1748	7	22	52	16	85	26	57	7	5	0	50	9.924620	Aprilis	28	19	34	Retrograd.
1748	1	4	39	43	56	59	3	9	6	9	24	9.816410	Junii	18	1	33	Direct.

ARTICULUS III.

De Calculo Cometarum in orbitis Ellipticis.

572. Fieri non poteſt, ut ex comparatione obſervationum, tempore unius ſolum apparitionis inſtitutarum, debita cum accuratione dimenſiones orbitæ ellipticæ cometæ determinentur; ſed ad hoc requiritur certum reditus intervallum, ut tempus periodicum haberi poſſit, e quo (170) quantitas axis majoris ellipſeos in partibus, quarum unitas eſt diſtantia media terræ a ſole, reperitur: ab hoc axe ſubtracta diſtantia perihelii (quæ eadem ratione, ac ſuperius in orbita parabolica quæritur), relinquitur diſtantia aphelii, qua data, eccentricitas innoteſcit. Poteſt etiam citra errorem ſenſibilem in orbita elliptica adhiberi inclinatio plani, & locus nodi aſcendentis repertus in orbita parabolica: atque hac ratione habentur omnia elementa neceſſaria, ut cometæ calculus ita inſtituatur, uti planetarum. Denique calculo cum obſervationibus collato, elementa adhibita corrigi poterunt, ut Theoria accuratior obtineatur. Verum operæ pretium non eſt, ut tabulæ peculiares pro ſingulis cometis conſtruantur, cum calculi longitudinum & latitudinum geocentricarum expedite fieri poſſint juxta methodum, & exemplum, quod jam ſubjiciemus.

573. E calculo Halley, elementa emendata cometæ A. 1682 ſunt - - - -. Revolutio periodica 75¼ annorum. Locus ☊ in 1ˢ, 20°, 48′, 0″. Inclinatio orbitæ 17°, 42′. Diſtantia perihelii 0.5825. Diſtantia aphelii 35.1445. Eccentricitas 17.281. Locus verus perihelii 10ˢ, 1°, 36′, 0″. Tempus tranſitus per perihelium die 14 Septembris, 21 h. 22′ tempore medio, ad Meridianum Londinenſem. Quæritur locus cometæ pro die 29 Auguſti 16 h. 38′ tempore medio.

574. I. A logarithmo 360°, 0′, 0″ ſubtrahatur logarithmus 27575 dierum, ſive temporis revolutionis; habetur logarithmus motus medii diurni. Huic addatur logarithmus de 16 d. 4 h. 44′, ſeu 16.1972 dier. quod eſt intervallum inter tempus datum & tranſitum per perihelium: ſumma eſt logarithmus anomaliæ mediæ a perihelio computatæ. In exemplo poſito ea invenitur 12′, 41″.25 (ad ſecunda integra adhuc additur fractio decimalis duarum notarum, cum hic calculus valde accuratus eſſe debeat, quando anomalia media inventa non eſt plurium graduum).

575. II. Quæratur ab initio, quæ circiter eſſe debuerit anomalia vera, quæ inventæ mediæ reſpondeat. In hunc finem a logarithmo intervalli temporis ſubtrahantur ½ logarithmi diſtantiæ perihe-

rihelii; reſiduum eſt (213) logarithmus numeri dierum, ope cujus in tabula generali N. 214 pro cometis in orbita parabolica conſtructa quæratur anomalia vera correſpondens: v. g. in noſtro exemplo numerus dierum eſt 36.443, cui in tabula conveniunt 45°, 26′ (calculus hic rudius inſtitui poteſt); e quo infertur, anomaliam veram quæſitam eſſe intra 45 & 46 gradus.

576. III. Aſſumatur ea anomalia 45° prima vice; poſtea 46°; utraque reducatur ad mediam (139), quæ erit 12′, 36″.88; & 12′, 57″.67. E quo deducitur, proportione inſtituta, anomaliam veram, quæ mediæ 12′, 41″.25 reſpondet, eſſe 45°, 12′, 37″. Hac anomalia vera ad locum perihelii 10ˢ, 1°, 36′, 0″ addita, habetur longitudo cometæ in ſua orbita 11ˢ, 16°, 48′, 37″.

577. IV. Ope formulæ ex iis, quæ N. 140 allatæ ſunt, quæratur diſtantia cometæ a ſole: tum vero inſiſtendum erit præceptis N. 471 & ſeqq. poſitis, ut obtineatur longitudo geocentrica 4ˢ, 18°, 13′, 40″; & latitudo borealis 25°, 48′, 50″.

SECTIO QUARTA.

Complectens Partem Alteram Aſtronomiæ Solaris,

Sive

Explicationem legum motus diurni planetarum, ut e ſole ſpectantur.

578. Quamvis omnia motus diurni telluris phænomena fuſius expoſuerimus, idque methodo, quæ facile cuivis alteri planetæ accommodari poteſt; nihilominus, cum maximi momenti ſit, ut accurate animo comprehendantur, quæ ſi quis reipſa in ſole conſtitueretur, oculis cernerentur, neceſſarium duximus, aliam hic loci eorundem phænomenorum explicationem dare, quæ fere nulla ſui parte a priore dependeat. Præcipue vero illud ex ea enaſcetur commodi, ut rite intelligantur eclipſes ſolis; theoria motus macularum, quæ ſæpe in ejus ſuperficie conſpiciuntur, nec non in aliis planetis; diverſa ratio, qua quodvis ſuperficiei alicujus planetæ punctum a ſole illuminetur, indeque pendentes tempeſtatum viciſſitudines, aliaque phænomena tempore revolutionis periodicæ emergentia.

579. Obſervator in ſole poſitus, inſtitutis per plures revolutiones annuas continua ſerie obſervationibus alicujus ad libitum electi planetæ, cujus ſuperficies diſtinctis maculis notata ſit, v. g. Telluris; ſequentia phænomena extra omne dubium poſita ſtabiliet, de quo-

quorum causa invenienda, motuumque legibus ad certas revocandis regulas deinceps agendum illi erit.

ARTICULUS I.

De phænomenis generalibus motus diurni.

580. *Phænomenon* I. Lineæ, quas maculæ eodem tempore motu diurno Planetæ describunt, si eraum via in superficie, quæ disci instar plana apparet, notari supponatur, sunt parallelæ.

Ratio hujus obvia est. Globus in admodum magna distantia aliter apparere nequit, quam ut circulus planus; neque aliter circa axem suum volvi, quam ut singula ejus superficiei puncta describant circulos, quorum plana omnia ad axem sint normalia, adeoque inter se parallela.

581. *Phænomenon* II. Lineæ a maculis descriptæ plerumque curvæ apparent, versus disci limbos magis, quam circa medium, convexæ.

Ex hoc Phænomeno constat, *axem, circa quem Planeta vertitur, non esse ad planum suæ orbitæ annuæ perpendicularem*: talis enim si esset, lineæ omnes macularum essent rectæ inter se parallelæ. Nam in hoc casu omnes circuli a maculis descripti essent in planis parallelis ad planum orbitæ annuæ, in quo est centrum solis, consequenter oculus observatoris: & quia totus discus, aut diameter planetæ non nisi sub angulo aliquot secundorum videtur, evidens est, omnia circulorum a maculis descriptorum plana observatori apparitura talia, ut producta per ejus oculum transirent, adeoque omnes circulos instar rectarum suis diametris æqualium fore, secundum illud Optices principium, quod *oculus in productione plani figuræ cujusvis positus eam figuram videat ut lineam rectam æqualem dimensioni maximæ figuræ directe oculo obversæ*: nempe oculus in hoc situ partem solum perimetri figuræ videre potest, & nullo modo ejus superficiem planam.

582. *Phænomenon* III. Omnes curvæ macularum alicuius planetæ, versus unum idemque punctum cavitatem obvertunt.

Liquet, punctum istud debere esse unum e polaribus Planetæ, hoc est, alterutrum axis, circa quem movetur, extremum. Globo enim circa axem voluto, sola puncta extrema axis, motu rotationis carent.

583. *Phænomenon* IV. Singulis annis circa 21 Junii lineæ macularum telluris fiunt prope medium parallelæ ad planum ecliptice per dies plures. Versus limbum superiorem disci complures apparent

maculæ, quæ ſpeciem quamdam ellipſeos integræ *a*, *b*, *c*, (fig. 81) circa punctum fixum P (quod polus eſt (582), arcticus, vel borealis ab obſervatore dicendus) deſcribunt: quo fit, ut hæ maculæ nunquam in parte averſa Planetæ occultentur. Aliæ maculæ circa idem punctum polrae P deſcribunt portiones ellipſium *d*, *e*, *f*, eo majores ſemiellipſibus, quo polo P ſunt viciniores: unde maculæ eiusmodi ultra 12 horas in diſco ſunt viſibiles, & quidem eo diutius, quo polo P ſunt propiores. Ex oppoſito in parte inferiore diſci, portiones ellipticæ tanto magis deficiunt a ſemiellipſibus *h*, *i*, *k*, quo a polo P ſunt remotiores, & eadem ratione tanto 12 horis breviore tempore in diſco videntur maculæ, quæ eas deſcribunt.

584. *Phænomenon* V. Menſe Julio, & Auguſto ſequente, omnes hæ ellipſes quoad latitudinem contrahi videntur (fig. 82); primum quidem fere inſenſibiliter; poſtea admodum notabilis fit ea contractio. Præterea majorem ſemper ad planum eclipticæ inclinationem acquirunt; & polus P oblique ad limbum diſci accedit. Ellipſes *a*, *b*, *c*, quæ prius integræ videbantur, portionem ultra polum P ſitam in parte poſtica diſci abſcondunt ſucceſſive; & hinc etiam maculæ eas deſcribentes deſinunt eſſe ſemper viſibiles. Eodem modo portiones ellipticæ *d*, *e*, *f*, continuo deſcreſcunt, & ſemiellipſes fiunt, maculis, quarum ſunt ſemitæ, ſemper propius ad 12 horarum ſpatium, quo videri poſſint, accedentibus. At in parte diſci inferiore portiones *h*, *i*, *k*, augentur, ac ad ſemiellipſes accedunt, macularumque tempus, quo in diſco comparent, ad duodecim horas extenditur. Quin prope limbum infimum novæ ſucceſſive videntur maculæ, exiguas ellipſium portiones percurrentes, ut *l*, *m*, quarum dum longitudo creſcit, latitudo, ut ceterarum, contrahitur.

585. *Phænomenon* VI. Circa 23 ſeptembris (fig. 83) ellipſes partis ſuperioris diſci videntur adeo imminuta latitudine ad dimidias usque decreviſſe; & ellipſes partis inferioris decreſcente itidem latitudine usque ad dimidias auctæ, ut omnes evaſerint ſemiellipſes infinite parvæ latitudinis, aut potius ut cum axe ſuo majore congruant, conſequenter ſint rectæ axi majori æquales, parallelæ, & ad planum eclipticæ ſub angulo 23°, 28′, 20″, inclinatæ. Polus P attigit diſci peripheriam, & alter Q, qui in duobus præcecedentibus phænomenis in parte averſa latebat, quique *antarcticus* ſeu auſtralis dicitur, itidem ad limbum extimum pervenit: conſequenter omnes telluris maculæ ſpatio duodecim horarum accurate factæ ſunt conſpicuæ.

586.

586. *Phænomenon* VII. Illico poſt diem 23 ſeptembris, & per Octobrem ac Novembrem inclinatio linearum a maculis deſcriptarum ad eclipticam decreſcit (fig. 84) ipſæque in portiones ellipticas abeunt, cavitatem polo Q obvertentes, qui oblique in anteriorem diſci faciem progreditur, altero polo P ſub eodem latente. Ellipſes majorem ſemper acquirunt amplitudinem; & in parte inferiore eo magis excedunt ſemiellipſes, quo ſunt polo Q viciniores, ita ut *n*, *m*, *l* tandem integræ videantur, maculæque earum ſemper conſpicuæ fiant; eæ vero, quæ percurrunt portiones *k*, *i*, *h*, eo diutius ultra 12 horas videntur, quo minus a polo antarctico ſunt remotæ. Contrarium accidit portionibus partis diſci ſuperioris, quæ eo minores evadunt, maculis quoque tanto breviore temporis intervallo apparentibus, quo a polo Q magis diſtant, ut tandem *c*, *b*, *a*, ceteris remotiores, prorſus cum ſuis maculis occultentur.

587. *Phænomenon* VIII. Diebus aliquot 21 Decembris præcedentibus, ac ſequentibus viæ macularum verſus medium plano eclipticæ parallelæ apparent (fig. 85), omniaque ſitum oppoſitum obtinent ei, quo circa 21 Junii (583) videbantur: portiones ellipſium partis inferioris diſci tanto ſunt majores, quo in phænomeno IV minores fuerant. Ellipſes *n*, *m*, *l*, 21 Junii inviſibiles, nunc ex integro ſunt conſpicuæ; at *a*, *b*, *c* ex oppoſito totæ diſparuerunt, eisque propinquæ *d*, *e*, *f* tanto magis deficiunt a ſemiellipſibus, quo 21 Junii magis exceſſerant: tempus denique, quo maculæ ſunt viſibiles, magnitudini portionum ellipticarum, quas deſcribunt, eſt proportionale.

588. *Phænomena* IX, X, XI. Menſibus Januario & Februario (fig. 86) omnes ellipſes contrahuntur, & in partem oppoſitam priori inclinantur. Polus Q verſus circumferentiam redit. Ellipſes partis diſci inferioris minuuntur, polo Q proximæ ceſſant integræ videri; quæ vero in parte ſuperiore ſunt, augentur: paucis, omnia ad eum ſitum tendunt, quem Phænomeno IV habebant. Et reipſa 20 Martii (fig. 87) omnes ellipſes cum axe ſuo majore coincidunt, adeoque mutantur in rectas parallelas, ad planum eclipticæ ſub eodem angulo, nempe 23°, 28′, 20″, inclinatas, uti erant 23 Septembris, niſi quod inclinatio in alteram partem fiat. Omnes itaque maculæ per 12 horas tunc ſunt viſibiles, & poli Q & P in limbo diſci exiſtunt. Denique Menſibus Aprili & Majo (fig. 88) hæ rectæ in ellipſes minus ad telluris orbitam inclinatas abeunt, cavitate polo P obſerva, qui in diſcum redit, altero Q ſub eodem ſe occultante, ſicque omnia reſtituuntur ſucceſſive ſitui 21 Junii, Phænomeno IV deſcripto; tum rurſus eodem ordine phænomena in orbem redeunt.

589. Omnia hæc phænomena in aliis planetis eveniunt, illo cum diſcrimine, quod ab annua cujusque revolutione dependeant: & in ſimilibus poſitionibus ellipſes in omnibus non æque notabiliter pandantur.

ARTICULUS II.

De iis, quæ ex allatis phænomenis immediate conſequuntur: de diebus, ac noctibus, eorumque diverſa longitudine: de viciſſitudine tempeſtatum Anni: de ſolſtitiis & æquinoctiis.

590. Ut Theoria generalis præcedentium phænomenorum conſtituatur, obſervator noſter ſupponet, planetas eſſe corpora diverſæ indolis a ſole, ut quæ per ſe luce careant, atque ſolum reflexa ſolari ſint conſpicua, quin etiam habitata: hinc ſupponet etiam ſingulas maculas in eorum ſuperficie apparentes, eſſe loca peculiari attentione digna, uti urbes quasdam &c. Hinc deducet

591. *Primo.* Incolas cujusvis maculæ luce carere, ſive habere noctem, toto eo tempore, quo maculæ in parte diſci a ſole averſa morantur: contra vero illuminari, ac habere diem, quamdiu maculæ in diſco ſunt viſibiles.

592. *Secundo.* Eo momento diem illis incipere, & noctem finiri, quo quævis macula ad limbum appellit, ut anteriorem diſci partem percurrat; & diem expirare, ſimulque inchoari noctem, quo macula iterum ad extimum limbum pervenit, ut ſub diſcum redeat.

593. *Tertio.* Dum uterque polus ſimul in peripheria diſci verſatur (fig. 83 & 87) habitatores planetæ habere diem per ſemirevolutionem diurnam, & per alteram ſemirevolutionem noctem: atque adeo tempora, quibus id continget, dicentur *æquinoctia planetæ.*

594. *Quarto.* Dum non niſi unus polus in diſco illuminato exiſtit, incolas ei vicinos habere diem perpetuum; qui vero circa polum oppoſitum habitant, continuam noctem.

595. *Quinto.* Diem eſſe eo longiorem, & noctem eo breviorem, quo planeticolæ polo illuminato propiores ſunt, & a latente in parte obſcura remotiores. Hinc illi, qui ab utroque polo æqualem habent diſtantiam, diem nocti æqualem toto anno habent. Hinc etiam *circulus æquinoctialis*, ſive *æquator planetæ* vocatur circulus maximus, qui inter utrumque polum per medium tranſit: in figura 81 & ſequentibus literis T*g* R notatur.

596. *Sexto.* Dies longiſſimos (conſequenter noctes breviſſimas) reſpectu incolæ non conſtituti in circulo æquinoctiali eſſe tunc, quan-

quando polus ei vicinior eſt circa mediam viam, quam per partem illuminatam diſci tranſiens deſcribit, ac maculæ, quam habitat, ſemita orbitæ planetæ parallela fit circa medium, ceſſatque portio elliptica augeri, ut iterum decreſcat. Ex oppoſito dies breviſſimos eſſe, dum polus vicinior in parte diſci latente mediam viam confecit, ſemita maculæ circa medium parallela ad orbitam, & portione ellipſis ceſſante minui, indeque augenda. Tempora, quibus hæc eveniunt, *ſolſtitia* appellantur; & *æſtivum* quidem, dum dies eſt longiſſima, calore reſpectu ejus habitatoris maximo, utpote qui tamdiu radiis ſolaribus, parum obliquis, eſt expoſitus: *hybernum* vero, quando dies eſt breviſſima, quippe cum radii ſolis & brevi tempore, & magis oblique ad incolam illum pervenire poſſunt, quo fieri debet, ut aër multum refrigeretur. *Æquinoctium vernum* dicitur, quod inter ſolſtitium hybernum & æſtivum intercedit; *Autumnale*, quod inter ſolſtitium æſtivum & hybernum eſt medium.

597. *Septimo.* Quoniam intervalla inter æquinoctium & ſolſtitium proximum, & inter hoc ſolſtitium uſque ad æquinoctium vicinum, ſunt ſemper æqualia quartæ parti revolutionis annuæ planetæ, quemlibet polum per dimidiam revolutionem continuo illuminari, & altero revolutionis dimidio in perpetua nocte verſari.

598. *Octavo.* In locis circa polos P, Q, habitatis, diem debere quandoque durare plures menſes, plures ſeptimanas, plures dies communes; inter hæc unum debere eſſe locum, in quo dies longiſſima in ſolſtitio æſtivo accurate ſit æqualis revolutioni diurnæ planetæ; eſt autem hic is locus, cujus ellipſis circumferentiam diſci ultra polum tangit, quæ adeo eſt ultima earum, quæ integræ in diſco videri poſſunt. Circuli planetæ, quos ellipſes iſtæ repræſentant, dicuntur *circuli polares planetæ*: in figuris ſuperius citatis notantur literis *c* & *l*.

599. *Nono.* Intra circulum polarem & æquatorem dies creſcere a ſolſtitio hyemali uſque ad ſolſtitium æſtivum, noctesque eadem proportione decreſcere; poſt ſolſtitium æſtivum uſque ad hybernum dies minui ita, ut in ſolſtitio hyberno nox æqualis ſit diei ſolſtitii æſtivi, & viciſſim.

600. *Decimo.* In tota ſuperficie planetæ ſummam omnium dierum collectim ſumtorum proxime æquari tempori omnium noctium.

ARTICULUS III.

De Cauſa Generali horum Phænomenorum.

601. Ut jam ratio generalis horum phænomenorum reddatur, animadvertet obſervator, quod cum non niſi die æquino-

ctii viæ macularum inſtar rectarum inter ſe parallelarum appareant, neceſſe ſit, eo die plana circulorum a maculis rotatione deſcriptorum ita verſus ſolem dirigi, ut producta per eundem tranſeant; aliis vero temporibus reſpectu ſolis aut oblique aliquantum elevari, aut deprimi. Eſt id ſequela legitima illius Optices principii, quod *oculus extra planum & axem circuli admodum remoti conſtitutus totam ejus ſuperficiem videat, ſed figura elliptica, plus minuſve contracta, prout oculus plano circuli producto vicinior, aut ab eodem remotior eſt; & ſiquidem oculus in hoc ipſo ſit plano, ſuperficies circularis adeo contrahatur, ut cum peripheria congruat, circulusque ut recta diametro æqualis appareat.* Tunc enim radii omnes ex oculo per ſingula peripheriæ circuli puncta ducti, in ſphæræ cæleſtis ſuperficiei parte aliqua, quæ ad ſenſum plana eſt, ac viſum terminat, projectionem orthographicam circuli hunc in modum depingunt (356).

602. Et quia centrum ſolis ſemper eſt in plano orbitæ planetæ (24), ſequitur, quod momento æquinoctii centrum ſolis ſimul ſit in plano orbitæ, ſimul in plano circuli æquinoctialis Planetæ: & hinc *ipſo æquinoctii momento centrum ſolis eſt in interſectione plani orbitæ planetæ cum plano ejus æquatoris.*

603. Quod ſi porro per centrum v. g. Telluris concipiatur axis E C (fig. 81 & ſequentes) ad planum orbis annui perpendicularis (quem *axem eclipticæ* vocabimus), & ſimul ſit alter axis P Q per utrumque polum tranſiens (qui dicetur *axis æquatoris*) facile oſtenditur, quod

Omnia Phænomena motus diurni alicujus planetæ, quæ durante una revolutione annua contingunt, neceſſario ex eo conſequantur, quod planeta videatur ſemel circa axem ſuum eclipticum rotari, eodem tempore, & eadem velocitate, qua revolutionem annuam peragit, dum interea reipſa perſæpe motu diurno circa axem æquatoris volvitur, qui ſemper ſub eodem angulo ad planum eclipticæ planetæ inclinatus manet.

Etenim ſi globus ſolo motu translationis in plano aliquo circa punctum fixum in eodem plano revolvatur, facile concipitur (& quisque in ſeipſo experiri poteſt, ſi circa corpus aliquod vicinum in circulum ſe moveat, facie ad punctum aliquod remotiſſimum ſemper converſa, ut certus ſit, ſe carere motu rationis), hunc globum e puncto illo viſum, circa quod movetur, debere apparere & motu revolutionis, & motu rotationis præditum, qui poſterior fiat circa axem ad planum, in quo revolvitur, perpendicularem, eadem celeritate angulari, qua motus revolutionis. Adeoque omnia ſuperficiei globi puncta ſucceſſive centro revolutionis obverti debent, & deſcribere circulos tum inter ſe, tum plano revolutionis parallelos, qui ea proportione abſolvuntur, qua ipſa revolutio. Hoc poſito

Con-

Concipiatur ab initio terra cum axe ſuo æquatoris (inclinato ſcilicet, ut notum eſt, ad planum eclipticæ) ſolo motu annuo circa ſolem revolvi: apparebit ſimul habere motum rotationis annuum, ſi e ſole ſpectetur, circa axem eclipticæ: omnia ejus ſuperficiei puncta, & nominatim poli æquatoris, ſucceſſive ſoli obvertentur, atque ab eo illuminabuntur: ſingula annis ſingulis deſcribent circulos eclipticæ parallelos, & eadem velocitate angulari, qua revolutio fit. Axis autem æquatoris, ob conſtantem ſuam inclinationem, videbitur circa axem eclipticum per terram tranſeuntem duos conos æquales, & oppoſitos deſcribere, quorum vertex communis eſt in centro terræ. Et quia axis eclipticus eſt ad planum orbis annui terræ perpendicularis, ejus poli ſemper eadem ratione ſoli ſunt expoſiti, utpote ſemper in circumferentia diſci exiſtentes, hoc eſt, in circulo maximo, communi lucis & umbræ termino: igitur uterque æquatoris polus debet medietatem ſui circuli in diſco illuminato, medietatem in obſcuro deſcribere: & quoniam diametraliter ſibi opponuntur, quantum alter in diſcum illuminatum progreditur, tantundem alter ſub obſcuro reconditur; alteroque ad limbum appellente, alter quoque ad limbum oppoſitum venire debet, itaque deinceps.

Interea patet, per hanc rotationem apparentem minime impediri motum verum rotationis Telluris circa axem æquatoris: utraque hæc rotatio combinata producet phænomena, quæ articulo præcedente in particulari expoſuimus, & quorum ſingulorum rationem in ſequentibus dabimus.

ARTICULUS IV.

De obliquitate eclipticæ; de diverſo ſitu polorum æquatoris reſpectu ſolis; de declinatione, ac aſcenſione recta ſolis.

604. I. Quoniam eo momento, quo æquinoctium accidit (Fig. 83 & 87) extrema P & Q axis æquatoris, æque ac extrema E & C axis eclipticæ, ſunt in peripheria diſci illuminati, evidens eſt, menſuram inclinationis horum axium eſſe arcum EP, vel QC, adeoque etiam inclinationis planorum eclipticæ & æquatoris. Hæc inclinatio *obliquitas eclipticæ* vocatur, ac in tellure proxime eſt 23°, 28′, 20″.

605. Ex hoc deducitur, *ut cognoſcatur inclinatio eclipticæ alicujus planetæ ad ſuum æquatorem, metiendam eſſe obliquitatem ſemitæ macularum, quando lineas rectas deſcribere videntur.*

606. II.

606. II. Cum centrum ſolis directe opponatur puncto medio hemisphærii illuminati Planetæ, conſequens eſt, ut intra revolutionem annuam uterque polus æquatoris accedat, ac iterum ſucceſſive recedat ab hoc medio puncto diſci illuminati. In æquinoctiis uterque polus ab eo 90° diſtat, cum diſtantia in ſuperficie ſphærica accipiatur, & punctum illud ſit polus circuli maximi hemisphærium illuminatum terminantis. In ſolſtitiis polus ille æquatoris, qui in diſco illuminato eſt, minimam habet diſtantiam a puncto medio; alter, qui ſub diſco latet, maximam: aliis temporibus, dum polus in parte illuminata quamvis a puncto medio diſtantiam habet, alter in parte obſcura tantundem accurate a puncto medio ejusdem partis obſcuræ diſtat.

607. III. Si itaque circa polos eclipticæ E, C in ſuperficie telluris ad diſtantiam 23°, 28′, 20″ (fig. 81 & ſeqq.) concipiantur duo circuli minores ADB, GKH, ii repræſentant viam a polis æquatoris tempore revolutionis annuæ deſcriptam. Projectio horum circulorum eſt recta æqualis chordæ arcus 46°, 56′, 40″ (qui eſt duplus de 23°, 28′, 20″), cum plana eorum ad planum ecliptícæ ſint parallela & parum admodum ab eodem elevata, ob exilitatem diametri Planetæ. Puncta interſectionum horum circulorum A, B, G, H, cum circulo maximo diſcum illuminatum terminante, ſunt illa, in quibus poli æquatoris tempore æquinoctiorum verſantur, qui in hisce circulis ea proportione progrediuntur, qua centrum terræ in orbe annuo. Quod ſi itaque detur arcus eclipticæ a centro telluris ab ultimo æquinoctio deſcriptus, vel usque ad proximum æquinoctium deſcribendus, facile geometrice determinatur locus poli æquatoris in diſco illuminato. Exempli cauſa: 18 Aprilis 1745 in ipſo meridie, cum terra ab æquinoctio Martii præcedentis deſcripſerit in ſuo orbe 28°, 29′, 17″, conſtruatur ſuper diametro AB (fig. 88) ſemicirculus AOB, & a puncto A, in quo fuit polus tempore æquinoctii, accipiatur arcus AO 28°, 29′, 17″; ex O demittatur perpendiculum OP, quod determinabit locum poli P in diſco illuminato (359).

Et ſi in parte averſa diſci in projectione GHK concipiatur portio Hq, quæ repræſentet arcum 28°, 29′, 17″, punctum q erit polus auſtralis in hemiſphærio obſcuro.

608. IV. Determinatis hac ratione punctis polaribus æquatoris, ſi per punctum S medium hemiſphærii illuminati, & cui centrum ſolis reſpondet (ob quam cauſam in ſequentibus illud locum ſolis vocabimus) concipiatur deſcriptus in ſuperficie terræ ſemicirculus maximus PSQ, utrinque in polis P, Q, terminatus (fig. 81 & ſeqq.), manifeſtum eſt, *Primo*, quod cum ejus planum per ocu-

oculum obſervatoris tranſeat, projectio ejus ſemper debeat eſſe recta. *Secundo*, quod idem ſemicirculusſemper biſariam, & ad angulos rectos in *g* ſecetur a circulo maximo T *g* R, æquatorem repræſentante (Trig. 7, & 17), adeoque quod arcus P *g*, vel Q *g*, ſemper ſit 90°. Eodem modo liquet *Tertio*, hunc ſemicirculum non niſi in æquinoctiis integrum videri poſſe: aliis enim temporibus ſemper ejus aliqua pars ad P vel Q in hemiſphærio obſcuro latet, prout polus cognominis plus, minusve infra diſcum illuminatum receſſit. *Quarto*, Punctum interſectionis *g* ſemicirculi P S Q cum æquatore coincidere cum loco ſolis S in æquinoctiis: aliis vero temporibus hæc puncta eo magis a ſe diſtare, quo longius terra ab æquinoctiis abeſt. Hinc eorum diſtantia S *g* *declinatio ſolis* dicitur; & quidem *Borealis*, vel *Auſtralis*, prout vel polus Borealis, vel Auſtralis in diſco illuminato verſatur. Poteſt etiam ſemicirculus P S Q vocari ſemicirculus declinationis. Itaque *declinatio ſolis eſt quantitas arcus circuli maximi ſphæræ e loco ſolis ad æquatorem perpendiculariter ducti.* Hinc *Quinto*, declinatio ſolis ab æquinoctio usque ad proximum ſolſtitium, in quo maxima fit, creſcit; a ſolſtitio usque ad vicinum æquinoctium decreſcit, ita ut in æquinoctio ſit nulla: inde fit in hemiſphærium alterum diverſi nominis, hoc eſt e Boreali fit Auſtralis, aut ex Auſtrali Borealis, augeturque ab æquinoctio usque ſolſtitium: ab hoc minuitur usque ad proximum æquinoctium, poſt quod priorem denominationem acquirit, ſicque perpetuo ſuas variationes continuat. *Sexto.* In ſolſtitiis ſemicirculus P S Q congruit cum eo, qui per polos eclipticæ E, C ac punctum S, deſcribitur, tumque apparet facile, arcum declinationis maximæ ſolis æquari obliquitati eclipticæ, hoc eſt, 23°, 28′, 20″. Nam (fig. 81) tam arcus E S, quam P *g*, eſt 90°: arcus vero E P, ſeu diſtantia poli eclipticæ a circulo, quem annuatim polus æquatoris deſcribit, eſt 23°, 28′, 20″ (604); ergo P S debet eſſe 66°, 31′, 40″; conſequenter ſi P *g* = 90°, ſubtracto P S = 66°, 31′, 40″, manet S *g* = 23°, 28′, 20″. *Septimo* denique conſtat, arcum P S, vel Q S, diſtantiæ ſolis ab alterutro polo P vel Q, eſſe complementum declinationis ſolis, quando polus eſt in hemiſphærio illuminato; & ſummam ex declinatione & 90°, quando polus eſt in hemiſphærio obſcuro.

609. V. Si per idem hemiſphærii illuminati punctum medium S ducatur diameter I L, quæ interſectionem globi terreſtris cum plano eclipticæ exhibet, adeoque ſemicirculum maximum ſphæræ e ſole viſum (qui *ecliptica* vocabitur); *Primo* in æquinoctiis æquator T *g* R eclipticam I S L in puncto S, ſoli reſpondente, interſecat (fig. 83 & 87); alias punctum interſectionis a puncto S eo remo-

tius eſt, quo terra ab æquinoctiis: ita, ut in ſolſtitiis (fig. 81 & 85) æquator & ecliptica ſe interſecent in punctis ſignis ♈ & ♎ notatis in ipſa diſci peripheria. *Secundo.* Tempore revolutionis dimidiæ terræ, ab uno ſolſtitio uſque ad alterum, unum ex interſectionum punctis, v. g. quod habet ſignum ♈, (Fig. 81, 83, 83, 84, 85) percurrit ſemicirculum I L, totidemque in eo gradus conficit, quot polus æquatoris in ſuo circulo minore; tempore alterius revolutionis dimidiæ, alterum punctum interſectionis ♎ (Fig. 85, 86, 87, 88, 81) eundem ſemicirculum I L percurrit. *Tertio.* Angulus ſphæricus S ♈ *g*, vel S ♎ *g*, (Fig. 81 & ſeqq.) ſemper æquatur obliquitati eclipticæ, quippe cum a planis æquatoris & eclipticæ ſe interſecantibus efficiatur. Unde data diſtantia terræ ab æquinoctio proximo, ſive arcu, quem terra ab ultimo æquinoctio percurrit, vel uſque ad proximum percurret, facile inveniri poteſt declinatio ſolis, ejusque a polis æquatoris diſtantia. Nam in triangulo ſphærico S ♈ *g* (Fig. 81, 82, 83, 84, 85), vel S *g* ♎ (Fig. 85, 85, 87, 88) ſemper ad *g* rectangulo (Trig. 16), arcus ♎ S, vel ♈ S, eſt æqualis arcui diſtantiæ terræ ab æquinoctio proximo; angulus S ♎ *g*, vel S ♈ *g*, æquatur obliquitati eclipticæ, ſive 23°, 28′, 20″.

610. VI. Arcus æquatoris *g* ♈, inter interſectionem ♈ æquatoris cum ecliptica, & arcum S *g* a loco ſolis ad æquatorem perpendicularem, interceptus, eſt *aſcenſio recta* ſolis: computatur ſecundum ſignorum ordinem a 0° uſque ad 360°, initio ſemper ab interſectione ♈ ſumto. Hoc poſito, circulus P S Q ad æquatorem ſemper normalis, cum etiam in ſolſtitiis normalis ſit ad eclipticam, ſecat & æquatorem, & eclipticam in diſtantia 90° a communi eorum interſectione (Trig. 18). Itaque (Fig. 81, 85) ♎ S, ♈ S, ♎ *g*, ♈ *g* ſunt quadrantes circuli: & hinc aſcenſio recta ſolis in æquinoctio verno eſt 0°; in ſolſtitio ſequente 90°; in æquinoctio autumnali 180°; in ſolſtitio hyberno 270°; in reditu ad æquinoctium vernum denique 360°, ſeu 0°. Quare ſi detur obliquitas eclipticæ, & arcus diſtantiæ terræ a proximo æquinoctio, aſcenſio recta ſolis facile reperitur, cum in triangulis ſphæricis rectangulis ♈ *g* S, ♎ *g* S dentur angulus S ♈ *g*, vel S ♎ *g*, & latus ♈ S, vel ♎ S.

ARTICULUS V.

De temporibus rotationis planetarum circa ſuos axes; de tempore vero & medio.

611. VII. Supponatur, quod planum ſemicirculi P S Q non participet motum diurnum, ſed ſolummodo motum annuum tellu-

telluris, adeoque respectu motus diurni fixum maneat, (quo casu hic semicirculus *Meridianus cæleſtis* dicitur), evidens est *primo*, quod motu diurno omnia superficiei terrestris puncta, imo etiam omnia circulorum ISL, TgR, qui in ea descripti concipiuntur, successive per planum hujus meridiani transeant, describantque circa æquatoris axem omnes eos circulos, qui e sole visi, ellipsium instar apparent. Momentum, quo punctum quodvis per meridianum transit, *Meridies* illius puncti appellatur.

612. *Secundo* patet, quod circulorum omnium arcus per meridianum transeuntes semper essent accurate proportionales tempori, si solum motum rotationis haberent; sed ob motum annuum (quo planeta tempore revolutionis integræ videtur semel circa axem suum eclipticæ rotari) fit, ut intervallum reditus maculæ cujusvis ad meridianum componatur ex revolutione integra diurna & æquabili circa axem æquatoris, & simul ex parte revolutionis annuæ circa axem eclipticæ, quæ tempori illius intervalli respondet, & velocitati motus annui in orbita proportionalis est. Hinc sequitur

613. *Tertio*, quod dato tempore revolutionis maculæ respectu solis, reperiatur tempus revolutionis planetæ circa axem æquatoris ex hac analogia: *ut* 360° *plus motu proprio planetæ tempore revolutionis maculæ, sunt ad tempus hujus revolutionis; ita sunt* 360° *ad tempus rotationis.*

614. *Quarto*, quod cum celeritas motus annui non sit semper eadem, quodlibet intervallum, quo macula ad meridianum redit (& quod est mensura diei respectu illius maculæ) debeat esse inæquale, consequenter si terræ incolæ habeant horologia, quorum motus sit admodum æquabilis, ea non possint ab uno usque ad alterum meridiem ostendere 24 h. 0′. 0″; sed aliquot secundis plus, quando motus terræ acceleratur, & aliquot minus, dum retardatur.

615. Ut igitur hujus differentiæ ratio habeatur, duplex tempus, vel dies statuendus est; alterum nempe *verum* seu *apparens*, estque intervallum a transitu maculæ per meridianum usque ad ejusdem reditum; alterum *medium*, estque intervallum ab uno usque ad alterum meridiem, quale observaretur, si motus rotationis & revolutionis esset semper æquabilis, quodque ab horologiis, si rite sint constituta, ostendi debet. Die uno temporis medii 360°, 0′, 0″ æquatoris per meridianum transeunt una cum 59′, 8″ quæ est pars ex motu annuo 360°, uni diei temporis medii proportionalis. Die autem uno vero per meridianum transeunt 360 gradus æquatoris cum arcu ejusdem, qui respondet arcui eclipticæ eo die descripto, & motus in ascensione recta vocatur.

Quinto. Illud etiam patet, diem temporis medii non posse congruere cum die temporis veri, nisi quando terra motu diurno in

aſcenſione recta 59′, 8″ conficit. Alias ſemper inter meridiem temporis veri (hoc eſt, inter tranſitum verum alicujus puncti per meridianum), & meridiem temporis medii (hoc eſt, inter momentum, quo idem punctum veniſſet ad meridianum, ſi motus terræ circa ſolem ſemper eſſet æquabilis) notabilis eſſe debet differentia &c (vide N. 315 & ſeqq.).

ARTICULUS VI.

De differentia Meridianorum; de Longitudinibus & Latitudinibus Geographicis; de Methodo Geographorum.

616. E Succeſſivo punctorum ſuperficiei terræ tranſitu per meridianum P S Q, (quo momentum meridiei ſingularum macularum determinatur) illud etiam conſequitur, quod macularum incolæ ſucceſſive meridiem habeant, alii poſt alios, ut illi, quorum macula una hora tardius per meridianum tranſit, tunc meridiem agant, quando prioris maculæ incolæ jam horam poſt meridiem numerant. Idem eſt de aliis. Verum quorum maculæ eodem tempore ad meridianum veniunt, ii eodem momento eandem horam numerant. Unde in ſuperficie planetarum dantur loca, in quibus eodem tempore eædem numerantur horæ; ſed dantur etiam loca alia, in quibus eodem tempore horæ cenſentur diverſæ. Eſt autem manifeſtum, quod ea loca, in quibus eodem momento eſt meridies, cum ſimul debeant ad meridianum P S Q venire, talem habeant in ſuperficie globi ſitum, ut omnia ſint ſub eodem aliquo ſemicirculo ab uno ad alterum polum ducto; ea vero, in quibus meridies eſt diverſis temporibus, nequeant ſub tali ſemicirculo eſſe ſita. Quod ſi igitur per polos æquatoris P, Q, & ſingula ejus peripheriæ puncta deſcribantur ſemicirculi (qui *meridiani terreſtres* dicentur, ut a cæleſti P S Q diſtinguantur), quivis ſemicirculus determinabit in ſuperficie telluris omnia ea loca, in quibus eodem tempore eædem horæ numerantur, eaque ab aliis diſcernet. Et ſi numerus graduum æquatoris inter duos meridianos terreſtres comprehenſus, vel, quod idem eſt (Trig. 10), numerus graduum, qui metitur angulum ad polum, quem duo illi meridiani terreſtres efficiunt, convertatur in tempus, tribuendo 360 gradibus 24 horas; ſcietur differentia hoarum, quæ ſub iisdem meridianis ſimul numerantur, & quæ in Aſtronomia *differentia meridianorum* dicitur.

Evidens porro eſt, *loca, quæ ſunt ſub eodem meridiano terreſtri, ita eſſe ſita reſpectu polorum æquatoris, ut duo eorum nequeant ab eodem polo eandem habere diſtantiam.*

617.

617. Ulterius liquet, quod si detur hora, quæ in loco quovis superficiei telluris numeratur, & differentia meridianorum inter hunc, & alium quemcunque locum, sciatur etiam hora, quæ in alio illo loco eodem tempore est; & vicissim datis horis duorum locorum eodem tempore, datur etiam differentia meridianorum

618. Cum motus diurnus fiat circa polos æquatoris, omnia puncta superficiei globi, quæ ab eodem polo habent eandem distantiam, moventur in eodem circulo, seu si e sole spectentur, videntur eandem ellipsin describere. Itaque si ab æquatore usque ad utrumque polum in tota globi superficie describantur circuli ad æquatorem paralleli (vocantur autem simplici nomine *paralleli*, suntque circuli minores sphæræ) ex iis singuli determinabunt puncta a polo æquidistantia, & quæ successive per meridianum PSQ transeunt, ita, ut sit impossibile, ut duo puncta sint simul in eodem parallelo, & simul eandem horam numerent, sive simul sint sub eodem meridiano terrestri. Unde deducitur, certa & constante ratione determinari posse situm puncti cujusvis in superficie telluris, si nempe designetur parallelus, in quo est, & differentia meridianorum respectu puncti æquatoris, per quod primus meridianus transit, cum, ut vidimus, fieri nequeat, ut duo diversa puncta easdem has duas conditiones habeant.

619. Et reipsa Geographi hac methodo puncta notabiliora in superficie terræ determinant. *Primo* Æquatorem in 360° partiuntur, & per singula divisionum puncta describunt meridianos: ex his divisionibus unam seligunt, a qua ceteras ordine numerent, & meridianum per eam descriptum vocant *primum meridianum*. Verum est quoddam apud eos hac in re discrimen: alii enim, ut Angli, volunt, ut primus eorum meridianus per Londinum transeat; alii, ut Hollandi, eum ducunt per Picum Teneriffæ (montem insignem insulæ unius e Canariis), Galli quidam eundem per Parisios describunt: quamvis satis inter eos conveniat, recte meridianum primum duci per insulam maxime occidentalem e Canariis, quam *Ferri* vocant, quemadmodum & antiqui fecerunt Geographi, & Ludovicus XIII suis præscripsit. A primo Meridiano Geographi alios ab occidente versus orientem numerant, dicendo, quod omnia puncta, quæ sub meridiano a primo gradu uno versus ortum distante sunt, habeant gradum unum longitudinis; quæ sub meridiano sequente, habeant duos gradus longitudinis &c. *Secundo*. Meridianum primum, aut quemvis alium, ab æquatore usque ad polum in 90° dividunt, & per singulos describunt circulos minores æquatori parallelos: punctis omnibus, quæ sub primo ab æquatore parallelo sunt, tribuunt gradum unum latitudinis borealis, si quidem parallelus sit ex parte poli borei; vel australis, si sit ex parte poli australis. Similiter omnia puncta, quæ sunt sub parallelo ab æquatore secundo, dicuntur habere duos gradus latitudinis borealis, vel australis, prout parallelus vel ex parte poli borealis, vel ex parte poli australis fuerit, & sic de reliquis Itaque *Longitudinem geographicam alicuius loci metitur arcus æquatoris interceptus inter primum meridianum, & meridianum loci, ab occasu in ortum numeratus; latitudinis vero geographicæ ejusdem loci mensura est arcus circuli maximi, qui metitur distantiam æquatoris a parallelo per locum transeunte:* aut quod idem est, *mensura latitudinis est arcus meridiani loci inter locum ipsum, & æquatorem interceptus.* Hinc sequitur, *latitudinem geographicam alicujus loci esse complementum ejus distantiæ a polo.*

ARTICULUS VII.

De altitudinibus ſolis, & earum variationibus.

620. Dum punctum aliquod ſuperficiei telluris motu diurno in via ſua elliptica (ut quidem e ſole apparet) progreditur, evidens eſt I, quod dum verſus meridianum cæleſtem S P Q accedit, ſimul etiam loco ſolis fiat vicinius: exempli cauſa quando eſt in limbo extimo diſci illuminati, conſequenter quando oritur, vel occidit, arcus ejus diſtantiæ a puncto S repræſentatur per radium hemiſphærii illuminati, adeoque eſt 90°. Poſt ortum ſuum ſemper magis ac magis ad meridianum S P Q accedit, ideoque etiam ad ſolem, ita ut dum jam ſub meridiano cæleſti conſtitutum eſt, minimum, ac eo die poſſit, a puncto S diſtet. Etenim viæ veræ macularum ſunt circuli minores globi, quorum poli ſunt P, Q: omnes ſecant perpendiculariter circulos maximos per polos P, Q tranſeuntes; igitur etiam meridianum cæleſtem P S Q: & hinc dum macula ad hunc meridianum appellit, ejus diſtantia a loco ſolis S eſt arcus circuli P S Q, ex puncto S perpendiculariter ad viam maculæ ductus: quare hic arcus eſt diſtantia minima puncti S a via, quam macula actu percurrit; & macula, dum eſt in meridiano, propius eo die ad locum ſolis S accedere non poteſt.

621. II. ſi ſupponamus incolam terræ ſitu erecto conſiſtere, hoc eſt, tali, ut recta a capite ad pedes ducta (quæ linea *verticalis*, aut *perpendiculi* dicitur) ſit ſemper ad terræ ſuperficiem normalis, eumque ſitum objectorum, quæ circa ſe videt, ad hanc lineam verticalem, ſeu potius ad planum referre, quod eandem verticalem, ubi per oculum tranſit, ſecat perpendiculariter (quod *planum horizontale*, ſeu *planum libellæ* vocatur) adeoque terram in puncto oculi ſpectatoris tangit; ſi præterea hæc comparatio fiat per angulos, qui comprehenduntur a plano libellæ, & radio ab oculo ad objectum ducto; ita, ut arcus, qui metiuntur hos angulos, dicantur *altitudines*, conſequenter objectum cenſeatur nullam habere altitudinem, quod in plano libellæ eſt poſitum; ad quæ vero ducti radii ex oculo efficiunt cum eodem plano angulos 30°, 40°, 60°, iis altitudo 30°, 40°, 60° tribuatur: hæc, inquam, ſi ſupponamus, homini illi ſol apparere debet aſcendere, & deſcendere, prout locus ſuperficiei terræ, in quo eſt, ad locum ſolis S vel accedit, vel ab eodem recedit: ita *ut altitudo ſolis ſemper videatur proxime æqualis complemento hujus diſtantiæ.* Sit enim in E oculus habitatoris conſtitutus (fig. 89), E Z ejus linea verticalis, E N linea horizontalis, ſive libellæ; ſit in S locus, cui reſpondet centrum ſolis infinite fere a terra in linea C S *f* remotum; arcus E S, ſive diſtantia oculi E a puncto medio

dio hemisphærii illuminati, sit 90° (dum nempe (592) punctum E respectu solis oritur vel occidit): cum angulus E C S sit rectus, linea C S *f* e centro terræ ad solem ducta est parallela ad lineam libellæ E N; si itaque e puncto E ducatur recta E *f* versus centrum solis ad distantiam admodum magnam remoti, ea non concurret cum recta C S *f*, nisi ad distantiam admodum magnam a centro terræ: jam vero rectæ, quæ non nisi in magna valde distantia concurrunt, sunt fere parallelæ, & quidem eo propius ad parallelismum accedunt, quo in majore distantia concurrunt, ita ut absolute sint parallelæ, si non nisi infinite productæ concurrant; igitur rectæ C S *f*, E *f* sunt proxime parallelæ: & quoniam linea libellæ E N reipsa parallela est cum linea C S *f*, recta E *f*, ex oculo ad centrum solis ducta, fere coincidit cum linea libellæ E N; hinc angulus ab iis comprehensus est infinite parvus, adeoque altitudo solis apparet fere nulla, quando distantia spectatoris a puncto medio hemisphærii illuminati est 90°. Sit jam spectator in *e* positus; ejus verticalis *e z*, linea libellæ *e n*, distantia a puncto medio hemisphærii illuminati *e* S = 40°. Si ducatur e puncto *e* recta *e f* ad centrum solis, quæ erit proxime parallela cum recta C S *f*, angulus altitudinis solis habebit mensuram angulum *n e f*, cujus complementum est *f e z* = 50°: & quia rectæ C S *f*, *e f* sunt fere parallelæ, anguli *f e z*, *e* C S sunt proxime æquales: igitur mensura anguli altitudinis solis est proxime complementum arcus *e* S, sive distantiæ spectatoris a puncto medio hemisphærii terræ illuminati.

Observa: angulus inclinationis rectarum E *f*, *e f*, e superficie terræ ad centrum solis ductarum, ad lineam, quæ e centro terræ ad centrum solis ducitur, vocatur *parallaxis solis*. De hac alibi (429) egimus. Et quia hæc parallaxis, dum maxima est, non excedit 10″, eam hic negligimus, & supponimus, omnes rectas, e quocunque terræ puncto ad solem ducantur, esse inter se parallelas, adeoque altitudinem solis e terra visam esse accurate æqualem complemento distantiæ oculi spectatoris a puncto medio hemisphærii illuminati.

622. III. His positis, dum punctum aliquod superficiei terrestris est in meridiano, meridianus terrestris, in quo est, cum meridiano cælesti P S Q (Fig. 81 & seqq.) congruit. Igitur arcus distantiæ spectatoris ab æquatore, & arcus distantiæ loci solis S ab eodem æquatore, in eodem circulo P S Q accipiendi sunt: & hinc si uterque locus sit ad eandem æquatoris partem, differentia arcuum distantiæ ab æquatore est distantia eorum inter se; sed si sint ad diversas æquatoris partes, distantia eorum inter se est summa arcuum distantiæ ab æquatore, hoc est summa latitudinis geographicæ loci spectatoris in terra, & declinationis solis. Atque

ex

ex hoc facile deducetur ratio omnium phænomenorum viciſſitudinis tempeſtatum anni, inæqualitatis dierum ac noctium, diverſarum altitudinum meridianarum ſolis, cum iſta ſolummodo dependeant e combinata declinatione ſolis cum diſtantia ſpectatoris ab æquatore terreſtri.

623. IV. Cum axes minores omnium ellipſium a maculis deſcriptarum ſint in plano meridiani cæleſtis P S Q, arcus ejusdem ellipſeos ad æqualem utrinque a meridiano diſtantiam æquales eſſe debent, & æqualiter poſiti: conſequenter ejusdem maculæ a puncto medio S hemiſphærii illuminati diſtantiæ temporibus ante & poſt tranſitum per meridianum æqualibus ſunt æquales: ſeu, quod idem eſt, altitudo ſolis æqualibus ante, & poſt meridiem temporis intervallis eadem eſt. Atque ex hoc licet tempus verum in terra obſervare (325).

ARTICULUS VIII.

Phænomena expoſita Geometrice & Trigonometrice determinantur.

624. PROBLEMA I. *Datis declinatione ſolis, & latitudine geographica puncti in ſuperficie Planetæ, ellipſin ejus paralleli geometrice deſcribere, & determinare loca, in quibus quavis diei, noctisve hora exiſtit.*

Reſolutio. Repræſentet circulus E Z C R (fig. 90) diſcum illuminatum; E C axem eclipticæ. Determinato (607) ſitu unius e polis P, ducatur diameter M P S Q, quæ erit projectio meridiani; accipiantur in ea partes S F, æqualis ſinui latitudinis geographicæ, & S I, æqualis ſinui differentiæ inter latitudinem geographicam & declinationem datam; S N vero æqualis ſinui earum ſummæ (fit hoc expedite, ſi utrinque a puncto M accipiantur arcus M T, æquales complemento latitudinis geographicæ; & arcus T D, T R æquales declinationi ſolis: ducanturque T T, R R, D D); habebitur T F T, diameter paralleli puncti dati, quæ ſimul erit axis major ellipſeos (356); & I N, axis minor. Nam (622) quando declinatio, & latitudo geographica ſunt ejusdem nominis, locus puncti dati in diſco illuminato eſt in meridie in I; quando vero declinatio eſt diverſi nominis, locus puncti dati in meridie eſt in N. Itaque in caſu priore eſt N locus puncti dati media nocte ſub diſco, & in caſu altero eſt punctum datum media nocte in I. Hoc poſito, centro V, medio partis I N puncto, deſcribantur duo circuli radiis V N, & F T: dividatur uterque in quindenos gradus, initio a Meridiano M Q ſumto, determinabitur (361) ellipſis, quæ erit projectio quæſita, itaque ſimul diviſa, ut punctum datum

quavis

quavis hora in locis in ea notatis reperiatur: & ſiquidem declinatio & latitudo Geographica ſint ejusdem nominis, pars inferior ellipſis inter duo puncta circa T & T comprehenſa, in quibus limbum diſci tangit, deſignabit tempus, quo ſol viſibilis eſt, ſeu diei longitudinem; pars autem ejus ſuperior, nocturnum tempus exhibebit: oppoſitum fiet, ſi declinatio habeat diverſam denominationem. Itaque puncta contactus ellipſeos cum limbo diſci, horam ortus & occaſus puncti dati reſpectu ſolis determinabunt. Ordo horarum diurnarum eſt ab occaſu in in ortum, quippe cum hac directione hemisphærium illuminatum planetæ reſpectu ſolis moveatur.

625. Obſerva: In ejusmodi projectione omnes peculiares affectione motu diurni geographice exprimi poſſent; verum omittemus iſta, quoniam multo major accuratio per calculum trigonometriæ ſphæricæ habetur. Itaque oſtendemus ſolum, qua ratione in diſco illuminato inveniri debeant triangula ſphærica ad id requiſita, figura rudius conſtructa, utpote quæ ſolum in perſequendo calculo nos dirigat.

626. PROBLEMA II. *Datis tribus ex his quatuor*, Primo *latitudine Geographica puncti cujusvis in ſuperficie planetæ, v. g. telluris;* Secundo *declinatione ſolis;* Tertio *momento quocunque temporis veri, quod in loco puncti dati numeratur;* Quarto *altitudine ſolis ex eo puncto viſa, invenire quartum ope calculi Trigonometrici.*

Caſus I, quando latitudo Geographica & declinatio ſolis habent diverſam denominationem. Eſto latitudo Geographica 48°, 51′ Borealis; declinatio ſolis 13°, 18′ Auſtralis; tempus datum, tres horæ ante meridiem. Deſcribatur circulus E I C R (fig. 92) qui diſignet diſcum illuminatum: notentur in eo poli eclipticæ E, C; & quia declinatio ſolis eſt auſtralis, prope C ducatur recta G H, quæ exhibeat circiter viam poli antarctici, tum in diſco illuminato verſantis: deſignetur in ea locus poli antarctici Q, 13 circiter gradibus a limbo. Tum deſcripto per Q & S circulo Q S *g* M, qui meridianum cæleſtem repræſentat, in diſtantia Q *g* 90° ducatur æquator T *g* R, & ſupra eum in diſtantia *g* M 48°, 51′ parallelus I M L V, qui viam puncti dati in diſco illuminato deſignat. Eſt autem punctum æquatoris T ad occaſum punctorum terræ, R ad eorum ortum. In arcu æquatoris *g* R accipiatur *g* O = 45°, a meridiano *g* verſus occidentem numeratis, cum tempus datum ſit trium horarum ante meridiem, & 3 h = 45°. Per polum Q, & punctum O ducatur arcus circuli maximi, parallelum, ſeu viam puncti dati I M L V, ſecans in L: erit punctum L locus verus puncti dati in diſco illuminato tempore dato. Denique per centrum S & punctum L deſcribatur quadrans circuli S L N; erit L N arcus diſtantiæ puncti

dati L a limbo hemisphærii illuminati, aut, quod idem est, (621) altitudo centri solis e puncto L visa. His positis, in triangulo sphærico S Q L, latus S Q æquatur distantiæ solis a polo, sive complemento declinationis solis S g, adeoque in nostro exemplo est S Q 76°, 42′: arcus Q L = Q O + O L = 90° + 48°, 51′, hoc est = 138°, 51′; anguli S Q L ad polum mensura est arcus g O = 45°: latus S L est distantia solis a zenith. Unde cognitis tribus ex his, quartum facile per calculum invenitur; v. g. S L reperietur 73°, 47′; adeoque L N 16°, 13′.

627 Casus II, quando latitudo Geographica, & declinatio solis sunt ejusdem denominationis. Sit itaque illa 48°, 51′ Borealis; hæc vero 13°, 18′ itidem borealis: detur idem tempus, quod prius, nempe tres horæ ante meridiem: quæratur altitudo solis. Circulus E C T (fig 93) exhibeat discum illuminatum, S locum solis, E & C polos ecliptica. Quoniam declinatio solis est Borealis, polus æquatoris borealis versatur in disco illuminato, cujus via circa polum E sit A P B, locus vero circiter in P. Meridianus cælestis designetur per P S g; æquator in distantia 90° a polo P per T g R, & parallelus loci dati per I M L V, in distantia 48°, 51′ ab æquatore. Si, ut prius, accipiatur in æquatore g O 45° versus occidentem, & ducatur P L O, hujus cum parallelo I M L V intersectio determinat locum L, in quo est punctum datum tempore dato: & si porro ducatur S L N, arcus L N est altitudo solis. Reperitur vero iterum ope complementi sui S L, quod est latus trianguli sphærici P S L, in quo notum est P L 41°, 9′, complementum distantiæ loci dati L ab æquatore L O; item S P, 76°, 42′, complementum declinationis solis S g; denique angulus S P L, quem metitur arcus g O 45°; reperietur itaque S L 51°, 14′ ½, & hinc altitudo solis 38°, 45′ ½.

628. Ex resolutione horum triangulorum inveniri etiam potest hora ortus vel occasus solis pro quovis telluris loco, cujus latitudo Geographica cum declinatione solis datur. In iisdem enim triangulis Q S L, vel P S L arcus S L sumendus est 90°, hoc est, puncta N & L debent coincidere; arcus Q S, vel P S pariter notus est, cum sit complementum declinationis sive australis, sive Borealis: denique scitur etiam arcus Q L vel P L ex latitudine Geographica loci dati: unde restat solum, ut inveniatur angulus S Q L vel S P L, qui in tempus conversus (tributis 360° viginti & quatuor horis) dat intervallum temporis inter appulsum puncti dati ad meridianum, & appulsum ejusdem ad limbum disci illuminati. Hoc intervallum *arcus semidiurnus* dici solet. Hac ratione invenietur (fig. 92), angulus S Q L = 69°, 32′, seu 4 h. 38′, 8″ in tempore; & angulus S P L

(fig.

(fig.93) = 110°, 28′, ſive in tempus converſus, 7 h, 21′, 52″. Duplum arcus ſemidiurni determinat moram loci dati in diſco illuminato tempore unius revolutionis diurnæ terræ.

ARTICULUS IX.

Quædam obſervanda circa Theoriam præcedentem; & de præceſſione æquinoctiorum.

629. I. Quæ hucusque de viis ellipticis macularum alicuius Planetæ diximus, non niſi quantum ſenſibus percipi poteſt, vera ſunt. *Primo* enim, cum Planetæ perpetuo motu annuo in ſua orbita progrediantur, viæ illæ in ſe ſunt epicycloides; & quoniam oblique ſpectantur, ſunt epicycloides ellipticæ. *Secundo* quia axis minor harum ellipſium jam longior, jam brevior perpetuo evadit, eædem curvæ ſunt ſpecies quædam ſpiralium ellipticarum. Hinc ſi rem in ſe ſpectemus, ut vere eſt, curvæ, quæ exhibent vias macularum e ſole viſas, ſunt admodum compoſitæ, utpote quæ oriuntur ex tribus inter ſe complicatis motibus, qui in diverſis planis peraguntur, ſcilicet e motu annuo planetæ in plano ſuæ eclipticæ; ex ejusdem motu diurno in plano ſui æquatoris; & e motu annuo apparente & conico axis æquatoris circa axem eclipticæ. Interea tamen in praxi ſupponuntur hæ curvæ eſſe veræ ellipſes pro tempore valde brevi, v. g. aliquot tantum horarum, cum celeritas angularis motus diurni ſit admodum magna, ſi cum celeritate reliquorum duorum motuum comparetur.

630. II. Momentis, quibus eædem anni tempeſtates redeunt, collatis cum momentis, quibus nova terræ revolutio reſpectu ejusdem ſtellæ fixæ incipit, animadverſum eſt, quod tempus reditus ejusdem tempeſtatis anni prævertat revolutiones annuas 20′ in tempore, adeoque revolutio apparens annua polorum æquatoris terreſtris circa polos eclipticæ abſolvatur intra 365 d. 5 h. 49′; & revolutio terræ circa ſolem intra 365 d. 6 h. 9′; ita, ut dum polus æquatoris circa polum eclipticæ jam videtur deſcripſiſſe 360°, terra circa ſolem reipſa non conſecerit, niſi 359°, 59′, 10″. Ex quo apparet, punctum interſectionis plani æquatoris cum plano eclipticæ (quod eſt punctum æquinoctiale) debere ſingulis annis 50″ videri regredi. Motus hic *præceſſio æquinoctiorum* vocatur, (hujus calculum vide Sect. VI. Cap. I. Artic. 9).

SECTIO QUINTA.

Complectens Partem Tertiam Aſtronomiæ Solaris,

Sive

Explicationem motuum planetarum ſecundariorum e ſole viſorum.

Ut de legibus motuum planetarum ſecundariorum, ſeu ſatellitum, aliquid certi conſtitui poſſit, aſſumenda ſunt obſervata quædam indubitata, ex quibus, quemadmodum in præcedentibus fecimus, ſequelæ evidente nexu conjunctæ deducantur. Itaque obſervator noſter, quem in ſole collocatum ſupponemus, conſideratis attente Saturni, Jovisque ſatellitibus, ac illo telluris comite, quem ſuo nomine *lunam* vocabimus, ſequentes faciet animadverſiones.

631. *Phænomenon* I. *Satellites Saturni, Jovis, ac terræ alternis vicibus ad partem orientalem, & occidentalem ſuorum primariorum conſpiciuntur, jam in hanc, jam in alteram plagam digreſſi: cumque in maxima ſunt digreſſione, quantum ex una, tantum ex altera parte diſtant; atque æqualibus fere temporis intervallis ad eandem ex eadem parte digreſſionem veniunt.* Sequens Tabula tempora reditus ad eandem digreſſionem, & quantitatem elongationis maximæ a centro eorum primarii exhibet.

	Tempora, quibus ſinguli ſatellites ad eandem ex eadem parte digreſſionem redeunt.				*Digreſſio maxima orientalis & occidentalis ſatellitum in ſemidiametris primarii.*
	Dies	horæ	minuta	ſecunda	
Satellitum Saturni	1	21	18	27	$8\frac{7}{8}$.
	2	17	41	22	$11\frac{1}{4}$.
	4	12	25	12	15.
	15	22	41	14	36.
	79	7	48	0	108.
Satellitum Iovis	1	18	28	36	$5\frac{1}{3}$.
	3	13	18	52	9.
	7	3	59	40	$14\frac{1}{3}$.
	16	18	5	6	$25\frac{1}{3}$.
Lunæ	29	12	44	3	$60\frac{1}{3}$.

Ex his digreſſionibus & temporibus ſatellites alter ab altero diſtinguuntur: ita dicitur *ſatelles primus* Saturni, vel Jovis, ille, qui minimum omnium ab eo digreditur, minimoque omnium tempore revolutionem ſuam peragit; *ſecundus* eſt, qui poſt primum habet minimam elongationem, & ſic de aliis.

632. Ex hoc Phænomeno ſequitur, quod *quæcunque ſit ſatellitum orbita, ea tamen in ſe redeat*, ut circulus vel ellipſis; & *quod planeta primarius*

marius ſit in ea orbitæ hujus diametro, cujus directio ad ſolem tendit. Id enim niſi eſſet, digreſſio ſatellitum verſus occidentem non foret æqualis digreſſioni verſus orientem.

633. *Phænomenon* II. *Quando ſatellites a digreſſione occidentali ad digreſſionem orientalem progrediuntur, ſæpiſſime fit, ut ſub diſco planetæ primarii occultentur, ultra quem conſequenter tranſeunt: ſunt tamen aliqui, qui vel ſupra, vel infra eundem tranſeunt, nunquam tamen cis eum.* Ex oppoſito, *in progreſſu a digreſſione orientali ad occidentalem, nunquam poſt diſcum primarii transeunt, ſed ante eum; vel vero, ſi in priore caſu ultra planetam ſupra diſcum tranſierunt, in hoc infra eum tranſeunt cis planetam, & viciſſim.*

634. Ex hoc phænomeno tria deducuntur. Primo. *Satellites omnes verſus eandem partem moveri.* Secundo. *Primarium eſſe intra eorum orbitas, ſeu, quod idem eſt, ſatellites circa primarios ſuos revolvi.* Tertio. *Plana orbitarum ſatellitum eſſe inclinata ad planum orbitæ primarii.*

Nam *primo*, ſi ſatellites non omnes moverentur eadem directione, quidam in progreſſu a digreſſione orientali ad occidentalem deberent cis primarium tranſire, quidam trans eum.

Secundo. Si orbita alicujus ſatellitis eſſet reſpectu ſolis tota trans primarium, ſatelles nunquam poſſet per diſcum illius tranſire; & ſi eſſet tota cis primarium, ſatelles nunquam foret ſub diſco.

635. Duplex igitur conjunctio cum primario contingit in revolutione ſatellitis; altera reſpectu ſolis trans primarium in tranſitu a digreſſione occidentali ad orientalem, diciturque *conjunctio ſuperior*; altera cis eum in tranſitu a digreſſione orientali ad occidentalem, eſtque *conjunctio inferior.* Vocatur etiam *ſemicirculus ſuperior* ſatellitis ea pars orbitæ, intra puncta digreſſionis orientalis & occidentalis maximæ comprehenſa, in qua fit conjunctio ſuperior; & *ſemicirculus inferior* pars altera, in qua fit conjunctio inferior.

Tertio. Si plana orbitarum ſatellitum eſſent parallela ad planum orbitæ planetæ primarii, producta tranſirent per ſolem, cum planum orbitæ cujusvis primarii per eum tranſeat: & hinc omnes ſatellites viderentur ſemper moveri in linea recta juxta diametrum planetæ (581), in qua a plano orbitæ ſuæ ſecatur: adeoque nunquam ſupra vel infra centrum ſui primarii tranſirent, quando cum eodem ſunt in conjunctione.

636. Illud quoque ex hoc phænomeno ſequitur, quod ſi planetæ, eorumque ſatellites, aliud non habeant lumen, niſi quod a ſole participant, quando ſatelles ante diſcum ſui primarii in conjunctione inferiore tranſit, debeat illis planeticolis ſolem obtegere, qui infra ejus ſemitam habitant, ſeu, quod eſt idem, ejusmodi planeticolæ in ejus umbram incurrere debeant; unde horum reſpectu tunc *eclipſis ſolis* erit. Dum autem in conjunctione ſuperiore infra

discum primarii transit, satelles in ejus umbram immergi debeat, ac tamdiu luce solari destitui, oculisque eripi, quamdiu in illa umbra manet. Quare tunc incolis primarii continget *eclipsis satellitis*, seu *lunæ*.

637. *Phænomenon* III. *Semitæ singulorum satellitum, si ad centrum sui primarii referantur, quandoque totæ apparent rectilineæ, per centrum transeuntes, ac ad orbitam illius certa ratione inclinatæ. Paullo post in ellipses abeunt, quæ magis ac magis sese pandunt, axibus ad parallelismum cum plano orbitæ vergentibus, itaque apparent per quartam revolutionis annuæ primarii partem, post quam conjunctiones superiores fiunt ex parte boreali centri primarii, & conjunctiones inferiores ad meridiem respectu ejusdem: post hæc durante altera quarta revolutionis parte ellipses contrahuntur, earum axes contrariam priori inclinationem acquirunt, satellites in conjunctionibus propius ad centrum transeunt, ita ut tandem ellipses in lineas rectas videantur mutatæ, eadem quantitate, sed in partem oppositam priori, inclinatæ. Tum per sequentem revolutionis annuæ quadrantem sese rursus in formam ellipticam explicant; conjunctiones superiores ad meridiem centri, inferiores ad boream contingunt. Denique ultimo revolutionis quadrante latitudo ellipseos minuitur, omniaque ad pristinum situm restituuntur, primario ad idem orbitæ suæ punctum redeunte. Hinc tamen excipi debet luna, cujus orbitæ phases post octoginta & sex dies semper mutantur, hoc est, intervallo quinque fere diebus minore, quam sit quadrans revolutionis annuæ telluris, ita ut lunæ orbita, jam secundo fiat rectilinea, dum terra adhuc 19°, 20′ percurrere debet, ut revolutionem integram absolvat.*

638. Causa hujus phænomeni est obliquitas planorum orbitarum satellitum ad planum orbitæ eorum primarii. Ex quo infertur, vias satellitum eadem accurate debere habere phænomena cum semitis macularum planetarum, adeoque easdem deducendas esse sequelas. Sic

639. *Primo.* Dum via satellitis apparet rectilinea, oculus observatoris, consequenter sol, debet esse (601) in plano illius orbitæ; & quia sol semper est in plano orbitæ primarii (25), sequitur, solem tunc esse in linea communis intersectionis utriusque plani. Est autem (242) sol semper in puncto diametraliter oppositio loco primarii: itaque via, quam satelles describit, e sole visa est rectilinea, & per centrum primarii transit, dum primarius est in linea intersectionis plani suæ orbitæ cum plano orbitæ satellitis.

640. Recta, in qua planum orbitæ satellitis secat planum orbitæ primarii, dicitur *linea nodorum; & nodus ascendens satellitis* est illud punctum, ultra quod conjunctiones superiores incipiunt fieri ad partem borealem centri primarii; *nodus* vero *descendens* est illud, ultra quod conjunctiones superiores incipiunt fieri ad partem meridionalem centri primarii.

641.

641. *Secundo.* Inclinatio harum rectarum indicat inclinationem plani orbitæ cujusvis ſatellitis ad planum orbitæ primarii (605).

642. *Tertio.* Omnes ejusdem primarii ſatellites eſſe in eodem plano, & habere nodum eundem, colligitur, ſi eorum orbitæ omnes ſimul appareant rectilineæ, & per centrum tranſeant, eandemque habeant inclinationem. Ex oppoſito, plana eorum, nodos, & inclinationem eſſe diverſa, infertur tum ex diverſa inclinatione viarum rectilinearum, tum ex diverſitate locorum, in quibus eſt primarius, quando ſatellitum orbitæ fiunt rectilineæ.

643. Atque hac ratione determinari poteſt inclinatio viæ rectilineæ, quam luna deſcribere videtur, ad planum eclipticæ, 5°, 9′ fere, qui angulus inclinationem orbitæ lunæ ad eclipticam menſurat: item retrogradatio annua nodorum lunæ 19°, 20′; nam dum terra ſuam revolutionem abſolvit, 19°, 20′ abeſt ab illo puncto, in quo via lunæ e ſole viſa ab initio revolutionis apparebat rectilinea.

Similiter invenitur, quod nodus aſcendens quinque ſatellitum Saturni ſit circa 20° ♒, numerationis initio a prima ſtella arietis facto, quoniam viæ omnium horum ſatellitum videntur rectilineæ, Saturno in 20° ♒ exiſtente; item quod plana orbitarum primorum quatuor inclinentur ad planum orbitæ ♄ circiter 30°; quinti vero fere 15°: ita, ut a 20° ♒ usque ad 20° ♌ conjunctiones ſuperiores fiant ad boream reſpectu centri Saturni. Pariter reperitur nodus aſcendens ſatellitum Jovis in 15° ♑; inclinatio eorum orbitarum circiter 2°, 55′. Denique hinc eruitur, nodos & inclinationem in his eſſe fere conſtantem, cum eædem phaſes redeant, dum Saturnus & Jupiter in iisdem circiter ſuarum orbitarum punctis verſantur.

644. Obſerva. In explicatione phyſica Theoriæ Lunæ patebit (Sect. VI. Cap. I. Art. VI.) lineam nodorum ſatellitum non poſſe eſſe immobilem, nec inclinationem conſtantem. Hinc etiam inæqualitates notabiles deprehenſæ ſunt, qua de re conſuli poſſunt, quæ in monumentis Acad. Reg. ſcient. diverſis locis a DD. Maraldi ſunt annotata.

645. *Quarto.* Si orbita ſatellitis circa ſuum primarium ſit valde arcta, eiusque planum exiguam inclinationem habeat ad planum orbitæ primarii, in omnibus conjunctionibus inferioribus ſatelles alicui parti ſuperficiei primarii ſolem occultat, atque illius aſpectum iis locis eripit ſucceſſive, per quæ umbra ab eo projecta tranſit, unde his locis tum *eclipſis ſolaris* fiet. In omnibus autem conjunctionibus ſuperioribus idem ſatelles umbram primarii trajicere debet, ac eclipſin pati.

646. *Quinto.* At ſi vel exiguam inclinationem habeat ſatellitis orbita, ſi magna admodum ſit, ut quarti & quinti ſatellitis Saturni; quarti item ſatellitis Jovis, & Lunæ, in conjunctionibus, quæ lon-

longe a nodis fiunt, dum orbita apparet ellipſis tam lata, ut ejus diameter minor diametrum primarii excedat, in conjunctionibus, inquam, inferioribus ſatelles nullam primarii partem ſoli obtegit, adeoque nulla tunc eſſe poteſt eclipſis ſolaris: & in conjunctionibus ſuperioribus primarius radios ſolares, quo minus ad ſatellitem pertingant, non impedit; hinc nulla eclipſis ſatellitis, ſeu lunaris fit: itaque *eclipſes non contingunt, niſi dum ſyzygiæ prope nodos orbium ſatellitum fiunt.*

647. Igitur planeta primario in ipſo nodo momento conjunctionis inferioris exiſtente, in eclipſi ſolari umbra ſatellitis per medium diſci primarii tranſit; & in conjunctione ſuperiore ſatelles per axem coni umbroſi a primario projecti tranſit.

648. Quo primarius longius a nodo abeſt, eo remotius a centro umbra ſatellitis per diſcum illuminatum in conjunctionibus inferioribus tranſit; eo etiam remotius a centro umbræ ſatelles in conjunctionibus ſuperioribus tranſit.

649. Dum planeta primarius jam prope puncta illa ſuæ orbitæ attingit (attamen adhuc intra illa exiſtit) in quibus ſi verſetur, ſatellites remotiores non amplius patiuntur eclipſin (dicuntur ea puncta *limites ecliptici*), non niſi pars ſatellitis in conjunctionibus inferioribus aliquantum ex ſuperficie primarii ſoli obtegit; & in conjunctionibus ſuperioribus pars tantum ſatellitis in umbram primarii immergitur, eoque minor, quo primarius limitibus vicinior eſt. Ejusmodi eclipſes vocantur *partiales*; aliæ *totales*. Igitur *eclipſes, quæ fiunt prope nodos, ſunt totales; quæ contingunt prope limites (attamen intra eos) partiales ſunt.*

650. Illud quoque manifeſtum eſt, quod in conjunctionibus inferioribus eclipticis ſolis aſpectus non eripiatur niſi illis locis ſuperficiei primarii, quæ ſunt in ipſa ſemita umbræ ſatellitis: igitur ſi planeta primarius reſpectu ſatellitis habeat magnitudinem non ita modicam, ejus incolæ ab interſectione cum eclipticæ plano remotiores, non habebunt eclipſin ſolarem, niſi quando ſatelles aliquantum diſtat a plano eclipticæ ſui primarii verſus illam partem, in qua ipſi habitant: & tunc illi, qui exiſtunt ex altera eclipticæ parte, non videbunt hanc eclipſin. Hinc *reſpectu incolarum planetæ circa ejus polos habitantium, eclipſis ſolaris non contingit, niſi ſatelles habeat aliquam latitudinem ejusdem nominis cum elevatione poli horum incolarum.* Atque ideo Pariſiis, ubi altitudo poli Borealis eſt 48°, 51′, eclipſes ſolis non ſunt notabiles, niſi luna in conjunctione habeat latitudinem borealem 30, vel 40 minutorum.

651. Ex oppoſito in conjunctionibus ſuperioribus, dum ſatelles in umbram immergitur, ejus lux deficit, e quacunque mundi plaga ſpectetur. Unde fieri nequit, ut ſatelles reſpectu quorundam patia-

patiatur eclipſin, non item reſpectu aliorum. Itaque dici poſſunt *eclipſes lunæ vel ſatellitum univerſales; ſolares vero tantum reſpectu aliquorum planetæ primarii incolarum fieri.*

652. In eclipſibus ſolaribus fieri poteſt, ut ſatelles e ſuo primario viſus non appareat tam magnus, ut ſpectatori totum ſolem tegat, ſed ſolummodo partem ejus circa centrum, limbis adhuc viſibilibus, & undique annulum lucidum efformantibus. Hujus generis eclipſis dicitur *eclipſis annularis.* Verum quando ſatelles ita magnus videtur, ut totum ſolem Planeticolis cooperiat, eclipſis ſimpliciter *totalis* appellatur.

653. Denique cum eclipſis ſolaris ſolum ex ſucceſſiva interpoſitione ſatellitis inter ſolem & planetam primarium oriatur, qua tractus quidam umbræ ſatellitis efficitur ſucceſſive per diverſa ſuperficiei primarii loca traſiens; facile intelligitur *primo*, eclipſin tunc incipere alicui ſpectatori, quando ſatelles motu ſuo adeo propinquus factus eſt loco ſolis apparenti, ut diſtantia centri ſatellitis a centro ſolis videatur æqualis ſummæ angulorum, ſub quibus ſemidiametri ſatellitis & ſolis eidem ſpectatori apparent; finiri autem tunc, quando centrum ſatellitis ad eandem diſtantiam a centro ſolis iterum receſſit. *Secundo*, ſpectatori in certo ſuperficiei Planetæ loco poſito tum primo videri eclipſin initium ſumere, quando alteri alio in loco ſito jam ejus medium eſt; imo finiri alicubi, dum alibi nondum incipit. *Tertio*, Planeticolas ad limbos interiores umbræ poſitos non niſi momento habere eclipſin totalem, dum alii profundius umbræ immerſi longiore tempore totalem habent. *Quarto*, Eos vero, qui ad limbum umbræ externum ſunt collocati, partem ſolummodo ſolis obſcuratam videre, eo quidem minorem, quo longius ab umbræ limite ſunt remoti, quippe quibus pars tantum ſatellitis ſolis aſpectum impedit, ita ut in certa a limbo umbræ diſtantia nulla prorſus eclipſis videatur. Atque hac ratione eadem eclipſis ſolaris poteſt eſſe totalis in certa Planetæ regione, partialis in altera: hic quidem obſcurari poteſt pars diſci ſolaris ſeptentrionalis, illic auſtralis.

654. At vero in eclipſibus ſatellitum, ut ſatelles umbram ingreditur, partesque illius illuminari ac videri ceſſant; ita omnes, qui ſatellitem ſpectare poſſunt, vident eum tempore eodem eademque quantitate in umbram immergi; totum quidem, ſi eclipſis ſit totalis; partem, ſi ſit partialis. Univerſim, duo quivis ſpectatores nullam diverſitatem in phaſibus eclipſeos lunæ, aut ſatellitis obſervare poſſunt, quibuscunque in locis ſint poſiti, modo ſatelles utrique ſit viſibilis.

655. Hinc deducitur, obſervationes temporum, quibus eædem phaſes in eclipſibus ſatellitum contingunt, peculiarem uſum habere in determinatione immediata differentiæ meridianorum locorum duorum, in quibus obſervationes ſunt factæ: ſed tempora obſervata in phaſibus eclipſium ſolarium eam differentiam non oſtendunt, niſi debitæ prius reductiones fiant: id, quod in ſequentibus uberius explicabitur.

656. Illud hic obſervandum, propagationem luminis, quæ non fit inſtantanee, efficere, ut eadem phaſis eclipſeos e diverſis univerſi locis ſpectata eo tardius videatur contingere, quo oculus obſervatoris a planeta vel ejus ſatellite eſt remotior. Reipſa advertitur, ceteris omnibus paribus, eclipſes ſatellitum Jovis in ſuperficie telluris obſervatas fieri 8 circiter minutis temporis tardius, dum Jupiter eſt prope quadraturas ſuas cum ſole, quam dum eſt in oppoſitione. Jam vero planeta, dum prope quadraturas eſt, reſpectu terræ fere tantundem ab ea diſtat quantum [illegible], quando autem eſt in oppoſitione, telluri vicinior eſt, quam ſoli, toto intervallo diſtantiæ terræ a ſole: unde concluditur, juxta obſervationes lumen indigere 8′, ut hanc diſtantiam percurrat, adeoque ſi ejus motus ſit æquabilis, radios e ſole exeuntes non niſi poſt 8′ circiter ad terram pertingere. Verum quia luna plus tercenties vicinior telluri, quam ſol, lumen non opus habet, niſi 2″ temporis, ut ab ea ad terram propagetur: hinc motus luminis in uſu obſervationum lunæ non attenditur.

657. *Phænomenon* IV. *Si motus ſatellitum referantur ad ſtellas fixas, & non ad centrum primarii; tres priores ſatellites Saturni, & primus Jovis, ſunt* Primo *ſtationarii, ſeu quodammodo immoti aliquo tempore in duobus locis orbitæ, nempe ante digreſſionem occidentalem, & poſt digreſſionem orientalem.* Secundo *directi ſunt, ſeu ſecundum ordinem ſignorum Zodiaci progrediuntur, poſt ſtationem occidentalem, usque ad ſtationem orientalem.* Tertio *fiunt retrogradi, ſeu moventur contra ſignorum ordinem, poſt ſtationem orientalem usque ad ſtationem occidentalem.* Quarto *quando hi planetæ ſecundarii ſunt in ſuis digreſſionibus, nec tardius, nec celerius, quam eorum primarii, moventur; ſed eorum velocitas augetur poſt locum alterum ſtationis usque ad proximam conjunctionem; inde vero retardatur usque ad punctum ſtationis ſequentis.* Quinto *longiore tempore indigent, ut a digreſſione occidentali veniant ad digreſſionem orientalem, quam ut ab hac ad illam pertingant, quamvis eorum velocitas major ſit in conjunctione ſuperiore, quam in inferiore.*

658. *Sed luna, quartus & quintus ſatelles Saturni; ſecundus, tertius & quartus Jovis ſemper ſunt directi, nunquam ſtationarii: in ſuis digreſſionibus eandem accurate habent velocitatem, quam eorum primarii, quemadmodum & reliqui; verum poſtea in tranſitu a digreſſione occidentali ad conjunctionem ſuperiorem, motum accelerant, tranſeuntque ultra primarium ad orientem: poſt conjunctionem ſuperiorem, velocitas eorum iterum minuitur, ita ut in digreſſione orientali æquetur velocitati primarii. Poſt hæc velocitas ita pergit minui, ut primarius motu ſuo ultra hos ſatellites in eorum conjunctione inferiore tranſeat, eosdemque poſt ſe ad occidentem relinquat. Hac peracta conjunctione celeritas ſatellitum augetur, fitque in digreſſione occidentali velocitati primarii æqualis, itaque deinceps easdem variationes apparentes continuat.*

659.

659. Quamvis omnia iſta phænomena facile ex Theoria motus relativi & epicycloidum explicari poſſint, uti eam motui apparenti planetarum e terra viſo ſuperius applicuimus; oſtendemus tamen, quomodo independenter ab hac theoria exponi queant.

660. Manifeſtum eſt, tria eſſe, quæ motui alicujus ſatellitis apparenti, dum ad ſtellam fixam quampiam refertur, varietatem inducunt, *primo* velocitatem realem ſatellitis. *Secundo* ejus directionem ad ſpectatorem relatam. *Tertio* velocitatem ipſius planetæ primarii, orbitam ſatellitis ſecum abripientis, adeoque ipſum etiam ſatellitem directione ſui motus.

661. Velocitas vera ſatellitum ad ſenſum æquabilis eſt, utpote in orbitis fere circularibus motorum: ſupponamus talem quoque eſſe velocitatem primarii: inæqualitates enim motus proprii Saturni, Jovis, & terræ, tantæ non ſunt, ut tam magnas variationes in his phænomenis efficere poſſent: ſupponamus præterea, S (Fig. 91) eſſe locum ſolis, I locum planetæ primarii in ſua orbita directione IK progredientis. ODBG ſit orbita ſatellitis. Ducatur ex S per I recta SO, quæ punctum O, in quo fit conjunctio ſuperior, determinabit, uti etiam punctum C conjunctionis inferioris. Denique ſi rectæ SD, SG tangant orbitam, deſignabit punctum D digreſſionem orientalem, & G digreſſionem occidentalem.

662. *Primo.* Dum ſatelles eſt in ſua conjunctione ſuperiore ad O, cum ejus directio OA ſit ad radium SO perpendicularis, ſeu, quod idem eſt, parallela, & verſus eandem partem cum directione primarii, ſatelles, ſi ad punctum fixum referatur, videtur moveri velocitate æquali ſummæ velocitatis veræ propriæ & velocitatis veræ primarii: igitur velocitas & motus apparens ſatellitis eſt tunc omnium maximus, & directus.

663. *Secundo.* Quando ſatelles verſatur in P, inter conjunctionem ſuperiorem, & digreſſionem orientalem, cum ejus directio PQ ſit ad radium SP obliqua, conſequenter etiam ad directionem primarii IK; oculus in S conſtitutus nequit ejus velocitatem talem videre, qualis in ſe eſt; ſed ſolummodo apparet ei ut PT, adeoque minor, quam reipſa ſit: unde tunc ſatellitis motus videtur directus etiamnum, & æqualis ſummæ ex PT, & motu vero primarii. Atque adeo in tranſitu a conjunctione ſuperiore ad digreſſionem orientalem ſatelles apparet directus, ſed ejus velocitas magis, ac magis ſemper decreſcit, cum ejus motus directio ſemper fiat magis obliqua reſpectu oculi obſervatoris.

664. *Tertio.* Quando ſatelles ad digreſſionem orientalem in D pervenit, quoniam ejus directio DR cum radio SD coincidit, debet videri nec ſecundum ordinem ſignorum IK, nec contra hunc

ordinem IM moveri; ſed quemadmodum in eodem radio SD perſtat, ita absque omni motu appareret, niſi motu primarii abriperetur. Igitur ſatelles in digreſſione orientali eſt directus, & ejus celeritas eſt accurate æqualis celeritati primarii.

665. *Quinto.* Poſt digreſſionem orientalem cum ſatelles ad H pervenit, ejus motus veri directio HF eſt contra ſignorum ordinem; ſed quia ad radium SH obliqua eſt, ejus velocitas tantum apparet ut HN: & hic quidem triplex poteſt eſſe caſus: nam vel HN eſt minor, quam velocitas vera primarii ſecundum ſignorum ordinem; & tunc exceſſu velocitatis veræ primarii ſupra velocitatem apparentem HN ſatelles abripitur a primario ſecundum ordinem ſignorum; vel HN eſt æqualis velocitati primarii ſecundum ordinem ſignorum; & tunc duabus his velocitatibus ſeſe deſtruentibus ſatelles videtur ſine motu, & ſtationarius. Vel denique HN major eſt velocitate vera primarii; & tunc ſatelles videtur retrogradus velocitate æquali exceſſui HN ſupra velocitatem veram primarii. Et quoniam directio motus ſatellitis ſemper minus obliqua fit ad radium e ſole ductum, ita ut tandem in loco conjunctionis inferioris C ſit ad eum normalis, conſequens eſt, ut in tranſitu a digreſſione orientali uſque ad conjunctionem inferiorem ſatellitis celeritas contra ſignorum ordinem augeatur, ejusque motus componatur ex differentia velocitatis veræ primarii, & velocitate apparente ſatellitis. Ergo in tranſitu a digreſſione orientali ad conjunctionem inferiorem, ſatelles videbitur ſtationarius, poſtea retrogradus celeritate creſcente, ſi ejus velocitas apparens contra ſignorum ordinem poſſit primo quidem æquare, deinde vero ſuperare velocitatem veram primarii, id, quod contingit in primo, ſecundo, & tertio ♄, & primo ſatellite ♃; verum ſi ſatellitis velocitas apparens contra ſignorum ordinem nequeat æquare velocitatem veram primarii ſecundum ordinem ſignorum progredientis, ſatelles nec ſtationarius, nec retrogradus apparebit, ſed ſolum ejus velocitas videbitur minui: & hoc evenit lunæ, ſecundo, tertio & quarto ſatelliti ♃, item quarto & quinto ♄.

666. *Quinto.* In conjunctione inferiore ad C, cum ſatellitis directio CB contra ſignorum ordinem tota viſui exponatur, differentia ejus a velocitate vera primarii erit hic omnium maxima. Itaque in conjunctione inferiore vel ſatellitis retrogradi velocitas eſt maxima omnium, quas toto retrogradationis tempore habet; vel vero ſi ſatelles ſemper manet directus, eſt omnium minima ſecundum ſignorum ordinem.

667. *Sexto.* In tranſitu a conjunctione inferiore ad digreſſionem occidentalem in G, directio motus veri & retrogradi ſatellitis, fit

ſem-

ſemper magis obliqua ad oculum obſervatoris, & hinc is ſemper magis retardari videtur: igitur differentia inter velocitatem apparentem ſatellitis, & velocitatem veram primarii ſemper creſcit: & hinc ſi ſatelles in conjunctione inferiore fuit retrogradus, ejus velocitas contra ſignorum ordinem decreſcit, ut primo fiat ſtationarius, poſtea directus; aut ſi in conjunctione inferiore non fuit retrogradus, ejus velocitas apparens ſecundum ordinem ſignorum ſemper magis creſcit.

668. *Septimo.* In digreſſione occidentali G manifeſtum eſt, apparentem velocitatem ſatellitis æqualem eſſe velocitati veræ primarii, quemadmodum in digreſſione orientali D.

669. *Octavo.* In tranſitu a digreſſione occidentali ad conjunctionem ſuperiorem, directio motus veri ſatellitis eſt ſecundum ſignorum ordinem, ſemperque minus obliqua fit ad obſervatoris oculum: unde hic ejus velocitas addenda eſt volocitati primarii, & ſumma utriusque ſemper creſcit usque ad conjunctionem ſuperiorem in O.

670. Ex his facile quoque apparet *primo*, cur velocitas ſatellitis retrogradi in conjunctione inferiore ſit minor velocitate in conjunctione ſuperiore, dum ſecundum ordinem ſignorum movetur; illa enim eſt differentia velocitatum verarum ſatellitis & primarii; hæc vero earundem ſumma. *Secundo* cur ſatelles longiore tempore indigeat, ut a digreſſione occidentali veniat ad digreſſionem orientalem, quam ut ab orientali ad occidentalem redeat: nam radii tangentes SE, SG nequeunt dimidiam orbitam ſatellitis intercipere, ſed tantum ejus partem DCB; alias enim inter ſe paralleli eſſe deberent, adeoque orbita ſatellitis ad infinitam a ſole diſtantiam remota. Hinc autem ſequitur, quod quo orbita alicujus ſatellitis minor fuerit, ac magis a ſole remota, eo tempus, quo inferior ſemicirculus deſcribitur, propius accedat ad æqualitatem cum tempore, quo ſemicirculus ſuperior percurritur, & ex oppoſito.

671. Verum ut inveniantur velocitates veræ ſatellitum, earumque ad velocitatem primarii ratio, ex digreſſionibus determinanda eſt ratio radii orbitæ eorum ad radium orbitæ primarii, nec non temporis revolutionis ad tempus revolutionis primarii. Etenim manifeſtum eſt, velocitatem alicujus corporis in orbita revoluti eo eſſe majorem, quo ejus orbita, vel orbitæ radius, major eſt, & ſimul quo tempus revolutionis eſt brevius; ut adeo *velocitates veræ planetarum ſint in ratione compoſita ex directa radiorum orbitarum, quas deſcribunt, & reciproca temporum periodicorum.*

672. Ut habeatur ratio radii orbitæ ſatellitis ad radium orbitæ primarii, inveniri debet, quoties radius orbitæ primarii contineat

ſemidiametrum ipſius primarii, atque is numerus, qui hoc indicat, per quantitatem digreſſionis ſatellitis dividi. In exemplo, cum ſemidiameter Jovis ſit $18''\frac{1}{2}$ (vide Tabulam N. 170), ſi quæratur in triangulo rectangulo, cujus cathetus minor eſt = 1, & angulus ei oppoſitus = $18''\frac{1}{2}$, cathetus major, ea reperietur = 11151; itaque radius orbitæ 4 continet 11151 ſemidiametros 4; & ſi 11151 dividatur per digreſſionem primi ſatellitis Jovis $5\frac{2}{3}$, quotus fit 1964, hinc orbita Jovis eſt ad orbitam primi ſatellitis ut 1964 ad 1.

673. Similiter, ut obtineatur ratio temporis periodici ſatellitis ad tempus periodicum primarii, tempus revolutionis primarii dividendum eſt per tempus revolutionis ſatellitis. Atque ita ſequens tabula conſtruetur.

	Ratio radii orbitæ primarii ad radium orbitæ cujusvis ſatellitis.	*Ratio temporis periodici primarii ad tempus periodicum cujusvis ſatellitis.*	*Ratio velocitatis veræ ſatellitis cujusque ad velocitatem veram primarii.*
Saturni	1 ut 2905 ad 1 - - - - ut 5702 ad 1 - - - - ut 5702 ad 2905.		
	2 - - 2292 - - 1 - - - - - - 3932 - - 1 - - - - - - 3932 - - 2292.		
	3 - - 1719 - - 1 - - - - - - 2382 - - 1 - - - - - - 2382 - - 1719.		
	4 - - 717 - - 1 - - - - - - 675 - - 1 - - - - - - 675 - - 717.		
	5 - - 238 - - 1 - - - - - - 135 - - 1 - - - - - - 135 - - 238.		
Jovis	1 ut 1964 ad 1 - - - - ut 2449 ad 1 - - - - ut 2449 ad 1964.		
	2 - - 1236 - - 1 - - - - - - 1220 - - 1 - - - - - - 1220 - - 1236.		
	3 - - 778 - - 1 - - - - - - 606 - - 1 - - - - - - 606 - - 778.		
	4 - - 443 - - 1 - - - - - - 260 - - 1 - - - - - - 260 - - 443.		
Lunæ	- - - ut 320 ad 1 - - - - ut $12\frac{1}{3}$ ad 1 - - - - ut $12\frac{1}{3}$ ad 320.		

674. Ex hac tabula colligitur, primos tres Saturni ſatellites, & primum Jovis, cum velocitatem veram habeant majorem, quam eorum primarii, debere videri retrogrados in conjunctione inferiore, reliquos perpetuo directos: item ſecundum ſatellitem Jovis cujus velocitas vera eſt prope æqualis velocitati primarii, fere ſtationarium debere eſſe in ſua conjunctione inferiore.

675. Denique univerſim liquet, cujusvis ſatellitis motum e ſole viſum eſſe compoſitum e motu illius proprio, & motu primarii; & hinc in ſatellitibus duplex revolutionum genus attendendum eſſe, nempe inprimis revolutionem *periodicam*, ſeu tempus, quo ſatelles e ſuo primario ſpectatus 360 gradus percurrit; deinde revolutionem *ſynodicam*, quæ eſt tempus, quo ſatelles ad eandem reſpectu ſolis phaſin revertitur. Manifeſtum autem eſt, revolutionem periodicam excedi a ſynodica toto eo tempore, quo ſatelles in ſua orbita arcum tot graduum deſcribit, quot planeta primarius tempore revolutionis periodicæ ſatellitis confecit.

676.

676. *Phænomenon V. Si tempora coniunctionum ſuperiorum comparentur cum temporibus coniunctionum inferiorum in ſatellitibus Jovis & Saturni, eorum intervalla ad ſenſum æqualia ſunt ſemirevolutionibus ſatellitum. At vero in luna hæc intervalla jam longiora ſunt, jam breviora, quinque vel ſex horis.*

Hoc Phænomenon junctum cum primo, ex quo conſtat, elongationes ſatellitum utrinque eſſe æquales ad ſensum, oſtendit, motum ſatellitum, quantum ſensu percipitur, eſſe æquabilem, orbitasque eorum eſſe circulos, quorum centrum primarius occupat; motum autem lunæ irregularitalibus quibusdam notabilibus eſſe obnoxium, quas deinceps examinabimus.

677. Quod ad cauſam phyſicam motus ſatellitum circa ſuos primarios attinet, ea analoga eſt illi, ob quam ipſi planetæ primarii circa ſolem revolvuntur. Etenim radii vectores ſatellitum verrunt areas temporibus proportionales, cum orbitæ eorum ſint circuli, in quorum centro ſunt primarii: radii quoque orbitarum ſunt ut radices cubicæ quadratorum temporum periodicorum circa primarios, quemadmodum id facili calculo e Tabula N. 631 reperitur. *Credibile igitur eſt, ſatellites moveri circa ſuos primarios motu projectionis cum vi centrali ad planetam primarium tendente compoſito.* In ſectione ſequente videbimus, quid effectum harum duarum virium augeat quandoque, minuatve.

SECTIO SEXTA.

Continens Partem Tertiam Aſtronomiæ Terreſtris;

Sive

Explicationem Theoriæ lunæ e terra viſæ; & hinc ducta analogia, aliorum ſatellitum, ut e ſuis primariis ſpectantur.

CAPUT I.

Theoria motuum lunæ.

678. Quamvis terra ſit id reſpectu lunæ, quod ſol reſpectu terræ, & hinc motus lunæ fere easdem leges ſequatur, ſi ad terram referatur, quas terra reſpectu ſolis; attamen tam variæ in eo animadverſæ ſunt inæqualitates, ut maxima aſtronomorum ſæculi ſuperioris pars putarit, fieri non poſſe, ut eæ omnes ad legem quandam conſtantem revocentur. Atque hinc non niſi poſtquam a Newtono demon-

monſtratum eſt, vera theoriæ ſatellitum elementa dependere a gravitate mutua ſolis, planetæ primarii, & ejus ſatellitis, tabulæ conſtrui cæperunt, calculis motuum lunarium accuratioribus utiles. Nos ea ſolum in particulari diſcutiemus, quæ cauſis phyſicis omnium harum inæqualitatum cognoſcendis ſufficiunt.

ARTICULUS I.

De phaſibus lunæ.

679. Phaſes lunæ dicuntur diverſæ ejus diſci figuræ, quas decurſu lunationis integræ nobis exhibet. Nemo eſt, qui ignoret, die conjunctionis lunæ cum ſole, quæ *novilunium*, ſive *luna nova* appellatur, ejus diſcum in cælo non videri; die ſequenti cornuta facie apparere, convexitate ſemper ſoli obverſa, atque deinceps cavitatem ſemper minui uſque ad oppoſitionem cum ſole, ſive *plenilunium*, ſeu *lunam plenam*, qua diſcum integrum circularem nobis obvertit. Poſt hanc pars lunæ occidentalis videri deſinit, orientalis ſucceſſive fit cornuta, ſemperque tenuior, usque dum ex integro diſpareat: tum easdem ſucceſſive formas reſumit.

680. Cauſa horum phænomenorum in aperto eſt: luna corpus eſt globoſum, nec lucidum, nec diaphanum. Lumen, quo eam videmus, e ſole venit, quemadmodum nec terra aliud recipit, quam ſolare. Ex regulis autem opticis, & natura corporum ſphæricorum, certum eſt

681. I. *A ſole ſenſibiliter non niſi medietatem ſuperficiei lunæ illuſtrari.* Itaque lunæ alterum hemiſphærium ſemper illuminatur, alterum ſemper eſt obſcurum.

682 Et hinc hemiſphærium illuminatum dividitur ab hemiſphærio obſcuro per circulum maximum, cujus planum eſt ſemper perpendiculare ad rectam e ſole ad lunam ductam. Compendii cauſa, hunc circulum vocabimus E.

683. II. *Nequit e globo, niſi dimidia circiter ſuperficies, uno aſpectu videri.*

684 Unde *primo* ex omnibus circulis maximis in ſuperficie globi deſcriptis is ſolus integer videri poteſt, qui terminat hemiſphærium viſibile (ſive, quod idem eſt, cujus planum eſt perpendiculare ad radium ex oculo ad centrum globi ductum); reliquorum vero omnium neceſſe eſt, ut medietas videatur. Circulum hemiſphærium lunæ e ſuperficie telluris viſibile terminantem dicemus V.

685.

685. *Secundo* ſitus plani circuli V reſpectu telluris eſt conſtans, & ſemper figura circulari apparere debet.

686. III. Ex phænomenis phaſium lunæ manifeſtum eſt, hemisphærium illuminatum reſpectu hemisphærii e ſuperficie terræ viſibilis facere revolutionem integram ſingulis lunationibus circa lineam communis interſectionis planorum circulorum E & V, quæ neceſſario (Trig. 7) eſt aliqua diameter globi.

687. Hinc *primo* planum circuli E hemiſphærium illuminatum terminantis ſucceſſive omnes ſitus poſſibiles reſpectu radii ex oculo obſervatoris ad centrum lunæ ducti acquirit: conſequenter figura hujus circuli jam apparet circularis, jam elliptica, alias rectilinea, prout ejus planum ad illum radium vel perpendiculare, vel inclinatum fuerit, vel etiam ſecundum radii longitudinem diſpoſitum.

688. Ex revolutione circuli E circa diametrum circuli V fieri debet, ut pars ſuperficiei lunæ, quæ e terra illuminata appareret, ſemper comprehendatur inter duos ſemicirculos, quorum alter (medietas nempe circuli V) ſemper figura ſemicirculari videtur (685); alter, medietas circuli E, jam ſemielliptica, jam etiam inſtar lineæ rectæ.

689. His ita ſe habentibus, in conjunctione lunæ cum ſole, quando luna accurate inter terram & ſolem exiſtit, circulus E terminans hemiſphærium illuminatum, congruit cum circulo V, hemiſphærium viſibile terminante; ſed quoniam tunc hemiſphærium illuminatum, ſoli directe obverſum, a terra averſum eſt, nulla pars lunæ illuminata videtur.

690. Verum luna in ſua revolutione progrediente, hemiſphærium illuminatum ſucceſſive tranſit in hemiſphærium viſibile; ſemicirculi E & V ſe ad angulos ſphæricos acutos interſecant: & hinc aliquo poſt novilunium tempore ſpatium quoddam exiguum illuminatum, quod inter ſemicirculum occidentalem V, & ſemicirculum E comprehenditur, videri debet. Semicirculus ille E tunc apparet ellipticus, ſed ab initio parum a figura ſemicirculi differt, cum nondum longe a ſitu perpendiculari ad radium e terra ad lunam ductum ejus planum receſſit: convexitas porro hujus ellipſis obvertitur cavitati ſemicirculi V, & hinc luna cornuta apparet: apices utriusque cornu, qui ſunt vertices angulorum ſphæricorum, ſunt puncta extrema diametri lunæ, circa quam circulus E gyratur.

691. Quando circulus E ulterius ſemper in hemiſphærio viſibili progreditur, & ad apices utriusque cornu angulos majores efficit, ejus planum ſemper magis ad radium e terra ad lunam ductum inclinatur, ideoque ejus media pars ſemiellipſis videtur, quæ

ſemper magis contrahitur usque ad quadrantem revolutionis, ubi planum circuli E fit perpendiculare ad planum circuli V, atque adeo ſecundum longitudinem radii e terra ad lunam ducti porrigitur, ut ſemiellipſis jam in lineam rectam abeat, figura autem partis lunæ illuminatæ ſit ſemicirculus, ſemiperipheria diſci & diametro terminatus. Hæc lunæ phaſis dicitur *primus quadrans*, vel *quadratura prima*.

692. Continuante porro motum ſuum in hemisphærio viſibili ſemicirculo E, & cum ſemicirculo V angulos magis & magis obtuſos efficiente, ſemiellipſis (qua figura nempe ſemicirculus E videtur) convexitatem ſuam in partem oppoſitam medietati occidentali circuli V vertit: hinc magis ſemper, magisque ſe pandit, & parti illuminatæ lunæ figuram tribuit ſemper propius ad circulum integrum accedentem, quem quidem refert denique luna in oppoſitione cum ſole, quando planum circuli E fit ad radium e terra ad lunam ductum perpendiculare, totusque hic circulus videtur, & cum circulo V coincidit. Hæc phaſis lunæ *plenilunium* vocatur; & tunc circulus E æque dimidiam revolutionem abſolvit, ac ipſa luna.

693. Denique circulo E alteram ſemirevolutionem peragente eædem figuræ redeunt. Semicirculus E, qui cum ſemicirculo orientali V partem lunæ illuminatam comprehendit, fit denuo ſemiellipſis, primo quidem ſemicirculo admodum vicina, poſtea ſemper arctior, donec inſtar lineæ rectæ appareat, quod poſt tres revolutionis quadrantes contingit, diciturque ea phaſis, *ultimus lunæ quadrans*, vel *altera quadratura*. Poſt hanc phaſin ellipſis ſemper magis panditur, convexitate cavitati ſemicirculi V obverſa: diſparet denique, dum, luna nova, cum circulo V congruit.

ARTICULUS II.

Enumerantur præcipua elementa theoriæ motuum lunæ, ex obſervationibus Aſtronomicis deducta.

Antequam explicationem theoriæ phyſicæ lunæ aggrediamur, neceſſarium duximus, ut ſequentia, apud omnes recepta Aſtronomos, utpote non ex ratiocinio quodam phyſico, ſed ex ipſis deducta obſervationibus, tanquam certa conſtituamus.

694. I. Luna revolutionem integram reſpectu fixarum abſolvit intra 27 d. 7 h. 43′, 12″; reſpectu autem primi puncti ♈, intra 27 d. 7 h. 43′, 5″; atque hæc dicitur *revolutio periodica*: reſpectu ſolis

lis *revolutio ſynodica* fit 29 d. 12 h. 44′, 3″; reſpectu alicujus nodi ſui, 27 d. 5 h. 5′, 35″: & reſpectu ſui apogæi, 27 d. 13 h. 18′, 34″, quæ *revolutio anomaliſtica* appellatur.

696. II. Linea apſidum lunæ facit revolutionem integram reſpectu primi puncti ♈ intra 8 annos, 309 dies, 8 horas, 20 minuta.

696. III. Linea nodorum lunæ habet motum retrogradum, & revolutionem integram reſpectu primi puncti arietis abſolvit 18 an. 224 d. 5 h.

697. IV. Motus lunæ in ſyzygiis eſt admodum regularis, ſcilicet in noviluniis & pleniluniis; verum alias inæqualitatibus valde mutabilibus eſt obnoxius, quarum termini partim ſunt in quadraturis, partim in punctis orbitæ inter ſyzygias & quadraturas mediis, quæ *octantes lunæ* vocantur.

698. *Primam quadraturam* dicemus illam, ad quam luna in tranſitu a conjunctione ad oppoſitionem venit; *ſecundam quadraturam* vero eam, ad quam venit, dum ab oppoſitione ad conjunctionem tendit.

699 V. Orbita lunæ inclinatur ad planum eclipticæ ſub angulo mutabili a 5° uſque ad 5°, 18′.

700. VI. Diſtantia lunæ a terra, ex ejus parallaxi deducta, quando eſt maxima, eſt $64\frac{2}{3}$ ſemidiametrorum terræ; & dum eſt minima, $55\frac{3}{4}$: ita, ut diſtantia media ſit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium. Continet vero ſemidiameter terræ, ſecundum menſuras ab aſtronomis acceptas, pedes 19611500; conſequenter diſtantia lunæ media a centro terræ eſt circiter 1180612300 pedum.

701. VII. Luna eſt fere tercentis viginti vicibus vicinior terræ, quam ſol. Eſt enim (429) diſtantia ſolis a terra 19230 ſemidiametrorum terreſtrium.

702. VIII. Luna eſt ſaltem quinquageſies minor tellure: nam ſecundum obſervationes, diameter vera lunæ eſt ad diametrum terræ ut 3 ad $11\frac{1}{7}$; conſequenter ſoliditas, ſeu volumen (Elem. 718) ad ſoliditatem ut 27 ad 1384, ſeu ut 1 ad $51\frac{1}{4}$. At enim certum non eſt, per hanc rationem exprimi rationem maſſarum lunæ & terræ, cum incertum ſit, an utraque ex eadem conſtet materia, aut an utriusque ſit eadem denſitas.

703. IX. Luna circa axem ſuum rotatur intra 27 d. 7 h. 43′, 5″, hoc eſt, tempore revolutionis periodicæ; quod ex eo deducitur, quod luna ſemper eandem nobis faciem obvertat. Etenim manifeſtum eſt, quod ſi objectum quodpiam circa alterum moveatur, illudque alterum eadem ſui parte ſemper reſpiciat, ſimul circa axem ſuum vertatur, ea proportione, qua alterum circuit. Quisque hujus rei in ſe ipſo experimentum capere poteſt.

704. X. Maculæ lunæ videntur ſingulis revolutionibus motum quemdam particularem reſpectu centri ſui habere. Videntur enim tam in longitudine, quam in latitudine ad illud accedere; poſtea iterum recedere, ac in priſtinum ſitum redire. Vocatur vero hic motus *libratio lunæ*, quippe qui totum corpus lunare afficit.

ARTICULUS III.

De natura vis centralis lunæ reſpectu terræ; & ducta hinc analogia, de natura vis centralis planetarum reſpectu ſolis.

705. Cum diſtantia media lunæ a terra ſatis accurate ſit cognita, ſcilicet 60. 2 ſemidiametrorum terreſtrium, inveniri poteſt quantitas abſoluta, qua luna per vim centralem a directione motus projectionis ſingulis momentis verſus terram deflectitur. Inito autem calculo reperitur ea talis accurate, qualem exigit gravitas, ſeu vis illa acceleratrix, quam quotidie experimur, quæ corpora omnia noſtratia verſus centrum terræ propellit, dum libere cadentia 15.1 pedes intra primum lapſus ſui minutum ſecundum percurrunt, ſive intra minutum primum 54360 pedes, cum ſit (59) quadratum de 1″ ad quadratum de 60″, ut 15.1. ad 54360.

706. Et certe ſi ſupponatur, quod hæc gravitas ſit eadem cum vi centrali lunæ, cum vis centralis ſemper debeat eſſe in ratione reciproca duplicata diſtantiæ a centro (163), ſequitur, in diſtantia 60.2 ſemidiametrorum hanc fore $\frac{1}{60.2 \times 60.2}$ illius, quam luna in telluris ſuperficie haberet. Unde vis centralis lunam intra unum minutum primum verſus terram retrahet $\frac{54369}{60.2 \times 60.2}$, hoc eſt, 15 ped. accurate.

707. Sit jam LN (fig. 98) arcus orbitæ lunæ in diſtantia media, qui intra unum minutum primum percurritur: erit 32″, 56‴½, cum 360° tempore 27 d. 7 h. 43′, 12″ deſcribantur. Sit terra in centro hujus arcus C, ducantur CL, & CM occurrens in M tangenti LM: patet, MN reſpondere quantitati abſolutæ vis centralis lunæ. Eſt autem MN exceſſus hypotenuſæ CM ſupra latus CL = 1180612300 ped.; eſt item idem MN exceſſus ſinus totius CM ſupra coſinum CL (Elem. 788) anguli LCM = 32″, 56‴½; & juxta tabulas ſinuum hic exceſſus poſterior eſt 0.000000012754, ſinu toto aſſumto pro 1. Igitur eſt ut 1 ad 0.000000012754; ita 1180612300 ad 15 pedes. Ex quo apparet, vim centralem lunæ nil aliud eſſe, quam ejusdem gravitatem in ratione quadrati ſuæ diſtantiæ a centro terræ imminutam.

708.

708. Obſerva. In hoc calculo neglecta fuit gravitas lunæ in ſolem, quæ ejus gravitatem in terram aliquantulum mutat, ut in ſequente Articulo videbimus, verum quæ in quantitatem repertam nullum ſenſibile diſcrimen inducit.

709. Analogia hinc ducta merito infertur, *vim centralem, qua corpus aliquod cæleſte circa alterum tanquam primarium volvitur, non eſſe aliud, quam ejus gravitatem in primarium.*

ARTICULUS IV.

Da cauſis phyſicis, quæ diverſas inæqualitates lunæ in revolutione ſynodica efficiunt.

710. Si luna nullam aliam vim centralem haberet, quam qua ſingulis momentis verſus centrum terræ nititur, de ſe easdem omnino leges in ſuis inæqualitatibus ſequeretur, quas alii planetæ reſpectu ſolis obſervant; hoc eſt, deſcriberet ellipſin regularem & immotam, in cujus foco terra foret, areæque inter radios vectores comprehenſæ rationem temporum accurate ſequerentur. Verum quoniam omnes obſervationes lunæ in eo conſentiunt, quod ejus inæqualitates non ſolum in diverſis anomaliæ gradibus, ſed etiam in diverſis reſpectu ſolis poſitionibus ſint variæ, merito concluditur, *lunam ſimul præditam eſſe vi centrali in ſolem tendente, & in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a ſole variabili.* Sequela hæc ex eo videtur etiam legitima, quod luna, cum ſit corpus ſimilis naturæ, ac terra, nec hac magis a ſole remota, æque in ſolem debeat eſſe gravis. *Itaque diverſæ inæqualitates lunæ producuntur per diverſas mutationes, quas ejus vis centralis in ſolem efficit in vi centrali in terram*, quemadmodum id jam in particulari exequemur.

711. Et ne plures ſimul difficultates complicemus, ſupponamus primum, lunam æquabiliter moveri in circulum circa terram, quæ in ejus centro ſit conſtituta, dum ipſa interea tellus motu æquabili circulum circa ſolem tanquam centrum deſcribit.

Sit (Fig. 94 & 95) luna in quovis puncto L ſuæ orbitæ C R O Q. Ejus motus fit ſecundum ordinem ſignorum directione L R Q. Sit locus terræ T, centrum orbitæ lunæ, S ſit ſol, O C S linea ſyzygiarum, C punctum conjunctionis (Fig. 94) vel oppoſitionis (Fig. 95), R quadratura proxima poſt tranſitum lunæ per C. Ducantur T S, & L S, quarum illa deſignet diſtantiam terræ a ſole, hæc diſtantiam lunæ ab eodem. Evidens eſt, quod propter ſitum lunæ in L ejus niſus verſus ſolem ſit major (Fig. 94), vel minor

(Fig. 95), quam nisus terræ versus eundem, in ratione ST^3 ad SL^3. Unde sequitur, in utroque casu nisum lunæ versus terram imminui. Et quidem de primo casu nullum videtur dubium (Fig. 94); de secundo idem manifestum erit, si cogitetur (Fig. 95), quod excessus vis centralis terræ in solem supra vim centralem lunæ in eundem reddat vim lunæ in terram eadem quantitate inefficacem, sicque terram vi lunæ quodammodo subtrahat.

712. Ut autem determinetur, quomodo, & qua proportione hæc diminutio fiat, ducatur per solem S recta LD, quæ sit ad TS, ut gravitas lunæ in solem ad gravitatem terræ in eundem, seu ut ST^3 ad SL^3; & super LD tanquam diagonali construatur parallelogrammum LGDF, cujus latera LG, DF sint parallela, & æqualia distantiæ ST. Itaque vis centralis lunæ in solem, quæ per LD exhibetur, potest in duas resolvi, alteram per LG designatam, quæ cum æqualis sit, & parallela ad ST, agit eadem directione, & quantitate, ac vis centralis terræ in solem, adeoque nullam in motu lunæ circa terram inæqualitatem producit; & in alteram LF, quæ exprimit eam partem gravitatis lunæ in solem, qua luna magis in solem nititur (Fig. 94) quam terra per suam gravitatem; vel (Fig. 95) repræsentat eam quantitatem, qua excessus gravitatis terræ in solem minuit gravitatem lunæ in terram. Jam vero cum terra plus tercenties magis distet a sole, quam a luna, recta SD respectu ST exigua est, adeoque DF, quantum ad sensum, coincidit cum parallela ST, & punctum F cum puncto A, ita, ut citra errorem sensibilem LA possit pro differentia virium terræ & lunæ in solem haberi, & pro quantitate vim inæqualitates motus lunæ producentem exprimente. Atque ideo hæc linea *expressio vis perturbatricis* nobis dicetur.

713. Producta, si opus sit, recta TL, construatur super LA tanquam diagonali parallelogrammum rectangulum LEAB: liquet, vim LA resolvendam esse in duas; nempe in LE, quæ cum sit in directione radii vectoris, nititur lunam (in hisce duabus figuris) a terra removere, adeoque exprimit quantitatem, qua vis perturbatrix imminuit gravitatem lunæ in terram; & in LB, quæ, utpote ad radium TL perpendicularis, sive tangens orbitæ lunæ, & directione LB agens, retardat velocitatem lunæ directione opposita ab L ad R progredientis. At enim dantur etiam casus, quibus puncto E inter T & L cadente, vis LE auget gravitatem lunæ in terram; item dantur alii, quibus directio vis LB conspirat cum motu lunæ, & ejus celeritatem auget.

Jam vero ratio linearum LA, LE, LB determinanda est, quæ vires has exprimunt, ut judicium ferri possit de modo, quo motum lunæ perturbant. 714.

714. Lemma. Si a $\pm$ b *ſit quantitas ejusmodi, in qua* b *reſpectu* a *ſit quam minima, dico, ſupponi poſſe, quadratum de* a $\pm$ b *eſſe* aa $\pm$ 2 ab; *& errorem eo fore minorem, quo* b *ad* a *minorem rationem habuerit.*

Demonſtratio. Nam ſi *b* ſit quantitas adeo parva, ut ſupponi poſſit $b = \frac{1}{\infty}$, quadratum de $a \pm b$ erit $aa \pm \frac{2a}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}$, ubi apparet eſſe $\frac{1}{\infty^2}$ infiniteſimum ſecundi ordinis, adeoque $= 0$, ſi cum $\frac{2a}{\infty}$ conferatur: Quod ſi igitur ſolummodo ponatur, *b* reſpectu *a* eſſe admodum exiguam quantitatem, non autem infinite parvam, in quadrato de $a \pm b$, quod eſt $aa \pm 2ab + bb$, terminus $+bb$ eo facilius negligi poteſt, quo *b* reſpectu *a* minorem rationem habet.

715. Hoc poſito, I: ob DL: ST = ST^2: SL^2, & SL = ST $-$ HL (fig. 94), conſequenter (714) SL^2 = ST^2 $-$ 2HL × ST, eſt DL: ST = ST^2: ST^2 $-$ 2HL × ST = ST: ST $-$ 2HL; igitur DL: ST = ST: ST $-$ 2HL; & DL $-$ ST: ST = ST $-$ ST + 2HL: ST, vel DL $-$ ST: ST = 2HL: ST; & hinc DL $-$ ST = 2HL. Simili argumento reperietur (fig. 95) ST $-$ DL = 2HL. Univerſim itaque differentia inter DL & ST eſt 2HL, adeoque DS, quæ eſt differentia inter DH & ST, eſt = 3HL. Quoniam vero rectæ LG, FD, ST æquales ſunt, & (712) DF, quantum ad ſenſum, coincidit cum SA; habetur DS = TA; & hinc TA = 3HL. Eſt autem HL ſinus diſtantiæ lunæ a proxima quadratura, ſive coſinus ejus diſtantiæ a linea ſyzygiarum; igitur *expreſſio vis perturbatricis lunæ eſt ſemper latus tertium trianguli rectilinei, in quo latus unum eſt radius orbitæ lunæ, alterum triplum coſinus diſtantiæ lunæ a proxima ſyzygia.*

716. II. Si continuetur LH uſque in I, erit LI = 2LH. Et ſi demittatur perpendicularis IK in radium LT, productum, ſi opus ſit; triangula rectangula ILK, ATE fiunt ſimilia, ob AE, KI parallelas: itaque eſt AT: LI = AE (ſive LB): IK. Eſt autem AT: LI = 3HL: 2HL = 3: 2; ergo LB: IK = 3: 2, & LB = $\frac{3}{2}$ IK. Atqui IK eſt ſinus anguli ITK, qui eſt duplus anguli KLI = CTL, ſive angulo diſtantiæ lunæ a linea ſyzygiarum; hinc *vis* LB, *quæ motum lunæ in ſua orbita accelerat, vel retardat, ſemper eſt ut* $\frac{3}{2}$ *ſinus duplæ diſtantiæ lunæ a linea ſyzygiarum.*

717. III. In iisdem triangulis ſimilibus ILK, ATE, habetur AT: LI = 3: 2 = TE: LK = TL + LE: TL + TK; igitur 3TL + 3TK = 2TL + 2LE. Si utrinque ſubtrahatur 2TL, manet TL + 3TK = 2LE, adeoque LE = $\frac{1}{2}$ TL + $\frac{3}{2}$ TK. (ſi punctum E caderet intra L & T, foret LE = $\frac{1}{2}$ TL $-$ $\frac{3}{2}$ TK). Eſt autem

TK

TK cosinus anguli KTI, duplæ distantiæ lunæ a linea syzygiarum: *ergo vis* LE, *quæ vim centralem, sive gravitatem lunæ in terram minuit vel auget, est ut summa vel differentia dimidii radii, & ½ cosinus duplæ distantiæ lunæ a linea syzygiarum.*

ARTICULUS V.

De combinatione causarum physicarum, quæ regularem motum lunæ perturbant.

718. Quoniam inæqualitates lunæ proveniunt ex combinatis inter se tribus viribus, quarum rationes Articulo præcedente jam invenimus; ut earum effectus proxime detegamus, illud nunc supereſt, ut limites reperiamus, in quibus hæ vires vel sunt maximæ, vel minimæ, vel nullæ.

Si pro singulis punctis arcus CR constructur triangulum TLA, semperque accipiatur TA = 3LH. . . . .

719. I. Vis perturbatrix LA reperitur maxima, quando TA est maxima, ob TL constantem: hoc itaqne fit, dum LH æquatur radio TL, adeoque angulus RTL est rectus, sive dum punctum L est in C. Ergo *vis perturbatrix* LA *est maxima in syzygiis, ejusque expressio tunc est* 2 TL.

720. Ob rationem contrariam LA est minima, quando TA vel LH evanescit, sive quando punctum L incidit in R: igitur *vis perturbatrix est minima in quadraturis, & exprimitur per* LT.

721. II. Quia angulus TLA mutari potest a 180° usque ad 0°, perpendicularis AE debet extra punctum L respectu T cadere, quando angulus TLA est obtusus; debet cadere in ipsum punctum L, dum angulus TLA est rectus; debet denique intra T & L cadere, quando angulus TLA est acutus. In primo casu determinat quantitatem LE exprimentem imminutionem gravitatis lunæ in terram, utpote cum tunc designet vim in directione puncto T opposita agentem. In casu secundo diminutio est nulla. In tertio casu exprimit LE vim gravitatem lunæ in terram augentem, directione nempe illius tunc versus T tendente.

722. III. *Vis* LB *nulla est*, quando sinus duplæ distantiæ a syzygiis evanescit: tunc enim etiam ½ hujus sinus evanescunt; id, quod contingit *in syzygiis.*

723. *Vis* LB *sit maxima, dum luna est in octantibus.* Nam cum sinus omnium maximus sit 90°, necesse est, ut quando vis LB est maxima, dupla distantia lunæ a syzygia sit 90°; igitur ipsa distantia 45°.

Patet ex hoc, quod dum vis LB est maxima, sit = ½ TL.

724.

724. IV. *Vis* L E *eſt maxima*, quando coſinus diſtantiæ a ſyzygia eſt maximus, quod contingit in ſyzygia, ubi L E congruit cum cum L A, adeoque in hoc caſu L E = 2 T L.

725. *Vis* L E *nulla eſt*, dum angulus T L A eſt rectus, aut quando termini eam exprimentes ſe mutuo deſtruunt, quod fit, ſi $\frac{1}{2}$ T L = $\frac{3}{4}$ T K, vel T L = 3 T K, vel $\frac{1}{3}$ T L = T K, hoc eſt, quando coſinus duplæ diſtantiæ lunæ a ſyzygia æquatur tertiæ parti radii. Eſt autem radii 10000000 pars tertia = 3333333, quæ eſt coſinus 109°, 28′, cujus anguli dimidium eſt 54°, 44′: hinc *vis* L E *eſt nulla, quando luna a ſyzygia* 54°, 44′ *diſtat.*

726. Si quæratur expreſſio ejusdem vis L E in quadratura, cum tunc diſtantia a linea ſyzygiarum ſit 90°, coſinus dupli anguli 180°, ſeu 0°, æquatur radio T L; unde habetur L E = $\frac{1}{2}$ T L − $\frac{1}{2}$ T L = = − T L. Ex quo apparet, quod in quadratura directio vis L E ſit R T, & quod gravitatem lunæ in terram augeat quantitate, quæ per T L vel R T poſſit exprimi.

727. V. Denique manifeſtum eſt & ex æquali diminutione gravitatis tam in oppoſitione, quam in conjunctione; & ex æquali ejusdem augmento tam in prima, quam in ſecunda quadratura, (patebit id etiam ſi pro ſingulis caſibus peculiares figuræ conſtruantur), *quod omnes inæqualitates motus lunæ, quæ in tranſitu ab una ſyzygia ad quadraturam proximam contingunt, eædem iterum redeant, iiſdemque gradibus, in tranſitu lunæ ab hac quadratura ad alteram ſyzygiam; & quod ab iſta ſyzygia usque ad ſequentem quadraturam priore rurſus incipiant ordine, & inde a quadratura uſque ad primam ſyzygiam denuo repetantur, & ſic deinceps.*

728. Obſerva Cum diſtantia lunæ a ſole circiter $\frac{1}{10}\frac{1}{0}$ minor ſit in conjunctionibus, quam in oppoſitionibus, vis perturbatrix, conſequenter etiam inæqualitates motus, ſunt paullo majores circa conjunctionem, quam circa oppoſitionem. Verum tantilla variatio hic a nobis negligi debet, cujus ratio non niſi in accuratis motuum lunæ calculis habenda eſt.

ARTICULUS VI.

Exponuntur effectus, qui ex viribus tribus allatis, ac inter ſe compoſitis oriuntur.

Si præciſa interea utriusque orbitæ lunæ, ac terræ eccentricitate, ſupponamus, hæc duo corpora ab initio determinata fuiſſe, ut alterum quidem circa ſolem magnum circulum deſcriberet, alterum vero minorem circa tellurem, in plano vicino admodum eclipticæ, ſequentia theoremata conſtitui poſſunt.

729 THEOREMA I *Vis perturbatrix minuit gravitatem lunæ in terram, quando luna eſt in ſyzygiis; & auget eandem, dum eſt in quadraturis:*

ſed decrementum in ſyzygiis eſt duplum augmenti in quadraturis.

730. THEOREMA II. *Quatuor ſunt puncta in orbita lunæ, ſingula* 54°, 44′ *utrinque a ſyzygiis, in quibus gravitas lunæ in ſolem non mutat ejusdem vim centralem in terram.*

731. THEOREMA III. *Variatio vis centralis lunæ in terram nititur ejus orbitam planiorem reddere circa ſyzygias, & magis curvam circa quadraturas (80), ita ut orbita lunæ, ſi ab initio circularis fuit, debuerit in ovalem, ſive ellipticam mutari, in qua axis major eſt in linea quadraturarum, axis minor in linea ſyzygiarum, & in centro tellus.*

732. THEOREMA IV. *Velocitas lunæ a ſyzygiis usque ad quadraturas minui debet; & a quadraturis usque ad ſyzygias augeri.* Cum enim axes curvæ ſint perpendiculares ad tangentes per eorum extrema puncta ductas (Elem. 772 & 773); & velocitates in curvis ſint (86) in ratione reciproca perpendiculorum e centro virium demiſſorum in tangentes curvas in iis locis, in quibus ſunt corpora; manifeſtum eſt, lunam tanto velocius debere moveri in ſyzygiis, quam in quadraturis, quanto magis ſemiaxis minor orbitæ exceditur a ſemiaxe majore.

733. THEOREMA V. *Quantitas, qua velocitas lunæ decreſcit, dum a ſyzygia ad quadraturam tendit, vel qua augetur, dum a quadratura ad ſyzygiam movetur,* (eſt hæc quantitas illa, quam producit vis L B) *debet creſcere a ſyzygia uſque ad vicinum octantem, & ab hoc usque ad quadraturam proximam decreſcere: eſtque ſemper in ratione ſimus duplæ diſtantiæ lunæ a ſyzygia.* Hæc inæqualitas dicitur *variatio lunæ.*

734. THEOREMA VI. *In ſyzygiis, & quadraturis luna deſcribit in ſua orbita arcus, qui cum radiis vectoribus comprehendunt areas temporibus proportionales; aliis vero in locis areæ, quas verrunt radii vectores, eo minus ſequuntur accuratam rationem temporum, quo luna octantibus eſt propior.*

Etenim in ſyzygiis & quadraturis directio vis perturbatricis L A coincidit cum radio vectore lunæ, adeoque vis compoſita ex hac vi perturbatrice & gravitate lunæ tendit verſus centrum terræ: in omnibus aliis punctis vis L A eo magis obliqua eſt ad radium vectorem T L, quo luna eſt vicinior octantibus; & hinc eo magis etiam directio vis compoſitæ ex vi perturbatrice, & gravitate lunæ, a centro telluris diſcedit.

735. Obſerva. Quamvis hucusque ſuppoſuerimus, orbitam lunæ eſſe circulum, quæ reipſa eſt ellipſis, cujus focum terra occupat; nihilominus facile intelligitur, quod etiam in ellipſi inæqualitates expoſitæ ſuum effectum ſortiri debeant, atque arcus elliptici magis convexi fieri in quadraturis, minus in ſyzygiis; & hinc per easdem inæqualitates luna debeat in quadraturis longius a terra recedere, & magis ad eam accedere in ſyzygiis. Et alias etiam elli-

ellipſis lùnæ eſt parum admodum eccentrica. Quia porro vis centralis lunæ in ſyzygiis minuitur, & in quadraturis augetur, patet, quod hæc vis jam ſit minor, jam major, quam ut exactam rationem reciprocam duplicatam diſtantiæ lunæ a tellure ſequatur, id, quod tamen eſt neceſſarium (163), ut orbita lunæ ſit ellipſis regularis, in cujus foco terra exiſtat.

736. Hoc diſtantiarum diſcrimen, una cum eccentricitate orbitarum lunæ & terræ, & inclinatione plani orbitæ lunæ ad planum eclipticæ, cauſa ſunt quinque inæqualitatum periodicarum admodum notabilium in motu lunæ; ſcilicet *primo* inæqualitatis in tempore plurium revolutionum periodicarum continuarum lunæ. *Secundo* motus lineæ apſidum. *Tertio* mutationis continuæ in eccentricitate orbitæ lunæ. *Quarto* retrogradationis nodorum lunæ. *Quinto* denique mutationis in inclinatione orbitæ. Hæc jam ſingillatim ſequentibus theorematis exponentur.

737. THEOREMA VII. *Tempus revolutionis periodicæ lunæ majus eſt, quando terra eſt in perihelio, quam dum eſt in aphelio.*

Demonſtratio. Quo terra ſoli vicinior eſt, eo gravitas terræ & lunæ in ſolem eſt major, adeoque etiam major eſt in ſyzygiis immunitio gravitatis lunæ in terram: & quamvis ſit etiam majus tunc augmentum illius in quadraturis; nihilominus cum diminutio ſit fere duplo major augmento (729), univerſim apparet, lunam minus gravitare in terram, dum hæc eſt in perihelio, quam dum eſt in aphelio, adeoque etiam minus ad terram accedere in primo, quam in ſecundo caſu. Ex quo ſequitur, ceteris omnibus paribus, orbitam lunæ eſſe majorem terra in perihelio exiſtente, quam dum ea eſt in aphelio. Sunt autem (168) tempora revolutionum periodicarum ut radices quadratæ axium majorum orbitarum, & hinc majora, quando orbitæ ſunt majores: ergo tempus revolutionis periodicæ lunæ maius eſt, & illius celeritas angularis minor, dum terra eſt in perihelio, quam dum eſt in aphelio.

738. Ob eandem rationem patet, tempus revolutionis lunæ reſpectu apogæi, & nodi ſui majus eſſe, dum terra verſatur in perihelio, quam dum eſt in aphelio.

739. Corollarium. Igitur motus medii lunæ, ejus apogæi, & nodi non ſunt uniformes per totum annum, ſed indigent æquatione, quæ dependet a velocitate, quam tunc habet tellus, & conſequenter ab æquatione centri ſolis.

740. THEOREMA VIII. *Linea apſidum lunæ directe progreditur, ſive ſecundum ordinem ſignorum, dum luna eſt in ſyzygiis; & regreditur, dum luna eſt in quadraturis: progreditur velocitate maxima, quando coincidit cum linea ſyzygiarum; & regreditur velocitate maxima, dum congruit cum linea quadra-*

quadraturarum: ſumma quantitatum, quibus pluribus continuis revolutionibus progreditur, ſuperat ſummam quantitatum, quibus iisdem revolutionibus regreditur: ex quo fit, ut linea apſidum abſolvat integram revolutionem ſecundum ſignorum ordinem fere intra novem annos.

Demonſtratio. *Primo.* Quoniam alternum augmentum,& decrementum gravitatis lunæ in terram efficit, ut vis centralis jam ſit minor, jam major, quam requirat ratio reciproca duplicata radii vectoris (735); ſequitur (174), ſupponi non poſſe, orbitam lunæ eſſe ellipſin, cujus focum terra occupet, niſi ſimul linea apſidum mobilis ſupponatur. In hac autem hypotheſi, motus lineæ apſidum eſt directus in ſyzygiis, ubi vis centralis minor eſt: & retrogradus in quadraturis, ubi vis centralis eſt major.

741. *Secundo.* Quia decrementum vis centralis in ſyzygiis non ſolum duplum eſt incrementi in quadraturis; ſed etiam ſe extendit uſque ad 54°, 44′ utrinque a ſyzygiis, dum incrementum non niſi per 36°, 16′ utrinque a quadraturis durat; manifeſtum eſt, motum retrogradum excedi a directo, atque hinc apogæum debere ſenſibiliter progredi ſecundum ordinem ſignorum.

742. *Tertio.* Evidens eſt, quod cum orbita lunæ ſit ellipſis, in cujus foco eſt terra, diſtantiæ TL non ſint per totam orbitam æquales, ſed minores verſus perigæum, & majores verſus apogæum: igitur vis perturbatrix LA, quæ in ſyzygiis eſt ſemper $= 2TL$ (719), eo major eſt, quo luna in ſyzygiis vicinior eſt ſuo apogæo; & ex oppoſito eo minor, quo luna propior eſt perigæo. Sit diſtantia lunæ in apogæo $= D$, & in perigæo $= d$: quando linea apſidum coincidit cum linea ſyzygiarum, vis perturbatrix maxima eſt, & $= 2D$ in ſyzygia apogæi; & eadem vis minima, ac $= 2d$ in ſyzygia perigæi. Quod ſi jam vis perturbatrix abeſſet, vis centralis lunæ in apogæo eſſet ad vim centralem lunæ in perigæo, ut dd ad DD; verum quia reipſa vis perturbatrix adeſt, eæ vires centrales ſunt inter ſe ut $dd - 2D$ ad $DD - 2d$; quæ ratio tanto magis recedit a ratione dd: DD, reciproca duplicata diſtantiarum, quanto D majus eſt, quam d; eſt autem D diſtantia omnium maxima, & d omnium minima: igitur quando linea apſidum coincidit cum linea ſyzygiarum, vires centrales lunæ omnium maxime diſcedunt a ratione reciproca duplicata diſtantiarum: adeoque tunc vis perturbatrix effectum maximum præſtat, qui eſt, ut linea apſidum cum velocitate maxima progrediatur.

743. Verum in eodem caſu, quo lineæ ſyzygiarum & apſidum coincidunt, puncta diſtantiarum mediarum lunæ a terra ſunt quam proxima lineæ quadraturarum QR; & vis centralis lunæ in R eſt ad ejus vim centralem in Q, ut $TQ^3 + TR$ ad $TR^3 + TQ$. Hæc ra-

ratio eo minus recedit a ratione reciproca duplicata diſtantiæ, quo T Q minus differt a T R: ſunt autem hæ duæ quantitates æquales, quia puncta Q & R ſunt circa diſtantias medias lunæ; igitur dum linea apſidum coincidit cum linea ſyzygiarum, vis perturbatrix L A quam minimum officit rationi reciprocæ duplicatæ diſtantiarum lunæ a terra in quadraturis: & hinc linea apſidum tunc regreditur cum minima velocitate.

744. Simili ratiocinio facile demonſtratur, quod dum linea apſidum coincidit cum linea quadraturarum, eadem progrediatur cum minima velocitate, quando luna eſt in ſyzygiis, & regrediatur cum maxima velocitate, quando luna eſt in quadraturis.

745. Obſerva. Complures Geometræ demonſtrarunt, quod quamvis vis perturbatrix 2 T L poſſit motum lineæ apſidum lunæ inæqualem reddere, nequeat tamen niſi dimidiam circiter velocitatem illius, quæ per obſervationes Aſtronomicas determinata eſt, in hoc motu efficere, atque ideo aliæ hic addeſſe debeant conditiones, quæ effectum hujus vis augeant. Qua de re conſuli poſſunt ea, quæ DD. Euler, Clairaut, & d'Alembert ſcripſerunt, qui tamen motum apogæi lunæ obſervationibus conformem ex ſyſtemate gravitatis deduxerunt.

746. THEOREMA IX. *Eccentricitas orbitæ lunæ ſingulis momentis mutatur: maxima eſt, dum linea apſidum incidit in lineam ſyzygiarum; minima, dum linea apſidum cum linea quadraturarum congruit.*

Demonſtratio. Si vis perturbatrix L A vel non minueret vim centralem lunæ in ſyzygiis, vel dum minuit, non mutaret rationem ad diſtantiam, vis centralis eadem ratione, iisdemque gradibus, a tranſitu per perigæum ad apogæum decreſceret, qua in tranſitu ab apogæo ad perigæum crevit, ideoque luna tantum in priore caſu recederet a centro terræ, quantum in poſteriore accederet, & eccentricitas orbitæ lunæ foret conſtans. Verum ſi decrementum vis centralis lunæ, quod vis perturbatrix L A efficit, majus eſt, dum vis centralis in tranſitu a perigæo ad apogæum decreſcit; & minus, dum vis centralis in tranſitu ab apogæo ad perigæum creſcit, ita ut ratio reciproca duplicata diſtantiarum magis turbetur, dum vis centralis decreſcit, quam dum creſcit; evidens eſt, quod pro ratione hujus perturbationis luna debeat magis recedere a centro terræ in tranſitu a perigæo ad apogæum, & minus accedere ad illud in tranſitu ab apogæo ad perigæum; & hinc eadem proportione diſtantia apogæi fieri major, & diſtantia perigæi minor, adeoque eccentricitas augeri.

Cum autem dicta ratio reciproca omnium maxime perturbetur (742), quando linea apſidum congruit cum linea ſyzygiarum, patet, quod tunc etiam eccentricitas omnium maxima eſſe debeat. Argumento contrario, cum linea apſidum incidente in lineam quadraturarum, augmentum vis centralis ſit fere idem in tranſitu lunæ

a perigæo ad apogæum, ac in tranſitu ab apogæo ad perigæum ratio reciproca duplicata diſtantiarum per illud omnium minime turbatur, adeoque etiam eccentricitas orbitæ lunæ omnium minime augetur.

747. THEOREMA X. *In ſingulis lunæ revolutionibus nodi illius orbitæ ſunt ſemper ſtationarii, dum luna eſt in quadratura; ut plurimum ſunt retrogradi, dum luna eſt in ſyzygiis: regrediuntur maxima velocitate ab una usque ad alteram quadraturam, quando linea nodorum coincidit cum linea quadraturarum; & eodem intervallo regrediuntur minima velocitate, dum linea nodorum congruit cum linea ſyzygiarum.*

748. THEOREMA XI. *In ſingulis lunæ revolutionibus angulus inclinationis illius orbitæ ad planum eclipticæ augetur ab una ſyzygia ad quadraturam proximam, & minuitur a quadratura uſque ad ſyzygiam ſequentem. Hic angulus eſt omnium maximus in quadratura, dum linea nodorum congruit cum linea ſyzygiarum; & eſt omnium minimus in ſyzygia, dum linea nodorum cum linea quadraturarum coincidit.*

Demonſtratio utriusque præcedentis Theorematis. Si planum orbitæ lunæ non eſſet inclinatum ad planum eclipticæ, parallelogramma LGDF, LEAB (fig. 94 & 95), quæ exhibent reſolutionem diverſarum virium centralium lunam moventium, forent in plano eclipticæ, adeoque nihil agerent ad dimovendam lunam ex hoc plano; ſed quia planum orbitæ lunaris circiter ſub angulo 5°; 9′ eſt inclinatum, ſequitur, dicta parallelogramma non eſſe in plano eclipticæ, niſi luna L in aliquo ſuorum nodorum verſante, & tunc diverſas illas vires in lunam agentes nihil in ſitu plani illius orbitæ poſſe mutare. Verum quando luna L aliquam latitudinem habet, ſi ſtricte loquamur, nulla linea parallelogrammi LGDF eſt in plano eclipticæ. Interea tamen quemadmodum ſuppoſuimus DF coincidere cum ST, ita triangulum TLA concipiendum eſt, tanquam latus illius TA foret in plano eclipticæ, & reliqua duo TL, LA ad idem planum eſſent inclinata. Ex puncto A (fig. 99) ducatur AV ad planum orbitæ lunæ (quod ſufficienter productum ſupponitur) perpendicularis, ita ut punctum V ſit in eo plano, & conſtruatur parallelogrammum LMAV, cujus diagonatis ſit LA, ut hæc vis LA in duas reſolvatur, alteram LM=AV, ad planum orbitæ lunæ perpendicularem; alteram LV, quæ ſit in plano ipſo orbitæ. Quoniam latus LV ſemper admodum magnum eſt reſpectu lateris LM, & ob angulum inclinationis orbitæ lunæ exiguum, angulus VLA valde parvus, ſumi poteſt LV=LA. Vidimus autem jam theorematis præcedentibus effectus vis LA; unde hic reſtat, ut eos perpendamus, quos LM producit, ejusque rationem ad augmentum & decrementum vis centralis lunæ inveſtigemus.

749. Ut ratio vis L M ſive A V ad T L, quæ incrementum vis centralis in quadratura exprimit, inveniatur, ſit T P linea nodorum; e puncto V demittatur ad eam perpendiculum V P, & jungatur P A. Manifeſtum eſt (Elem. 630) angulum V P A eſſe æqualem inclinationi plani orbitæ lunæ ad planum eclipticæ. Habetur igitur T R (ſive T L): T A = R: 3 *ſin* L T R (715); T A: A P = R: *ſin* A T P (Elem. 747); & A P: A V (ſive L M) = R: *ſin* A P V. Multiplicatis jam his rationibus inter ſe, & prima per T A × A P diviſa, fit (Elem. 296) T L: L M = R³: 3 *ſin* L T R × *ſin* A T P × *ſin* A P V, hoc eſt, *augmentum vis centralis in quadraturis eſt ad vim agentem in planum lunæ, ut cubus radii ad factum ex triplo ſinus diſtantiæ lunæ a quadratura in ſinum diſtantiæ nodi a ſyzygia ductum in ſinum inclinationis orbitæ lunæ.* Ex quo ſequitur *primo*, hanc vim evaneſcere in tribus caſibus: quando luna eſt in quadraturis; quando linea nodorum incidit in lineam ſyzygiarum; & quando latitudo lunæ eſt nulla. Nam in ſingulis iſtorum caſuum unus e ſinibus evaneſcit, hinc factum ex eo in reliquos pariter eſt = 0. *Secundo* ſequitur, hanc vim eſſe maximam, dum luna exiſtens in ſyzygiis eſt ſimul in ſuis limitibus. Tunc enim tres ſinus, quibus factum conſtat, ſunt maximi. *Tertio*, univerſim hanc vim eo eſſe majorem, quo cum majore latitudine luna ſyzygiæ eſt propior.

750. Effectus vis L M eſt, ut lunam continuo verſus planum eclipticæ impellat, in quod tendunt vires T L, A L; conſequenter vis L M non modo nititur inclinationem orbitæ lunæ ad planum eclipticæ minuere, ſed etiam efficit, ut luna citius ad planum eclipticæ perveniat, illudque tranſeat, quam dempta hac vi fieret. Unde deducitur, quod ſicut vis L M augetur, minuitur, vel prorſus evaneſcit; ſic etiam inclinatio orbitæ lunæ minuatur, augeatur, vel maxima fiat; ac nodus, verſus quem luna progreditur, ad eam plus, minusve accedat, aut immotus maneat.

751. Etenim ſit *primo* luna in L in tranſitu a conjunctione ad primam quadraturam R: patet, ob niſum verſus M, & motum proprium ſecundum ordinem ſignorum verſus N, lunam (67) debere ſequi viam mediam L *n*, quæ ſit in directione diagonalis parallelogrammi, cujus latera exprimunt rationem utriusque tendentiæ: igitur orbita lunæ acquiret ſitum L *n*, ita ut nodus *n* ab N verſus *u* accedat contra ſignorum ordinem, & inclinatio orbitæ, ſeu angulus ſphæricus L *n* D augeatur. Idem fit in tranſitu (727) ab oppoſitione ad ſecundam quadraturam. *Itaque univerſim in tranſitu a ſyzygia ad quadraturam proximam nodus lunæ regreditur, & inclinatio orbitæ augetur.*

752.

752. Sit *secundo* luna in *l* in transitu a secunda quadratura ad conjunctionem, sit *l m* directio vis lunam ad planum ecliptica admoventis: manifestum est, quod ob duplicem nisum *l m*, & *l C*, motus proprii secundum signorum ordinem, luna debeat directione media *l Q* moveri, & ejus orbita D *l* C acquirat situm *d l Q*, quo fit, ut angulus inclinationis *l d m* reddatur minor angulo *l* D *m* ac ut nodus e loco D moveatur contra signorum ordinem in *d*. Ergo *in transitu a quadratura ad sequentem syzygiam, nodus lunæ regreditur, & inclinatio orbitæ minuitur.*

753. Universim itaque apparet, *nodum lunæ nunquam secundum ordinem signorum moveri; stationarium esse, quando luna est in quadratura, vel sine latitudine; in omnibus aliis casibus eum regredi celeritate eo majore, quo luna syzygiæ est propior, & quo majorem habet latitudinem.*

754 *Quod ad inclinationem orbitæ lunæ attinet*, liquet, eam quater singulis revolutionibus mutari: bis augeri, bis minui: *est ea maxima, dum linea nodorum coincidit cum linea quadraturarum; minima, dum linea nodorum incidit in lineam syzygiarum.*

ARTICULUS VII.

De libratione lunæ.

755. Cum luna singulis suis revolutionibus circa terram pluribus inæqualitatibus notabilibus sit obnoxia, dum motus rotationis illius (229) æquabilis manet, consequitur, duos hos motus haud debere inter se semper congruere. Exempli causa, si dum luna accurate quartam partem suæ rotationis absolvit, nondum quadrantem suæ revolutionis in orbita confecit, quod ejus celeritas tam in transitu per apogæum, quam ob concursum duarum virium centralium, quibus movetur, diminuta sit; maculæ, quæ sunt ad limbum orientalem lunæ, debent videri ulterius in disco progressæ. Oppositum eveniret, si aucta lunæ celeritate, eodem tempore plus quam quadrantem in sua orbita percurrisset.

756. Altera causa, quæ cum priore concurrit, est inclinatio plani æquatoris lunæ ad suam eclipticam. Ob hanc inclinationem fieri debet, ut quivis æquatoris polus sit oculo in plano ecliptica lunæ posito conspicuus tempore semirevolutionis, & tempore alterius semirevolutionis occultetur, ut superius (603) vidimus. Verum quia ob motum lunæ in latitudinem oculus in superficie terræ constitutus jam est supra planum ecliptica lunæ, jam infra illud; ex hac diversa oculi positione, juncta causis duabus jam expositis,

tis, magna varietas in phænomenis librationis oriri debet; quæ ſingillatim diſcutere, nimis longum foret.

ARTICULUS VIII.

De inæqualitatibus motus telluris e gravitate lunæ provenientibus.

757. Si tellus omni deſtituta eſſet ſatellite, nulla in eam daretur actio, quæ quidem ſentiri poſſet, præterquam gravitatis in ſolem; ſed quoniam lunam, cujus vis centralis in eam tendit, perpetuo ſibi adjunctam habet, fieri non poteſt, quin motus telluris circa ſolem perturbetur, lunæque reactione velocitas telluris augeatur, dum lunæ velocitas minuitur, & viciſſim.

758. Interea tamen hæ inæqualitates in motu telluris annuo exiguæ ſunt, quippe quæ alias in motu apparente ſolis percipererentur. Inæqualitates lunæ, quæ ex combinatione gravitatis mutuæ lunæ, ſolis, & telluris oriuntur, & quarum ſumma ad tres circiter gradus exurgit, non eſſent nobis ſenſibiles, niſi tanta eſſet lunæ, ac terræ vicinia; itaque eædem inæqualitates e ſole ſpectatæ 320 vicibus minores videri debent, conſequenter 33″ aut 34″ ad ſummum. Si igitur luna omnes ſuas inæqualitates actione ſua in terram transferret, motus annuus apparens ſolis inde non poſſet plus turbari, quam 34″, quæ quantitas exigua prorſus eſt. Verum cum luna ſit 51 vicibus minor tellure, & maſſa quoque ejus certo minor ſit, quam maſſa terræ, manifeſtum eſt, actione lunæ in terram non poſſe in terra inæqualitates tam magnas effici, ac oriantur in luna actione terræ in lunam. Hinc gravitas mutua lunæ ac terræ impedire nequit, quo minus eadem fere accuratione calculi motus apparentis ſolis, ſive veri telluris, procedant, ac ſi tellus nullum haberet ſatellitem.

759. Geometræ, qui effectus actionum mutuarum lunæ & telluris ad calculos exactiſſimos revocarunt, deprehenderunt, ex omnibus inæqualitatibus lunæ maxime ſenſibilem in motu terræ eſſe *variationem lunæ*, conſentientibus etiam obſervationibus (vide Monum. Acad. Scient. Reg. Pariſ. ad A. 1750): hæc inæqualitas facit, ut in theoria ſolis adhibenda ſit æquatio 10, vel cum maxima eſt, 12 ſecundorum in gradibus. Ejus ratio habenda eſt in calculis ſolis accuratioribus. En autem regulam: *ſubtrahe locum verum ſolis a loco vero lunæ pro tempore dato, ut habeatur diſtantia lunæ a ſole*, (ſufficit autem, ſi ſciatur utriusque locus circiter ad unum gradum), *tum inſer: ut radius eſt ad ſinum duplæ diſtantiæ lunæ a ſole; ita ſunt* 10″ *ad*

æquationem quæſitam, *quæ longitudini ſolis* per tabulas aſtronomicas *inventæ in primis ſex ſignis diſtantiæ lunæ a ſole addenda eſt*, *ab eadem vero in poſtremis ſex ſignis ſubtrahenda*, ut obtineatur longitudo ſolis per hanc variationem mutata, ſive æquatione lunari correcta.

760. Gravitas lunæ in terram, juncta figura telluris ad polos depreſſa, adhuc duo alia notatu digna phænomena producit, quorum alterum eſt fluxus & refluxus maris, qui ab aſtronomia pura extraneus eſt, alterum, quod inæqualiter mutetur poſitio plani æquatoris ad planum eclipticæ, hoc eſt, quod interſectio horum duorum planorum inæquali celeritate regrediatur, & variationem periodicam in eorum inclinatione efficiat; id, quod paucis jam exponimus.

761. Imprimis autem illud obſervandum eſt, quod cum planum orbitæ lunæ ad planum eclipticæ ſub angulo circiter 5°, 9′ ſit inclinatum, & linea nodorum ſucceſſive per omnes eclipticæ gradus ſpatio 19 annorum tranſeat; idem planum orbitæ lunaris ſingulis momentis inclinationem ad planum æquatoris terreſtris mutet. Nam dum nodus aſcendens lunæ incidit in primum punctum arietis, in quo eſt nodus aſcendens æquatoris, inclinatio orbitæ lunæ eſt ejus reſpectu 28° $\frac{2}{3}$ (quæ eſt ſumma ex 5° $\frac{1}{6}$ & 23° $\frac{1}{2}$): at dum nodus aſcendens lunæ incidit in primum punctum libræ, in quo eſt nodus deſcendens æquatoris, orbita lunæ inclinatur ad æquatorem ſub angulo 18° $\frac{1}{3}$. Atque hac ratione inclinatio orbitæ lunæ ad planum æquatoris terreſtris creſcit paullo plus quam 9 annis, ab 18° $\frac{1}{3}$ usque ad 28° $\frac{2}{3}$; & per novem alios annos iterum decreſcit.

762. Præterea notandum eſt, quod ſi terra eſſet globus homogeneus exacte rotundus, ejus vis centralis in ſolem & lunam nullam efficeret mutationem in ſitu ſui axis (229). Verum quia ejus figura accedit ad ſphæroides (519) rotatione ellipſeos circa axem ſuum minorem genitum, ſi cogitetur huic ſphæroidi inſcripta ſphæra, cujus diameter æqualis ſit axi minori ſphæroidis, materia, quæ ſphæra inſcripta non comprehenditur, eidem ſphæræ undique incumbet, ac circa polos ſtratum efficiet valde tenue, ſed cujus craſſitudo utrinque verſus æquatorem ſemper fit major.

763. Hoc poſito, concipiatur jam tota illa maſſa ſphæroidis ſphæræ inſcriptæ incumbens in annulum quemdam efformari, qui ea parte cohæreat telluri, ubi ejusdem maſſæ fuit maxima profunditas, hoc eſt, in plano æquatoris: tum vero duo puncta interſectionis hujus annuli cum plano eclipticæ, aut ſi ita vocare libeat, *duo ejus nodi*, ſunt duo puncta æquinoctialia, arietis, & libræ. Supponamus etiam, particulas materiæ hunc annulum componentis eſſe totidem veluti lunulas exiguas, quæ revolutionem ſuam circa ter-

terram eodem tempore peragant, quo ipsa superficiei telluris puncta circa axem gyrantur, hoc est, intra 23 h. 56′, 4″: omnes hæ lunulæ triplici vi centrali, seu gravitate, præditæ sunt: primo versus centrum terræ, quæ fere infinities excedit duas reliquas: secundo versus lunam veram; & tertio versus solem.

764. Quod si itaque prima harum trium virium cum singulis reliquis duabus ea ratione combinetur, qua superius duplex lunæ gravitas, apparet.....

I: Quod *nodi hujus annuli semper debeant regredi, & consequenter linea intersectionis planorum æquatoris & eclipticæ debeat esse retrograda, ex quo præcessio æquinoctiorum oritur.*

765. II. Quod cum planum eclipticæ, in quo est sol, constanter cum plano æquatoris faciat angulum 23° ½, quantitas præcessionis æquinoctiorum, quæ provenit ex combinatione gravitatis annuli in terram, & gravitatis ejusdem in solem, maneat singulis revolutionibus terræ æqualis.

766. III. Quod cum orbita lunæ ad planum æquatoris jam inclinetur sub angulo 18° ½, jam sub angulo 28° ½, ea quantitas retrogradationis nodorum annuli, sive præcessionis æquinoctiorum, quæ provenit ex combinatione gravitatis annuli in terram cum gravitate ejusdem in lunam, debeat esse mutabilis, & major, quando angulus hujus inclinationis major est, & vicissim; nam LM (fig. 99) quæ designat vim effectricem retrogradationis nodorum lunæ, eo major est, quo plana D M N, D C N magis a se distant.

767. Hinc infertur, *quod præcessio æquinoctiorum*, quæ ex utraque hac causa oritur, *periodo 19 annorum circiter variabilis sit; quod sit maxima* (& secundum observationes Bradlay, circiter 58″ intra annum), *quando nodus ascendens lunæ ingreditur signum arietis; quod sit minima* (& fere 43″ per annum), *quando nodus ascendens lunæ ingreditur signum libræ: denique quod sit media* (proxime 50″ ½ per annum), *quando nodi lunæ sunt in coluro solstitiorum.*

768. Ex eadem ratione inclinatio hujus annuli, & consequenter etiam plani æquatoris ad planum eclipticæ, debet perpetuis variationibus esse subjecta: quarum illæ, quæ seu ex revolutione diurna annuli, seu ex actione solis oriuntur, minores sunt, quam ut observari possint; illæ vero solæ, quæ ex inæqualitate actionis lunæ intra revolutionem ejus nodorum proveniunt, fiunt sensibiles. Ex quo fit, ut dum nodus ascendens lunæ est in puncto æquinoctiali arietis, obliquitas eclipticæ 18″ fere major observetur, quam dum is nodus est in puncto æquinoctiali libræ, ita ut obliquitas eclipticæ per novem circiter annos crescat, postea per sequentes novem iterum decrescat.

ARTICULUS IX.

Explicatio, & calculus inæqualitatum apparentium in motu aſtrorum, quæ ab inæquali præceſſione æquinoctiorum pendent; cum methodo calculandi omnes motus apparentes fixarum, comprehenſa etiam earum aberratione.

769. Sit A E C (Fig. 75) dimidium circuli, quem colurum æquinoctiorum vocavimus, E polus eclipticæ, cujus dimidium ſit A D C: ſit P polus æquatoris, A K C dimidius æquator: A, C puncta æquinoctialia. Polus æquatoris ſemper 90 gradibus diſtat a punctis æquinoctialibus: unde ſi concipiatur polus P æquabiliter ſpatio 25740 annorum circulum minorem P H N deſcribere, cujus polus eſt in E, interſectiones A & C ſucceſſive per omnes ecliptícæ gradus tranſibunt: atque hoc eſt, quod *præceſſio æquinoctiorum media* dicitur, eſtque annuatim $50''\frac{1}{3}$.

770. Verum quia obſervationes fixarum oſtendunt, quod ſingulis revolutionibus nodi lunæ, inclinatio plani æquatoris ad planum eclipticæ mutetur, ita ut inde in axe æquatoris enaſcatur motus conicus; ſequitur, polum æquatoris non poſſe in circulo P H N manere, ſed, præciſo motu ejus æquabili, de quo priore numero egimus, debere eundem intra 19 annos circa punctum P epicyclum quemdam *p t r* deſcribere, qui motus *nutatio axis terræ* appellatur.

771. Combinatis motu æquabili in circulo P H N, & motu altero in epicyclo *p t r*, polus *p* æquatoris reipſa deſcribit epicycloides admodum prolongatas, quarum baſis ſecundum obſervationes Bradley eſt $6'$, $13''$ circuli maximi, & axis $18''$ pariter circuli maximi.

772. Quoniam longitudines ſyderum computantur ab actuali interſectione punctorum A & C æquatoris cum ecliptica; complementa latitudinum a polo E; aſcenſiones rectæ ab interſectionibus actualibus A, & C; & complementa declinationum a polo *p*; evidens eſt I, quod *nec præceſſio media æquinoctiorum, nec nutatio axis terræ latitudines ſyderum mutare poſſint*, quippe puncto E manent fixo. II, quod *præceſſio media mutet æquabiliter omnes longitudines; ſed inæqualiter omnes aſcenſiones rectas*, quia in duobus coluris efficit motum æquabilem angularem circa punctum E, cum interea aſcenſiones rectæ computentur per angulos circa polum P. III. Quod *nutatio poli inæqualiter longitudines & aſcenſiones rectas mutet*, cum ea nutatio nunc in hanc, alias in alteram partem fiat. IV. Quod *ex utraque hac cauſa declinationes ſyderum inæqualiter mutentur.*

773. Ut omnes hos exiguos fixarum motus ad calculum reducamus, una cum aberratione, cujus theoriam N. 385. & ſeqq. dedimus,

dimus, eos tribus titulis comprehendemus: effectum præceſſionis mediæ æquinoctiorum, ſimplici nomine vocabimus *præceſſionem*: effectum e nutatione axis terræ oriundum dicemus *deviationem*; illuſionem denique opticam ex ſucceſſiva lucis propagatione *aberrationem* appellabimus.

Calculus Præceſſionis.

774. Præceſſio in longitudine, cum fiat motu æquabili, tempori ſemper eſt proportionalis, anno uni reſpondentibus 50″.3: hinc ſemper ſupponitur data, ut reducatur ad præceſſionem in aſcenſione recta, & ad præceſſionem in declinatione.

775. *Pro præceſſione in aſcenſione recta.* Quæratur in tabulis Aſtronomicis punctum eclipticæ reſpondens puncto æquatoris deſignanti aſcenſionem rectam ſtellæ. Ex iisdem tabulis accipiatur declinatio hujus puncti eclipticæ; & ſumma ex hac declinatione & declinatione ſtellæ, ſi ſunt diverſi nominis; vel differentia earum, ſi ſunt ejusdem denominationis, vocetur X. Tum fiat hæc analogia: *Ut factum ex coſinu declinationis ſtellæ in coſinum declinationis puncti eclipticæ aſcenſioni rectæ ſtellæ reſpondentis, eſt ad factum ex coſinu obliquitatis eclipticæ in coſinum arcus X; ita eſt præceſſio in longitudine ad præceſſionem in aſcenſione recta*, quæ ſemper eodem ſigno afficitur, quo præceſſio in longitudine, excepto caſu, quo arcus X 90° excedit; tunc enim præceſſio in aſcenſione recta eſt negativa reſpectu præceſſionis in longitudine.

Nam in triangulo PEA (Fig. 45, cujus partium denominationes datas vide N. 295) in quo PE & AE ſunt conſtantia, habetur (Trig. 189) $d\,E : d\,P = coſ\,AO \times t\,PAE : coſ\,AR \times ſ\,PAE$. Eſt autem in triangulo ASR (Trig. 130) $t\,RAS$ (ſive $t\,PAE$) $= \frac{cot\,ASR}{coſ\,AS}$; & (Trig 129) $ſ\,PAE = \frac{coſ\,ASR}{coſ\,AR}$; itaque $d\,E : d\,P = \frac{coſ\,AO \times cot\,ASR}{coſ\,AS} : \frac{coſ\,AR \times coſ\,ASR}{coſ\,AR} = coſ\,AO \times cot\,ASR : coſ\,AS \times coſ\,ASR$. Si pro ratione $cot\,ASR : coſ\,ASR$ ſubſtituatur ratio 1 : $ſ\,ASR$ (Trig. 33) ſive, cum $ſ\,ASR$, vel $ſ\,OSC = \frac{coſ\,SCO}{coſ\,OS}$ (Trig. 129), ratio $coſ\,OS : coſ\,SCO$, habetur $d\,E : d\,P = coſ\,AO \times coſ\,OS : coſ\,SCO \times coſ\,AS$.

776. *Pro præceſſione in declinatione.* Fiat: *ut quadratum radii ad factum ex ſinu obliquitatis eclipticæ in coſinum aſcenſionis rectæ ſtellæ; ita eſt præceſſio in longitudine ad præceſſionem in declinatione*, quæ eſt { additiva / ſubtractiva }

in ſtellis { borealibus / auſtralibus }, quando earum aſcenſio recta intra 270° & 90° conſiſtit; ſed eadem eſt { ſubtractiva / additiva }, quando aſcenſio recta eſt intra 90° & 270°. Attamen id intelligendum eſt, quando declinatio temporis anterioris reducenda eſt ad declinationem temporis poſterioris: quod ſi enim declinatio temporis poſterioris reduci deberet ad declinationem temporis anterioris, ſigna mutanda forent.

Calculus Deviationis.

777. Juxta theoriam ſuperius expoſitam, quando nodus aſcendens lunæ eſt in ♈ 0°, polus æquatoris maxime diſtare debet a polo eclipticæ, conſequenter debet eſſe in puncto *r* epicycli *p u r* (Fig. 75); & dum ☊ lunæ eſt in ♎ 0°, idem polus debet eſſe in *u*. E quo infertur, quod additis 3 ſignis ad longitudinem ☊ lunæ, habeatur locus poli in ſuo epicyclo, qui locus vocari poteſt *aſcenſio recta poli*, quoniam per angulos circa punctum P computatur

Sit itaque hæc aſcenſio recta in puncto *p* tempore dato; erit tum E *p d* portio coluri ſolſtitiorum; *a* E *c* dimidius colurus æquinoctiorum; *a* F, ſeu *a* E S menſura longitudinis apparentis ſtellæ S; S F ejus latitudo non mutata; *a p* S, ſive *a k*, menſura ejus aſcenſionis rectæ; S K ejus declinatio; & obliquitas, quam actu habet ecliptica, E *p*. Differentiæ jam inter has poſitiones, & inter eas, quæ haberentur, ſi colurus ſolſtitiorum tranſiret per punctum P, dicuntur *deviatio in longitudine*, *in aſcenſione recta*, *in declinatione* reſpective.

778. *Pro deviatione in longitudine.* Calculetur locus ☊ lunæ, & eidem addantur 3 ſigna, ut habeatur aſcenſio recta poli: tum fiat: *ut ſinus obliquitatis eclipticæ ad coſinum aſcenſionis rectæ poli; ita ſunt* 9″ *ad deviationem in longitudine*, quæ addenda eſt ad longitudinem, ſi aſcenſio recta poli ſit vel in tribus poſtremis, vel in tribus primis ſignis; & ſubtrahenda, ſi aſcenſio recta poli ſit in ſigno quarto incluſive uſque ad nonum: ſicque habebitur longitudo ſtellæ per deviationem correcta.

Etenim deviatio in longitudine, exprimitur hic per A *a*, vel D *d*, vel *p* E D. Si itaque e puncto *p* demittatur perpendiculum *p x*, habetur R : ſ *p u* = P *p* (ſive 9″) : *p x* = 9″ × ſ *p u*; deinde eſt ſ E *x* (ſeu ſ E P) : *p x* (ſeu 9″ × ſ *p u*) = *r* : D *d* = $\frac{9'' \times \int p\,u}{\int E\,P}$.

779. *Pro obliquitate eclipticæ.* Fiat: *ut radius ad ſinum aſcenſionis rectæ poli; ita ſunt* 9″ *ad variationem obliquitatis eclipticæ.* Hæc variatio eſt additiva in primis ſex ſignis aſcenſionis rectæ poli; & ſubtractiva in ſex poſterioribus,

780.

780. *Pro deviatione in aſcenſione recta.* Fiat primo : *ut tangens obliquitatis eclipticæ ad coſinum aſcenſionis rectæ poli ; ita ſunt* 9″ *ad æquationem primam*, quæ eſt additiva in tribus poſtremis, & tribus primis ſignis aſcenſionis rectæ poli ; in reliquis ſubtractiva. *Secundo* ſubtrahatur aſcenſio recta poli ab aſcenſione recta ſtellæ, ut habeatur argumentum ſecundæ æquationis ; & fiat: *ut cotangens declinationis ſtellæ eſt ad ſinum hujus argumenti inventi ; ita ſunt* 9″ *ad æquationem ſecundam*, quæ eſt {additiva / ſubtractiva} in ſtellis {borealibus / auſtralibus} in ſex primis ſignis argumenti; & {ſubtractiva / additiva} in ſex poſterioribus ſignis argumenti, ut habeatur aſcenſio recta ſtellæ per deviationem correcta.

Deviatio enim in aſcenſione recta eſt differentia inter angulos EPS, & E *p* S; producatur P*p* in G, & in triangulo EPG habetur (Trig. 178) *d* PG (ſeu P*p*): *d* EPG = *t* EP · ſ GPE. Similiter in triangulo GPS habetur *d* PG (ſive P*p*): *d* SPG = *t* PS: ſ SPG.

781. *Pro deviatione in declinatione.* Aſcenſio recta poli ſubtrahatur ab aſcenſione recta ſtellæ, ut habeatur argumentum deviationis. Tum fiat: *ut radius eſt ad coſinum hujus argumenti ; ita ſunt* 9″ *ad deviationem in declinatione*, quæ eſt {additiva / ſubtractiva} in ſtellis {borealibus / auſtralibus} in tribus ultimis & tribus primis ſignis argumenti; & {ſubtractiva / additiva} in ſex aliis ſignis, ut obtineatur declinatio ſtellæ per deviationem correcta.

Quippe in triangulo SPG habetur (Trig. 177) *d* PG: *d* PS = R: *coſ* SPG.

782. Obſerva. Cum Bradleyus ſuas obſervationes examinaret, animadvertit, loco circuli *prt* poſſe adhiberi ellipſin, in qua *pu* = 18″ ſit axis major : & D. d'Alembert viribus nutationem axis terræ efficientibus ad calculum revocatis invenit, axem minorem hujus ellipſis debere eſſe = 13″.4, quod cum calculis D. Euleri conſentit. Ut itaque æquationes accurratiores fiant, concipienda eſt ellipſis, quæ ſit projectio orthographica epicycli *prt*: punctum *p* accipiendum eſt in epicyclo, prout ratio aſcenſionis rectæ poli exigit, & quærendum punctum (359) correſpondens ellipſeos, ejusque diſtantia a centro ellipſeos. Utrumque e ſequentibus analogiis reperiri potéſt: *ut* 134 *ad* 180: *ita eſt tangens aſcenſionis rectæ poli ſuperius inventæ ad tangentem aſcenſionis rectæ reductæ, quæ prioris loco in calculo præcedentium regularum adhiberi debet.* Item *ut ſinus aſcenſionis rectæ jam reductæ*

ductæ est ad sinum ascensionis rectæ, quæ prius adhibebatur; ita sunt 9″ ad quantitatem adhibendam in omnibus regulis præcedentibus loco 9″.

Calculus aberrationis.

783. Brevitatis gratia demonstrationes regularum, quas adferimus, non dabimus, utpote intricatiores, cum jam alias earum principia N. 391 stabiliverimus. Porro regulæ, quas pro ascensione recta, & declinatione damus, nulla ratione a longitudine & latitudine stellæ dependent: id quod a nemine adhuc factum est.

784. *Pro aberratione in longitudine & latitudine.* Longitudo solis subtrahatur a longitudine stellæ, habebitur *argumentum annuum*, & aberratio in longitudine erit $= \frac{20'' \times cos. Arg. ann.}{cos. lat. stell.}$, quæ est subtractiva in tribus primis, & tribus posterioribus signis argumenti annui: & additiva in sex reliquis. Aberratio vero in latitudine erit $= 20''$ $\times$ *sin. latit. stell.* $\times$ *sin. arg ann.*, estque additiva in sex primis signis argumenti annui, in sex posterioribus subtractiva, ut obtineatur longitudo & latitudo per aberrationem correcta.

785. *Pro aberratione in ascensione recta.* Ex tabulis astronomicis, vel calendario, quod exhibet longitudinem, ascensionem rectam, & declinationem solis, quæratur longitudo & declinatio puncti ecliptice respondentis puncto æquatoris, quod designat ascensionem rectam stellæ: a longitudine inventa subtrahatur longitudo solis pro die dato; habebitur argumentum annuum aberrationis in ascensione recta, ipsaque aberratio quæsita erit $=$ $\frac{20'' \times cos. arg. ann. \times cos. obliquit. eclipt.}{cos. declin. stell. \times cos. declin. punct. eclipt.}$, quæ est subtractiva in tribus primis, & tribus ultimis signis argumenti annui, & additiva in sex reliquis, ut habeatur ascensio recta per aberrationem correcta.

786. *Pro aberratione in declinatione.* In tabulis astronomicis, vel calendario, quæratur declinatio puncti ecliptice, quod respondet puncto æquatoris designanti ascensionem rectam stellæ: summa vel differentia (prout vel diversæ, vel ejusdem denominationis sunt) hujus, & declinationis stellæ, dicatur X, & fiat: *ut cosinus declinationis inventæ est ad cosinum obliquitatis ecliptice; ita sinus summæ vel differentiæ* X, *est ad cosinum arcus, qui dicatur* Y. Tum fiat iterum: *ut sinus arcus* Y *est ad cosinum ascensionis rectæ stellæ; ita est sinus declinationis stellæ ad sinum arcus, qui vocetur* Z.

Jam vero Z erit semper minor 90 gradibus, si stella fuerit intra tropicos, & si ascensio recta stellæ $\left\{\begin{matrix} \text{borealis} \\ \text{australis} \end{matrix}\right\}$ fuerit intra $\left\{\begin{matrix} 180° \text{ \& } 360° \\ 0° \text{ \& } 180° \end{matrix}\right\}$. In aliis casibus fiat: *ut radius ad tangentem obliquitatis*

tis eclipticæ; ita eſt cotangens declinationis ſtellæ ad ſinum arcus, qui dicatur A; & arcus Z erit major 90 gradibus, quando aſcenſio recta ſtellæ { borealis / auſtralis } eſt intra { 0° + A & 180° − A / 180° + A & 360° − A }. Arcus Z { addatur ad 0ˢ / ſubtrahatur a 6ˢ } pro ſtellis { borealibus / auſtralibus }, quando earum aſcenſio recta eſt in primo vel ultimo quadrante æquatoris; idem vero { ſubtrahatur a 12ˢ / addatur ad 6ˢ }, quando aſcenſio recta eſt in ſecundo & tertio quadrante æquatoris. Summa vel differentia ſic inventa eſt punctum eclipticæ, a quo ſubtrahenda eſt longitudo ſolis pro die dato, ut obtineatur argumentum annuum aberrationis in declinatione; eritque aberratio $= 20'' \times \sin. Y \times \cos. arg. ann.$, quæ ſubtrahenda eſt in tribus primis & tribus ultimis ſignis argumenti annui; addenda in ſex reliquis, ut habeatur declinatio ſtellæ per aberrationem correcta.

Applicatio horum calculorum ad Planetas.

787. Quoniam (506) motus planetarum computantur a puncto interſectionis Arietis, præceſſio media hoc ipſo in omnibus planetarum calculis jam adhibetur. Supereſt igitur, ut etiam ad eos applicetur deviatio ſervatis iisdem regulis, quæ pro fixis ſunt traditæ. Jam vero in praxi Aſtronomica, dum hi calculi inſtituuntur pro ſtellis fixis, id fere ſemper fit ideo, ut obtineatur earum ſitus apparens, hoc eſt, mutatus per omnes hos exiguos motus: at quando iidem calculi pro planetis inſtituuntur, fere ſemper finis eſt, ut ſitus obſervatus eorum ab effectu horum exiguorum motuum expurgetur. Itaque ſi quis regulis præcedentibus uti velit, ut locum obſervatum reducat, is ſigna deviationis mutare debebit, & ſubtractivam facere, quando additiva ponitur, ac viciſſim.

788. Quod ad aberrationem, regulæ pro planetis admodum diſcrepant ab iis, quæ pro fixis ſunt præſcriptæ. En autem generalem pro repurgando ſitu quovis obſervato ab effectu aberrationis, quam regulam D. Clairaut dedit (Monum. Acad. Reg. Scient. Pariſ. ad An. 1746 pag. 565): *ut motus horarius medius ſolis 2′, 28″ ductus in diſtantiam ejus mediam a terra, ad motum horarium ſyderis e terra viſum (ſcilicet ad motum in longitudine, in latitudine, in aſcenſione recta, in declinatione) ductum in diſtantiam actualem hujus ſyderis a terra acceptam in iisdem partibus, in quibus habetur diſtantia media ſolis a terra; ita ſunt 20″ ad quantitatem, qua longitudo, latitudo, aſcenſio recta, vel declinatio geocentrica hujus ſyderis minuenda eſt, quando creſcit; vel augenda, quando decreſcit.*

Idem applicari poteſt cometis, modo cognoſcantur circiter elementa eorum theoriæ, ut motus eorum horarius geocentricus, & diſtantia a terra calculentur.

CAPUT II.

De calculo eclipſium ſatellitum e ſuperficie planetæ primarii viſarum.

ARTICULUS I.

De determinatione phaſium eclipſium lunæ & ſolis.

789. Juxta theoriam de eclipſibus ſatellitum ſuperius expoſitam (N. 645 & ſeqq.) eclipſis ſolis incipit, & finitur, quando arcus diſtantiæ apparentis centrorum ſolis & ſatellitis eſt æqualis ſumæ eorum ſemidiametrorum; unde infertur, quod *ſi ex tabulis loco & momento conjunctionis veræ ſatellitis cum ſole calculatis, latitudo apparens ſatellitis ſit minor quam ea ſumma, certo futura ſit eclipſis ſolis*, quoniam tunc hæc latitudo exprimit arcum diſtantiæ centrorum ſolis & ſatellitis e ſuperficie planetæ primarii viſorum.

790. Similiter, eclipſis ſatellitis, vel lunæ incipit, vel finitur, quando ejus centrum videtur diſtare a puncto eclipticæ planetæ primarii directe oppoſito centro ſolis (dicitur hoc punctum *centrum umbræ*) ſumma ſemidiametrorum ſatellitis e primario viſi, & umbræ in ea diſtantia, in qua umbram ſatelles ingreditur: item eclipſis ſatellitis incipit, vel deſinit eſſe totalis, quando centrum ſatellitis diſtat a centro umbræ exceſſu ſemidiametri umbræ ſupra ſemidiametrum ſatellitis; tunc enim intelligitur limbus diſci ſatellitis interne tangere limbum umbræ. *Tempus immerſionis* dicitur illud, quo indiget ſatelles, ut totus in umbram ingrediatur; & *tempus emerſionis* eſt, quo incipit emergere ex umbra, usque dum totus ſit egreſſus.

791. Hinc ſequitur, *quod calculato ex tabulis Aſtronomicis loco & momento oppoſitionis ſatellitis, certi ſimus de futura eclipſi, ſi ejus latitudo momento oppoſitionis minor ſit ſumma ſemidiametrorum umbræ & ſatellitis e primario viſi; & quod eclipſis ſit totalis, quando latitudo minor eſt exceſſu ſemidiametri umbræ ſupra ſemidiametrum ſatellitis.*

792. Ut habeatur magnitudo ſemidiametri umbræ in diſtantia, in qua eam ſatelles ingreditur, *addendæ ſunt parallaxes horizontales ſolis & ſatellitis reſpectu planetæ primarii; & a ſumma ſubtrahenda ſemidiameter ſolis e primario viſa.*

Sit

Sit enim S A (fig. 96) ſemidiameter ſolis S e planeta primario T ſub angulo S T A viſa; ſit C I arcus orbitæ ſatellitis L immergendi in umbram B E G primarii T. Centrum umbræ eſt in L, & arcus C L, ad ſenſum nil differens a recta, eſt ſemidiameter umbræ. Angulus B A T æqualis eſt (415) parallaxi horizontali ſolis; angulus B C T æquatur parallaxi horizontali ſatellitis; & angulus C T D æqualis eſt (Elem. 492) ſummæ harum duarum parallaxeon: ſi itaque ſubtrahatur angulus L T D vel A T S æqualis ſemidiametro ſolis e primario viſæ, remanebit angulus C T L, ſive arcus C L, qui eſt ſemidiameter umbræ primarii in ea diſtantia, in qua ſatelles immergitur.

793. Obſerva I. Quamvis punctum C ſit limes umbræ primarii, nihilominus ſplendor ſatellitis vehementer hebetatur, antequam ad illud perveniat. Nam ut a puncto H, in quod incidit tangens H B M, verſus C progreditur, ita ei magis ſemper & magis aſpectus diſci ſolaris eripitur, qui ei ſub primario T occultatur, & hinc lumen ſatellitis magis ſemper debilitatur, donec in puncto C & lumen omne, & aſpectum ſolis ex integro amittat. Spatium H C, cum ratione expoſita tam parum a ſole illuſtretur, *Penumbra* dicitur. Idem eſt de ſpatio K I, in quo ſatelles ſemper magis lucem ſolis recuperat.

794. Obſerva II. Accidit quandoque, ut ſatelles adeo vicinus fiat umbræ, ut in penumbram ingrediatur. Tum ea parte, qua umbræ propior eſt, obſcurior fit, poſtea priorem ſplendorem recuperat.

795. Obſerva III. Cum atmoſphæra aerea tellurem ambiens ſit admodum denſa, præprimis circa ſuperficiem terræ, magnitudinem umbræ, quam terra projicit, auget; atque hinc aliquot minuta ſecunda parallaxi horizontali lunæ addi ſolent, plura ab aliis, ab aliis pauciora, prout extenſio atmoſphæræ major minorve ſtatuitur.

796. Obſerva IV. Alter effectus atmoſphæræ eſt, quod radios ſolares directione tangentium planetam primarium incidentes refringat, ac intra umbram verſus L dirigat, quo obſcuritas minuitur. Atque hoc præcipue in eclipſibus totalibus lunæ advertitur, quibus durantibus luna manet conſpicua, & magis quidem circa medium, dum eſt verſus L, quam dum limitibus umbræ C & K eſt propior.

797. Problema I. *Omnia phænomena eclipſis ſatellitis graphice determinare.*

Reſolutio. Calculetur e tabulis aſtronomicis locus ſatellitis ad eclipticam reductus, ejus latitudo, motus horarius, parallaxis horizontalis, & ſemidiameter: tum etiam locus ſolis, motus horarius,

parallaxis horizontalis, & ſemidiameter: & hæc quidem omnia pro tempore quovis a momento oppoſitionis ſatellitis parum diſtante. Sumatur pro exemplo eclipſis lunæ die 30 Auguſti Anno 1746. Ex tabulis Caſſinianis reperitur, quod oppoſitio debeat contingere circa mediam noctem: unde quærantur omnia elementa ſuperius indicata pro 11 h. 30′ tempore vero. Erit locus lunæ 7°, 4′, 33″ ♈: ejus latitudo 41′, 50″ auſtralis; motus horarius 31′, 28″; parallaxis horizontalis 56′, 15″; ſemidiameter 15′, 13″. Item locus ſolis 7°, 18′, 36″ ♍, ejus motus horarius 2′, 25″; ſemidiameter 15′, 55″, parallaxis horizontalis 10″; ex quibus colligitur ſemidiameter umbræ terræ (792) 40′, 29″, ſeu (additis propter atmoſphæram 49″) 41′, 18″: inclinatio orbitæ lunæ cum ſuo circulo latitudinis, eſt 84°, 45′ verſus orientem; ex quo apparet, quod luna tendat verſus ſuum nodum aſcendentem.

798. In charta majore conſtruatur ſcala A B (fig. 97) in ſexaginta minuta gradus diviſa, ita ut ſingula minuta ſaltem ſint duarum linearum pedis Regii Pariſini. Ad ſiniſtram adſcribatur *oriens*, ad dextram *occidens*, ſuperne *ſeptentrio*, inferius *meridies*. Ducatur recta indefinita O C, quæ deſignet eclipticam, in qua puncto D ad libitum ſumpto conſtituatur locus lunæ pro 11 h. 30′. Ducatur ex D deorſum perpendicularis ad O C, linea D L æqualis 41′, 50″ in ſcala acceptis: erit in L locus verus lunæ pro 11 h. 30′. Conſtruatur ad L angulus D L P 84°, 45′ verſus orientem, exhibebit P L orbitam lunæ. Supponitur enim, ob motum regularem lunæ in ſyzygiis, & exiguum ſpatium, quod durante eclipſi conficit, quod arcus orbitæ a recta non differat, & motu æquabili deſcribatur. E puncto D verſus ortum transferantur in Z ex ſcala 31′, 28″, motus horarius lunæ ad eclipticam reductus; & ducatur Z F ad O C normalis, erit F locus verus lunæ in ſua orbita pro 12 h. 30′.

799. Accipiatur diſtantia lunæ a puncto directe oppoſito loco ſolis, hoc eſt, differentia inter 7°, 18′, 36″, & 7°, 4′, 33″, quæ eſt 14′ 3″, quæ luna adhuc conficere debet, ſeu quibus adhuc occidentalior eſt, quam punctum loco ſolis directe oppoſitum, in quo ſimul eſt centrum umbræ telluris. Eadem 14′, 3″ in ſcala A B accepta transferantur e puncto D in G verſus orientem, erit G locus centri umbræ pro 11 h. 30′. Fiat G M = 2′, 25″ ſcalæ, qui eſt motus horarius ſolis, ſeu umbræ; erit centrum umbræ 12 h. 30′ in M; & quia obſervator e ſuperficie telluris non niſi motum relativum lunæ videt, jungatur M F, eique ducatur ex G parallela & æqualis G K, erit in K (347) locus apparens lunæ reſpectu umbræ, quæ in G immobilis ſupponitur. Per puncta L & K ducatur

tur N L K I, quæ erit orbita optica, ſive apparens, lunæ. Spatium L K dividatur in minuta temporis, v. g. interna, in quaterna, vel quina &c. adſcripto ad L tempore 11 h. 30′, & ad K 12 h. 30′. Eadem diviſio continuetur per orbitam apparentem N I, ut ſciatur locus apparens centri lunæ pro quovis tempore, tam ante 12 h. 30′, (pro quo calculus factus eſt), quam poſtea.

800. Ex puncto G demittatur in orbitam apparentem lunæ perpendiculum G E, quod cum ſit linea breviſſima, quæ ex puncto G, in quo umbræ centrum ſupponitur immobile, duci poteſt, determinat locum apparentem centri lunæ E pro eo momento, quo minimam a centro umbræ diſtantiam habet, conſequenter pro momento eclipſis mediæ. Ex diviſionibus lineæ N I apparebit, punctum E incidere in 12 h. 7′, ex quo colligitur hoc eodem tempore eſſe medium eclipſeos.

801. Ut habeatur initium & finis, accipiantur in ſcala 56′, 31″, ſive ſumma ſemidiametrorum umbræ & lunæ, eoque intervallo ex puncto G tanquam centro interſecetur orbita apparens lunæ in N & I, quæ interſectionum puncta incident in 10 h. 44′ ½, & 13 h. 29′ ½. Quare initium eclipſeos erit 10 h. 44′ ½, finis die 31 Auguſti, 1 h. 29′ ½ mane.

802. Denique ut ſciatur quantitas eclipſis, centro E, radio æquali ſemidiametro lunæ, ſive 15′, 13″ in ſcala acceptis, deſcribatur circulus V F H, qui deſignet lunam in eclipſi media: diameter V H dividatur in partes 12 æquales, quæ *digiti ecliptici* dicuntur: centro G, radio æquali ſemidiametro umbræ, ſive 41′, 18″ ſcalæ, deſcribatur ſemicirculus S X T, qui limites umbræ determinat: numerus diviſionum in diametro V H hoc ſemicirculo abſciſſus exprimit quantitatem eclipſis, hic 6 ⅔; unde apparet, obſcurari 6 dig. 24′ in parte boreali diſci lunæ.

803. Obſerva. Ex conſtructione hujus ſchematis manifeſtum eſt, quod orbita vera lunæ L F ad apparentem L K reducta, angulus inclinationis orbitæ lunæ cum circulo latitudinis exigua quadam quantitate K L F, quæ a ratione motuum horariorum ſolis & lunæ dependet, minuatur; & quod ſimul arcus L K orbitæ apparentis, reddatur minor arcu horario orbitæ veræ L F, quantitate ad ſenſum æquali motui horario ſolis K F, ſeu G M. Atque hinc eſt, quod in praxi compendii cauſa ab angulo inclinationis orbitæ lunæ ſubducatur *angulus reductionis* K L F, qui in tabulis modernis aſtronomicis jam habetur: quo facto ſtatim ab initio ducitur orbita apparens L I, in qua accipitur portio L K æqualis exceſſui motus horarii lunæ in ſua orbita ſupra motum horarium ſolis (dicitur

citur autem hic exceſſus *motus horarius compoſitus*), atque ut vidimus, in tempus dividitur.

804. Sit alterum exemplum pro eclipſi totali, quæ contigit die 8 Auguſti A. 1729. Ex tabulis Caſſinianis reperitur oppoſitio lunæ cum ſole 13 h. 17′, 30″ tempore vero, in 16°, 16′, 57″ ♒. Latitudo lunæ borealis 7′, 18″; ejus motus horarius 34′, 48″, & in ſua orbita 34′ 56″: ſemidiameter 16′, 0″; parallaxis horizontalis 59′, 10″; inclinatio orbitæ vera cum circulo latitudinis 84°, 59′ verſus occidentem. Motus horarius ſolis 2′, 24″, ejus ſemidiameter 15′, 51″, conſequenter vera ſemidiameter umbræ terræ 44′, 18″; motus horarius compoſitus 32′, 32″, & inclinatio apparens 84°, 35′.

Conſtructa ſcala A B (fig. 100), ſit ecliptica O C, in qua conſtituatur locus verus lunæ ad eclipticam reductus in G, & L ſit ejus verus locus in orbita, ita ut G L erigatur ſurſum perpendiculariter ad O C, ſitque æqualis 7′ 18″ in ſcala acceptis, ob lunæ latitudinem borealem. Conſtruatur angulus G L N 84°, 35′ verſus occaſum, & ducatur orbita apparens lunæ P L N. Fiat L K æqualis motui horario compoſito lunæ & ſolis 32′, 32″, & dividatur in partes temporis ita, ut puncto L reſpondeat 13 h. 17′½, & puncto K 14 h. 17′½. Ex G ducatur perpendicularis in orbitam apparentem G E, quæ determinabit medium eclipſis in E 13 h. 16′. E centro G, intervallo ſummæ ſemidiametrorum umbræ & lunæ, ſive 60′, 18″ ſcalæ, ſecetur ad ortum & occaſum orbita apparens in N & I, habebitur initium eclipſis 11 h. 24′, & finis 15 h. 7′. Eodem centro G intervallo 28′, 18″ ſcalæ (quæ eſt differentia ſemidiametrorum umbræ & lunæ) fiant etiam interſectiones Q & P in orbita apparente, quæ determinant momentum immerſionis totalis 12 h. 25′, & initium emerſionis 14 h. 6′. Denique centro E, radio æquali ſemidiametro lunæ 16′, 0″, deſcribatur circulus exhibens lunam in medio eclipſeos: per E ducatur indefinita ϑ X, & dividatur diameter H V in duodecim digitos, eaque diviſio transferatur in H X, donec excurrat extra circulum O X C, centro G radio æquali ſemidiametro umbræ 44′, 18″ deſcriptum, qui ſectionem umbræ telluris exprimit: portio V X deſignat quantitatem eclipſis, circiter 20 digitorum.

805. Huic conſtructioni facile applicatur calculus trigonometricus, qui phaſes indicatas longe accuratius determinabit. Etenim in triangulo G L E ad E rectangulo habetur G L = 7′, 18″, & G L E = 84°, 35′, hinc G E = 7′, 16″; & E L = 41″. In triangulis G E N, G E Q, ad E rectangulis, nota ſunt G E = 7′, 16″, G N = 60′, 18″, & G Q = 28′, 18″; igitur reperitur E N = 59′, 52″,

52″, & EQ = 27′, 21″. Subtractis 2′, 24″ seu motu horario solis, a 34′, 48″, sive motu horario lunæ in ecliptica, & EL, EN, EQ in tempus conversis, (horæ uni tributa differentia 32′, 24″), habetur EL = 1′, 17″, & inde punctum E, sive medium eclipseos, 13 h. 16′, 13″; EN = 1 h. 50′, 51″, & initium eclipseos 11 h. 25′, 22″, finis 15 h. 7′, 4″; denique EQ = 50′, 39″, consequenter immersio 12 h. 25′, 34″, & emersio 14 h. 6′, 52″. Denique si fiat: *ut semidiameter lunæ* 16′, 0″ *ad 6 digitos; ita* 53′, 2″ (*seu differentia inter* GE 7′, 16″, *& summam semidiametrorum umbræ & lunæ* = 60′, 18″) *sunt ad* 19 *dig.* 53′, habetur quantitas eclipsis.

806. PROBLEMA II. *Determinare graphice phases eclipseos solis pro loco in superficie planetæ primarii, v. g. Telluris, dato.*

Resolutio. Ut construatur schema eclipsis solaris, observator in ipso sole collocandus est, e quo spectet tellurem circa axem suum conversum, loca in ejus superficie soli exposita ellipses describentia &c. ut Sect. IV explicatum est. Quod si jam contingat, us dum observator considerationi alicujus ex istis locis, v. g. Urbis Parisinæ, intentus est, luna inter hanc urbem, & observatoris oculum interponatur, & ipsius aspectui hæc urbs eripiatur, & simul Parisiorum incolæ locum solis, in quo observator est positus, videre desinunt.

807. Illud igitur agendum est, ut exhibeatur via, quam punctum quodpiam superficiei telluris e sole visum motu rotationis videtur describere, & simul lunæ semita, ut appareat, quando & quommodo hoc punctum luna soli subducat.

Sint exempli causa determinandæ phases eclipsis solis, quæ 26 Octobris 1753 contigit. Conjunctio vera solis & lunæ secundum tabulas D. Halley fuit 10 h. 57′ tempore vero mane, in 3°, 10′, 16″ ♏; solis declinatio australis 12°, 35′½; motus horarius 2′, 30″, semidiameter 16′, 11″. Latitudo vera lunæ borealis 34′, 58″; ejus motus horarius in ecliptica 35′, 26″, & in sua orbita 35′, 34″; semidiameter horizontalis 16′, 8″; parallaxis horizontalis 58′, 49″; inclinatio orbitæ apparentis 84°, 21′; & motus horarius compositus lunæ ac solis 33′, 4″.

808. Habitis hisce elementis construatur scala GA, 60 minutorum, quæ singula saltem duarum linearum sint (Fig. 101); & accepta ex ea parallaxi horizontali lunæ tanquam radio describatur semicirculus OXC, qui hemisphærium boreale telluris e sole visæ exhibet, ejusque diameter OC sectionem illius cum plano eclipticæ. E centro G erigatur perpendicularis GL, latitudini lunæ boreali 34′, 58″ æqualis. Versus occidentem fiat angulus GLQ 84°, 21′, & habetur orbita apparens lunæ, quæ in tempus dividatur, ita, ut

ad

ad punctum L sint 10 h. 57′; & ad K, quod ab L 33′, 4″ distat, 11 h. 57′. Ex declinatione australi solis 12°, 35′½, determinetur (607) locus poli borealis telluris P, qui ob declinationem solis australem erit in parte disci aversa; & describatur (626) portio ellipseos, quæ sit projectio orthographica arcus diurni paralleli urbis Parisinæ pro die eclipseos, in cujus arcu superiore notentur horæ diurnæ, cum elevatio poli, & declinatio solis sint diversi nominis.

809. Accipiantur ex scala circino 32′, 19″ (quæ est summa semidiametrorum solis ac lunæ) & posito crure uno circini in orbita lunæ, altero in ellipsi, quærantur tum ad orientem, cum ad occidentem, duo puncta in utriusque divisione idem momentum temporis notantia, eoque a sese intervallo remota, scilicet Q, R, & E, F: priora determinabunt initium eclipseos 8 h. 39′; posteriora finem 11 h. 8′. Patet enim ex ipsa constructione, urbem Parisinam 8 h. 39′ e sole debere videri in R, & centrum lunæ in Q: & quia linea Q R designat summam semidiametrorum solis & lunæ in iisdem partibus, in quibus G C exprimit parallaxin horizontalem lunæ; manifestum est, quod eadem linea æquetur distantiæ centrorum solis & lunæ e tellure visæ eo momento, quo utriusque limbi sese contingere videntur.

810. Ut obtineatur medium, & quantitas eclipsis, quærantur duo puncta I & D, in ellipsi & orbita lunæ idem tempus notantia, & quæ simul minimam habeant distantiam: reperientur circa 9 h. 50′. Centro I, radio æquali semidiametro solis 16′, 21″ scalæ, descriptus circulus solem exhibet, cujus diameter per D transiens dividatur in 12 digitos eclipticos. Centro D, radio æquali semidiametro lunæ descriptus alter circulus lunam exprimit in medio eclipsis, & numerus digitorum in diametro prioris abscissus, hic 8½, eclipseos quantitatem.

811. Observa. In hac constructione supponitur sol in distantia fere infinita a terra & luna; rectæ, per quas fit projectio diametri lunæ in plano figuræ, parallelæ; via, quam urbs Parisina e sole visa, describit, arcus ellipseos veræ; diameter lunæ e terra visa constans; ejus motus rectilineus & æquabilis &c. Nulla ex his hypothesibus exacte congruit iis, quæ reipsa in cælo contingunt. Atque hinc manifestum est, quod suppositis elementis e tabulis desumptis accuratis, phases eclipseos non nisi prope veræ deduci possint. Et quamvis contingat, ut errores inde enati sæpe alter alterum emendent; attamen recte existimari potest, tempus omne ejusmodi operationibus utcunque sollicite institutis graphice determinatum, duobus, tribusve minutis incertum reddi. Interim hæc accu-

accuratio abunde ſufficit, ſi in eum ſolummodo finem tempus quæratur, ut quis obſervationi ſatis mature ſe accingat. Unde Problema, quod huic ſubjungimus, tunc ſolum uſum habet, quando quis exacte ſcire cupit, quid ex elementis tabularum elici poſſit, ut ſeu comprobentur, ſeu emendentur.

812. PROBLEMA III. *Determinare per calculum phænomena eclipſis ſolaris.*

Reſolutio. I. Quæratur graphice, vel calculo rudius inſtituto, initium & finis eclipſeos ſolis, & tempus durationis in ſex, ſeptem, aut 8 partes æquales dividatur. (ſi duratio ſit horaria circiter, ſufficit eam in quinque partes tribuere). Exemplum ſit in eclipſi diei 26 Octob. 1753, cujus initium cum ſit circa 8 ½ h., & finis 11 h. tempore medio mane, tota duratio dividatur in tricena minuta, & ſingula intervalla ſcribantur ad initium totidem columnarum, quemadmodum videri poteſt in tabula huic problemati ſubjecta, quæ diſpoſitionem calculi exhibet.

813. II. Calculetur ex tabulis aſtronomicis pro temporibus in columnis notatis locus verus ſolis, locus verus lunæ, ejusque latitudo, indeque pro ſingulis inveniantur diſtantiæ lunæ a polo eclipticæ ſupra horizontem, & parallaxis horizontalis, a qua, ut parallaxis ſolis compenſetur, 10″ ſubtrahantur. ſumtis dein partibus proportionalibus, eadem in reliquis columnis notentur.

814. III. Tempus medium ab initio cujusvis columnæ notatum convertatur in gradus, & eidem addatur locus medius ſolis: ſumma eſt (337) punctum æquatoris, quod tempore cuivis columnæ adſcripto per meridianum tranſit. Quæratur ex tabulis aſtronomicis *primo* punctum eclipticæ reſpondens puncto invento æquatoris (dicitur hoc punctum eclipticæ *punctum culminans*, cum ſimul cum priore ad meridianum veniat). *Secundo* angulus meridiani cum ecliptica ad punctum culminans. *Tertio* declinatio puncti culminantis; qua habita, quæratur ejusdem puncti altitudo (279). Tum inferatur: *ut radius eſt ad coſinum altitudinis puncti culminantis; ita eſt ſinus anguli eclipticæ cum meridiano ad coſinum altitudinis Nonageſimi.* Et rurſus: *ut radius ad cotangentem altitudinis puncti culminantis; ita eſt coſinus anguli eclipticæ cum meridiano ad tangentem arcus qui* (in hemiſphærio terræ boreali) *addendus eſt longitudini puncti culminantis, quando punctum culminans eſt in primo vel ultimo quadrante eclipticæ; & ſubtrahendus in ſecundo & tertio* (oppoſitum faciendum eſt in hemiſphærio auſtrali), *ut habeatur Nonageſimus.* Totus hic calculus neglectis ſecundis tantum inſtituitur in gradibus, & minutis primis. Pro demonſtratione, ſit HER meridianus (fig. 106), HTR horizon, QT æquator, E punctum culminans. Si per E ducatur arcus EIP ita, ut angulus HEP ſit æqualis angulo eclipticæ cum

meridiano, erit arcus E I P portio eclipticæ inter meridianum, & horizontem intercepta; & si sit minor 90 gradibus, erit complementum Nonagesimi, a puncto P semper 90° distantis. Jam in triangulo sphærico H E P ad H rectangulo, habetur angulus H E P, & latus H E; unde per primam analogiam reperitur angulus H P E, inclinationis eclipticæ ad horizontem, quæ æquatur (Trig. 12) altitudini Nonagesimi: deinde per secundam analogiam invenitur complementum arcus E I P, quod semper est minus 90 gradibus, quando H E & H E P sunt ejusdem speciei.

815. IV. Accipiatur in singulis columnis differentia inter locum verum lunæ, & Nonagesimum, ut habeatur distantia *vera* lunæ a Nonagesimo. Postea fiat: *ut quadratum radii est ad factum ex sinu altitudinis Nonagesimi in sinum distantiæ* apparentis *lunæ a Nonagesimo; ita est parallaxis horizontalis correcta ad parallaxin lunæ in longitudine.* Quoniam autem in hoc calculo adhibenda est distantia apparens a Nonagesimo (quæ semper est æqualis summæ ex distantia vera, & parallaxi in longitudine), ne duplex calculus ex integro faciendus sit, is tantum instituatur accurate pro prima & secunda columna, adhibitis ab initio distantiis veris, ut reperiantur parallaxes circiter, dein calculus resumatur, additis ad distantias veras parallaxibus inventis; sicque obtinebuntur parallaxes veræ primæ & secundæ columnæ, e quarum comparatione facile constabit, quid addi debeat distantiæ veræ columnæ tertiæ, ut ejusdem calculi subsidio parallaxis vera in longitudine habeatur. Atque ita per reliquas columnas progrediendum usque ad ultimam.

816. V. Inferatur: *ut radius est ad cosinum altitudinis Nonagesimi; ita est parallaxis horizontalis correcta lunæ ad parallaxin approximatam in latitudine.* Deinde: *ut tangens distantiæ apparentis lunæ a nonagesimo, ad cosinum summæ ex distantia vera lunæ a polo eclipticæ supra horizontem, & parallaxi approximata in latitudine; ita est parallaxis in longitudine ad quantitatem semper subtrahendam a parallaxi approximata in latitudine, ut habeatur vera,* saltem si distantia apparens lunæ a Nonagesimo, & ejus distantia apparens a polo eclipticæ non sit altera minor, altera major 90 gradibus, quo casu correctio est additiva.

817. Observa. Analogiæ præcedentium duorum numerorum deductæ sunt ex formulis N. 434 relatis, omisso solummodo cosinu latitudinis lunæ, qui ad sensum æqualis radio in eclipsibus solaribus. Analogia, qua reperitur correctio, est pars secunda formulæ secundæ, in qua compendii causa parallaxi horizontali substituta est parallaxis in longitudine.

818. VI. Singulis longitudinibus veris lunæ addantur singulæ parallaxes in longitudine, si luna in ordine signorum jam ultra Nona-

Nonageſimum progreſſa eſt; ſubtrahantur vero, ſi longitudo lunæ minor eſt: hac ratione habebitur pro ſingulis columnis longitudo lunæ apparens. Addantur etiam parallaxes in latitudine diſtantiis veris lunæ a polo eclipticæ ſupra horizontem, ut obtineantur diſtantiæ apparentes; ex quibus habebuntur etiam latitudines lunæ apparentes.

819. VII. Accipiatur quævis latitudo apparens lunæ pro una catheto trianguli rectanguli rectilinei, & differentia inter locum verum ſolis, & longitudinem apparentem lunæ pro altera catheto, & quæratur hypotenuſa, quæ eſt diſtantia apparens centrorum lunæ & ſolis.

820. VIII. Fiat pro prima & ultima columna: *ut radius eſt ad coſinum diſtantiæ apparentis lunæ a nonageſimo; ita eſt ſinus altitudinis Nonageſimi ad ſinum altitudinis lunæ prope veræ*, quæ ſi ad duos, tresve circiter gradus cognoſcatur, ſatis eſt, ut poſſit correctio ſemidiametri horizontalis lunæ in tabulis aſtronomicis reperiri.

821. IX. Accipiatur ſumma ſemidiametrorum lunæ & ſolis hac ratione correctarum; & interpolentur tres diſtantiæ apparentes centrorum ex primis tribus columnis; item tres ex reliquis tribus columnis, ut inveniantur duo momenta, quibus diſtantia centrorum æquatur ſummæ ſemidiametrorum repertæ: erit primum initium eclipſeos, alterum finis ejusdem. Interpolentur etiam diſtantiæ centrorum e quatuor columnis medio propioribus; & ope formulæ *Maximi* (97) inveniatur momentum, quo diſtantia centrorum eſt minima ipſaque diſtantia: hæc ſubtrahatur a ſumma ſemidiametrorum apparentium, & inferatur *ut ſemidiameter ſolis eſt ad reſiduum; ita ſunt 6 digiti ad numerum digitorum, qui indicat quantitatem eclipſis* verſus eam partem, in quam cadit latitudo lunæ eo momento, quod eſt medium eclipſeos.

822. Eædem phaſes reperiri poſſunt, ſi calculentur parallaxes in aſcenſione recta & declinatione, & applicentur ad aſcenſiones rectas & declinationes veras lunæ; vel ſi calculentur Azimutha ſolis & lunæ cum parallaxibus in altitudine lunæ: ſed hæc in præſens non diſcutimus; juverit tamen in his ſe exercuiſſe, ut in calculis aſtronomicis promptiores reddamur.

Dispositio Calculi Eclipsis Solis.

Exemplum pro die 25. Octobris A. 1753.

Tempus medium	20 h. 20′	20 h. 50′	21 h. 20′	21 h. 50′	22 h. 20′	22 h. 50′
	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.
Locus verus ☉	213 4 32	213 5 47	213 7 2	213 8 17	213 9 32	213 10 48
Locus verus ☾	211 47 0	212 4 42	212 22 25	212 40 8	212 57 51	214 15 35
Distant. ☾ a polo B..	89 42 43	89 31 5	89 29 27	89 27 49	89 26 11	89 24 33
Parall. correct. ☾ ...	58 31	58 31	58 30	58 30	58 29	58 29
Tempus med. in grad.	305 0	312 30	320 0	327 30	335 0	342 30
Long. med. ☉	214 50	214 51	214 52	214 53	214 54	214 56
Punct. æqua. in merid.	159 50	167 21	174 52	182 23	189 54	197 26
Punctum culminans.	158 11	166 15	174 24	182 36	190 47	198 54
Ang. eclipt. cum meri.	68 2	67 7	66 37	66 32	66 53	67 39
Declin. punct. culmin.	8 32 B.	5 26 B.	2 14 B.	1 2 A.	4 17 A.	7 25 A.
Altit. punct. culmin.	49 41	46 35	43 23	40 7	36 52	33 34
Altitudo Nonagesimi	53 7	50 43	48 9	45 27	42 38	39 43
Nonagesimus	140 34	146 3	151 38	157 18	163 9	169 14
Distant. ☾ a Nonages.	71 13	66 2	60 44	55 22	49 49	45 2
Parall. in longit. ..	44 31	41 36	38 15	34 33	30 29	26 38
Parall. in latit. ...	35 9	37 6	39 5	41 6	43 6	45 3
Longit. appar. ☾ ..	212 31 31	212 46 18	213 0 40	213 14 41	213 28 20	213 42 13
Dist. appar. a Polo B	90 7 52	90 8 11	90 8 32	90 8 55	90 9 17	90 9 36
Differ. long. ☉ & ☾.	+ 33 1	+ 19 29	+ 6 22	— 6 24	— 18 48	— 31 25
Distant. centrorum..	33 57	21 8	10 39	10 59	20 58	32 51
Altit. ☾.	14 20					26 38
Semidiam. horiz. ☾.	16 8					16 8
Semidiamet. appar. ☾.	16 12		16 14			16 16
Semidiam. ☉.	16 11		16 11			16 11
Summa Semidiam.	32 23		32 25			32 27

Igitur	*Temp. med.*	*Temp. vero & civili*
Initium	20 h. 23′, 24″	die 26, 8 h. 39′ 8″ mane
Medium	21 34, 46	9 50 30
Finis	22 49, 4	11 4 46

Quantitas 8 dig. 29 minut. ex parte australi solis.

ARTICULUS II.

De uſu obſervationum eclipſium ſolis & lunæ.

823. Obſervationes eclipſium ſummam habent utilitatem, maxime ſi accuratæ ſint. Inprimis enim indicant, an elementa theoriæ ſolis & lunæ, quæ in tabulis aſtronomicis jam extant, recte conſtituta ſint, an ſecus; ut inde ſeu emendentur, ſeu majorem firmitatem accipiant.

Dein præcipuus earum uſus eſt in determinandis longitudinibus locorum, in quibus inſtitutæ ſunt, ſeu ſaltem in differentia eorum meridianorum invenienda, in quo verſatur pars Geographiæ uti difficilior, ita ceteris majoris momenti. Verum quoniam in his eruendis aliter tractandæ ſunt eclipſes ſolares, aliter lunares, diſtinctis de utrisque titulis agemus.

Uſus obſervationum eclipſium lunæ in inveniendis longitudinibus geographicis.

824. Cum phaſes eclipſium lunæ univerſales ſint (651), manifeſtum eſt, quod (616) ſi duo obſervatores in diverſis locis poſiti eandem phaſin eodem temporis momento habeant, uterque locus ſit in eodem meridiano terreſtri, adeoque cognita longitudine loci alterius, certum fiat, alterius eandem eſſe omnino longitudinem. At ſi uterque obſervator eandem phaſin diverſo ſpectet tempore, evidens eſt, eos ſub diverſis meridianis eſſe collocatos, quorum differentia ſit differentia temporis obſervati in gradus converſa, horæ uni 15° tribuendo. Patet denique locum, in quo phaſis tardius eſt obſervata, eſſe orientaliorem altero, quippe qui prior ad meridianum venerit, ac altero citius habuerit meridiem.

825. Exemplum ſit eclipſis diei 8 Auguſti A. 1729. Immerſio lunæ in umbram obſervata fuit Pariſiis a D. Caſſini 12 h. 19′, 13″: & emerſio 13 h. 59′, 0″ (Monum. Acad. 1729, pag. 345). In inſula Barbados (Antillarum una) immerſio 8 h. 11′, & emerſio 9 h. 51′ fuit obſervata a D. Stevenſon (Transact. Philoſ. N. 416, pag. 441). Differentiæ ſunt 4 h. 8′, 13″, & 4 h. 8′, 0″. Si accipiatur medium 4 h. 8′ 6″, & convertatur in gradus, liquet, inſulam Barbados (ubi minus temporis numeratum fuit) eſſe Pariſiis occidentaliorem 62°, 1′½; & hinc poſita longitudine Pariſiorum 19°, 53′½ ab inſula Ferri, eſt longitudo inſulæ Barbados 317°, 52′.

826. Quia penumbra phaſes initii & finis eclipſeos valde incertas reddit, Aſtronomi diligenter annotant momenta temporis, quibus diverſæ lunæ maculæ in umbram ingrediuntur, & egrediuntur, id, quod facile obſervatur ope chartæ lunaris, & bonæ notæ teleſcopii, 4,

vel 5 pedes longi. Hac ratione obſervationum numerus augetur, & pluribus differentiis inter ſe collatis differentia meridianorum certius eruitur.

827. In eundem finem adhibentur quoque obſervationes eclipſium ſatellitum Jovis (quorum calculus nihil differt ab eo, qui pro lunaribus inſtituitur). Obſervandæ autem ſunt hæ eclipſes tubis 12 vel 15 pedum; & ſi tempora phaſium earundem inter ſe conferantur, differentia meridianorum accurratius obtinetur, quam per eclipſes lunares.

Uſus obſervationum eclipſium ſolis in determinandis longitudinibus.

828. Quoniam ſolis eclipſes univerſales non ſunt, earum obſervationes non ſine reductionibus, quas jam indicabimus, ad inveniendam meridianorum differentiam adhiberi poſſunt.

829. Supponamus, Pariſiis initium eclipſis die 26 Octobris A. 1753 obſervatum eſſe 8 h. 41′, & finem 11 h. 11′; Bononiæ in Italia (cujus latitudo Geographica eſt 44°, 30′) initium fuiſſe 9 h. 27′, finem 11 h. 59′. Quærantur primo ex tabulis aſtronomicis omnia elementa neceſſaria pro calculo, & determinatione graphica phaſium hujus eclipſis. Conſtruatur inde figura, ut ſupra (806), & fiat projectio paralleli Bononienſis (vid. fig. 102). Accipiatur in ſcala ſumma ſemidiametrorum ſolis & lunæ (deducta ſi fieri poteſt, ex ipſa obſervatione Bononiæ facta; ſin autem, ex Tabulis); crus circini alterum collocetur ad 8 h. 41′ paralleli Pariſini; altero deſcribatur verſus occidentem arcus BH, ſecans orbitam apparentem KQ. Poſtea crus prius ponatur ad 11 h. 11′ paralleli Pariſini, & altero deſcribatur ad orientem arcus MN, qui eandem orbitam KQ ſecet.

Secundum obſervationem Pariſinam, duratio eclipſis fuit 2 h. 30′. Accipiatur circino intervallum 2 h. 30′ in orbita apparente QK in tempus diviſa, & manente hac circini apertura, colloce ur crus unum in T arcus BH, alterum in S arcus MN, ita ut recta jungens puncta T & S, ſit parallela ad KQ. Erit recta TS verus ſitus orbitæ apparentis lunæ ex obſervationibus; quam *orbitam correctam* vocabimus. Diviſiones orbitæ KQ transferantur in TS, ita, ut ad punctum T accurate veniat 8 h. 41′, & ad punctum S 11 h. 11′.

Circino ad intervallum ſummæ ſemidiametrorum ſolis & lunæ aperto, ponatur alterum crus in parallelo Bononienſi ad punctum C, in quo 9 h. 27′ notantur; incidet crus alterum verſus partem occidentalem orbitæ correctæ in D, cui adſcripta ſunt 8 h. 51′. Ex hoc intelligitur, quod tempore vero, quo Bononiæ initium eclipſis obſervatum eſt, Pariſiis fuerit 8 h. 51′: aut (quod eodem reci-

recidit) quod eo momento, quo centrum lunæ fuit in D, Bononiæ fuerit 9 h. 27′, Parisiis vero 8 h. 51′. Igitur ex hac observatione Bononia orientalior est Parisiis 36′ in tempore. Similiter collocetur crus unum circini ad punctum E paralleli Bononiensis, ubi notantur 11 h. 59′: cadet alterum versus orientem in orbita correcta in punctum F notatum 11 h. 22′. Inde infertur differentia meridianorum 37′; & accepto inter utramque medio, reperitur Bononia orientalior Parisiis 36′½ in tempore, seu 9°, 7′½; & hinc ejus longitudo est 29°, 1′.

830. Observa I. Ex comparato situ & divisione orbitæ correctæ cum situ & divisione orbitæ K Q constructæ ex tabulis, deteguntur errores tabularum tam in longitudine, quam in latitudine. Differentia enim temporum punctis intersectionum utriusque orbitæ cum G L adscriptorum, ostendit, quantum tabulæ tempus veræ conjunctionis solis ac lunæ vel prævertant, vel sequantur. In præsenti exemplo patet, tabulas veram conjunctionem 2′ temporis prævertere. Intervallum autem utriusque orbitæ indicat errorem tabularum in latitudine; hic quidem latitudo ☾ e tabulis 2′ circiter vera major eruitur.

831. Observa II. Quamvis per operationes ejusmodi graphicas nemo sibi blandiri audeat, differentiam meridianorum accuratiorem se reperisse, quam quæ 2′ temporis a vera dissidere possit; quoniam tamen notitia longitudinum Geographicarum permagni momenti est, comparatio observationum eclipsium solarium negligenda non est, quia accepto medio inter differentias meridianorum hac methodo inventas, vera ea accuratione, quæ necessaria est, determinatur. Sed enim majore cum certitudine habebitur ex calculo parallaxeon, præcipue si ad meridianum exacte cognitum simul observata debita accuratione sit longitudo & latitudo lunæ, ut elementa e tabulis desumpta corrigi possint. Calculus nihil diversi habet ab illo, quem superius docuimus, ut adeo sola præcedentis exempli applicatio satis futura sit, ut plene comprehendatur.

832. Sit igitur initium eclipsis solis diei 25 Octobris 1753 Bononiæ observatum 21 h. 27′, 0″ tempore vero, seu 21 h. 11′, 16″ tempore medio. Cum constet, differentiam meridianorum quæsitam esse intra 30′ & 40′ temporis, fiat duplex hypothesis; in altera ea ponatur 40′; 30′ in altera. En rei totius ordinem:

	I. Suppoſitio			II. Suppoſitio		
Tempus medium obſervat. reductum ad Merid. Pariſ.	20 h.	31′	16″	20 h.	41′	16″
Tempus medium obſervat. Bonon. in grad. converſum	317°	49′	″	317°	49′	″
Longitud. med. ☉ ad Merid. Pariſ. - - - -	214	50		214	50	
Punctum æquatoris in Merid. aſſumpto Bonon. -	172	39		172	39	
Punctum culminans eclipt. - - - - - - - -	172	0		172	0	
Angulus eclipticæ cum Merid. - - - - - - -	66	43		66	43	
Declinatio puncti culminantis - - - - - - -	3	11 B		3	11 B	
Altitudo puncti culminantis Bononiæ - - - -	48	31		48	31	
Altitudo Nonageſimi - - - - - - - - - -	52	31		52	31	
Nonageſimus eclipticæ - - - - - - - - -	152	42		152	42	
Longit. vera ☾ correcta ad Merid. Pariſ. - - -	211	51	39	211	57	32
Diſtant. correcta a polo boreali eclipticæ - - -	89	33	7	89	32	34
Diſtant. vera ☾ a nonageſimo - - - - - - -	59	12		59	18	
Parallaxis in longitudine - - - - - - - -		40	16		40	14
Parallaxis in latitudine - - - - - - - - -		35	44		35	44
Longit. apparens ☾ - - - - - - - - - -	212	31	55	212	37	56
Diſtant. apparens ☾ a polo boreali eclipticæ - -	90	8	51	90	8	18
Latitudo apparens ☾ - - - - - - - - - -		8	51		8	18
Longitudo vera ☉ - - - - - - - - - - -	213	5	0	213	5	25
Differentia Longit. apparent. ☉ & ☾ - - - -		33	5		27	29
Diſtant. apparens centrorum ☾ & ☉ - - - -		34	15		28	43

Ex his calculis liquet, quod tempore 10′, 0″ ſol & luna, viſi Bononiæ, ad ſe invicem acceſſerint 5′ 32″; ſed tempore obſervationis Bononiæ factæ diſtantia apparens centrorum erat 32′, 25″; quæ eſt ſumma ſemidiametrorum ſolis & lunæ: unde fiat: ut 5′, 32″ ſunt ad 10′, 0″; ita 1′, 50″ (differentia inter 34′, 15″ & 32′, 25″) ſunt ad 3′, 28″, quibus Bononia eſt minus orientalis Pariſiis, quam in prima hypotheſi fuit aſſumptum. Igitur vera differentia Meridianorum eſt 36′, 32″.

Si ejusmodi calculus inſtituatur etiam pro fine eclipſeos, vel immerſione, aut emerſione alicujus maculæ ſolaris, cujus poſitio in diſco accurate fuit determinata, plures obtinebuntur Meridianorum differentiæ, quæ ſeſe mutuo comprobent, vel inter quas accipiendum eſt medium, ut differentia vera quæſita habeatur.

833. Obſervationes occultationum ſtellarum fixarum a luna, habent eundem uſum, quem eclipſes ſolares. Calculus idem inſtituitur, niſi quod ad inveniendas parallaxes ſufficiat intervallum inter initium & finem in quatuor partes æquales dividere. Conſtructio graphica, tam ut prædici poſſint, quam ut eruatur differentia medianorum, eadem omnino eſt, ac pro ſole. Quod ut oſtendatur, unum exemplum ſatis erit.

ARTI-

ARTICULUS III.

Determinatio graphica occultationum ſtellarum per lunam.

834. Accidit non raro, ut luna quasdam ſtellas fixas noſtris oculis eripiat, infra quas ſcilicet ejus orbita immediate tranſit. Hoc eclipſium genus parallaxi æque, ac ſolares, obnoxium eſt, neque eſt univerſale. Europæ incolis luna non occultat, niſi eas ſtellas, quarum latitudo borealis in earum conjunctione cum luna aliquot minutis minor, & latitudo auſtralis aliquot minutis major eſt latitudine lunæ ejusdem nominis, cum parallaxis (408) locum apparentem lunæ verſus horizontem deprimat, adeoque minuat latitudinem borealem, & auſtralem augeat.

835. Proponatur exempli cauſa determinanda eclipſis ſtellæ, quam *Aldebaran* dicunt, ſeu α ♉, quæ contigit die 2. Auguſti A. 1736. Ex Tabulis juxta theoriam Newtonianam conſtructis, conjunctio lunæ cum hac ſtella contigit Pariſiis 4 h. 56′ tempore vero mane, in 6°, 6′, 26″ ♊, latitudine ſtellæ exiſtente 5°, 29′, 2″ auſtrali, declinatione vero boreali 15°, 56′½; per meridianum eadem tranſiit 7 h. 30′, 36″ mane. Luna habuit latitudinem auſtralem 4°, 44′, 21″, motus ejus horarius in longitudinem erat 32′, 52″; in latitudinem vero creſcentem 1′, 7″. Ejus ſemidiameter apparens horizontalis 15′, 40″, parallaxis horizontalis 57′, 12″.

836. Conſtructa ſcala A G (fig. 103), deſcribatur radio æquali parallaxi horizontali 57′, 12″, ſemicirculus O X C, qui exhibet hemiſphærium boreale telluris e ſtella viſum. Conſideretur ſtella, ut ipſe ſol; ejus tranſitus per meridianum, ut ipſum momentum meridiei; ejus declinatio eodem modo adhibeatur, ac declinatio ſolis in eclipſibus ſolaribus; atque hac ratione determinetur (607) in hoc hemiſphærio locus poli Borealis P, qui eſt in ipſo terræ diſco, cum declinatio ſit borealis. Fiat dein projectio elliptica paralleli Pariſiorum, quatenus e ſtella viſibilis eſt, pro declinatione 15°, 56′½. Diviſiones horariæ in arcu inferiore ellipſeos faciendæ ſunt ob declinationem borealem (626). Primæ in linea G P, quæ meridianum deſignat, adſcribatur 7 h. 30′½, reliquis verſus occidentem horæ priores.

Accipiantur in ſcala 44′, 41″, quæ eſt differentia inter latitudinem lunæ 4°, 44′, 21″, & latitudinem ſtellæ 5°, 29′, 2″. Ex G. erigatur ad O C perpendicularis G L, æqualis huic differentiæ. Motus horarius lunæ 32′, 52″ transferatur ex G in B verſus orientem, & erigatur ex B perpendicularis B D æqualis 43′, 34″, quæ eſt differentia inter latitudinem ſtellæ, & latitudinem lunæ 5 h. 56′, una hora poſt conjunctionem. Per puncta L & D ducatur orbita lunæ D L Q, quæ in

partes temporis dividatur ita, ut punctum L respondeat 4 h. 56′, & punctum D 5 h. 56′.

Accipiatur in scala semidiameter lunæ 15′, 40″, & crure uno circini in ellipsi, altero in orbita lunæ posito, quærantur duo puncta versus occidentem R & Q, idem tempus notantia: reperientur ad 3 h. 41′. Atque hoc est tempus occultationis stellæ per discum lunæ. Quærantur similiter alia duo E & F versus orientem ejusdem conditionis: invenientur ad 4 h. 47′, quod est tempus, quo stella e disco lunari iterum emergit.

Denique si ope scalæ mensuretur distantia punctorum, quibus in utraque orbita adscriptum est 4 h. 14′, invenietur, centrum lunæ ad partem borealem stellæ transiviſſe, & ab ea habuiſſe distantiam 6 minutorum circiter.

ARTICULUS IV.

Methodus construendi schema universale phasium eclipseos solaris.

837. Nihil visu dignius, quam omnes diversæ phases eclipseos solaris in charta Geographica designatæ ea ratione, ut in diversis regionibus in eadem exhibitis evenire debent. Hunc in finem paucis describam methodum facilem sine demonstrationibus constructionis. Qui rite animo comprehenderunt, quæ Sectione IV, & tribus præcedentibus Articulis dicta sunt, rationes citra difficultatem assequentur. Sumam autem exempli loco eclipsin diei 26 Octobris 1753.

838. Calculatis omnibus elementis necessariis pro constructione projectionis orthographicæ hujus eclipseos, tempus verum conjunctionis reducatur ad primum meridianum chartæ, qua quis uti vult, v. g. ad meridianum insulæ *Ferri*. Itaque cum conjunctio Parisiis fiat 10 h. 57′, ea in meridiano primo fiet 9 h. 37′½, seu 2 h. 22′½ ante meridiem, quæ in arcum æquatoris conversæ dant 35° 37′.

839. In circulo OXC (fig. 104), cujus radius circiter unius pedis Reg. Paris. & æqualis parallaxi horizontali lunæ 58′, 30″ in scala A B acceptæ, describatur orbita apparens centri lunæ K L, ut in præcedentibus Articulis factum, nisi quod L K (æqualis motui horario composito lunæ & solis) non in partes horæ, sed in quindecim gradus dividi debeat ita, ut punctum L respondeat 35°, 37′, & punctum K 20°, 37′. Hæc divisio per totam orbitam continuetur.

840. E puncto G ducatur G E, ad eandem orbitam in I perpendicularis, & in ea utrinque accipiatur I D, I E, æqualis summæ

mæ ſemidiametrorum ſolis & lunæ 32′, 19″. Diameter ſolis 32′, 22″ dividatur in tot partes æquales, quot digiti in ſchemate exprimi debent: v. g. ſi terni ſolummodo digiti exhibendi, ut in noſtra figura, adeoque quatuor intervalla facienda ſunt, dividantur 32′, 22″ per 4; erit una pars 8′, 5″½. Accipiatur hæc quantitas in ſcala, & transferatur ex D & E verſus I, punctis intermediis 8′, 5″½ diſtantibus notatis, per quæ tot parallelæ ad orbitam apparentem K L ducantur, quot circulus O X C capit. Ad ſingulas adſcribatur phaſis, quam exhibere debent, & dividantur omnes eadem ratione, qua orbita K L, quamvis hic in figura tam exigua, vitandæ confuſionis cauſa, non niſi unica ſit diviſa, pro norma ceterarum.

841. Si acceptis his intervallis crus circini cadit in punctum I, ut hic contingit, eclipſis erit totalis ſine mora. Si ultimum intervallum non attingit punctum I, ſed utrinque aliquod exiguum relinquit ſpatium, eclipſis eſt totalis cum mora. Intervallum inter duas parallelas utrinque vicinas puncto I, determinat omnia loca, in quibus eclipſis totalis eſt. Denique ſi ultima puncta cadant ex utraque parte paullum ultra punctum I, erit omnibus locis inter parallelas puncto I utrinque proximas comprehenſis eclipſis annularis.

342. Determinetur (607) locus poli æquatoris, & ducatur G X, quæ exhibet Meridianum fixum, per quem omnes meridiani terreſtres ſucceſſive tranſeunt, & ſub quo eſt meridianus primus, dum in Inſula Ferri eſt meridies. Fiant dein (624) projectiones arcuum diurnorum parallelorum terreſtrium, ut vitetur confuſio, denis gradibus diſtantium, qui (gradus) in Meridiano G X notentur. Inutile foret, ſi id fieret pro pluribus, quam capiat ſpatium inter parallelas per D & E ductas. Per puncta horaria, quæ reperiuntur, dum ellipſes deſcribuntur, ducantur aliæ curvæ itidem ellipticæ, quæ circulos horarios deſignant, ſeu ſitus ſucceſſivos meridiani primi (pro ſingulis horis, quæ in Inſula *Ferri* numerantur) reſpectu meridiani fixi G X. Atque hinc in ellipſi æquatotem exhibente utrinque a G X, ſcribantur infra diviſionum puncta 15°, 30°, 45° &c, & ſuperne horæ, matutinæ verſus occidentem, veſpertinæ verſus orientem, cum hemiſphærium telluris e ſole viſum ab occaſu in ortum rotetur.

843. His ita præparatis, conſtruantur tabulæ, quæ exhibeant longitudines & latitudines omnium locorum, in quibus eclipſis eſt centralis; item illorum, in quibus eſt novem digitorum, ſex digitorum &c, denique illorum, in quibus ſolummodo videntur limbi ſolis & lunæ ſe contingere. Ut itaque hæ tabulæ conficiantur, v. g. prima, patet, in omnibus locis ſub orbita centri lunæ K L

sitis eclipsin esse centralem. Jam vero hæc orbita occurrit imprimis (circa medium projectionum parallelorum 40° & 50°) primo meridiano in circulo horario horæ 8, qui a meridiano fixo G X 60° distat; & punctum divisionis orbitæ est illic 58°½: igitur eclipsis videtur centralis mane hora 8 sub parallelo 45° in loco, qui primo meridiano est 1°½ occidentalior, sive cujus longitudo est 358°½. Similiter punctum divisionis orbitæ K L 56½ occurrit primo meridiano in circulo horæ 9, sive ad distantiam 45° a meridiano fixo G X, eaque intersectio incidit in projectionem paralleli 40°: ergo eclipsis est centralis hora 9 sub parallelo 40° in loco orientaliore 11°½, quam primus meridianus; hoc est in loco, cujus longitudo est 11°½. Simili ratione inveniuntur loca, in quibus obscuratio maxima est 9, 6, 3 digitorum &c, uti etiam illa, in quibus limbi solis & lunæ se tantum contingunt. En tabulas

Horæ	Centralis		Phases maximæ Australes.							
			9. digit.		6. digit.		3. digit.		Contact. limb.	
	Long.	Latit.	Long.	Latit.	Long.	Latit.	Long.	Latit.	Long.	Latit.
7	*	*	346°½	38° B	348°	30° B.	348°½	22°½ B.	348°⅜	14° B
8	358°½	45° B.	359½	35	1½	26	1½	17½	1½	9½
9	11½	40	12½	30	13	21	12½	13	12½	4
10	23	34½	23	25	23	16	22	7½	21½	1 A.
11	32½	29½	32	19½	31½	11	30¾	2½	30	6
Merid.	41¼	24	40	15	39½	6	37¾	2½ A.	37½	10½
1	49½	20½	48	11½	47	3	46	6	45½	13½
2	58	18	56½	9	55¼	0	54½	8	54	15
3	67¼	17	65½	8	64½	1¼ A	64	9	63½	16
4	78	18	76	8½	75	1 A	74	9	74	16
5	90½	20	88½	9	87½	0¾ B.	86½	7½	86	15
6	*	*	*	*	101	3 B.	100½	5	100	12½

Horæ	Phases Maximæ Boreales.					
	9. digit.		6. digit.		3. digit.	
	Long.	Latit.	Long.	Latit.	Long.	Latit.
8	355°½	55° B.	*	* B.	*	* B.
9	8	52	6°	67°	*	*
10	22	47	20	61	*	*
11	32½	41	32	56	*	*
Merid.	42	35	43	49½	*	*
1	51	31½	52¾	45	*	*
2	60	28	62½	42	68½	70
3	69½	26¼	73	40	*	*
4	80½	27	84½	40	*	*
5	93½	28	*	*	*	*

Poſtquam hæc omnia puncta ita determinata ſunt, facile in charta vel globo terreſtri ducuntur curvæ, ut fig. 105 exhibet.

844. Ut inveniantur loca, in quibus eſt medium eclipſis, dum ſol oritur, vel occidit, attendatur, cujus paralleli projectio, ſeu ellipſis terminetur in circuli OXC circumferentia, ubi hæc a lineis phaſium ad orientem, & occidentem ſecatur. Calculetur (291) arcus ſemidiurnus ſolis competens ejus declinationi auſtrali 12°, 35′, & latitudini paralleli; & ex comparatione hujus arcus cum gradu notato in linea phaſium ad punctum interſectionis peripheriæ OXC invenietur longitudo loci quæſiti.

In exemplo; punctum 59° ½ orbitæ lunæ KL ſecat ad occidentem peripheriam OXC in extremitate projectionis paralleli 50°. Arcus ſemidiurnus hujus paralleli eſt 74° ⅔: igitur locus, ubi ſole oriente eſt eclipſis centralis, eſt in latitudine boreali 50°, & longitudine 15° ½. Ad orientem punctum 15° orbitæ KL ſecat peripheriam OXC in extremitate projectionis paralleli 21°, cujus arcus diurnus eſt 85°; ergo locus, in quo occidente ſole eclipſis eſt centralis, habet latitudinem borealem 21°, longitudinem 100°. Atque hunc in modum ſequens tabula fuit conſtructa.

Phaſes.	Medium Eclipſis.			
	Sole Oriente.		Sole Occident.	
	Longit.	Latit.	Longit	Latit.
Contactus limborum.	337° ½	17° ½ B.	102° ¾	12° ½ A.
3. digit. Auſtral.	339 ½	25	101 ½	5
6. digit. Auſtral.	341	32 ½	101	3 B.
9. digit. Auſtral.	342 ¼	41	100	12
Centralis.	344 ⅔	50	100	21
9. digit. Boreal.	349	61	100	31 ½
6. digit. Boreal.	7	73	100 ½	44
3. digit. Boreal.	*	*	88	68

Ex hac tabula habetur ductus curvæ eas omnes terminantis, quæ phaſes maximas deſignant.

845. Ut habeantur loca, quibus oriente aut occidente ſole initium vel finis eclipſeos obtingit, accipiatur in ſcala AB ſumma ſemidiametrorum ſolis & lunæ 32′, 19″, & crure uno circini in circulo OXC ad extremitates projectionum parallelorum ſucceſſive poſito, collocetur alterum tum ad orientem, tum ad occidentem in orbita KL; & comparato arcu ſemidiurno cujusvis paralleli cum gradu orbitæ, in quem crus circini incidit, invenientur locorum longitudines. Sic ut ſciatur initium ac finis ſole oriente vel occidente ſub parallelo 40°, crus unum circini collocetur in

in extremo puncto ellipseos paralleli 40° ad partem occidentalem circuli O X C; incidet crus alterum versus occidentem in punctum orbitæ K L 76°; versus orientem vero in 47°. Arcus semidiurnus paralleli 40° est 79°; itaque sub hoc parallelo initium eclipsis sole oriente est loco 3° occidentaliori insula ferri, cujus consequenter longitudo est 357°; finis autem eclipseos sole oriente est sub eodem parallelo loco 32° occidentalioi insula Ferri, cujus longitudo est adeo 328°. Quod si ad extremum alterum ejusdem ellipsis ex parte orientali circuli O X C ponatur crus circini, crus alterum incidet ex una parte in 9°, ex altera in 35° orbitæ K L. Hinc finis eclipsis sole occidente contingit sub parallelo 40° loco, cujus longitudo est 88°; & initium illi, cujus longitudo 114°. Hac methodo facta est sequens tabula

Sub parall.	Sole Oriente. Initium. Longit.	Finis. Longit	Sole Occident. Initium. Longit.	Finis. Longit.
70° Bor.	12°	346°	97°½	77°
60	2 ½	334	108	88
50	359	329	113	90
40	357	328	114	88
30	353	328	115	86
20	346	332	115	85
17½	338 ½	338 ½		
10			113½	86
0			112½	89½
10 Aust.			108	96
12½			100	100

Si hæc omnia puncta in chartam vel globum translata conjungantur, habebitur curva in se se rediens, ac seipsam secans in puncto, ubi sol non nisi unico momento in meridie est visibilis, quod contingit sub parallelo 77°, 25′ (quod est complementum declinationis solis) in longitudine 37°, in quam nempe punctum I orbitæ K L cadit.

846. Omnes hæ curvæ pro diversis casibus diversæ sunt; attamen satis accurate describentur, si puncta vicina semper connectantur.

CONCLUSIO.

Animadversiones in Systema Physicum Astronomiæ.

847. Arcti limites his lectionibus positi non admiserunt, ut omnia referremus, quæ singillatim excutienda erant, ut explicatæ theoriæ partes omnes observationibus astronomicis jam a viginti sæculis, & quod excurrit, institutis exacte conformes demon-

monſtrarentur. Erat ſcilicet illud nobis magis cordi, ut claram ſimplicemque expoſitionem, atque ideo etiam ſat productam, eorum omnium daremus, quæ aſtronomia ſeu theoretica, ſeu practica ſibi vendicat, quam ut ſingularum veritatum evidentiam demonſtrationum rigore evinceremus.

Atque hinc factum, ut nihil afferremus de diverſis ſyſtematis mundi, quæ vel *Ptolomæi*, vel *Tychonis* nomine celebrata ſunt, quæ noſtris temporibus vix alibi locum merentur, quam ut in hiſtoria de diverſis hominum opinionibus referantur; hinc hypotheſes omnes phyſicas a Philoſophis excogitatas, ut cæleſtium corporum motus ad Mechanicæ leges exponerent, intactas reliquimus, illudque unum hac in re præſtitimus, ut vim centralem in ratione reciproca quadratorum diſtantiæ a puncto, in quod tendit, variabilem cum vi conſtante projectionis primitus impreſſa combinaremus. Eſt autem adeo liquidum, utramque hanc vim exiſtere, tamque evidentibus inductionibus oſtenditur, ut ſi quod ſyſtema phyſicum inquirendum eſt, combinatio harum duarum virium principii, cui ſuperſtruetur, ſequela immediata eſſe debeat. Quare ſyſtema tale vel originem legis, quam ſubjicimus, vel ei prorſus analogæ, detegat, eſt neceſſe.

848. Omnia phænomena motus corporum vel invitos cogunt, ut agnoſcamus, *omne corpus, vel potius omnem materiæ moleculam eſſe velut centrum ſphæræ cujusdam in infinitum extenſæ, cujus quivis radius ſit directio vis conſtantis & uniformis per totam radii longitudinem, quæ ſeu impellat ſeu trahat verſus centrum omnem materiæ in hoc radio exiſtentis moleculam: & actionem hujus vis eſſe ſemper in ratione reciproca duplicata diſtantiæ moleculæ illius a centro.*

849. Hinc intelligitur, cum hæc lex ſit univerſalis pro quavis materiæ creatæ molecula, quod duæ quævis moleculæ in ſe ſe mutuo agant intra ſphæram activitatis ſuæ: ita, ut ſi ſint æquales, earum niſus ad conjunctionem ſit æqualis & reciprocus utrinque. At ſi quod corpus componatur e duabus, tribus, quatuor &c. æqualibus maſſæ corporis alterius diſtantis, niſus reciprocus inter hoc, & quamvis maleculam prioris manebit quidem æqualis; verum quod in priore corpore plures ſint unitæ, niſus ſecundi in primum corpus erit duplus, triplus quadruplus &c. illius, quo primum in ſecundum tendit. &c.

850. Ex hoc deducitur, *quod ut ſtabiliatur ſyſtema aſtronomiæ phyſicæ neceſſe ſit, ut e principio pro fundamento aſſumpto, deducatur lex generalis, ſecundum quam duæ quævis moleculæ materiæ nitantur ſe ea vi conjungere, quæ ſit ſemper in ratione directa ſimplici maſſarum, & reciproca duplicata diſtantiarum;* ita ut hujus vis tot ſint modi, conditionesque agendi, quot moleculæ, & ſitus earum reſpectivi.

851.

851. Conſenſus admirandus inter omnia phænomena cæleſtia, & calculos ex hac lege deductos, aſtronomos impulit, ut eam tanquam fundamentum reciperent. Ex hac enim lege infertur, corpora omnia nos ambientia debere motu accelarato directione ad telluris ſuperficiem perpendiculari deſcendere; ex hac diſcimus, cur luna circa terram volvatur (705): e combinatis diverſis variationibus, quas mutuæ ſolis, terræ, ac lunæ actiones pro diverſo ſitu efficiunt, eo tandem pertigimus, ut lunæ inæqualitates omnes certis calculi legibus ſint adſtrictæ. Nulla hypotheſis, quæcunque adhuc ab aſtronomis excogitata fuit, motus lunares certis regulis ſubjicere potuit. Ex hac eadem lege Saturnus & Jupiter, aliorum planetarum comparatione corpora ingentia, ſuis inæqualitatibus ſunt obnoxii, lunaribus analogis, tum pro diverſo ſitu inter ſe, tum ſolis reſpectu. Denique huic legi debetur non modo ſumma accuratio in calculo motus planetarum, verum etiam vera cometarum theoria, ad quam ante Newtonum aſtronomorum nemo ne quidam prope acceſſit, ita, ut perfectioni aſtronomiæ jam vix aliud optari queat, quam obſervationes a veteribus nobis relictis accuratiores, quibus regulæ ex hac lege deductæ ſecure applicari poſſint, indeque elementa vera aſtronomica theoriæ cujusvis corporis cæleſtis conſtitui.

852. Quoniam itaque omnia corpora cæleſtia huic legi ſubjecta ſunt, manifeſtum eſt, ea debere eſſe in perpetuo quodam motu & agitatione, ut ei, quantum poſſunt, obſequantur. Sol ipſe locum quovis momento mutare cogitur, ut tali conſiſtat ſemper, quo planetis in orbitis eccentricis circa eum gyrantibus ſit, quam fieri poteſt, maxime propinquus. Verum ingens ejus moles & diſtantia ſaltem nobis hunc motum reddunt imperceptibilem.

853. Eadem conformitas inter hanc legem & cæleſtia phænomena ad hanc nos deducit veritatem, cui in ſyſtemate phyſico non minus locus dandus eſt; *nempe medium, in quo corpora cæleſtia moventur, nihil eis reſiſtere, quod ſentiri poſſit.*

854. Difficultas in aſſignando hujus legis principio vere phyſico, quin in ea concilianda cum idea, quam velut natura duce habemus, ut exiſtimemus, omnem motum fieri per impulſionem, Philoſophos inter ſe ſe ſcidit. Alii eam tanquam abſolute cum impulſu pugnantem rejiciunt; alii velut a Deo materiæ authore primitus conſtitutam admittunt, & attractionem appellant. Rectius quis fecerit, ſi ut innumeris commodis, quæ hæc lex adſert, fruatur, eam ex inductione omnium phænomenorum cæleſtium, nullo prorſus contrario, amplectatur interea, dum ſeu cauſa phyſica, ſeu lex vera, cui hæc adeo congruit, detegatur.

INDEX

INDEX
RERUM PRÆCIPUARUM.
OBSERVANDUM, NUMERIS NON PAGINAS, SED PARAGRAPHOS DESIGNARI.

	§
Aberratio fixarum	383
Methodus eam calculandi	786
Æquatio centri	13
ejus calculus	138
calculus æquationis maximæ	142
quomodo ex obſervationibus deducatur	143
Æquatio temporis, ſeu horologiorum	321
Æquatio altitudinum correſpondentium	326
Æquator terreſtris	231, 595
cæleſtis	232
ejus axis videtur ſingulis annis circa axem eclipticæ revolvi	603
ſub æquatore terreſtri dies & noctes ſemper ſunt æquales	259, 595
Æquinoctia, & puncta æquinoctialia	248, 593
Altitudo ſyderum	220, 621
meridiana	268
ejus calculus	279, 622
calculus altitudinis cujusvis	290, 621
Altitudo poli	261
ejus calculus	290
quomodo obſervetur	277
Altitudines correſpondentes	326
Apſides	38
linea apſidum ad ſenſum immobilis	38
videtur tamen habere motum directum valde lentum	516
linea apſidum in luna jam eſt retrograda, jam directa	740
methodus inveniendi poſitionem lineæ apſidum in planetis	109, 150
cauſa phyſica variationum	174
Almucantarath	326
Amplitudo ortiva & occidua	283
ejus calculus	291
Annus tropicus, ſydereus &c.	490
Anomalia media	129
vera	127
veræ calculus in ellipſi	138
veræ calculus in parabola	203
vera quomodo in mediam convertatur	139
Aphelium	38
Apogæum ſolis	484
Arcus diurni & nocturni	265
eorum calculus	291
quomodo convertantur in tempus	292
Argumentum latitudinis	458
Aſtra ſunt in perpetua agitatione	852
Aſcenſio recta ſyderum	301
ejus calculus	306, 312
uſus	331, & ſeqq.
quomodo obſervetur	327, & ſeqq.
Atmoſphæra cauſa refractionis	436
cauſa crepuſculi	450
auget umbram telluris	795
Azimuthum	282
ejus affectiones	284, & ſeqq.
calculus	290
Cæli rotunditas eſt ſolum apparens	3
Celeritas, vide *velocitas*	
Coluri	251
Cometæ	16
eorum phænomena generalia e ſole	177, & ſeqq.
reguntur iisdem legibus, quibus planetæ	198
eorum orbita eſt ad ſenſum parabolica	186
tempus eorum revolutionis nondum cognitum, & cur	187
e quibus indiciis eorum reditus cognoſcatur	199
elementa neceſſaria pro eorum theoria	529
difficultas theoriam directe determinandi	541

methodus generalis eam determinandi ex obſervationibus 542 & ſeqq.
præcepta & exempla calculi cometarum in parabola 530 & ſeqq.
calculus eorum in ellipſi - - 572
eorum cauda - - - - - - - 527
theoriæ præcipuorum cometarum tabula - - - - - - 571
Conjunctio, ſuperior, inferior 379, & 635
Conſtellatio - - - - - 7
recenſentur conſtellationes - 9
Crepuſculum, ejus calculus - 450, & 451
Declinatio ſyderum - - 234, 302
ſolis - - - - - 608
quomodo obſervetur - 279
ejus calculus - 290, 312
circulus declinationis - 303
Deviatio - - - - - 773
Dies aſtronomicus eſt inæqualis 314, 317
- - - - - - - - 614
civilis breviſſimus & longiſſimus 274
- - - - - - - - 595
Digiti ecliptici - - - - 241
Diſtantia curtata - - - 457
Eccentricitas orbitæ ellipticæ - - 125
quomodo reperiatur - - 145, 150
lunæ variabilis - - - - - 746
Ecliptica eſt terminus comparationis motus annui planetarum, & cometarum - - 243, 452
ejus obliquitas, vide *obliquitas*
Eclipſes lunæ vel ſatellitis, partiales, totales - - - - - 649
quando contingant 645, 646, 789, - - - - - 791
ſunt univerſales - - - - - 651
habent uſum in determinanda differentia meridianorum - 655, 824
conſtructio graphica phaſium futurarum - - 797, & ſeqq.
calculus trigonometricus - 805
Eclipſes ſolis totales, annulares - 652
quando contingant - - 645
non ſunt univerſales - 651
quando videatur initium, & finis 653,
- - - - - - - - 789
conſtructio graphica phaſium - 806,
- - - - - - & ſeqq.
calculus - - - - - 812
quomodo ex iis reperiatur differentia meridianorum - - 828
conſtructio ſchematis univerſalis 837
Elementa aſtronomica - - 481
Ellipſis eſt trajectoria planetarum - 124
in planetis non impedit calculum, velut moverentur in circulis maximis ſphæræ - 241
eſt projectio orthographica circuli 356
quomodo dividatur in gradus - 359,
- - - - - - - 361
calculus diſtantiæ foci a puncto quovis - - - - - 140
calculus dimenſionum - 145
circuli, qui in planetarum ſuperficie deſcripti concipiuntur, fere omnes ſunt ellipſes - - 522
objecta immobilia in cælo videntur ſingulis annis ellipſin deſcribere 363
Emerſio - - - - - - 790
Epicyclus - - - - - - 354
Epicycloides, earum ſpecies, & affectiones - - - - - 369, & ſeqq.
corpora cæleſtia motu proprio prædita videntur epicicloydes deſcribere - - - 573
planetæ videntur deſcribere epicycloides contractas - - 393
Geocentrica longitudo, latitudo - - 459
Heliocentrica longitudo, latitudo - 459
Horizon ſenſibilis, & rationalis - - 217
habet polum in zenith - 218
eſt terminus commodiſſimus, ad quem motus diurni phænomena referantur - - 313
Illuſiones opticæ motus cæleſtes afficiunt - - - - - 225
Immerſio - - - - - 790
Inclinatio axis rotationis planetarum quomodo menſuretur - - 605
Inſtrumenta aſtronomiæ neceſſaria - - 22
Interpolatio, formulæ, & uſus 95, & ſeqq.
Keplerus, ejus prima lex - - 84
Latitudo ſyderis - - - 300
calculus - - - - - 306
circulus latitudinis - - 303
Libratio lunæ - - 704, 755, 756
Limites planetæ - - - 458
ecliptici - - - - - 649
Lex generalis in aſtronomia phyſica admittenda - - - - - 850
Longitudo ſyderis - - - 299

§§

calculus - - - - 306
Geographica - - - 619
Lumen, ejus propagatio non eſt inſtantanea - - - 385, 656
Luna, ejus phaſes - 679, & ſeqq.
ejus theoriæ elementa aſtronomica 694
e ſole viſa nunquam eſt retrograda 658
ejus vis centralis eſt gravitas in terram - - - - - 705
cauſæ inæqualitatum - 711 & ſeqq.
ejus variatio - - - 733
ejus revolutiones periodicæ ſunt longiores, dum terra eſt in perihelio - - - - - 737
lex motus apſidum - - 740
variatio eccentricitatis - 746
motus nodorum - - 747
variatio inclinationis - - 748
libratio - - - 704, 755
eclipſes, vide *eclipſis*
Maculæ planetarum - - - 17
oſtendunt rotationem circa axem 17
& planetas eſſe globos habitabiles 19
earum ſemitæ apparentes in ſuperficie planetarum ſunt ellipſes diverſis variationibus periodicis obnoxiæ - - 581, & ſeqq.
Mars, ejus retrogradatio major in aphelio, quam in perihelio. - 397
Mercurius habet phaſes lunaribus analogas - - - - - 518
Meridianus cæleſtis, & terreſtris - - 270
differentia meridianorum - - 616
quomodo determinetur per obſervationes - 824, 829, 832
calculus tranſitus ſyderis per meridianum - - 333
calculus diſtantiæ ſyderis a meridiano tempore dato - - 336
Methodi generales
calculandi longitudinem & latitudinem planetæ e ſole & terra viſam - - - 463, & ſeqq.
inveniendi dimenſiones, & poſitionem ellipſeos ex calculo trium obſervationum planetæ - 150
inveniendi omnia elementa theoriæ planetarum e terra viſorum 506
- - - - & ſeqq.
reducendi obſervationes in terra

§§

inſtitutas ad eas, quæ eodem tempore in ſole fierent - - 502
calculandi omnes exiguos motus aſtrorum, pendentes ab inæquali præceſſione æquinoctiorum, & aberratione - - 769, & ſeqq.
Motus diurnus, ejus phænomena e ſole ſpectati - - 580, & ſeqq.
Motus acceleratus - - - 50
ejus affectiones - 57, & ſeqq.
formulæ - - - - 61
Motus compoſitus, ejus proprietates 64, & - - - - - - - ſeqq.
Motus æquabilis - - - 49
ejus proprietates & formulæ 51, 52, - - - - - 53, 55
Motus æquabilis in curva - - 87
Nodus aſcendens, deſcendens - 454
linea nodorum planetarum ad ſenſum fixa, valde parum retrograda - - - - - 51
methodus determinandi poſitionem lineæ nodorum - 510, & ſeqq.
linea nodorum lunæ mobilis - 747
Nonageſimus - - - 409
Nutatio - - - - 770
Obliquitas eclipticæ - - 252, 604
quomodo obſervetur - - 309
eſt obnoxia variationi 310, 311
cur - - - 768
Occaſus, verum occaſus punctum 287
Occultatio fixarum a luna, quomodo graphice determinetur - 834
habet uſum in determinatione differentiæ meridianorum - 833
Oculi locus verus, locus putatitius 343
orbita - - 344
Orbita optica objecti - - 344
ejus determinatio geometrica 347
Ortus, ejus verum punctum 287
Parabola, leges motus in trajectoria parabolica - 189, & ſeqq.
calculus anomaliæ veræ in parabola 203
eſt trajectoria cometarum - 186
Parallaxis orbis annui - - 382
ſyderis - - - - 402
horizontalis - - - 411
ſit ſemper in verticali - 406
duplex methodus determinandi parallaxin ſyderum - 423, & ſeqq.

§§

solis est 10″ aut 11″ - - 429
calculus - - - - 432
Paralleli cæleſtes & terreſtres - 236
solis sunt species spiralium - 246
Penumbra - - - - - 793
Perigæum solis - - - 484
Peribelium - - - - 38
Phaſes lunæ - - 679 & seqq.
Planum comparationis - - 346
Planetæ, characteres, quibus designantur - - - - - - 14
superiores, inferiores - - 392
non sunt corpora de se luminosa 518
sunt aliquantum compressi ad polos rotationis - - - 519
sunt in plano circuli maximi sphæræ, in cujus centro est sol 24
singuli sunt in planis singulis 25
eorum orbitæ sunt ellipses, quarum focum sol occupat - 124
eorum inæqualitates sunt partim physicæ, partim opticæ - 35
Dimensiones, & elementa eorum theoriæ relate ad solem - 170
eorum motus verus e terra visus, & ad planum eclipticæ relatus 453 & seqq.
videntur describere epicycloides contractas - - - 393
sunt quandoque directi, stationarii, retrogradi - 394, & seqq.
calculus eorum longitudinis & latitudinis heliocentricæ & geocentricæ - - - - - 463
Methodus determinandi elementa eorum theoriæ - 506 & seqq.
Polares circuli - - - - 598
Poli æquatoris - - - - 233
sub polis annus constat die, & nocte unica - - - 255, 598
Præcessio æquinoctiorum - 28, 491, 630
ejus causa physica - - 764
ejus inæqualitas - - - 767
efficit motum apparentem & inæqualem fixarum - - 769 & seqq.
Projectio orthographica - 345
circuli in plano inclinato est ellipsis - - - - - 356
determinatio geometrica positionis poli æquatoris in projectione orthographica globi planetarii e sole visi - - 607
Quadratura planetarum - 379
Radius vector - - 83
ejus calculus in ellipsi - 140
in parabola - - 209
Refractio, ejus affectiones - 435, & seqq.
Resolutio virium - - 69
habet locum, dum directio est obliqua - - - 71
Revolutio - - 17
revolutiones planetarum fiunt ad sensum tempore æquali - 23
anomalistica, synodica, periodica - - 490, 694
Retrogradationes, earum inæqualitates 394, & seqq.
Rotatio Planetarum - - - 17
tempus - - - - 18
causa & proprietates - - 216
in eam vis centralis planetarum non influit - - 229
Satellites, planetæ secundarii 15
eorum tempus revolutionis 631
habent eandem motus directionem 634
eorum orbitæ sunt ad sensum circuli, in quorum centro est primarius 676
eorum orbitarum plana inclinantur ad planum orbitæ primarii 643
patiuntur eclipses, & efficiunt eclipses solis - - - 636
in revolutione circa primarios, sequuntur eandem legem, quam primarii in revolutione circa solem 677
elementa eorum theoriæ 631, 673
Saturnus, cingitur annulo diversis variationibus periodicis obnoxio 525
& Jupiter in se mutuas inæqualitates efficiunt - - - 851
Signa cæleſtia - - - - 27
differunt a constellationibus, etsi idem habeant nomen - - 28
characteres, quibus designantur 29
Sol, duplicis ejus motus apparentis expositio - - - - 240
ratio ejus dimensionum ad dimensiones terræ - - - 429
quare ad horizontem videatur ovalis figuræ - - - - 448

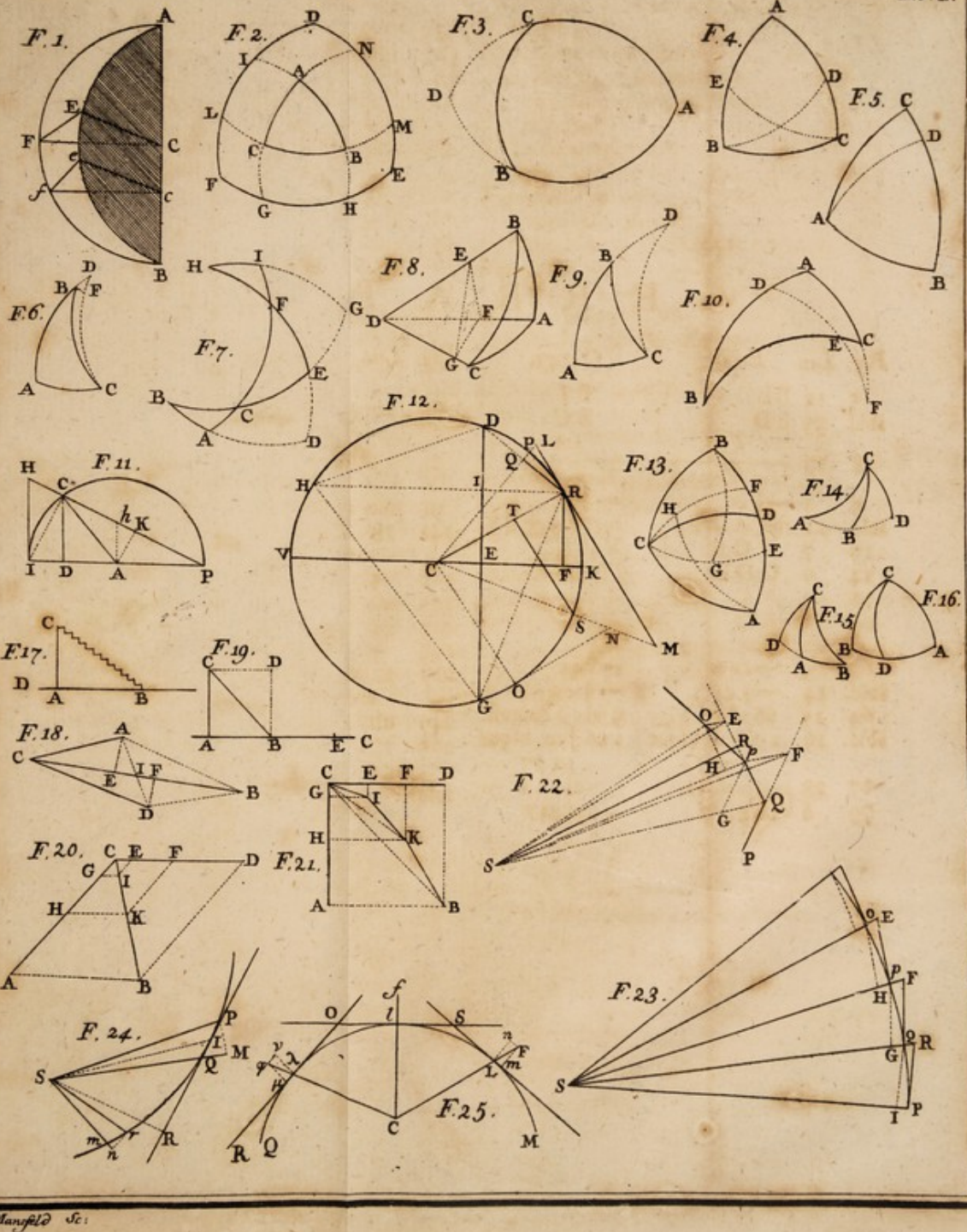
Methodus determinandi elementa ejus theoriæ - - 484
Solſtitia æſtivum, hybernum 250, 596
Sphæra, figura apparens cæli - 215
recta - - - - 257
parallela - - - - 254
obliqua - - - - 262
Stellæ - - - - - 4
earum uſus - - - 5
magnitudo - - - 6
denominationes a Bayero iis datæ 11
methodus eas noſcendi - - 12
de earum natura conjecturæ - 13
a terra immenſum fere diſtant 384
videntur ſingulis annis ellipſin in cælo deſcribere - - - 380
earum aberratio - - 384, 783
Syſtemata mundi, non amplius locum in Aſtronomia merentur - 847
Lex generalis ſyſtematis phyſici e phænomenis deducta, - 849
Syzygiæ - - - - - 379
Tempeſtatum anni viciſſitudines - 275
Tempus verum ſeu apparens, medium 318
utriusque diverſitas, & calculus 321
quomodo verum obſervetur 325, 338
Terra, quare appareat immota - 224
eſt depreſſa verſus polos - 519
ejus motus verus exhibetur per motum apparentem ſolis - 240
Trajectoria, quomodo diverſæ earum ſpecies diſcernantur - - 191
Tropici - - - - - 247
Venus habet ſuas phaſes - - 518
Velocitas angularis media - - 90
punctum trajectoriæ, in quo æquatur veræ - - - - 107
Velocitas angularis vera - - 89
ejus proprietates - - 92
Verticalis - - - - 281
verticalis primarius - - 281
proprietates verticalium 284, & ſeqq.
Vis acceleratrix - - - 60
centralis - - - - 77
centralis variabilis tempuſculo admodum parvo eſt cenſenda conſtans - - - - - 156
formulæ generales vis centralis 158, & ſeqq.
ejus proprietates in ſectione conica - - - 163, & ſeqq.
Vis centralis lunæ eſt idem cum gravitate in terram - - 705
Vis inertiæ - - - - 48
perturbatrix lunæ - - 712
Umbra terræ, ejus magnitudo - 782
Zenith - - - - - 218
ejus uſus - - 219, & ſeqq.
Locus terreſtris in cælo diſtinguitur per ſuum zenith - - 238
Zodiacus - - - - - 27
Cometarum nullus eſt - 183

ERRATA.

Pag.	Lin.	Errata	Corrige.
5	12	BL	BI
ibid.	35	BD	BC
8	17	$\frac{\int A}{\cos A + \int A}$	$\frac{\int A}{R + \cos A}$
9	1	$-\frac{1}{3}A$	$-\frac{1}{2}B$
ibid.	21	$\cos(A \mp B)$	$\cos^2(A \pm B)$
10	7	VGR	VGK
14	9	GDE	$\int$GDE
16	7	AC	AD
20	12	AD	AF
ibid.	20	BD	BE
60	9	$-lnm$	$-lnn$
ibid.	14	$-\frac{1}{4}c$	$-\frac{3}{2}c$
64	15	26 ad 27	9 ad 10 Auguſti
ibid.	16	a 9 Aug. uſque ad 10	a 26 Jun. uſque ad 27
67	28	die 11	die 12
79	6	0.28847	0.208847

Pag.	Lin.	Errata	Corrige.
81	10	$\frac{SP}{SP^3.2PG}$	$\frac{SP}{ST^3.2PG}$
83	10	$u = \frac{a}{s}$	$t = \frac{a}{s}$
91	ult.	43	34
141	18	in primo & ſecundo	in ſecundo & tertio
160	5	ad D	DMP
165	ult.	*curvata*	*curtata*
177	16	T	T (fig. 64)
196	9	comprehendit	comprehenſus
217	12	affectione motu diurni geographice	affectiones motus diurni graphice
249	ult.	duplæ diſtantiæ	diſtantiæ
265	17	columnis	tribus columnis
275	24	$49\frac{1}{2}$	$49\frac{1}{3}$
ibid.		$45\frac{1}{3}$ $13\frac{1}{3}$	$45\frac{1}{2}$ $13\frac{1}{2}$

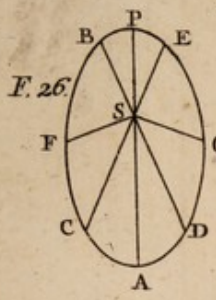
Tab. I.



I. Mansfield Sc.

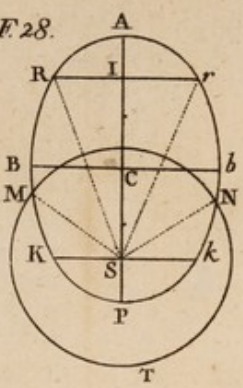
Astronomie

F. 26.

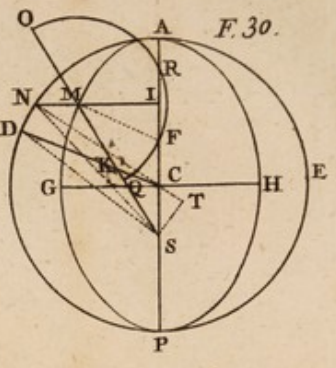


F. 27.

F. 28.

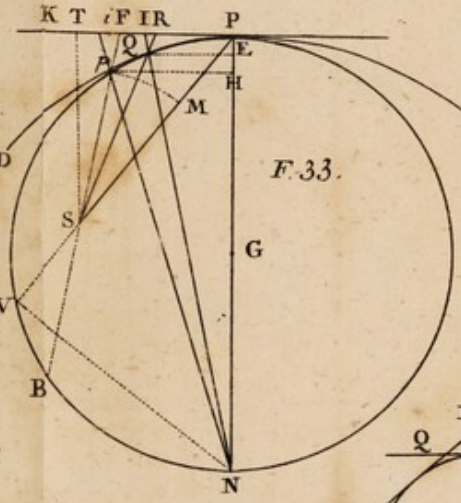


F. 30.

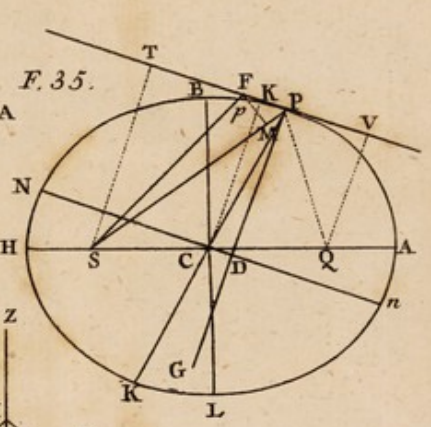


F. 32.

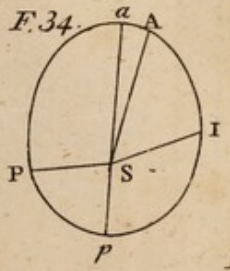
F. 33.



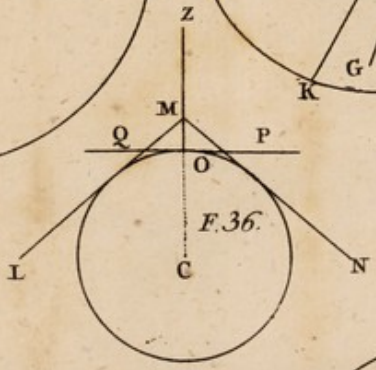
F. 35.



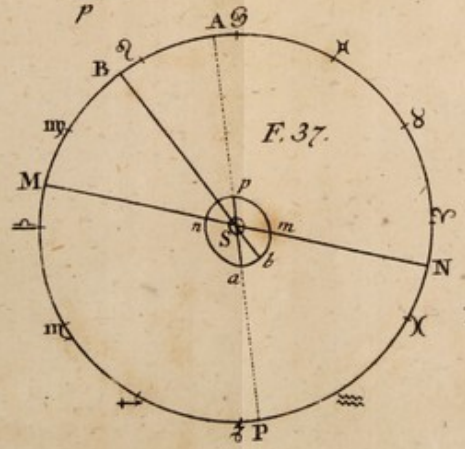
F. 34.



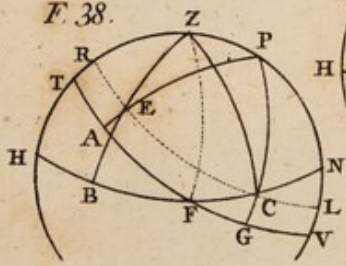
F. 36.



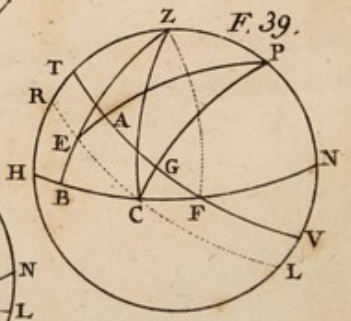
F. 37.



F. 38.

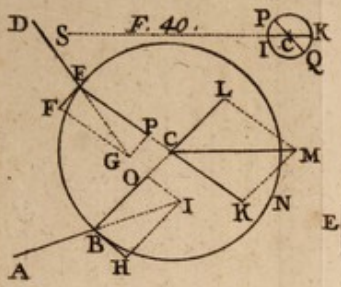


F. 39.

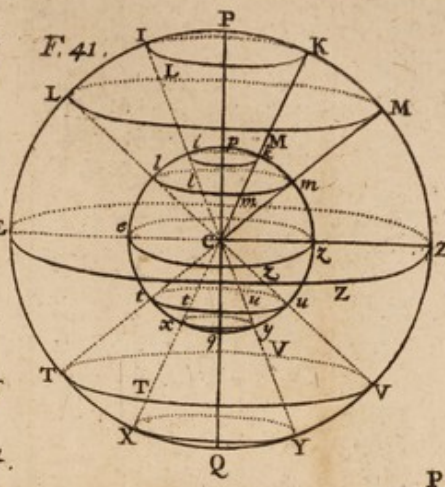


Tab. III.

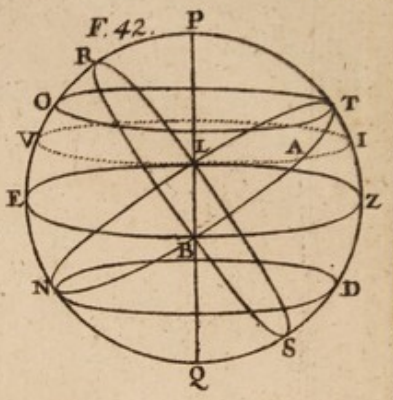
F. 40.



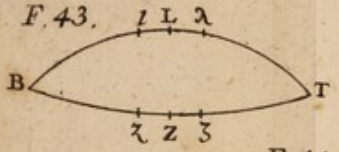
F. 41.



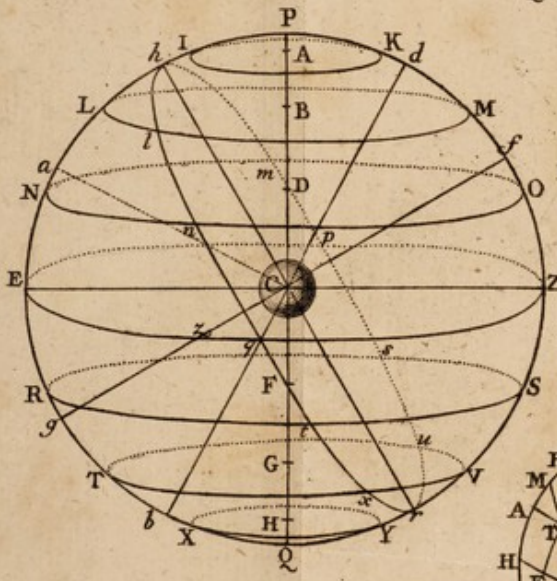
F. 42.



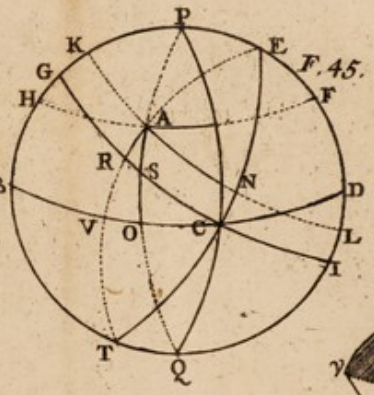
F. 43.



F. 44.

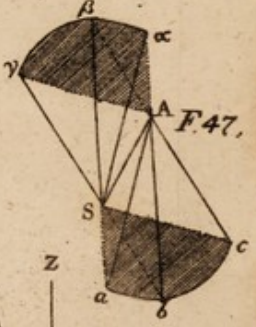


F. 45.

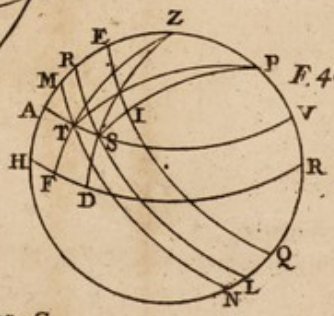


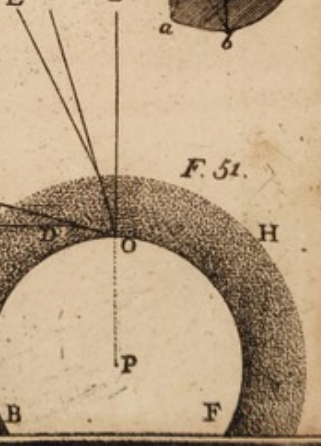
F. 46.

F. 47.

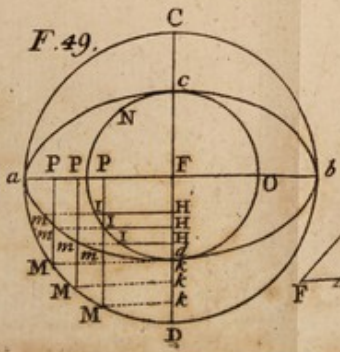


F. 48.

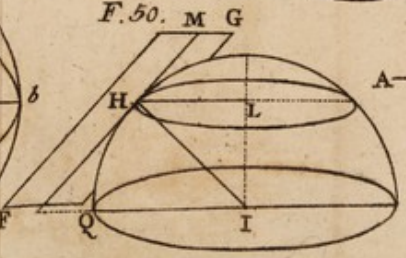




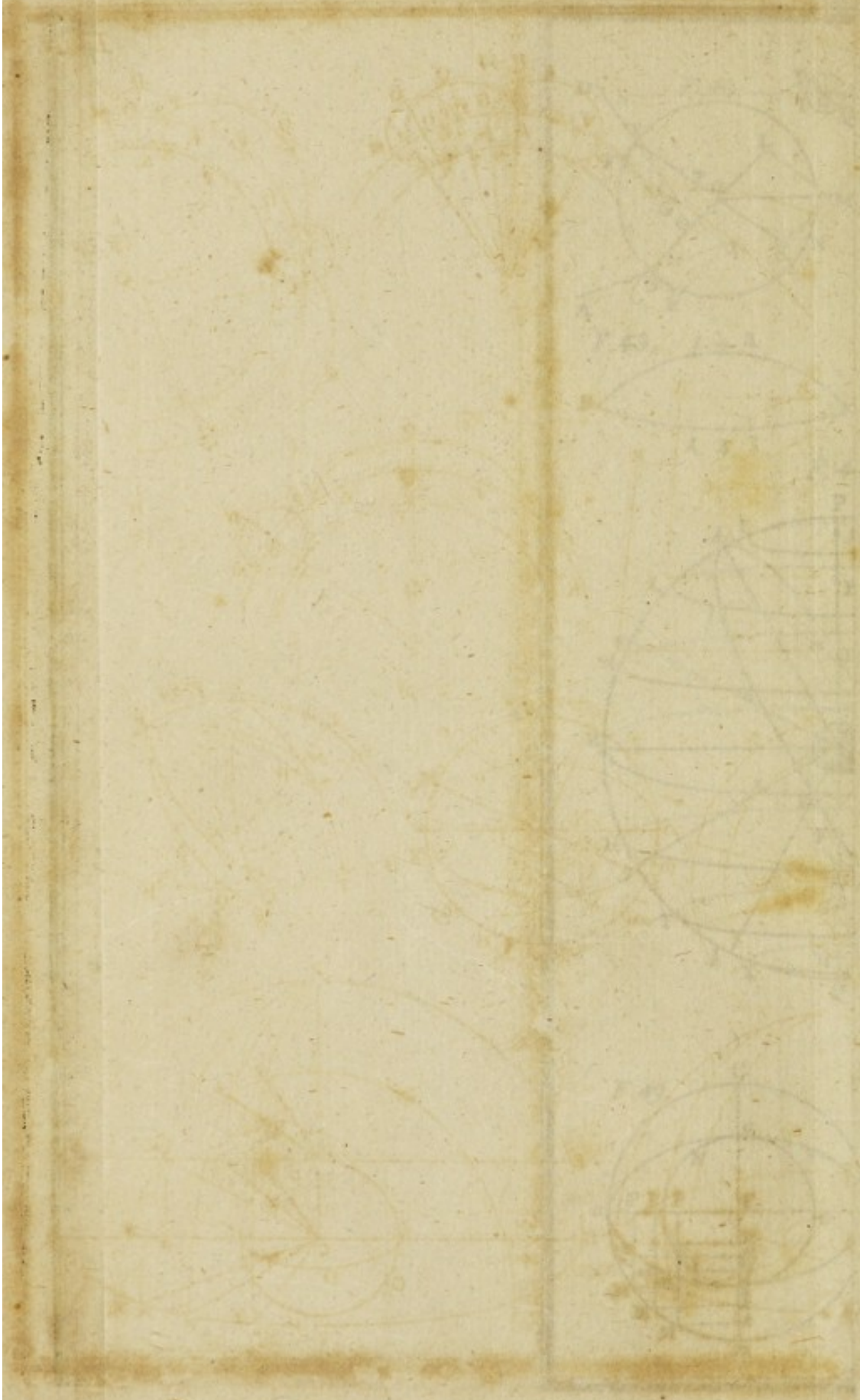
F. 49.



F. 50.

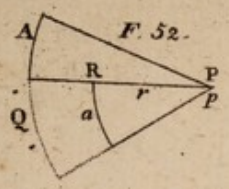


F. 51.

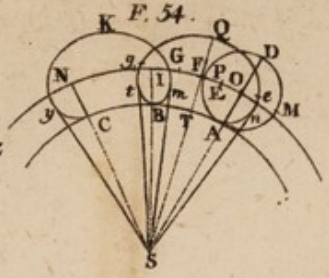


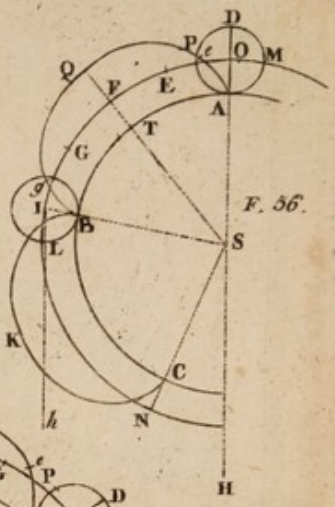
Tab. IV.

F. 52.



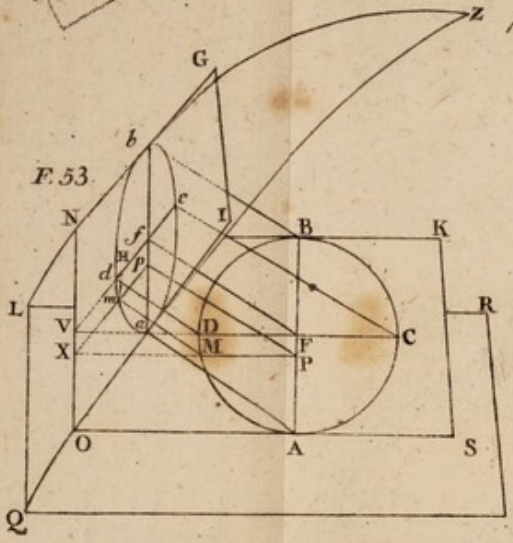
F. 54.



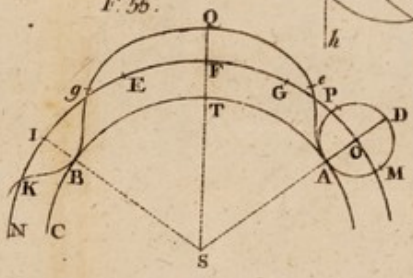


F. 36.

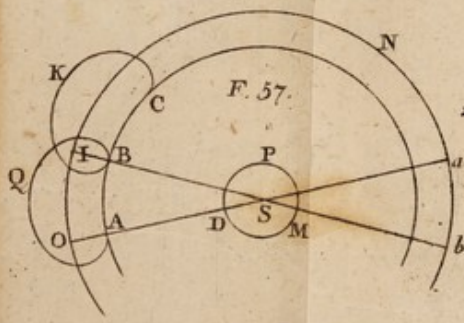
F. 53.



F. 55.

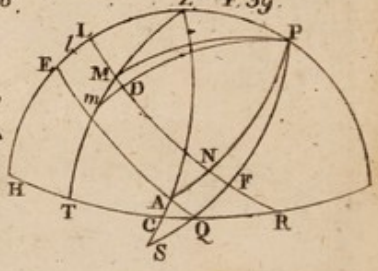


F. 57.

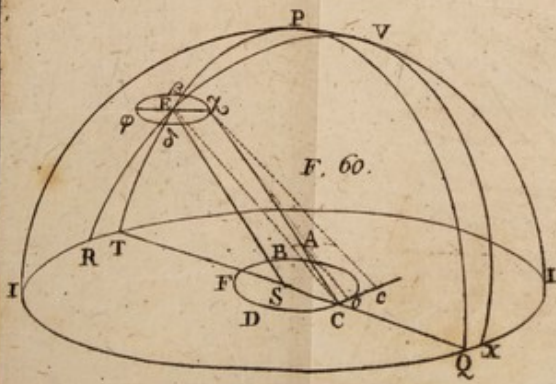


F. 58.

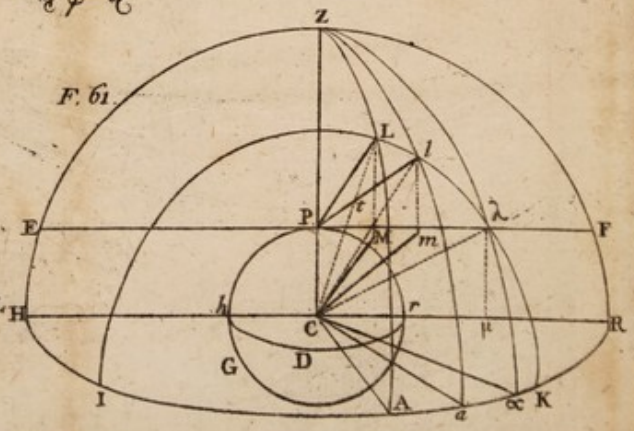
F. 59.



F. 60.

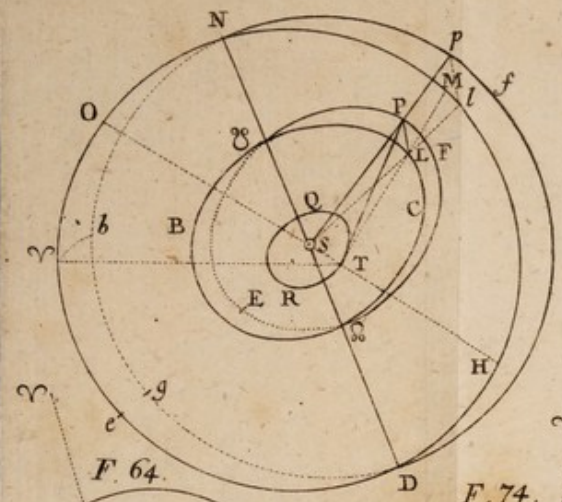


F. 61.

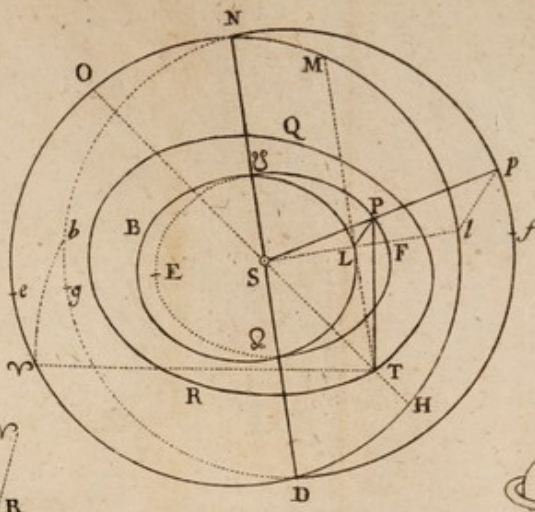


Tab. V.

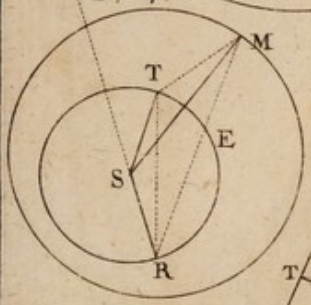
F. 62.



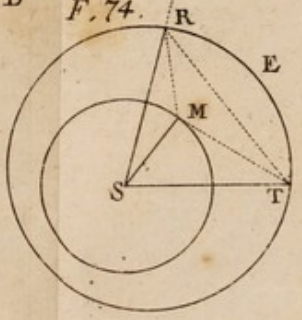
F. 63.



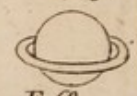
F. 64.



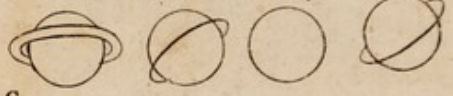
F. 74.



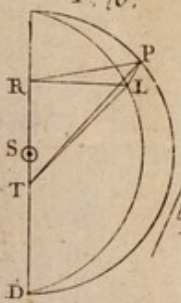
F. 69.



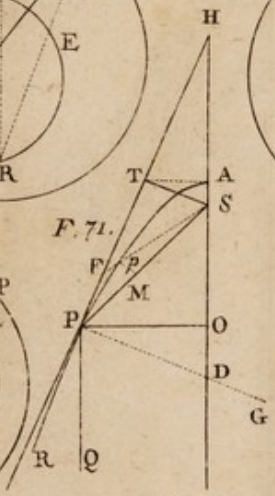
F. 65. F. 66. F. 67. F. 68.



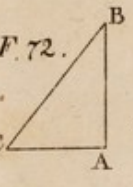
F. 70.



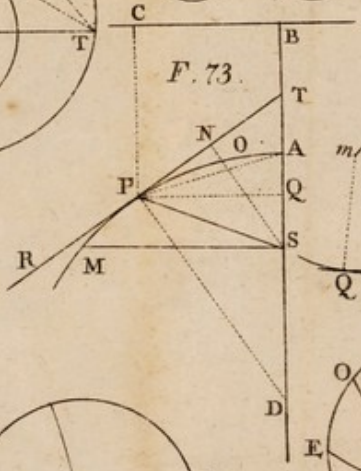
F. 71.



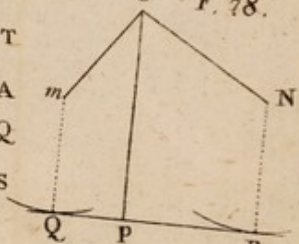
F. 72.



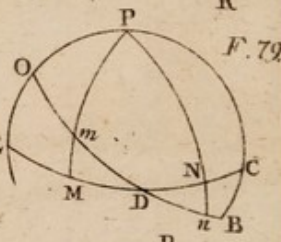
F. 73.



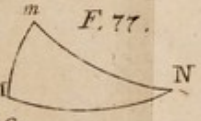
F. 78.



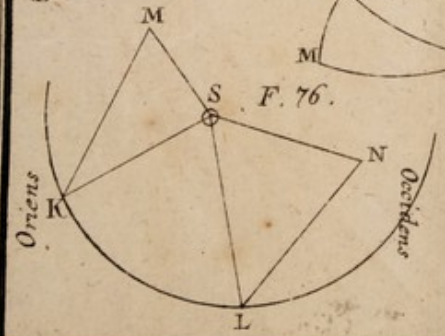
F. 79.



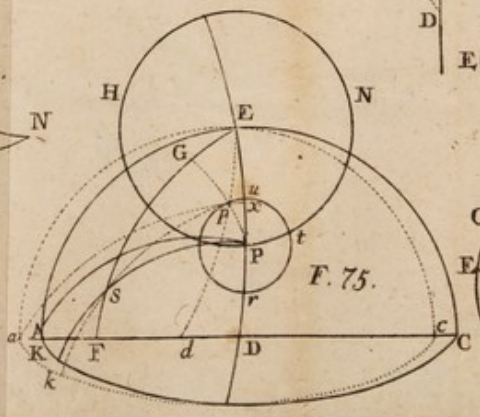
F. 77.



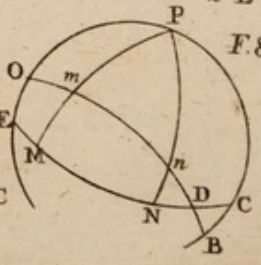
F. 76.

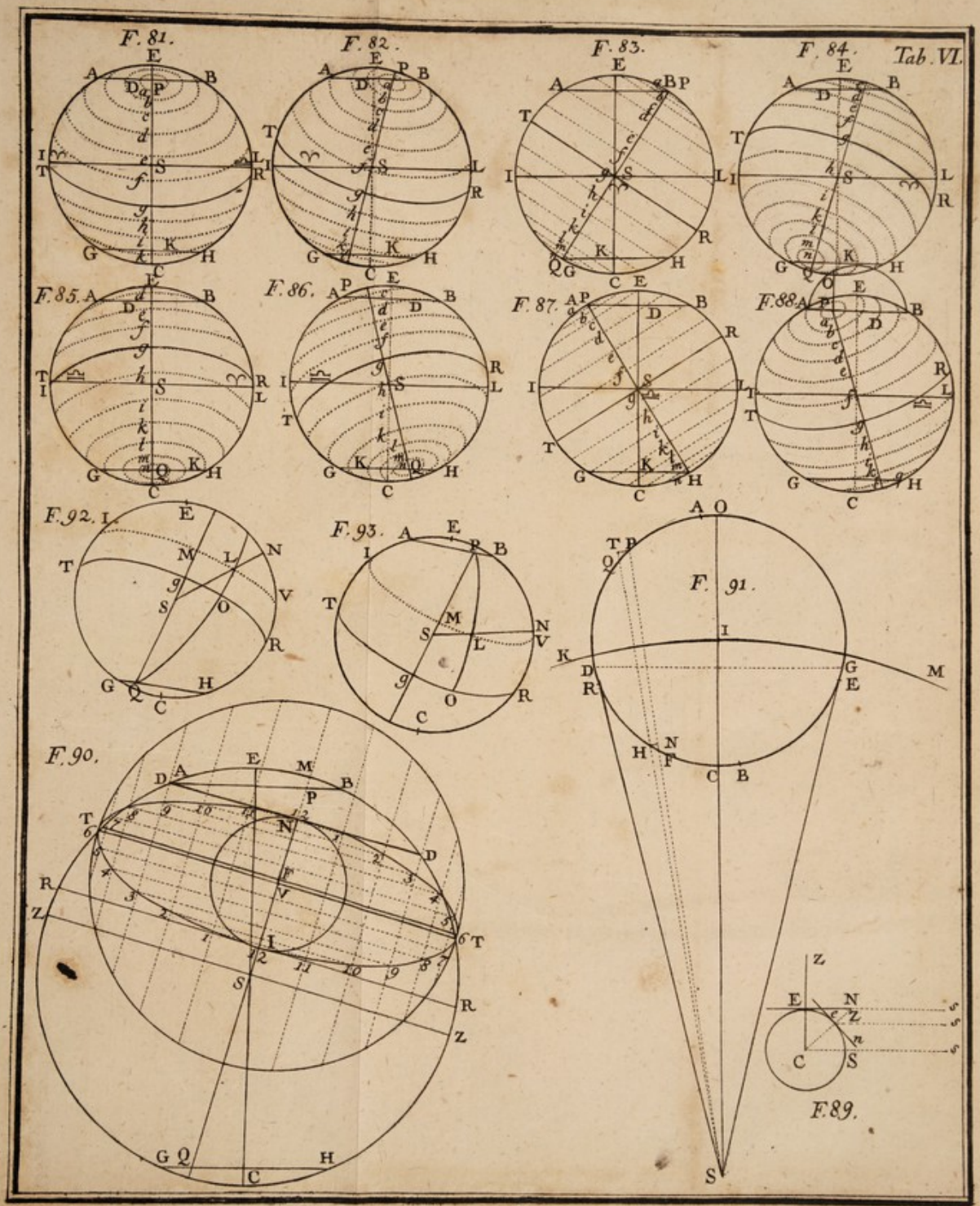


F. 75.

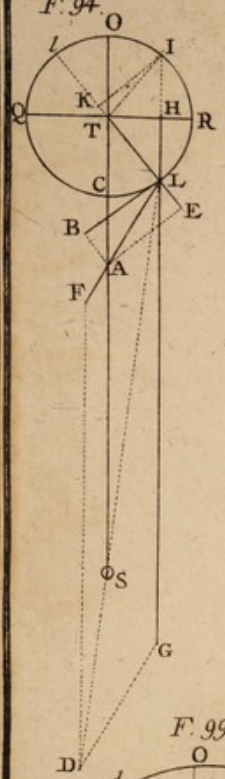


F. 80.

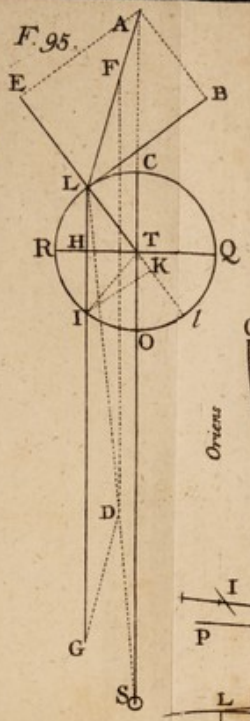



Tab. VI.
F. 81.
F. 82.
F. 83.
F. 84.
F. 85.
F. 86.
F. 87.
F. 88.
F. 89.
F. 90.
F. 91.
F. 92.
F. 93.

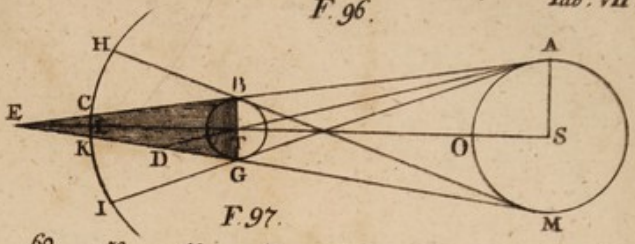
F. 94.



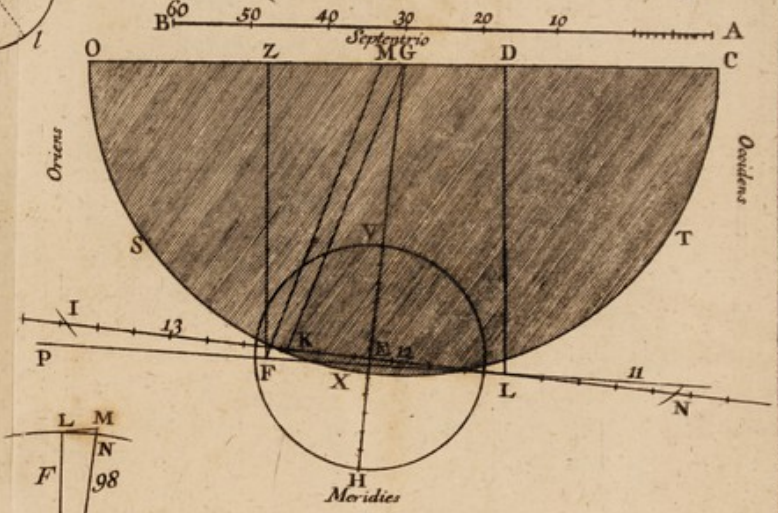
F. 95.



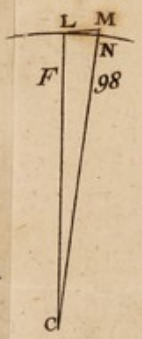
F. 96.



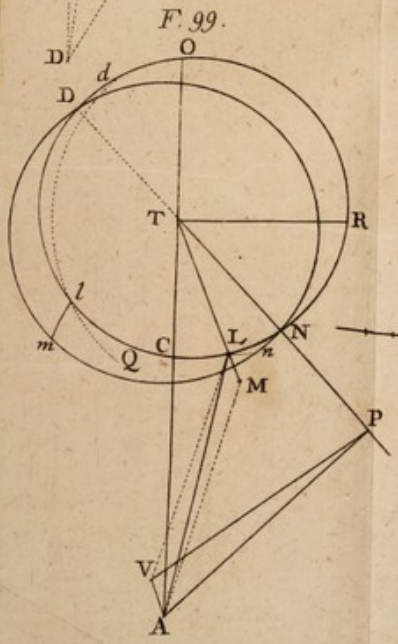
F. 97.



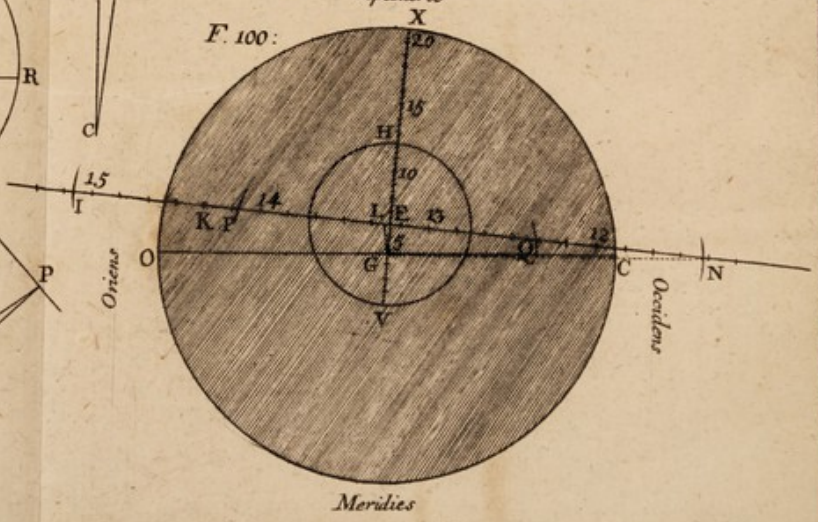
F. 98.



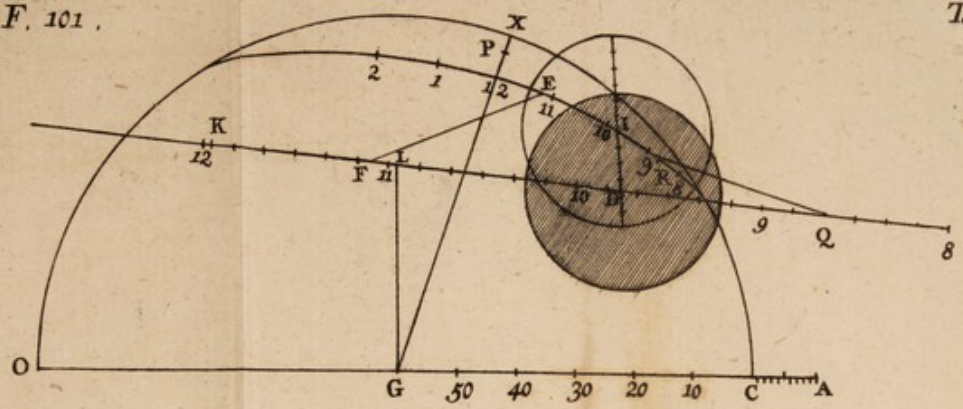
F. 99.



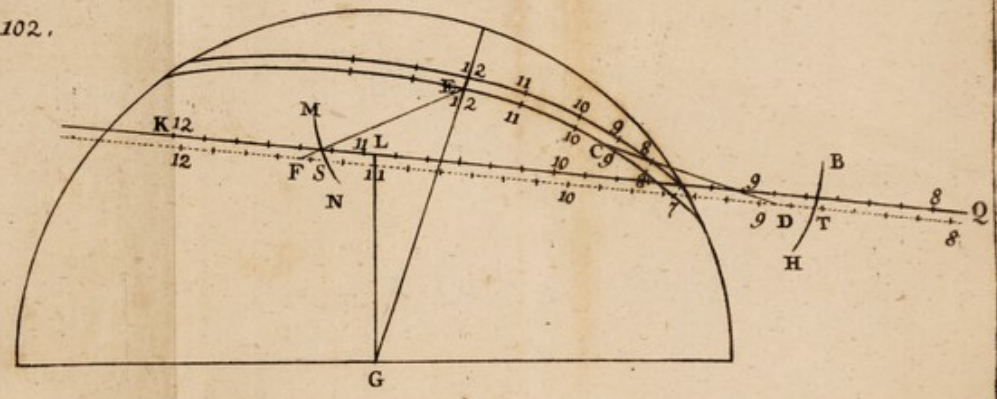
F. 100.



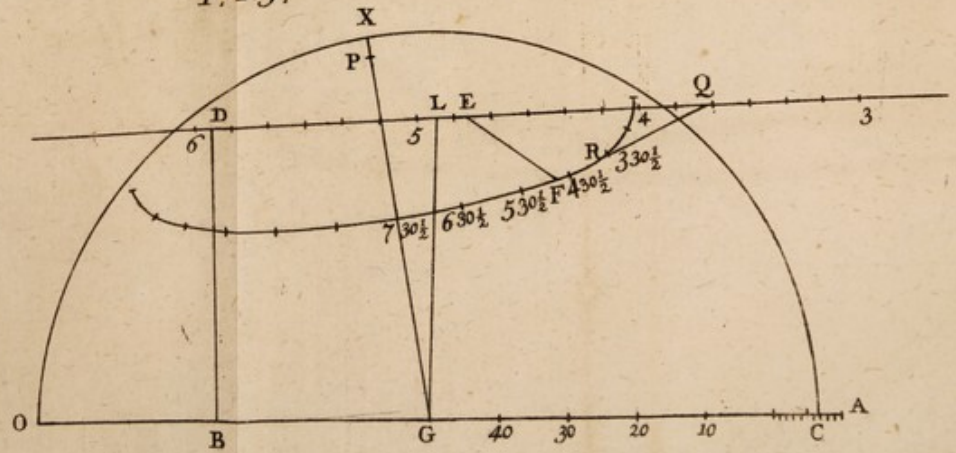
F. 101.

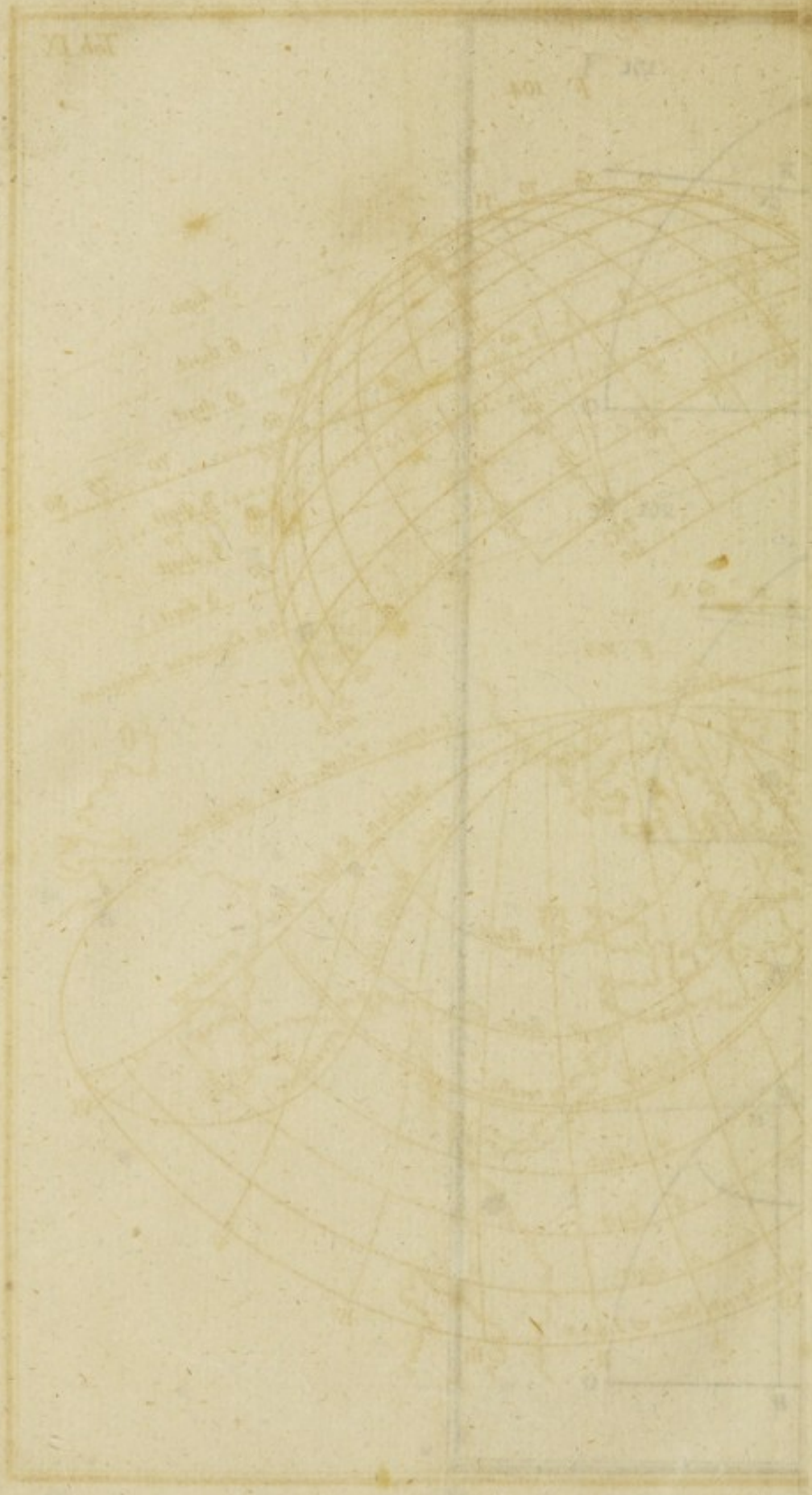


F. 102.



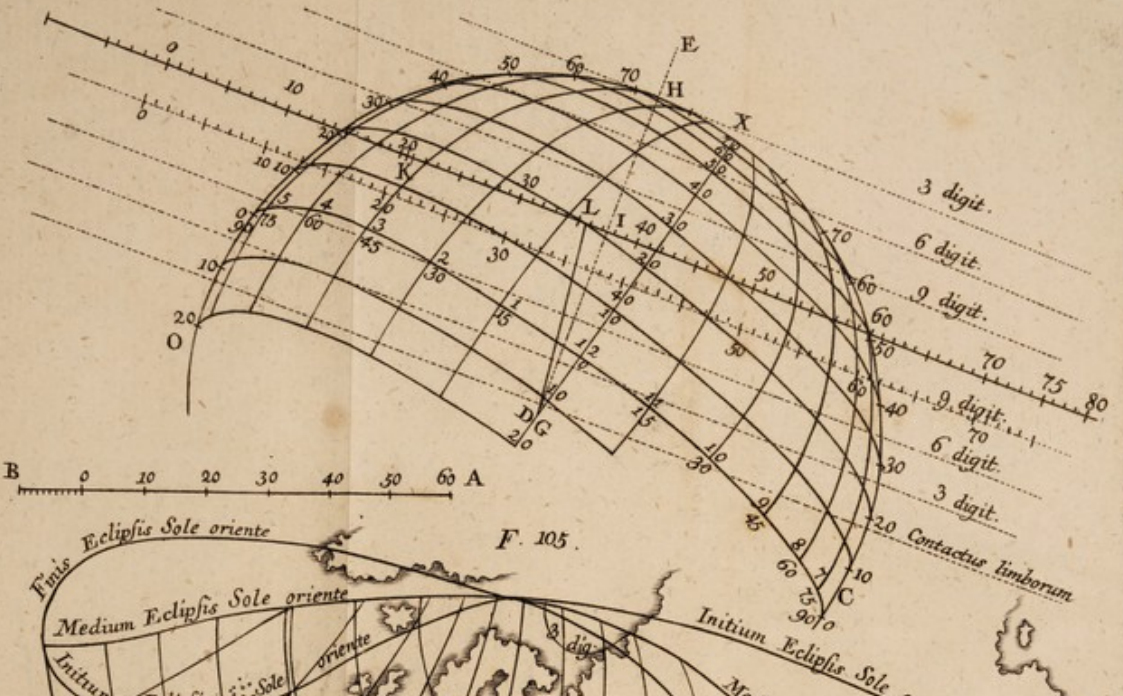
F. 103.





Tab. IX.

F. 104.



F. 105.

F. 106.

AD LECTIONES ELEMENTARES

ASTRONOMIÆ PHYSICÆ, ET GEOMETRICÆ

CLARISSIMI VIRI

D. DE LA CAILLE,

ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ, SUECICÆ, BORUSSICÆ, RUSSICÆ, ET GOETTINGANÆ, NEC NON INSTITUTI BONONIENSIS MEMBRI, AC PROFESSORIS MATHESEOS IN COLLEGIO MAZARINIANO PARISIIS,

APPENDIX

COMPLECTENS PRÆCIPUAS MUTATIONES,

QUAS

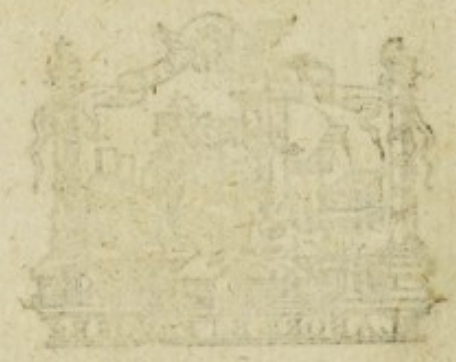
AUCTOR IN ULTIMA EDITIONE PARISINA ANNO M. DCC. LXI FECIT,

ET IN LATINUM CONVERTIT

C. S. E S. J.

VIENNÆ, PRAGÆ ET TERGESTI,
TYPIS JOANNIS THOMÆ TRATTNER, CÆS. REG. AULÆ TYPOGRAPHI ET BIBLIOPOLÆ.

MDCCLXII.



LECTORI BENEVOLO.

Ere illorum me facturum existimavi, qui Astronomiæ Lectiones latinas jam sibi comparavunt, si præcipuas mutationes, quas clarissimus Auctor, cum eas Parisiis Anno 1761 denuo ederet, faciendas putavit, brevi Appendice, facileque parabili, complecterer, ne illis vel penitus carerent, vel, dum rursus volumen integrum prælo subjiciatur, expectare cogerentur.

Dum autem præcipuas dico, eas intelligat Lector, quæ vel ad methodum pertinent, vel dimensiones non nullas spectant, in quibus plus momenti est ad Theoriam. Quando de exemplis tantummodo illustrandæ methodo destinatis agitur, vix operæ pretium censui, lectorem ad appendicem remittere, nisi & hæc ipsa peculiare quid contineant, quod rationes antea non satis explicatas, vimque adeo, si dicere licet, methodi ob oculos ponat. Ceterum si omnes mutationes congerendæ fuissent, leviore sine labore novam editionem totius operis fuissemus moliti. Unum est, quod monitum cupio lectorem, me citasse semper paginam Lectionum Astronomiæ, ad quam mutatio quævis pertinet; plerumque etiam para-

graphum, quandoque tamen paginam tantum. Dum paginæ & paragrapho etiam numerus lineæ, in qua quidpiam corrigendum occurrit, additus eſt, lineas Lector ab eo paragrapho numerabit, non ab initio paginæ; ſecus, ſi paragraphus additus non ſit. Pariter numeros ſchematum, quæ vel nova acceſſerunt, vel mutata ſunt in editione Pariſina, hic retinui. Unde dum figura citatur numero ſimplice, ea quærenda eſt in tabulis lectionum; ſi vox Append. *adjuncta ſit, in Appendice reperietur.*

PRÆ-

PRÆCIPUÆ MUTATIONES
IN
LECTIONIBUS ASTRONOMIÆ.

Pag. 5 *ante* §. 20 *inseratur sequens Corollarium, pro quo* Fig. 2 Append. *non nihil immutata adhibenda est.*

Coroll. Si duo quivis anguli correspondentes A, D conjungantur arcu circuli maximi AD (qui in P ex A productus erit ad latus oppositum CB perpendicularis); si præterea arcus CA, FD producantur, donec in K concurrant, fient quatuor triangula DAI, NAD, KAI, KND, ad I & N rectangula, quorum anguli, & latera erunt complementa angulorum, & laterum trianguli ABC, aut vero iisdem æqualia. Sic latera IA, ID sunt complementa lateris AB, & anguli B; uti & hypotenusa AD arcus perpendicularis AP. Eodem modo AN, DN sunt complementa lateris AC, & anguli C: angulus item NDK æquatur lateri BC; & angulus DKN est complementum arcus BQ ex angulo B ad latus oppositum AC perpendicularis; quod nempe puncta B, E sint poli circulorum, ad quos pertinent arcus DK, NK (15). Idem dici potest de arcubus BA, DE; aut CB, FE productis, donec alter alteri occurrat. Hæc triangula rectangula adhiberi possunt, dum partes trianguli obliquanguli ABC sunt calculandæ.

Pag. 7. §. 28 *adde*: Verum numerus graduum singulorum angulorum dependet a numero graduum laterum, nec constans est, ut

in triangulis rectilineis. Id tantum certum, quemvis angulum esse majorem 60° (23); & si singula latera sint 90°, singuli quoque anguli sunt graduum totidem; sed lateribus 90° excedentibus, anguli etiam singuli recto sunt majores.

Pag. 7. §. 31. *Quæ hoc* §. *a lin.* 6 *habentur, ita mutanda sunt:* Verum ubi hunc numerum graduum aliquis eorum excedit, signum ejus cosinus, tangentis, & cotangentis mutandum est in contrarium. Etenim ex ipso intuitu circuli in 360° divisi, si hæ lineæ in diversis successive positionibus considerentur, patet I, quod inde a 0° usque ad 180° sinus eundem situm servent respectu diametri hæc divisionum puncta jungentis; quod crescant a 0 usque ad 1, qui terminus est quoddam eorum *maximum*, ad quod perveniunt, ubi 90° numerantur; postea decrescunt usque ad 0, cum scilicet ad 180° venitur; quod hinc incipiendo positionem mutent, ac usque ad 1 crescant, dum ad 270° attingunt, a quo termino decrescunt usque ad nihilum, ubi 360° habentur. Quare signum non mutatur, nisi in transitu per 0°, & 180°. II. At vero cosinus ad *maximum* suum perveniunt in 0° & 180°; & fiunt 0, simulque positionem mutant in 90° & 270°. III. Si tangentes sumantur in recta utrinque in infinitum producta per 0°, & cotangentes in recta utrinque in infinitum producta per punctum 90°, facile admodum intelligitur, earum signum mutari in transitu per 0°, 90°, 180°, 270°, 360°, ubi æquantur vel 0, vel ∞.

Pag. 8. §. 33 *Formulæ, quæ hic primo loco ponitur, sequentes duæ præmittendæ sunt.*

$$\pm \sin \tfrac{1}{2} A = \pm \cos \tfrac{1}{2} \text{ suppl. } A. \text{ Item } \pm \tang \tfrac{1}{2} A = \pm \cot \tfrac{1}{2} \text{ suppl. } A.$$

Formulæ ipsi primæ adde $= \dfrac{\tang A}{\sec A}$.

§. 34 *Formulæ* II *adde* $= R^2 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} A$.

§. 35 *Formulæ* III *adde* $= \sin A \times \sec A$.

§. 39 *Formula* VII *lege* $R \pm \cos A =$ &c.

§. 41. *Formulæ* IX *adde:* Aut vero $\dfrac{R + \cos A}{R - \cos A} = \cot^2 \tfrac{1}{2} A$.

Pag. 9. *Post titulum* DEMONSTRATIO, *inseratur*: Ratio formularum $\pm \sin \tfrac{1}{2} A = \cos \tfrac{1}{2}$ *suppl.* A, item $\pm \tang \tfrac{1}{2} A = \pm \cot \tfrac{1}{2}$ *suppl.* A, intelligitur, si cogitetur, quod si v. gr. A sit $= 40°$, sinus, & tangens ejus complementi ad 2 rectos 140° (sive *supplementi*) sint negativa; at vero si dimidia accipiantur, scilicet 20°, & 70°, hæc sese mutuo ad rectum complent, atque 90° minora sunt.

Pag. 11 *lin.* 13 *adde:* uti & formula VI e XXIX, si ponatur B = A.

Pag. 17 §. 105 *Loco* Coroll. *si in triangulis sphæricis* &c, *lege* Coroll. *Si in duobus triangulis sphæricis descriptis in eadem sphæra* &c.

Pag.

Pag. 23 §. 126 *Hujus* §. *lineæ* 7, 8 & 9 *omittantur.*

Pag. 28 *linea ultima hujus paginæ adde* : Jam vero manifeſtum eſt, 6, 21803 eſſe logarithmum numeri $\frac{1}{6053}$ (poſito logarithmo unitatis = 10, 00000); & numerum alium multiplicare per $\frac{1}{6053}$ idem eſſe, ac eum per 6053 dividere.

Pag. 41 §. 34 *lin.* 8. *loco* 25″ 23‴ *lege* 25″, 4.
lin. 9. *loco* 16″ 37‴ *lege* 26″, 6.
Pag 42. §. 35 *lin.* 2. *loco* 16″ 37‴ *lege* 16″, 6.
lin. 6. *loco* 4° 11′ 5″ *lege* 4° 11′ 27″.
lin. 7. *loco* 6° 23′ 27″ *lege* 6° 23′ 29″.
lin. 10. *loco* 2° 12′ 22″ *lege* 2° 12° 2″.

Pag. 43. *Cum plures correctiones in hac tabula occurrant, e commodo lectoris putavimus, novam ex integro ſubjicere.*

Di-

Distantiæ Mercurii a prima Stella Arietis in ipso meridie observatæ.

1740	Sign.	Grad.	Min.	Sec.	Differentiæ.		
Jun. die 14	0	2	4	30			
					5°	2′	37″
15	0	7	7	7	5	12	23
16	0	12	19	30	5	22	14
17	0	17	41	44	5	31	53
18	0	23	13	37	5	41	20
19	0	28	54	57	5	50	12
20	1	4	45	9	5	58	31
21	1	10	43	40	6	5	53
22	1	16	49	33	6	12	12
23	1	23	1	45	6	17	9
24	1	29	18	54	6	20	54
25	2	5	39	48	6	23	1
26	2	12	2	49	6	23	29
27	2	18	26	18	6	22	22
28	2	24	48	40	6	19	33
29	3	1	8	13	6	15	13
30	3	7	23	26	6	9	42
Jul. d. 1	3	13	33	8	6	2	53
2	3	19	36	1	5	55	8
3	3	25	31	9	5	46	31
4	4	1	17	40	5	37	25
5	4	6	55	5	5	27	52
6	4	13	22	57	5	18	10
7	4	17	41	7	5	8	21
8	4	22	49	28	4	58	33
9	4	27	48	1	4	49	2
10	5	2	37	3	4	39	46
11	5	7	16	49	4	30	54
12	5	11	47	43	4	22	22
13	5	16	10	5	4	14	12
14	5	20	24	17	4	6	28
15	5	24	30	45	3	59	9
16	5	28	29	54	3	52	15
17	6	2	22	9	3	45	46
18	6	6	7	55	3	39	22
19	6	9	47	17	3	34	2
20	6	13	21	19	3	28	48
21	6	16	50	7	3	23	57
22	6	20	14	4	3	19	20
23	6	23	33	24	3	15	17
24	6	26	48	41	3	11	19
25	7	0	0	0	3	7	44
26	7	3	7	44	3	4	27
27	7	6	12	11	3	1	31
28	7	9	13	42	2	58	51
29	7	12	12	33	2	56	24

	Sign.	Grad.	Min.	Sec.	Differentiæ.		
Jul. d. 30	7	15	8	57			
					2°	54′	11″
31	7	18	3	8	2	52	15
Aug. d. 1	7	20	55	23	2	50	27
2	7	23	45	50	2	49	2
3	7	26	34	52	2	47	45
4	7	29	22	37	2	46	36
5	8	2	9	13	2	45	49
6	8	4	55	2	2	45	3
7	8	7	40	5	2	44	43
8	8	10	24	48	2	44	24
9	8	13	9	12	2	44	20
10	8	15	53	32	2	44	30
11	8	18	38	2	2	44	51
12	8	21	22	53	2	45	25
13	8	24	8	18	2	46	10
14	8	26	54	28	2	47	4
15	8	29	41	32	2	48	17
16	9	2	29	49	2	49	39
17	9	5	19	28	2	51	8
18	9	8	10	36	2	53	10
19	9	10	3	46	2	55	13
20	9	13	58	59	2	57	23
21	9	16	56	22	3	0	1
22	9	19	56	23	3	2	48
23	9	22	59	11	3	5	55
24	9	26	5	6	3	9	20
25	9	29	14	26	3	12	56
26	10	2	27	22	3	17	10
27	10	5	44	32	3	21	24
28	10	9	5	56	3	26	2
29	10	12	31	58	3	30	57
30	10	16	2	55	3	36	15
31	10	19	39	10	3	42	24
Sept. d. 1	10	23	21	34	3	48	52
2	10	27	10	26	3	55	14
3	11	1	5	30	4	2	23
4	11	5	7	53	4	9	54
5	11	9	17	47	4	17	47
6	11	13	35	34	4	26	10
7	11	18	1	44	4	34	56
8	11	22	36	40	4	43	52
9	11	27	20	32	4	53	19
10	0	2	13	51	5	2	54
11	0	7	16	45	5	12	42
12	0	12	29	27	5	22	31
13	0	17	51	58			

Pag.

Pag. 48 §. 60. *Hoc Scholium a Lin.* 8 *hunc in modum mutetur*: Itaque *ſi motus a viribus acceleratricibus diverſis effecti inter ſe comparentur*, eſt 1mo. *celeritas in ratione compoſita virium acceleratricium, & temporum.* 2do. *Spatia percurſa ſunt in ratione compoſita virium acceleratricium, & quadratorum temporum.* 3^tio. *Quadrata celeritatum acquiſitarum ſunt in ratione compoſita virium acceleratricium, & ſpatiorum.* Dicatur vis acceleratrix f, dabuntur ſequentes formulæ.

$u = ft = \sqrt{fe}$. Hinc ſi $u = 1$, $e = \frac{1}{f}$ &c.

$e = ftt$.

$f = \frac{e}{tt}$.

$t = \sqrt{\frac{e}{f}}$.

Id genus formulæ rationum compoſitarum eodem prorſus modo demonſtrantur, quo ſuperius (52) uſi ſumus. Itaque

Pag. 54 §. 77 *in fine adde*: uti & vis uniformis & æquabilis *tangentialis* appellatur, quod ejus directio ſemper congruat cum tangente curvæ a corpore projecto deſcriptæ.

Pag. 57 §. 92. *Huic* §. *ſequentia duo Corollaria ſubjicienda ſunt*: Coroll. I. *Maxima angularis celeritas vera habetur itaque in eo orbitæ puncto, ubi corpus centro virium eſt maxime vicinum; uti minima illic eſt, ubi ab eodem centro corpus plurimum diſtat.* Unde *linea apſidum duo trajectoriæ in ſe redeuntis puncta connectit, quorum alterum centro virium eſt maxime propinquum, alterum omnium maxime diſſitum.*

Coroll. II. Si tempus revolutionis periodicæ corporis curvam in ſe redeuntem deſcribentis ſit = T, diſtantia a centro virium, quando velocitas angularis vera æquatur velocitati angulari mediæ, = r, & diſtantia ab eodem centro in quovis alio trajectoriæ puncto dicatur = d, ejus illic velocitas angularis vera u tempore t admodum parvo rite exprimetur in hunc modum $u = \frac{t \times 360'' \times rr}{T \times dd}$. Eſt enim $u : \frac{t \times 360''}{T} = rr : dd$. Ob eandem rationem erit $d = r\sqrt{\left(\frac{t \times 360''}{T \times u}\right)}$ formula diſtantiæ a centro virium.

Pag. 61 Exempla, & uſus &c. *Monitum hoc loco volumus lectorem, quoniam ad uſum formularum rite comprehendendum nil intereſt, quænam dentur quantitates, nos in his exemplis nihil mutare voluiſſe. Unde poſitiones Mercurii non e tabula correcta, ſed uti habetur* PAG. 43, *deſumptas reliquimus usque ad* §. 106, *quem ab Authore magis illuſtratum cum differentiis e tabula correcta acceptis jam ſubjungimus.*

106. Interpolari etiam poſſunt differentiæ radicum datarum, tum ut inveniatur tempori dato correſpondens, tum ut reperiatur maxima vel minima omnium, quæ dari poſſunt, ope formularum pro *maximo* vel *minimo*. Hac ratione plures obſervationes calculum

ingrediuntur, quo interpolatio accuratior evadit. V. g. in ſequente tabella

Jun.	*loca Mercurii*			*Differentiæ primæ.*			*Differentiæ ſecundæ.*			
die 24	1ˢ	29°	18′ 54″							
				6ˢ	20′ 54″					
25	2	5	39 48			+ 2′ 7″	= *a*	=	0′	0″
				6	23 1					
26	2	12	2 49			+ 028	= *b*	=	1	44
				6	23 29					
27	2	18	26 18			— 1 7	= *c*	=	3	18
				6	22 22					
28	2	24	48 40			— 249	= *d*	=	5	3
				6	19 33					
29	3	1	8 13							

Acceptæ ſunt ſex obſervationes a die 24 usque ad 29 Junii, cum 5 earum differentiis, quæ *differentiæ primæ* appellantur, & 4 harum differentiarum differentiis, quæ *differentiæ ſecundæ* dicuntur. Manifeſtum autem eſt *primo*, terminum, quo Mercurius velocitatem maximam habuit, inter hos ſex dies contineri. *Secundo* quatuor differentias ſecundas reſpondere diebus 25, 26, 27 & 28 Junii. *Tertio* quoniam primæ duæ ex his ſecundis differentiis ſunt poſitivæ, reliquæ duæ negativæ, tempus, quo Mercurius velocitatem maximam habuit, debere illud fuiſſe, quo differentia ſecunda fuit æqualis 0. Quare loco meridiei dierum 25, 26, 27 & 28 Jun. ſcribi etiam poteſt 0, 1, 2, 3, & pro differentiis ſecundis *a*, *b*, *c*, *d*, quarum prima = 0. Et ut imaginandi vis hac in re non nihil juvetur, calculique ordo appareat, ſit AD (*Fig.* 30 Append.) recta quævis in tres partes æquales arbitrariæ longitudinis diviſa. Inſiſtat huic ad A alia quælibet recta AE, cujus longitudo repræſentet quantitatem primam *a* = 2′ 7″, quæ initio, ſeu origini alterius AD, competit, ubi ſcilicet radix prima = 0. Per B ducatur BF priori parallela, atque ex eadem AE parte, cujus longitudo exhibet quantitatem alteram *b* = 28″, radici AB = 1 convenientem. Agatur per C denuo parallela ad AE, verum in partem oppoſitam: ejus longitudo exprimit *c* = — 1′ 7″, quæ functio reſpondet radici AC = 2. Denique per D ducta parallela ad AE, atque contrarium ſitum obtinens, repræſentat quantitatem *d* = — 2′ 49″, debitam radici AD = 3. Quod ſi jam cogitetur curva per E, F, G, H tranſiens, evidens ſane eſt, per radicem AI exhiberi tempus tranſitus e poſitivo ad negativum, & conſequenter tempus velocitatis maximæ, quod quæritur. Licet vero AE, BF, CG, DH exprimant functiones reſpondentes radicibus 0, AB = 1, AC = 2, AD = 3, itaque calculus ex his ſolis iniri jam poſſet; ut tamen is adhuc evadat planior, ſumpta functione prima = 0, atque ſolutione problematis ad 3 caſum formulæ 2ᵈᵃᵉ reducta (97), ducatur EL ad AD parallela, & rectæ

ctæ FB, GC, HD (quæ functiones repræsentant) producantur usque ad EL, ut obtineantur B*b*, G*g*, H*h*. Quoniam E*b*, *bg*, *gh* æquantur cum AB, BC, CD, manifestum est, sumi posse punctum E, tum rectas E*b*, E*g*, E*h* pro radicibus 0, 1, 2, 3; pro functionibus correspondentibus E, *b*B, *g*G, *h*H, aut in numeris 0, 1′ 39″, 3′ 14″, 4′ 56″; & ducta IK per punctum I ad AE parallela, huc demum reducitur problema, ut inveniatur valor radicis EK sive AI, respondentis functioni KI, vel AE = 2′ 7″, aut 127. His ita constitutis habebitur $l = 1\frac{5}{6}$, $k = -7\frac{1}{2}$, & $h = 106\frac{2}{3}$, & æquatio tertii gradus erit, $1\frac{5}{6}x^3 - 7\frac{1}{2}xx + 106\frac{2}{3}x = 127$, cujus radix $x = 1,295$ æquivalet 1 d. 7 h. 5′ 40″, quod tempus meridiei 25 Junii, cui prima functio respondet, addendum, ut obtineatur tempus, quo Mercurius maximam nactus est celeritatem, scilicet d. 26 Jun. 7 h. 5′ 40″.

Si idem problema per formulam *Maximi* resolvere lubeat, quatuor tantummodo differentiæ primæ accipiendæ sunt, ne calculus in immensum excurrat; & sane praxi satis est hic terminorum numerus. Itaque habitis ex ordine quatuor prioribus differentiis primis 6° 20″ 54″, 6° 23′ 1″ &c, harum rursus accipiantur differentiæ, sive excessus supra minimam (quæ prima est); erunt functiones 0″, 2′ 7″, 2′ 35″, 1′ 28″. Et quoniam hæ ab initio crescunt, dein decrescunt, patet, celeritatem maximam quæsitam respondere functioni maximæ, poteritque ex formula *maximi* (97) $x = \frac{\pm\sqrt{(kk - 3lh)} - k}{3l}$ immediate reperiri. Quod si quis velit calculi ordinem figuræ Geometricæ accommodare, sit recta AD (*Fig* 29 Append.), cujus tres partes æquales exhibeant radices 0, 1, 2, 3. Parallelæ BE, CF, DG sua longitudine earum functiones repræsentabunt, scilicet 2′ 7″, 2′ 35″, 1′ 28″. Curvæ per extrema A, F, E, G transeuntis (quæ semper erit generis parabolici; & quidem ordinaria parabola, quando tres tantummodo functiones, totidemque radices habentur; cubica, sive secundi generis, ubi quatuor (uti in præsente casu) radices, ac functiones sunt &c.) vertex I respondebit functioni maximæ, quæ celeritatem maximam repræsentat; & recta AK, determinata per IK, ad BE parallelam, exhibet radicem correspondentem, quæ tempus maximæ celeritatis indicat. Ut igitur hæc radix reperiatur, erit $b = 131$, $c = 158$, $d = 91$; & hinc juxta casum 3 formulæ 2^dæ $l = \frac{2}{3}$, $k = -51\frac{1}{2}$, & $h = 177\frac{5}{6}$; & per formulam *Maximi* erit $x = \pm\sqrt{\left(\frac{2652\frac{1}{4}}{4} - \frac{177\frac{5}{6}}{5}\right)} + \frac{51\frac{1}{2}}{2}$, sive $x = \pm 23,9613 + 25,75$; quapropter binæ radices sunt

$x = 49, 7113$, & $x = 1, 7887$, quarum posterior procul dubio quæsita est. Respondet autem huic tempus 1 d. 18 h. 55′ 44″ addendum ad 24 Jun. 12 h. 0′, quod prima differentia 6° 20′ 54″ respondet medio inter 24 & 25 Junii. Obtinetur adeo tempus celeritatis maximæ Mercurii d. 26 Jun. 6 h. 55′ 44″, quod a superius invento propterea tantillum differt, quod in præsente calculo una observatione pauciores sint adhibitæ. Verum hoc discrimen nullius momenti est, cum motus planetæ in transitu per apsides (ubi radius vector ad tangentem perpendicularis est) sit admodum æquabilis.

Si tandem scire quis cupiat, quanta fuerit celeritas maxima angularis Mercurii intra 4 horas, sive quos arcus conficere visus sit duabus horis ante, & duabus horis post momentum, quo ad maximam celeritatem pervenit, id est, ab hora 5 usque ad horam 9 diei 26 Junii, in formula $-15\frac{5}{6}x^3 + 61\frac{1}{2}xx + 22935\frac{1}{3}x$ primum pro x substituatur 1, 20833, dein vero 1, 375; obtinebitur e prima substitutione 27775, 4, ex altera 31611, 2, & differentia 3835, 8 ostendet, motum angularem fuisse 1° 3′ 55″, 8.

Consimili calculo invenietur celeritas minima Mercurii die 9 Aug. 6 h. 37′, ejusque motus angularis verus intervallo 4 horarum (nempe ab 4 h. 37′, usque ad 8 h. 37′) 27′ 23″, 2.

Pag. 63. §. 107. *Demonstratio hujus Theor. sic mutanda, adhibito etiam schemate* 31 Append. *paullo aliter constructo.*

DEMONSTRATIO. Si corpore D trajectoriam P N A M circa punctum S describente, cogitetur interea aliud corpus *d* circa idem centrum S, eodemque tempore periodico, circulum T N M percurrere, manifestum est 1mo, ob æqualitatem temporum periodicorum, velocitatem angularem mediam (90) utriusque corporis eandem esse. 2do. in circulo celeritatem angularem veram æquari semper celeritati angulari mediæ (88). Quare velocitas angularis media in trajectoria æqualis semper est velocitati angulari veræ in circulo. His positis, sint Gg, Rr arcus eodem tempore descripti, alter in trajectoria, in circulo alter. Ductis SG, Sg; SR, Sr, nec non GO ad Sg perpendiculari, sectores GSg, RSr erunt areæ triangulares æquales; & hinc (Elem. 597) Rr: GO = SG : SR. Sunt autem arcus (Elem. 582) GO : RV = SG : SR; igitur Rr : RV = SG^2 : SR^2. Quare, prout SG fuerit major, æqualis, aut minor, quam SR, hoc est, prout corpus D fuerit extra circulum, vel in eodem, aut intra illum, ita arcus Rr, qui velocitatem angularem veram in circulo metitur, consequenter etiam celeritatem angularem mediam in trajectoria, major, æqualis, aut minor erit arcu RV, qui metitur angulum GSg celeritatis angularis veræ in Trajectoria. Unde in toto arcu N A M celeritas angularis vera corporis D minor

est

eſt celeritate media. Oppoſitum contingit in arcu MPN. Sunt *itaque puncta* N & M *termini accelerationis, & retardationis motus angularis veri reſpectu motus medii.* Et hinc velocitas angularis vera nullibi accurate æquatur mediæ, præterquam in dictis punctis N & M. Nec etiam æqualitas ad ſenſum habetur inter has velocitates, niſi quatenus exigui arcus trajectoriæ ad N & M congruunt ad ſenſum cum arcubus exiguis circuli : ſed quo angulus curvilineus ANM major eſt, eo minus trajectoria cum circulo congruit: itaque quo major eſt angulus, quo trajectoria circulum interſecat, eo citius circa puncta N & M velocitas angularis vera a media diſcrepet, eſt neceſſe.

Pag. 64. § 109. *Huic* §. *ſequentia adjiciantur.* Ut poſtremo loco allata analogia demonſtretur, ponatur recta GH (*vide Fig.* 31 Append.) duo loca oppoſita conjungere, in quibus Planeta parum a linea apſidum AP abfuit. Facile intelligetur, cum motus in A & P ſit æquabilis ad ſenſum, tempora, quibus percurruntur ſpatia angularia æqualia PSH, ASG, eſſe in ratione inverſa celeritatum angularium u, V in A & P : unde erit $T : t = V : u$; & hinc $V - u : V = T - t : T$.

Pag. 69. Artic. XI. *Quoniam in hoc articulo plurimæ mutationes occurrunt, ne Lectoris attentionem in materia tanti momenti diſtraheremus, eum propter paucas lineolas nunc ad præſentem Appendicem, nunc rurſus ad ipſas Lectiones Aſtronom. remittendo, expedire judicavimus, totum Articulum, uti in poſtrema edit. Pariſi. habetur, hoc loco exponere.*

ARTICULUS XI.

De ratione diſtribuendi inæqualitates Planetarum in diverſis orbitæ locis.

Inæqualitas motus angularis eſt perpetua mutatio rationis, quam anguli confecti ad partes æquales temporis habent. In theoria motus compoſiti a nobis tradita non aliam conſtantem rationem reperimus, quam arearum deſcriptarum a radiis vectoribus ad tempora, quibus percurruntur ; ut proinde ad calculandos motus veros Planetarum pro tempore quovis dato, imprimis areæ ſectorum confectæ ex ipſo tempore definiri debeant; tum vero quæri anguli ad vertices eorundem ſectorum. Ut autem tam tempora, quam areæ rite conſtituantur, inde a punctis quibusdam fixis (quæ *Epochæ* dicuntur) computi initium ſumendum. Et quamvis videatur, pro *Epocha temporis* ſumi poſſe momentum quodvis, modo ſimul conſtet de *Epocha*

motus, id eſt, cuinam cœli puncto locus Planetæ eo temporis momento reſponderit; nihilominus ut, quantum licet, calculus reddatur ſimplicior, epocharum electio arbitraria non eſt, quando quisque facile perſpicit, non aliud punctum commodius pro primo ſtatui, quam in quo Planetæ motus eſt uniformis. At vero in quavis revolutione Planetæ ellipſin deſcribentis, motus bis fit æquabilis, ſcilicet in tranſitu per lineam apſidum: e re igitur fuerit, ut alterutrius hujus tranſitus momentum aſſumatur pro epocha temporis, punctum vero cœli, cui apſis illa, per quam tum tranſiit, reſpondet, pro epocha motus.

Convenit quidem adhuc inter Aſtronomos, ut tempus tranſitus per Aphelium, & ipſe Aphelii locus epochæ ſtatuerentur; verum poſtquam ex indubio Cometarum reditu demonſtratum eſt, etiam ab his ellipſes deſcribi, quarum pars vicinior, in qua eſt Perihelium, a nobis tantum conſpici poteſt, neceſſitas nobis impoſita eſt, a vetere hoc more recedendi, ſiquidem regulas calculi & Planetis, & Cometis accommodatas condere velimus. Quare motus corporum cœleſtium deinceps a Perihelio computandi ſunt. Ceterum hæc mutatio præter ſignorum + & — commutationem vix aliam varietatem in regulas calculi ab Aphelio deducti invehit, ut modica attentione adhibita facile eædem regulæ ab una epocha ad alteram traduci poſſint. Determinatis itaque ex obſervationibus dimenſionibus ellipſium, quas ſinguli Planetæ deſcribunt, poſitione lineæ apſidum, & conſtituta epocha tranſitus per perihelium, nihil præterea deeſt obſervatori, quo minus locum Planetæ in hac orbita pro tempore quovis dato calculare poſſit, quam ut reperiat methodum aſſignandi angulum ad ſolem a linea apſidum, & radio vectore, in cujus extremo Planeta tempore dato exiſtit, comprehenſum.

Hæc methodus, quæ regulas reperiendi omnes motuum Planetariorum inæqualitates ſuppeditare debet, ſuis non caret difficultatibus. Solet vero *Problema Keplerі* dici, quod is Aſtronomus, cum veram motuum cœleſtium theoriam propoſuiſſet, primus conſtituerit, ejus leges ad calculos exigere, quanquam rem methodo directa perficere haud potuerit, aliis, qui poſt ſe in Geometriam profundius penetraſſent, relicta cura problematis directe reſolvendi. Neque vero ad hæc noſtra usque tempora id via commodiore, quam approximatione, præſtari potuit, ob rationem, quæ mox patebit. Adferemus interim ſolutionem praxi maxime opportunam, imprimis quando orbitæ parum admodum a circulis differunt, quales reapſe ſunt omnes Planetariæ ſyſtematis Solaris: poſtea indicabimus, quid agendum dum calculus ellipſibus valde eccentricis, ut ſunt Cometarum trajectoriæ, accommodandus.

Con-

Conſtructio Problematis Kepleriani. E datis dimenſionibus trajectoriæ planetæ deſcripta ellipſi A B P E (*vid. Fig.* 26 *Append.*), cujus axis major A P, A aphelium, P perihelium, S focus a Sole occupatus, B E axis minor, C centrum &c, fiat ſuper diametro A P circulus A N P G, in cujus circumferentia, inde a puncto P ſequendo directionem planetæ, accipiatur arcus P D, qui ſit ad totam circumferentiam, ut eſt intervallum temporis a proximo tranſitu planetæ per perihelium usque ad tempus datum, ad tempus revolutionis periodicæ. Jungatur S D, & agatur ei per C radius parallelus C N. Demittatur ex N in axem A P perpendiculum N I: erit punctum M, in quo ſecat ellipſin, locus planetæ in ſua orbita prope verus.

Jam vero circulus A D P G appellatur *eccentricus*; arcus B D, ſive angulus P C D, quem is metitur, *Anomalia Media* Planetæ; arcus P N, aut angulus P C N, *Anomalia Eccentrici*; angulus P S M, qui quæritur, *Anomalia Vera* planetæ; denique differentia inter anomaliam mediam & veram, *Æquatio Centri.* Unde problema Keplerianum hunc in modum enunciandum eſt: *data anomalia media planetæ, invenire ejus anomaliam veram, ſive æquationem centri.* Reſolutio in duas partes dividitur: in altera ex anomalia media invenitur anomalia eccentrici: in altera ex anomalia eccentrici anomalia vera.

Proponatur exempli cauſa inveniendus locus Mercurii die 13 Julii An. 1740. 9 h. veſperi. Cum Mercurius fuerit in ſuo perihelio die 29 Jun. 6 h. 59′ 41″, intervallum inter epocham, & tempus datum eſt 17 d. 2 h. 0′ 19″. Quod ſi itaque fiat, ut 87 d. 23 h. 15′ 32″ ad 360° 0′ 0″, ita 17 d. 2 h. 0′ 19″ ad 69° 54′ 41″, habebitur anomalia media planetæ, ſive arcus P D.

Demonſtratur Conſtructio. Quoniam in motibus corporum cœleſtium tempora perpetua lege proportionalia ſunt areis, quas verrunt radii vectores, ſi M eſt locus verus Planetæ in ſua ellipſi, area P S M ſit, oportet, ad aream integram ellipſeos, ut eſt intervallum temporis a tranſitu proximo per perihelium usque ad tempus datum elapſi ad tempus periodicum planetæ. Jam vero arcus P D, & tota eccentrici peripheria, ſeu, quod idem, ſector P C D, & area integra eccentrici ſunt itidem in eadem temporum ratione: quare eſt area P S M ad aream P C D, ut area ellipſeos ad aream eccentrici, & propterea (Elem. 896) ut C B ad C A. Sunt vero areæ P S M, P S N pariter inter ſe, ut C B & C A (Elem. 897); igitur eſt area P S M ad aream P C D, ut eadem area P S M ad aream P S N, e quo manifeſtum eſt, P C D æquari cum P S N. Porro P C D = P C N — D C N, & P S N = P C N — C N S; ergo area D C N = C N S. Eſt autem (Elem 604) D C N = $\frac{1}{2}$ C N × D N; & C N S = $\frac{1}{2}$ C N × S T; unde D N = S T, id eſt, *anomalia eccentrici* per P N determinata, *ejus debet*

eſſe

esse conditionis, ut arcus D N *eccentrici, differentiam ab anomalia media* P D *metiens, æquetur exacte longitudini perpendiculi* S T *e foco* S *in radium* C N, *qui anomaliam eccentrici abscindit, demissi.*

Sed quoniam orbitæ ponuntur parum a circulis discrepare, punctum S debet puncto C admodum vicinum esse, perpendicularis S T exigua, & consequenter arcus D N, ei æqualis, paucorum graduum. His ita habentibus, cum tam arcus D N sit ad radium C N normalis, quam S T, poni potest, S T & D N esse rectas æquales ad C N perpendiculares, & propterea S D ad sensum esse parallelam cum C N. Datis itaque punctis S, & D, altero ex constructione ellipseos, altero ex anomalia media, datur linea S D positione, eique parallela C N abscindit in N anomaliam eccentrici, cujus ope in ellipsi invenitur locus planetæ M.

OBSERVA Propter curvaturam arcus D N nequit S D accurate esse parallela ad C N, sed aliquantum versus N inclinari debet, eoque magis, quo arcus D N est plurium graduum. Itaque angulus P S D paullo major est angulo P C N, qui anomaliam eccentrici exhibet.

Resolutio partis primæ Problematis Kepleriani, id est, data anomalia media invenire anomaliam eccentrici.

Anomalia eccentrici P C N proxime æquatur angulo P S D, complemento ad duos rectos anguli C S D; dantur vero in triangulo C S D latera C S, C D = C A, cum angulo comprehenso S C D; reperitur igitur C S D, indeque P S D. Porro analogia in hoc calculo adhibenda est (Elem. 751) C D + C S (sive S A) est ad C D — C S (id est S P), ut tangens dimidii complementi ad duos rectos anguli S C D ad tangentem arcus addendi eidem dimidio complemento ad duos rectos, ut habeatur angulus C S D. Et quoniam (Elem. 736) tangentes sunt in ratione reciproca cotangentium, analogia mutabitur in hanc: S P est ad S A, sive *distantia perihelii est ad distantiam aphelii*, ut cotangens dimidii complementi ad duos rectos anguli C S D (hoc est, *ut tangens dimidiæ anomaliæ mediæ* S C D), est ad cotangentem arcus addendi dimidio complementi ad duos rectos anguli C S D, ut habeatur complementum ad duos rectos anguli P S D, (hoc est, *ad tangentem arcus addendi dimidio anguli* S C D *anomaliæ mediæ*, ut obtineatur angulus P S D *proxime æqualis* angulo P C N *anomaliæ eccentrici*).

In exemplo propositio est o, 791184 : 1, 208816 = *tang* 34° 57′ 20″ : *tang* 46° 53′ 5″, ac proinde anomalia eccentrici prope vera 81° 50′ 25″.

Verum ut hæc anomalia eccentrici ad veram propius accedat, quærenda est vera magnitudo anguli P C N, vel S C T, ope cujus in triangulo S C T ad T rectangulo recta S T ejusmodi reddatur, ut ad gradus, minuta, & secunda reducta accurate æquetur differentiæ inter eundem angulum

S C T,

S C T, & anomaliam mediam datam P C D; id autem non niſi tentando obtineri poteſt (cum problematis conſtructio accurata non ſit), & per approximationem, quod quadratura, aut rectificatio circuli adhuc aliter, quam per approximationem, non habeatur. In hunc finem imprimis eccentricitas C S ad gradus, minuta, & ſecunda ope ſequentis analogiæ eſt reducenda: ut radius C A, ſive 1, eſt ad 57° 17′ 44″,8; ita eſt C S, ſeu 0,208816, ad 11′ 57′ 51″,3. (Obſervandum hic, radium circuli in gradus converſum ſemper obtineri 57° 17′ 44″,8, ſi fiat 355 : 113 = 180° 0′ 0″ : 57° 17′ 44″,8). Dein in triangulo rectangulo S C T, ſumpto angulo S C T, qualis ſupra inventus eſt, 81° 50′ 25″, quærendum eſt latus S T ex hac proportione: *ut radius eſt ad eccentricitatem* C S *in partes circuli converſam, ita eſt ſinus anomaliæ eccentrici* S C T *ad* S T *itidem reductam ad gradus.* In noſtro exemplo reperitur S T = 11° 50′ 35″, quæ ſit differentia inter anomaliam mediam, & anomaliam eccentrici; & hinc, cum anomalia media ſit 69° 54′ 41″, habetur anomalia eccentrici 81° 45′ 16″. Sumatur itaque angulus S C T 81° 45′ 16″, & inito in hac hypotheſi calculo invenietur S T 11° 50′ 26″, & anomalia eccentrici 81° 45′ 7″. Hinc denuo ponatur angulus S C T 81° 45′ 7″, iterato calculo in eodem triangulo reperitur S T 11° 50′ 26″, eadem, quæ prius: e quo demum intelligitur, anomaliam eccentrici reapſe eſſe 81° 45′ 7″.

Reſolutionis pars altera: data anomalia eccentrici invenire anomaliam veram.

Poſito M loco vero Mercurii in ellipſi, hoc eodem centro M deſcribatur per focum alterum F ellipſeos circulus O F R: producatur S M utrinque in Q, O: erit S O = S M + M O = S M + M F = 2 C A = 2, poſita C A = 1 ſeu ſinui toti; S Q = M Q − M S = F M − S M; & F I = $\frac{1}{2}$ F R (Elem. 448), ſeu F R = 2 F I: item S R = F R − F S, & hinc $\frac{1}{2}$ S R = F I − F C = C I = *cof* P N, & S R = 2 *cof* P N. Eſt autem (Elem. 566) S O: S R = F S: S Q, vel vero 2 : 2 *cof* P N = 2 C S: F M − S M; igitur F M − S M = *cof* P N × 2 C S. Atqui F M + S M = A P = 2; ergo (Elem. 232) S M = 1 − C S × *cof* P N.

In triangulo S M I ad I rectangulo eſt S M : R = S I : *cof* I S M; ſeu 1 − C S × *cof* P N : 1 = C S − C I (aut C S − *cof* P N) : *cof* I S M. Quare *cof* I S M = $\frac{C S - \textit{cof}\ P N}{1 - C S \times \textit{cof}\ P N}$; & 1 + *cof* I S M = $\frac{1 - C S \times \textit{cof}\ P N + C S - \textit{cof}\ P N}{1 - C S \times \textit{cof}\ P N} = \frac{1 + C S - (1 + C S) \times \textit{cof}\ P N}{1 - C S \times \textit{cof}\ P N}$ = $\frac{S P - S A \times \textit{cof}\ P N}{1 - C S \times \textit{cof}\ P N}$. Eodem modo reperitur 1 − *cof* I S M =

$\frac{SP + SP \times cof\ PN}{1 - CS \times cof\ PN}$. Eſt autem (31) $cof\ ISM = - cof\ PSM$; unde (41) $\frac{1 - cof\ PSM}{1 + cof\ PSM} = tang^2 \frac{1}{2} PSM = \frac{1 + cof\ ISM}{1 - cof\ ISM} = \frac{SA - SA \times cof\ PN}{SP + SP \times cof\ PN} = \frac{SA}{SP} \times \frac{1 - cof\ PN}{1 + cof\ PN} = \frac{SA}{SP} \times tang^2 \frac{1}{2} PN.$

Hinc denique $tang^2 \frac{1}{2} PSM = \frac{SA}{SP} \times tang^2 \frac{1}{2} PN$. Ex qua æquatione habetur $SP : SA = tang^2 \frac{1}{2} PCN : tang^2 \frac{1}{2} PSM$, vel vero $\sqrt{SP} : \sqrt{SA} = tang \frac{1}{2} PCN : tang \frac{1}{2} PSM$; hoc eſt: *ut radix quadrata diſtantiæ perihelii ad radicem quadratam diſtantiæ aphelii ; ita eſt tangens dimidiæ anomaliæ eccentrici ad tangentem dimidiæ anomaliæ veræ.* Quapropter ex hac analogia reperietur PSM 93° 51′ 47″, ſive 3 3° 51′ 47″, quæ ſi addantur loco perihelii 2ˢ 13° 54′ 32″, habebitur locus Mercurii 5ˢ 17° 46′ 19″ pro die 13 Julii 9h. veſper.

Ut executio hujus calculi commodior evadat, eum ſequentibus regulis adſtringimus.

Regulæ calculi, quo anomalia media ad anomaliam veram in ellipſi reducitur, computando a proximo tranſitu planetæ per perihelium.

I *A logarithmo diſtantiæ apheliæ ſubducatur logarithmus diſtantiæ periheliæ, ut habeatur primus logarithmus conſtans, cui addatur logarithmus tangentis dimidiæ anomaliæ mediæ ; ſumma erit logarithmus tangentis arcus addendi ad dimidiam anomaliam mediam, ut obtineatur anomalia eccentrici primo approximata.* In toto hoc primo calculo minuta ſecunda negligi poſſunt.

II *Logarithmo* 5, 3144251 (qui eſt logarithmus radii in gradus converſi 57° 17′ 44″, 8) *addatur logarithmus eccentricitatis planetæ : a ſumma ſubtrahatur logarithmus ſemiaxis majoris ; reſiduum erit ſecundus logarithmus conſtans.*

III *Logarithmo ſecundo conſtanti addatur Logarithmus ſinus anomaliæ eccentrici primo approximatæ ; ſumma erit logarithmus numeri graduum, minutorum, & ſecundorum addendorum ad anomaliam mediam, ut habeatur anomalia eccentrici ſecundo approximata.*

IV *Logarithmo ſecundo conſtanti addatur logarithmus ſinus anomaliæ eccentrici ſecundo approximatæ ; erit ſumma logarithmus numeri graduum, minutorum, ſecundorum, quæ addita ad anomaliam mediam dant anomaliam eccentrici tertio approximatam.*

Idem calculus toties repetendus eſt, quoties opus, adhibita ſemper anomalia eccentrici ultimo approximata, ut bis conſequenter eadem accurate obtineatur; quod dum contingit, illa ipſa erit anomalia

malia eccentrici vera. In calculis planetarum ſyſtematis ſolaris ultra tertio approximatam non venitur.

V *Dimidio logarithmi primi conſtantis addatur logarithmus tangentis dimidiæ anomaliæ veræ eccentrici; erit ſumma logarithmus tangentis dimidiæ anomaliæ veræ, quæ quæritur.*

Pag. 73 §. 139 *lin.* 2 *adde:* omnibus a perihelio computatis.
Ibid. lin. 3 *loco* perihelii *lege* aphelii.
Ibid. lin. 4 *loco* aphelii *lege* perihelii.
Ibid. lin. 8 *loco* addendum *lege* ſubtrahendum ab anomalia eccentrici.

§. 140 *Problema hoc ſequente ratione mutavit author.*

Problema II. *Datis dimenſionibus ellipſis invenire radium vectorem, ſive diſtantiam* S M (fig. 26 Append.), *quæ anomaliæ veræ datæ competit.*

Reſolutio I. S M = ſemiax. major $\mp$ eccentricit. × *cof* anomal. eccentrici.

II. $SM = \frac{\text{ſemiax. minor.} \times \textit{ſin}\ \text{anomal. eccentrici}}{\textit{ſin}\ \text{anomal. veræ}}$.

III. $SM = \frac{\text{diſtant. aphel.} \times \text{diſtant. perihel.}}{\text{diſtant. perihel.} + 2\ \text{eccentric.} \times \textit{cof}^2\ \frac{1}{2}\ \text{anomal. veræ}}$.

IV. $SM = \frac{\text{diſtant. aphel.} \times \text{diſtant. perihel.}}{\text{ſemiax. major.} \mp \text{eccentricit.} \times \textit{cof}\ \text{anomal. veræ}}$.

Formula prima nil aliud eſt, quam S M = 1 — C S × *cof* P N, ut Artic. præced. Reſol. Probl. Kepler. part. altera vidimus.

Demonstratio formulæ 2^dæ. In triangulis I S M, I S N ad I rectangulis; ſunt latera M I, N I ut tangentes; & latera S M, S N ut ſecantes angulorum C S M, C S N, ſive eorum complementorum ad duos rectos P S M, P S N. Sunt vero rectæ M I & N I ut C B & C A vel C N (Elem 843); itaque ſequentes habentur proportiones C B: C N = *tang* P S M: *tang* P S N; & in triangulo C N S, C N: S N = *ſ* P S N: *ſ* P C N; item S N: S M = *ſec* P S N: *ſec* P S M. Quare his tribus compoſitis, & prima ratione per C N × S N diviſa, obtinetur C B: S M = *tang* P S M × *ſ* P S N × *ſec* P S N: *tang* P S N × *ſ* P C N × *ſec* P S M. Atqui (*Trig.* 35) *ſin* × *ſec* = *tang*; igitur C B: S M = *tang* P S M × *tang* P S N: *tang* P S N × *ſec* P S M × *ſ* P C N = *tang* P S M: *ſ* P C N × *ſec* P S M = $\frac{\textit{tang}\ P\ S\ M}{\textit{ſec}\ P\ S\ M}$: *ſ* P C N = *ſ* P S M: *ſ* P C N. Quare denique habetur C B: S M = *ſin* P S M: *ſin* P C N. Hæc formula commode adhiberi poteſt, ſi quis tabulam condere velit, quæ logarithmos diſtantiarum Planetæ a Sole exhibeat.

Demonstr. 3^tiæ & 4^æ formulæ. $\frac{1}{2}$ S M + $\frac{1}{2}$ M F = C A: itaque

itaque $\frac{1}{2}$ S M + $\frac{1}{2}$ M F + $\frac{1}{2}$ F S = C A + C S = S A. Jam vero (*Trig.* 111) eſt S F × S M : (S A — S F) × (S A — S M) = 1 : $\int^2 \frac{1}{2}$ A S M, vel vero 2 C S × S M : S P × (S A — S M) = 1 : $\int^2 \frac{1}{2}$ A S M = 1 : *cof*$^2 \frac{1}{2}$ P S M (*Trig.* 33 *Append.*) : unde habetur S M = $\frac{S P \times S A}{S P + 2 C S \times cof^2 \frac{1}{2} P S M}$. Et quoniam (*Trig.* 39) R $\pm$ *cof* = 2 *cof*$^2 \frac{1}{2}$, fiet 2 C S × *cof*$^2 \frac{1}{2}$ P S M, aut C S × 2 *cof*$^2 \frac{1}{2}$ P S M = C S $\pm$ C S × *cof* P S M; & proinde S P + 2 C S × *cof*$^2 \frac{1}{2}$ P S M = S P + C S $\pm$ C S × *cof* P S M = C P $\pm$ C S × *cof* P S M; denique S M = $\frac{S P \times S A}{C P \pm C S \times cof P S M}$.

Obſerva. Ex demonſt. formulæ 2^{æ} *patet*, §. *ſequentem* 141 *omittendum eſſe.*

Pag. 74 §. 142 *lin.* 13 *hujus* §. *lege* ... angulus A S M, adeoque complementum ejus ad duos rectos 99° 2′ 34″ eſt anomalia vera; & hinc anomalia media correſpondens 73° 59′ 30″,5, harumque differentia 24° 3′ 3″,5 æquatio centri quæſita.

Pag. 76 §. 148 *lin.* 2 *lege* anomalia vera 99° 6′ 28″, cui reſpondet media 74° 55′ 59″ (139), hinc maxima &c.

Pag. 77 §. 152 *correctiones in hoc exemplo faciendas*, *Lector facile intelliget*, *ſi modo reputet apud animum*, *anomalias veras non computari ab aphelio* a, *ſed a perihelio* p, *cujus rei exempla jam iſthic dedimus ad* §. 142, & §. 148. *Præterea operæ pretium non cenſuimus poſitiones Mercurii e tabula nova deſumere.*

Pag. 79 §. 156. *Huic Theoremati ſequentia Lemmata præmittantur.*

Lem. I *Si ſuper axe majore ellipſeos* A R (fig. 28 Append.) *deſcribatur circulus*, *omnia perpendicula* S T *e focis ad tangentem quamvis* T V *demiſſa*, *terminantur in circuli peripheria.*

DEMONST. Ducatur a puncto T, in quo perpendiculum S T tangenti occurrit, ad centrum ellipſeos T C; erit S T = $\frac{1}{2}$ S K (Elem. 808), & S C = $\frac{1}{2}$ S F. Sunt itaque triangula S T C, S K F ſimilia, & T C parallela & æqualis $\frac{1}{2}$ F K = $\frac{1}{2}$ C A (Elem. 510).

Lem. II *Quadratum ſemiaxis minoris æquale eſt facto e binis perpendiculis*, *e focis ad eandem tangentem demiſſis*, ſeu C B^2 = S T × F V.

DEMONST. Si per punctum contactus P ducatur diameter P *p*, & per alterum ejus extremum *p* tangens *t u*, erit ob partes ellipſeos ſymmetricas S *t* = F V, S T = F *u*., ac puncta *t*, *u* erunt in peripheria circuli ſuper diametro A R deſcripti. Itaque (Elem. 566) S T × S *t* = R S × S A, ſive S T × F V = R S × S A = C B^2 (Elem. 813).

Lem. III *Recta* P D *e quovis puncto ellipſeos* P *per focum* F *tranſiens*, & *intercepta inter* P & *diametrum* N n *ad eam conjugatam*, *quæ per idem* P *ducitur*,

tur, æqualis eſt ſemiaxi majori C A; quod ſcilicet T C D P ſit parallelogrammum, in quo P D = T C = C A (Lem. I).

Lem. IV. *Factum duarum rectarum e quovis puncto* P *perimetri ellipſeos ad focos ductarum* P S × P F *æquale eſt quadrato ſemidiametri* C N, *ad eam conjugatæ, quæ per* P *tranſit*; ſive P S × P F = C N².

DEMONST. Quoniam triangula rectangula S P T, F P V ſimilia ſunt, erit ratio S T ad S P eadem cum ratione F V ad F P. Igitur (Elem. 298) S T × F V : S P × P F = S T² : S P². Eſt vero etiam S T + F V (= T *t*) : S P + P F (= A R) = S T : S P; & (Elem. 863) T I : C A = C B : C N = S T : S P; igitur C B² : C N² = S T² : S P² = S T × F V : S P × P F. Atqui (Lem. II) S T × F V = C B²; quare etiam S P × P F = C N².

COROLL. Ex analogia C B : C N = S T : S P habetur S T $= \frac{S P \times C B}{C N}$.

Pag. 81 §. 163 *Demonſtrationi a lin. 6 hujus* §' *ſequens brevior ſubſtituatur.*

Etenim ſi in formula generali $f = \frac{S P}{S T^3 \times 2 P G}$ ſubſtituatur pro S T ejus valor $\frac{C B \times S P}{C N}$ (Cor. Lem. IV), & pro P G radio curvaturæ $\frac{C N^3}{C A \times C B}$ (Elem. 886), habebitur formula generalis pro ſectionibus conicis, in quibus vis centralis tendit ad focum S, nempe $f = \frac{S P \times C N^3 \times C A \times C B}{S P^3 \times C B^3 \times 2 C N^3}$, & facta reductione, $f = \frac{C A}{S P^2 \times C B^2 \times 2} = \frac{C A}{S P^2 \times 2 C B^2}$; & omiſſis conſtantibus C A, 2 C B, $f = \frac{1}{S P^2}$.

Pag. 82 §. 165. *Huic theoremati præmittit Author ſequens.*

THEOR. *Vis tangentialis, quæ una cum centrali facit, ut corpus deſcribat ſectionem conicam, eſt in quovis ſectionis puncto minor, æqualis, vel major ea vi, quam acquiſiviſſet corpus motu rectilineo, & uniformiter accelerato cadendo inde uſque ad focum, in quo reſidet vis centralis, prout ſectio fuerit ellipſis, parabola, vel hyperbola.* (fig. 35. Append.).

DEMONST. Arcus exiguus P *p* deſcribitur a corpore P tempuſculo *t* per vim centralem, qua per P I motu uniformiter accelerato moveretur interea, dum eodem tempore *t* ferretur motu æquabili vi tangentiali per P F. Ut jam vis centralis in P rite exprimatur, ſit P K altitudo, per quam tempore T corpus P verſus S motu uniformi-

formiter accelerato per gravitatem g æqualem illi, quam in telluris ſuperficie experimur, cadendo acquireret in fine hujus temporis celeritatem æqualem illi, quam vis tangentialis efficit in corpore P, ut tempuſculo t percurrat uniformiter P F. Evidens eſt, fore 2 P K ſpatium tempore T eadem celeritate percurrendum, qua P F tempuſculo t, ut adeo ſit $PF : 2PK = t : T$.

Quoniam vero vires centrales variabiles ſunt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a centro virium, ſit d diſtantia, quam ab S corpus P habere deberet, ut ejus vis centralis eſſet $= g$; erit itaque vis centralis in P, qua corpus actu urgetur, ad vim, ſive gravitatem g, ut dd ad SP^2, & hinc exprimetur vis centralis in puncto P per $\frac{ddg}{SP^2}$.

Porro dum tempuſcula exigua ſunt, vires centrales conſtantes cenſeri debent (156): eritque ſpatium P I vi $\frac{ddg}{SP^2}$ tempuſculo t deſcribendum, ad ſpatium P K tempore T vi acceleratrice conſtante g percurrendum, ut vires eædem ductæ in quadrata temporum, ſeu in quadrata P F & 2 P K. Unde habetur $PI : PK = \frac{ddg \times PF^2}{SP^2} : g \times 4PK^2$, & $PI = \frac{dd \times PF^2}{SP^2 \times 4PK}$.

Jam vero eſt (Elem. 861) $pi^2 : Pi \times (iC + CP)$ ſeu $Pi \times 2PC = CN^2 : PC^2$, adeoque $Pi \times 2CN^2 = pi^2 \times PC$, & $Pi : pi = pi \times PC : 2CN^2$. Sed quia pi eſt quantitas infinite parva, etiam $pi \times PC$ reſpectu $2CN^2$ infinite parvum eſt, & hinc quoque Pi reſpectu pi, cenſerique poterit comparate ad pi punctum i congruere cum puncto P, & propterea $PF = pi$: quod ſi ſubſtituatur, erit $Pi \times 2CN^2 = PC \times PF^2$, & $Pi = \frac{PC \times PF^2}{2CN^2}$. His poſitis triangula ſimilia PIi, PDC hanc præbent analogiam: $PC : PD\,(\text{vel } CA) = Pi\,(\text{vel } \frac{PC \times PF^2}{2CN^2}) : PI$, ex qua eſt $PI = \frac{CA \times PF^2}{2CN^2}$. Comparato jam utroque valore de P I, habetur æquatio $\frac{dd \times PF^2}{SP^2 \times 4PK} = \frac{CA \times PF^2}{2CN^2}$, quæ reducitur ad $\frac{dd}{SP^2} \times CN^2 = 2CA \times PK$, ſive $= PS \times PR \times \frac{dd}{SP^2}$ (Lem. IV), aut $PR \times \frac{dd}{SP} = 2CA \times PK$, vel denique $= AB \times PK$.

Finga-

Fingamus jam esse P H altitudinem, ex qua motu uniformiter accelerato, & vi acceleratrice constante g cadendo corpus acquireret eandem celeritatem, quam acquireret in S cadendo motu uniformiter accelerato per P S, & vi acceleratrice constante, illique æquali, qua reipsa in puncto P suæ orbitæ A P B urgetur. Quoniam P H & P S sunt spatia, quibus percursis eadem celeritas acquiritur, ea debent esse in ratione inversa virium acceleratricium (60 Append.), sive $PH : PS = \frac{dd\,g}{SP^2} : g$, consequenter $PH = \frac{dd}{SP}$. Quare si hic valor de $\frac{dd}{SP}$ substituatur in priore æquatione, habebitur $PH \times PR = AB \times PK$, seu $PK : PH = PR : AB$. Est autem in ellipsi P R minor quam A B; in parabola, cum utraque fiat infinita, censendæ sunt æquales; in hyperbola si accipiatur distantia alicujus puncti a foco pertinente ad hyperbolam oppositam, ea major est axe principali. Igitur P K minor, æqualis, aut major est, quam P H, prout curva A P B fuerit ellipsis, parabola, vel hyperbola: ideoque etiam 2 P K, quæ exprimit celeritatem tangentialem, minor, æqualis, vel major est, quam 2 P H, qua designatur celeritas uniformis acquisita lapsu uniformiter accelerato ex P in S, prout Planeta ellipsin, parabolam, aut hyperbolam circa punctum S describit.

Coroll. I Expressio generalis celeritatis tangentialis est $\frac{2\,PH \times PR}{AB} = \frac{PH \times PR}{CA}$.

Coroll. II. Si corpus P moveretur in circulo vi centrali tendente ad centrum S (quod tum cum R congrueret), ob $RP = \frac{1}{2}$ A B in hac hypothesi, fieret $PK = \frac{1}{2} PH$, & $2\,PK = PH$. Itaque celeritas tangentialis dimidia foret illius, quæ acquiritur in S lapsu uniformiter accelerato per radium P S, agente vi centrali, quam corpus reipsa in P habet.

Pag. 85 §. 174. Loco hujus IV^ti theorematis novus adjungendus est Articulus.

ARTICULUS XIV

De modificationibus motuum Planetariorum pendentibus a variationibus, quæ accidunt viribus hæc corpora urgentibus.

Quæ adhuc dicta sunt, supponunt, planetam P (fig. 35 Append.) moveri tantummodo duabus viribus singulis momentis mutabilibus

libus, altera tangentiali, quæ planetæ impertitur celeritatem per $2PK$, ſive $\frac{PH \times PR}{CA}$ repræſentatam; altera centrali, quæ eidem tribuit celeritatem expreſſam per $\frac{CA}{SP^2 \times 2CB^2}$. Sed quoniam fieri poteſt, imo reipſa fit, uti in ſequentibus videbimus, ut cauſæ quædam phyſicæ exiguam aliquam mutationem in hiſce viribus efficiant, ita, ut celeritates inde pendentes haud ſint accurate ſingulis momentis in ratione $\frac{PH \times PR}{CA}$ ad $\frac{CA}{SP^2 \times 2CB^2}$, inquirendum nobis iſthic eſt generatim, ecquis effectus inde proveniat. Argumentum hoc, quod in tota Aſtronomia Phyſica eſt maxime intricatum, minutim evolvere haud licet nobis, ideoque adferemus tantummodo principia, ex quibus pendet maxime notabilium inæqualitatum ratio, quæ in cœleſtibus corporibus deprehenduntur, & de quibus nobis etiam ſermo erit.

THEOREMA I. *Axis major ellipſeos* A B (fig. 35 Append.), *quam corpus* P *per ejusmodi vires tangentialem, & centralem deſcribit, quales ſuperiore Articulo reperimus, rite exprimitur hac formula* $AB = \frac{SP \times PH}{PH - PK}$. Facile enim deducitur ex æquatione $PH \times PR = AB \times PK$, ſi pro PR ſubſtituatur ejus valor $AB - SP$.

COROLL. I. Si duæ vires, quibus animatur corpus P, exiguam quandam mutationem ſubeant, quæ obſit accuratæ illi rationi, quam inter ſeſe habere debent, ut corpus conſtanter in eadem ellipſi moveatur, fieri nequit, ut eandem percurrat ellipſin, niſi hæc fingatur tum in poſitione ſua, tum in dimenſionibus mutabilis. Cum itaque axis majoris expreſſio ſit $AB = \frac{SP \times PH}{PH - PK}$, neceſſe eſt, ut ejus mutationes illis ſint analogæ, quæ quantitatibus PK, PH accidere poſſunt.

Si exempli gratia contingat, ut quacunque demum cauſa extranea agente vis tangentialis ſola exiguo exceſſu augeatur, ut PF evadat $PF + 2x$, creſcet etiam PK quantitate $+ x$, & valore denominatoris $PH - PK$ imminuto, augebitur valor fractionis $\frac{SP \times PH}{PH - PK}$, quæ in $\frac{SP \times PH}{PH - PK - x}$ abit; e quo ſequitur, axem majorem AB prolongandum eſſe. Ut autem hujus prolongationis quantitas habeatur, ſubducatur $\frac{SP \times PH}{PH - PK}$ ex $\frac{SP \times PH}{PH - PK - x}$,

obtine-

obtinebitur (Elem. 89) $\frac{PH \times SP \times x}{PH^2 - 2PH \times PK + PK^2 + PH \times x - SP \times x}$; & neglectis in denominatore terminis $PH \times x - SP \times x$ velut infinite parvis respectu aliorum, fiet $\frac{PH \times SP \times x}{(PH - PK)^2}$.

At si fingamus, manente vi tangentiali eadem, solam vim centralem modicam imminutionem pati, ut PH mutetur in $PH - z$, fiet $AB = \frac{(PH - z) \times SP}{PH - z - PK}$, & variatio axis æquabitur differentiæ inter hanc expressionem, & $\frac{PH \times PS}{PH - PK}$, totumque discrimen calculo prioris simili reperietur $= \frac{PK \times SP \times z}{(PH - PK)^2}$.

Quod si denique utraque vis simul exigua quantitate data mutetur, juxta priores formulas singillatim calculanda est mutatio longitudinis axis, quæ ex utravis variatione provenit.

Coroll. II. *Tam incrementum accidentale celeritatis tangentialis planetæ, quam decrementum vis centralis, efficit augmentum temporis revolutionis periodicæ.* Sunt enim tempora periodica semper in ratione radicum quadratarum cuborum axium majorum, & utravis variatio auget longitudinem eorundem axium.

Theorema II. *Variatio in axe majore ellipseos necessario inducit etiam mutationem in ejus positione, & eccentricitate, modo ponatur, quod trajectoria maneat semper elliptica, & focus, ad quem tendit vis centralis, immotus.*

Etenim manente foco immoto, & trajectoria elliptica, necesse est, angulum SPE (Fig. 35 Append.) a radio vectore SP, & tangente EP comprehensum, manere æqualem angulo FPR, id natura sectionum conicarum exigente (Elem. 807). Si itaque I°. magnitudo axis AB mutata est propter variationem solius vis tangentialis, oportet, ut manente SP constante, ea mutatio accipiatur inde a puncto R in recta RP; ut si axis foret imminutus, accipienda esset RT æqualis illi decremento, esset que tum T locus alterius foci ellipseos, ST dupla eccentricitas, quæ positionem lineæ apsidum determinaret, quæ propterea motum angularem habuisset exhibitum angulo TSR, cujus mensura est arcus TG e centro S descriptus. Porro cum hic arcus TG nil differret a recta ad SR perpendiculari, haberetur *sin. tot.* : TR = *cof* TRG : GR; ideoque GR = TR × *cof* TRG, & variatio eccentricitatis esset $\frac{1}{2}$ TR × *cof* PRS. In eodem triangulo GTR est item *sin tot* : TR = *sin* TRG : TG = TR × *sin* PRS. Jam vero est SG : 57° 17′ 45″ = TG : *ang* GST; quare motus an-

gularis lineæ apsidum esset $\frac{\sin SPR \times TR \times 57^{\circ}\,17'\,45''}{SG \text{ vel } RS}$. II°. Si axis mutatio contingat ex variatione solius vis centralis, manente vi tangentiali eadem, producatur is quantitate $z \times \frac{SP \times PK}{(PH-PK)^2}$, fiat ut axis integer $\frac{SP \times PH}{PH-PK}$ ad hoc incrementum, ita est SP ad variationem, sive augmentum radii vectoris P*p*, quod invenietur $= z \times \frac{SP \times PK}{(PH-PK) \times PH}$. Ducatur *p*T ad PR parallela (Fig. 34 Append.); per R agatur RO ad PF parallela, & accipiatur $OT = z \times \frac{SP \times PK}{(PH-PK)^2} - 2z \times \frac{SP \times PK}{(PH-PK) \times PH}$, ita ut T cadat respectu puncti *p* trans, aut cis punctum O, prout OT fuerit positiva aut negativa: erit punctum T alter focus, ST dupla eccentricitas, & angulus RST exprimet motum lineæ apsidum. Etenim cum triangulum P*pi* sit isosceles, est P*p* $= pi$, ideoque $SP + Pp + pi + iO = SP + iO + 2z \times \frac{SP \times PK}{(PH-PK) \times PH}$. Est autem $SP + iO = AB$; igitur accipienda est differentia inter $z \times \frac{SP \times PK}{(PH-PK)^2}$ & $2z \times \frac{SP \times PK}{(PH-PK) \times PH}$, ut obtineatur locus, in quem cadit punctum T. Porro etsi ex postrema hac constructione calculus non adeo expeditus sit pro variatione eccentricitatis, & motu lineæ apsidum, non tamen adeo magnis premitur difficultatibus, cum in triangulo S*p*T cognitis lateribus S*p*, *p*T & angulo comprehenso, qui æqualis est angulo SPR, inveniri possint ST, & angulus *p*ST, cujus ab angulo PSR differentia dat motum apsidum RST.

Quæ hic de ellipsi dicta sunt, applicari possunt cuivis alteri trajectoriæ, modo debitæ fiant mutationes, quas ejus curvatura, & species vis centralis exigunt.

SCHOLIUM. Si itaque observationes mutationem in situ lineæ apsidum, variationem eccentricitatis, aut revolutionis periodicæ prodant, id indicio erit, contigisse interea temporis aliquam variationem in lege virium; & siquidem mutationes illæ continuæ sint, & periodicæ, pendebunt ab actionibus, quæ itidem continuo vires afficiunt, & modificant.

Pag. 89 *Lin.* 21 Duo solum . . . *usque Lin.* 26 est 575 annorum *Sic corrige*: unus tantummodo est, cujus reditus certo prædici possit, est-

eſtque A. 1531, 1607, 1682, & 1759 viſus, ejusque revolutio tempore 76 annorum fere abſolvitur. Alter qui An. 1532 & 1661 comparuit, atque unus, idemque eſſe videtur, ſpes eſt, ut circa An. 1789 redeat Rediiſſe autem &c.

Pag. 96 §. 209. *Reſolutionem hujus problematis exhibet paulo aliter nova editio.*

RESOLUTIO. In formula III §. 140 Append. fiat diſtantia aphelia $= \infty$, uti & eccentricitas: mutabitur in ſequentem pro radio vectore $= \frac{\text{Diſtant. Perihel.}}{\cos^2 \frac{1}{2} \text{ anom. ver.}}$

Pag. 98 & 99. *Hanc tabulam rejicit author ad finem* Sect. III, *ubi novam pro correctione addit, ut ſuo loco videbimus.*

Pag. 103 §. 226. *Primum hujus capitis articulum ita mutavit author.*

ARTICULUS I.

De cauſa, & natura rotationis, ſeu revolutionis diurnæ Planetarum.

Quoniam leges Mechanicæ in detegenda cauſa rotationis corporum terreſtrium, quæ ſæpe cum eorum motu progreſſivo conjuncta eſt, uſum habent, iis quoque locus dandus eſt, dum analogia ab his petita de ratione corporum cœleſtium agimus.

Fingamus globum e maſſa ubivis homogenea, ejusdem denſitatis, & figuræ perfecte ſphæricæ, in medio quopiam omnino libero poſitum. Nil vetat, quo minus cogitatione gravitatem inde abſtrahamus, nulla neceſſitate illi conjunctam, atque effectam tantummodo a vi centrali globo indita; at vero haud ita licet inde inertiam ſeparare proportionalem numero molecularum globum conſtituentium, utpote qualitatem cuivis materiæ inhærentem.

THEOREMA I. *Si punctum quodvis* A (Fig. 40 Append.) *extra globi centrum* C, *recipiat quamlibet impreſſionem momentaneam ſecundum quamcunque directionem* KA; *globus illico duplicem acquiret motum uniformem, alterum rotationis circa axem ad planum circuli maximi perpendicularem, in quo ſita eſt directio* KA; *alterum progreſſionis, aut translationis; ita ut centrum globi in eodem plano circuli maximi deſcribat rectam* CB *ad directionem* KA *parallelam.*

DEMONSTR. Cum omnes globi particulæ inter ſe cohæreant, evidens eſt, impreſſionem in punctum A factam ad omnes omnino pertinere moleculas. Utcunque autem hic effectus diſtribuatur, neceſſe eſt, ut quælibet nitatur in recta ad KA parallela progredi, ita,

ut omnes moleculæ in eadem globi chorda ad KA parallela poſitæ æqualem habeant celeritatem, cum, ut recta moveatur ſecundum ſuam propriam directionem, nullum determinatum ſit punctum, cui applicari debeat vis motrix, quandoquidem nullum punctum in ea directione progredi poteſt, quin ſimul reliqua omnia æqualiter progrediantur.

His ita conſtitutis, ſi ducatur per globum chorda K*k* ſecundum directionem KA, & in plano circuli maximi per eandem directionem determinato fiant diametri B*b*, D*d*, altera parallela, altera perpendicularis eidem chordæ, denique concipiatur planum K*k* ad axem D*d* normale, evidenter apparet, quod cum hoc planum ſecet globum in portiones K*dk*, KD*k* inter ſe inæquales tum quod ad maſſam, tum quod ad inertiam, ſive vim reſiſtendi, impreſſio in punctum A facta nequeat ita in utramque portionem diſtribui, ut ſingulæ moleculæ eas componentes acquirant æqualem celeritatem. At ſi fingatur, inertiam portionis KD*k* eſſe totam collectam in H, & inertiam alterius portionis K*dk* in puncto G (ut juxta leges Mechanicæ ſit DH: *a*D = 2CB — $\frac{3}{4}$ *a*D: 3CB — *a*D; & *d*G: *ad* = 2CB — $\frac{3}{4}$ *ad*: 3CB — *ad*), tum vero licebit portionem axis HG inſtar vectis conſiderare, in cujus extremis H & G ſint binæ maſſæ circa hypomochlium C in æquilibrio, quod (hypomochlium) ſit punctum, in quo tota inertia omnium molecularum globi ſit unita; ipſa vero impreſſio in punctum A facta ſpectari poterit ut potentia in hunc vectem directione A*a* per punctum æquilibrii C non tranſeunte agens. Porro effectus idem eſſe debet, ac ſi hæc potentia ageret ipſi puncto *a* vectis GH applicata, cum in quocunque puncto rectæ K*k* ſuam vim exerat, celeritatem ſemper eandem efficiat in punctis H, C, G juxta ſingulorum chordas ad K*k* parallelas. Quare impreſſio in punctum A ita concipi poteſt, velut ſi fieret in vectis HG punctum *a* diverſum a puncto æquilibrii C, & propterea e lege Mechanicæ hæc vis nequit eundem motum maſſis H & G communicare, ſed majorem efficiet in ea, in qua eſt minor inertia, & diſtributio motus communicati ejusmodi erit, ut pars obtingens maſſæ, aut puncto H, ſit ad partem, quæ obvenit puncto G, reciproce ut factum ex maſſa H in H *a* (ſive H × H*a*) ad maſſam G × *a*G. Itaque tempuſculo infinite parvo *t* punctum H deſcribet majus ſpatium H*h* directione ad K*k* parallelum, quam ſit ſpatium G*g* itidem directione ad K*k* parallelum. Et hinc poſt tempuſculum *t* vectis HG habebit ſitum *hg*, conſequenter axis D*d* transferetur in E*e*, & totus globus in EI*e*; & quoniam centrum C ſemper eſt in recta jungente puncta H, G, in fine tempuſculi *t* in *c* eſſe debebit. Unde durante hoc tempuſculo Centrum C uniformiter progreſſum eſt in plano circuli maximi

BD

B D*bd* in recta C*c* ad K*k* parallela; punctum autem *h* præceſſit, & poſt ſe reliquit punctum *g*. Ex quo evidenter conſequitur, rectum H G habuiſſe motum rotationis circa punctum C, & ſiquidem per *c* ducatur F*f* ad D*d* (quæ fuit poſitio axis in principio tempuſculi *t*) parallela, angulus F*ch* exprimet celeritatem angularem rotationis puncti *h* reſpectu *c* tempuſculo *t*, & angulus æqualis *fc* G celeritatem angularem rotationis puncti *g* reſpectu ejuſdem *c*, eodemque tempore. Apparet denique motu ita ſequentibus tempuſculis æqualibus continuato, uti primo *t* cœperat, 1mo centrum globi debere ſemper uniformiter in recta C*b* progredi, ad directionem, qua facta eſt impreſſio in punctum A, parallela. 2do motum translationis debere fieri in plano circuli maximi B D*bd*, poſitione directionis, qua fit impreſſio, K A determinato. 3^tio axem D*d* debere uniformiter rotari in plano eodem B D*bd*, & propter mutuam cohæſionem molecularum globi, easdem itidem omnes debere rotari uniformiter vel in eodem, vel in planis parallelis, ſive, quod eodem redit, debere eas rotari circa axem globi ad planum B D*bd* perpendicularem, qui propterea *axis rotationis* appellatur.

Coroll. I. Motus translationis centri C*c* eſt rectilineus, & ſimplex; at motus omnium reliquarum molecularum globi eſt ſumma vel differentia duorum motuum, quorum alter eſt uniformis rectilineus, vi cujus pari celeritate ſingulæ moleculæ percurrant temporibus æqualibus ſpatia parallela & æqualia illis, quæ percurrit centrum C, cujus motu totus globus abripitur: alter motus eſt rotationis uniformis, qui ſingulis moleculis eam tribuit celeritatem, ut percurrant ſpatia ſingularum diſtantiis a centro C proportionalia. Hunc in modum H*h* exhibet motum puncti H tempuſculo *t*, eſtque = C*c* + F*h*; item G*g* exprimit motum puncti G, & eſt = C*c* — *gf*. Quia vero anguli F*ch*, *fcg* admodum exigui ſunt, rectæ F*h*, *gf* accipi poſſunt pro arcubus eos angulos metientibus. Itaque ſi ſtricte loquamur, ſpatia reipſa a moleculis globi confecta ſunt ſumma vel differentia ſpatii rectilinei pro omnibus æqualis, & arcus circuli pro omnibus ſimilis.

Coroll. II. Motus rotationis eſt tantummodo motus relativus ad centrum globi; aut rectius ad axem rotationis, & quisque facile videt, quod *quamdiu nec plus nec minus celeritatis eſt in aliqua molecula globi, quam ſit in illis, quæ ſunt in axe rotationis poſitæ, nec rotatio, nec axis rotationis aliquam mutationem ſubire poſſit.*

Coroll. III. *Quanto magis directio, ſecundum quam impreſſio fit, a centro globi diſtat, tanto velocior eſt motus rotationis.*

Coroll. IV. Si directio impreſſionis in quodvis globi punctum L tranſiret per centrum C, evidens ſane eſt, plano B*b* per eam direc-

ctionem ducto, ſecandum tunc globum in duo hemiſphæria æqualia BD*b*, B*bd*, & actionem in L eandem omnino fore, ac ſi centro C applicaretur, quod eſſet hypomochlium vectis utrinque æqualibus maſſis, & ad æqualem diſtantiam onuſti (foret vero hæc diſtantia ex Mechanica æqualis $\frac{3}{8}$ radii). Vis hæc impreſſa æqualiter divideretur per totum vectem, & conſequenter per utrumque hemiſphærium, quorum moleculæ omnes æquali celeritate niterentur progredi in parallelis ad L C. Quare tunc nulla eſſet rotatio, & globi centrum moveretur uniformiter in directione impreſſionis C*b*.

SCHOLIUM. Proclive eſt, ut cogitemus, impreſſionis directionem, cum Planetæ primitus in iis ſpatiis projicerentur, ad quæ ſolis actio ſeſe extendit, non tranſiiſſe per horum corporum centra. Et Joannes Bernoullius (Tom IV Operum, pag. 283) inito calculo reperit, diſtantiam hujus directionis a centro Telluris æqualem $\frac{1}{170}$ ejuſdem ſemidiametri. Conſimili ratione in Marte a centro intervallo $\frac{1}{418}$ ſemidiametri hujus planetæ eam tranſiviſſe invenit, uti & in Jove $\frac{7}{179}$. Et quamvis corpora terreſtria directione per eorum centrum tranſeunte percuſſa ſæpe motum rotationis acquirant; fit tamen id ſeu ex affrictu eorum ſuperficiei aſperæ cum ſcabris partibus ſuperficiei illius, in qua progrediuntur, quæ ſi abfuiſſent, motum tantummodo translationis habuiſſent; ſeu ex incurſu partium in eorum ſuperficie ceteris magis eminentium in particulas medii reſiſtentis, in quo eorum motus peragitur. Nec veri ſpeciem habet, rotationem Planetarum ex ſimili affrictu, aut impactu oriri, utpote qui ſuas orbitas deſcribunt in medio nullam prorſus reſiſtentiam, quæ ſenſu percipi poſſet, objiciente.

THEOREMA II. *Si in globi motu rotationis, & progreſſionis aut translationis præditi quamvis particulam fiat impreſſio nova per centrum tranſeunte directione, ejus motus translationis tantummodo accelerari, retardari, vel extingui poteſt, quin motus rotationis, aut poſitio axis rotationis, quidquam mutationis patiatur.*

DEMONSTR. Impreſſio, cujus directio per centrum tranſit, nequit moleculis globi inæqualem celeritatem impertiri, ſed id tantummodo efficere poteſt (THEOR. I), ut omnes æqualiter nitantur in parallelis ad impreſſionis directionem progredi. Jam vero hæc vis de novo moleculis communicata, cum componatur cum priore, reſultante e duplice earum tendentia, quæque in ſingulis itidem æqualis erat, ac ſecundum parallelas ad primæ impreſſionis directionem agebat, nil aliud præſtare poteſt, quam ut enaſcatur inde velocitas major, minor, aut nulla, ita, ut ex hac motuum compoſitione in nulla particula major oriatur celeritas, quam in altera, nec rotatio, aut axis rotationis, ſed motus tantummodo translationis afficiatur.

SCHO-

SCHOLIUM. Liceret quidem, hanc theoriam ad hypotheſes magis complicatas transferre, ut cum ſimul plures diverſæ impreſſiones in diverſa puncta extra centrum fiunt; ſed quoniam hæ in Aſtronomia elementari locum non habent, ſatis fuerit animadverſiſſe 1mo, eadem, quæ adhuc diximus, conſimili ratiocinio convenire in globum, qui non ſit ubivis æque denſus, ſed ſtratis concentricis diverſæ denſitatis conſtet; aut vero cujus figura non ſit accurate ſphærica, ſed ſphæroidea, genita revolutione curvæ ſymmetricæ circa alterutrum axem, qualis eſt ellipſis, modo ponatur, directionem impreſſionis eſſe in plano axium, & ad eorum alterutrum parallelam. 2do Motum rotationis in ſphæris accuratis, aut ſphæroidibus ſymmetricis, nihil penitus mutari quavis variatione virium in eorum centra agentium, ut proinde *effectus variationum virium centralium in Planetis in eo tantummodo conſiſtat, quod deſcribant trajectorias curvilineas inæqualibus celeritatibus, manente eorum revolutione diurna prorſus uniformi.* 3^tio quando plana, in quibus agunt vires centrales, non ſunt ad axem rotationis corporum ſphæroidicorum perpendicularia, poſitionem axis eorum rotationis reddi quibuſdam variationibus obnoxiam, cujus rei exemplum adferemus, quando de Theoria Lunæ agendum erit.

Pag. 108 *Lin.* 2 *a* S *b*, *lege p* S *b*. Item *Lin.* 3 A S B, *lege* P S B.

Pag. 123 §. 311. *In fine hujus* §. *adde:* Et alias jam conſtat de cauſa phyſica, quacum hic effectus neceſſario conjungitur, ſciturque eum pendere ab actionibus planetarum, maxime Jovis, & Veneris, in tellurem. Vid. Monum. Acad. Berolin. ad An. 1754 pag. 296.

Pag. 126 §§. 320 & 321. *Utrumque hunc* §. *ſic muta.*

Itaque menſura differentiæ temporis veri & medii, eſt differentia ad tempus reducta inter ſummam motuum diurnorum ſolis in aſcenſionem rectam, & ſummam 59′ 8″ toties acceptorum, quot dies interceſſerunt, ſive, quod eodem redit, inter aſcenſionem rectam veram, quam ſol actu habet, & aſcenſionem rectam mediam pro dato tempore ei competentem (quæ quidem æqualis eſt longitudini ſolis mediæ, cum 360 gradus aſcenſionis rectæ mediæ eodem temporis periodici intervallo deſcribantur, quo 360 gradus longitudinis mediæ). Ex quo conſequitur, *tempus verum æquale eſſe tempori medio, dum aſcenſio recta vera ſolis æqualis eſt ejus longitudini mediæ*, id, quod quater contingit per anni decurſum, ſcilicet circa 14 Aprilis, 15 Junii, 30 Auguſti, & 23 Decembris: hoc eſt, ſi ope calculi e tabulis Aſtronomicis reperiatur pro 6 h. 18′ 24″ eadem longitudo media ſolis cum ejus aſcenſione recta vera, erit 6 h. 18′ 24″ ſeu tempus verum, ſeu tempus medium ſumas. Sed quoniam poſt hoc tempus illico aſcenſio recta vera incipit diſcrepare a longitudine media, tempus verum ſimul in-

incipit differre a tempore medio. Hoc discrimen in dies accrescere pergit, donec differentia inter ascensionem rectam veram, & longitudinem augeri desinat, rursusque incipiat minui: & tunc quidem tempus verum maxime discrepat a medio, postea ad hoc propius accessurum. Evenit hoc circa diem 11 Februarii, quo tempus verum a medio 14′ 40″ exceditur; item circa 14 Maii, quando tempus medium 4′ 2″ brevius est vero; pariter circa 26 Julii, cum verum a medio defecit 5′ 58″; uti & circa 1 Novembris, quando medium exceditur a tempore vero 16′ 8″. At enim his ipsis diebus longitudo diei veræ eadem est cum longitudine diei mediæ, cum tunc, differentia inter ascensionem rectam veram, & longitudinem solis mediam nec crescente amplius, nec etiam decrescente jam, motus diurnus in ascensionem rectam verus sit 59′ 8″. Quare *dies verus non est æqualis diei medio, nisi quando tempus verum maxime differt a tempore medio.*

Pag. 128 *Lin.* 11 : hinc angulus T P S, *lege* hinc dimidius angulus T P S,

Pag. 129 §. 330. *Huic* §. *adde sequentia.*

Hujus methodi principia eadem sunt, ac illius, qua per altitudines correspondentes reperitur momentum transitus alicujus sideris per meridianum. Unde usum etiam habere potest in inveniendo transitu solis per colurum solstitiorum, imo & colurum æquinoctiorum, si modo etiam observetur differentia ascensionum rectarum solis, & stellæ ejusdem circa tempus solstitiale, aut æquinoctiale.

Exemplum. Quoniam, dum sol utrinque æqualiter a solstitio aberat, differentiæ ascensionum rectarum solis & lucidæ Lyræ erant 104° 2′ 31″ & 241° 43′ 26″, harum dimidium (sive semisumma) 172° 52′ 58″½ necesse est, ut sit differentia earundem ascensionum rectarum momento solstitii. Jam vero die 19 Junii 1749 in meridie differentiam ascensionum rectarum solis, & lucidæ Lyræ observavi 170° 53′ 10″½, itaque tum soli adhuc conficienda restabant 1° 59′ 48″ in ascensionem rectam, ut ad punctum solstitiale pertingeret. Et ex tabulis Astronomicis motus diurnus Solis in ascensionem rectam circa 19, 20, & 21 Junii est 1° 2′ 23″; tempore 46 h. 5′⅓ itaque opus fuit, ut in ascensionem rectam conficeret 1° 59′ 48″. Quare solstitium contigit die 20 Junii 22 h. 5′ 20″. In hoc & sequentibus calculis, qui explicandæ tantummodo methodi gratia instituuntur, negliguntur nonnullæ exiguæ correctiones in observationibus faciendæ, tum ratione motus apparentis & perparvi in fixis, tum ratione perturbationum solis, de quibus in sequentibus erit agendi locus.

Consimili ratione subtractis 21° 9′ 23″, 5 ex 104° 2′ 31″, remanent 82° 53′ 7″, 5 pro differentia ascensionum rectarum solis & lu-

lucidæ Lyræ momento æquinoctii præcedentis diem 12 Aprilis. Atqui die 21 Martii in meridie reperta fuit hæc differentia 83° 49′ 18″, 8. Itaque ſol jam ultra punctum æquinoctiale tunc confecerat in aſcenſione recta 56′ 11″, 3. Et quoniam ex ſolis theoria motus ejus in aſcenſionem rectam diurnus diebus 20, & 21 Martii tantummodo eſt 54′ 32″, ſequitur æquinoctium 24 h. 44′ citius contigiſſe, ac proinde 19 Martii 23 h. 16′.

Pag. 137 §. 365. *Hujus Corollarii primas tres lineas ſic lege:* Quo recta ab oculo ad objectum ducta magis accedit ad ſitum perpendicularem reſpectu plani orbitæ veræ oculi, eo projectio orbitæ opticæ videtur magis dilatari, & ad circulum propius accedere; ita &c.

Pag. 156 §. 424. *lin.* 2, hora 10½, *lege* 10 hora 23′ 37″
Ibid. lin. 4 zenith 25° 2′ *lege* zenith 25° 0′ 26″,7 ſeptentrionalior *lege* 1′ 25″,8 Auſtralior

Pag. 157 *lin.* 3. 6″,6 *lege* 1′ 57″, 7
lin. 5 ſumma 33″, 3 *lege* differentia 31″,9
lin. 6 25° 2′ eſt 4231; Quare eorum ſuma 13518 *lege* 25° 0′ eſt 4226; Quare eorum ſumma 13513
lin. 7 ut 33″,3 ad 24″,64 *lege* ut 31″, 9 ad 23″,6

Pag. 157 §. 425. *Hunc* §. *ſic muta.* In quocunque hemiſphærio conſtituti ſint obſervatores, modo radius e centro Telluris ad ſidus ductus inter eorum Zenith cadat, ſemper analogia ſuperius indicata locum habet; at ſi hic radius non tranſiret inter obſervatorum Zenith, differentia ſinuum diſtantiarum apparentium a Zenith loco eorum ſummæ adhibenda eſſet.

Pag. 157 §. 426. *Adde huic* §: Exemplum. Die 25 Octobris 1751 0 h. 31′ 44″ veſp. in eadem urbe Capitis Bonæ Spei obſervatus a me fuit limbus ſeptentrionalis veneris 7′ 26″, 2 auſtralior parallelo ſtellæ *b* ♒, cum per meridianum tranſiret in diſtantia 12° 21′ a Zenith. Eodem die a Bradleyo Greenwicii in Anglia idem limbus deprehenſus fuit dicto parallelo ſtellæ *b* ♒ auſtralior 7′ 15″, ſeu (habita ratione refractionis, de qua Cap. ſequente, & longitudinis tuborum) 7′ 15″, 3, cum venus in meridiano a Zenith 73° diſtaret. Obſervaverat præterea Bradleyus, Venerem poſt 23 h. 54′ ad meridianum redeuntem fuiſſe ſeptentrionaliorem 17′ 21″, 5 aut ſi refractio attendatur, 17′ 25″. His poſitis cum Meridianus Greenwicenſis ſit 18° occidentalior eo, qui per Caput Bonæ Spei tranſit, Greenwicii una hora, 14′ minus numeratur, quam in Capite Bonæ Spei, ideoque Obſervatio prima Bradley 1 h. 14′ tardius facta eſt, quam mea. Ut itaque reducatur utraque ad idem tempus, fiat, ut 23 h. 54′ ad 1 h. 14′, ita ſunt 17′ 25″ ad 53″, 9, addenda ad 7′ 15″, 3,

ut habeatur distantia limbi veneris a parallelo stellæ in meridiano Greenwicensi eo momento, quo mea observatio in Capite Bonæ Spei facta est, nempe 8′ 9″,2. Jam differentia inter 8′ 9″,2, & 7′ 26″,2 est 43″,0; unde erit 11699 (summa sinuum 12° 21′, & 73°) ad 10000 (sinum totum), ut 43″,0 ad 36″,8 parallaxin horizontalem Veneris pro die 24 Octob. 1751. 23 h. 27′ tempore vero ad Meridianum Parisinum.

Pag. 157 §. 427. *lin.* 1 24″,64 die 6 *lege* 23″, 6 die 5
lin. 3 *pro* 8371¼ *lege* 8740
lin. 11 6 Octob. 1751 hor. 10½ *lege* 5 Octob. 1751 10 h. 33″ 37″
lin. 13 4354 *lege* 4327
lin. 14 8371½ *lege* 8740
lin. 15 38460 *lege* 40398

His adde sequentia. Simili calculo parallaxeos horizontalis Veneris, reperitur hujus Planetæ distantia a tellure 5605 semidiametrorum terrestrium pro 24 Octob. 23 h. 27′ temp. ver. Est autem ex Tabulis Astronomicis pro eodem tempore distantia veneris a terra partium 2776, quales scala communis continet 20000; igitur magnitudo absoluta hujus scalæ invenitur 40382 semidiametrorum terræ; & accepto inter utramque hanc determinationem medio, supponi potest magnitudo scalæ vera 40390 semidiametrorum terrestrium.

Pag. 158 §. 429 *lin.* 3 & 4 *loco* 19230 *lege* 20195
lin. 6 & 9 *loco* 10″,72 *lege* 10″,21.
lin. 9. *loco* 90 *lege* 94
lin. 10 *loco* 8053 *lege* 8860
lin. 11 *loco* 722700^{es} *lege* 834000^{es}.

Pag 160 §. 434. *Post hunc* § *adde.* COROLL. *Manente eadem declinatione sideris, ejus parallaxis nequit mutare tempus, quo indiget, ut ejus diameter per quemvis circulum horarium transeat.* Etenim si id tempus mutaretur, hæc mutatio ex eo tantum penderet, quod extremum diametri orientale in appulsu ad circulum horarium haberet majorem vel minorem parallaxin in ascensionem rectam, quam habeat extremum occidentale per illum horarium jam transgressum. Jam vero evidens est, in ipso appulsu ad horarium utrumvis extremum diametri habere eandem apparentem distantiam a meridiano; itaque si non mutetur declinatio sideris, formula superius exposita exhibebit eandem parallaxin in ascensionem rectam pro utrovis extremo, & consequenter nulla erit mutatio in duratione transitus totius diametri.

metri. Equidem ſi quis ſideris diametrum a limbo orientali ad limbum occidentalem quovis demum inſtrumento metiatur, aliquantum mutata apparebit ratione parallaxeos; ſed enim eo momento, quo hæc menſura accipitur, extrema diametri non habent eandem diſtantiam a meridiano, quemadmodum id contingit, ſi metiamur diametrum per tempus tranſitus per horarium.

Methodus calculandi parallaxin, quando ratio habenda eſt Figuræ Telluris ad polos depreſſæ.

Quando parallaxis horizontalis ſideris plurium minutorum eſt (id, quod in Luna tantum locum habet) ut nihil accurationis in calculis deſideretur, etiam figuræ telluris ratio habenda eſt, quæ, cum aliquantum a ſphærica aberret, & proxime elliptica ſit (519) efficit, ut linea verticalis obſervatoris non tranſeat per centrum terræ, niſi is in æquatore illius, aut polis ſit conſtitutus. Patebit hoc conſideranti, in ellipſi PEMQ (Fig. 77 Append.) normalem OI, & ſemidiametrum OC ex eodem puncto O ductas eo majorem comprehendere angulum, eoque magis alteram ab altera recedere, quo ellipſis magis a circulo differt, quoque punctum O longius ab extremis axium P, Q diſtat. Jam vero normalis OI non modo lineam verticalem obſervatoris OZ, ſed etiam ſitum omnium planorum verticalium determinat, quorum proinde nullum, præter planum meridiani, per centrum C tranſire poteſt. Quare ope formularum ſuperius traditarum loca apparentia Lunæ haud quaquam ad ea reducuntur, quæ e centro tellulis C viderentur. Equidem diſcrimen perexiguum eſt, ejusque quantitas maxime dependet ab hypotheſi, quam quisque de Telluris figura adoptat. Unde neque ejus ratio habenda eſt, niſi in calculis, qui ſummam accurationem expoſcunt, quales illi ſunt, quibus ex occultationibus ſtellarum per lunam longitudines determinantur. Neque licet nobis id genus calculos parallaxeon diffuſe, & minutim diſcutere; ſed ſatis fuerit methodum ſimpliciſſimam indicaſſe.

Poſito igitur, tellurem eſſe ſolidum revolutione alicujus curvæ ovalis PEMQ circa axem minorem PM genitum, erit radius terræ e centro C ad polum P ductus CP; CQ vero radius æquatoris. Et quoniam verticalis ZI per Zenith obſervatoris, & ejus locum O ducta cum normali OI congruit, occurret axi in K ita, ut punctum K, ad quod tendunt omnia perpendicula, videatur eſſe centrum Terræ reſpectu obſervatoris. Quod ſi itaque, datis proprietatibus curvæ PEMQ, & dimenſionibus terræ, fiat

CP = 1, & calculetur magnitudo linearum OK, & CK pro latitudine quacunque data (quam metitur angulus OIQ); si præterea sciatur parallaxis horizontalis lunæ *p* respectu observatoris in polo constituti, quæ propterea respondet radio telluris CP; ex unica proportione invenietur parallaxis horizontalis, competens radio KO. His positis sit Luna in L; si formulis superius traditis, & accepta parallaxi horizontali $p \times KO$, methodo præscripta utamur, omnia loca lunæ visa ex O reducentur exacte ad loca visa e puncto K, & viciſſim, cum triangulum parallacticum OKL sit in vero plano verticali respectu observatoris: sed quoniam loca lunæ ex O observata ad punctum C referri debent, en correctiones adhibendas locis ad K reductis, ut habeantur loca ex C visa.

Pro ascensione recta, & declinatione. Ascensio recta juxta formulam N. 434 (in qua parallaxis horizontalis $p \times KO$ adhibenda) reducta, nulla opus habet correctione. Nam ducta CL manifestum est, reductionem a puncto K ad punctum C pendere A parvo triangulo CKL. Jam vero planum hujus trianguli determinatur positione per rectam CK, quæ est portio axis æquatoris; itaque planum illius est idem cum plano circuli horarii, in quo est sidus L, oculus K, & centrum C, consequenter correctio, sive angulus CLK, afficit tantummodo declinationem lunæ e puncto K visam. Est autem in triangulo CLK, CL, sive (414) $\frac{1}{p}$: *sin* PKL (aut *cos declin. veræ Lunæ*) = CK : CLK; itaque formula correctionis adhibendæ declinationi est $= p \times CK \times$ *cos. declin. veræ Lunæ.* Est hæc correctio subtractiva, quando declinatio est ejusdem nominis cum latitudine loci observatoris, additiva, quando utriusque est contraria denominatio.

Pro longitudine, & latitudine. Sit (in fig. 78 Append.) P polus æquatoris, Z polus ecliptice, *m* locus lunæ reductus juxta formulas N. 434 ad eum, qui e puncto K fig. 77 videretur, adhibita in formulis parallaxi $p \times OK$ pro horizontali Evidens est, per correctiones faciendas in longitudine & latitudine lunæ, ut ex loco *m* viso e puncto K reductio fiat ad locum M visum ex C, punctum *m* in idem M mutari debere, in quod mutatur per correctiones ascensionis rectæ, & declinationis; atqui harum correctiones tantummodo afficiunt declinationem; igitur punctum M in circulum declinationis P *m* cadere debet. Quare formulæ correctionum inveniri poterunt ex formulis differentialibus Trigonometriæ sphæricæ. Et hinc in triangulo ZP *m*, in quo ZP, & ZP*m* sunt quantitates constantes, & variatio, sive differentiale M *m* est $= p \times CK \times$ *cos. declin. veræ Lunæ*, habebitur formula correctionis longitudinis (Trigon. 179)

$$= \frac{p \times CK \times \textit{cos. long. veræ Lun.} \times \textit{sin. Obliq. Eclipt.}}{\textit{cos. Latit. veræ Lunæ}},$$ quæ reduci pot-

est

est ad hanc $= p \times CK \times$ *cos. long. ver. Lun.* $\times$ *sin. Obliq. Eclipt.*, quin in calculum redundet error $\frac{1}{100}$ minuti secundi. Est hæc correctio additiva, luna versante in signis ♋, ♌, ♍, ♎, ♏, ♐; subtractiva in reliquis. Supponitur nihilominus observator constitutus in hemisphærio Telluris Boreali; quod si is latitudinem loci Australem haberet, contraria signa adhibenda essent.

Quod ad correctionem latitudinis, plures formulæ deduci possunt (Trigon. 177), atque inter alias duæ sequentes, $= p \times CK \times$ *cos. declin. veræ Lunæ* $\times$ *cos. anguli ad Lunam inter circulos latitudinis & declinationis.* Et $= p \times CK \times \frac{\text{cos. Oblig. Eclipt.}}{\text{cos. latitud. veræ Lunæ}} - p \times CK \times$ *sin. declin. veræ Lunæ* $\times$ *tang. latitud. veræ Lunæ.* Apparet autem, in postrema formula terminum secundum debere esse admodum exiguum, eamque propterea citra periculum erroris integri secundi semper posse reduci ad hanc $= p \times CK \times$ *cos. obliq. eclipt.* Correctio hæc respectu observatoris Borealis est additiva ad latitudinem lunæ Australem, sed subtractriva a latitudine lunæ Boreali: si observator sit in parte Australi, signa mutanda sunt.

Pro altitudine, & azimutho. Quod si in iis, quæ paullo ante diximus, loco *longitudinis* & *latitudinis* voces *azimuthum*, & *altitudo* substituantur, & (fig. 78 Append.) Z sumatur pro Zenith, eodem modo patebit, correctiones azimutho, & altitudini adhibendas deduci ex sola correctione declinationis M*m*, reperienturque sequentes formulæ. Pro Azimutho $= \frac{p \times KC \times \text{sin. Azim. Lunæ} \times \text{cos. alt. poli}}{\text{cos. alt. veræ Lunæ}}$. Hæc correctio est subtractiva ab azimutho a puncto intersectionis Meridiani cum horizonte, quod respicit meridiem, usque ad intersectionem verticalis primarii cum horizonte; & additiva ad azimuthum ab intersectione meridiani cum horizonte, quæ respicit mediam noctem, usque ad intersectionem verticalis primarii cum horizonte. Pro correctione altitudinis, hæ duæ formulæ habentur, $= p \times CK \times$ *cos. declin. veræ Lunæ* $\times$ *cos. anguli ad lunam inter verticalem, & circulum declinationis.* Et $= p \times CK \times \frac{\text{sin. altit. poli}}{\text{cos. altit. veræ Lun.}} - p \times CK \times$ *sin. declin. veræ Lun.* $\times$ *tang. altit. veræ lunæ.* Hæc correctio est subtractiva ex altitudine jam ad eam reducta, quæ videretur ex puncto K.

Observa. Ceterum id incommodi habent calculi tam minuti, e quo determinatio redditur incerta, quod variæ hypotheses dimensionum figuræ Telluris e mensurationibus institutis deductæ varios quoque præbeant valores linearum OK & CK. In usu supponi potest terra sphæroides ellipticum, in quo diameter æquatoris excedit axem

axem per polos tranſeuntem $\frac{1}{231}$ parte. In hac hypotheſi pro altitudine poli 48° 51′ 29″ (ſit ſiat CP = 1) reperietur OK = 1,00730, & CK = 0,00704. Si itaque p parallaxis horizontalis polaris, foret 57′ 20″, eſſet $p \times OK = 57'\ 45''$, 1 & $p \times CK = 24''$, 21. Ut autem inveniantur OK, & CK pro aliis poli altitudinibus, conſuli poteſt *Diſcours de M. de Maupertuis ſur la parallaxe de la lune. Paris* 1741. *pag.* 21, *& ſuiv.* (*)

Pag.

(*) In tironum gratiam e diverſis methodis accurrate inveniendi rectas OK, & CK in ellipſi, cujus axes dantur, ſequentem ex ipſius Clariſſimi Auctoris epiſtola ſubjungo. Sit (Fig. 79 Append.) O locus obſervatoris in Ellipſi, normalis OG ad axem usque producta ſit OK; e puncto C agatur CD parallela ad OK; erit punctum D locus obſervatoris in terra ſphærica ſub eadem latitudine, ac punctum O in elliptoide, quoniam latitudines angulis verticalium OG cum plano æquatoris CQ determinantur. Jam vero ſupputatis a centro abſciſſis ellipſeos, eſt ordinata $OT = \frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$ Elem. 892) & ſubnormalis $GT = \frac{bbx}{aa}$ (Elem. 846). In triangulo rectangulo GOT eſt $GT : OT = R : \text{tang } OGT = \frac{OT}{GT} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}}{\frac{bbx}{aa}} = \sqrt{\frac{b}{a}(aa-xx)} \times \frac{aa}{bbx} = \frac{a\sqrt{(aa-xx)}}{bx}$. Eſt ergo tang OGT, ſeu $\frac{\text{ſ OGT}}{\text{cof OGT}} = \frac{a\sqrt{aa-xx}}{bx}$, unde facile colligitur $x = \frac{aa \times \text{cof OGT}}{\sqrt{(bb \times \text{ſ}^2 OGT + aa \times \text{cof}^2 OGT)}} = \frac{CQ^2 \times \text{cof lat.}}{\sqrt{(CP^2 \times \text{ſ}^2 \text{lat.} + CQ^2 \text{cof}^2 \text{lat.})}}$. Jam vero $GT\left(= \frac{bbx}{aa}\right)$ fit $= \frac{CP^2 \times \text{cof lat}}{V}$, ſi brevitatis gratia ponatur $\sqrt{(CP^2 \times \text{ſ}^2 \text{lat} + CQ^2 \times \text{cof}^2 \text{lat})} = V$. Porro $CR : DR = GT : OT = \frac{CP^2 \times \text{ſ lat}}{V}$. Item CR (ſeu cof lat) : R (= 1) = GT : OG = $\frac{CP^2}{V}$. CT — $GT = CG = \frac{(CQ^2 - CP^2)}{V} \times \text{cof lat.}$

$CR \text{ (ſeu cof. lat)} : DR \text{ (ſeu ſin lat)} = CG : CK = \frac{(CQ^2 - CP^2) \text{ ſin lat.}}{V}$

$CR \text{ (ſeu cof lat)} : R (= 1) = CG : KG = \frac{(CQ^2 - CP^2)}{V}$. Denique

$KO = KG + OG = \frac{CQ^2}{V}$.

Adhibitis igitur quibuslibet numeris pro CQ & CP, invenientur CT, GT, OT, OG &c in eadem numerorum ſcala; qui numeri ſi ad modulum CP = 1 redigendi ſunt, fiat, ut CP ad 1, ita numerus inventus ad numerum quæſitum, ſeu numerus inventus dividatur per CP. Ita Auctor.

Pag. 163 §. 447. *Loco hujus §. ſequentia inſere.* OBSERVA I. Animadverſum eſt, quod, præterquam in magna horizontis vicinia (ubi vapores, aliæque cauſæ accidentales, & loco cuivis peculiares, lucis radios terræ ſuperficiem fere radentes, ſine certa lege, atque inæqualiter inflectunt) refractio creſcat $\frac{1}{27}$ quantitatis ſuæ mediæ parte, quando in barometro Mercurius uno pollice altior eſt, & liquor in thermometro Reaumuriano 10 gradibus deprimitur. Secundum hanc animadverſionem corrigi poteſt refractio media, atque ad eam reduci, quæ præſenti atmoſphæræ conſtitutioni, ope horum duornm inſtrumentorum cognitæ, competit.

II. Collatis inter ſe refractionibus ab Aſtronomis accuratiſſime definitis, notatum eſt præterea, eas, cum ſiderum altitudo 30 gradus excedit, fere decreſcere in ratione cotangentium altitudinum; atque huic principio innituntur pleræque hypotheſes Geometricæ ad condendas tabulas refractionum Aſtronomicas excogitatæ.

III. Methodus autem *determinandi abſolutam quantitatem refractionum*, quam unicus obſervator ſequi poſſit, hæc eſt tutiſſima. Stabilienda eſt cumprimis altitudo poli apparens e magno obſervationum numero in ſtellis circumpolaribus. Tum etiam invenienda eſt altitudo æquatoris apparens per altitudines meridianas ſolis æquinoctiis vicini, atque cum ejus declinatione comparatas, quam deducere oportet ex ejus aſcenſione recta iisdem diebus obſervata, ope alicujus ſtellæ, cujus poſitio exacte ſit determinata. His rite conſtitutis, cum refractione altitudines poli & æquatoris reddantur veris majores, utriusque ſumma debet 90° excedere: exceſſus hic erit ſumma duplicis refractionis, quem proinde in ratione cotangentium earum altitudinum partiri oportet.

EXEMPLUM. Ex compluribus obſervationibus ſtellæ polaris ope quadrantis radii 6 pedum inveni altitudinem poli apparentem pro Collegio Mazarinæo 48° 52′ 27″, 2. Dein e quinis altitudinibus meridianis ſolis eodem inſtrumento acceptis a die 27 usque ad 31 Martii 1760 reperi altitudinem centri ſolis in meridie die 29, 44° 49′ 39″, 1. Tum acceptis pluribus altitudinibus correſpondentibus ſolis & lucidæ Lyræ aſcenſionem rectam ſolis pro meridie ejusdem 29 inveni 8° 20′ 33″, ex qua, poſita eclipticæ obliquitate apparente

---

Quod de reductione ad modulum CP = 1 dictum, eodem modo intelligendum eſt de reductione ad CQ, ſi hic æquatoris radius aſſumatur pro unitate. Quare ſi quis uti velit parallaxi æquatoria reſpondente radio CQ, & rectas OK, CK, calcularit in modulo CP = 1, eas prius reducet ad modulum CQ, faciendo ut CQ ad CP (v. g. ut 215 ad 214), ita OK & CK inventæ ad OK & CK, reductas.

te 23° 28′ 16″, obtinetur declinatio vera ſolis 3° 40′ 8″, 5, ex qua ſubtracta parallaxi in declinationem 7″, 2, remanet declinatio ejus apparens 3° 40′ 1″, 3 : hæc ſubducta ex 44° 49′ 39″, 1 relinquit altitudinem apparentem æquatoris 41° 9′ 37″, 8, quæ juncta altitudini poli apparenti 48° 52′ 27″, 2, dat pro ſumma duarum refractionum 2′ 5″, quæ utrique altitudini apparenti 48° 52′½, & 44° 50′ competunt. Cotangentes harum altitudinum ſunt 873, & 1005. Quare erit ut harum ſumma 1878 ad ſummam refractionum 2′ 5″, ita cotangens altitudinis 48° 52′½ ad 58″, 1, refractionem eidem altitudini convenientem. Item ut 1878 ad cotangentem altitudinis 44° 50′, ita 2′ 5″ ad 1′ 6″, 9 ſive refractionem competentem altitudini 44° 50′. Deſinita hunc in modum refractione conveniente altitudini poli apparenti, ejus altitudo vera habetur, ac in præſente exemplo altitudo poli vera pro Collegio Mazarinæo reperitur 48° 51′ 29″, 6. Ad hæc obſervanda eſt altitudo meridiana alicujus ſtellæ ita prope Zenith tranſeuntis, ut ejus refractio nulla ſit, habebiturque vera ejus declinatio; denique notatis temporibus, quo ſtella ad varios altitudinis gradus infra 30 pervenit (ad quod pendulum accuratum ad manus ſit, oportet) calculanda eſt pro iisdem altitudo vera ſtellæ, cujus differentia ab obſervata dabit quantitatem refractionis pro iisdem altitudinis apparentis gradibus. Quod ad refractiones in altitudinibus 30 gradibus majoribus, eæ calculandæ ſunt ex ratione cotangentium, ut ſupra diximus.

Sequitur jam §. 448, ſed §. 449 *omittendus eſt.*

Pag. 164 §. 453. *In hunc locum tranſtulit auctor Articulum* V *hujus capitis ; & quoniam plures in eo mutationes non exigui momenti occurrunt, tantumque poſitum eſt in recte conſtituta Theoria ſolis, neque dubium eſt, poſteriorum accurationem majorem eſſe, quam priorum, libuit hunc articulum etſi longiuſculum, tranſcribere*

ARTICULUS I.

De melioribus methodis ſtabiliendi elementa Theoriæ motus veri Telluris, ſeu motus apparentis ſolis, cum exemplis applicatis ad obſervationes, quæ ad determinationem horum elementorum ſunt inſtitutæ.

Poſtquam ars horologiaria, & theoria motus apparentis fixarum, ad hunc perfectionis gradum perducta eſt, nulla melior eſt methodus

dus positionem siderum accurate determinandi, quam si observetur eorum differentia in ascensione recta, cum stella quapiam, quæ ceteris ad id commodior visa fuerit; & declinatio ex altitudine meridiana, vel ex differentia declinationis cum stella eadem, vel altera, quæ exacte jam sit observata, uti explicuimus Articulo VIII & IX CAP. I. SECT. II. Verum cum sol latitudinem nullam, quæ percipi possit, habeat, ejus ascensionem rectam observare satis est, ut reperiatur ejus longitudo, & consequenter tempus transitus per quævis puncta orbitæ, ut æquinoctialia, solstitialia, distantiæ mediæ, extrema lineæ apsidum (quorum alterum, nempe aphelium Telluris, dicitur *apogeum* solis, alterum, seu terræ perihelium, *perigeum* solis) &c, ut denique omnes dimensiones orbitæ solis (quæ nihil aliud est, quam ellipsis a Tellure descripta) methodis SECT I CAP. II traditis determinentur. Itaque ut determinetur tempus revolutionis annuæ solis, via securissima est, si ex observationibus inveniantur duo momenta temporis, quibus sol eundem accurate situm respectu ejusdem stellæ fixæ habet, ita, ut inter utrumque hoc tempus magnus revolutionum numerus intercedat. Hoc temporis intervallum per revolutionum numerum divisum dabit tempus revolutionis annuæ. In exemplo: accepto medio ex observationibus a De la Hirio diebus 27, 29 & 30 Junii 1684 factis, invenitur longitudo solis pro die 29 Jun. o h. 2′ 50″ temp. med. minor longitudine Sirii 1° 21′ 59″. Et rursus accepto medio ex observationibus a me factis ad Caput Bonæ Spei diebus 28 & 30 Junii 1751 reperi pro die 30 Jun. o h. 2′ 56″ temp. med. longitudinem solis minorem longitudine Sirii 2° 30′ 2″; tempus autem hoc reductum ad meridianum Parisinum fuit 29 Jun. 22 h. 58′ 16″ temp. med. Discrimen porro inter longitudinum differentias 1° 8′ 3″ confici debuit (cum 57′ 12″ respondeant 24 h. o′ 12″ temp. med.) 1 d. 4. h. 33′ 21″. Igitur die 1 Julii 1751 3 h. 31′ 37″ temp. med. Paris. sol habuit eundem situm respectu Sirii, quem habuit die 29 Jun. 1684 o h. 2′ 50″ temp. med. Est autem intervallum 24472 d. 3 h. 28′ 47″; & hoc per 67 diviso obtinetur revolutio annua solis 365 d. 6 h. 8′ 29″ 31‴.

Comparato in hunc modum situ solis cum aliqua stella ex observationibus diversis anni temporibus institutis, sole nempe in aliis orbitæ suæ punctis versante, animadversum est, nequaquam eandem temporis revolutionis annuæ quantitatem obtineri; & siquidem conferantur observationes correspondentes habitæ mensibus Majo, Junio, Julio, Augusto, semper tempus revolutionis minus deprehenditur, quam præbeant observationes Novembri, Decembri, Januario, aut Februario institutæ; ita, ut non nisi observationes circa finem Martii, aut initio Aprilis factæ idem tempus exhibeant, quod

obſervationes inſtitutæ circa finem Septembris, vel initio Octobris. Hæc inæqualitas, cum conſtans ſit, haud poteſt attribui exiguis erroribus, qui in obſervationes ſemper ſolent irrepere, ſed ejus cauſa e theoria ſolis pendet.

Sic ex obſervatione De la Hirii 21 Decembris 1684 23 h. 59′ 50″ temp. med. Pariſ. fuit tum differentia longitudinis ſolis & Sirii 171° 55′ 45″. Porro ſecundum meam obſervationem ad Caput Bonæ Spei inſtitutam 25 Decemb. 1751 0 h. 0′ 33″ temp. med. hoc eſt, 24 Decemb. 22 h. 55′ 53″ temp. medio ad meridianum Pariſinum, erat differentia longitudinis ſolis & Sirii 172° 43′ 41″. Harum differentia 47′ 56″ requirit 18 h. 48′ 17″ (cum 1° 1′ 11″ reſpondeant 24 h. 0′ 30″ temp. med.). Quare ſol eundem ſitum reſpectu Sirii habuit die 21 Decembr. 1684 23 h. 59′ 50″, quem 24 Decembr. 1751 4 h. 7′ 36″ temp. med. Intervallum 24472 d. 4 h. 7′ 46″ diviſum per 67 exhibet revolutionem annuam ſolis 365 d. 6 h. 9′ 4″ 16‴.

OBSERVA. I. Non negem equidem, quod, ſi præter exiguos motus apparentes fixarum, quarum theoriam perſpectam habemus, ſtella ad conſimiles obſervationes ſelecta alicui peculiari motui, qui poſt annos aliquot notabilis evadat, obnoxia ſit, revolutio annua accurata inde deduci haud poſſit, niſi etiam hujus ratio habeatur. Eſt hæc Sirii, & (quod vero ſimile) omnium magis illuſtrium fixarum conditio, in quarum ſingulis motus aliquid & directione & quantitate varii, neque adhuc ſatis explorati, percipi cœpit. Et quod ad Sirium, longa diſquiſitione reperi, eum intra 67 annos uno minuto ac tribus ſecundis minus in longitudinem progreſſum, quam ſpectata præceſſione æquinoctiorum oporteret. Atque ex hac differentia intervallum inter obſervationes factas menſe Junio Anni 1684 & 1751, creſcit 26′ 27″, ut propterea revolutio annua futura ſit 365 d. 6 h. 8′ 53″ 12‴. Eadem differentia auget intervallum obſervationum inſtitutarum menſe Decembri 24′ 44″, quæ proinde exhibent revolutionem annuam 365 d. 6 h. 9′ 26″ 25‴. Verum quicunque ſit peculiaris hujus ſtellæ motus, ſatis eſt, eum ſemeſtris ſpatio ſentiri non poſſe, ut inæqualitas revolutionum annuarum ex obſervationum diverſis anni tempeſtatibus inſtitutarum comparatione deducta demonſtretur, id, quod in præſens faciendum nobis fuerat.

Ex hac inæqualitate autem evidenter conſequitur, *ſolem non habere eandem velocitatem, dum ad idem punctum redit, in quo prius fuerat obſervatus*, id, quod fieri nequit, niſi linea apſidum aliquantum moveatur, atque ita iisdem cœli punctis non eadem ſemper ſolis anomalia reſpondeat. Et certe nemo non intelligit, quod ſi ſemel ſol in ſuo apogæo ſit obſervatus (uti fit circa finem Junii) & poſtea, abſoluta integra reſpectu fixarum revolutione, ſoleque ad idem, in quo prius vi-

visus fuerat, cœli punctum redeunte, reperiatur, apogæum non amplius esse in eo puncto, sed aliquantum promotum fuisse ultra illud, sol in hoc loco majorem debeat habere velocitatem, quam quæ apogæo convenire possit, consequenter etiam ad illum citius perveniat, quam si apogæum mansisset immotum, & hinc tempus revolutionis brevius fiat. Contrarium eveniret, si observatio fuisset in solis perigæo (mense Decembri) instituta; aut si loco motus juxta signorum ordinem, apogæum haberet motum retrogradum. Ex his itaque patet 1mo, superius relatas observationes ostendere, *lineam apsidum solis moveri juxta signorum ordinem.* 2do Observationes ad determinandam revolutionem annuam maxime idoneas esse, quæ instituuntur sole versante circa puncta distantiæ mediæ; aut vero accipiendam esse quantitatem aliquam mediam inter revolutiones deductas ex observationibus factis sole in punctis oppositis versante, & inter quas idem temporum intervallum interceserit, uti dum sol fuit in apogæo, & dein in perigæo: atque hæc methodus tutior est, quod sole prope apsides existente aliquot continuis diebus ejus motus sit uniformis, adeoque observationes uno die institutæ accurate reduci possint ad eas, quæ duos, tresve dies tardius vel citius sunt habitæ. Et ex supra allatis exemplis statuemus veram quantitatem revolutionis annuæ solis 365d. 6h. 9′ 9″ 48‴.

OBSERVA II. Ex comparatione temporum reditus solis ad idem æquinoctium, ad idem solstitium, denique ad idem, qualecunque id sit, eclipticæ punctum, non solum inæqualis diversis anni temporibus revolutio eruitur, verum etiam universe minor, quam paullo ante determinavimus. Itaque ad evitandas inæqualitates ob motum apogæi solis, comparandæ sunt observationes vel institutæ, dum sol versabatur circa idem punctum distantiæ mediæ; vel circa duo æquinoctia autumnalia, & circa duo æquinoctia verna eorundem annorum, hoc est, ut primis duabus observationibus circa æquinoctia ejusdem anni institutis, etiam postremæ duæ eodem anno circa æquinoctia fiant, & observationes autumnales inter se comparentur, & verna cum verna: ut hac ratione accipi possit medium inter revolutionem prodeuntem ex observationibus circa autumnalia æquinoctia factis, & illam, quæ eruitur ex observationibus circa æquinoctia verna institutis. Simili ratione observationes etiam accipi possunt circa duo solstitia æstiva, & circa duo solstitia hyberna eorundem annorum factæ. Nobis satis fuerit exemplum prioris casus addidisse.

Die 28 Martii 1657 0 h. 5′ 1″ temp. med. Cassinus observavit in magno gnomone ad D. Petronii Bononiæ altitudinem apparentem centri solis 48° 46′ 43″, ac proinde habita ratione refractionis & parallaxeos, vera fuit 48° 45′ 52″: ex hac subducta elevatione æqua-

toris 45° 30′ 40″, remanet declinatio borealis ſolis 3° 15′ 12″, cui competit longitudo o^{s} 8° 11′ 16″, quæ tamen ob rationem mox reddendam (OBS. III) reducenda eſt ad 8° 11′ 3″. Tempus hoc ad meridianum Pariſinum reductum eſt 27 Mart. 1657 23 h. 28′ 56″ temp. med. Jam vero ex quinque altitudinibus meridianis ſolis diebus totidem continuis ope quadrantis, cujus radius erat 6 pedum, acceptis inveni ejusdem centri altitudinem meridianam apparentem pro 28 Martii 1760 o h. 5′ 1″ temp. medio ad meridianum Collegii Mazarinæi æqualem 44° 26′ 26″, ideoque veram 44° 25′ 25″ ½. Subtracta hinc elevatione æquatoris 41° 8′ 30″ ½, habetur declinatio ſolis borealis 3° 16′ 55″, cui reſpondet longitudo o^{s} 8° 15′ 51″, reducenda ad o^{s} 8° 15′ 42″. Differentia inter utramque longitudinem 4′ 39″ a ſole conficitur 1 h. 53′ 15″ (cum diei integro conveniant 59′ 8″, 3); itaque 27 Martii 1760 22 h. 11′ 46″ temp. med. ſol eundem ſitum reſpectu punctorum æquinoctialium habuit, ac 27 Martii 1657 23 h. 28′ 56″ temp. med. Intervallum eſt 37619 d. 22 h. 42′ 50″, quod diviſum per 103 dat revolutionem annuam ſolis reſpectu puncti æquinoctialis Arietis 365 d. 5 h. 48′ 48″.

Ex his complures ſequelæ magni momenti deducuntur. Primo *ſtabiliendæ ſunt tres ſpecies revolutionum in theoria ſolis*; nempe revolutio *Siderea*, quæ eſt tempus reditus ſolis ad eandem ſtellam fixam, eſtque 365 d. 6 h. 9′ 9″ 48‴. Dein revolutio *Tropica*, hoc eſt intervallum reditus ſolis ad idem punctum eclipticæ, ad eundem colurum, ad eundem tropicum &c, cujus duratio eſt 365 d. 5 h. 48′ 48″ o‴. Denique revolutio *Anomaliſtica*, tempus reditus ſolis ad eandem apſidem, quæ eſt, ut mox videbimus, 365 d. 6 h. 15′ 46″.

Secundo. Quoniam ſol ad idem punctum eclipticæ 20′ 21″ 48‴ temporis citius revertitur, quam revolutionem integram reſpectu fixarum abſolvat, ſequitur, coluros, & hinc puncta æquinoctialia, & ſolſtitialia, habere motum retrogradum reſpectu ſolis paullo majorem 50″ 11‴ in partibus circuli per annum. Ex quo fit, ut aſcenſione recta, & longitudine a puncto æquinoctiali Arietis computatis, videatur ſol jam integram deſcripſiſſe eclipticam, dum reipſa non niſi 359° 59′ 9″ 49‴ confecit. Hic motus punctorum æquinoctialium dicitur *Præceſſio æquinoctiorum*.

Tertio. Quia diverſæ anni tempeſtates juxta revolutionem tropicam contingunt, utpote quæ (275) a tranſitu ſolis per puncta æquinoctialia, & ſolſtitialia dependent, hæc revolutio maxime idonea eſt, ut ſit regula temporis civilis & politici, ideoque etiam ei calculi Aſtronomici accommodandi ſunt, quamvis revolutio ſiderea eſſet opportunior. Itaque ratio habenda eſt differentiæ inter haſce revolutiones, ac ſupponendum, quod 360 gradus eclipticæ reſpondeant

deant tempori 365 d. 5 h. 48′ 48″, licet interea ſol in cœlo ſtellato non percurrat, niſi 359° 59′ 10″.

Quarto. Omnia puncta reipſa immobilia in cœlo reſpectu punctorum æquinoctialium 50″ ſingulis annis videri debent progredi juxta ſignorum ordinem.

Quinto. Et quia revolutio anomaliſtica ſolis ſideream 6′ 36″ temporis excedit, conſequens eſt, ut apogæum ſolis reſpectu fixarum motu annuo progrediatur 16″ 16‴, & reſpectu punctorum æquinoctialium circiter 1′ 6″, 4.

Sexto. Motus apogæi ſolis indicio eſt, vi centrali terræ exiguam quandam, ſed conſtantem, mutationem alicunde accidere (§ 174 Append.) ſed de hoc, uti etiam de retrogradatione punctorum æquinoctialium, in ſequentibus quædam adferemus.

Habitis jam temporibus diverſarum ſolis revolutionum, omnes dimenſiones ellipſeos, quam deſcribere videtur, inveniri poſſunt ope trium ejus longitudinum, quæ conditionibus magis faventibus, & cum cura obſervatæ ſint, ſecundum methodum (150) expoſitam. Exempli cauſa collato ſole cum Sirio ad Caput Bonæ Spei, longitudinem veram ſolis die 30 Septembris 1751 23 h. 49′ 44″ temp. med. inveni 6^s 7° 51′ 49″½; die 30 Decembris 0 h. 3′ 0″ temp. med. 9^s 8° 30′ 5″; & die 28 Martii 1752 0 h. 5′ 2″ temp. med. 0^s 8° 9′ 25″½, adhibitis ubivis correctionibus, de quibus infra. Ex his intuli locum perigæi ſolis circa finem Anni 1751 fuiſſe 9^s 8° 40′ 45″; ſolem per illud tranſiviſſe 30 Decembris 3 h. 9′ 20″ temp. med. ad meridianum Pariſinum reducto; eccentricitatem eſſe partium æqualium 16809, quarum diſtantia media terræ a ſole continet 1000000; & hinc maximam æquationem centri 1° 55″ 34″½.

Intervallum a 30 Decembris 1751 3 h. 9′ 20″ temp. med. usque ad 1 Januarii meridiem 1752 temp. med. (eſt autem hic meridies apud omnes fere Aſtronomos *epocha* motus medii ſolis annis biſſextilibus; pridianus vero annis communibus) eſt 1 d. 20 h. 50′ 40″, quo ſol motu medio conficit 1° 50′ 30″; his additis ad locum perigæi 9^s 8° 40′ 45″, habetur epocha motus medii pro initio anni 1752, nempe 9^s 10° 31′ 15″.

Multis ejusmodi ſelectis obſervationibus ad ſimilem calculum revocatis, tandem de veris theoriæ ſolis elementis certi reddemur; & ſiquidem aliquod in iis diſcrimen occurrat, medium quoddam inter ea, quæ reperimus, accipiemus.

Verum quia Aſtronomus quam minime elementa ſuæ theoriæ hypotheſibus ſuperſtruere debet; decebit ſane, ut poſitio lineæ apſidum, & epocha tranſitus ſolis per eandem, ſecundum methodum N. 109 expoſitam; æquatio vero maxima cum eccentricitate juxta

NN. 143 & 145 inveſtigetur. In exemplo, e comparatione ſolis cum Sirio ejus longitudinem die 30 Junii 1751 o h. 2′ 55″ temp. med. ad Caput Bonæ Spei inveni 3ˢ 8° 9′ 2″; & 30 Decembris o h. 3′ o″ eadem erat 9ˢ 8° 30′ 5″. Differentia 6ˢ o° 21′ 3″ excedit, 180° o′ 33″, quos ſol intra ſemirevolutionem anomaliſticam deſcribit, 20′ 30″; jam vero motu diurno exiſtente 57′ 12″, ſol exceſſum illum percurrit intra 8 h. 36′ 13″, & ad 180° o′ 33″ e loco, in quo 30 Decembris o h. 3′ o″ fuerat, pervenit die 30 Jun. 8 h. 39′ 8″. Intervallum temporis eſt 182 d. 15 h. 23′ 52″, exceditque ſemirevolutionem anomaliſticam 15′ 59″. Itaque 30 Jun. 8 h. 39′ 8″ ſol nondum ad apogæum pervenerat. Fiat, ut 4′ o″ (differentia inter velocitates ſolis in apogæo & perigæo) ad 57′ 12″ (velocitatem diurnam ſolis in apogæo); ita ſunt 16′ 5″ ad 3 h. 48′ 34″; hoc tempore adhuc opus erat, ut ſol apogæum attingeret: tranſiit ergo per apogæum die 30 Jun. 1751 12 h 27′ 42″ ad meridianum Capitis Bonæ Spei, tempore vero medio reducto ad meridianum Pariſinum ejusdem diei 11 h. 23′ 2″, & quidem apogæo exiſtente in 3ˢ 8° 38′ 44″ circa finem Junii An. 1751.

Si comparentur duæ longitudines ſolis ad diem 30 Septembris 1751, & 28 Martii 1752 ſuperius allatæ, reperitur, quod hoc intervallo confecerit ſol 180° 17′ 36″ motu vero; motus medius tempori inter obſervationes interjecto competens erat 176° 26′ 29″: ſemidifferentia 1° 55′ 33″½ eſt æquatio maxima ſolis, cui tamen addendum eſt eſt 1″, quoniam 28 Martii ſol paullo plus, quam uno gradu, aberat a puncto ſuæ diſtantiæ mediæ. Eſt igitur æquatio maxima centri 1° 55′ 34″½, & eccentricitas 16809 partium.

Quod ad revolutionem anomaliſticam attinet, ea invenitur ex comparato tempore tranſitus ſolis per ſuum perigæum die 30 Decembris 1751 3 h. 9′ temp. med. Pariſiis, cum tempore tranſitus ejusdem, deducto ex obſervationibus Norimbergæ An. 1487 a Walthero factis. Juxta has obſervationes (vid. Monum. Acad. Reg. Pariſ. An. 1749 pag. 53 & ſeq.) die 12 Decemb. 12 h. 36′ temp. med. ſol aberat a perigæo 3° 49′ 36″; & hinc perigæum attigit die 16 Decemb. 6 h. 5′ tempore ad meridianum Pariſinum reducto. Intervallum eſt 96428 d. 21 h. 4′, e quo revolutio una eruitur 365 d. 6 h. 15′ 42″. Similiter ſol erat in apogæo An. 1503 die 16 Junii 18 h. o′ juxta meridianum Pariſinum. Vidimus autem, ſolem etiam fuiſſe in apogæo die 30 Junii 1751 11 h. 23′; intervallum 90584 d. 17 h. 23′ dat revolutionem unam 365 d. 6 h. 15′ 50″; itaque accepto medio ſtatui poteſt 365 d. 6 h. 15′ 46″.

OBSERVA III. Antequam obſervatio aliqua ſolis ad ſubtiliorem quampiam disquiſitionem adhibeatur, rationem habere oportet qua-

quatuor exiguarum inæqualitatum pendentium ab actione planetarum in terram, quemadmodum in sequentibus explicabitur.

Huic jam subjiciendus est Artic. I, *qui* pag. 164 *habetur.*

Pag. 167 §. 464 *Lin.* 3 *loco* aphelium *lege* perihelium. *Idem fiat* § 465 *Lin.* 2. Item § 468 *Lin.* 3 & §. 469 *Lin.* 2.

Pag. 183 §. 524 *Lin.* 3 *loco* 57050 *lege* 57030.

Pag. 185 §. 530 & *sequentibus hujus Articuli aliud exemplum habet author in eorum commodum transcribendum, qui sese in his calculis exercere desiderant.*

Cometa Anni 1742, qui erat retrogradus, transivit per suum perihelium die 8 Februarii 4h. 48′ temp. med. Locus perihelii in orbita cometæ erat in 7^s 7° 35′ 13″. Logarithmus distantiæ perihelii a sole erat 9,884049; nodus ascendens in 6^s 5° 38′ 29″; denique inclinatio orbitæ 66° 59′ 14″. Oporteat invenire locum verum e terra visum pro die 28 Martii 1742 13 h. 39′ 0″ temp. med.

I. *Accipiatur intervallum inter transitum per perihelium, & tempus datum*, quod in præsente casu est 48 d. 8 h. 51′, & *horæ, minuta, & secunda reducantur ad partes decimales diei.* Fient itaque 48, 3687 d.

II. *Dimidium tripli logarithmi distantiæ perihelii subtrahatur a logarithmo intervalli inter tempus transitus per perihelium, & datum; residuum erit logarithmus ejusdem intervalli reducti ad tempus, seu dies elapsos a transitu per perihelium orbitæ in tabula generali post* N. 214 *calculatæ.* In nostro exemplo logarithmus distantiæ perihelii est 9,884049; ejus triplum 9,652147; tripli dimidium 9,826074; logarithmus de 48, 3687 est 1, 684564; a quo si subtrahatur 9,826074, relinquitur 1, 858489 logarithmus de 72, 192 d.

III. *Quæratur in tab. gen.* (N. 214) *anomalia vera respondens tempori invento; addaturque ea, si cometa directus est, ad locum perihelii, si tempus datum sequitur transitum per perihelium; at si præcedat, anomalia subtrahatur a loco perihelii. Quando cometa est retrogradus, & tempus datum transitum per perihelium præcedit, anomalia vera addenda est loco perihelii; subtrahenda vero ab eodem, si tempus datum sit posterius transitu per perihelium; habebitur locus verus heliocentricus cometæ in sua orbita.* Diebus 72, 192 respondent in tabula 73° 8′ 52″, sive 2^s 13° 8′ 52″, subtrahenda a loco perihelii 7^s 7° 35′ 13″, quia cometa est retrogradus, & tempus datum est posterius tempore transitus per perihelium. Unde invenitur locus verus heliocentricus cometæ in sua orbita 4^s 24° 26′ 21″.

IV. *Locus verus nodi ascendentis subducatur a loco vero heliocentrico cometæ; habebitur argumentum latitudinis cometæ* (471).

Itaque si 6^s 5° 38′ 29″ subtrahantur a 4^s 24° 26′ 21″, argumentum latitudinis est 10^s 18° 47′ 52″.

V. *Inferatur* (473): *ut sinus totus ad cosinum inclinationis; ita tangens argumenti latitudinis est ad tangentem argumenti latitudinis in ecliptica accepti, &*

ad

ad locum verum nodi addendi, ut obtineatur locus verus heliocentricus cometæ ad eclipticam reductus (475), *ſive ejus longitudo vera e ſole viſa.*

Sic argumentum latitudinis reductum ad eclipticam eſt 11^s 11° 6′ 21″, & longitudo vera cometæ 5^s 16° 44′ 50′.

VI. *Fiat hæc analogia* (472) : *ut ſinus totus ad ſinum argumenti latitudinis, ita eſt ſinus inclinationis orbitæ cometæ ad ſinum ejus latitudinis e ſole viſæ, quæ erit Borealis; vel auſtralis, prout (ſi cometa eſt directus) ejus argumentum latitudinis eſt minus, vel majus 6 ſignis; aut (ſi cometa eſt retrogradus) prout ejus argumentum latitudinis eſt majus vel minus 6 ſignis.*

In noſtro exemplo itaque latitudo cometæ e ſole viſa eſt 37° 19′ 20″, & quidem borealis, cum cometa ſit retrogradus, & argumentum latitudinis 6 ſigna excedat.

VII. *Calculetur verus locus ſolis, inveniaturque ejus diſtantiæ a terra logarithmus: ab illo ſubtrahantur 6 ſigna, ut ſciatur locus verus Telluris e ſole viſus; accipiatur differentia inter longitudinem veram heliocentricam cometæ, & longitudinem terræ e ſole viſam: hæc differentia dabit angulum ad ſolem inter terram & cometam, qui etiam angulus commutationis dicitur.*

In exemplo propoſito, locus verus ſolis die 28 Martii 13 h. 39′ eſt 0^s 8° 11′ 28″; & logarithmus ejus diſtantiæ a terra 9, 999841; itaque locus verus terræ e ſole viſus eſt 6^s 8° 11′ 28″. Differentia a 5^s 16° 44′ 50″, nempe 21° 26′ 38″ dat angulum commutationis, ſeu angulum ad ſolem.

VIII. *Fiat* 1mo : *ut quadratum coſinus dimidiæ anomaliæ veræ* (inventæ III) *eſt ad quadratum radii; ita diſtantia perihelii Cometæ eſt ad ejus diſtantiam a ſole, ſive ad radium vectorem.* 2do *ut eſt radius ad coſinum latitudinis e ſole viſæ* (VI), *ita radius vector ad diſtantiam curtatam.*

Invenietur ex his analogiis logarithmus diſtantiæ curtatæ 9, 975019.

IX. *Accipiatur differentia inter logarithmos diſtantiæ curtatæ, & diſtantiæ terræ a ſole (minore e majore ſubtracto); additis ad characteriſticam* 10, *erit ea logarithmus tangentis alicujus anguli* (Elem. 752), *a quo ſubducantur* 45°; *reſidui logarithmus tangentis addatur ad logarithmum tangentis complementi anguli dimidii ad ſolem* (VII); *Summa erit logarithmus tangentis arcus addendi ad illud complementum, ſi diſtantia curtata cometæ a ſole excedit diſtantiam terræ a ſole; ſubtrahendi vero, ſi diſtantia ea cometæ eſt minor, quam diſtantia terræ; habebitur angulus elongationis (ſive angulus ad terram inter locum ſolis, & locum geocentricum cometæ ad eclipticæ planum reductum interceptus), qui additus, vel ſubtractus a loco vero ſolis (prout cometa e terra viſus fuerit vel ex parte orientis, vel ex parte occidentis reſpectu ſolis) dabit longitudinem geocentricam cometæ.*

Itaque ex 9, 999841 ſubductis 9, 975018, reſiduum 0, 024823 auctum decade 10, 024823 eſt logarithmus tangentis 46° 38′ 11″$\frac{2}{3}$; hinc ſubtractis 45°, tangentis reſidui 1° 38′ 11″$\frac{2}{3}$ logarithmum ad-

da-

datur logarithmo tangentis 79° 16′ 41″ (quod eſt complementum de 10° 43′ 19″, dimidio nempe anguli ad ſolem 21° 26′ 38″): ſumma eſt logarithmus tangentis 8° 34′ 51″, quibus e 79° 16′ 41″ ſubtractis (cum diſtantia cometæ a ſole ſit minor, quam diſtantia terræ a ſole) habetur angulus elongationis 70° 41′ 50″, ſive 2ˢ 10° 41′ 50″. E ſchemate rudius conſtructo, quod exhibeat eclipticam in 12 ſigna diviſam, ſolem, terram, & cometam ſecundum longitudines hoc calculo inventas, facile apparet, cometam e terra viſum eſſe reſpectu ſolis ad orientem. Itaque angulus elongationis addendus eſt loco vero ſolis, ut habeatur longitudo geocentrica cometæ 2ˢ 18° 53′ 18″.

X *Fiat denique* (478): *ut ſinus anguli ad ſolem* (VII) *ad ſinum anguli ad terram* (IX), *ita eſt tangens latitudinis cometæ e ſole viſæ* (VI) *ad tangentem ejus latitudinis e terra viſæ.*

Hinc habetur ut ſinus 21° 26′ 38″ eſt ad ſinum 70° 41′ 50″; ita eſt tangens 37° 19′ 20″ ad tangentem latitudinis geocentricæ cometæ 63° 3′ 57″.

Pag. 187. *Articulum* II & III *transpoſuit author; nos hic ſequimur ordinem editionis novæ, & ejus Articulum* II *cum mutationibus exhibemus.*

Pag. 190.

ARTICULUS II.

De calculo cometarum e terra viſorum in orbitis Ellipticis.

§. 572. Quando reditus Cometæ certus eſt, ideoque revolutionis tempus ſcitur, ejus motus in ellipſi calculandus eſt. Methodus a præcedente nihil diverſi habet, niſi modum inveniendi longitudinem heliocentricam, cui illuſtrando unicum exemplum ſufficit. In ſequente Articulo dicemus, qua ratione utendum ſit obſervationibus, ut elementa theoriæ cometæ in ellipſi reperiantur.

§. 573, *usque ad* 577 *retinentur, uti pag.* 199 & 200 *habentur, quibus ſequentia adjungantur.*

Pro majore accuratione limites falſarum poſitionum, quantum fieri poteſt, arcti ſumendi ſunt; ſic in præſente exemplo adhibendæ fuerant anomaliæ veræ 45° 10′ & 45° 20′, aut ſummum 45° & 45° 30′.

Quod ſi pauca ſecunda negligere lubeat, calculi labor admodum contrahetur ope tabellæ, quam in fine hujus Capitis ſubjiciemus, eandem fere cum tabula *Simpſonii* (*Miſcell. Tract. pag.* 62), cujus uſum jam exponimus.

Calculata anomalia vera in parabola, & logarithmo invento diſtantiæ cometæ a ſole, ſubtrahantur priores quinque notæ logarithmi axis majoris ex primis quinque notis logarithmi diſtantiæ periheliæ, ut habeatur logarithmus conſtans, addendus ſeparatim utrique logarithmo hujus tabulæ competentibus anomaliæ veræ in parabola (habita ratione partis proportionalis). Erit prima ſumma logarithmus minutorum, & ſecundorum correctionis faciendæ juxta tabulæ titulos, ut anomalia vera in parabola reducatur ad anomaliam veram in ellipſi. Summa altera erit logarithmus numeri ſemper a logarithmo diſtantiæ in parabola calculatæ ſubtrahendi, ut habeatur logarithmus radii vectoris in ellipſi.

Sic pro 36,443 d. in parabola reperitur logarithmus radii vectoris 9, 835474, & anomalia vera 45° 26′ 46″ (209). Ex 9, 7653 ſubtractis 1, 5530 habetur logarithmus conſtans 8, 2123, addendus ad 4, 6990, & fit 2, 9113, nempe logarithmus de 13′ 35″, correctionis ſubtractivæ, ut proinde anomalia vera in ellipſi ſit 45° 12′ 11″. Item additis 8, 2123 ad 9, 0802 obtinetur logarithmus 7,2925 de 0,001961, correctione nempe ſubtractiva e logarithmo radii vectoris, qui 9, 833513 fiet.

Tabula, qua utimur hic, ſummam accurationem non fert, tum quod conſtructa ſit ex formulis algebraicis, in quibus commoditatis gratia termini aliqui finiti, tanquam infinite parvi, neglecti ſunt; tum etiam quod ellipſes haud ſint curvæ ſimiles, uti omnes parabolæ. Interim ſi longior calculorum ſeries facienda ſit, non ſine compendio adhibebitur, modo nonnullæ in ea correctiones fiant.

Sint culculandæ in ellipſi omnes obſervationes menſe Majo An. 1759 factæ. Compertum eſt, anomaliam cometæ hoc menſe fuiſſe intra 90° & 108°. Ejus perihelii diſtantia invenitur 0,583497, & axis major ellipſeos 36, 14606: quare conſtruatur tabella correctionum (qualem mox ſubjiciemus) in alteram tabulam ad finem præſentis Capitis adferendam. In 2da & 6ta columna ſcribantur correctiones ope logarithmi conſtantis 8, 2079 repertæ. Tum methodo ſuperius (§, 576) expoſita calculentur anomaliæ veræ in ellipſi reſpondentes anomaliis veris in parabola; exempli cauſa pro 90°, 100° & 108°, reperientur 90° 11′ 20″, 100° 23′ 32″ & 108° 35′ 12″, quæ jam tres accuratas correctiones pro ellipſi ſuppeditant, in tertia columna deſcribendas. In 4ta differentiæ harum trium correctionum diſtribuantur proportionaliter ad differentias ſecundæ columnæ, e quibus 5ta columna conficitur, quæ veras correctiones, in calculo adhibendas contineat. Eodem modo reperiuntur veræ correctiones logarithmorum radiorum vectorum.

Ano-

Anomalia vera in parabola	Correctio juxta tab. quæ ad finem hujus Cap. habetur	Correctio calculata	Differentia in part. proport. div.	Vera anomaliæ correctio	Correctio logarith. radii vector. juxta tabulam	Correctio radii vectoris calculata	Differentia in part. proport. div.	Correctio vera logarithmi radii vectoris
Gr.	′ ″	′ ″	″	′ ″				
90	+ 11 6	+ 11 20	14	+11 20	— 5608	— 5681	73	— 5681
91	12 11		16	12 27	5694		74	5768
92	13 17		18	13 35	5780		75	5855
93	14 24		20	14 44	5867		77	5944
94	15 33		22	15 55	5955		78	6033
95	16 43		24	17 7	6044		80	6142
96	17 55		26	18 21	6133		82	6215
97	19 9		28	19 37	6223		84	6307
98	20 24		30	20 54	6313		85	6398
99	21 40		32	22 12	6405		87	6492
100	22 58	23 32	34	23 32	6499	6588	89	6588
101	24 17		36	24 53	6595		92	6687
102	25 38		38	26 16	6691		95	6786
103	27 0		40	27 40	6789		98	6887
104	28 24		43	29 7	6888		101	6989
105	29 51		45	30 36	6990		104	7094
106	31 19		47	32 6	7094		107	7201
107	32 49		50	33 39	7201		111	7312
108	34 20	35 12	52	35 12	7310	7425	115	7425

ARTICULUS III.

Methodus determinandi omnia elementa theoriæ alicujus Cometæ ex obſervationibus in terra inſtitutis, tum in parabola, cum in ellipſi.

Elementa theoriæ cometarum in terra obſervatorum per methodum directam, & Geometricam determinare, res eſt ſummæ difficultatis, tum quod eorum revolutio periodica ſit incognita, tum etiam, quod non ſæpius in conjunctione, vel oppoſitione obſervari poſſint, utpote exiguo tempore viſibiles. In defectu itaque ejusmodi methodi neceſſe eſt ad *poſitionem falſi*, & longum tentamen recurrere.

Hinc collectis, quot haberi poſſunt, probis obſervationibus cometæ, diverſa phænomena expendenda ſunt, uti inæquales velocitates apparentes cometæ, ejus directio, magnitudo apparens diſci, ſive nuclei, varii gradus luminis, directio ac celeritas cometæ in oppoſitione, vel conjunctione cum ſole &c. Ex his conjectura fa-

cienda eſt 1mo, utrum cometa terræ fuerit vicinus, quod ex magnitudine apparente, & magna velocitate motus Geocentrici, quæ brevi admodum minuuntur, dignoſcitur. 2do quo tempore cometa fuerit in perihelio; quod ex eo fere intelligi poteſt, quod tunc tam ipſe, quam ejus cauda ſit lucidiſſima; quippe id obſervari conſuevit paullo poſt tranſitum per perihelium: at vero, quantum licet, obſervationes inſtitutæ circa perihelium, calculum ingredi non debent in methodo, quam explicamus: tunc enim celeritates cometæ e ſole ſpectati non ſatis inter ſe differunt, ut vera elementa inveniri poſſint; ſed ut veritas inventorum comprobetur, tantummodo uſum habent. 3^tio conjectandum, utrum cometa e ſole viſus fuerit directus, an retrogradus, quod fere agnoſcitur e directione apparente illius, quando prope conjunctionem, vel oppoſitionem cum ſole verſatur. 4to æſtimatio facienda eſt, quantæ circiter fuerint Cometæ diſtantiæ a ſole ſub initium, & finem apparitionis. Quamvis autem hæc conjecturam noſtram fefellerint, calculi tamen ſequente methodo inſtituendi, mox id nobis indicabunt, idque ſolum incommodi lapſus ejusmodi habebit, quod operatio pro ejus quantitate longior ſit futura. At ſi paullo major acceſſerit experientia, parum admodum a vero aberrabitur.

Exemplo, & explicationi methodi, de qua agimus, ſit cometa menſibus Martio, & Aprili An. 1742 viſus. Ex hiſtoria obſervationum inſtitutarum, quæ in Mon. Acad. Reg. ſcient. ad annum hunc proſtat, in Europa non niſi ſub initium Martii videri potuit, ex auſtrali cœli parte rapido curſu, & ingenti cum cauda ad nos progreſſus: ferebatur deinceps verſus polum boreum motu apparente directo, ſed velocitate, & lumine ſemper decreſcente, usque ad 6 Maii, quo videri deſiit. In conjunctione cum ſole videbatur 15 Martii, quo tempore motu diurno plus quatuor gradibus circuli maximi conficiebat.

Ex his conjici poteſt 1mo, eum, antequam in Europa eſſet aſpectabilis, jam per perihelium tranſiiſſe, cum in ipſo apparitionis principio tam nucleus, quam cauda tanto lumine fulſerint. 2do motum verum, & heliocentricum fuiſſe retrogradum: quippe cum in conjunctione tantam habuerit velocitatem geocentricam, terræ vicinus eſſe debuit, ac proinde ea conjunctio fuit inferior; & hinc ſi ejus motus heliocentricus fuiſſet directus, geocentricus debuiſſet apparere retrogradus. Neque enim fieri potuit, ut cometa jam a ſole, & perihelio remotior tantam haberet velocitatem heliocentricam directam, ut e terra ſpectatus pariter appareret directus. 3^tio cum ſub initium apparitionis in Europa cometa terræ tam fuerit propinquus, ejus diſtantia a ſole tum vix minor eſſe poterat, quam diſtantia ter-

ræ

ræ a ſole. Sed circa Majum cometa jam multo longius a ſole diſtare debebat, quam terra, utpote cum magis ſemper, magisque a ſuo perihelio recederet.

Spectatis omnibus hisce conjecturis ſeligantur tres poſitiones cometæ obſervatæ temporibus, quantum fieri poteſt, maximo intervallo diſjunctis, ita tamen, ut tunc motus diurnus cometæ ſaltem 20 minuta circuli maximi æquarit: nam ſi motus admodum lentus eſt, errores minimi in definiendis locis cometæ admiſſi maximos inducunt in determinationem elementorum quæſitorum; & certe nucleus male terminatus, & debili lumine præditus, quando motus cometæ eſt exiguus, accurationi obſervationum admodum officit. Quærantur ex tabulis Aſtonomicis longitudines ſolis, & logarithmi diſtantiarum ejus a terra pro tribus temporibus obſervationum ſelectarum, quæ & ipſa ad tempus medium reducantur. Inveniatur dein elongatio cometæ, hoc eſt, differentia inter ejus longitudinem obſervatam, & longitudinem ſolis tempore primæ & ultimæ obſervationis. Obſervetur præterea, an cometa reſpectu ſolis fuerit verſus orientem, an verſus occidentem, & ex his conſtruatur ſequens tabella.

1742 tempus medium	Longitudo Cometæ Obſervata	Latitudo Bor. cometæ Obſerv.	Longitudo ſolis calculata	Logar. Diſtant. ſolis a terra	Elongatio Cometæ a ſole
h. ′ ″	S G ′ ″	G ′ ″	S G ′ ″		G ′ ″
4 Mart. 16 9 50	9 16 0 40	34 45 37	11 14 27 44	9,996910	58 27 4 Occ.
28 .... 13 39 0	2 18 52 45	63 3 55	0 8 11 28	9,999840	
24 April. 9 39 0	3 1 5 33	50 32 50	1 4 27 16	0,003092	56 38 17 Or.

His ita habentibus invenienda ſunt per calculum elementa parabolæ, quæ quatuor has conditiones habet: 1mo ut ſol ſit in ejus foco. 2do ut tranſeat per duo puncta determinata ex duabus ſelectis obſervationibus inter ſe maxime diſtantibus, nempe factis 4 Martii, & 24 Aprilis. 3^tio ut intervallo temporis inter has obſervationes elapſi arcus cœleſtis reipſa deſcribi potuerit, qui iisdem duobus punctis intercipitur: in præſente exemplo eſt hoc intervallum 50 d. 17 h. 29′ 10″. ſeu reductione ad partes diei milleſimas facta, 50, 728½ d. 4to denique ut præterea tranſeat per punctum determinatum ex tertia aliqua obſervatione, quæ, quantum res fert, remota ſit a duabus prioribus, qualis eſt 28 Maii inſtituta.

Hæc ut præſtentur, ſchemate quodam calculus juvetur (Fig. 76 Append.), quod circiter exhibeat dimenſiones orbitæ quæſitæ. Cen-

tro S, in quo ſol ponitur, radio arbitrariæ magnitudinis deſcribatur arcus L K telluris orbitam repræſentans. Sit L locus telluris die 4 Martii, & K die 24 Aprilis, ut proinde arcus K L æquetur motui ſolis eo temporis intervallo. Ad L conſtruatur angulus S L N 58° 27′ 4″ verſus occidentem, ut N ſit projectio loci cometæ in plano eclipticæ S L K; & ducta S N, cogitetur N *n* ad planum eclipticæ, & propterea ad rectas L N, S N, perpendicularis, ita, ut *n* exhibeat locum verum cometæ in orbita parabolica P *n m*.

Hinc ſi ducantur *n* L, *n* S, evidens eſt, eſſe S N diſtantiam curtatam, *n* S radium vectorem, angulum *n* S N latitudinem heliocentricam cometæ, N S L angulum commutationis, ſive angulum ad ſolem; *n* N L angulum ad cometam (ita eum compendii cauſa appellabimus, cum alias dici deberet angulus ad punctum projectionis cometæ inter ſolem & terram); *n* L diſtantiam cometæ a terra; N L diſtantiam puncti projectionis a terra. Jam vero in tribus triangulis S L N, L N *n*, *n* S N, quorum primum eſt obliquangulum, reliqua duo rectangula ad N, nota tantummodo ſunt angulus S L N 58° 27′ 4″, latus S L, cujus logarithmus 9,996910, & angulus *n* L N 34° 45′ 37″, ejusque complementum L *n* N, cum rectis *n* N L, *n* N S; & vel exigua attentione adhibita, ex horum triangulorum poſitione advertitur, quod dato adhuc quocunque alio angulo, vel latere (præterquam radio vectore S *n*) omnia reliqua inveniri poſſent, ut proinde neceſſe non ſit, hæc ſingillatim adferre: id ſolum videtur difficultatem poſſe objicere, ſi daretur angulus *n* S N, ſive ejus complementum N *n* S; at enim facile hinc quis ſe expediet, ſi animadvertat, eſſe (479) tangentem anguli *n* L N ad tangentem anguli *n* S N, ut eſt ſinus anguli N L S ad ſinum anguli N S L.

Eodem modo deſignetur in ſchemate locus cometæ pro die 24 Aprilis, facto angulo S K M 56° 38′ 17″ verſus orientem. Locus cometæ in planum eclipticæ projectus ſit M, & ejus locus verus *m* in extremo *m* rectæ ad planum eclipticæ perpendicularis M *m*; junctis *m* S, *m* K habentur tria triangula S M K, *m* K M, *m* K S, quorum eadem eſt conditio, ac priorum.

Quoniam autem dimenſiones orbitæ cometæ reperiri nequeunt, niſi reſolutione triangulorum utrobivis junctorum, poſitio *falſi* in ſubſidium vocanda eſt, & aſſumendus utraque ex parte valor vel alicujus anguli, vel alicujus lateris (præterquam radii vectoris). Et quidem ſolæ obſervationum circumſtantiæ in electione attendendæ ſunt, ut id eligatur, quod variationem majorem patiatur; uti ſi exempli cauſa cometa viſus fuiſſet magis in latitudinem, quam in longitudinem moveri, poſitio facienda eſſet in latitudinibus heliocentricis *n* S N, *m* S M; at ſi in longitudinem magis, quam in latitudi-

nem

nem moveri fuiſſet viſus, aſſumendus eſſet primo valor diſtantiarum curtatarum SN, SM, vel angulorum commutationis NSL, MSK, ſive etiam angulorum ad cometam LNS, KMS: eſt id prorſus arbitrarium, neque calculus, quidquid elegeris, redditur difficilior. Id tamen obſervandum, valorem diſtantiarum curtatarum aſſumendum non eſſe, quando alteruter angulus ad cometam recto eſt admodum vicinus, cum tunc ex calculo hujus anguli cognoſci nequeat, acutusne, an obtuſus ſit, neque mutationes in diſtantia curtata proportionales ſint mutationibus anguli ad cometam.

Ceterum quæcunque fiant ſuppoſitiones, eo tendant, oportet, ut inveniantur duæ longitudines, & latitudines heliocentricæ cometæ cum duobus radiis vectoribus: nam longitudinum harum differentia dat angulum NSM, qui ope latitudinum ad angulum *n*S*m* in plano orbitæ *m n*P reducitur. Ex inæqualitate porro radiorum vectorum innoteſcunt gradus anomaliæ punctis *n* & *m* orbitæ reſpondentes, & conſequenter ſitus perihelii. Denique ex inæqualitate latitudinum heliocentricarum *n*N, *m*M invenitur inclinatio orbitæ.

In exemplo propoſito, cum motus cometæ in longitudinem major viſus ſit, quam in latitudinem, poſitiones *falſi* fieri ſupponemus in diſtantiis curtatis SN, & SM, & ſeu ex conjectura, ſeu ex calculo prævio & rudiore, facta diſtantia ſolis a terra = 1, aſſumi SN = 0, 879, & SM = 0, 957. En autem calculi ordinem!

I. SUPPOSITIO SN = 0, 879, SM = 0, 957.

In triangulo NSL eſt: *ut aſſumpta diſtantia curtata* SN *ad diſtantiam ſolis a terra* SL, *ita eſt ſinus anguli elongationis* NLS *ad ſinum anguli ad cometam* LNS. Reperitur hic 105° 42′ 48″, & hinc habetur angulus ad ſolem NSL 15° 50′ 8″, qui additus ad longitudinem terræ L 5^{s} 14° 27′ 44″ dat longitudinem cometæ heliocentricam 6^{s} 0° 17′ 52″.

OBSERVA I. Utrum angulus ad ſolem addi, vel ſubtrahi debeat a longitudine terræ, pendet a poſitione rectæ SN comparate ad ſigna Zodiaci.

OBSERVA II. Summa ex logarithmo diſtantiæ Solis a terra, & logarithmo ſinus anguli elongationis, præbet logarithmum conſtantem, cujus uſus eſt in omnibus ſuppoſitionibus deinceps faciendis in valore rectæ SN.

Quæratur latitudo heliocentrica cometæ ex hac analogia: *ut ſinus anguli ad terram* NLS, *ad ſinum anguli ad ſolem* NSL, *ita tangens latitudinis obſervatæ n* LN *ad tangentem latitudinis heliocentricæ* NS*n* (479). Invenitur 12° 31′ 42″ borealis.

OBSERVA III. Subtracto logarithmo anguli ad terram ex logarithmo tangentis latitudinis obſervatæ, habetur logarithmus conſtans, cujus in omnibus ſuppoſitionibus reliquis uſus eſt.

Inve-

Inveniatur radius vector S*n* ex analogia : *ut cosinus latitudinis heliocentricæ n* SN *est ad radium, ita distantia curtata* SN *ad radium vectorem* S*n*; cujus logarithmus erit 9,954455.

In triangulis SMK, *m*KM ex iisdem operationibus, inveniantur similiter logarithmi constantes, longitudo heliocentrica cometæ 5^{s} 2° 36′ 33″, ejusdem latitudo heliocentrica 52° 3′ 38″, & logarithmus radii vectoris S *m* 0,192159.

Construatur novum schema (Fig. 80), in quo ENC exhibeat dimidium eclipticæ, cujus polus in P : in N & M sint binæ longitudines heliocentricæ; ductis duobus circulis latitudinis PN, PM, notentur in *n* & *m* loca heliocentrica cometæ ad superficiem sphæræ cœlestis relata, ita, ut arcus N*n*, M*m* designent latitudines heliocentricas. Concipiatur per *n* & *m* semicirculus maximus ODB in plano orbitæ cometæ, ad quem nempe orbita e sole visa in superficie sphæræ refertur. Ex differentia longitudinum heliocentricarum habetur arcus MN, sive angulus *m*P*n*; & in triangulo sphærico *m*P*n* sciuntur latera *n*P 77° 28′ 18″, *m*P 37° 56′ 22″, cum angulo comprehenso *m*P*n* 27° 41′ 19″. Invenitur itaque *n m*, mensura anguli ad solem comprehensi a duobus radiis vectoribus cometæ, scilicet 45° 22′ 8″.

Quando circumstantiæ suadent, quod cometa tempore inter duas observationes (quæ in præsente calculo adhibentur) interjecto transierit per perihelium, arcus *m n* est summa duarum anomaliarum verarum cometæ in sua orbita parabolica utrinque a linea apsidum positarum; at si videatur vel jam ante observationem primam per perihelium transivisse, vel transiturus post alteram, idem arcus est differentia duarum anomaliarum verarum cometæ. Est autem anomalia minor semper ex eadem parte, ex qua est radius vector minor.

Utraque autem hæc anomalia semper reperitur hac methodo generali : *Logarithmus minoris radii vectoris subtrahatur ex logarithmo majoris; harum semidifferentiæ characteristica augeatur* 10, *quæratur, cujus arcus tangens huic logarithmo conveniat. Ab arcu invento subtrahantur* 45°, *logarithmo tangentis residui, addatur logarithmus cotangentis quartæ partis arcus* mn, *erit summa logarithmus tangentis alicujus anguli, cujus summa cum una quarta parte arcus* mn *est anomalia dimidia vera major, & differentia ab eadem quarta parte arcus* mn *anomalia dimidia minor quæsita.*

Itaque subtracto 9,954455 ex 0,192159 habetur 0,237704; & hujus dimidium additis 10 ad characteristicam 10, 118852 est logarithmus tangentis 52° 44′ 38″ : ablatis 45°, logarithmo tangentis residui 7° 44′ 38″ addatur logarithmus cotangentis 11° 20′ 32″, quartæ nempe partis de 45° 22′ 8″, & habebitur logarithmus tangentis 34° 8′ 5″½; e quo habentur dimidiæ anomaliæ, altera 22° 47′ 33″½, alte-

altera 45° 28′ 27″½, consequenter ipsa anomalia pro puncto *n* 45° 35′ 7″, & pro *m* 90° 57′ 15″.

Calculetur distantia perihelia hujus orbitæ ex hac proportione (209): *quadratum radii est ad quadratum cosinus unius ex his anomaliis dimidiis veris, ita radius vector eidem adjacens ad distantiam perihelii.* In nostro exemplo invenitur logarithmus distantiæ periheliæ 9, 883835.

E tabula generali N. 214 accipiantur dies, & partes millesimæ, respondentes in parabola (cujus distantia perihelia = 1) anomaliis veris inventis: invenientur 36, 579 d. pro 45° 35′ 7″, & 112, 4 d. pro 90° 57′ 15″. Differentia horum dierum est 75, 821, quæ reducatur ad eam, quæ convenit parabolæ nostri cometæ (aut si quidem transitus per perihelium accidisset tempore inter observationes intermedio, reducenda fuisset summa dierum).

Fit autem hæc reductio (212) addito logarithmo differentiæ dierum (aut summæ) repertæ ad dimidium tripli logarithmi distantiæ periheliæ. Sic logarithmo 1, 879789 de 75, 821 d. addito ad 9, 883835, hujusque medietatem 9, 941917, summa 1, 705541 est logarithmus de 50, 762 d.

Observa. Quando anomaliæ veræ majores sunt 90°, partes decimales diei non sat exacte acquiruntur e partibus proportionalibus tabulæ generalis. Ut itaque major sit accuratio, hanc regulam generalem sequi oportet: *logarithmo constanti* 1, 9149328 *addatur logarithmus tangentis dimidiæ anomaliæ veræ.* Item *triplo ejusdem tangentis logarithmi addatur logarithmus constans* 1, 4378116. *Numeri utrique logarithmorum summæ respondentes addantur inter se, erit summa numerus dierum accuratus, qui conveniunt anomaliæ veræ.*

Itaque ad 1, 914933 addendus est logarithmus 0, 007233 tangentis 45° 28′ 37″½; & triplo logarithmo ejusdem tangentis 0, 021699 logarithmus constans 1, 437812: reperiuntur 83, 592, & 28, 808, qui competunt summis logarithmicis 1, 922166, & 1, 459512. Unde 112, 400 d. accurate respondent anomaliæ veræ 90° 57′ 15″ in parabola, cujus distantia perihelia = 1. Per partes proportionales tabulæ obveniissent 112, 4018 d. In calculis sequentibus regula exposita usi sumus, quæ nihil aliud est, quam æquatio $\frac{3}{4}at + \frac{1}{4}at^3 = b$, in qua a = 109, 6154 d. tempori nempe digressionis a perihelio usque ad 90° in parabola, cujus distantia perihelia = 1; b tempus quæsitum, & t tangens dimidiæ anomaliæ veræ datæ.

Collatis jam illis, quæ præcedentibus calculis reperta sunt, intelligitur, parabolam inventam duabus tantummodo primis conditionibus facere satis, cum tempus inventum 50, 762 d. majus sit 0, 033½ d. intervallo inter observationes adhibitas, nempe 50, 728½ d.

Videndum igitur, quid mutationis in alterutrius distantiæ curtatæ valore assumpto faciendum sit, ut obtineatur parabola, quæ etiam tertiam conditionem expleat. Unde distantiam SM quantitate 0, 001 minuamus, ut appareat, quæ inde mutationes in novæ parabolæ elementis oriantur, ac utrum ad vera propius accessura sint, an potius longius aberratura.

II SUPPOSITIO. SN = 0,879, SM = 0,956. Resumpto eodem, quo prius, ordine universo calculo reperiuntur longitudines heliocentricæ 6^s 0° 17′ 52″, & 5^s 3° 43′ 11″; latitudines heliocentricæ 12° 31′ 42″, & 52° 1′ 54″½; logarithmi radiorum vectorum 9, 954455, & 0,191424; arcus NM (Fig. 80) 27° 34′ 41″; arcus *n m* 45° 18′ 13″; anomaliæ veræ 45° 32′ 3″, & 90° 50′ 16″; dies correspondentes 36, 529 & 112, 056; logarithmus distantiæ perihelię 9,883997; denique tempus reductum, quo describi potuit arcus *n m*, 50, 594 d. Hinc intelligitur, imminutione 0,001 rectæ SM imminui tempus 0, 168 d. Fiat igitur 0, 168 : 0, 001 = 0,033½ : 0,0002; nempe distantiam SM tantummodo 0, 0002 imminui oportuit, ut obtineretur parabola tertiæ conditioni satis faciens. Quare iteretur calculus, & fiat

III SUPPOSITIO. SN = 0, 879, SM = 0, 9568. Invenientur hic longitudines heliocentricæ 6^s 0° 17′ 52″, & 5^s 2° 37′ 53″; latitudines 12° 31′ 42″ & 52° 3′ 16″½. Logarithmi radiorum vectorum 9,954455, & 0,192009; arcus NM 27° 39′ 59″; *nm* 45° 21′ 22″; anomaliæ veræ 45° 34′ 28″, & 90° 55′ 50″; tempora iis respondentia 36,568½ d. & 112, 330 d. Logarithmus distantiæ perihelię 9,883870; tempus reductum 50,728½ d; idem accurate cum intervallo observationum.

Superest, ut videatur, num inventa parabola uti tres priores, ita & quartam habeat conditionem. Quem in finem determinentur reliqua omnia elementa theoriæ cometæ in hac parabola moti. Et imprimis in triangulo *mn*P (Fig. 80) quæratur angulus *mn*P e tribus lateribus *m*P 77° 28′ 18″, *n*P 37° 56′ 43″½, & *mn* 45° 21′ 22″, qui invenietur 23° 39′ 33″. Tum in triangulo *n*ND ad N rectangulo investigetur ND 5° 23′ 45″, *n*D 13° 38′ 14″, & angulus N*n*D 66° 56′ 14″, qui est inclinatio orbitæ cometæ ad planum eclipticæ; D est locus nodi ascendentis, ad quem cometa aliquantum ante 4 Martii pervenire debuit.

Quoniam itaque motus cometæ heliocentricus est retrogradus, ND 5° 25′ 45″ addatur longitudini heliocentricæ cometæ die 4 Martii, quæ est 6^s 0° 17′ 52″, habebitur locus ☊ 6^s 5° 43′ 17″. Ex hoc loco ☊ subtrahatur D*n* 13° 38′ 14″, relinquetur 5^s 22° 5′ 23″ pro loco cometæ *n* in sua orbita: & quia illic habuit anomaliam ve-

ram

ram 45′ 34′ 28″, hæc loco ejus in orbita addita dabit perihelium in 7^s 7° 39′ 51″. Denique ex ſumma $\frac{3}{2}$ logarithmi diſtantiæ periheliæ, & logarithmi de 36,568½ d. quibus ea anomalia confici potuit, habetur 24,486 d intervallum reductum inter obſervationem die 4 Martii, & tempus tranſitus per perihelium, quod ſubtractum a 4 Martii 16 h. 9′ 50″, ſive 0,673½ d. indicat momentum tranſitus per perihelium die 8, 188 Februarii.

Ope horum elementorum methodo jam tradita calculetur longitudo Geocentrica cometæ pro die 28,569 Martii invenietur ea 2^s 18° 51′ 17, quæ quamvis tantummodo 1′ 28″ minor ſit, quam obſervata 5^s 18° 52′ 45″, non tamen ita accurata eſt, ut inventa parabola quartæ conditioni ſatisfacere cenſeri poſſit.

Ut igitur propius ad veram orbitam accedatur, retineatur SM, ut primo aſſumpta fuit, S N vero minuatur 0,001, ut quemadmodum ſuperius perſpiciatur, quæ nam inde mutationes in parabolam primo loco inventam inducantur.

IV Suppositio. SN = 0,878, SM = 0,957. In hac hypotheſi erunt longitudines heliocentricæ 6^s 0° 31′ 54″ & 5^s 2° 36′ 33″; latitudines 12° 42′ 11″ & 52° 3′ 38″; logarithmi radiorum vectorum 9,954257 & 0,192159; NM = 27° 55′ 21″; *nm* = 45° 17′ 56″; anomaliæ veræ 45° 44′ 56″ & 91° 2′ 52″; tempora correſpondentia 36,743 d. & 112,680 d. Logarithmus diſtantiæ periheliæ 9,883115; tempus reductum 50,714 d. quod a tempore obſervato differt 0,014½. Quare apparet, imminuta SN 0,001, minui tempus 0,048 d. Unde fiat 0,048 : 0,001 = 0, 014½ : 0,0007 debebat igitur SN aſſumi = 0, 8783.

V Suppositio. SN = 0,8783, SM = 0,957. Longitudines heliocentricæ ſunt 6^s 0° 27′ 40″ & 5^s 2° 36′ 33″, latitudines 12° 39′ 2″ & 52° 3′ 38″: logarithmi radiorum vectorum 9,954316 & 0, 192159; arcus NM 27° 51′ 7″; *nm* 45° 19′ 20″; anomaliæ veræ 45° 41′ 45″ & 91° 1′ 5″; tempora correſpondentia 36,689 d. & 112,590 d. logarithmus diſtantiæ periheliæ 9, 883344: tempus reductum 50,729 d. ut adeo primæ tres conditiones impleantur.

Inveniantur jam elementa theoriæ in hac parabola: erit ☊ in 6^s 5° 59′ 6″; perihelium in 7^s 7° 53′ 42″; inclinatio orbitæ 66° 47′ 14″; tempus tranſitus per perihelium 8,151½ d. Febr. Ex his longitudo geocentrica cometæ pro die 28 Martii obtinetur 2^s 18° 45′ 14″, quæ ab obſervata deficit 7′ 31″, ideoque inventa orbita a vera trajectoria diſſidet.

Sed quoniam mutationes, quæ inducuntur in orbitas, ad ſenſum proportionales ſunt mutationibus, quæ fiunt in diſtantiis curtatis, ut obtineantur binæ diſtantiæ curtatæ parabolæ quæſitæ fiant hæ duæ

analogiæ : *ut* 6′ 3″, *differentia utriusque erroris* — 1′ 28″, & — 7′ 31″, *est ad errorem minorem* 1′ 28″; *ita est* 0,0007, & 0,0002, *seu utravis corrrectio in distantiis curtatis* SN, SM *facta, ut obtinerentur duæ parabolæ primis tribus conditionibus satisfaciendas, ad* 0,000235, & 0,000065; *id est, ad correctiones in iisdem distantiis facientes, ut reperiatur parabola, quæ quartam etiam conditionem impleat.*

OBSERVA. Si errores e calculis prodeuntes alter fuisset in excessu, alter in defectu, primus analogiæ terminus esse debuisset *summa errorum.*

Porro ut correctiones hæ repertæ debite applicentur, conferenda est longitudo in utravis orbita calculata cum longitudine cometæ observata. Enimvero cum SN posita = 0,879 error emerserit — 1′ 28″; ea vero sumpta = 0,8787, error evaserit — 7′ 31″; evidens est, quod quo magis SN minuitur, eo magis crescat error : unde SN (ut verus valor habeatur) nempe 0,879, augenda est quantitate 0,000235, ut proinde sumi debeat = 0,879235. Consimili modo patebit, SM ponendam esse = 0,956735; ideoque fiat jam postremo

VI SUPPOSITIO. SN = 0,879235, SM = 0,956735. Inveniuntur longitudines heliocentricæ 6^s 0° 14′ 37″ & 5^s 2° 38′ 19″; latitudines 12° 29′ 17″½, & 52° 3′ 10″½; logarithmi radiorum vectorum 9,95404, & 0,191963; anomaliæ veræ 45° 32′ 0″ & 90° 54′ 4″; tempora, quibus conficiuntur, 36,528 & 112,243 dies; logarithmus distantiæ periheliæ 9,884049; intervallum temporis reductum 50,729 d.

Ex his reperiuntur vera elementa theoriæ, nempe nodus in 6^s 5° 38′ 29″; perihelium in 7^s 7° 35′ 13″; inclinatio orbitæ 66° 59′ 14″; tempus transitus per perihelium d. 8 Febr. 4 h. 48′ temp. med. ad Meridianum Parisinum : denique ex his elementis si calculetur longitudo & latitudo geocentrica pro 28 Martii 13 h. 39′, illa obtinetur 2^s 18° 53′ 18″, hæc 63° 3′ 57″ borealis, discrimine paucorum secundorum ab observatis. Itaque problema resolutum censeri debet.

Quidquid adhuc diximus, satis clarum e prioribus videtur; solam regulam pro inveniendis anomaliis demonstrare juverit. Itaque sit quarta pars summæ utriusque anomaliæ = a; quarta pars earundem differentiæ = x; radius vector major = b, minor = c, distantia perihelia = 1. His positis, erit anomalia vera major adjacens radio vectori b æqualis $2a + 2x$, minor = $2a - 2x$ adjacens radio vectori minori. Ex formula *radii vectoris* = $\frac{\textit{dist. perihel.}}{\cos^2 \frac{1}{2}\ \textit{anom. ver.}}$ evidens

est,

est, radios vectores in eadem parabola esse in ratione inversa quadratorum cosinus dimidiarum anomaliarum verarum, sive esse $\sqrt{b} : \sqrt{c} = cos(a-x) : cos(a+x) = cos\,a \times cos\,x + \int a \times \int x : cos\,a \times cos\,x - \int a \times \int x$ (Trig. 46). Igitur $\sqrt{b} \times cos\,a \times cos\,x - \sqrt{b} \times \int a \times \int x = \sqrt{c} \times cos\,a \times cos\,x + \sqrt{c} \times \int a \times \int x$; & $\sqrt{b} \times cos\,a \times cos\,x - \sqrt{c} \times cos\,a \times cos\,x = \sqrt{b} \times \int a \times \int x + \sqrt{c} \times \int a \times \int x$. Quare est $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c} = cos\,a \times cos\,x : \int a \times \int x = \frac{cos\,a}{\int a} : \frac{\int x}{cos\,x} = cot\,a : tang\,x$.

Jam vero (Elem. 752) summa duarum quantitatum est ad eorum differentiam, ut radius ad tangentem arcus mulctati 45°; & tangens hujus arcus invenitur divisa majore quantitate per minorem.

ARTICULUS IV

Variæ animadversiones in calculum cometarum tum in parabola, cum in ellipsi.

I. Si loco distantiarum curtatarum assumantur anguli ad Cometam, vel anguli commutationis, calculus nec longior evadet, nec diversus a priore, nisi quod ordo primarum analogiarum in quavis suppositione mutetur.

II. Postquam inventa est parabola, quæ fere congruat cum tribus observationibus selectis, inutile foret aliam quærere, quæ exacte iis responderet. Enimvero tria illa loca aut omnino accuratissime observata sunt, aut ad vera proxime accedunt; si primum, fieri nequit, ut exacte conveniant in parabolam, cum reipsa sint in ellipsi. Si observationum accuratio summa non sit, non nisi casui tribuendum est, si incidant omnino in aliquam parabolam, quæ etiam tum ceteris observationibus perfecte satisfacere nequit.

III. Utile fuerit calculum rudiorem priorum quinque suppositionum præmittere, neglectis secundis, & angulis assumptis etiam pluribus gradibus, vel distantiis curtatis $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ aut $\frac{1}{2}$; imo & duplo, vel triplo &c mutatis. Quod si conferantur debite inter se, quæ ejusmodi calculus offert, facile propius ad veram orbitam accedetur; & tum instituetur calculus accuratus, quantitatibus assumptis non nisi parum admodum mutatis.

IV. Quod si observationes, e quibus elementa theoriæ deducenda sunt, sint admodum accuratæ, ante supremum, & exactiorem calculum corrigendæ sunt a parallaxi, & aberratione luminis. Adhibenturautem in hunc finem dimensiones orbitæ veræ propinquæ, in qua invenienda est pro singulis temporibus observationum distantia cometæ a terra:

& habebitur parallaxis horizontalis ex hac analogia : ut distantia cometæ a terra est ad 1, sive distantiam mediam solis a terra ; ita est parallaxis horizontalis solis 10″, 2 ad parallaxin horizontalem cometæ. Si parallaxis horizontalis inventa major sit 20″, quæratur etiam parallaxis in longitudinem, & latitudinem juxta formulas alias præscriptas. Ad inveniendam vero aberrationem luministumin longitudinem, tum in latitudinem, usui erit regula a D. Clairaut tradita (788).

V. Si duæ latitudines geocentricæ in calculo adhibitæ sint altera borealis, altera australis, etiam correspondentes latitudines heliocentricæ diversi erunt nominis : & tum in fig. 79 puncta *n* & *m* ita collocanda sunt, ut alterum sit supra planum eclipticæ, alterum infra illud. Ceterum calculi ratio eadem est, ac fig. 80.

VI. Quod si reperta elementa theoriæ cometæ in parabolica orbita eadem fere sint cum elementis alterius cometæ pluribus annis antea observati, ut prudenter existimari possit, eum nunc rediisse, accipiatur intervallum temporis inter transitus per perihelium, ut habeatur tempus periodicum (modo ne probabiliter credi possit, eum interea jam semel rediisse). Hinc (170) calculetur axis major orbitæ ellipticæ, & subtracta distantia perihelia reperietur distantia aphelia, atque eccentricitas. Ut autem reliqua elementa in ellipsi obtineantur, sequente methodo uti licebit.

Cometa An. 1531, 1607, 1682, ac tandem 1759 apparuit denuo. Ex computo Halley per perihelium transivit A. 1682 d. 14 Sept. 21 h. 33′ temp. med. ad meridianum Parisinum. Jam ex tribus accuratis observationibus 1759 diebus 13 Aprilis, 1 & 21 Maii habitis ejus elementa in parabola reperiuntur ; & quidem distantia perihelii = 0, 5835, posita distantia media solis a terra = 1 ; tempus transitus per perihelium d. 12 Martii media nocte ; hinc ejus tempus periodicum 27937½ d. axis major ellipseos 36, 0377 ; distantia aphelii = 35, 4542 ; eccentricitas 17, 43535. Suppositis hisce elementis quærantur tam in parabola, quam in hac ellipsi osculatrice in eodem plano circa communem focum sita tres longitudines & latitudines Geocentricæ cometæ pro trium observationum tempore. Invenietur pro 13 Aprilis longitudo in parabola 1° 7′ minor quam in ellipsi, & latitudo 3′ 46″ major in illa, quam in hac. At pro 1 Maii longitudo in parabola excedet longitudinem in ellipsi 3° 26′ 26″, latitudo vero in parabola deficiet a latitudine in ellipsi 1° 1′ 7″. Pro 21 Maii longitudo in parabola rursus reperietur major 1° 30′ 50″, & latitudo minor 5′ 27″, quam in ellipsi. Si jam perpendatur, motum observatum reapse factum fuisse in ellipsi illi non multum dissimili, cujus dimensiones jam repertæ sunt, clarum est, motum verum posse reduci ad motum, quem cometa habuisset in parabola osculatrice circa

ca eundem focum descripta, & eodem vertice, differentiis hinc emergentibus collatis cum observationibus factis. Unde sequitur, problema de inveniendis elementis theoriæ cometæ in ellipsi, reduci ad hoc, ut inveniantur elementa eadem in parabola osculatrice; eo tamen servato, ut postea iteretur calculus, ut differentiæ accutiores reperiantur, adeoque elementa certiora.

Peractis hisce calculis, sequens tabella construitur.

Tempus medium	Longitudo observata	Latitudo observata	Longitudo reducta ad parabolam	Latitudo reducta ad parabolam
1759 H ′ ″	S G ′ ″	G ′ ″	S G ′ ″	G ′ ″
13 April. 16 12 0	10 20 51 42	2 8 27 A	10 19 44 42	2 12 13 A
1 Mail 9 23 20	5 22 31 40	31 26 32 A	5 25 58 6	30 25 25 A
21 Maii 9 6 0	5 7 35 22	15 4 0 A	5 9 6 12	14 58 33 A

Restat jam tantummodo, ut calculentur methodo superius exposita elementa parabolæ, quæ præbeat longitudines & latitudines ita reductas, quippe quæ eadem omnino futura sint cum illis, quæ invenientur in ellipsi, adhibitis observationibus factis.

Tempus periodicum hunc in modum repertum haud omni ex parte certum est, cum facile actione Planetarum viciniorum cometæ in ejus apparitione mutari possit. Interea tamen, etsi error plurium mensium sit, non tamen sensibiliter influit in calculum elementorum orbitæ ellipticæ, cum aberrationes ab ellipsi respectu parabolæ osculatricis, quæ mutatione temporis periodici inducuntur, sensibiles esse nequeant, nisi in distantiis admodum magnis a perihelio.

Tabu-

TABULA I Theoriæ cometarum, de quibus sufficientes obſervationes colligi potuerunt ad invenienda elementa in orbitis parabolicis.

Annus apparitionis	Locus ☊	Inclinatio orbitæ	Locus perihelii	Logarithmus diſtant. Perihelii	Tranſitus per perih. temp. med. ad Merid. Pariſinum	Directio motus	Nomen calculatoris orbitæ	Orbitæ minus certæ
	S G M S	G M S	S G M S		D H. M			
1264	7 28 45 0	30 25 0	9 5 45 0	9. 613640	Jul. 17 6 10	Direct.	Pingré	prope
1337	2 24 21 0	32 11 0	1 7 59 0	9. 609236	Jun. 2 6 34	Retrog.	Halley	prope
1472	9 11 46 20	5 20 0	1 15 33 30	9. 734584	Febr. 28 22 33	Retrog.	Halley	prope
1532	2 20 27 0	32 36 0	3 21 7 0	9. 706803	Octo. 19 22 21	Direct.	Halley	prope
1533	4 5 44 0	35 49 0	4 27 16 0	9. 307068	Jun. 16 19 39	Retrog.	Douwes	prope
1556	5 25 42 0	32 6 30	9 8 50 0	9. 666424	April. 21 20 11	Direct.	Halley	prope
1577	0 25 52 0	74 32 45	4 9 22 0	9. 263447	Octob 26 18 54	Retrog.	Halley	
1580	0 18 57 20	64 40 0	3 19 5 50	9. 775450	Nov. 28 15 9	Direct.	Halley	
1585	1 7 42 30	6 4 0	0 8 51 0	10. 033850	Octob 7 19 29	Direct.	Halley	
1590	5 15 30 40	29 40 40	7 6 54 30	9. 760882	Febr. 8 3 54	Retrog.	Halley	
1593	5 14 15 0	87 58 0	4 26 19 0	9. 949926	Jul. 18 13 47	Direct.	La Caille	
1596	10 12 12 30	55 12 0	7 18 16 0	9. 710058	Aug. 10 20 4	Retrog.	Halley	
1618	9 23 25 0	21 28 0	10 18 20 0	9. 710100	Aug. 17 5 12	Direct	Pingré	
1618	2 16 1 0	37 34 0	0 2 14 0	9. 579498	Nov. 8 12 32	Direct.	Halley	
1652	2 28 10 0	79 28 0	0 28 18 40	9. 928140	Nov. 12 15 49	Direct.	Halley	
1661	2 22 30 30	32 35 50	3 25 58 40	9. 651772	Jan. 26 23 50	Direct.	Halley	
1664	2 21 14 0	21 18 30	4 10 41 25	10. 011044	Dec. 4 12 3	Retrog.	Halley	
1665	7 18 2 0	76 5 0	2 11 54 30	9. 027309	April. 24 5 24	Retrog.	Halley	
1672	9 27 30 30	83 22 10	1 16 59 30	9. 843476	Mart. 1 8 46	Direct.	Halley	
1677	7 26 49 10	79 3 15	4 17 37 5	9. 448072	Maii. 6 0 46	Retrog.	Halley	
1678	5 11 40 0	3 4 20	10 27 46 0	10. 092724	Aug. 26 14 12	Direct.	Struyck	prope
1680	9 2 2 0	60 56 0	8 22 39 30	7. 787106	Dec. 18 0 15	Direct.	Halley	
1683	5 23 23 0	83 11 0	2 25 29 30	9. 748343	Jul. 13 2 59	Retrog.	Halley	
1684	8 28 15 0	65 48 40	7 28 52 0	9. 982339	Jun. 8 10 25	Direct.	Halley	

Con-

Contin. TAB. I Theoriæ Cometarum.

Annus apparitionis	Locus ☊	Inclinatio orbitæ	Locus Perihelii	Logarithmus Diſtantiæ Perihelii	Tranſitus per Perihel. temp. med. ad merid. Pariſinum	Directio motus	Nomen calculatoris Orbitæ	Orbitæ minus certa
	S G M S	G M S	S G M S		D H. M			
1686	11 20 34 40	31 21 40	2 17 0 30	9. 511883	Sept. 16 14 42	Direct.	Halley	
1689	10 23 45 20	69 17 0	8 23 44 45	8. 227612	Dec. 1 15 5	Retrog.	Pingré	prope
1698	8 27 44 15	11 46 0	9 0 51 15	9. 839660	Oct. 18 17 6	Retrog.	Halley	
1699	10 21 45 35	69 20 0	7 2 31 6	9. 871570	Jan. 13 8 32	Retrog.	La Caille	prope
1702	6 9 25 15	4 30 0	4 18 41 3	9. 819165	Mart. 13 14 22	Direct.	La Caille	prope
1706	0 13 11 40	55 14 10	2 12 29 10	9. 629218	Jan. 30 4 32	Direct.	La Caille	
1707	1 22 46 35	88 36 0	2 19 54 56	9. 934 68	Dec. 11 23 39	Direct.	La Caille	
1718	4 8 43 0	30 20 0	4 1 30 0	10. 011380	Jan. 14 23 48	Retrog.	La Caille	
1723	0 14 16 0	49 59 0	1 12 52 20	9. 999414	Sept. 27 16 20	Retrog.	Bradley	
1729	10 10 32 37	76 58 4	10 22 40 0	10. 629552	Jun. 25 11 6	Direct.	La Caille	
1737	7 16 22 0	18 20 45	10 25 55 0	9. 347960	Jan. 30 8 30	Direct.	Bradley	
1739	6 27 25 14	55 42 44	3 12 38 40	9. 828388	Jun. 17 10 9	Retrog.	La Caille	
1742	6 5 38 29	66 59 14	7 7 35 13	9. 884049	Febr. 8 4 48	Retrog.	La Caille	
1743	2 18 21 15	2 19 33	3 2 41 45	9. 921690	Jan. 10 20 35	Direct.	La Caille	prope
1743	0 5 16 25	45 48 20	8 6 33 52	9. 716480	Sept. 20 21 26	Retrog.	Klinkenberg	prope
1744	1 15 46 11	47 5 18	6 17 10 0	9. 347325	Mart. 1 8 13	Direct.	La Caille	
1747	4 27 18 50	79 6 20	9 7 2 0	10. 342128	Mart. 3 7 20	Retrog.	La Caille	
1748	7 22 52 16	85 26 57	7 5 0 50	9. 924620	April. 28 19 34	Retrog.	Maraldi	
1748	1 4 39 43	56 59 3	9 6 9 24	9. 816410	Jun. 18 1 33	Direct.	Struyck	prope
1757	7 4 5 50	12 39 6	4 2 39 0	9. 530288	Oct. 21 9 42	Direct.	La Caille	
1758	7 20 50 9	68 19 0	8 27 37 45	9. 333148	Jun. 11 3 27	Direct.	Pingré	
1759	4 19 39 24	78 59 22	1 23 24 20	9. 902280	Nov. 27 2 28	Direct.	La Caille	
1759	2 19 50 45	4 51 32	4 18 24 35	9. 984972	Dec. 16 21 13	Retrog.	La Caille	
Elementa Cometæ Halleyani pro ſingulis revolutionibus								
1456	1 18 30 0	17 56 0	10 1 0 0	9. 767540	Jun. 8 22 10	Retrog.	Pingré	prope
1531	1 19 25 0	17 56 0	10 1 39 0	9. 753583	Aug. 24 21 27	Retrog.	Halley	prope
1607	1 20 21 0	17 2 0	10 2 16 0	9. 768490	Oct. 26 3 59	Retrog.	Halley	prope
1682	1 20 48 0	17 42 0	10 1 36 0	9. 765295	Sept. 14 21 31	Retrog.	Halley	
1759	1 23 49 0	17 39 0	10 3 16 0	9. 766039	Mart. 12 13 41	Retrog.	La Caille	

TABULA II Exhibens correctiones Anomaliæ veræ & radii vectoris in Parabola, ut reducantur ad ellipsin ejusdem foci, & verticis.

An. Ver.	Correct. Anomal.	Correct. Rad Vect.
G	Addit.	Subtract.
1	3. 2551	5. 8203
2	3. 5551	6. 4220
3	3. 7314	6. 7735
4	3. 8559	7. 0242
5	3. 9521	7. 2178
6	4. 0302	7. 2759
7	4. 0959	7. 5095
8	4. 1526	7. 6250
9	4. 2023	7. 7269
10	4. 2464	7. 8178
11	4. 2855	7. 8998
12	4. 3212	7. 9747
13	4. 3541	8. 0437
14	4. 3839	8. 1074
15	4. 4112	8. 1666
16	4. 4364	8. 2217
17	4. 4597	8. 2735
18	4. 4813	8. 3222
19	4. 5014	8. 3682
20	4. 5201	8. 4116
21	4. 5375	8. 4528
22	4. 5536	8. 4921
23	4. 5687	8. 5295
24	4. 5827	8. 5652
25	4. 5957	8. 5994
26	4. 6078	8. 6320
27	4. 6191	8. 6634
28	4. 6295	8. 6934
29	4. 6391	8. 7224
30	4. 6479	8. 7502
31	4. 6560	8. 7770
32	4. 6634	8. 8030
33	4. 6701	8. 8280
34	4. 6761	8. 8521
35	4. 6815	8. 8755
36	4. 6862	8. 8980
37	4. 6903	8. 9198
38	4. 6937	8. 9409
39	4. 6965	8. 9614
40	4. 6986	8. 9813

An. Ver.	Correct. Anomal.	Correct. Rad. Vect.
G	Addit.	Subtract.
41	4. 7001	9. 0006
42	4. 7010	9. 0195
43	4. 7013	9. 0378
44	4. 7009	9. 0555
45	4. 6998	9. 0727
46	4. 6981	9. 0894
47	4. 6957	9. 1056
48	4. 6926	9. 1215
49	4. 6888	9. 1369
50	4. 6842	9. 1520
51	4. 6788	9. 1666
52	4. 6726	9. 1808
53	4. 6655	9. 1947
54	4. 6576	9. 2083
55	4. 6489	9. 2215
56	4. 6391	9. 2344
57	4. 6281	9. 2469
58	4. 6159	9. 2592
59	4. 6024	9. 2712
60	4. 5876	9. 2829
61	4. 5713	9. 2943
62	4. 5535	9. 3055
63	4. 5338	9. 3163
64	4. 5119	9. 3270
65	4. 4876	9. 3374
66	4. 4608	9. 3477
67	4. 4308	9. 3576
68	4. 3968	9. 3674
69	4. 3586	9. 3769
70	4. 3144	9. 3861
71	4. 2638	9. 3954
72	4. 2029	9. 4044
73	4. 1318	9. 4132
74	4. 0420	9. 4218
75	3. 9239	9. 4303
76	3. 7548	9. 4386
77	3. 4621	9. 4468
78	Subtract.	9. 4546
79	3. 4691	9. 4624
80	3. 7787	9. 4701

An. Ver.	Correct. Anom.	Correct. Rad. Vect
G	Subtract.	Subtract.
81	3. 9608	9. 4777
82	4. 0920	9. 4851
83	4. 1951	9. 4924
84	4. 2802	9. 4996
85	4. 3531	9. 5067
86	4. 4167	9. 5138
87	4. 4732	9. 5207
88	4. 5251	9. 5275
89	4. 5717	9. 5342
90	4. 6154	9. 5409
91	4. 6557	9. 5475
92	4. 6933	9. 5540
93	4. 7287	9. 5605
94	4. 7618	9. 5670
95	4. 7935	9. 5734
96	4. 8236	9. 5797
97	4. 8523	9. 5860
98	4. 8797	9. 5923
99	4. 9060	9. 5986
100	4. 9312	9. 6050
101	4. 9555	9. 6113
102	4. 9789	9. 6176
103	5. 0017	9. 6239
104	5. 0237	9. 6302
105	5. 0451	9. 6366
106	5. 0661	9. 6430
107	5. 0863	9. 6495
108	5. 1059	9. 6560
109	5. 1250	9. 6627
110	5. 1437	9. 6694
111	5. 1621	9. 6763
112	5. 1800	9. 6831
113	5. 1976	9. 6901
114	5. 2149	9. 6972
115	5. 2319	9. 7044
116	5. 2485	9. 7119
117	5. 2647	9. 7195
118	5. 2819	9. 7272
119	5. 2969	9. 7352
120	5. 3126	9. 7433

CA-

CAPUT III.

De mutationibus obſervatis in motibus Planetarum, & Cometarum.

Etſi ſuperius (§. 174 Art. XIV Append.) expoſuerimus theoriam, & generales formulas calculandi mutationes motuum Planetarum variatione rationis virium, quibus urgentur ea corpora, inductas; haud tamen hic licet nobis ea in particularibus circumſtantiis applicare, quæ univerſe diximus, ne extra principiorum Aſtronomiæ elementaris limites egrediamur. Quare hujus rei notionem tantummodo generalem adferemus. Obſervationes recentiores tum inter ſe, tum etiam cum antiquioribus collatæ, oſtendunt 1mo, lineam apſidum in orbitis Planetariis reſpectu fixarum habere aliquem motum directum, quamvis admodum lentum; lineam item nodorum habere motum valde exiguum retrogradum. Ex quo conficitur, *debere exiguas quaſdam mutationes, ſed conſtantes, induci in rationem vis tangentialis ad vim centralem, quæ inter has vires intercedere debet, ut corpora Planetaria temporibus periodicis ſemper æqualibus deſcribant ſingula ſuas ellipſes immobiles, & invariatas in plano fixo poſitas, quarum alterum focum ſol conſtanter occupet*, eo ſcilicet modo, quem Sectione I expoſuimus.

2do Animadverſum eſt, Saturnum & Jovem, quorum volumina comparate ad alios Planetas admodum magna ſunt, & in magnis item a Sole diſtantiis revolvuntur, perturbationibus eſſe ſubjectos, quæ quidem ex parte periodicæ ſunt, cum hi planetæ ad conjunctionem inter ſe redeunt; has porro perturbationes in Saturno eſſe multo majores, ita, ut inde in tempora periodorum conſequentium etiam plurium dierum diſcrimen redundet.

Ex his, ſimilibusque animadverſionibus, maxime factis, cum accuratius in motum Lunæ inquireretur, univerſe tandem concluſum eſt, ex maxime accuratis obſervationibus ſequi evidenter, *quodvis corpus cœleſte eſſe reſpectu alterius id, quod eſt ſol reſpectu alicujus Planetæ*, hoc eſt, *quodvis corpus cœleſte eſſe originem alicujus vis centralis reſpectu omnium aliorum*, ita, ut præter primum ſuum impulſum, quodlibet ſidus urgeatur reipſa tot peculiaribus viribus centralibus, quot reliqua ſunt aſtra. Tendunt hæ vires ſingulæ in ſingula corpora cœleſtia, ſed effectus particularis cujusvis ſentiri nequit, niſi pro ratione maſſæ majoris illius ſideris, in quo hæc vis reſidet, comparatæ cum maſſa alterius, in quod agit, & ratione quadrati diſtantiæ utriusque minoris. Itaque ſingulæ hæ vires centrales exprimuntur fractione, in

qua maſſa corporis, e quo oritur vis, per quadratum diſtantiæ alterius, quod ea vi urgetur, eſt diviſa. Sol ipſe huic legi ſubeſt; ſed enim ingens ejus maſſa facit, ut ejus emotio, quamvis reapſe aliqua ſit, vix tamen percipi poſſit, dum interim motus planetarum primariorum, & cometarum circa eum revolutorum peraguntur in trajectoriis tanto magis a veris, & accuratis ellipſibus degenerantibus, quanto ſumma omnium fractionum vires centrales aliorum ſiderum exprimentium majorem rationem habet ad maſſam ſolis per quadratum diſtantiæ cujusvis planetæ ejusmodi trajectoriam deſcribentis, diviſam.

Sed quoniam planetæ orbitas ſuas diverſis in planis, ac diverſimode inter ſe inclinatis deſcribunt, directiones virium centralium, quæ in ſingulis reſident, ſunt itidem ſingulæ in diverſis planis, neque per regulas compoſitionis virium ad pauciores, quam tres, reduci poſſunt. Quare quilibet planeta ita quovis momento conſiderandus eſt, velut qui triplici ſimul vi urgeatur. Harum prima eſt *tangentialis*, natura ſua uniformis tempuſculo minimo, & quæ determinatur ex omnibus motibus, quos planeta tempuſculo præcedente habuit. Altera eſt vis *acceleratrix*, compoſita ex omnibus viribus centralibus omnium planetarum, & ad unicam reductis, cujus directio eſt recta ſita in plano, cujus poſitio determinatur per centrum ſolis, & directionem vis tangentialis. Differentia inter hanc vim ita compoſitam, & vim centralem ſimplicem, quæ in ſole tantum reſidet, quamque Articulo XIII Cap II Sect. I conſideravimus, appellatur *vis perturbatrix*. Vis tertia eſt itidem acceleratrix, quam *deturbatricem* vocabo; componitur vero rurſus ex omnibus viribus centralibus planetarum ad unicam reductis directione ad planum, de quo modo diximus, perpendiculari. Eſt hæc comparate ad priores duas in noſtro ſyſtemate planetario admodum exigua, cum plana orbitarum planetariarum modicam inter ſe inclinationem habeant, neque ſol quidquam (qui in communi horum planorum interſectione poſitus eſt) ad eam vim deturbatricem conferat.

Si planeta primis tantummodo duabus viribus eſſet præditus, iis compoſitis definiri poſſet natura trajectoriæ, quæ in eodem ſemper plano ſita ſpectari poſſet inſtar ellipſis parum admodum variabilis, quod vis centralis in ſolem vim perturbatricem immenſum excederet: atque hinc cognita ratione maſſarum aliorum planetarum, e principiis ſuperius (§. 174 Art. XIV Append.) ſtabilitis ad calculum revocari poſſet tum quantitas, cum directio motus lineæ apſidum, variatio eccentricitatis, & temporis periodici.

At enim vis deturbatrix cum reliquis ſimul in planetam agens, in cauſa eſt, ut planum hujus ellipſeos variabilis conſtans non ſit.

Fin-

Fingamus in ſyſtemate planetario planum quoddam abſolute immotum, poſitione medium inter ea omnia, ad quæ trajectoria Telluris per vim deturbatricem tranſire poteſt, vocemusque illud *planum verum eclipticæ*: Evidens eſt, cum hoc planum ſit parum admodum ad planum alterius cujusvis planetæ inclinatum, poſſe tanquam parallelum cenſeri, ut propterea vis deturbatricis directio ſit ad ſenſum ſemper perpendicularis ad planum verum eclipticæ. Jam vero quisque facile intelligit, effectum hujus vis in eo conſiſtere, ut nitatur ea directione, qua agit, planetam vel a plano vero eccliptice removere, vel ad illud admovere, conſequenter inclinationem arcus exigui, quem tali tempuſculo planeta deſcribit, ad planum verum eclipticæ mutare. Poſitio itaque plani, in quo eſt planetæ trajectoria, variatur e proportione quantitatis vis deturbatricis, & quidem in eam partem, verſus quam vis illa exeritur. Exempli cauſa dum vis deturbatrix planetam admovet plano vero eclipticæ, planeta citius attingit ſuum nodum, quam citra eam vim, ſive, quod eodem redit, nodus verſus planetam promovetur celeritate exigua quidem, ſed quæ creſcit, minuitur, aut penitus evaneſcit, prout actio vis deturbatricis augetur, decreſcit, aut nulla eſt. Atqui hoc ſi fiat, nodus nequit verſus planetam moveri, niſi tendat in plagam oppoſitam illi, quam motus planetæ ſpectat: atque adeo ſi motus heliocentricus planetæ directus ſit, motus nodi ſemper erit aut retrogradus, aut nullus; & ex oppoſito quando motus heliocentricus ſideris eſt retrogradus, qualis in bene multis cometis deprehenditur, motus nodi erit directus. Contrarium eveniret, vi deturbatrice planetam a vero plano eclipticæ dimovente.

Atque ex hac virium compoſitione unice petendæ ſunt cauſæ omnium perturbationum motuum cœleſtium: ſingularum nempe prius efficacitas quærenda, tum omnes ſimul colligendæ ſunt, ſi quis non modo eas aberrationes explicare velit, quæ jamjam obſervatæ ſunt, verum etiam alias prædicere, quæ deinceps ſeſe prodent. At enim quis non vel e paucis hiſce, quæ diximus, videat, quantum laboris, ſagacitatis, & experientiæ verſandi in omnem partem Analyſin maxime ſublimem, id genus diſquiſitiones poſcant? Et nihilominus cum fieri vix poſſit, ut plurium, quam trium, corporum in planis diverſis ſitorum vires centrales accurate ſimul combinentur, inveſtigatio inæqualitatum planetæ, aut cometæ fructu caret, niſi ſingulæ perturbationes, aliæ poſt alias, quæ ab actione ſingulorum aliorum planetarum pendent, ad calculum revocentur, expendaturque, quantum quævis mutationis in vim centralem verſus focum, quem ſol occupat, inducere poſſit.

Illuſtrioribus tantummodo Geometris adhuc licuit id genus problemata, quorum argumentum ejusmodi ſit perveſtigatio, cum ſucceſſu aggredi. Scilicet Eulerus mutuas Jovis, & Saturni perturbationes explicatas dedit; Clairaut oſtendit, cometæ Annis 1531, 1607 & 1682 conſpicui periodos inæquales eſſe debuiſſe, quæque $913\frac{1}{2}$ & $898\frac{1}{2}$ menſium fuerint, poſtremam autem, qua labente Sæculo rurſus redderetur aſpectabilis, 919 menſes requirere; id, quod eventus comprobavit. Alembertus (& poſt hunc Eulerus, & Simpſon) exacte demonſtravit præceſſionem æquinoctiorum, quin ipſas etiam ejus variationes intra 18 annorum periodum motui nodorum Lunæ analogas, quas nempe obſervationibus detexerat Bradleyus. Iidem quatuor primi ſubſelii Geometræ veram omnium anomaliarum lunæ theoriam condiderunt. Eulerus oſtendit, cur obliquitas eclipticæ lentæ cuidam imminutioni ſit obnoxia, evicitque eam in præſens per centum annos ad 47″ pertingere, ſed inæqualem eſſe ſæculis a labente remotioribus. Mac-Laurinus, Eulerus, Bernoullius ex hujus theoriæ principiis phænomena, qualia obſervantur, æſtus maris reciproci deduxerunt. Omnia fere quidem hæc problemata jam antea a Newtono reſoluta ſunt, at methodo quadam vaga, nimisque indirecta. Verum reſolutiones, de quibus modo diximus, legem generalem virium centralium adverſus omnes objectiones, quibus antea vexari ſolebat, in tuto collocarunt.

Pag. 235 §. 698. *Poſthunc* §. *ſequentia adde.* Obſervatur 1mo generatim, lunæ celeritatem augeri aut minui, ut ejus diameter apparens augetur, vel minuitur, conſequenter etiam ut ejus diſtantia a terra decreſcit, vel creſcit. Et quoniam limites maximæ, minimæque celeritatis ſunt in punctis ſuperficiei ſphæræ cœleſtis ad ſenſum oppoſitis, hæc inæqualitas citra dubium oritur ex eccentricitate orbitæ lunaris: exhibetur vero in calculo *per æquationem centri.* 2do Quantitates abſolutæ celeritatum maximæ & minimæ in una revolutione obſervatæ non ſunt eædem in ſequente: & animadverſum eſt, quod quo ſol magis eſt elongatus a linea apſidum lunæ (in cujus nempe lineæ extremis ſunt termini maximæ illius & minimæ celeritatis) eo major ſit inæqualitas inter extremas haſce velocitates. Ex quo ſequitur, primam inæqualitatem lunæ eſſe obnoxiam alteri inæqualitati annuæ, pendenti a poſitione lineæ apſidum lunæ reſpectu ſolis. Appellant hanc ſecundam inæqualitatem *evectionem Lunæ*, quæ nequidem (uti nec prima) antiquos Aſtronomos Græcos latuit: verum ultra has illi progreſſi haud ſunt.

3^tia^. Etſi linea apſidum in elongatione 45° a ſole poſita, ſecundæ inæqualitati locus eſſe non videatur, ac prima deberet eandem æquationem dare, ideoque & eadem celeritas lunæ eſſe in ſyzygia & quadratura; nihilomi-

hilominus tamen notavit Tycho-Brahe, velocitatem in ſyzygia majorem. Quare recipienda fuit tertia inæqualitas in theoria lunæ, quæ ejus *variatio* dicitur. Ejus æquatio in quadraturis, & ſyzygiis nulla eſt; ſed maxima in punctis intermediis, ſive *octantibus* lunæ.

4to Cum Aſtronomi ſub principium ſuperioris ſæculi intervalla temporum inter eclipſes cum cura, & exacte obſervatas contuliſſent, deprehenderunt, revolutiones periodicas lunæ haud eſſe æque longas, niſi quæ iisdem anni tempeſtatibus fiunt. Longiſſimas eas repererunt, quæ fiunt menſibus Decembri & Januario; quæ vero contingunt Junio & Julio, breviſſimas. Cauſam hujus inæqualitatis alii tribuebant revolutionibus diurnis Telluris, quam velocius circa axem converti exiſtimabant in perihelio, quam dum verſatur in aphelio. Verum præterquam quod hæc opinio pugnet cum theoria rotationis planetarum ſuperius expoſita, penitus everſa eſt experimentis horologiorum pendulis inſtructorum. Alii diſcriminis rationem inde petendam putarunt, quod luna facilius, difficiliusve circa terram revolvatur, prout hæc longius, propiusve a ſole abeſt. Sed quidquid de hoc ſit, obſervata inæqualitas tres exiguas æquationes annuas requirit, proportionales æquationi centri ſolis. Una harum pertinet ad motum lunæ in ſua orbita; altera ad motum ejus apogæi; tertia ad motum ejus nodi.

§. 699. V. Planum orbitæ lunæ non ſemper eadem quantitate inclinatur ad planum elipticæ; & primus obſervavit Tycho, latitudines maximas lunæ, quæ in quadraturas incidunt, vix 5° æquare, cum tamen ad 5° 18′ aſcendant, dum in ſyzygias incidunt.

700. VI. Diſtantia lunæ a terra ex ejus parallaxibus obſervatis deducta, mutatur a 55,72 usque ad 64,74 ſemidiametros æquatoris terreſtris. Diſtantia ejus media æquat 60,23 ejusmodi ſemidiametros, quarum ſingulæ 19686078 ped. Reg. Pariſ. fere continent, uti ex menſuris in Peruvio captis deducitur; atque hinc diſtantiæ lunæ a terra media eſt circiter 1185692478 pedum, ſive ſi numero rotundo uti velimus, 1185700000 pedum.

801. VII. Luna eſt fere 340 vicibus propior telluri, quam ſol; quippe cum ſolis diſtantia media a terra ſit plus quam 20000 ſemidiametrorum terreſtrium.

702. VIII. Luna eſt ſaltem &c, *adde in fine*: imo multæ ſuppetunt rationes exiſtimandi, maſſam lunæ eſſe fere $\frac{1}{70}$ maſſæ Telluris.

Pag. 236 §. 705. *de hoc articulo notet Lector, adhibendam eſſe diſtantiam mediam lunæ a terra, ut* §. 700 *eſt definita. Hinc aliquod exiguum diſcrimen in calculo oritur, ſed quod ad ſummam rei nihil facit.*

Pag. 239 *Lin.* 15 & 16 *deleantur* ST, vel DL — ST : ST = 2HL : ST; & hinc DL — ST = 2 HL, *ac horum loco inſerantur ſequentia,*

tia, $ST - 2HL$, & hinc $DL - ST = \frac{ST \times 2HL}{ST - 2HL}$; & peracta divisione, $DL - ST = 2HL + \frac{4HL^2}{ST - 2HL} = 2HL$ tantum, propter terminum $\frac{4HL^2}{ST - 2HL}$ prope nullum.

Pag. 241 §. 728 *Lege*: cum distantia lunæ a sole circiter $\frac{1}{170}$ minor sit &c.

Pag. 243 §. 739 *Adde*: atque hæc est quarta inæqualitas lunæ.

Pag. 245 §. 744 *Adde.* Non licet nobis, omnes hasce variationes minutim expendere, tum quod ultra brevitatis præfixæ limites excurrere necesse foret, tum quod secundum theoriam recentius de luna constitutam haud amplius supponatur orbita lunæ manere elliptica, quemadmodum id sumpserunt Halleyus & Newtonus post Horroxium. Id tantummodo observamus, in hac hypothesi ex principiis alias stabilitis, neglecto effectu vis per LB expressæ, & habita solum ratione vis LE, ad Halley & Newtoni exemplum, *incrementum, & decrementum eccentricitatis orbitæ lunæ respectu primæ ejus conditionis, & magnitudinis reperiri; motum lineæ apsidum tam directum, quam retrogradum, celeritatisque illius augmentum ac decrementum, pendere a prolongatione, aut contractione axis majoris orbitæ respectu primi status, quem haberet secluſa perturbatione.*

Pag. 249 §. 758 *lege*: Interea tamen hæ inæqualitates in motu telluris annuo exiguæ sunt, quippe quæ alias in motu apparente solis perciperentur. Inæqualitates lunæ, quæ ex combinatione gravitatis mutuæ lunæ, solis, & telluris oriuntur (non habita ratione ejus, quæ ab eccentricitate provenit) & quarum summa ad duos & dimidium fere gradum exurgit, non essent nobis sensibiles, nisi tanta esset lunæ ac terræ vicinia; itaque eædem inæqualitates e sole spectatæ 340 vicibus minores videri debent, consequenter 26″ aut 27″ summum, Si igitur luna omnes suas inæqualitates in terram actione sua transferret, motus annuus apparens solis inde non posset plus turbari, quam 27″, quæ quantitas exigua prorsus est. Verum cum luna sit 70^ies minor quam terra, manifestum est, actione lunæ in terram has inæqualitates multo minores effici.

§. 759 *Lin.* 6 *loco* 10 vel cum maxima est, 12 secundorum, *lege* $8''\frac{1}{2}$ cum maxima est.

Pag. 256 §. 782 *Post hunc* § *adde.* Præter hanc deviationem alia adhuc est, cujus ratio habenda, quando longitudines stellarum reducendæ sunt ad annos ab epocha magis distantes. Notavimus enim, obliquitatem eclipticæ intra sæculum 46″ ferre minui; & theoria mo-

motus, conſtansque poli ubivis altitudo ſuadent, polum eclipticæ ſemper paullum accedere ad polum æquatoris. Ex quo liquet, ea imminutione non affici aſcenſionem rectam, & declinationem fixarum, ſed tantum earum longitudinem, & latitudinem. Jam vero ope formularum differentialium (Trigon. 178 & 177), poſita aſcenſione recta, & declinatione conſtante, facile invenientur mutationes in longitudinem & latitudinem competentes variationi datæ obliquitatis eclipticæ.

Pag. 267 *poſt* §. 818 *adde*: Ut major habeatur accuratio, calculandæ ſunt parallaxes in ſphæroide ad polos depreſſo (434 Append.), quæ methodi rationem non mutant, ſed tantum calculi laborem aliquantum augent. Quomodo res hæc peragenda, hic non indicamus, cum id jam loc. cit. præſtiterimus. Obſervavimus etiam idem in *diſpoſitione calculi* mox ſubjungenda. Monemus tantummodo, ſi in ellipſi (Fig. 77. Append.) CQ & CP exprimantur numeris integris unitate differentibus, uti 215 & 214, haberi $OK = \frac{CQ + \int^2 latit.}{CP}$, & $CK = \frac{2 \int latit.}{CP}$

Pag. 276 §. 822 *adde.* Eadem methodus adhiberi poteſt, dum tranſitus planetarum inferiorum per diſcum ſolis calculandus eſt: & ſiquidem ratio eorum parallaxeos habenda ſit, accipienda erit pro parallaxi planetæ differentia parallaxeos horizontalis planetæ, & ſolis. Conſtructio Graphica eadem fieri poteſt, quæ pro eclipſibus ſolis. At ſi parallaxeos planetæ nulla ſit habenda ratio, & calculus & conſtructio graphica ab iis non differet, quæ pro eclipſibus lunæ adhibentur, modo loco umbræ ſubſtituatur diſcus ſolis.

Dispositio Calculi Eclipsis Solis pro die 25 Octob. An. 1753.

Temp. medium	20h. 20′	20h 50′	21h 20′	21h 50′	22h. 20′	22h. 50′
locus verus ☉	213° 4′ 32″	213° 5′ 47″	213° 7′ 2″	213° 8′ 17″	213° 9′ 32″	213° 10′ 48″
locus verus ☾	211 47 0	212 4 42	212 22 25	212 40 8	212 57 51	213 15 35
Dist. ☾ a poloB	89 32 43	89 31 5	89 29 27	89 27 49	89 26 11	89 24 33
Parall. cor. ☾	58 31	58 31	58 30	58 30	58 29	58 29
Tem. med. in gr.	305 0	312 30	320 0	327 30	335 0	342 30
Longit. med. ☉	214 50	214 51	214 52	214 53	214 54	214 56
Pun. æq. in mer	159 50	167 21	174 52	182 23	189 54	197 26
Punct. culmin.	158 11	166 15	174 24	182 36	190 47	198 54
An. ecl. cum mer.	68 2	67 7	66 37	66 32	66 53	67 39
Decl. punct. cul.	8 32 B	5 26 B	2 14 B	1 2 A	4 17 A	7 25 A
alt. punct. culm.	49 41	46 35	43 23	40 7	36 52	33 34
altit. nonages.	53 7	50 43	48 9	45 27	42 38	39 43
Nonagesimus	140 34	146 3	151 38	157 18	163 9	169 14
Dist. ☾ a nonag.	71 13	66 2	60 44	55 22	49 49	44 2
Paral. in long.	44 50	41 54	38 32	34 48	30 42	26 23
Paral. in latit.	35 24	37 24	39 23	41 23	43 24	45 24
Longit. appar. ☾	212 31 50	212 46 36	213 0 57	213 14 56	213 28 33	213 41 58
Lat. appar. ☾ A	8 7	8 29	8 50	9 12	9 35	9 57
Correct. longit.	— 8	— 8	— 8	— 8	— 8	— 8
Correct. latitud.	— 23	— 23	— 23	— 23	— 23	— 23
Long ap. ☾ red.	212 31 50	212 46 28	213 0 49	213 14 48	218 28 25	213 41 50
Lat. ap. ☾ red.	7 44	8 6	8 27	8 49	9 12	9 34
diff. long. ☉ & ☾	+ 32 50	+ 19 19	+ 6 13	— 6 31	— 18 53	— 31 2
Dist. centrorum	33 44	20 57	10 29	10 58	21 1	32 28
Altit. ☾ circiter	14 10					26 38
Semid. horiz. ☾	16 8					16 8
Semid. appar. ☾	16 12		16 14			16 16
Semidiam. ☉	16 11		16 11			16 11
Summa semidia.	32 23		32 25			32 27

	Temp. med.	Temp. vero & civili
Initium	20 h 23′ 1″	die 26 Octobr. 8 h. 38′ 51″ mane
Medium	21 33 26	9 49 16
Finis	22 49 58	11 5 49

Quantitas 8 dig. 31 minut. ex parte Australi Solis.

Pag. 280 § 852 *adde.* Fieri quoque potest, ut sol habeat motum translationis in spatio universi absoluto, id, quod motus particularis stellarum magis illustrium suadere videtur. Verum hoc conjecturæ meræ limites non excedit, quam dies cum longa observationum admodum subtilium serie, vel confirmabit, vel evertet.

Pag.

Pag. ead. §. 853 adde. Certiores de hac re essemus, si antiqui Astronomi observationes tam exactas nobis reliquissent, ut hodie fiunt. Itaque notitia certior de medii ætherei resistentia futuris reservata est sæculis.

Corrigenda in Lectionibus Astronomiæ.

Pag. 6 lin. 37 *loco* DBC = ECB *legatur* BDC = CEB
Pag. 25 Num. 166 *in tangentis* B C *utriusque formulæ denominatore loco signi — fiat* +.
30 *Ad Notam addatur.* Verum sit hoc ob neglectas binas postremas notas logarithmorum.
48 Lin. 11 & sequentibus *loco* $\frac{\infty}{n}$ *legatur* $\frac{n}{\infty}$.
111 Lin. 27 *loco* borealem *lege* Australem
222 Lin. 35 *loco* dum primarius *lege* dum sol & primarius

ERRATA IN APPENDICE.

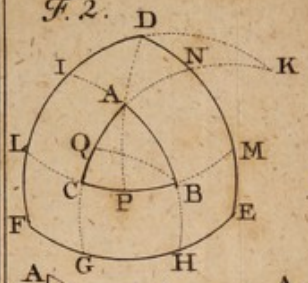
Pag. 8 *Distantia Mercurii a prima stella Arietis pro* Aug. die 19 *ponatur* $9^s\ 11^\circ\ 3'\ 46''$.

		ERRATA			CORRIGE
Pag.	27	Lin. 19	ratione	— —	rotatione
	29	2	rectum	— —	rectam
	35	24	tellulis	— —	telluris
	37	10	*oblig.*	— — —	*obliq.*
	38	2	sit siat	— —	si fiat
	45	27	$1^\circ\ 55''$	— —	$1^\circ\ 55'$
	48	*ult.*	logarithmum	—	logarithmus
	53	*antepenult.*	Maii	— —	Martii
	54	12	*n*NL	— — —	LNS
	56	31	*harum*	— — —	*horum*

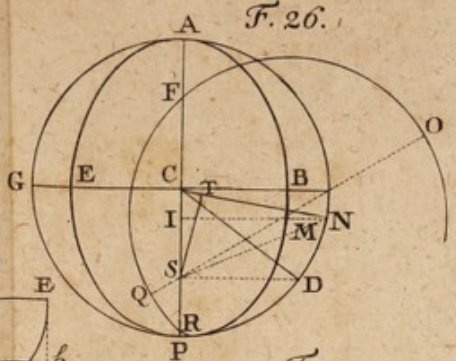
Pag. 64 *Cometæ An.* 1556 *transitus per perihel. ponatur* April. d. 21 20 h. 12′; *primi vero An.* 1618 *transitus contingit* Aug. d. 17 3 h. 12′.

Cometarum item An. 1593 *& primi* 1618 *orbitæ sunt minus certæ.*

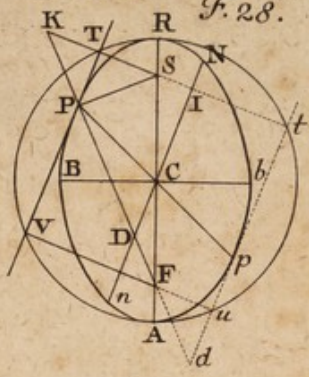
F. 2.



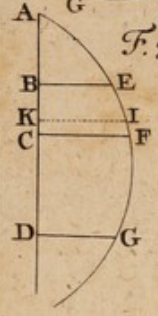
F. 26.



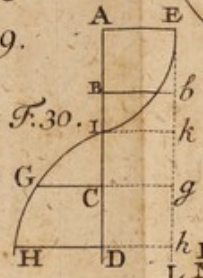
F. 28.



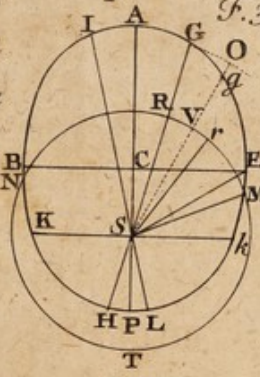
F. 29.



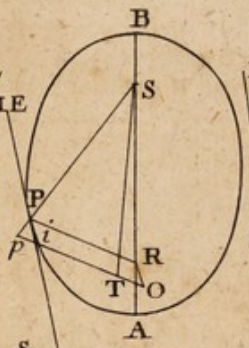
F. 30.



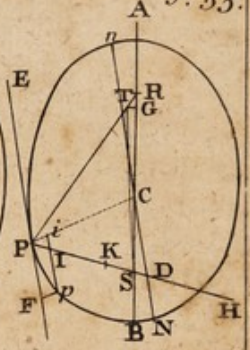
F. 31.



F. 34.

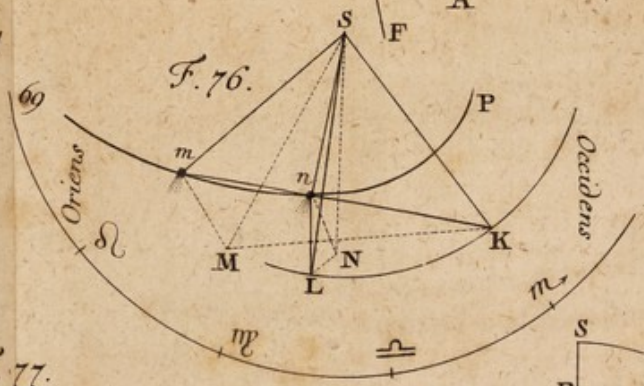


F. 35.

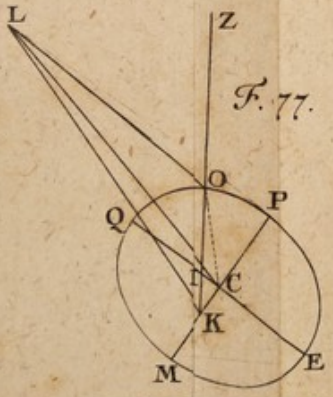


F. 40.

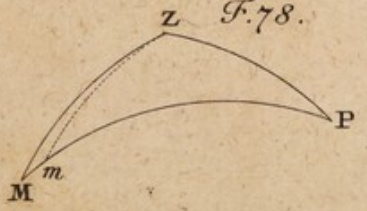
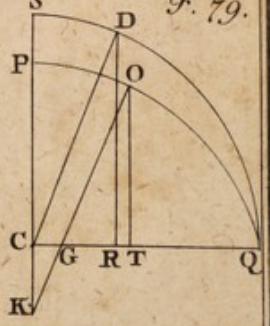
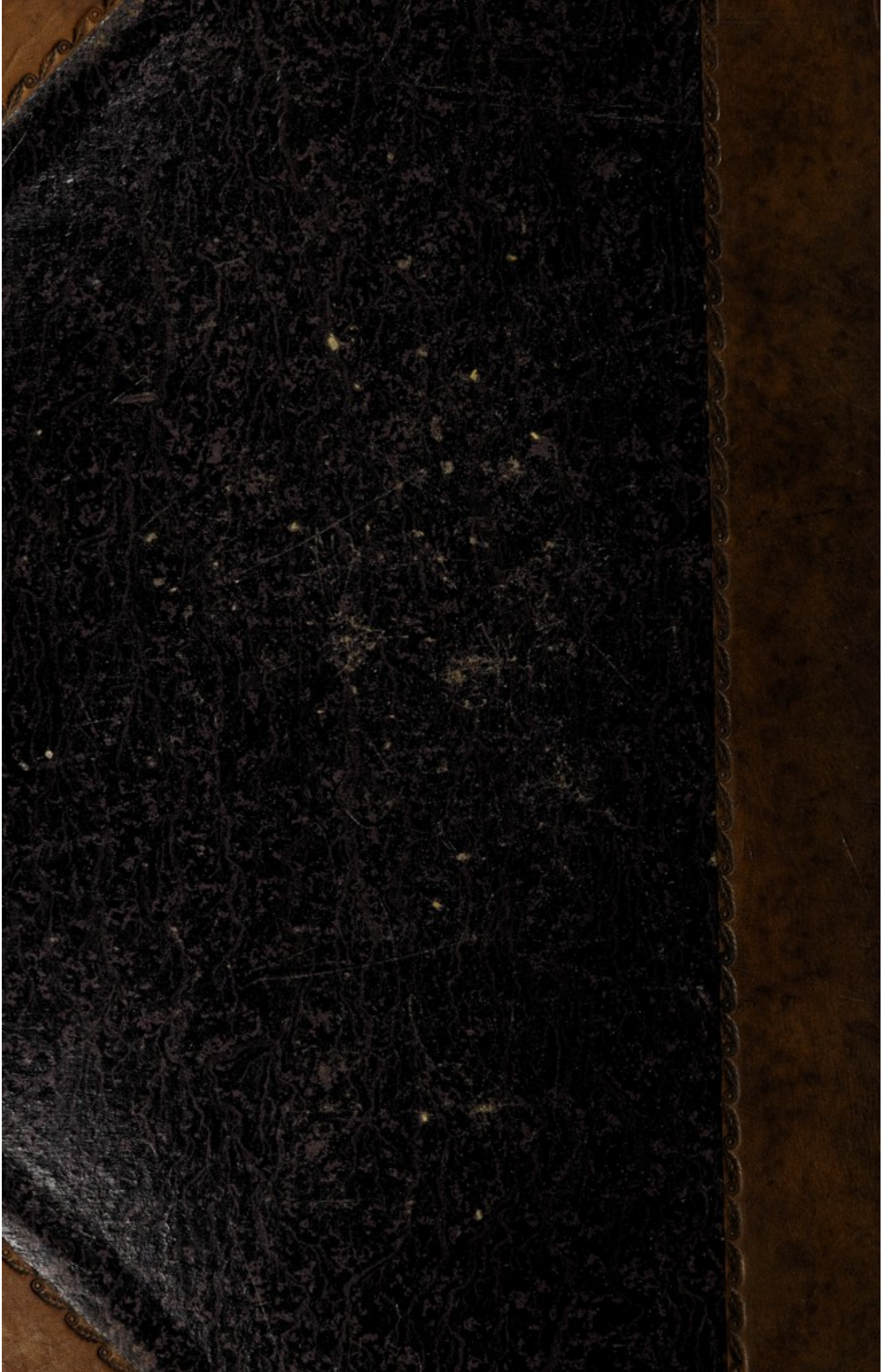
F. 76.



F. 77.



F. 78.



F. 79.