C IBER

Johann I 1667-1748
Succeeded brother, Jacob in Basle

DISCOURS
SUR LES LOIX
DE LA COMMUNICATION
DU MOUVEMENT,

Qui a merité les Eloges de l'Academie Royale des Sciences aux années 1724. & 1726. & qui a concouru à l'occasion des Prix distribuez dans lesdites années.

Par M. JEAN BERNOULLI, *Professeur des Mathematiques à Basle, & Membre des Academies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse.*

A PARIS, ruë saint Jacques,
Chez CLAUDE JOMBERT, au coin de la ruë des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XXVII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Discoverer of brachystochrone
exponential calculus
Jacques
succeeded his brother at Basle, earlier bitter quarrel on [illegible]
three sons, Nicholas, Daniel + Jean

LE LIBRAIRE AU LECTEUR.

COMME *l'Academie* Royale *des Sciences a parlé avantageusement & avec éloge, de l'Ouvrage de* M. Bernoulli, *dans l'Avertissement qu'Elle a mis à la tête de la Piece de M.* Mac-laurin, *& de celle du Pere* Maziere; *M. Bernoulli n'a pas fait difficulté de consentir que la sienne fût publiée. Nous la publions donc aujourd'hui, & avec d'autant plus de confiance, que l'illustre Academie a paru elle-même souhaiter que cet Ouvrage vit le jour, & que les excellentes choses qu'Elle y avoit remarquées, ne fussent pas perduës pour le Public. L'impression a été faite d'après le Manuscrit envoyé à cette Compagnie pour le Prix; & l'un des Juges nommez par Elle aux années* 1724. & 1725. *a bien voulu veiller à cette impression. Nous sommes persuadez que le Lecteur y trouvera des Recherches nouvelles, curieuses & instructives, & qu'il nous sçaura gré de lui en avoir fait part.*

FAUTES A CORRIGER.

Page 46. *ligne* 9. *Art.* 7. voir quels, *lisez* qu'elles.
Page 47. *lig.* 6. n'a pas, *lis* n'ait pas été.
lig. 11. ils chosissent, *lis.* ils choisissent.
lig. 13. de leur reprocher, *lis.* de le leur reprocher.
lig. 19. il n'en est pas de même, *lis.* il en est de même.
même lig. quel que soit, *lis.* quelle que soit.

LETTRE

A MESSIEURS DE L'ACADEMIE Royale des Sciences, servant de Preface au Discours suivant.

MESSIEURS,

L'Auteur de ce Discours sur la communication du Mouvement, a l'honneur de vous le presenter ; il l'a composé à l'occasion de la premiere des Questions qu'il vous a plû de proposer aux Sçavans de l'Europe. Messieurs Huguens, Mariotte, Wren, Wallis, *& quelques autres habiles Mathematiciens, ont écrit solidement sur cette matiere, & nous ont laissé des regles, suivant lesquelles les corps doivent se communiquer leur mouvement ; mais peu satisfait de tirer par une espece d'induction la regle generale des cas les plus simples, l'Auteur s'est prescrit une methode differente de la leur, & en même tems plus naturelle. Il remonte à la source, & embrassant toute l'étendue de son sujet, c'est sur les principes même de la Mechanique qu'il établit la regle generale de laquelle il déduit ensuite, comme autant de Corollaires, les regles particulieres à chaque cas.*

On n'a eu jusqu'ici qu'une idée assez confuse de la force des corps en mouvement, à qui M. de Leibnitz *a donné le nom de* Force vive. *L'Auteur s'est non-seulement attaché à mettre cette matiere dans son jour, & à faire sentir en quoi consiste la difficulté élevée entre ce grand homme, & ceux d'un parti oposé, mais encore à prouver par des démonstrations directes & toutes nouvelles, une verité que M. de* Leibnitz *lui-même, n'a* *jamais prouvée qu'indirectement ; ſçavoir, que la force vive d'un corps n'eſt pas proportionelle à ſa ſimple viteſſe, comme on l'a crû communément, mais au quarré de ſa viteſſe : & il eſpere qu'après ce qu'il en dit ici, perſonne ne doutera plus de la verité de cette propoſition. Auſſi non content de déterminer ce qui doit arriver à deux corps qui ſe choquent, ſoit directement, ſoit obliquement, l'Auteur détermine ce qui réſulte du choc d'un corps, qui en rencontre deux ou pluſieurs autres à la fois, ſelon differentes directions : Problême ſi épineux que perſonne n'avoit encore entrepris de le réſoudre. Et comment en ſeroit-on venu à bout ? puiſque ſa réſolution ſupoſe une connoiſſance exacte de la theorie des forces vives.*

Cette theorie ouvre un chemin facile à pluſieurs veritez importantes. Elle a fourni à l'Auteur une réſolution du Problême précedent, qui paroît avoir quelque choſe de ſingulier ; la maniere de déterminer la perte actuelle des viteſſes dans un milieu réſiſtant, & un moyen aiſé de trouver le centre d'oſcillation dans les Pendules compoſées. Au reſte c'eſt à vous, MESSIEURS, *à juger ſi cet Ouvrage répond à l'attente de ſon Auteur. Plein d'eſtime & de conſideration pour votre illuſtre Corps ; il le regarde comme un Tribunal ſans apel, au jugement duquel on défere d'autant plus volontiers, que toute l'Europe ſçait qu'un eſprit de diſcernement & d'équité, regne dans vos ſçavantes Déciſions.*

L'Auteur oſeroit-il ſe flattter, MESSIEURS, *que vos ſuffrages lui ſeront favorables ? On ſe perſuade aiſement ce qui fait plaiſir ; quel que puiſſe être cependant le ſuccès de ſon entrepriſe, il ſera toûjours infiniment plus de cas de l'honneur de votre approbation, que de la récompenſe qui y eſt attachée.*

S'il lui reſtoit encore quelque choſe à deſirer, ce ſeroit, MESSIEURS, *de pouvoir vous convaincre de la parfaite conſideration, & du devouëment ſincere avec leſquels il a l'honneur d'être,*

MESSIEURS,

Votre très-humble & très-obéiſſant
ſerviteur,

DISCOURS
SUR LES LOIX DE LA COMMUNICATION DU MOUVEMENT,

Contenant la ſolution de la premiere Queſtion propoſée par Meſſieurs de l'Academie Royale des Sciences, pour l'année 1724.

CHAPITRE PREMIER.

De la dureté des Corps : Définition de la dureté ſelon les differentes idées qu'on peut en avoir.

1. L'ACADEMIE Royale des Sciences ayant propoſé deux Prix pour les années 1724. & 1726. qui ſeront diſtribuez à ceux qui, au jugement de cette celebre Compagnie, auront le mieux réuſſi à réſoudre deux Queſtions differentes, j'ai crû que ſon invitation s'adreſſant à toutes les Nations, il m'étoit permis d'eſſayer mes forces ſur un ſujet, où je ne courois d'autre riſque que celui d'employer en vain une partie de mon tems & de ma peine à compoſer ce Diſcours : ce que je dis ſeulement par raport à l'utilité qui pourroit m'en revenir ;

car quel qu'en ſoit d'ailleurs le ſuccès, j'aurai du moins la ſatisfaction d'avoir fait de nouvelles découvertes, auſquelles je n'aurois peut-être jamais penſé ſans cela.

2. Un prix de 2500 liv. eſt deſtiné à celui qui réſoudra la premiere Queſtion, conçuë en ces termes :

» Quelles ſont les loix ſuivant leſquelles un corps parfaitement dur, mis en mouvement, en meut un autre » de même nature, ſoit en repos, ſoit en mouvement, » qu'il rencontre, ſoit dans le vuide, ſoit dans le plein.

3. Mais avant de m'engager dans la recherche de cette Queſtion, je commencerai par expliquer ce que j'entends par le mot de *dureté*. C'eſt le ſort des termes qui ſervent à exprimer le ſujet de quelque ſenſation, de ne nous donner qu'une idée vive & confuſe de l'objet qui la fait naître.

Eclairciſſons donc un mot équivoque par lui-même, & par les diverſes idées qu'on y a attachées ; & après avoir défini ce que nous entendons par *dureté*, il ſera aiſé de nous former de ce mot une idée nette & préciſe.

Le Philoſophe & le Geometre ſoigneux de conſerver à leurs démonſtrations la clarté & l'évidence, doivent éviter avec ſoin toute maniere de parler ambiguë.

4. Le nom de *dureté* eſt un de ces termes qui ne ſignifient pas la même choſe, même chez les Philoſophes. Je ne m'amuſerai point ici à examiner les differentes idées qu'on y a attachées en divers tems, ce ſeroit m'écarter de mon ſujet. Je me contenterai d'indiquer en peu de mots, l'idée que la plûpart des Philoſophes ſe ſont formés de la dureté. On croit communement qu'un corps eſt dur, lorſque ſes parties étant en repos les unes auprès des autres, leur liaiſon ne peut être interrompuë que par une force exterieure, & que cette dureté eſt d'autant plus parfaite, qu'il faut une plus grande force pour en ſéparer les parties. Selon cette idée, un corps ſeroit parfaitement dur, dans le ſens d'une perfection abſoluë, lorſque ſes parties ne pourroient être ſeparées par aucun effort fini, quelque grand qu'on le ſuposât. Les partiſans

des Atomes ont attribué une dureté de cette nature à leurs Corpuſcules Elementaires : idée qui paroît être la veritable, lorſque l'on ne conſidere les choſes que ſuperficiellement ; mais qu'on s'aperçoit bien-tôt renfermer une contradiction manifeſte pour peu qu'on l'aprofondiſſe.

5. En effet un pareil principe de dureté ne ſçauroit exiſter ; c'eſt une chimere qui repugne à cette loy generale que la nature obſerve conſtamment dans toutes ſes operations ; je parle de cet ordre immuable & perpetuel, établi depuis la création de l'Univers, qu'on peut apeller LOY DE CONTINUITE', en vertu de laquelle tout ce qui s'execute, s'execute par des degrez infiniment petits. Il ſemble que le bons ſens dicte, qu'aucun changement ne peut ſe faire par ſault, *natura non operatur per ſaltum* ; rien ne peut paſſer d'une extremité à l'autre, ſans paſſer par tous les degrez du milieu. Et quelle connexion concevroit-on entre deux extremitez opoſées indépendamment de toute communication de ce qui eſt entre deux ? Si la nature pouvoit paſſer d'un extrême à l'autre, par exemple, du repos au mouvement, du mouvement au repos, ou d'un mouvement en un ſens, à un mouvement en ſens contraire, ſans paſſer par tous les mouvemens inſenſibles qui conduiſent de l'un à l'autre ; il faudroit que le premier état fut détruit, ſans que la nature ſçût à quel nouvel état elle doit ſe déterminer ; car enfin par quelle raiſon en choiſiroit-elle un par préference, & dont on ne pût demander, pourquoi celui-ci plutôt que celui-là ? puiſque n'y ayant aucune liaiſon neceſſaire entre ces deux états ; point de paſſage du mouvement au repos, du repos au mouvement, ou d'un mouvement à un mouvement opoſé ; aucune raiſon ne la détermineroit à produire une choſe plutôt que toute autre.

6. Je veux qu'on aperçoive dans la nature des effets ſi prompts, qu'on ne remarque aucun intervalle entre le commencement & la fin de leurs actions ; s'enſuit-il delà qu'il n'y en ait aucun ? & tous ceux qui ſont con-

vaincus que tous les genres de quantité sont divisibles à l'infini, auront-ils de la peine à diviser la plus insensible durée en un nombre infini de petites parties, & à y placer tous les degrez possibles de vîtesse, depuis le repos jusqu'à un mouvement déterminé, par exemple, depuis le commencement d'un éclair, jusqu'à son entier évanoüissement ?

7. Concluons donc que la dureté prise dans le sens vulgaire, est absolument impossible, & ne peut subsister avec la loy de continuité. Un peu de reflexion mettra cette verité dans son jour. Suposons que deux corps durs en ce sens, & parfaitement égaux, se rencontrent directement avec des vîtesses égales, je dis qu'ils doivent de toute necessité ou s'arrêter tout court en se choquant, ou rebrousser chemin après s'être choquez ; il impliqueroit que des corps durs se penetrassent ; mais ces corps ne sçauroient s'arrêter tout court, sans passer subitement du mouvement au repos, de l'être au non être, ce qui repugne à la loy de continuité : ni reflechir dans le second cas, qu'ils ne changent tout d'un coup leurs vîtesses affirmatives, en une vîtesse negative, sans avoir parcouru auparavant toutes les diminutions successives de la premiere vîtesse, jusqu'à sa destruction totale, & de la remonter par de pareilles augmentations, en une vîtesse en sens contraire ; ce qui est également oposé à cette loy.

8. Et certes ces raisons sont telles, qu'il ne me paroît pas possible que la dureté prise dans le sens que nous venons de refuter, puisse quadrer avec les loix fondamentales de la nature : aussi rejettai-je les prétendus atômes parfaitement solides, que quelques Philosophes ont admis ; ce sont des corpuscules imaginaires qui n'ont de réalité que dans l'opinion de leurs partisans.

9. Mais après avoir détruit la fausse idée qu'on se forme ordinairement de la dureté, il est juste de lui en substituer une nouvelle, propre à expliquer d'une maniere intelligible, les phenomenes que nous connoissons, & sur

tout les loix de la communication du mouvement.

Pour cela je conçois d'abord la matiere, en tant que matiere, comme étant parfaitement fluide de sa nature; ensorte qu'aucunes de ses particules, quelques petites qu'on les supose, n'ont aucune cohesion necessaire entr'elles; mais telles cependant que ces mêmes parties ont pû s'amasser en de petites molecules élementaires dont se sont formez les corps sensibles de differentes qualitez, les uns liquides, les autres mous, & d'autres plus ou moins durs, selon les differens concours, les differentes figures, & les divers mouvemens de ces molecules élementaires, & des particules qui passant par leurs interstices, les tiennent ou separez comme dans les fluides, ou qui les comprimant plus ou moins fortement, forment des corps que le Vulgaire, qui n'en juge que par les sens, nomme *durs*, à proportion de la resistance que les parties de ces corps oposent à la force qui tend à les separer.

10. Et qu'on ne me demande point une raison Physique de la compression de ces molecules élementaires, & de celle des corps durs & sensibles qu'ils composent. Mon but n'a point été de m'engager dans cette recherche; j'explique simplement ici ce que j'entens par le mot de *dureté*, & j'en donne une idée propre à rendre raison des proprietez connuës de la communication du mouvement, & à découvrir celles qui ne sont point encore connuës, & que l'experience pourra verifier; & c'est aussi tout ce que l'Academie exige de moi dans cette occasion.

11. Cette compression d'une matiere étrangere qui environne les corps sensibles, & leurs molecules élementaires, peut être si grandes par la structure particuliere de quelques-uns de ces corps, qu'il faut employer un degré de force très-violent, non-seulement pour en separer entierement les parties, mais à leur faire simplement changer de figure; tels sont, par exemple, la plûpart des métaux, qui quoique très-difficile à être divisez, cedent pourtant au marteau, & s'aplatissent. Ces sortes de corps sont durs, mais d'une dureté imparfaite, en ce qu'après

avoir perdu leur premiere figure, ils ne reprennent pas celle qu'ils avoient avant d'avoir ſubi la force qui l'a changée.

12. Il eſt d'autres corps dont les particules ſont ſi adherentes les unes aux autres, ſoit que cela vienne d'une compreſſion étrangere, ou de quelqu'autre cauſe, qu'outre la difficulté qu'on trouve à les briſer, ils recouvrent ſur le champ leur premiere ſituation, ſi quelque force exterieure les contraint de ſe plier, dès que la force qui les contraignoit ceſſe d'agir ſur eux, les corps comparez à ceux de la premiere ſorte, ont plus de dureté qu'eux.

13. Je n'entre point à preſent dans la cauſe Phyſique de cette derniere eſpece de dureté, il me ſuffit de ſçavoir qu'il y a des corps capables de reſſort, ou doüez d'une vertu élaſtique ; je ne nie pourtant pas que cet effet puiſſe provenir de l'effort d'une matiere ſubtile, qui agiſſant ſur les pores retrecis des corps élaſtiques, preſſe les parois de ces pores, & s'éforce de les remettre dans leur premier état.

14. Figurons-nous, par exemple, un ballon rempli d'un air condenſé ; à ne conſiderer cet air qu'en lui-même, c'eſt ſans doute une matiere fluide : cependant dès qu'il eſt renfermé dans un ballon, il fait avec ce ballon un corps dur, parce qu'étant comprimé par une force exterieure, & ne pouvant échaper par aucun endroit, il réſiſte à cette force, & rend au ballon ſa premiere figure, dès que la force qui le comprimoit ceſſe d'agir. Augmentons à preſent la denſité de l'air renfermé dans ce ballon, juſqu'à un degré immenſe de réſiſtance, en ſorte qu'il faille une force extrême pour comprimer ce ballon : je ne vois pas, à en juger par les ſens, en quoi un pareil ballon differeroit des corps qu'on appelle durs.

15. Concevons enfin un nombre infini de petits balons pleins d'un air extrêmement condenſé, renfermé ſous une envelope commune, & ſupoſons que chaque portion de cet amas, quelque petite qu'elle puiſſe être, eſt elle-même renfermée ſous ſa propre envelope, nous aurons une

une idée de ce que j'appelle dureté dans les corps. Les petits ballons répondront aux molecules élementaires ; & les envelopes tant celles qui renferment une portion de cet amas, que la masse même, tiendront lieu dans cet exemple d'un fluide ambiant, qui par son activité presseroit & comprimeroit en tout sens la masse entiere, & chacune de ses plus petites particules. Donnons à present un degré immense d'élasticité à l'air contenu dans ces petits ballons, & nous verrons que leur masse entiere, ni aucune portion de cette masse, ne pourra plus être comprimée sensiblement, par une force nouvelle finie, quelque grande qu'on la supose. Je dis *sensiblement*, car la résistance élastique de l'air n'est jamais absolument invincible, quand même elle seroit infinie. On retomberoit autrement dans le cas d'une dureté imaginaire, toute force qui agit sur un ressort, quelque fortement tendu qu'il soit, le bande davantage, & l'oblige de plier encore un peu, quand même la difference en seroit tout-à-fait imperceptible, & cette difference devient infiniment petite, lorsqu'un effort fini agit sur un ressort d'une force infinie.

16. Un corps sera donc dur conformément à l'idée que nous venons de donner de la dureté, lorsque ses parties sensibles changeant difficilement de situation : un ressort très-prompt & très élastique rend leur premiere situation dans un tems insensible aux parties de ce corps, qui ont été tant soit peu pliées par le choc d'un autre corps ; cette élasticité est parfaite lorsque toutes les parties pliées reprennent leur premier état : elle est imparfaite lorsque quelques-unes de ces parties n'y retournent plus. On peut donner le nom de roideur à l'élasticité parfaite, cette roideur peut être finie ou infinie, & elle est d'autant plus grande qu'il faut un effort plus considerable pour comprimer ce corps à un degré donné ; la roideur est infinie dans un corps, ou ce corps est infiniment roide lorsqu'il faut une pression infinie pour comprimer ce corps à un degré fini, ou une pression finie pour le

comprimer à un degré infiniment petit.

17. Quoiqu'à proprement parler, il n'y ait point de corps dans la nature qui ſoient infiniment roides, il y en a pourtant un grand nombre qui le ſont a un point, qu'une preſſion immenſe les comprime à peine ſenſiblement. Ainſi, par exemple, une boule d'acier ſuporte un poids de mille livres, ſans changer ſenſiblement de figure. Il eſt vrai que ces mêmes corps cedent facilement lorſqu'on les réduit en plaques minces ; & l'experience montre que rien n'eſt plus aiſé à plier qu'une lame d'acier. Mais auſſi on doit attribuer cette grande facilité à l'action du levier, chaque point d'un corps étendu en long tenant lieu d'hypomochlion, enſorte que le moment de la force appliquée aux extrêmitez de ce corps, eſt comme infini, par rapport à la reſiſtance des parties très proches de ce point.

18. J'entendrai donc toûjours dans la ſuite de ce diſcours, par corps durs, des corps roides ; & quoiqu'il n'y ait point de corps parfaitement durs, puiſque leur dûreté devroit conſiſter dans une roideur actuellement infinie, je ne laiſſerai pas de conſiderer comme tels ceux qui ont une roideur extrême, & d'autant plus que les corps parfaitement élaſtiques obſervent les mêmes loix dans la communication du mouvement, que ſi leur élaſticité étoit ou pouvoit être actuellement infinie ; car ces loix dépendent uniquement de l'élaſticité parfaite, en vertu de laquelle les corps ſe redreſſent parfaitement, après un choc ſouffert, indépendament de la promptitude avec laquelle ſe fait ce redreſſement, ou cette reſtitution à leur premier état.

19. Je ſuppoſerai même d'abord des corps durs, dans le ſens vulgaire des Philoſophes, quelque répugnance qu'il y ait entre ce ſyſtême & la loi de continuité, auſquels au deffaut d'une élaſticité naturelle, j'appliquerai par dehors des reſſorts artificiels, & cela ſeulement pour rendre plus intelligibles les démonſtrations des effets qui réſultent du choc des corps naturellement élaſtiques.

CHAPITRE II.

Comment le Mouvement ſe détruit & ſe reproduit par la force du reſſort. Egalité de l'action & de la réaction. Solution de quelques Problêmes.

HIPOTHESE.

1. TOut corps mû dans le vuide continuera toûjours à ſe mouvoir avec la même vîteſſe, & dans la même ligne droite qu'il a commencé à parcourir, à moins qu'il ne rencontre un obſtacle qui l'empêche ou le détourne.

Cette propoſition eſt un de ces axiomes reconnus de tout le monde, & qui par cela même n'ont aucun beſoin de preuve.

PROPOSITION.

2. Un corps dur pris dans l'une ou l'autre ſignification, rencontrant directement avec une vîteſſe déterminée un reſſort d'une élaſticité parfaite, dont un bout eſt appuyé contre un plan inébranlable, ou contre un point fixe, ſera repouſſé ſelon la même direction & avec la même vîteſſe.

Cette Propoſition eſt claire, & ſa verité ſaute aux yeux pour peu d'attention qu'on faſſe à la nature de l'action & de la réaction qui ſont toûjours égales entre elles; car dans le premier inſtant que le corps atteint le reſſort débandé, ce reſſort eſt contraint de ſe reſſerer, & par là il acquiert un peu de force, au moyen de laquelle le reſſort reſiſte un peu au corps, & lui ôte par conſequent un peu de ſa vîteſſe. Dans le ſecond inſtant le corps comprimant encore un peu le reſſort, celui-ci reçoit un nouveau petit degré de force, & fait encore perdre au corps quelque peu de ſa vîteſſe; & cela continuë ainſi par tous les degrez infiniment petits, jusqu'à ce que la vîtesse du corps étant éteinte, il ait communiqué toute sa force au ressort, par un nombre infini de diminutions élementaires ou infinimens petites. Mais dès que le corps est parvenu au repos, le ressort commence à se débander & à lui rendre successivement dans un ordre renversé de temps, ces mêmes élemens de vîtesse qu'il lui avoit ôté; ensorte que la perte du dernier élement de vîtesse, sera réparée dans le premier instant; celle du pénultiéme dans le second instant; celle de l'antepénultieme dans le troisiéme, & ainsi de suite, jusqu'à ce que le ressort étant entierement débandé, le corps aura regagné sa premiere vîtesse, mais en un sens contraire. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE I.

3. Je ne crois pas que cette proposition puisse se prouver autrement, c'est en quoi consiste l'égalité de l'action & de la réaction. Toute action se fait successivement & par élemens, quelque petite que paroisse la durée de l'action entiere. Ainsi le choc de deux corps qui paroît commencer & finir dans le même instant, ne laisse pas d'être d'une durée, qui, à parler proprement, & en des termes de Geometrie, a ses élemens, je veux dire un nombre infini de parties infiniment petites.

SCHOLIE II.

4. Rien n'oblige de suposer un ressort tout-à-fait lâche ou débandé avant le choc, on peut au contraire le suposer déja bandé par un degré de force déterminé, & retenu par quelque arrêt, pourvû que la situation de cet arrêt soit telle, qu'elle laisse au ressort la liberté d'être plus fortement bandé, & de retourner à son premier état sans sortir du degré de tension dans lequel cet arrêt le retient: ceci étant une fois admis, je ne vois pas pourquoi la démonstration précedente ne pourroit pas s'appliquer également au cas suivant.

FIG. I. 5. *ABMN*, est un cilindre creux fermé en *AB*, &

ouvert en *MN*, dont la partie *ABDE* eſt remplie d'un air condenſé qui faiſant effort pour ſe dilater, en eſt empêché par le diaphragme mobile *DE*, lequel preſſé par l'effort de l'air enfermé, ne peut ni ceder, ni ſe mouvoir vers l'ouverture *MN*, à cauſe de l'obſtacle *CC*, quoiqu'il puiſſe être repouſſé vers le fond *BA*; ſupoſons à preſent une boule *G*, qui ſe mouvant dans la cavité du cilindre, tende vers le diaphragme *DE*, avec une vîteſſe donnée *GE*, je dis que la vîteſſe de cette boule commencera à diminuer par degrez, dès qu'elle aura choqué le diaphragme *DE*, pendant que la denſité de l'air enfermé augmentera à proportion du mouvement de ce diaphragme vers *AB*, juſqu'à ce que ce diaphragme étant enfin parvenu à une certaine ſituation *d*, *e*, la vîteſſe de la boule ſoit entierement anéantie. Mais il eſt évident que la boule *G* ſe trouvant dans un état de repos, l'air condenſé dans l'eſpace *ABde*, reprendra le deſſus, & repouſſera le diaphragme & la boule vers *MN*, avec une acceleration tout-à-fait égale à la * retardation que cette boule a ſouffert, en s'enfonçant de *DE* en *de*, & que le diaphragme *de*, étant d'ailleurs retenu en *DE* par l'obſtacle *CC*, la boule *G* doit le quitter en *DE*, & rebrouſſer chemin contre *MN*, avec ſa premiere vîteſſe *EG*.

6. La maniere de déterminer par le calcul, la loi de la retardation de la boule *G*, lorſqu'elle commence à penetrer dans l'eſpace *ABDE*, ou de ſon acceleration, lorſqu'ayant atteint le plan *de*, elle commence à rebrouſſer chemin; renferme deux cas qu'il eſt à propos d'examiner à part: dans le premier où l'on ſupoſe l'air extrêmement condenſé, ſon élaſticité peut être ſi grande, ou la vîteſſe de la boule *G* ſi petite, que l'eſpace *DE* qu'elle parcourt, n'eſt pas comparable, ou n'a aucune raiſon ſenſible à l'eſpace total *DA*: dans le ſecond cas, l'air *AD* n'eſt pas aſſez comprimé fortement, ou la boule *G* a une vîteſſe trop grande pour que l'eſpace *De*, n'ait pas un ra-

* J'entends par retardation, l'effet que produit le retardement, conſideré comme cauſe.

port ſenſible à la totalité de l'eſpace *DA*.

7. Dans le premier cas, la retardation & l'acceleration ſeront uniformes par raport aux tems, ainſi qu'elle ſe remarque dans les corps peſants qui montent ou qui deſcendent perpendiculairement par l'action de leur peſanteur; car de même que la peſanteur étant une fois conſtante & invariable, ajoûte ou ôte au mobile un petit degré de vîteſſe dans chaque inſtant, ainſi la réſiſtance de l'air enfermé dans l'eſpace *ABDE*, que la boule *G* doit vaincre en penetrant juſqu'en *de*, eſt invariable pendant tout le tems que cette boule parcourt l'eſpace *De*; car la partie *Ed* du cilindre *EB*, ayant par la ſuppoſition une raiſon infiniment petite au cilindre entier *EB*, il eſt viſible que l'élaſticité de l'air réduit dans l'eſpace *eB*, ne peut pas être ſenſiblement plus grande qu'elle étoit avant ſa réduction, pendant qu'elle occupoit encore l'eſpace *EB*; concluons donc que la force de l'élaſticité réſiſte uniformement dans ce cas, & repouſſe la boule *G*, de même que la peſanteur reſiſte aux corps peſans, & les repouſſe quand ils montent.

8. Dans le ſecond cas, la retardation de la boule *G* en s'approchant du fonds *AB*, ou ſon acceleration en s'en éloignant, n'eſt plus uniforme, parce que l'air étant plus compreſſé à meſure que la boule pouſſe le diaphragme vers le fond *AB*, il eſt évident que cet air acquiert plus de force pour retarder ou accelerer le mouvement de la boule quand il eſt plus condenſé que quand il l'eſt moins; on ne peut donc déterminer la loi de cette retardation, ou de cette acceleration, qu'on ne ſuppoſe auparavant, ou qu'on ne connoiſſe la proportion qui regne entre les accroiſſemens, de l'élaſticité de l'air & ſes denſitez. Des experiences ſouvent réïterez ont prouvé que l'élaſticité de l'air, lorſqu'on fait abſtraction de ſes autres qualitez, eſt ſenſiblement proportionnelle à ſa denſité, & que par conſéquent la force avec laquelle il reſiſte, quand la boule eſt en *DE*, eſt à la force dont il réſiſte, lorſque cette boule eſt en *de*, com-

me la densité que l'air a lorsqu'il occupe l'espace AD, est à sa densité, lorsqu'il occupe l'espace Ad, ou ce qui revient au même, ces efforts sont en raison reciproques du cilindre Ad, au cilindre AD, ou comme Ae, est à AE prenant donc $AE = a$, & la variable $AF = x$; ce qui reste de vîtesse à la boule G, ou ce qu'elle en a acquis lorsqu'elle est parvenuë en F, soit en allant vers le fonds, soit en revenant $= v$: la force ou la résistance de l'air sera $= \frac{1}{x}$, & par conséquent conformément à ce que j'enseignerai au Chapitre 13, où on verra une methode generale de déterminer les vîtesses des corps mûs contre des forces qui résistent; l'élément de la vîtesse dv, sera $= \frac{dx}{xv}$. Donc $vdv, = \frac{dx}{x}$, donc $\frac{1}{2} vv = lx$, j'entends par lx le logarithme de x, & dans le cas où x devient $= a$, on aura $\frac{1}{2} vv = la$. Ainsi le quarré de la vîtesse au point F est au quarré de la vîtesse au point, E comme le logarithme de AF est au logarithme de AE, les vîtesses elles-mêmes sont donc en raison sous-doublée des logarithmes des intervalles qui sont entre la boule G & le fond AB, il faut remarquer que le point e étant le terme jusqu'où la boule peut avancer, & où sa vîtesse se réduit à rien; la ligne Ae doit être prise pour l'unité, afin que son logarithme soit $= a$.

9. On n'a fait aucune attention dans le calcul precedent, à la force de l'air exterieure qui agit sur le diaphragme DE; mais suposons cette force, on en déterminera les vîtesses par la même methode. Il n'y aura pour cela qu'à retrancher de la force de l'air condensé, celle avec laquelle l'air exterieur comprime la boule ou le diaphragme vers le fond AB, & considerer le reste, comme la force qui retarde ou accelere la vîtesse de la boule : en voici le calcul : soit l'élasticité de l'air contenu dans le cilindre $ABDE$, dont la longueur est AE, égale à l'élasticité de l'air exterieur, le diaphragme DE, sera également pressé par l'air du dehors & par celui du dedans;

mais puisque j'ai exprimé la force de l'air condensé dans le cilindre, dont la longueur est *AF* par $\frac{1}{x}$; la force de l'air contenu dans l'espace *ABDE*, égale à la force de l'air exterieur, qui presse la boule vers *AB*, sera$=\frac{1}{a}$, parce que ces ceux forces sont en raison réciproque de *AF* à *AE*; la force qui retarde ou qui accelere, sera donc exprimée par $\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=\frac{a-x}{ax}$ dont on tirera par la methode precedente $\frac{a-x}{axv}dx=dv$, ou $vdu=\frac{a-x}{ax}dx=\frac{dx}{x}-\frac{dx}{a}$, & par conséquent $\frac{1}{2}vv=lx-\frac{x}{a}$, d'où je conclus que le quarré de la vîtesse dans chaque point *F*, est comme le logarithme de *AF* diminué d'un partie toûjours semblable de *AF*, & que le point *e*, dans lequel lx devient$=\frac{x}{a}$, est le terme ou finit la vîtesse de la boule, & où recommence son mouvement en sens contraire vers *MN*.

10. On auroit ici occasion, si le sujet le permettoit, de faire des reflexions sur la juste longueur qu'on doit donner aux pieces d'Artillerie, & aux canons de Mousquets, afin qu'ils portent le boulet ou la balle le plus loin qu'il est possible; je me contenterai d'indiquer ce qu'il y a de plus facile à concevoir.

On prouve par experience que la poudre à canon renferme dans ses pores un air extrêmement comprimé, & dont la densité, & par consequent aussi l'élasticité est plus de cent fois plus grande que la densité & l'élasticité de l'air commun, le feu étant mis à la poudre, ouvre de toutes parts les petites cellules qui retenoient cet air, lequel sortant rapidement, s'unit à une masse, & se dilate avec une impetuosité augmentée encore considerablement par la chaleur, qui comme on le sçait, contribuë beaucoup à l'effort que l'air fait pour se dilater; c'est de cette dilatation aussi subite que violente, que dépendent ces prodigieux effets qu'on remarque dans la poudre enflâmée. Appliquons ceci à un canon chargé, dès que la poudre

poudre a pris feu, l'air ſe dilate bruſquement, & le boulet qu'il pouſſe commence à ſe mouvoir, avec une acceleration extrêmement précipitée, & qui ne finiroit même jamais, quelque longue que fut la piece, ſi l'air exterieur ne s'opoſoit au mouvement du boulet. Une piece ne ſçauroit donc être trop longue, ſi on n'avoit égard qu'à la dilatation de l'air interieur qui cherchant continuellement à s'étendre de plus en plus, acceleroit ſans ceſſe le mouvement du boulet. Mais comme l'air exterieur opoſe auſſi de ſon côté une force égale & uniforme au mouvement du boulet, qu'il s'efforce de repouſſer vers le fonds de la piece, il eſt viſible que contrebalançant une partie de la force de l'air interieur, il la rend inutile ; de ſorte que l'acceleration du boulet n'eſt cauſée que par l'excès de la force interieure par deſſus celle de l'air exterieur ; cette acceleration ceſſe même, & dégenere en un mouvement retardé, dès que l'air interieur eſt parvenu à un degré de conſiſtance égal à celui de l'air exterieur. C'eſt dans ce moment que la vîteſſe du boulet eſt la plus grande ; & c'eſt auſſi juſques-là que la longueur de la piece devroit s'étendre, pour que le boulet ait au ſortir de l'ame la plus grande vîteſſe poſſible.

11. Ce que nous venons de dire ſe confirme par l'équation précedente de la détermination de la vîteſſe $\frac{a-x}{axv}dx = dv$; car par la methode *de maximis*, on doit ſupoſer la differentielle de la vîteſſe $dv =$ *à zero*, & l'on aura $\frac{a-x}{axv}dx = o$, ce qui donne $x = a$, & par conſequent $\frac{1}{x} = \frac{1}{a}$, d'où il paroît que l'élaſticité de l'air interieur deſigné par $\frac{1}{x}$ doit être égale à $\frac{1}{a}$, qui deſigne l'élaſticité de l'air exterieur ou naturel : ſupoſé donc que l'air contenu dans une charge de poudre au moment qu'il en ſort, & qu'il remplit l'eſpace que cette poudre occupoit auparavant, eſt cent fois plus denſe que l'air naturel : il s'enſuit que le canon devroit être pour le moins cent fois plus grand que cet eſpace-là, ſi on avoit égard à pluſieurs circon-

ſtances particulieres, auſquelles on n'a point fait d'attention dans ce raiſonnement. Telles ſont, par exemple, le frottement du boulet, une partie de la poudre que la violence du coup porte hors du canon avant quelle ait pris feu : l'air même dilaté qui ſe diſſipe inutilement par la lumiere, & en s'échapant par l'évent entre l'ame de la piece, & l'épaiſſeur du boulet, &c. toutes raiſons qui diminuant conſiderablement l'effort de la poudre, empêchent qu'on ne donne aux canons la longueur exceſſive que leur aſſigne le calcul. Je n'entre point ici dans pluſieurs autres conſiderations qui ne permettent pas de faire les pieces auſſi longues qu'elles le devroient être, ſi on n'enviſageoit que la force avec laquelle la poudre agit ſur le boulet.

12. Diſons un mot de l'arquebuſe à vent, il eſt aiſé de voir par ce que je viens d'expliquer, que la longueur de ſon canon ſera la plus avantageuſe, meſurée depuis l'endroit où repoſe la balle juſqu'à ſon embouchure ; ſi toute ſa capacité eſt à celle de l'eſpace dans lequel eſt renfermé l'air condenſé, comme le nombre de fois moins un, que cet air eſt plus denſe que l'air naturel eſt à l'unité. Supoſant donc que la denſité de cet air renfermé, ſoit dix fois plus grande que la denſité de l'air dans ſon état naturel ; la plus grande compreſſion à laquelle l'art ait encore pû parvenir ; le canon devra avoir neuf plus de capacité, que l'eſpace qui contient l'air reſſerré par la pompe, afin que l'air condenſé ſe trouve après ſa dilatation, de même denſité que l'air exterieur ; & qu'ainſi la balle ait acquis ſa plus grande vîteſſe.

13. L'extrême longueur qu'on donne ordinairement aux Sarbacannes, eſt une preuve de ce que nous venons d'avancer : perſonne n'ignore que ce ſont de longs tuyaux de bois, dont on ſe ſert à chaſſer par la force du ſouffle, de petites balles de terre. La détermination de leur longueur, dépend de la quantité d'air que celui qui s'en ſert peut ſouffler à la fois dans la Sarbacanne ; ce qu'on peut déterminer avec aſſez de préciſion, de la maniere ſui-

vante : Prenez une vessie aplatie & humectée, au bout de laquelle vous adapterez un petit tuyau, de même ouverture que la Sarbacanne, faite entrer dans cette vessie d'un coup de souffle violent, tout l'air que vous pourrez ; & serrant ensuite le col de la vessie, ramassez cet air au fond de la vessie sans vous efforcer de le comprimer, soit enfin réduit le volume de cet air, égal en densité à l'air exterieur, en un cilindre d'une base égale à l'orifice de la Sarbacanne, la longueur de ce cilindre déterminera celle de la Sarbacanne. Il faut toujours se souvenir que je ne fais ici aucune attention au frottement de la balle, ni aux autres inconveniens qui peuvent diminuer l'effet de l'air quand il se dilate.

CHAPITRE III.

Ce que c'est que la vîtesse virtuelle. Principe de l'équilibre appliqué à la production du mouvement, par l'entremise d'un ressort entre deux corps en repos.

DEFINITION I.

1. J'Appelle *vîtesses virtuelles*, celles que deux ou plusieurs forces mises en équilibre acquierent, quand on leur imprime un petit mouvement ; ou si ces forces sont déja en mouvement. La *vîtesse virtuelle* est l'élement de vîtesse que chaque corps gagne ou perd d'une vîtesse déja acquise, dans un tems infiniment petit suivant sa direction.

DEFINITION II.

La *force vive* est celle qui réside dans un corps lorsqu'il est dans un mouvement uniforme ; & la *force morte*, celle que reçoit un corps sans mouvement, lorsqu'il est sollicité & pressé de se mouvoir, ou à se mouvoir plus ou moins vîte, lorsque ce corps est déja en mouvement.

HYPOTESE I.

FIG. 2. 2. Deux agens ſont en équilibre, ou ont des momens égaux. Lorſque leurs forces abſoluës ſont en raiſon reciproque de leurs vîteſſes virtuelles, ſoit que les forces qui agiſſent l'une ſur l'autre ſoient en mouvement, ou en repos, c'eſt un principe ordinaire de Statique & Mechanique, que je ne m'arreterai pas à démontrer, j'aime mieux l'employer à faire voir la maniere dont le mouvement ſe produit par la force d'une preſſion qui agit ſans interruption, & ſans autre oppoſition que celle qui vient de l'inertie du mobile.

3. Supoſons deux corps en repos *A* & *B*, entre leſquels eſt un reſſort bandé *C*, qui commençant à ſe débander, faſſe un effort égal de part & d'autre, pour éloigner l'un de l'autre les corps *A* & *B*; il eſt viſible que chacun de ſes corps opoſera au mouvement du reſſort par ſon inertie, une reſiſtance proportionnelle à ſa maſſe. Il faut donc, en vertu de l'hypoteſe priſe de la Mechanique, que les deux efforts oppoſez du reſſort, étant égaux, la force de l'inertie qui eſt en *A*, ſoit à la force de l'inertie qui eſt en *B*; ou que la maſſe *A* ſoit à la maſſe *B* en raiſon reciproque, de ce que la vîteſſe virtuelle du corps *B*, eſt à la vîteſſe virtuelle du corps *A*; & comme la choſe continuë toujours pendant que le reſſort en ſe dilatant accelere la vîteſſe de ces corps, il eſt clair que leurs accelerations ſont continuellement en raiſons reciproques des maſſes *A* & *B*, ce qui forme une raiſon conſtante; & par conſequent les vîteſſes acquiſes de part & d'autre dans le même tems, leſquelles ne ſont autre choſe que les ſommes des vîteſſes virtuelles, produites ſucceſſivement par l'effort du reſſort, ſont auſſi dans la même raiſon, je veux dire que la vîteſſe de *B* eſt à la vîteſſe de *A* : : *A*, *B*, d'où il ſuit que le reſſort *C* étant entierement debandé, ou retenu par quelque obſtacle qui l'empêche de ſe débander tout-à-fait, les deux corps *A* & *B*, continueront à ſe mouvoir avec

les dernieres vîtesses, acquises par l'impression successive du ressort.

COROLLAIRE I.

4. On voit que le commun centre de gravité C des deux corps A & B, reste continuellement en repos, soit pendant que le ressort est en action, soit après l'entiere separation de ces corps d'avec le ressort. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à diviser en C la longueur du ressort avant sa détente ; en sorte que $AC. BC :: BA$, il est manifeste, par ce qu'on a dit, que les corps A & B, étant parvenus en un certain tems en a & b, après la détente du ressort, on aura $Cb. Ca :: A. B$, donc le même point C sera encore le centre commun de gravité des corps A & B, transportez en a & b.

COROLLAIRE II.

5. Soit après l'entiere separation des corps d'avec le ressort, la vîtesse uniforme du mobile $A = a$, & la vîtesse du mobile $B = b$, on aura $A. B :: b. a$, & par consequent $aA = bB$, d'où il s'ensuit que la quantité de mouvement qui n'est autre chose que le produit de la masse par la vîtesse, est égale de part & d'autre.

COROLLAIRE III.

6. Comme les parties du ressort comprises entre C & B, en se débandant, sont employées uniquement à mouvoir le corps B, de même que toutes les parties du ressort comprises entre C & A, sont aussi uniquement employées à mouvoir le corps A: Il faut que la force vive du corps B, qui est l'effet total de la partie CB du ressort, soit à la force vive du corps A, qui est aussi l'effet total de l'autre partie CA du ressort ; comme la longueur CB est à la longueur CA, ou (§ 3.) comme la vîtesse du corps B est à la vîtesse du corps A ; ainsi quoique les deux quantitez de mouvement de ces deux corps soient égales, (§ 5.) il ne s'ensuit nullement que les quantitez de leurs

forces vives ſont auſſi égales, elles ſont au contraire entr'elles, comme les produits de maſſes par les quarrez de leurs vîteſſes, ce que je prouve ainſi : Soit f la force vive du corps A, & F la force vive du corps B, on aura $f, F :: a, b ::$ (*Corrol. preced.*) $a \times aA . b \times bB :: aaA . bbB$, & partant en raiſon compoſée de A à B, & de aa à bb ; mais cette verité ſera démontrée plus au long dans la ſuite, où nous aurons occaſion d'examiner cette matiere à fond.

7. Supoſons à preſent que les deux corps parvenus en a & b, retournent avec leurs vîteſſes acquiſes vers le reſſort debandé, il eſt aiſé de voir (*Chap.* 2. §. 2.) qu'ils auront préciſement autant de force qu'il leur en faut pour bander le reſſort, & le remettre dans ſon premier état de compreſſion, pendant que le centre de gravité C demeurera immobile comme auparavant ; & que ſi le reſſort vient à ſe debander de nouveau, il repouſſera le corps A & B, de la même maniere qu'il l'a fait la premiere fois. D'où il paroît que le reſſort employe préciſement autant de tems à ſe débander qu'il lui en faut pour être rebandé par le choc des corps après leur retour. Car puiſque le centre C demeure immobile, il tient lieu d'un plan inébranlable, ou d'un point fixe, contre lequel s'apuyeroit d'un côté le reſſort CA, & de l'autre le reſſort CB, ainſi qu'il en doit arriver aux corps A & B, par raport à la vîteſſe avec laquelle ils choquent les reſſorts, comme on l'a montré dans l'article allegué.

8. Il s'enſuit encore que la vîteſſe relative ou reſpective avec laquelle les corps s'aprochent mutuellement, avant que d'atteindre le reſſort, eſt égale à la vîteſſe reſpective avec laquelle ils s'éloignent l'un de l'autre, après avoir quitté le reſſort.

9. Et puiſqu'il eſt arbitraire de donner tant ou ſi peu d'étenduë au reſſort AB qu'on le juge à propos, on peut la ſupoſer ſi petite, que les corps A & B ſoient cenſez ſe toucher au point C, lorſque par leurs concours ils auront bandé le reſſort. Et ſi il eſt indifferent de préferer une ſorte de reſſorts à toute autre, il n'eſt pas moins per-

mis de s'en passer tout-à-fait, & de substituer deux corps parfaitement élastiques, aux corps *A* & *B*, qu'on avoit dépoüillez de leur élasticité naturelle ; par là on concevra aisement que l'effet qui resultera du choc de ces deux corps, doit être le même qu'auparavant, puisque les ressorts propres de ces corps, qui, au tems du concours, se confondent en un ressort commun, supléent au défaut d'un ressort exterieur, d'où on concluera la verité du Theorême suivant.

THEOREME.

10. Si deux corps parfaitement élastiques d'une roideur finie ou infinie, se rencontrent directement en se mouvans l'un contre l'autre, avec des vîtesses reciproquement proportionnelles à leurs masses: Je dis 1°. qu'après le choc chacun d'eux se mouvra en sens contraire, avec sa premiere vîtesse, & par consequent aussi avec sa premiere quantité de mouvement. 2°. Que leur vîtesse respective sera égale avant & après le choc. 3°. Et qu'enfin leur centre commun de gravité, demeurera aussi immobile après le choc, qu'il l'étoit avant que ces corps se choquassent.

11. Les regles de la communication du mouvement, sont renfermez comme tout autant de Corrollaires, dans le Theorême que nous venons d'établir d'une maniere nouvelle. Je prouverai ce que j'avance, qu'on me permette auparavant de proposer l'hypotese suivante que personne ne conteste.

HYPOTESE II.

12. Si deux ou plusieurs corps qui se meuvent sur un plan, ou dans une espace quelconque, viennent à se rencontrer & à se heurter les uns contre les autres, de telle maniere qu'on voudra ; les mouvemens qui résulteront de leur choc, seront les mêmes entre eux, soit que le plan ou l'espace dans lequel sont ces corps, soit en repos ; soit qu'il se meuve lui-même d'un mouvement uniforme,

& ſuivant une même direction ; car la force du choc, ou de l'action des corps les uns ſur les autres, dépend uniquement de leurs vîteſſes reſpectives ; or il eſt viſible que les vîteſſes reſpectives des corps ne changent pas avant le choc, ſoit que le plan ou l'eſpace qui les contient ſoit ſans mouvement, ſoit qu'il ſe meuve uniformement, ſuivant une direction donnée ; les vîteſſes reſpectives ſeront donc encore les mêmes après le choc.

COROLLAIRE.

13. Il s'enſuit delà, que ſi ce plan ou cet eſpace étant en repos, de même que le commun centre de gravité des corps qui s'y meuvent, il ſurvient enſuite à ce plan ou à cet eſpace, un mouvement uniforme dans une direction donnée, le centre de gravité de ces corps ſe mouvra ſuivant la même direction, & avec la même vîteſſe que le plan.

CHAPITRE IV.

Recherche de la Regle generale de la détermination du Mouvement.

PROBLEME.

1. S*oient* A *&* B, *deux corps parfaitement roides qui ſe meuvent du même côté ſur une ligne droite ; que le corps* B *precede avec la vîteſſe* b ; *& que le corps* A *le ſuive avec une vîteſſe* a, *plus grande que celle de* B, *enſorte qu'il le ratrape en quelque endroit de la ligne donnée. On demande quelles ſeront les vîteſſes de ces deux corps après le choc ?*

2. Pour réſoudre ce Problême general ſous lequel ſont compris tous les cas particuliers, il n'y a qu'à ſupoſer que le mouvement de ces deux corps ſe fait ſur un plan, le-

quel

quel a lui-même un mouvement uniforme vers le côté opoſé, dont la vîteſſe eſt égale à celle qu'a le commun centre de gravité des corps *A* & *B*. De cette maniere, ce centre n'aura point de vîteſſe par raport aux objets qui ſont en repos hors de ce plan, & les corps *A* & *B*, ſeront par ce même raport dans le cas du Theorême general, (*Chap.* 3. §. 10.) je veux dire que leurs maſſes ſeront en raiſon réciproques de leurs vîteſſes. Chacun d'eux ſera donc repouſſé après le choc avec la même vîteſſe qu'il avoit avant le choc : Voici une maniere aiſée de réſoudre ce Problême par le calcul.

3. Les vîteſſes a & b, vers le même côté ſur le plan, multipliées par les maſſes *A* & *B*; & la ſomme des produits, diviſée par la ſomme des maſſes, donne par le principe de la Méchanique, la vîteſſe du centre commun de gravité ſur ce même plan. Cette vîteſſe ſera donc $= \frac{aA + bB}{A + B}$; ſupoſons à preſent que le plan ſe meuve en arriere avec cette vîteſſe : il eſt clair que par rapport aux objets en repos hors du plan, la vîteſſe du corps *A* ſera $= a \frac{-aA - bB}{A + B} = \frac{aB - bB}{A + B}$ en avant, & la vîteſſe du corps *B* ſera $= \frac{aA + bB}{A + B} - b = \frac{aA - bA}{A + B}$ en arriere, mais $\frac{aB - bB}{A + B} . \frac{aA - bA}{A + B} :: B . A$. D'où il paroît que les vîteſſes avec leſquelles les corps ſe rencontrent directement en allant l'un contre l'autre, ſont en raiſon reciproque de leurs maſſes. Ils ſe ſépareront donc après le choc par le Theorême (*Chap.* 3. §. 10.) chacun avec ſa premiere vîteſſe, ainſi le corps *A*, retournera en arriere avec la vîteſſe $\frac{aB - bB}{A + B}$, & le corps *B* ira en avant, avec la vîteſſe $\frac{aA - bA}{A + B}$. Remettons à preſent le plan dans ſon premier repos, ou ce qui revient à la même choſe, rendons à cha-

cun la commune vîtesse $\frac{aA+bB}{A+B}$ en avant, qu'on leur avoit ôtée par la suposition, en imprimant la même vîtesse en arriere au plan, & alors le corps *A* aura après le choc une vîtesse $\frac{aA+bB}{A+B}$ en avant, plus une vîtesse $\frac{aB-bB}{A+B}$ en arriere; mais dans le langage des Algebristes, une vîtesse positive en arriere, est une vîtesse negative en avant. Donc la vîtesse en avant du corps *A* après le choc, sera $\frac{aA+bB}{A+B}-\frac{aB+bB}{A+B}=\frac{aA-aB+2bB}{A+B}$ & la vîtesse en avant du corps *B*, sera $\frac{aA+bB}{A+B}+\frac{aA-bA}{A+B}$ $=\frac{2aA-bA+bB}{A+B}$. *C. Q. F. T.*

SCHOLIE.

4. On doit remarquer trois cas differens qui peuvent arriver au corps *A* après le choc, car $\frac{aA-aB+2bB}{A+B}$ est affirmatif, negatif, ou égal à zero, selon que $aA+2bB$ est ou $>$, ou $<$, ou $=$ à *B*. Dans le premier cas, le corps *A* continuëra son chemin: dans le second cas il reculera, & dans le troisiéme il s'arrêtera.

5. Cette regle est generale pour tous les corps qui vont du même sens avant de se choquer; mais il est aisé d'en tirer une autre qui serve pour tous les corps qui se meuvent en sens contraire, avant leur choc. On n'a pour cela qu'à suposer que *b*, où la vîtesse en avant du corps *B* est negative; car pour peu que l'on ait l'esprit algebrique, on conçoit aisement que se mouvoir negativement en avant, c'est se mouvoir positivement en arriere. Si l'on change donc dans la formule precedente, les signes qui sont devant la lettre *b*, il en resultera une expression pour les vîtesses qu'auront après leur choc les

corps *A* & *B* qui se rencontrent directement avec des vîtesses oposées a & b, on aura donc la vîtesse du corps *A* $= \frac{aA - aB - 2bB}{A + B}$, & la vîtesse du corps $B = \frac{2aA + bA - bB}{A + B}$, à les prendre toutes deux en avant, c'est-à-dire, selon la direction qu'avoit le corps *A* avant le choc ; mais si l'une ou l'autre de ces formules ou toutes les deux, sont négatives, c'est une marque que l'une d'elles ou toutes les deux, expriment une direction contraire à celle qu'avoit le corps *A* avant le choc.

COROLLAIRE I.

6. On a conclu du Theorême (*Chap.* 3. §. 10. *& du Corol.* §. 13.) que la vîtesse respective des deux corps *A* & *B*, demeure la même avant & après leur choc, soit qu'ils se meuvent en un même sens, soit qu'ils se meuvent en sens contraire, nos deux formules generales confirment cette verité ; car 1°. si avant le choc leur mouvement tend du même côté, leur vîtesse respective est $a - b$; mais aprés qu'ils se sont choquez, la vîtesse du corps *B*, comme la plus grande en avant, est $= \frac{2aA - bA + bB}{A + B}$, & la vîtesse du corps *A* comme la plus petite en avant, est $= \frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$, retranchant donc cette formule de la premiere, il restera aussi $\frac{aA + aB - bA - bB}{A + B} = a - b$.

2°. Si avant le choc les corps *A* & *B* ont des vîtesses opposées, on aura $a + b$ pour leur vîtesse respective ; or la difference de la formule $\frac{aA - aB - 2bB}{A + B}$ à la formule $\frac{2aA + bA - bB}{A + B}$, lesquelles expriment les vîtesses en avant des corps *A* & *B*, aprés leur choc donne aussi $\frac{aA + aB + bA + bB}{A + B} = a + b$.

COROLLAIRE II.

7. Le mouvement du centre commun de gravité des corps *A* & *B*, ne change par le choc, ni de direction, ni de vîtesse : On l'a fait voir en suposant un mouvement dans le plan sur lequel ces deux corps se meuvent, & c'est aussi ce que nos formules montrent clairement ; car dans le cas où *A* & *B* se meuvent tous deux en avant, nous avons démontré (§. 3.) que la vîtesse de leur commun centre de gravité est $= \frac{a\text{A} + b\text{B}}{\text{A} + \text{B}}$; or en multipliant les vîtesses après le choc par les masses, & en divisant la somme des produits par la somme des masses, il vient $\frac{a\text{AA} + a\text{AB} + b\text{AB} + b\text{BB}}{\text{AA} + 2\text{AB} + \text{BB}} = \frac{a\text{A} + b\text{B}}{\text{A} + \text{B}}$: & dans le cas où *A* & *B* se meuvent en sens contraire, leur commun centre de gravité, aura pour vîtesse $\frac{a\text{A} - b\text{B}}{\text{A} + \text{B}}$; mais les vîtesses aprés la reflexion lesquelles sont $\frac{a\text{A} - a\text{B} - 2b\text{B}}{\text{A} + \text{B}}$ & $\frac{2a\text{A} + b\text{A} - b\text{B}}{\text{A} + \text{B}}$; toutes deux en avant, étant multipliées par les masses, & ensuite la somme des produits, divisée par la somme des masses, on aura $\frac{a\text{AA} + a\text{AB} - b\text{AB} - b\text{BB}}{\text{AA} + 2\text{AB} + \text{BB}} = \frac{a\text{A} - b\text{B}}{\text{A} + \text{B}}$.

DEFINITION.

8. J'apelle *quantité de direction*, le produit de la vîtesse du commun centre de gravité, par la somme des masses.

THEOREME.

9. La quantité de direction demeure toujours la même, tant aprés qu'avant l'impulsion, cette quantité étant tou-

jours $\frac{aA \pm bB}{A + B} \times \overline{A + B} = aA \pm bB$, le ſigne ſuperieur eſt affirmatif, deſignant le mouvement des corps en même ſens; & le ſigne inferieur eſt negatif, deſignant le mouvement en ſens contraire. D'où il paroît que la quantité de mouvement ne ſe conſerve pas toujours, comme on ſe l'imagine communement. Et en effet cette quantité ne ſe conſerve qu'en deux cas, 1°. lorſque les corps ſe meuvent du même côté avant & aprés leur choc; 2°. lorſque la quantité de la direction eſt nulle, ou que le commun centre de gravité eſt ſans-mouvement, parce qu'alors les corps reflechiſſent chacun avec ſa premiere vîteſſe.

10. Notre methode nous ayant conduit immediatement à la regle generale, ce ſeroit perdre ſon tems que de l'appliquer à tous les cas particuliers, que les Auteurs ont été obligez de réſoudre pour y pouvoir parvenir, & d'autant plus que le moindre Géometre eſt en état de le faire : il n'y a qu'à ſubſtituer dans nos formules generales, les valeurs ſelon les conditions du cas qu'on s'eſt propoſé, je me contenterai d'en donner quelques exemples.

11. Les deux corps *A* & *B* étant ſupoſez égaux, la vîteſſe du premier $= a$, & celle du ſecond $= b$; on demande ce qui doit arriver aprés l'impulſion, ſubſtituez par tout *A* à *B*, & vous verrez que la premiere formule $\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$, devient $= \frac{aA - aA + 2bA}{A + A} = \frac{2bA}{2A} = b$, & $\frac{2aA - bA + bB}{A + B} = \frac{2aA - bA + bA}{A + A} = \frac{2aA}{2A} = a$: On trouvera de même que dans la ſeconde formule il vient $\frac{aA - aB - 2bB}{A + B} = \frac{aA - aA - 2bA}{A + A} = \frac{-2bA}{2A} = -b$; & $\frac{2aA + bA - bB}{A + B} = \frac{2aA + bA - bA}{A + A} = \frac{2aA}{2A} = a$; en ſorte qu'il ſe fera toujours un échange de vîteſſe, ſoit que les corps

ſe meuvent en un même ſens, ou en ſens contraire, je veux dire qu'aprés la percuſſion le corps *A* prendra la vîteſſe du corps *B*, & le corps *B* celle du corps *A*, conformement aux regles que les Auteurs en ont donnez.

12. Les deux corps *A* & *B* ayant entre eux une raiſon quelconque ; & *B* étant ſupoſé en repos, on demande combien de vîteſſe chacun de ces deux corps aura aprés l'impulſion ? On trouve en prenant dans les formules $b=o$, que la vîteſſe du corps *A* ſera $=\frac{a\mathrm{A}-a\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$, & celle du corps $B=\frac{2a\mathrm{A}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$.

13. Si ſupoſant *B* en repos, & *A* en mouvement avec une vîteſſe donnée c, on ſupoſe en ſuite *A* en repos, & *B* en mouvement, avec une vîteſſe égale ; & qu'on ſouhaite de connoître la raiſon de la vîteſſe communiquée à *B* dans la premiere ſupoſition, à la vîteſſe communiquée à *A*, dans la ſeconde ſupoſition ; on déterminera comme dans l'article precedent, la vîteſſe de $B=\frac{2c\mathrm{A}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$, & celle de $A=\frac{2c\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$; mais il eſt clair que $\frac{2c\mathrm{A}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}.\frac{2c\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}} :: A.B$; donc ces vîteſſes ſont en raiſon des maſſes, ce que M. Huguens a auſſi démontré dans ſon Traité, *De motu corporum ex percuſſione prop.* 10.

14. On remarquera ici en paſſant que quelque grand que ſoit le corps en mouvement, & quelque petit que ſoit le corps en repos, la vîteſſe que celui-ci acquerrera par le choc, ſera toujours moindre que le double de la vîteſſe avec laquelle il eſt frapé par le grand. Car il eſt viſible que $\frac{2c\mathrm{A}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}} < 2c$. Cependant ſi *A* étoit infiniment, ou incomparablement plus grand que *B*, alors $\frac{2c\mathrm{A}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$ paſſeroit pour égal à $\frac{2c\mathrm{A}}{\mathrm{A}+o}=\frac{2c\mathrm{A}}{\mathrm{A}}=2c$; c'eſt-à-dire, que la vîteſſe que recevroit le corps *B* ſeroit actuellement double de celle que le corps *A* avoit avant le choc ; ainſi $2c$ eſt

le terme dont on aproche de plus en plus en augmentant à l'infini le corps *A*, ou en diminuant à l'infini le corps *B*.

15. Toutes les autres propositions que M. Huguens a démontrées à sa maniere dans le Traité dont nous venons de parler, se verifient aisément par nos formules generales, j'en excepte une faute où il est tombé à la page derniere, lorsqu'il dit : *Si corpora centum ex ordine dentur in proportione dupla, incipiat que motus à maximo, invenitur subducto calculo ad preceptum regulæ propositione nona traditæ, sed in compendium redactæ celeritas minimi ad celeritatem qua movebatur maximum proxime ea quæ* 14760000000, *ad*, 1. Car je trouve par le moyen des logarithmes qui est aparemment le *Compendium* dont a parlé M. Huguens, qu'il falloit dire *proxime ea quæ* 2338500000000, *ad* 1. De sorte que la veritable vîtesse de ce corps est plus de 150 fois plus grande que celle que cet Auteur lui assigne.

16. Le cas où deux corps se rencontrent obliquement n'exige point de regle particuliere, il suffit pour cela d'admettre la composition de mouvement, que personne ne fait difficulté de recevoir à present, si l'on souhaite donc de sçavoir ce qui resulte du choc de deux corps qui concourent selon deux directions differentes, ou qui se frapent non centralement, on n'a qu'à décomposer le mouvement de chacun de ces corps en deux autres mouvemens, dont l'un ait pour direction la tangente commune, tirée par le point où ces corps considerez comme spheriques, se rencontrent, & l'autre une direction perpendiculaire à la premiere, les perpendiculaires representeront un concours direct, compris dans la regle generale, pendant que les paralleles continuëront après le choc sans aucun changement. On formera donc autour de ces directions laterales, deux nouveaux parallelogrammes ; leurs diagonales donneront les déterminations, & les vîtesses des corps après le choc.

CHAPITRE V.

De la force vive des corps qui ſont en mouvement.

1. JE me propoſe d'examiner dans ce Chapitre ce que la matiere du mouvement a de plus important, je parle de cette force des corps que M. de Leibnits apelloit *vive*, pour la diſtinguer d'une autre force à qui il avoit donné le nom de *force morte*, j'ai déja eu occaſion de définir au commencement de cet ouvrage (*Chap. III.*) ce que j'entends par force vive, & par force morte, & de déterminer en paſſant la veritable meſure de la force vive; mon but eſt à preſent d'expliquer à fonds la nature & les proprietez de cette force, & je l'entreprends d'autant plus volontiers qu'un grand nombre de Philoſophes trés-éclairez d'ailleurs, confondent encore ces deux forces, & n'ont pû être tirez de leur erreur.

2. Nous avons vû au Chapitre III. que la force morte conſiſtoit dans un ſimple effort, & cet effort eſt tel qu'il peut ſubſiſter, quoiqu'un obſtacle étranger l'empêche à tout moment de produire un mouvement local dans les corps, ſur leſquels cet effort ſe déploïe. Telle eſt par exemple la force de la peſanteur. Un corps peſant ſoutenu par une table horizontale, fait un effort continuel pour deſcendre, & il deſcendroit effectivement ſi la table ne lui opoſoit un obſtacle qui le retient, ainſi la peſanteur produit une force morte dans les corps dont l'effet n'eſt que momentané. Chaque inſtant la peſanteur imprime aux corps ſur qui elle agit, un degré de vîteſſe infiniment petit, lequel eſt auſſi-tôt abſorbé par la réſiſtance de l'obſtacle. Ces petits degrez de vîteſſe périſſent en naiſſant, & renaiſſent en périſſant, & c'eſt dans cette réciprocation conſtante, dans ce retour de production & de deſtruction, en quoi conſiſte l'effort de la peſanteur quand elle eſt retenuë par un obſtacle invincible à qui nous avons donné

le

le nom de force morte. Quant à l'obſtacle, il reçoit de cette preſſion, lorſqu'il réſiſte à l'effort de la peſanteur une force toûjours égale, & réciproque à celle avec laquelle cette même peſanteur agit ſur lui; la force morte a cela de particulier, qu'elle ne produit aucun effet qui dure plus long-tems qu'elle : Dès que cette force ceſſe, tout ceſſe avec elle; & ſon effet ne ſurvit jamais à ſon action. Si le corps peſant ſoutenu par la table perdoit tout-à-coup ſa peſanteur, la table ceſſeroit dans le même inſtant d'être preſſée.

3. Il n'en eſt pas de même de la force vive, ſa nature eſt toute differente, elle ne peut ni naître, ni périr en un inſtant comme la force morte, il faut plus ou moins de tems pour produire une force vive dans un corps qui n'en avoit pas, il faut auſſi du tems pour la détruire dans un corps qui en a; la force vive ſe produit ſucceſſivement dans un corps, lorſque ce corps étant en repos, une preſſion quelconque appliquée à ce corps, lui imprime peu-à-peu, & par degrez, un mouvement local. On ſupoſe qu'aucun obſtacle ne l'empêche de ſe mouvoir. Ce mouvement s'acquiert par des degrez infiniment petits, & monte à une vîteſſe finie & déterminée, qui demeure uniforme dès que la cauſe qui a mis ce corps en mouvement ceſſe d'agir ſur lui; ainſi la force vive produite dans un corps en un tems fini par une preſſion, qu'aucun obſtacle n'a retenuë, eſt quelque choſe de réel, elle eſt équivalente à cette partie de la cauſe qui s'eſt conſumée en la produiſant, puiſque toute cauſe efficiente doit être égale à ſon effet pleinement executé.

4. Le corps qui reçoit cette force n'étant retenu par aucun obſtacle, n'opoſe de réſiſtance à cette force que celle qui dépend de ſon inertie, toûjours proportionelle à ſa maſſe; deſorte que les petits degrez de mouvement que la preſſion imprime ſucceſſivement à ce corps s'y conſervent, & s'accumulent juſqu'à produire enfin un mouvement local. On pouroit comparer la force vive effectuée par une preſſion continuelle qu'aucun obſtacle n'empê-

che à une ſurface décrite par le mouvement d'une ligne, ou à un ſolide décrit par le mouvement d'une ſurface; il n'y a donc pas plus de comparaiſon à faire entre la ſimple preſſion ou la force morte & la force vive, qu'entre une ligne & une ſurface; qu'entre une ſurface & un ſolide, ce ſont des quantitez héterogénes qui n'admettent point de comparaiſon.

5. Quelque ſoit la cauſe d'une preſſion, qui par la durée de ſon action produit enfin du mouvement, ſi elle eſt d'une quantité déterminée telle qu'un reſſort bandé, par exemple, qui par ſa détente employe ſa force à produire une vîteſſe actuelle, dans un corps qui n'en avoit point auparavant, je dis, & la choſe eſt évidente, qu'à meſure que ce corps reçoit de nouveaux degrez de force, la cauſe qui les produit en doit perdre tout autant, juſqu'à ce que toute la force du reſſort ſoit épuiſée & transferée au corps dans lequel elle eſt comme ramaſſée par l'accumulation de tous les petits degrez qui y ont été produits ſucceſſivement C'eſt cette force, en tant qu'elle eſt dans le corps mis en mouvement par l'épuiſement de la preſſion du reſſort, qu'on doit apeller proprement *la force vive*, en vertu de laquelle le corps ſe tranſporte d'un lieu à un autre, avec une certaine vîteſſe, plus ou moins grande ſelon l'énergie du reſſort.

6. On voit encore ici la grande difference qu'il y a entre la force vive, & la force morte. La ſeule preſſion ou la force morte que reçoit un obſtacle immobile, par l'effort d'un reſſort qui cherche à ſe débander, ne diminuë en rien la force du reſſort, bien loin de l'épuiſer. L'air, par exemple, condenſé dans un recipient, fait un effort continuel pour ſe dilater, ſans jamais rien perdre de ſa force, parce que les parois du recipient ne pouvant ceder, ne font que ſoutenir ſa preſſion, ſans affoiblir l'élaſticité de l'air, mais la force du reſſort ſe conſume, en donnant du mouvement à un corps, c'eſt-à-dire, en produiſant une force vive, la production du moindre degré de cette force demande la perte ou la deſtruction d'un degré égal

de la force du reſſort : l'un eſt la cauſe, & l'autre l'effet immediat qui en reſulte ; or la cauſe ne ſçauroit perir en tout ou en partie, qu'elle ne ſe retrouve dans l'effet à la production duquel elle a été employée.

7. Je conclus de là que la force vive d'un corps qui a été poduite par le débandement de quelque reſſort, eſt capable de le rebander préciſement au même degré de force que ce reſſort avoit, & ſi on ſupoſe que cette force vive eſt employée toute entiere à bander deux, trois, ou pluſieurs reſſorts égaux entre eux, mais plus foibles que le precedent ; je dis que ce premier reſſort peut produire un effet deux fois, trois fois, ou pluſieurs fois plus grand qu'un de ces reſſorts foibles. L'égalité qui regne entre l'effet & ſa cauſe efficiente, prouve ce que nous venons d'avancer.

8. C'eſt dans cette égalité que conſiſte la conſervation des forces des corps qui ſont en mouvement, puiſqu'il eſt viſible que la plus petite partie d'une cauſe poſitive, ne ſçauroit ſe perdre qu'elle ne reproduiſe ailleurs un effet par lequel cette perte ſoit reparée.

9. Comme on a été long-tems dans la perſuaſion que la quantité de mouvement, où le produit de la maſſe d'un corps par ſa vîteſſe, étoit la meſure de la force de ce corps, on a crû fauſſement qu'il étoit neceſſaire qu'il y eut toujours un égal quantité de mouvement dans l'Univers.

10. L'origine de cette erreur, ainſi que je l'ai déja inſinué, vient de ce qu'on a confondu la nature des forces mortes, avec celle des forces vives ; car voyant que le principe fondamentale de la Statique, exige que dans l'équilibre des puiſſances, les momens ſoient en raiſon compoſée, des forces abſolues, & de leurs vîteſſes virtuelles. On a étendu mal à propos ce principe plus loin qu'il ne falloit, en l'appliquant auſſi aux forces des corps qui ont des vîteſſes actuelles.

11. Ce n'eſt que depuis trente ou quarante ans, que quelques perſonnes ſe ſont aperçûës que ces deux forces

ſont d'une nature tout-à-fait differente, n'y ayant pas plus de raport entre elles, qu'entre une ligne & une ſurface, ou qu'entre une ſurface & un ſolide. M. de Leibnitz eſt le premier qui a remarqué que cette force n'étoit point égale au produit de la maſſe par la vîteſſe, mais que ſa meſure étoit le produit de la maſſe par le quarré de la vîteſſe.

12. La nouveauté de ce ſentiment lui attira des adverſaires. M. de Leibnitz le prouva par le parfait accord qu'il y avoit entre ſon ſentiment & la regle de Galilée, pour l'acceleration de la chûte des corps peſans ; regle generalement aprouvée, & au moyen de laquelle M. de Leibnitz fit voir qu'un poids avec deux degrez de vîteſſe, peut monter quatre fois plus haut, qu'avec un degré de vîteſſe : neuf fois plus haut ſi il a trois degrez de vîteſſe : ſeize fois plus haut ſi il en a quatre : enfin il montra que les hauteurs auſquelles les corps peſans ſont capables de s'élever, ſont toujours proportionnelles aux quarrez de leurs vîteſſes. Il prétendoit que la hauteur à laquelle un poids peut monter, peut être priſe pour la meſure de la force de ce poids ; il concluoit que la force vive d'un corps, étoit proportionnelle à ſa maſſe multipliée par le quarré de ſa vîteſſe.

13. Mais les adverſaires de M. de Leibnitz, ne lui paſſerent pas ſon hypotheſe touchant les hauteurs qu'il prétendoit être la meſure des forces. Ils formerent des inſtances, & ſoûtinrent entre autres choſes, qu'on ne devoit point negliger le tems que le poids employe à parcourir la hauteur à laquelle il monte. Qu'un poids, par exemple, qui avec une vîteſſe double s'éleve à une hauteur quadruple, ne doit être cenſé avoir qu'une force double, parce qu'il employe un tems double à monter ; ces Meſſieurs crurent être fondez à ſoûtenir que dans l'eſtimation des forces, il falloit avoir égard non ſeulement aux hauteurs, mais auſſi aux tems, perſuadez que la force des corps étoit en raiſon compoſée, de la raiſon directe de la hauteur, & de la raiſon inverſe du tems :

ils ne reflechiſſoient pas que la conſideration du tems n'étoit d'aucune conſequence dans le ſujet de leur diſpute ; puiſqu'il étoit facile de faire monter le corps peſant à differentes hauteurs en des tems égaux ; on n'a pour cela qu'à ſe ſervir d'une cycloïde renverſée, dont on ſçait que tous les arcs, à commencer depuis le point le plus bas ſont *Iſochrones*, ou parcourus en des tems égaux.

14. M. de Leibnitz répondit à ces objections, mais il ne gagna rien ſur des eſprits prévenus en faveur du ſentiment commun & erroné, que la force des corps en mouvement étoit égale à la quantité de leur mouvement, c'eſt-à-dire, en raiſon des produits de leurs maſſes, par leurs ſimples vîteſſes. Ce fut en vain qu'il fit voir à ſes adverſaires, que ſi l'opinion qu'ils ſoutenoient avoit lieu, on pouvoit executer un mouvement perpetuel purement mechanique, ce qui, ſelon M. de Leibnitz, étoit abſolument impoſſible ; ces adverſaires aimerent mieux admettre la poſſibilité d'un mouvement perpetuel artificiel, que d'abandonner une opinion reçuë depuis long-tems, pour en embraſſer une nouvelle qu'ils regardoient comme une eſpece d'hereſie en matiere de Phyſique.

15. Peu de tems avant la mort de M. de Leibnïtz, ſon ſentiment fut entierement rejetté en Angleterre, & traité même avec mépris. On s'atacha dans un Recueil de Lettres de M. C * * * & de M. de Leibnitz, imprimées deux fois de ſuite avec des notes : On s'atacha, dis-je, à tourner en ridicule le ſentiment de ce grand homme ſur l'eſtime de la force vive, non ſans une ſurpriſe extrême de la part de ceux qui reconnoiſſent la verité de ce ſentiment.

16. Il eſt vrai que le nombre en eſt encore fort petit dans le reſte de l'Europe : j'ai peut-être été le premier depuis environ vingt-huit ans, ce n'eſt pas que les preuves de M. de Leibnitz m'ayent paruës aſſez fortes, pour me déterminer à embraſſer ſon ſentiment ; car j'avouë

qu'étant indirectes, & nullement tirées du fond de la matiere dont il s'agiſſoit, elles ne purent me convaincre, mais elles me donnerent occaſion d'y penſer ; & ce n'eſt qu'après une longue & ſerieuſe meditation que je trouvai enfin le moyen de me convaincre moi-même, par des démonſtrations directes, & au-deſſus de toute exception. M. de Leibnitz à qui je le communiquai m'en ſçut bon gré, auſſi ſervirent-elles à lui attirer des ſectateurs, & à ramener à ſon ſentiment quelques-uns de ceux qui auparavant ſe trouvoient engagez dans une longue diſpute avec lui, n'ayant pas été pleinement convaincus par ſes raiſonnemens.

17. A mon égard, j'embraſſe avec plaiſir l'occaſion de faire part de mes découvertes *aux illuſtres Membres de l'Academie Royale des Sciences*, & me fais un honneur de ſoûmettre mes lumieres à leur jugement : ce ſont des Juges également éclairez & penetrans ; incapables de partialitez & de prévention, & dont l'équité ſeule regle les déciſions ; je me flatte qu'ils voudront bien prendre la peine d'examiner avec ſoin, ce que j'ai l'honneur de leur propoſer ſur la veritable maniere d'eſtimer la quantité de la force des corps en mouvement. Cette queſtion eſt épineuſe, & elle demande une attention d'autant plus ſuivie, que des Philoſophes mêmes, & des Mathematiciens d'un grand nom, s'y ſont mépris. Si ce diſcours a le bonheur de plaire à mes Juges, j'y ajoûterai pluſieurs remarques utiles que la brieveté du tems ne m'a pas permis de communiquer ici ; la matiere eſt abondante & riche, elle meriteroit qu'on en fit un Traité complet. Voici en attendant ce que ce ſujet renferme de plus eſſentiel.

CHAPITRE VI.

En quoi consiste la mesure des forces vives. Maniere de les comparer ensemble.

1. JE continuerai à me servir de ressorts, comme du moyen le plus commode pour expliquer mes pensées sur la production & la force du mouvement. Suposons, pour fixer l'imagination, un ressort d'une figure déterminée *ACB*, dont les deux branches égales *CA* & *CB*, forment un angle *ACB*; il est clair que lorsque ce ressort est bandé, les branches *CA* & *CB* font un effort continuel pour s'écarter l'une de l'autre, ou pour élargir l'ouverture *ACB*; en sorte que si l'une des forces qui retiennent ce ressort dans un état de contrainte, ou qui compriment la jambe *CA* vers *B*, & la jambe *CB* vers *A*, venoit à manquer subitement, les jambes de ce ressort s'ouvriroient d'elles-mêmes sur le champ, jusqu'à ce que ce ressort eut entierement perdu la force de se dilater davantage. Fixons cet état à 90 degrez, le ressort *ACB* sera donc entierement dilaté, lorsque d'un angle de 30 degrez, que formoient ces jambes dans un état de contrainte, il sera parvenu à un angle droit *acb*. Je ne sçai si je dois avertir que faisant abstraction de la matiere du ressort, de sa pesanteur, & de tout autre qualité, je ne considere ici que la figure déterminée de ce ressort, & sa parfaite élasticité en vertu de laquelle il se dilateroit avec une promptitude infinie, si aucun obstacle étranger ne s'oposoit à sa dilatation. FIG. 3.

2. Imaginons deux de ces ressorts égaux en tout, & également bandez, par exemple, à un angle de 30 degrez : que le ressort *DEF*, s'apuie en *D* contre un plan immobile *mn*, & du côté *F* contre une résistance active *P*, qui aye précisement autant de force qu'il lui en faut pour empêcher que ce ressort ne se dilate, mais que le FIG. 4.

ressort *LMN* soit arrêté de part & d'autre, par les résistances actives *R* & *S*, lesquelles ayent aussi les forces necessaires pour empêcher que ce ressort ne se dilate. Je supose de plus, & la chose me paroît assez évidente pour n'avoir pas besoin de démonstration, que la résistance *P* est autant pressée par l'effort du ressort *DEF*, que chacune des deux autres résistances *R* & *S*, l'est par l'effort du ressort *LMN*; car la résistance passive du plan immobile *mn*, refluë sur *P* avec autant de force, que la résistance active *R* refluë sur celle qui lui est oposée en *S*, & reciproquement. C'est une consequence necessaire de l'égalité parfaite qu'il y a toujours entre l'action & la réaction.

FIG. 5. 3. De là il s'ensuit que s'il y a une suite de plusieurs ressorts égaux, & également bandez *ACB*, *BED*, *DGF*, *FIH*, rangez en ordre l'un à côté de l'autre, dont le premier *ACB* soit appuyé contre un plan immobile *mn*; le second *BED*, contre le premier *ACB*; le troisiéme contre le second, & ainsi jusqu'au dernier : la puissance *L* qui leur résiste, & les empêche de se débander, est égale à la puissance *P* qui resiste à un seul de ces ressorts, aussi bandé que chacun des autres, & appuyé en *A* contre le plan inébranlable *mn*; car par l'article precedent le premier ressort *ACB*, ne presse le second ressort *BED*, & n'en est reciproquement pressé, que de la même maniere qu'il le seroit, si ôtant le premier ressort on substituoit à sa place un plan immobile, contre lequel le second ressort appuyeroit en *B*. Par la même raison le second ressort consideré ici comme le premier, pressera le troisiéme ressort *DGF*, & en sera reciproquement pressé, comme si celui-ci étoit effectivement à la place du second ressort, & ainsi de tous les autres, jusqu'au dernier ressort *FIH*. Il est donc manifeste que le dernier ressort *FIH*, agit contre la résistance *L*, de la même maniere que s'il étoit immediatement apuyé contre le point fixe *F*, ou ce qui revient à la même chose, la puissance *L* qui résiste à un nombre de ressorts égaux, & également tendus

dus, rangez en ligne droite, dont le premier est arrêté par un plan immobile *mn*, ou retenu contre un point fixe *A*, est égale à la puissance *P*, qui resiste à un seul de ces ressorts tendu de même, & apuyé contre un point fixe *A*. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

4. Si il y a plusieurs rangs composez d'un nombre different de ressorts égaux & également bandez, & que chacun de ces rangs soit apuyé d'une part contre un point fixe, & que de l'autre il soit retenu par une puissance qui l'empêche de se débander; il est clair que ces puissances seront égales entre elles, chacune d'elles étant égale à la puissance qui peut retenir bandé un seul de ces ressorts.

5. Concevons à present deux rangs de ressorts égaux & également bandez, composez l'un de douze ressorts, & l'autre de trois; dont une des extremitez soit apuyée contre les points fixes *A* & *B*, & l'autre arrêté par les boules *L* & *P*, que des puissances *R* & *S* empêchent de se mouvoir; il est visible par le Corollaire précedent, que les deux boules *L* & *P*, seront également pressées par l'effort que font les ressorts pour se débander; & que par consequent les forces mortes de ces boules, qui ne sont autre chose que ces pressions mêmes, seront aussi égales. FIG. 6.

6. Voyons maintenant ce que ces pressions mises en œuvres, peuvent produire de force vive; pour cet effet imaginons-nous que les puissances *R* & *S*, se retirent subitement. Il est constant que les boules *L* & *P* n'oposant à l'effort des ressorts que la résistance qui provient de leurs inerties; ces boules seront obligées de céder, & que dans le mouvement acceleré, que leur imprimeront les ressorts, la boule *L* acquerera plus de vîtesse par les efforts continuez de douze ressorts, que la boule *P* égale à la boule *L* n'en peut acquerir par les efforts continuez de trois ressorts; car suposé que le point *E* fut fixement

arrêté, les trois derniers reſſorts 10, 11, 12, produiront ſeuls autant d'acceleration dans la boule *L*, que les trois reſſorts 1, 2, 3, dans la boule *P*; mais il eſt viſible que le point *E* n'étant pas fixe, les trois derniers reſſorts 10, 11, 12, ne ſçauroient ſe relâcher en ſuivant la boule *L*, que les neuf premiers ne ſe relâchent auſſi, & ne pouſſent, chemin faiſant, le point *E*, d'où il s'enſuit que les trois reſſorts qui les précedent causeront à la boule *L*, une acceleration plus grande que les trois reſſorts 1, 2, 3, ne la peuvent cauſer à la boule *P*.

7. Il n'eſt donc pas moins clair que la boule *L* aura acquis une plus grande vîteſſe que la boule *P*, ſoit que tous les reſſorts qui compoſent ces deux rangs ſe ſoient entierement débandez, ſoit que retenus par un obſtacle qui les arrête, ils ne ſe ſoient débandez qu'en partie, & d'une maniere uniforme, en s'ouvrant, par exemple, de telle ſorte, que d'un angle de 30 degrez que ces reſſorts formoient auparavant, ils parviennent à en former un de 60 degrez.

8. Ceci étant une fois admis, peut-on douter que de deux corps égaux, celui qui a le plus de vîteſſe, n'ait auſſi le plus de force? Cependant nous venons de voir que les preſſions ou forces mortes, que les boules *L* & *P* en repos, reçoivent des reſſorts, avant que ces reſſorts ſe dilatent, ſont égales; & que ces mêmes boules miſes en mouvement par les mêmes reſſorts, ont des vîteſſes inégales, d'où l'on pourroit déja inferer qu'il faut que ces forces ſoient d'une nature differente, & que par conſequent on a eu tort de les confondre, & de ſoûtenir que puiſque le moment où l'énergie des forces mortes, eſt en raiſon des produits des maſſes par leurs vîteſſes virtuelles, les forces vives doivent auſſi être proportionnelles aux produits des maſſes par leurs vîteſſes actuelles.

9. Il ne ſuffit pas d'avoir prouvé que la force vive de la boule *L*, doit être plus grande que celle de la boule *P*; un peu d'attention fera voir que la boule *L* a préciſement quatre fois autant de force vive que la boule *P*, en quel-

que raiſon que ſoient leurs maſſes. Car dès que les puiſſances réſiſtantes *R* & *S* ſont ôtées, les preſſions des reſſorts qui étoient contrebalancées par ces puiſſances, ſe tournent ſur le champ vers les boules *L* & *P*, & celles-ci commencent à ceder ainſi, chaque reſſort ſe débandant, chacun faiſant uſage de ſa force, & rien ne périſſant inutilement ; il faut de toute neceſſité que la force de chacun de ces reſſorts ſoit employée à produire ſon effet : & à quel effet ſeroit-elle employée, ſinon à mouvoir les boules ? Le mouvement de chaque boule ſera donc tel que ſa force vive ſera préciſement égale à l'effet complet & total de ce que tous les reſſorts pris enſemble y auront contribué : or chacun de ces reſſorts ſe dilatant également, par exemple, de 30 à 60 degrez, chacun d'eux contribuë également à produire cette force : donc les forces vives produites dans les boules *L* & *P*, ſeront comme le nombre des reſſorts qui ont contribué à leur production ; ſçavoir comme, 12 à 3, ou comme 4 à 1. *C. Q. F. D.*

CHAPITRE VII.

Où l'on démontre que les forces vives des corps, ſont en raiſon composée de leurs maſſes, & des quarrez de leurs vîteſſes.

1 QUant aux vîteſſes acquiſes des boules, que je ſupoſe preſentement égales en maſſes, je dis que ces vîteſſes ne ſont point entre elles comme le nombre des reſſorts qui les ont produites ; mais comme les racines quarrées de ces nombres, ſçavoir, dans cet exemple, comme $\sqrt{12}$, à $\sqrt{3}$; comme $\sqrt{4}$, à $\sqrt{1}$, ou enfin comme 2 à 1. En voici la démonſtration.

Je ſupoſe deux lignes droites quelconques, données *AC*, *BD*, que je prends pour deux rangs de petits reſ- FIG. 7.

ſorts égaux & également bandez : je ſupoſe de plus que deux boules égales commencent à ſe mouvoir des points C & D, vers F & I, lorſque les reſſorts commencent à ſe dilater, ſoient CML, DNK, deux lignes courbes dont les apliquées GM, HN, expriment les vîteſſes acquiſes aux points G & H. Je nomme $BD = a$, l'abſciſſe $DH = x$, ſa differentielle HP, ou $NT = dx$, l'apliquée $HN = v$, ſa differetielle $TO = dv$; je prends enſuite les abſciſſes CG, CE, de la courbe CLM telles, quelles ſoient aux abſciſſes de la courbe DNK, comme AC eſt à BD, ou ce qui eſt la même choſe, je fais BD, AC : : DH, CG : : DP, CE. Supoſant donc $AC = na$, on aura $CG = nx$, $GE = ndx$; ſoit enfin l'apliquée $GM = z$. Tout ceci ſupoſé, je raiſonne ainſi.

2. Les boules étant parvenuës aux points H & G, chaque reſſort, tant de ceux qui étoient reſſerrez dans l'intervalle AC, que de ceux qui l'étoient dans l'intervalle BD, ſera dilaté également, parce que AC. CG : : BD. DH, chacun de ces reſſorts aura donc perdu de part & d'autre, une partie égale de ſon élaſticité, & il leur en reſtera par conſequent à chacun également. Donc (*Ch. 6. §. 3 & 4.*) les preſſions & les forces mortes que les boules en reçoivent, ſont auſſi égales entre elles : je nomme cette preſſion p. Or l'accroiſſement élementaire de la vîteſſe en H, je veux dire la differentielle TO, ou dv, eſt par la loi connuë de l'acceleration, en raiſon compoſée de la force motrice, ou de la preſſion p, & du petit tems que le mobile met à parcourir la differentielle HP, ou dx, lequel tems s'exprime par $\frac{HP}{HN} = \frac{dx}{v}$, on aura donc $dv = \frac{pdx}{v}$, & partant $vdv = pdx$, ce qui donne par l'integration $\frac{1}{2}vv = \int pdx$. Par la même raiſon on a, $dz = \frac{p \times GE}{GM} = \frac{p \times ndx}{z}$, par conſequent $zdz = npdx$; & en integrant $\frac{1}{2}zz = n\int pdx$, d'où il ſuit que vv. zz : : $\int pdx$.

$n\int pdx :: 1.n :: a.na :: BD.AC$; or BD, est à AC, comme la force vive acquise en H, est à la force vive acquise en G. (*Chap. 6. §. 9.*) Donc ces deux forces sont entre elles comme vv, à zz; ainsi les forces vives des corps égaux en masses, sont comme les quarrez de leurs vîtesses, & les vîtesses elles-mêmes sont en raison sous-doublée, ou comme les racines quarrées des forces vives. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

3. Si les corps sont inégaux en masses, il est clair que leurs forces vives sont comme les produits des masses par les quarrez des vîtesses.

COROLLAIRE II.

4. Si on supose les droites AC, BD, infiniment longues, par raport aux espaces parcourus CG, DH; la pression p sera égale & uniforme dans toute l'étenduë du chemin que le mobile a à parcourir : en effet, les ressorts AC & BD, s'étant dilatez jusqu'en G & en H, & les dilatations CG, DH, étant infiniment peu considerables, par raport à l'étenduë AC & BD, que ces ressorts occupoient auparavant; il est évident que chaque ressort ne perd par sa dilatation, qu'une partie infiniment petite de son effort; & que par consequent les pressions p, que les boules reçoivent par ces efforts, seront égales, & uniformes dans tous les points des lignes CG & DH.

COROLLAIRE III.

5. Dans cette suposition où p devient constante $\int pdx$, sera px, & partant $\frac{1}{2}vv = px$, & $\frac{1}{2}zz = npx$; d'où il paroît que les courbes des vîtesses CML, DNK, seront des paraboles d'un même parametre, exprimé par $2p$; car le parametre en C, est $\frac{MG^2}{CG} = \frac{2npx}{nx} = 2p$, & le parametre en D est $\frac{NH^2}{DH} = \frac{2px}{x} = 2p$.

COROLLAIRE IV.

6. Ainsi l'acceleration des boules, suit dans ce cas la même loi que celle des corps pesans qui tombent, puisque les quarrez des vîtesses acquises sont aussi comme les hauteurs parcouruës par les corps pesans en tombant; & comme la pesanteur est constante, de quelque hauteur qu'un corps tombe, de même la pression des boules est uniforme dans toute la longueur de leur chemin.

COROLLAIRE V.

7. On peut donc considerer la chûte & l'acceleration d'un poids, comme étant causée par l'effort d'une matiere élastique, qui étenduë verticalement à l'infini, presseroit les corps de haut en bas, & les feroit descendre selon la loy connuë de l'acceleration. Il sera donc aussi permis d'apliquer aux forces vives de deux poids égaux, qui tombent de deux hauteurs differentes, ce qui a été prouvé des forces vives à l'égard de deux boules, sçavoir quels sont en raison de AC à BD, ou en raison des espaces parcourus, puisque $AC.\ BD :: CG.\ DH$, ce qui fait voir que les hauteurs differentes qu'un même poids, ou que deux poids égaux parcourent en tombant, sont proportionnelles à leurs forces vives acquises.

8. Cette démonstration justifie la maniere dont M. de Leibnitz mesuroit les forces vives des corps par les hauteurs ausquelles ces corps peuvent monter en vertu de leurs vîtesses. On dira peut-être que la cause de la pesanteur ne consiste pas dans la pression, que les corps qu'on nomme pesans reçoivent de l'effort d'une matiere élastique étenduë à l'infini. Mais cette objection seroit inutile; je ne prétens pas expliquer ici la veritable cause de la pesanteur. Je supose un principe, & j'examine ensuite quel seroit l'effet de ma suposition, si elle avoit lieu dans la nature, & si je montre que la loi de l'acceleration selon cette hypothese, ne differe pas de celle que la nature observe

dans la chûte des corps graves ; je ne vois pas pourquoi il ne me seroit pas permis d'attribuer à celle-ci tout ce qui se déduit legitimement de l'autre. Les Physiciens décomposent souvent le mouvement uniforme, en deux mouvemens collateraux, pour rendre raison d'un phenomene ; quoique ce mouvement n'a pas été composé originairement de ces deux mouvemens collateraux ; & comme le même mouvement peut être décomposé en deux mouvemens collateraux d'une infinité de manieres differentes, puisqu'il peut y avoir une infinité de parallelogrammes autour d'une même diagonale ; ils choisissent entre toutes ces manieres, celle qui les accommode le plus, sans qu'on se soit avisé de leur reprocher. Tout le monde est en droit de faire des supositions, & d'en tirer des conclusions ; de même qu'on a jamais défendu aux Géometres de suposer ou de tirer dans les figures des lignes qui n'y sont pas, pourvû qu'elles servent à démontrer quelques Theorêmes, ou à résoudre quelques Problêmes ; il n'en est pas de même de notre sujet, quelque soit la veritable cause de la pesanteur ; il me suffit d'indiquer une maniere de produire par l'action des ressorts, une acceleration tout-à-fait semblable à celle que produit la pesanteur, & que je fasse voir comme je l'ai fait, que les espaces parcourus *CG* & *DH*, sont entre eux comme les forces acquises des corps égaux aux points *G* & *H*, pour en pouvoir conclure que les forces vives de deux poids égaux, sont comme les hauteurs d'où tombent ces poids, ou ausquelles ils peuvent monter, & par consequent comme les quarrez des vîtesses.

9. On m'objectera peut-être que pour envisager la descente de deux poids de deux hauteurs differentes, sur le pied de deux espaces differens *CG*, *DH*, parcourus par l'action des ressorts : je suis obligé de suposer deux rangs inégaux de ressorts *AC* & *BD*, quoique chacun de ces rangs soit d'une étenduë infinie, que cependant la cause de la pesanteur est la même pour toutes les hauteurs que les graves peuvent parcourir en tombant. A cela je

répons, que je considere simplement ici l'effet que l'action de deux rangs de ressorts *AC* & *BD* peut produire, comme étant entierement identique avec celui que fait la pesanteur ; sans prétendre par là que la cause de la pesanteur consiste effectivement, dans une action de ressorts, ou dans la pression d'une matiere élastique qui par la continuation de son effort fasse descendre les corps pesans.

CHAPITRE VIII.

Où l'on confirme la mesure des forces vives, établies dans le Chapitre précedent, par des experiences & de nouvelles démonstrations.

1. JE ne crois pas que personne puisse revoquer en doute, après tout ce que nous venons d'expliquer, la verité de la regle établie pour l'estime de la force vive des corps ; ainsi nous regarderons comme une chose démontrée, que cette force est proportionnelle à la masse, ou à la quantité de matiere multipliée par le quarré de la vîtesse, & non par la simple vîtesse.

2. Il s'est fait depuis peu d'années diverses experiences qui confirment merveilleusement cette regle. On a laissé tomber pour cet effet, de differentes hauteurs sur une matiere molle, telle que du suif, ou de la terre-glaise, dont la surface étoit unie & de niveau, plusieurs boules égales en grandeur, & inégales en poids ; après quoi on a observé avec toute l'exactitude necessaire, combien ces boules avoient penetré dans la matiere molle. Cette experience reïterée un grand nombre de fois, on a remarqué que les enfonçûres étoient toujours égales lorsque les boules tomboient de hauteurs reciproquement proportionnelles à leurs poids.

3. On a conclu de l'égalité de ces enfonçures, que les

les boules avoient des forces égales dans le moment qu'elles commençoient à s'enfoncer. Mais la vîtesse de chaque boule au moment de l'enfoncement, étant en raison sous-doublée de sa hauteur, ou sa hauteur en raison doublée de sa vîtesse : il s'ensuit que les forces vives de deux corps differens sont égales, lorsque leurs masses, où quantité de matiere ont une raison reciproque aux quarrez de leurs vîtesses, conformement à la loy generale, qui veut *que la force vive d'un corps soit toujours proportionnelle au produit de la masse par le quarré de sa vîtesse*. C'est ce que nous avons prouvé par des démonstrations *à priori*, & que l'experience confirme à present.

4. J'ai encore d'autres preuves à alleguer pour le soutien de cette verité, mais si simples & si faciles, qu'il est surprenant que personne ne s'en soit aperçu avant moi; celles que je vais indiquer sont tirées du choc oblique des corps. Soient deux boules *A* & *C* parfaitement élastiques & égales entre elles, que *C* soit en repos, & que *A* vienne la fraper obliquement, suivant la direction, & avec la vîtesse exprimée par *AB*, que je supose faire un angle demi droit, avec la tangente commune qui passe par le point de rencontre des deux boules, pour déterminer ce qui leur arrivera après le choc; je décompose le mouvement par *AB*, en deux autres dont les directions sont *AF* & *FB*, l'une parellele, & l'autre perpendiculaire à la commune tangente, en consequence de la regle donnée ci-dessus pour le concours direct des corps, la boule *A* étant parvenuë en *B*, perdra tout son mouvement, selon la direction *FB*, pendant qu'elle conservera son mouvement par *AF*. Cette boule doit donc continuer à se mouvoir selon la direction *BE*, parallele à *AF*, avec une vîtesse *BE*=*AF*, tandis que la boule *C* recevra dans la direction *FB* prolongée, une vîtesse *CD*=*FD*=*AF*. Voilà donc la force de la boule *A* partagée après le choc en deux également; car puisque ces boules sont égales & ont des vîtesses égales, il s'ensuit que chacune a la FIG. 8.

moitié de la force, que la seule *A* avoit avant le choc; d'où il est évident *que la force de la boule A avant le choc, est à la force de la boule C son égale après le choc, comme 2 est à 1, ou comme AB^2, à BF^2, c'est-à-dire, comme le quarré de la vîtesse de la boule A avant le choc, est au quarré de la vîtesse de la boule C, après le choc.*

5. Passons à une autre preuve, & au lieu de distribuer également la force d'une boule entre deux boules égales, démontrons la même verité par la réunion de deux forces égales en une; concevons pour cet effet deux boules égales *D* & *E*, lesquelles se meuvent avec des vîtesses égales *DC*, *EB*, sur des directions perpendiculaires l'une à l'autre, en sorte que la boule *D* parvenuë en *C*, rencontre directement la boule *E* parvenuë en *B*, il est visible que la premiere boule s'arrêtera tout court en *C*, & que l'autre boule se mouvra le long de la direction *BA*, faisant avec *BD* prolongée, un angle demi droit *ABF*, & que son mouvement par *BA*, sera composé de $FA = EB$, & de $BF = DC$. Voici donc un cas où la boule *E* ou *B*, possede toute seule après le choc, les deux forces que les deux boules avoient avant le choc. Mais ces deux forces étoient égales, tant à cause de l'égalité des boules, que de celles de leurs vîtesses. Donc la force de la boule *B* après le choc, est à la force de la boule *D* avant le choc, comme 2 est à 1, ou comme BA^2 est à $BF^2 = DC^2$, c'est-à-dire, comme le quarré de la vîtesse de la boule *B* après le choc, au quarré de la vîtesse de la boule *D* avant le choc.

6. Peut-être soutiendra-t-on, que tout ce qu'on peut conclure de ces deux démonstrations, c'est que les forces vives de deux corps égaux, sont entre elles comme 2 est à 1, lorsque leurs vîtesses sont comme $\sqrt{2}$ à 1. J'en tombe d'accord, mais au moins ne sçauroit-on nier qu'elles ne démontrent invinciblement la fausseté du sentiment commun, qui veut que la force d'un corps en mouvement, soit proportionnelle à la quantité de son mouvement, ou au produit de sa masse par sa simple vîtesse.

CHAPITRE IX.

Démonstration generale & Géometrique du Theorême de la quantité des forces vives, proportionnelles aux produits des masses par les quarrez des vîtesses.

1. MAis sans insister davantage sur la validité des démonstrations précedentes, je me propose d'en donner ici une generale si fort au-dessus de toute exception, que je la crois seule capable de convaincre les partisans les plus obstinez, de l'opinion vulgaire; elle est aussi fondée sur la décomposition du mouvement. Je prouverai donc d'une maniere géometrique, que quand un corps a précisement autant de vîtesse qu'il lui en faut pour plier un ressort contre lequel il heurte perpendiculairement, ce même corps pourra plier avec une vîtesse double de la premiere, je ne dis pas deux, mais quatre ressorts pareils au premier, & qu'avec une vîtesse triple il ne sera pas simplement en état de plier trois ressorts comme les précedens, mais neuf, & ainsi de suite.

2. Pour se convaincre de cette verité, figurons-nous que le corps C frape obliquement un ressort placé en L, avec la vîtesse CL, soit l'angle de l'obliquité CLP de 30 degrez, afin que la perpendiculaire CP devienne égale à $\frac{1}{2} CL$, soit la vîtesse $CL = 2$; & soit enfin la résistance du ressort L, telle que pour le plier il faille précisement un degré de vîtesse dans le corps C, lorsque ce corps le heurte perpendiculairement. On supose que le corps C se meut sur un plan horisontal. Ceci connu, je dis qu'après que le corps C, aura choqué obliquement le ressort L, avec une vîtesse CL de deux degrez; vîtesse qui en vertu de la composition du mouvement est composée de $CP = 1$, & de $PL = \sqrt{3}$; ce corps perdra entierement le mouvement perpendiculaire par CP, & ne FIG. 9.

retiendra que le mouvement par *PL*; ainsi le corps *C* après avoir consumé son mouvement par *CP*, à plier le premier ressort *L*, continuëra à se mouvoir dans la direction *PLM* avec une vîtesse $LM = PL = \sqrt{3}$: concevons au point *M*, un second ressort semblable au premier, & l'angle de l'obliquité *LMQ*, tel que la perpendiculaire *LQ* soit $=1$. Il est clair que le mouvement par *LM*, étant composé de deux collateraux par *LQ* & *QM*, le mouvement par *LQ* sera entierement consumé, à plier le ressort *M*, pendant que le mouvement par *QM*, continuëra selon la direction *QMN*, avec une vîtesse $MN = QM = \sqrt{2}$. Imaginons au point *N* un troisiéme ressort égal à chacun des precedens que le corps *C* rencontre sous un angle demi droit *MNR*, afin que *MR*, perpendiculaire à la ligne de situation du ressort, devienne égale à 1 : il est manifeste que le mouvement par *MN*, composé des mouvemens par *MR*, & par *RN*, consumera le premier de ces mouvemens par *MR*, à plier le ressort *N*; & par consequent son autre mouvement par *RN* continuëra avec une vîtesse $NO = RN = 1$. Le corps *C* conserve donc encore un degré de vîtesse suivant la direction *RNO*, après avoir plié les trois ressorts *L*, *M*, *N*, & c'est avec ce degré de vîtesse que le corps *C* pliera le quatriéme ressort *O*, contre lequel je supose qu'il heurte perpendiculairement.

Il paroît de tout ceci que le corps *C* a la force de plier avec deux degrez de vîtesse, quatre ressorts dont chacun demande pour être plié, un degré de vîtesse dans le corps *C*. Mais ces quatre ressorts pliez, sont l'effet total de la force du corps *C*, mû avec deux degrez de vîtesse; puisque toute cette vîtesse du corps *C* se consume à plier ces quatre ressorts l'un après l'autre : & un seul ressort plié, est l'effet total de la force du même corps *C*, mû avec un degré de vîtesse, puisque la résistance de chaque ressort est telle, qu'elle détruit précisement un degré de vîtesse dans le corps *C* : puis donc que les effets totaux sont entre eux, comme les forces qui ont produit ces effets, il faut que *la force vive* du corps *C*, mû avec deux degrez de vîtesses, soit quatre fois plus grande que *la force vive* du même corps mû avec un degré de vîtesse.

3. On démontrera de la même maniere qu'une vîtesse triple, quadruple, quintuple, &c. fait avoir au corps *C*, une force, neuf fois, seize fois, vingt-cinq fois, &c. plus grande, parce que dans ce cas il sera capable de plier avant de s'arrêter, 9, 16, 25, &c. ressorts égaux. Il n'y a pour cela qu'à donner à *CL*, une obliquité convenable sur le premier ressort, & telle que *CP* soit à *CL*, comme 1 est à 3, 4, 5, &c. & diriger les autres obliquitez suivant l'exigence du cas. Je tire de tout ceci cette conclusion generale, *que la force vive d'un corps est proportionnelle au quarré de sa vîtesse, & non à sa simple vîtesse.*

CHAPITRE X.

Des trois loix qui s'observent constament dans le choc direct de deux corps. Que l'une de ces loix prise à discretion, a toujours une connexion necessaire avec les deux autres.

1. JOignons à ce que nous venons de dire quelques réflexions sur cette triple loi, que les corps durs que j'ai nommez parfaitement roides, observent inviolablement quand ils se choquent ; la premiere de ces loix a été démontrée au Chapitre 4. §. 5. elle consiste dans la conservation de la vîtesse respective avant & après le choc. On trouve cette vîtesse respective en prenant la difference des vîtesses absoluës, lorsque les corps vont d'un même côté, & leur somme lorsqu'ils se meuvent en sens contraire. La seconde loi démontrée au même Chapitre §. 8. établit la conservation de la quantité de direction toujours égale au produit de la somme des masses, par la vîtesse du commun centre de gravité. La troi-

ſiéme conſiſte enfin, dans la conſervation de la quantité des forces vives. Ce ſeroit obſcurcir cette loi que d'entreprendre de la démontrer. En effet tout le monde regarde comme un axiome inconteſtable, que toute cauſe efficiente ne ſçauroit perir, ni en tout, ni en partie, qu'elle ne produiſe un effet égal à ſa perte. L'idée que nous avons de la force vive, en tant quelle exiſte dans un corps qui ſe meut, eſt quelque choſe d'abſolu, d'indépendant, & de ſi poſitif, qu'elle reſteroit dans ce corps, quand même le reſte de l'Univers ſeroit anéanti. Il eſt donc clair que la force vive d'un corps diminuant ou augmentant à la rencontre d'un autre corps ; la force vive de cet autre corps doit en échange augmenter ou diminuer de la même quantité ; l'augmentation de l'une étant l'effet immediat de la diminution de l'autre, ce qui emporte neceſſairement la conſervation de la quantité totale des forces vives : auſſi cette quantité eſt-elle abſolument inalterable par le choc des corps.

2. Mais autant que cette loi eſt évidente & certaine, par la ſeule idée qu'on doit avoir de la force vive ; autant incertaine, a été juſqu'ici la maniere de meſurer cette force, un préjugé general ayant fait croire qu'elle étoit proportionnelle au produit de la maſſe par la vîteſſe : c'eſt de ce préjugé qu'eſt venuë la fauſſe opinion de la conſervation de la quantité du mouvement, dont on ne s'eſt deſabuſé que depuis que des perſonnes éclairées ont démontré que la quantité du mouvement peut être augmentée & diminuée par le choc des corps, ſans démontrer pourtant en quoi conſiſte la veritable maniere de meſurer les forces vives. M. de Leibnitz découvrit le premier qu'elles étoient en raiſon des produits des maſſes par les quarrez des vîteſſes ; mais comme nous l'avons déja dit, peu de gens acquieſcerent à ſes raiſonnemens. Je crois avoir établi cette verité d'une maniere ſi évidente, que deſormais elle ſera à l'abri de toute conteſtation.

3. Quelques réflexions ſur la nature de cette triple

loi, nous feront encore remarquer que des trois conſervations qui ſe font, 1°. de la vîteſſe reſpective ; 2°. de la quantité de direction ; 3°. de la ſomme des produits des maſſes par les quarrez des vîteſſes, deux étant accordées, la troiſiéme l'eſt auſſi d'une neceſſité geometrique ; ce que je démontre ainſi, ſoient A & B deux corps, leurs vîteſſes avant le choc a & b, & leurs vîteſſes après le choc x & y ; ſupoſons d'abord qu'avant & après le choc, ces corps ſe meuvent du même côté. La premiere conſervation donnera $a-b=y-x$; la ſeconde $Aa+Bb=Ax+By$. J'en déduis la troiſiéme de cette maniere : par la tranſpoſition des termes il vient $a+x=y+b$, & $Aa-Ax=By-Bb$. Qu'on multiplie les membres de ces deux équations, ſçavoir $Aa-Ax$, par $a+x$, & $By-Bb$, par $y+b$, les produits donneront une nouvelle équation $Aaa-Axx=Byy-Bbb$, laquelle par la tranſpoſition des termes, ſe changera en $Aaa+Bbb=Axx+Byy$, formule qui exprime parfaitement ce qu'on cherche, je veux dire la conſervation de la ſomme des produits, par les quarrez des vîteſſes. On voit aiſemement que ſi on rend a ou b, de même que x ou y negatif, pour marquer le mouvement en ſens contraire des corps A & B, tant avant qu'après le choc, cette ſupoſition ne changera rien dans les ſignes des termes de l'équation trouvée $Aaa+Bbb=Axx+Byy$, parce que les dimenſions de ces lettres ſont en nombre pair dans tous les termes de cette équation.

4. Il paroît par ce calcul que la conſervation de la ſomme des produits des maſſes par les quarrez des vîteſſes, à une connexion neceſſaire avec les deux autres conſervations ; & toute perſonne un peu Geometre, auroit pû l'en tirer comme un ſimple Corollaire, ſans en penetrer l'utilité, ç'auroit été entre ſes mains, une verité ſterile & purement geometrique. Et c'eſt ce qui eſt effectivement arrivé à M. Huguens, quoique grand Mathematicien, & genie du premier ordre. Il a formé de cette propoſition un Theorême qu'il a enſuite démontré

à (*) sa maniere, mais sans trouver dans ce Theorême la conservation de la quantité des forces vives qui y est cachée, Monsieur Huguens ignoroit sans doute que la force d'un corps en mouvement, est proportionnelle au produit de sa masse par le quarré de sa vîtesse, où il refusoit d'admettre cette proposition, faute de recourir à la nature & à ses premiers principes, les Théorêmes les plus importans dégenerent en de simples spéculations.

5. Mais à present que cette verité est mise dans son jour, & hors de toute atteinte, on a lieu d'admirer la parfaite conformité qui regne entre les loix de la Nature, & celles de la Geometrie; conformité qu'elle observe si constament, & dans toutes les circonstance; il semble que la Nature ait consulté la Geometrie, en établissant les loix du Mouvement. Car si il eut été possible que les forces des corps qui sont en mouvement, n'eussent pas été en raison des produits des masses par les quarrez des vîtesses, & que la Nature les eut faites en un autre raison; elle se seroit démentie, l'ordre de la Geometrie auroit été violé. La quantité des forces vives, source unique de la continuation du mouvement dans l'Univers, ne se seroit pas conservée; plus d'égalité par consequent entre les causes efficientes & leurs effets; en un mot toute la Nature seroit tombée dans le desordre.

CHAPITRE XI.

Du choc de trois corps durs, selon differentes directions.

1. Lorsque trois corps durs se choquent à la fois, selon differentes directions, il est difficile de déterminer leurs vîtesses après le choc, parce que la con-

(*) Voyez la longue Démonstration qu'il en a donnée dans son Taité, *De motu corporum ex percuss. prop. XI.*

servation

ſervation de la vîteſſe reſpective n'a pas lieu ici, comme il eſt aiſé de le voir, pour peu d'attention qu'on y faſſe. Mais on en peut venir à bout par le moyen la veritable eſtime des forces vives, & de la conſervation de la quantité de direction, leſquelles ont lieu en toutes ſortes de choc, quelque ſoit le nombre des corps qui ſe rencontrent.

2. Soient A & B deux boules que je ſuppoſe en repos, & dont les maſſes ſont égales ; ſoit une troiſiéme boule C, d'une maſſe quelconque qui ſe meuve contre les deux premieres, ſuivant la direction CD, perpendiculaire à la droite qui joint les centres des deux boules A & B ; enſorte que celles-ci ſoient frapées tout à la fois par la boule C parvenuë en D, on demande quelle ſera la direction & la vîteſſe de chacune de ces boules après leur choc ? Fig. 10.

Solution.

3. La direction de ces boules après leur choc ne ſouffre aucune difficulté ; car ſi du centre de la boule D, on tire les droites DF, DG, par les points d'attouchement, ou par les centres des deux autres boules, il eſt viſible que ces lignes ſeront les directions des boules frapées, & que la boule C reculera, s'arrêtera, ou s'avancera dans la ligne de ſa direction CD, ſelon que les boules qu'elle aura frapées auront plus ou moins de maſſe ; l'expreſſion de leurs vîteſſes eſt un peu plus difficile : je la détermine par le calcul ſuivant.

4. Soient exprimez la vîteſſe de la boule C, par $CD=a$; la vîteſſe de la même boule après le choc, par $DE=x$; & la vîteſſe des boules A & B, par AF, & BG $=y$, ſoit la maſſe de la boule A, ou de la boule $B=n$, & la maſſe de la boule $C=m$, la quantité de la direction avant le choc, ſera $=ma$, & la quantité de direction après le choc, ſera $=mx+\frac{2q}{p}ny$. Je ſupoſe que H eſt le point du milieu de la droite qui joint les centres des deux boules A & B, parvenuës en F & G, & qu'ainſi ce

point eſt le centre commun de gravité des deux boules F & G; & je nomme p à q, la raiſon de DF à DH, j'aurai donc, en vertu de la conſervation de la quantité de direction, cette égalité $ma = mx + \frac{2q}{p}ny$. Or la quantité de la force vive avant le choc, eſt $= maa$, & la quantité des forces après le choc, eſt $= mxx + 2nyy$, donc $maa = mxx + 2nyy$, on trouve la valeur des inconnuës x & y, par la comparaiſon de ces deux équations : le calcul donne $x = \frac{ppma - 2qqna}{ppm + 2qqn}$, & $y = \frac{2pqma}{ppm + 2qqn}$.

COROLLAIRE I.

5. Si $ppm = 2qqn$, ou ce qui revient à la même choſe, ſi $pp.\ qq :: 2n.\ m$, c'eſt-à-dire, ſi la ſomme des deux boules A & B eſt à la boule C, comme le quarré du ſinus total, eſt au quarré du ſinus de l'angle DFH, complement de l'angle FDH, on aura $x = o$; auquel cas la boule C s'arrêtera tout court après le choc en D; la vîteſſe de chaque boule A & B, ou y, $\left(\frac{2pqma}{ppm + 2qqn}\right)$ Sera $= \frac{qa}{p}$, & AF, ou BG deviendra quatriéme proportionnelle du ſinus total, du ſinus de l'angle DFH, & de CD, qui exprime la vîteſſe de la boule C.

COROLLAIRE II.

6. Il s'enſuit encore que ſi les trois boules C, A, B, ſont égales, & que FDG ſoit un angle droit, ou FDH un demi angle droit, la boule C s'arrêtera en D, & chacune des deux autres ſe mouvra avec une vîteſſe qui ſera à celle de la boule C avant le choc, comme le côté d'un quarré eſt à ſa diagonale, ou comme 1 à $\sqrt{2}$, car dans ce cas on aura $pp.\ qq :: 2.\ 1 :: 2n.m$, & $y \left(\frac{qa}{p}\right) = \frac{1a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE III.

7. Si ppm eſt plus petit que $2qqn$, la valeur de x, ou DE ſera negative, & par conſequent la boule C rebrouſſera après qu'elle aura frapé les boules A & B, & ſi la boule C étoit infiniment petite par raport aux autres, elle rebrouſſeroit avec la même vîteſſe qu'elle avoit avant le choc, & les deux boules A & B reſteroient immobiles, car on auroit $x = \frac{-2qqna}{2qqn} = -a$, & $y = \frac{2pqoa}{2qqn} = o$.

COROLLAIRE IV.

8. Et ſi au contraire les boules A & B étoient infiniment petites par raport à la boule C, celle-ci continuëroit à ſe mouvoir après le choc ſans aucune perte ſenſible de ſa vîteſſe, & les boules A & B acquereroient chacune une vîteſſe double de celle qu'elles auroient euës dans le cas du premier Corollaire ; car x deviendroit $= \frac{ppma}{ppm} = a$, & $y = \frac{2pqma}{ppm} = \frac{2qa}{p}$. D'où on voit qu'en diminuant à l'infini les boules A & B, on augmentera leurs vîteſſes, mais ſans parvenir jamais au double de la quatriéme proportionnelle du ſinus total, du ſinus de l'angle DFH, & de la vîteſſe de la boule C.

COROLLAIRE V.

9. Si l'angle FDG eſt infiniment aigu, je veux dire, ſi $p = q$, les directions AF, BG, tomberont ſur DH, & les boules A & B pourront être regardées comme réunies en un ſeul corps, ce qui eſt un cas du choc direct expliqué ci-deſſus Chapitre 4. §. 2. En effet faiſant $p = q$, on aura $x = \frac{ma - 2na}{m + 2n}$, & $y = \frac{2ma}{m + 2n}$, conformement à ce qui a été trouvé dans l'endroit cité, où on a exprimé par A & B ce qui l'eſt ici par m & $2n$.

COROLLAIRE VI.

10. Si les angles FDH, & GDH ſont auſſi grands qu'ils puiſſent l'être, c'eſt-à-dire, ſi chacun de ces angles eſt droit, & que par conſequent les directions AF & BG, ſoient dans une même ligne perpendiculaire à la direction CD; la boule C étant parvenuë en D, ne fera que friſer les boules A & B, & coulera entre deux ſans leur imprimer aucune vîteſſe, auſſi aura-t-on dans ce cas où $q = o$, $x = \frac{pvma}{ppm} = a$, & $y = \frac{2pmoa}{ppm} = o$.

11. Il eſt manifeſte par ces deux derniers Corollaires, que les directions AF, BG peuvent former avec la direction DH, des angles FDH, GDH, tels que les boules A & B s'éloigneront de la direction CDH, le plus vîte qu'il eſt poſſible; je veux dire, qu'il y a un *maximum* entre toutes les directions des boules A & B, qui contribuë à former cet éloignement, ce qui donne lieu à un Problême aſſez curieux que voici.

PROBLEME I.

12. *On demande la grandeur des angles FDH & GDH, des directions AF & BG, ſuivant leſquelles les boules données A & B, frapées par une troiſiéme boule donnée C, dont la vîteſſe eſt auſſi donnée, s'éloignent l'une de l'autre le plus vîte qu'il eſt poſſible dans un tems donné, ou ce qui revient à la même choſe, on exige que la vîteſſe reſpective des boules A & B, ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible.*

Je trouve par la methode de *maximis*, que pour réſoudre ce Problême, il faut faire cette analogie : comme $2m + 2n$ eſt à $m + 2n$; ainſi le quarré du ſinus total, eſt à un quatriéme terme. La racine quarrée de ce dernier terme donnera le ſinus de l'angle cherché FDH ou GDH: c'eſt pour abreger que je n'en mets pas ici l'analiſe.

COROLLAIRE I.

13. Si les trois boules *A*, *B*, *C* sont égales, l'angle *FDH* sera de 60 degrez, ou les deux tiers d'un angle droit; & par consequent le double de cet angle *FDG* sera de 120 degrez, ou les $\frac{4}{3}$ d'un droit; car dans ce cas $2m+2n$, est à $m+2n$, comme 4 est à 3. Ce qui est précisement la raison du quarré du sinus total, au quarré du sinus de 60 degrez.

COROLLAIRE II.

14. Si la boule *C* est égale à la somme des deux boules *A* & *B*, on aura $2m+2n.\ m+2n::3.\ 2.$ ce qui donne à très-peu de chose près l'angle *FDH*, de 54 degrez 44 minutes, le même angle que plusieurs personnes ont démontré que la barre du gouvernail devoit faire avec la quille du Vaisseau, pour l'obliger à virer le plus promptement qu'il est possible.

COROLLAIRE III.

15. Comme $m+2n$ excede toujours la moitié de $2m+2n$, il s'ensuit que l'angle du plus grand éloignement *FDH*, est aussi toujours plus grand qu'un demi droit; mais si les boules *A* & *B* sont suposées infiniment petites par raport à la boule *C*, alors l'angle *FDH* sera demi droit, & son double l'angle *FDG* deviendra droit.

16. Il y a des cas où la vîtesse absoluë des boules *A* & *B* peut devenir un *maximum*, ce qui est un espece de paradoxe: il consiste en ce que si ces boules sont réunies en un corps, & choquées directement par la boule *C*, elles en recevront une vîtesse absoluë moindre que si ces boules étoient separées & frapées selon certaines directions. On tire de cette remarque un nouveau Problême.

PROBLEME II.

17. *Toutes choses supposées comme dans le Problême precedent, on demande les directions AF, BG, les plus avantageuses, pour que les boules données A & B, frapées à la fois par une troisiéme boule C, en reçoivent la plus grande vitesse possible, suivant ces mêmes directions.*

On résoudra ce Problême si suposant que la valeur generale de $y = \frac{2pqma}{ppm + 2qqn}$ est un *maximum*, on la differentie en prenant la lettre q pour variable, & les autres pour invariables, & qu'en suite on égale la differentielle à *zero*; de cette maniere on trouvera $qq = \frac{mpp}{2n}$, & par consequent le quarré du sinus de l'angle FDH, c'est-à-dire, $pp - qq = \frac{2n - m}{2n} pp$. D'où l'on tire cette analogie, comme $2n$ est à $2n - m$; ainsi pp où le quarré du sinus total est à un quatriéme terme, dont la racine quarrée donnera le sinus de l'angle cherché, FDH, ou GDH.

COROLLAIRE I.

18. Lorsque les trois boules sont égales, l'angle FDH devient demi droit, & le double $FDG =$ à un angle droit.

COROLLAIRE II.

19. Si $m = 2n$, ou si la boule C est égale à la somme des deux autres, l'angle FDH devient nul, je veux dire que la plus grande vîtesse sera imprimée aux boules A & B, lorsqu'elles seront réunies & frapées directement par la boule C.

COROLLAIRE III.

20. Dans tous les cas où m est plus petite que $2n$, il y aura toujours certaines directions obliques AF & BG,

le longs desquelles les boules A & B frapées par la boule C, iront avec plus de vîtesse, que si étant réunies elles étoient frapées directement & avec la même vîtesse, par la même boule C, soit, par exemple, $m = \frac{3}{2} n$, ou $C.A :: 3.2$, l'angle FDH doit être de 30 degrez, & son double FDG de 60 degrez, la plus grande vîtesse absoluë que les boules A & B puissent recevoir par le choc de la boule C, se fera donc quand le triangle FGD sera équilateral. Soit $m = \frac{1}{2} n$ l'angle FDH le plus avantageux sera de 60 degrez, & ainsi des autres.

COROLLAIRE IV.

21. Mais si m est plus grand que $2n$, il n'y aura plus de direction oblique qui jouisse du privilege de la plus grande vîtesse ; alors la vîtesse sera toujours plus grande à mesure que l'angle FDH diminuera, ou que la boule C frapera plus directement les boules A & B ; la raison en est évidente ; car si m étoit $> 2n$, q, ou $\frac{\sqrt{mpp}}{2n}$, devroit être aussi plus grand que p. Mais aucun sinus ne peut être plus grand que le sinus total.

CHAPITRE XII.

Du choc d'un corps contre plusieurs autres, & de la détermination generale de leur mouvement après le choc.

1. APrès avoir déterminé ce qui arrive quand une boule en frape deux autres qui sont egales entre elles, & disposées à se mouvoir après le choc, suivant des directions également inclinées sur la direction de la boule qui frape, que j'apellerai dans la suite *direction moyenne* ; je passe à la consideration de deux paires de

boules, dont les directions de chaque paire faſſent des angles égaux avec la direction moyenne. Je ſupoſe d'abord que les deux boules de chaque paire, ſont égales entre elles : conſiderant enſuite ces quatre boules, comme venant à être frapées à la fois avec une vîteſſe donnée par une cinquiéme boule quelconque ; il s'agit de déterminer le degré de vîteſſe que chacune de ces quatre boules recevra après le choc, & celle que conſervera la boule qui les a frapées, ſoit en avant, ſoit en arriere.

2. Cette queſtion me parût ſi difficile la premiere fois que j'y penſai, que je fus tenté de croire que la reſolution en étoit impoſſible ; auſſi ne connois-je perſonne qui l'ait entrepriſe. Il me ſembloit qu'il n'y avoit pas aſſez de choſes données ; cependant un peu de tems & de reflexions m'ont fourni les moyens d'en venir à bout ; & ma methode eſt telle, que non ſeulement elle ſatisfait à cette queſtion, mais qu'on peut l'appliquer à un auſſi grand nombre de paires de boules qu'on voudra, priſes dans les circonſtances preſcrites : donnons-en un eſſai.

FIG. II. 3. Soit la boule *C* en mouvement, ſelon la direction *CDH*, & que cette boule parvenuë en *D*, frape à la fois contre les deux paires de boules reſpectivement égales, *A* & *B*, *K* & *L*, que je ſupoſe etre ſituées de maniere que les droites *DAF* & *DBG*, *DKT* & *DLV*, tirées du centre de la boule qui frape par les points d'attouchement, faſſent de part & d'autre des angles égaux avec la ligne de moyenne direction $FDH = GDH$, & $TDI = VDI$, il eſt clair que ces lignes ſeront les directions des quatres boules. Reſte à déterminer leurs vîteſſes exprimées par *AF* & *KT*, ou *BG* & *LV*.

4. Pour réſoudre ce qui paroît le plus épineux dans cette queſtion, je m'aviſai de conſiderer la boule *C* ou *D*, comme étant partagée au hazard en deux parties quelconques *R* & *S*, ſeparables l'une de l'autre, mais qui ſe meuvent conjointement juſqu'en *D*, où je ſupoſe que la partie *R* choque ſeulement les deux boules *A* & *B*, dans

dans le même instant que la partie S frape les deux autres boules K & L. On peut donc considerer la chose comme un double cas de la premiere question déja resoluë pour trois boules. On déterminera ensuite separement, les vîtesses des parties R & S après le choc. Mais ces deux vîtesses differeront plus ou moins, selon le raport qu'il y aura entre les deux parties R & S de la boule D, lesquelles se séparant après le choc, chacune se mouvra avec ce qui lui restera de vîtesse propre. Cependant je conçois qu'il peut y avoir une raison entre R & S, telle qu'il restera à chacune de ces parties une vîtesse égale après le choc, & qu'ainsi elles iront de compagnie, & avant & après le choc. De cette maniere les parties R & S demeurant contiguës, elles continueront de faire ensemble un même tout, de même que si la boule C n'avoit point été partagée. Mais il est aisé de voir que les vîtesses que les cinq boules auroient dans cette supposition, sont précisement les mêmes que si une boule entiere & égale à D, choquoit dans les mêmes circonstances, les quatre boules A & B, K & L. Le nœud de la question consiste donc à déterminer la raison qui doit être entre les parties R & S, pour que ces parties se meuvent de même vîtesse après le choc : ceci trouvé le reste en coule naturellement.

5. Tel est le plan que je me suis proposé, il s'agit de l'executer. Soit donc la boule C ou $D = M$, la boule A, ou $B = n$, la boule K, ou $L = N$; la vîtesse CD de la boule C avant le choc $= a$; le sinus total $= p$; le sinus de l'angle DFH, complement de $FDH = q$; le sinus de l'angle DTI, complement de $TDI = Q$. Maintenant pour trouver la vîtesse de la partie R après le choc, je consulte la formule pour trois boules $x = \frac{ppma - 2qqna}{ppm + 2qqn}$, où je substitue R à m, laissant les autres lettres qui sont ici les mêmes, j'aurai par ce moyen x où la vîtesse de la partie R après le choc égale à $\frac{ppRa - 2qqna}{ppR + 2qqn}$; je substitue ensuite dans la

formule S à m, N à n, & Q à q, pour avoir la vîtesse de la partie $S = \frac{ppSa - 2QQNa}{ppS + 2QQN}$; mais puisqu'il faut que les vîtesses de R & de S soient égales, pour que ces parties ne se separent pas après le choc, formons cette égalité : $\frac{ppRa - 2qqna}{ppR + 2qqn} = \frac{ppSa - 2QQNa}{ppS + 2QQN}$, qui réduite, donnera la valeur de $S = \frac{QQNR}{qqn}$. Et dautant que les parties R & S prises ensemble, composent la boule entiere M; il s'ensuit que $R + \frac{QQNR}{qqn} = M$. D'où il suit que $R = \frac{qqnM}{qqn + QQN}$. Substituant donc cette valeur de R dans celle de S, on aura aussi $S = \frac{QQNM}{qqn + QQN}$; en sorte qu'il ne reste plus qu'à substituer la valeur de R dans $\frac{ppRa - 2qqna}{ppR + 2qqn}$, ou ce qui est la même chose, la valeur de S dans $\frac{ppSa - 2QQNa}{ppS + 2QQN}$, pour obtenir la vîtesse commune à chaque partie après le choc; & par consequent la vîtesse de toute la boule M qui sera $= \frac{ppMa - 2qqna - 2QQNa}{ppM + 2qqn + 2QQN}$. Quant aux vîtesses des boules frapées A & B, K & L, je prends la formule pour trois boules $y = \frac{2pqma}{ppm + 2qqn}$, dans laquelle je substituë premierement la valeur de $R = \frac{qqnM}{qqn + QQN}$, à m, sans toucher aux autres lettres; & ensuite la valeur de $S = \frac{QQNM}{qqn + QQN}$, à m, N à n, & Q à q; la premiere de ces substitutions donne la vîtesse AF, ou BG des boules A & B, $= \frac{2pqMa}{ppM + 2qqn + 2QQN}$, & la seconde fait connoître la vîtesse KT, ou LV, des boules K & L, égale à $\frac{2pQMa}{ppM+2qqn+2QQN}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

SCHOLIE.

6. On se servira de la même methode à déterminer les vîtesses de tel nombre de paires de boules qu'on voudra, de trois paires par exemple. Pour cet effet partagez par la pensée la boule *C* ou *D*, en deux parties *R* & *S*; & que l'une de ces parties, comme *R*, frape une paire de boules, tandis que la partie *S* heurtera contre les deux autres paires. Cherchez ensuite séparement les vîtesses que *R* & *S* auront après le choc, & égalez ces deux vîtesses, vous déterminerez les valeurs des parties *R* & *S*, & le Problême réduit au cas précedent de deux paires de boules se résoudra de même. On voit aisément que cette methode s'étend également à tout nombre de paires de boules proposé. Mais sans entrer dans un calcul long & penible, ce que nous avons dit de la formation des formules pour une, & deux paires de boules, indique suffisamment, la maniere de le tendre à autant de paires de boules qu'on voudra. Soit, par exemple, la masse de la boule qui frape, nommée *M*, & les masses des boules frapées *e*, *f*, *g*, *&c.* soient de plus les sinus des complemens des angles de leurs directions, avec la direction moyenne, *q*, *r*, *t*, *&c.* Je dis qu'on aura après le choc, 1°. la vîtesse de la boule qui frape,

$$= \frac{ppMa - 2qqea - 2rrfa - 2ttga - \&c.}{ppM + 2qqe + rrf + 2ttg + \&c.}$$

2°. la vîtesse de la boule *e*,

$$= \frac{2pqMa}{ppM + 2qqe + 2rrf + 2ttg + \&c.}$$

3°. la vîtesse de la boule *f*,

$$= \frac{2prMa}{ppM + 2qqe + 2rrf + 2ttg + \&c.}$$

4°. la vîteſſe de la boule g,

$$= \frac{2pt\,\mathrm{M}a}{pp\mathrm{M} + 2qqe + 2rrf + 2ttg + \&c.}$$ Et ainſi à l'infini.

COROLLAIRE I.

7. On voit que les vîteſſes des boules frapées, ſont entre elles comme q, r, t, &c. c'eſt-à-dire, proportionnelles au ſinus des complemens des angles que font leurs directions, avec la direction moyenne.

COROLLAIRE II.

8. La vîteſſe avant le choc de la boule qui frape, eſt à ſa vîteſſe après le choc, comme $pp\mathrm{M} + 2qqe + 2rrf + 2ttg + \&c.$ eſt à $pp\mathrm{M} - 2qqe - 2rrf - 2ttg - \&c.$ & ſi $pp\mathrm{M}$ eſt $>$ ou $=$ ou $<$, que $2qqe + 2rrf + 2ttg + \&c.$ la vîteſſe de cette boule après le choc ſera affirmative, nulle ou negative. Je veux dire qu'après le choc cette boule ira en avant, qu'elle s'arrêtera, ou qu'elle reculera.

COROLLAIRE III.

9. Je ſupoſe à preſent qu'une boule quelconque C, frape à la fois un nombre infini de petites boules uniformement ſituées autour d'un grand cercle de la boule qui les frape, comme on voit dans cette Figure, où les arcs égaux AE & AB, ſont cenſez occupez par une multitude égale & infinie de part & d'autre de petites boules $e, e, e,$ &c. b, b, b, b, toutes égales entre elles, mais dont la ſomme des maſſes ait une proportion finie & comparable à la maſſe de la boule C ou D. Je dis que la détermination des vîteſſes de toutes ces boules après le choc, tant de la boule qui frape, que de chacune de celles qui ſont frapées, dépend de la quadrature du cercle, lorſque les arcs AE, AB, occupent moins d'un demi cercle ſur la circonference EAB. FIG. 21.

10. Mais ces vîteſſes peuvent être déterminées alge-

briquement, lorſque chacun des arcs AE, AB eſt égal au quart de cercle D, & partant l'arc entier $EAB =$ à ſa demi circonference. Soit donc comme ci-deſſus la boule qui frape $= M$, ſa vîteſſe avant le choc $= a$, la ſomme de toutes les boules frapées $= N$, le ſinus du complement de l'obliquité de la direction de l'une de ces petites boules quelconques $= R$; la vîteſſe de la boule qui frape, ſera après le choc $= \frac{2Ma - Na}{2M + N}$, & la vîteſſe de la petite boule frapée $= \frac{4M \times Ra}{2M + N}$. D'où il paroît que la boule qui frape doit perdre toute ſa vîteſſe, & s'arrêter après le choc, dans le cas où $N = 2M$. Mais en general ſa perte eſt $= \frac{2Na}{2M + N}$. Je n'en donne pas l'analyſe, elle me meneroit trop loin.

11. Je crois cependant devoir avertir que par le moyen de cette *theorie*, il ſeroit aiſé de déterminer les effets abſolus de la réſiſtance d'un milieu, composé de molecules doüées d'une parfaite élaſticité, & ſeparées les unes des autres par de petits interſtices; en ſorte que de toutes les molecules qui compoſeroient ce fluide, il n'y auroit jamais que celles qui touchent immediatement le devant d'un corps mû dans le milieu qui lui réſiſtaſſent, & qui reçuſſent du mouvement de ce corps un petit degré de force vive, ſans que d'autres molecules y contribuaſſent en rien, quelques peu éloignées qu'elles fuſſent des premieres, juſqu'à ce que le corps en mouvement vint auſſi à les rencontrer à leur tour; car non ſeulement on prouve que cette ſorte de fluide opoſeroit aux corps qui ſe mouvroient dedans, une réſiſtance proportionnelle au quarré de leur vîteſſe, comme font les fluides ordinaires : mais on tire encore de cette conſideration, le moyen de déterminer préciſement combien un corps mû dans un fluide pareil, perdroit actuellement de ſa vîteſſe initiale, après avoir parcouru un eſpace donné.

Matiere nouvelle, d'une recherche aussi curieuse qu'utile dans la pratique, propre à rendre raison de divers Phenomenes, & d'autant plus digne d'être aprofondie, que personne ne l'a encore entreprise ; aussi me serois-je fait un plaisir de l'examiner avec soin si les bornes de cette Dissertation déja trop longue, ne m'en avoient empêché. Peut-être aurai-je occasion de traiter quelque jour ce sujet. Mais reprenons le fil de notre discours.

12. La quantité de cette perte dépend, & de la figure du corps mû, & de sa consistance, ou de la densité qu'il a par raport à la densité du fluide composé de molecules élastiques dans lequel il se mût. Suposé, par exemple, que le plomb soit huit mille fois plus dense que l'air, & que ce dernier soit un fluide composé de molecules parfaitement élastiques : je dis qu'une bale de plomb chassée dans l'air sur un plan horisontal avec un degré de vîtesse donné, aura perdu la moitié de sa vîtesse après avoir parcouru un espace égal à peu près à 3700 de ses diametres. Qu'un cube de plomb mû le long d'une ligne horisontale perpendiculairement à l'une de ses faces, parcourera un espace 2770 fois plus grand que son côté, pour que sa vîtesse initiale soit aussi diminuée de la moitié, & qu'avant de souffrir une pareille diminution de vîtesse, un cone de plomb isocele, dont l'angle du sommet est droit se mouvant le long de la direction de son axe la pointe en avant, parcourera 924 diametres de sa base, quoique ce même cone ne parcoure que la moitié de ce chemin, ou 462 de ses diametres, lorsque sa base est oposé à la résistance de l'air. Et si on supose ce cone équilateral, l'espace parcouru jusqu'à la perte de la moitié de sa vîtesse initiale, sera de 3272 diametres de sa base, en cas qu'il se meuve de pointe ; car si il se mouvoit la base en avant, ce cone ne parcoureroit que le quart de l'espace précedent, ou 818 diametres de sa base.

13. Ou pour déterminer d'une maniere generale la longueur du chemin que doit parcourir avant de per-

dre une quantité donnée de sa vîtesse, tout conoïde regulier dont la base est un cercle. Soit *AHBD*, le conoïde proposé qu'on supose se mouvoir dans l'air la pointe en avant le long de la direction de son axe *ID*, perpendiculaire à sa base *PO*, une ordonnée $= x$, *qO*, ou sa differentielle $= dx$: *oO*, ou la differentielle de l'arc *DO* $= ds$: *n*, le nombre de fois que la vîtesse initiale du conoïde doit être diminuée. *ln*, le logarithme de ce nombre. Soit enfin $C =$ à la longueur d'un cylindre d'air, perpendiculaire à sa base, de même base, & aussi pesant que le conoïde. Je dis que $Cxxln$ divisé par Fig. 13.

$17371780 \left| \frac{xdx^3}{ds^2} \right.$, exprimera dans le cas où x devient $= IA$ ou au rayon de la base, *l'espace que doit parcourir le conoïde, pour que sa vîtesse résiduë, ou ce qui lui reste de vîtesse, soit à sa vîtesse initiale, comme* 1 *est à* n.

CHAPITRE XIII.

De la résistance des milieux, qu'elle ne change pas les loix de la communication du mouvement. Maniere de calculer la perte de la vîtesse causée par la résistance.

1. LA résistance ordinaire que souffrent les corps mûs dans le plein, ou dans une matiere fluide, ne donne pas occasion à beaucoup de spéculations nouvelles, & je craindrois avec d'autant plus de raison d'ennuyer mon lecteur, si je repetois ce que divers Auteurs ont écrit sur ce sujet, que rien ne m'oblige à le faire. En effet, la communication du mouvement des corps durs, dont il s'agit principalement ici, se fait de la même maniere dans le plein que dans le vuide, je m'explique : Toute résistance est une espece d'effort passif, qui ne diminuë sensiblement la vîtesse d'un corps, que lorsque

ce corps a parcouru un espace fini ou sensible, dans un tems aussi fini ou sensible.

2. Mais le choc des corps est si subit, quoique successif, & d'une si petite durée, depuis son commencement jusqu'à sa fin, que la résistance du fluide ambiant, n'a le tems de causer aucun changement sensible à la vîtesse que les corps ont dans l'instant qu'ils se choquent. On peut donc assurer que les loix generales, de même que les regles que nous avons établies & démontrées dans ce discours, & particulierement celles qui concernent la mesure de la force vive, seront aussi inviolablement observées dans le plein, qu'elles le seroient dans le vuide.

3. Il est vrai que peu de tems après le choc, les vîtesses que les corps ont acquises sont alterées par la résistance du fluide, dans lequel ces corps se meuvent, & cela plus ou moins selon la diversité de la résistance laquelle dépend de la nature de chaque fluide, & des qualitez qui lui sont propres. Mais comme je l'ai déja dit, cet effet de la résistance n'influë en aucune maniere, sur la communication du mouvement. Il en change seulement la continuation dans chaque corps en particulier.

4. C'est ce changement qu'il s'agiroit d'examiner, si la question proposée l'exigeoit ; mais puisqu'elle ne fait mention que des loix de la communication du mouvement que j'ai traité avec assez d'étenduë, je me crois dispensé d'entamer une nouvelle question ; & si j'ajoûte ici quelque chose sur la détermination de l'effet que produit la résistance du fluide sur les corps qui s'y meuvent, ce n'est que par surabondance de droit, & par le rapport que cette matiere a avec mon sujet.

5. Il n'est pas difficile d'apliquer à l'effet de la résistance, tout ce que j'ai dit (*Chapitre* 11. §. 2. *& suiv.*) pour expliquer la destruction & la production des vîtesses actuelles, par une pression mise en œuvre, & continuée pendant quelque tems. Cet effet consiste à diminuer peu à peu, & par des degrez infiniment petits, la vîtesse d'un

d'un corps mû dans un milieu qui lui résiste, de même qu'elle peut avoir été produite par des degrez infiniment petits par un effort continué. La loi de la résistance étant donc donnée, il s'agit de trouver les diminutions de vîtesse, ou les vîtesses residuës. Soit, par exemple, la résistance de l'air ou d'un autre fluide uniforme, proportionnelle au quarré de la vîtesse, comme on l'établit communement. Soit *AC* la direction d'un corps qui se meut dans ce milieu résistant de *A* vers *C*. Soit enfin *DEF* une ligne courbe, dont les appliquées *AD*, *BE*, &c. marquent les vîtesses résiduës. FIG. 14.

6. Pour déterminer la nature de cette courbe, je prends à discretion un point fixe *A*, pour le commencement des abscisses ; & je m'imagine la courbe *AMO*, dont les appliquées *BM* representent les tems que le mobile employe à parcourir les espaces *AB*. Soit donc $AB = x$, $Bb = dx$, $BE = u$, $GE = dv$, $BM = f$, $Nm = dt$; on aura le tems élementaire par *Bb*, c'est-à-dire, la differentielle *Nm*, ou $dt = \frac{adx}{v}$, parce que ce petit tems est en raison composée de la directe de l'espace dx, & de l'inverse de la vîtesse v. Or l'effet de la résistance pendant le tems dt, est de diminuer la vîtesse *BE* d'un degré infiniment petit, qui s'exprime par *GE*, differentielle de l'appliquée *B*, & cette diminution momentanée est en raison composée de la résistance & du tems. Ainsi suposant la force qui résiste proportionnelle au quarré de la vîtesse, on aura *GE*, ou $-dv = \frac{vv}{aa} \times \frac{adx}{v} = \frac{vdx}{a}$, & partant $-\frac{adv}{v} = dx$, ce qui fait voir que la courbe cherchée *DEF* est la logarithmique ordinaire, dont la sou-tangente est la constante a, prise arbitrairement pour remplir les homogenes. Et si on supose la vîtesse initiale $AD = a = 1$, *AB* sera le logarithme de *BE*, & par consequent les espaces parcourus sont comme les logarithmes des vîtesses résiduës.

COROLLAIRE I.

7. On n'a pour déterminer la courbe des tems AMO, qu'à ſubſtituer dans l'équation $dt = \frac{adx}{v}$, la valeur de $dx = \frac{-adv}{v}$, il viendra $dt = \frac{-aadv}{vv}$, dont l'integrale donne $t = \frac{aa}{v} - a$, ou $t + a = \frac{aa}{v}$, ce qui fait voir que AMO, eſt la même logarithmique que la précedente miſe en un ſens opoſé, je veux dire qu'ayant prolongé FED vers L, & tiré DP parallele & égale AB; il faut faire $BM =$ à l'apliquée PL, pour avoir la courbe AM égale & ſemblable à la courbe DL. Il eſt clair que la courbe AM ſera la courbe des tems, & que les apliquées BM exprimeront les tems que le mobile donné employera à parcourir les eſpaces AB.

COROLLAIRE II.

8. Supoſons en general que la réſiſtance du milieu ſoit en raiſon d'une puiſſance quelconque de la vîteſſe dont l'expoſant ſoit $= n$. On parviendra par la même methode à cette équation, $-dv = \frac{v^n}{a^n} \times \frac{adx}{v} = \frac{v^{n-1}dx}{a^{n-1}}$, ou $\frac{-a^{n-1}dv}{v^{n-1}} = dx$, dont prenant les intregrales, il en réſulte $\frac{1}{n-2} a^{n-1} v^{2-n} = x \pm b$. Equation qui prouve que la courbe des vîteſſes DEF, eſt du genre des hyperboles, lorſque $n > 2$, & des paraboles lorſque $n < 2$, excepté dans le cas où $n = 1$, dans lequel DEF devient une ligne droite.

COROLLAIRE III.

9. La courbe des tems AMO, pour la puiſſance generale de la vîteſſe ſe détermine en ſubſtituant dans

l'équation $dt = \frac{adx}{v}$ la valeur de dx, trouvée par le Corollaire précedent. On aura par ce moyen $dt = \frac{-a^n dv}{v^n}$, & son integrale $t \pm c = \frac{1}{1-n} a^n v^{1-n}$; & si $n = 1$ l'équation $dt = \frac{-a^n dv}{v^n}$, se changera en $dt = \frac{-adv}{v} =$ (parce que dans ce cas, $v = b - x$) $\frac{adx}{b-x}$; d'où il paroît que la courbe AMO sera aussi un logarithmique, dont l'Assymptote est CR, tirée perpendiculairement sur la ligne de direction AC, du point C, où la ligne des vîtesses qui dans ce cas est une ligne droite, coupe la même ligne AC, en sorte que BM, qui au point C, se confond avec l'Assymptote devient infinie. D'où il s'ensuit qu'il faut un tems infini au mobile, pour parcourir l'espace fini AC.

10. Si un mobile est continuellement sollicité à se mouvoir en avant, par une force motrice qui le pousse par derriere, tandis que la résistance du milieu qu'il traverse le repousse par devant; comme il arrive aux corps pesans qui tombent dans l'air, dans l'eau, ou dans tout autre fluide qui résiste à leur mouvement; la vîtesse du mobile ira en augmentant, ou en diminuant, selon que la force motrice sera plus grande, ou moindre que la résistance. La methode précedente déterminera dans cette suposition la courbe des vîtesses acquises ou résiduës, en prenant ici la difference de la force motrice, à la résistance du milieu; cette difference étant la seule cause de l'acceleration ou de la retardation du mouvement.

11. Ainsi dans le cas où les corps pesans mis ou jettez perpendiculairement dans un milieu qui leur résiste, descendent; la force motrice qui n'est autre chose que leur pesanteur, est uniforme & invariable; mais la résistance est proportionnelle au quarré de la vîtesse. Il n'y a donc ici qu'à multiplier cette difference, laquelle

(en prenant la pesanteur pour l'unité) est $= 1 \overline{- \frac{vv}{aa}}$, par l'élement du tems, sçavoir par $\frac{adx}{v}$, & l'on aura GE, ou $\pm dv = \frac{adx}{v} - \frac{vdx}{a} = \frac{aa - vv}{av} \cdot dx$, par consequent $dx = \pm \frac{avdv}{aa - vv} = \pm \frac{\frac{1}{2} adv}{a - v} \pm \frac{\frac{1}{2} adv}{a + v}$, & en integrant $x = \pm \frac{1}{2} a l \overline{a - v} \pm \frac{1}{2} a l \overline{a + v}$, d'où il paroît que la courbe des vîtesses se construit par le moyen de la logarithmique.

12. Ce seroit ici le lieu d'examiner la nature des courbes que décrivent les projectiles pesans, jettez obliquement dans l'air ; mais comme j'ai traité cette matiere ailleurs, je ne pourrois pas m'étendre sur ce sujet, ni renvoyer mon lecteur à ce que j'en ai publié sans me faire connoître, ce qui seroit contre l'intention de *l'Academie Royale des Sciences.*

CHAPITRE XIV.

Nouvelle maniere de déterminer par la theorie des forces vives expliquées dans cet Ouvrage, le centre d'oscillation dans les Pendules composez.

1. JE finirai cette dissertation par quelques remarques sur le centre d'oscillation dans les pendules composez, fondées sur la conservation de la quantité des forces vives, que je me flatte qu'on verra avec plaisir ; la recherche de ce centre a toujours paru curieuse & utile, entre ceux qui ont entrepris de le déterminer : les uns se sont trompez dans leurs raisonnemens, d'autres n'en sont venus à bout que par des détours longs & difficiles, & en employant diverses methodes tirées de principes qui ne paroissent pas toujours assez natu-

rels. Des perſonnes intelligentes ont trouvé que le principe qu'employe M. Huguens, & qu'il propoſe comme un axiome, étoit un peu trop hardi; ce principe ayant beſoin lui-même d'être démontré, M. Huguens (*) ſupoſe que le centre de gravité d'un pendule composé, deſcendu d'une hauteur donnée, ne remontroit pas plus haut que la hauteur dont il eſt deſcendu, ſi les poids ſimples qui compoſent ce pendule ſe détachoient ſubitement, lorſqu'il eſt parvenu dans une ſituation verticale, & que chacun de ces poids remontât ſeparement avec la vîteſſe qu'il a acquiſe au moment de ſa ſéparation. La nouvelle theorie du centre d'oſcillation, qu'on trouve dans les Memoires de l'Academie de l'année 1714. n'eſt appuyée ſur aucune ſuppoſition gratuite; elle eſt même generale, mais ce que l'on y a employé de méchanique, quoique ſolidement établi, en rend la démonſtration difficile & moins à la portée de tout le monde.

2. La methode dont je me ſers eſt d'autant plus remarquable, que ſans recourir à une nouvelle hypotheſe, on déduit de la ſeule conſervation des forces vives, la détermination du centre d'oſcillation, & qu'elle découvre en même tems le fondement & la raiſon de l'identité du centre d'oſcillation, avec le centre de percuſſion qu'un celebre Auteur a confondus mal-à-propos, perſuadé que ces deux centres étoient eſſentiellement compris ſous une même idée.

3. Concevons un pendule compoſé, par exemple, de trois poids *A*, *B*, *C*, attachez ou enfilez à une ligne inflexible *HA*, qui faſſe ſes oſcillations autour de l'axe *H*. Soit *HA* la ſituation horiſontale d'où le pendule commence à deſcendre, & qu'il parvienne enſuite dans la ſituation verticale *Ha*; les vîteſſes acquiſes ſeront comme les diſtances, parce que les poids attachez à la ligne inflexible *HA*, ne ſçauroient ſe mouvoir l'un ſans l'autre. Concevons preſentement que les poids *A*, *B*, *C*, étant FIG. 15.

(*) Voyez ſon Traité de Horolog. Oſcillat. hyp. 1. pag. 93.

libres, forment autant de pendules ſimples, afin que chacun puiſſe deſcendre ſeparement, & parvenir à la ſituation verticale Ha, après avoir fait une demi oſcillation; dans ce cas de liberté les vîteſſes acquiſes ſeront par la regle de *Galilée*, en raiſon ſou-doublée des hauteurs Ha, Hb, Hc.

4. Ceci connu, je demande qu'on m'accorde ſeulement que la ſomme des forces vives des poids, eſt la même après que les poids ſont deſcendus auſſi bas qu'ils le peuvent, ſoit que ces poids deſcendent conjointement attachez à une même ligne inflexible; ſoit que chacun de ces poids deſcende librement, comme un pendule ſimple; il me ſemble que cette ſupoſition ſouffre beaucoup moins de difficulté que celle de M. Huguens, puiſque la deſcente des poids dans l'un & l'autre cas, eſt l'effet d'une même cauſe, je veux dire de la peſanteur qui les oblige de deſcendre. C'eſt donc auſſi la peſanteur qui produit dans la ſomme des poids une quantité déterminée de force vive, de quelque maniere qu'ils deſcendent, pourvû que chaque poids deſcende de la même hauteur qu'il deſcendroit ſi il faiſoit un pendule ſimple; la choſe me paroît évidente.

5. Prenant donc la ſomme des forces vives, pour le cas où les poids ſont attachez à une ligne inflexible, & la ſomme des mêmes forces pour le cas de leur deſcente libre; formons une égalité entre ces deux ſommes, cette égalité déterminera le centre d'oſcillation, ou la longueur du pendule ſimple HG, *iſochrone* avec le composé $HCBA$; pour cet effet ſoit $HA = a$, $HB = b$, $HC = c$, & $HG = x$; la vîteſſe du centre G parvenuë en g, ſur laquelle les autres vîteſſes doivent être reglées, peut être nommée comme on voudra, je la nomme donc auſſi x; mais les vîteſſes des poids du pendule composé, étant ſimplement proportionnelles à leurs diſtances du point H, la vîteſſe du poids A ſera $= a$, la vîteſſe du poids $B = b$, & la vîteſſe du poids $C = c$; donc la ſomme de leurs forces vives ſera $= aaA + bbB + ccC$; & dans le cas où

les poids deſcendent ſeparement leurs vîteſſes acquiſes quand ils ſont parvenus au point le plus bas, étant par la regle *de Galilée*, en raiſon ſou-doublée des hauteurs verticales, la vîteſſe du centre d'oſcillation G, ayant été nommée x, on aura la vîteſſe du poids libre $A = \sqrt{ax}$, la vîteſſe du poids libre $B = \sqrt{bx}$, & celle du poids libre $C = \sqrt{cx}$; d'où il reſulte que la ſomme de leurs forces vives eſt $= axA + bxB + cxC$, & ces deux ſommes miſes en équation $aaA + bbB + ccC = axA + bxB + cxC$, donnent $x = \frac{aaA + bbB + ccC}{aA + bB + cC}$, ce qui fait voir que la longueur du pendule ſimple iſochrone au pendule compoſé, ſe trouve en prenant *la ſomme des produits des poids par les quarrez de leurs diſtances à l'axe du pendule, & diviſant cette ſomme par la ſomme des produits des poids par leurs ſimples diſtances.* Et c'eſt auſſi préciſement en quoi conſiſte la (*) regle que M. Huguens a donnée pour la détermination du centre d'oſcillation, établie enſuite & fondée ſur des principes inconteſtables, & confirmée de nouveau à preſent, par la loy de la conſervation des forces vives.

(*) Voyez ſon Traité de Horolog. Oſcillat. pag. 100.

Fin du premier Diſcours.

ADDITION

Au Discours in magnis voluiſſe ſat eſt, *ſur les loix de la communication du mouvement, où l'Auteur entreprend de donner une explication probable de la cauſe phyſique du reſſort.*

ADDITION

ADDITION

Au Discours in magnis voluisse sat est, *sur les loix de la communication du Mouvement, où l'Auteur entreprend de donner une explication probable de la cause physique du ressort.*

L'Auteur souhaite que cette Addition soit lûë après le premier Chapitre de son Discours.

1. J'AY composé ce Discours *in magnis voluisse sat est*, dans le dessein de satisfaire au Prix proposé par l'Academie Royale des Sciences, pour l'année 1724. Il s'y agissoit de déterminer les loix de la communication du mouvement des corps parfaitement durs. Les Philosophes ayant eu de tout tems differentes idées sur la nature de la dureté des corps, & l'Academie n'ayant point expliqué en quel sens Elle vouloit qu'on prit ce terme, ni averti que par dureté parfaite, Elle entendoit une inflexibilité absoluë. J'ai crû qu'il m'étoit libre d'attacher au mot de *dureté*, l'idée qui me paroissoit & qui me paroît encore la plus convenable à la nature des choses.

2. *Sur ce pied* j'ai pris *dureté parfaite* & *roideur infinie*, pour des termes synonimes : tout corps qui aplati par le choc d'un autre corps, se remet dans sa premiere figure, étant appellé *corps roide* ou *élastique*, j'ai conçû aussi que plus cette roideur ou élasticité, étoit forte, plus aussi cet aplatissement devoit être petit ; & que par consequent le corps doüé de cette faculté, devoit d'au-

tant plus aprocher de la nature des corps parfaitement durs, que son élasticité étoit grande ; en sorte qu'il n'y avoit plus qu'à supposer une roideur infinie ou immense, pour avoir des corps parfaitement durs, ou infiniment peu flexibles.

3. Mon but étoit en cela de concilier la dureté parfaite avec les loix de la nature ; ayant fait voir dans mon discours, que l'opinion commune qui supose les corps parfaitement durs, dénuez de toute flexibilité, même d'une flexibibilité infiniment petite, ne pouvoit pas subsister avec ces mêmes loix, puisqu'elle ne sçauroit s'accorder avec quelques-unes de ces loix, qu'elle n'en renverse en même tems d'autres. Cependant Messieurs de l'Academie ont declaré dans l'Avertissement imprimé à la tête de la Piece qui a remporté le Prix, qu'en proposant la question ils ont donné au mot de *dureté* ce même sens que je rejette, & qui, selon moi, est physiquement impossible. Parlant au reste de mon discours avec éloge, je commencerai par les remercier de la bonté qu'ils ont eu d'y faire attention, & j'avouërai ensuite franchement, que ne pouvant pas raisonner sur un sujet dont la suposition me paroissoit opposée aux loix de la nature, je ne m'y suis point attaché en composant cet ouvrage, je crus devoir substituer à cette idée, un examen general du choc des corps à ressort ; & considerant ensuite qu'en suposant un ressort infiniment vigoureux, il en resultoit des corps infiniment peu flexibles, par les plus grands chocs, je me formai une notion juste & distincte de la dureté parfaite. En effet un applatissement très-petit, pouvant passer pour un non applatissement absolu ; j'imitois en cela les Geometres & les Analystes, qui comparant à des grandeurs finies, les grandeurs infiniment petites, ou les élemens, negligent ces dernieres, & ne les considerent que comme des points ou des zeros absolus.

4. J'ai aussi lieu d'être content du bon effet que mon Memoire a produit. Les forces vives si differentes des

forces mortes, commencent à être goûtées ; & j'ose me flater que la veritable maniere de les estimer, sera bien-tôt connuë. On n'a pour cela qu'à peser avec une attention desinteressée, le poids des raisonnemens & des démonstrations, qu'on trouve en grand nombre dans mon discours ; l'espoir même de remporter le Prix ne m'est pas ôté : Messieurs de l'Academie se sont reservez le pouvoir de l'adjuger à des Memoires envoyez les années précedentes, & le mien convient parfaitement au sujet proposé pour l'année 1726. où *l'on exige les loix du choc des corps à ressort, &c.*

5. Mais Messieurs de l'Academie ayant jugé à propos d'y ajoûter une nouvelle condition, sur laquelle je ne me suis point arrêté en 1724. parce qu'il ne s'y en agissoit pas alors, il est juste de l'examiner à present : ces Messieurs ne demandent pas simplement *les loix du choc des corps élastiques*, mon premier Discours y auroit satisfait : ils veulent de plus que ces mêmes loix soient déduites *d'une explication probable de la cause physique du ressort* ; il me reste donc pour satisfaire au sujet dans toute son étenduë, d'ajoûter ici à mon Memoire, une theorie de l'élasticité des corps que je me suis formée il y a déja long-tems, & je le fais d'autant plus volontiers, que cette theorie m'est particuliere, & que par son moyen je rends une raison probable & mechanique, non seulement de la cause physique du ressort, mais encore des principaux phenomenes que l'on remarque dans les fluides élastiques.

6. Il seroit inutile d'entrer dans un examen trop étendu, des differentes opinions que les Philosophes ont euës sur la cause du ressort, aussi me contenterai-je de faire quelques reflexions sur les plus vrai-semblables. Je ne sçai si ceux qui admettent dans les corps élastiques des corpuscules élementaires, doüez naturellement d'une vertu *expansive*, sans expliquer d'où leur vient cette proprieté, meritent qu'on les refutent. Les Philosophes suposent évidemment ce qui est en question, & si cette

vertu selon eux, innée & primitive, est indépendante de l'arangement des particules dont les corps élastiques sont composez ; il est aussi aisé de l'attribuer tout d'un coup aux masses entieres des plus grands corps, qu'à la moindre de leurs particules : mais qui ne voit que ce seroit ouvrir de nouveau un asile à l'ignorance, & faire revivre les qualitez ocultes décriées avec tant de raison.

7. Les Physiciens modernes sont allez plus loin, ils tâchent d'employer les loix de la Mechanique à expliquer la cause du ressort. Mais je n'en connois aucun qui ait suffisamment éclairci cette matiere, & levé les difficultez qui l'envelopent. On en trouve de bien grandes pour peu qu'on examine leurs explications, qui loin d'être fondées sur la saine Mechanique, en détruisent souvent les premiers principes. Ils conviennent presque tous qu'il faut recourir à l'action d'un fluide, ou d'une matiere subtile qui coulant dans les pores des corps à ressort, leur donne la faculté de se débander, & de se restituer dans leur premier état, lorsque la force qui les avoit comprimez cesse. A parler generalement, ces Messieurs ont raison d'admettre une matiere subtile qui par son mouvement soit la cause primitive du ressort des corps. Mais il ne suffit pas de suposer simplement un fluide perpetuellement agité ; il faut de plus rendre raison des circonstances qui l'acompagnent, & faire voir quelle est la nature d'une agitation capable de produire le ressort, toute sorte de mouvement n'étant pas propre pour cela.

8. Quelques-uns soutiennent, par exemple, qu'un corps élastique venant à être comprimé par quelque force exterieure, la matiere subtile qui remplit ses pores, & qui avoit été contrainte d'en sortir, rentre dans ces mêmes pores, d'où elle avoit été chassée dès que la force exterieure cesse d'agir ; d'où il suit necessairement selon eux, que ce corps est obligé de reprendre sa premiere figure, ces Messieurs faisant consister l'élasticité dans cet effort ; sans se mettre en peine d'expliquer ce qui contraint la

matiere ſubtile à rentrer dans ces mêmes cellules qu'elle occupoit auparavant, ni pourquoi elle s'éforce durant la compreſſion, de regagner le poſte qu'elle avoit abandonné. Diront-ils que c'eſt la maſſe de la matiere ſubtile ambiante, qui par ſa réſiſtance repouſſe celle qui ſort, & la chaſſe dans les pores retrecis, lorſqu'ils ceſſent d'être comprimez par une force exterieure? Mais cette raiſon ſpécieuſe en aparence, ne ſçauroit ſubſiſter avec les premiers principes de l'hydroſtatique, puiſqu'on prouve par eux que la plus petite portion d'un fluide, enfermée dans une envelope, & miſe au milieu d'une maſſe du même fluide, réſiſte & fait équilibre avec la maſſe entiere du fluide qui l'environne; enſorte que quand même on forceroit une partie du fluide à ſortir, en comprimant l'envelope qui le contient, & que nous ſupoſerons pour cet effet flexible & percée de toutes parts; loin que ce même fluide s'éforçât de rentrer dans l'envelope après la compreſſion, & de remplacer celui qui en avoit été chaſſé, l'hydroſtatique nous aprend au contraire, que la petite portion de fluide reſtée dans l'envelope, doit ſoutenir par ſa réſiſtance paſſive, la preſſion de la maſſe du dehors, & que toutes les parties du fluide, tant grandes que petites, demeurent entre elles en équilibre. Supoſons, par exemple, une veſſie remplie d'air ordinaire, percée de toutes parts, & expoſée au grand air, & que comprimant cette veſſie entre ſes mains, on oblige l'air qu'elle contient, ou une partie de cet air, à s'échaper; ſoutiendra-t-on que l'air exterieur retournera dans la veſſie, & la renflera avec impetuoſité? non ſans doute, & l'experience le démentiroit, puiſqu'elle fait voir que la veſſie demeure flaſque, & dans l'état de compreſſion où on l'avoit miſe, ſoit que l'air exterieur auquel on l'avoit expoſée, ſoit calme ou agité par un grand vent. Je ne crois pas au reſte qu'on puiſſe m'objecter que les cellules, ou pores des corps élaſtiques, ayent une ſtructure differente des trous de la veſſie percée. Car, 1°. ſelon cette opinion, les cellules des corps élaſtiques doivent être ouvertes de toutes parts, puiſqu'elles donnent un libre paſſage à la matiere ſubtile. En ſecond lieu, leurs parois doivent être flexibles comme celles de la veſſie, puiſqu'elles changent de figure par la compreſſion, à moins qu'on ne ſoutienne que ces pores, quoique flexibles, ont outre cela un degré de roideur qui les fait retourner à leur premiere figure. Mais cette roideur n'étant autre choſe que l'élaſticité même, elle demanderoit une nouvelle explication : ce ſeroit d'ailleurs ſupoſer ce qui eſt en queſtion.

9. D'autres attribuent la cauſe phyſique du reſſort à un principe peu different de celui que nous venons de refuter : ils conſiderent les pores des corps élaſtiques, comme autant de petits tuyaux capables d'être retrecis par la compreſſion ; en ſorte que la matiere ſubtile ou étherée, coulant rapidement au travers de ces petits canaux, choque continuellement leurs parois interieurs. D'où il ſuit que les chocs lateraux deviennent plus forts, quand par la compreſſion les paſſages ſe retreciſſent, & que par conſequent la matiere ſubtile qui y coule, doit acquerir par là une plus grande rapidité. C'eſt, ſelon ces Meſſieurs, de l'augmentation de ces efforts lateraux de la matiere ſubtile, que dépend l'effort total que le corps comprimé fait pour ſe rétablir dans ſa premiere diſpoſition, & en quoi conſiſte la nature du reſſort.

10. Si cette explication à quelque vrai-ſemblance, il faut avoüer qu'elle eſt bien legere, & que pour peu qu'on raiſonne on en découvre l'illuſion ; car outre que ce que nous venons de dire, tombe en partie ſur cette maniere d'expliquer la cauſe du reſſort : ce que je vais ajoûter achevera d'en faire ſentir le foible. Il eſt vrai, & le bon ſens le dicte, qu'un fluide qui coule doit acquerir d'autant plus de vîteſſe, que l'endroit par où il eſt contraint de paſſer eſt plus étroit ; ſans quoi il ſeroit impoſſible que des quantitez égales de fluides, paſſaſſent en même tems par deux ouvertures inégales en largeur ;

il n'eſt pas moins vrai qu'une plus grande vîteſſe dans le fluide, augmente la violence avec laquelle il agit ſur les parois de ſon canal ; & que plus le fluide coule vîte, plus il s'éforce d'élargir ſon paſſage. Auſſi voyons-nous qu'une riviere prend un cours rapide, quand d'un lit large & ſpacieux, elle eſt contrainte de ſe reſſerrer entre deux rivages hauts, étroits & eſcarpez, & que les rivages ſouffrent bien plus de la violence du courant, que dans les endroits où l'eau trouve aſſez d'eſpace pour s'étendre en largeur. Mais il faut faire attention à la circonſtance qui fait que l'eau accelere ſa courſe, quand elle commence à être reſſerrée entre deux rivages étroits. En effet la choſe n'arrive que lorſque l'eau eſt contrainte de couler dans ſon lit, ſans pouvoir échaper de côté ni d'autre. Car ſi à l'entrée du paſſage étroit, l'eau trouvoit d'autres routes ouvertes, ou une plaine de niveau, il eſt certain qu'elle n'iroit pas ſe fourrer toute entiere dans ce paſſage, mais qu'une partie de l'eau trouvant dans le détroit plus de réſiſtance à ſon cours qu'auparavant, elle s'écouleroit par les routes qu'elle trouveroit ouvertes, ou ſe répandroit dans la plaine ; en ſorte que le détroit ne recevroit de l'eau qu'à proportion de ſa capacité ; la nature des fluides étant de ſe tourner à la rencontre d'un obſtacle, & d'enfiler les routes où il n'y en a point : d'où il eſt aiſé de conclure que la vîteſſe du courant n'y ſeroit nullement augmentée.

11. Mais pour revenir à notre ſujet, on doit diſtinguer entre le mouvement d'un fluide contraint, & le mouvement d'un fluide libre. Lorſque le mouvement ſe fait dans un canal d'inégal largeur, dont le fluide ne ſçauroit échaper, il eſt ſans contredit que le fluide s'accelerera toutes les fois qu'il paſſera d'un endroit plus large dans un endroit plus reſſerré ; mais ſi le fluide a un mouvement rectiligne libre, & qu'il puiſſe s'étendre de tous côtez à la rencontre de la moindre réſiſtance, je dis que ſi on lui opoſe quelque obſtacle, un tuyau, par exemple, ouvert par les deux bouts, & couché dans la

même direction, un cylindre de ce fluide égal en capacité au tuyau, enfilera ce tuyau, & le traversera d'un bout à l'autre, avec une vîtesse égale à celle de toute la masse du fluide qui restera hors du tuyau. Je dis plus, c'est que si on presse assez fortement ce tuyau que je supose d'une matiere molle ou pliable, pour le rendre plus étroit, le fluide ne le traversera pas avec plus de rapidité qu'auparavant, puisque le superflu de ce fluide que le tuyau ne pourra plus contenir regorgera, & passera librement à côté. On ne sentira donc aucune résistance de la part du fluide interieur, sa pression étant contre-balancée par celle du fluide exterieur qui lui est égale. La preuve en est aisée; soit une quantité suffisante de brins de paille entiers, d'égale longueur, & liez legerement en botte, oposez au courant d'une riviere rapide, dans une situation fixe, & parallele à la direction du fil de l'eau, afin que l'eau puisse en penetrer librement les tabules : je dis que quoiqu'on serre cette botte de paille entre ses mains, jusqu'à retrecir la capacité des petits tuyaux qui la composent, on ne sentira cependant de résistance que celle qui peut provenir de la roideur même de la paille, & qu'on sentiroit hors de l'eau de même que dans l'eau; la raison en est manifeste, car dès que les chalumeaux deviennent plus étroits, l'eau ne pouvant plus y entrer avec la même facilité, il n'y en passe plus qu'une quantité proportionnée à leur ouverture diminuée, le surplus se détourne librement de côté, & poursuit conjointement avec le reste de l'eau, le mouvement commun de la riviere; ainsi n'y ayant aucune force qui contraigne l'eau de passer par les tuyaux, au de là de ce que leur cavité en peut recevoir sans effort; il est évident que l'eau n'acquerrera aucune augmentation de vîtesse en coulant au travers de ces tuyaux retrecis.

12. L'aplication de ce que nous venons de dire est facile. Les partisans de l'opinion que je combats, doivent necessairement admettre dans les corps élastiques, des

pores

pores ouverts en forme de petits tuyaux paralleles, & disposez de même que les brins de paille de la botte dont j'ai parlé, & un mouvement dans la matiere subtile qui traverse ces pores ; semblable à celui de l'eau de la riviere qui coule au travers des chalumeaux : mais on a démontré que quand même les chalumeaux viendroient à se retrecir, l'eau n'en auroit pas pour cela plus de force à les dilater. D'où il s'ensuit, selon moi, que la matiere subtile qui penetre les pores tubuleux des corps élastiques, ne doit pas faire plus d'effort pour les élargir, quoique retrecis par une compression étrangere. Loin de se redresser, le corps resteroit donc aplati, ce ne seroit donc plus un corps élastique. Donc cette maniere d'expliquer la cause du ressort, n'est pas la veritable.

13. Je ne sçais si ceux qui font consister l'air dans l'amas d'une infinité de petites particules branchuës, pliables, & perpetuellement agitées, qui nageant dans l'éther, tendent naturellement à se redresser, lorsque quelque cause exterieure les comprime, s'aperçoivent qu'ils tombent dans le défaut qu'on nomme *petition de principe.* Qui ne voit en effet que cette tendance à se redresser, que ces Messieurs attribuent gratuitement aux petites particules repliées de l'air, est précisement cela même dont il s'agit de déterminer la cause.

14. Si quelques Physiciens font consister la cause du ressort, dans l'effort d'un fluide imperceptible, qui se mouvant avec rapidité dans les pores des corps élastiques, tâche continullement à se dilater par quelque force centrifuge, ce sont ceux qui, à mon avis, aprochent le plus de la verité, pourvû que se renfermant dans les bornes de la nature, ces Philosophes n'attribuent pas la cause de cette force à quelque vertu ou faculté immaterielle & imaginaire, telle que sont l'antipathie, & la simpathie.

15. Pour en venir maintenant à l'explication de ma theorie, sur la cause probable de l'élasticité des corps à ressort, je commencerai par dire que j'adopte pour prin-

cipe *la force centrifuge*, mais prise dans un sens intelligible. J'entends par ce mot, la force qu'ont tous les corps étant mûs en rond, ou sur quelqu'autre ligne courbe: force qui consiste dans l'effort que tout corps fait de se mouvoir en ligne droite, en vertu de la loi generale de la nature, qui veut que tout corps continue autant qu'il est en lui de se mouvoir, suivant la direction qu'il a en chaque instant; ainsi pour détourner un corps de son mouvement rectiligne, & pour lui faire décrire une ligne courbe, il faut une action continuellement apliquée, qui entretienne le mouvement en ligne courbe, parce qu'autrement le corps s'échaperoit suivant la tangente de la courbe, si cette action venoit seulement à cesser un moment: or comme il n'y a point d'action sans réaction, & que l'action qui détourne le corps de son mouvement rectiligne, est une impulsion, ou pression exterieure, il est visible que la réaction qui se fait sentir de la part du corps en mouvement, n'est autre chose que cette résistance, ou plutôt cette *renitence* qu'on rencontre en voulant changer son état, laquelle dépend en partie de l'inertie, ou de la quantité de matiere, & en partie de la vîtesse avec laquelle le corps se meut: telle est *la force centrifuge* que j'admets.

16. Ce n'est point une qualité imaginaire, puisqu'elle a des proprietez très-réelles que d'habiles Geometres ont démontrées, & entre autres M. Huguens, dans les beaux Theorêmes qu'il a le premier publiez, à la fin de son Traité *de Horologio oscillatorio*. On conclud aisément du second & du troisiéme de ces Theorêmes, que la force centrifuge d'un corps mû sur la circonference d'un cercle, est comme le produit de la masse par le quarré de la vîtesse, divisé par le rayon, je veux dire en raison composée de trois raisons; de la simple directe de la quantité de matiere, de la doublée directe de la vîtesse, & de la simple reciproque du rayon. Ce Theorême me servira à expliquer la cause d'un des plus curieux Phenomenes qui se remarque dans les fluides élastiques, & qu'on sçait

être attaché à leur nature. Ce Phenomene que l'experience a découvert, consiste en ce que la force de l'élasticité de tout fluide comprimé, augmente dans la proportion du degré de densité auquel on le réduit. Si l'air de consistance naturelle, renfermé, par exemple, dans un espace, peut soutenir par la force de son ressort, une colonne de vif-argent de 28 pouces de hauteur; ce même air en soutiendra une deux fois plus haute, réduit à un volume deux fois plus petit, ou ce qui revient au même, si dans le même espace où cet air est renfermé, on introduit de nouveau une quantité d'air égale à celle qui y étoit déja; quoiqu'on se soit assuré de la verité de ce fait par un grand nombres d'experiences réiterées; je ne sçache pourtant personne qui ait entrepris d'en rendre une raison physique. Et comment l'auroit-on fait? les theories publiées jusqu'ici sur la cause du ressort, ont si peu de fondement dans les loix de la nature, qu'on ne sçauroit en déduire une explication vrai-semblable de ce même Theorême, que ma theorie develope avec tant de facilité. Je me flatte qu'on en sera pleinement convaincu, si on se donne la peine d'examiner avec un peu de soin, ce que j'aurai l'honneur de dire dans la suite de ce Memoire.

17. J'ai déja insinué (*Art.* 7.) que la cause generale & primitive du ressort des corps tant fluides que solides, dépend du mouvement d'une matiere subtile. Je ne dis pas que cette matiere étant en mouvement, devienne elle-même élastique: mais le mouvement de cette matiere subtile devant necessairement entraîner avec rapidité les particules les plus grossieres qui nagent dedans; ces particules sont par cela seules déterminées à se mouvoir en rond, & acquierent dès-là une force centrifuge, (*) telle qu'agissant avec violence contre la surface interieure de l'endroit où elles sont renfermées, elles s'éforcent continuellement d'élargir la prison qui les retient. C'est de cet effort dont dépend la force du ressort. Voici de quelle maniere je conçois la production de cet effet.

(*) Voyez l'art. 14.

18. Soit un eſpace, par exemple, un recipient d'une figure quelconque, rempli de matiere ſubtile : on ſçait aſſez que cette matiere qui paſſe ſans peine par les interſtices les plus étroits de tous les corps ſenſibles, traverſera avec la même facilité les pores du recipient : je ſupoſe qu'outre la matiere ſubtile contenuë dans le recipient, il y a quantité de corpuſcules trop groſſiers pour pouvoir s'échaper au travers des pores du recipient ; mais qui nageant librement dans la matiere ſubtile, laiſſent entre eux des intervalles ſi ſpatieux, que tous ces corpuſcules ramaſſez en un tas, n'ocuperoient peut-être pas la cent milliéme partie du recipient. Je ſupoſe enfin que ces mêmes corpuſcules tous extrêmement ſuſceptibles de mouvement, le ſont pourtant inégalement, les uns plus, les autres moins, à cauſe de la diverſité de leurs figures.

19. Juſques-ici j'ai conſideré la matiere ſubtile comme étant en repos dans le recipient. Voyons à preſent ce qui doit arriver lorſque cette matiere ſe ſuccedant continuellement à elle-même, traverſe avec rapidité le recipient qu'elle penetre de toutes parts. Il eſt évident que ces corpuſcules que leur groſſiereté empêche de s'échaper au travers des pores du recipient, emportez çà & là, par le cours violent de cette matiere, ne peuvent qu'être en une agitation extrêmement confuſe, & ſe choquer les uns les autres dans l'irregularité de leurs mouvemens. Mais ces corpuſcules agitez ainſi en tous ſens, s'embarraſſans les uns les autres par des mouvemens rectilignes opoſez, chacun d'eux ſe trouvera bien-tôt déterminé à ſe mouvoir de la maniere où il ſera le moins en obſtacle au mouvement des autres corpuſcules ; je veux dire à changer ſon mouvement droit en un mouvement circulaire autour d'un centre ; ainſi chaque corpuſcule agité, que je nommerai dans la ſuite *mobile circulant*, décrira ſon propre cercle plus ou moins grand, ſelon qu'il aura plus ou moins de vîteſſe ; car j'ai déja remarqué que tous les mobiles circulans, ne reçoivent

pas un même degré de vîteſſe par l'agitation de la matiere ſubtile.

20. Il y aura donc differens ordres de mobiles circulans, & entre ceux qui ſont d'un même ordre, pluſieurs pourront ſe mouvoir autour d'un centre commun ſur des circonferences égales, & décrire differens plans qui tous paſſeront par le centre commun de leur mouvement; en ſorte que toutes les circonferences que ces mobiles circulans décriront autour d'un même centre, ſeront autant de grands cercle d'une ſphere, & la multitude de ces mobiles pourra devenir ſi grande, que toute la ſurface ſpherique ſera comme couverte de ces petits mobiles, dont les mouvemens rapides & divers parcoureront toujours des circonferences égales, ou au moins des arcs de grands cercles: je dis des arcs, car il arrivera à tout moment que pluſieurs mobiles circulans ſe rencontrans aux points où leurs cercles ſe croiſſent, ſe détourneront de leur route ſans rien perdre de leur vîteſſe, parce que le mouvement de la matiere ſubtile les entretient toujours dans le même dégré de vîteſſe qu'elle leur a une fois communiquée. D'où il eſt aiſé de conclure que les arcs décrits en divers plans par chaque mobile, ſeront toujours des portions de grands cercles. Car ſi on ſupoſoit qu'un mobile décrivit un petit cercle avec une vîteſſe égale, il acquerreroit dès là une force centrifuge prévalante, qui feroit étendre ſur la ſurface ſpherique le petit cercle qu'il décrit, juſqu'à ce qu'il ſe changeât en un grand cercle, & que ſa force centrifuge devint égale à celle des autres mobiles.

21. Mais comme la multitude des mobiles circulans d'un même ordre, eſt ſans doute beaucoup trop grande pour qu'ils puiſſent tous ſe mouvoir commodement, & ſans s'embarraſſer ſur une même ſurface ſpherique; on conçoit aiſement qu'il doit ſe former un grand nombre de ces ſurfaces ſpheriques, dont chacune ſe mouvra autour de ſon centre particulier, à peu près comme font les abeilles, (ſi il m'eſt permis de me ſervir de cette com-

paraison) qui se partagent en divers essains, lorsqu'elles sont trop nombreuses pour n'en composer qu'un seul.

22. Considerons à present les dispositions que prendront dans le recipient toutes ces surfaces spheriques, & l'effort qu'elles font les unes sur les autres, & contre les parois interieurs du recipient qui les empêche de se dilater ; & nous comprendrons, 1°. que toutes les surfaces grandes & petites de tous les degrez, seront dispersées dans l'étenduë du recipient de la même maniere dont Descartes a conçu que l'Univers étoit rempli de tourbillons de toute sorte de grandeur. Par quelle raison y auroit-il en effet dans une partie du recipient, plus de surfaces spheriques d'un certain ordre, que dans toute autre partie? 2°. Suposant donc les plus grandes spheres également dispersées dans toute la cavité du recipient, celles qui les suivent en grandeur occuperont les intervalles que les premieres laisseront entre elles, de même que celles du troisiéme ordre se logeront dans les interstices des secondes, & ainsi de suite à l'infini ; en sorte que chaque surface spherique sera environnée de toutes parts d'une infinité de surfaces plus petites dans tous les degrez possibles. 3°. Et comme chacune de ces surfaces fourmille de mobiles qui circulent avec une vîtesse convenable à la grandeur de leurs spheres, & que chacun de ces mobiles acquiert par cette circulation une force centrifuge, il est clair que toutes ces spheres dont l'interieur n'est rempli que de matiere subtile, s'efforceront continuellement de se dilater en tout sens, tous les points de leurs surfaces tàchant en même tems de s'éloigner du centre de leur mouvement. On pourroit donc comparer ces spheres à ces vessies d'eau de savon, que l'on dilate par le moyen de l'air introduit par un chalumeau, avec cette difference pourtant que les surfaces de celle-ci sont poussées du dedans au dehors par une force étrangere ; au lieu que les surfaces spheriques tendent d'elles-mêmes à se dilater en dehors, par la force centrifuge qui reside dans ces mêmes mobiles circulans dont cha-

que surface spherique est composée. 4°. Aussi chacune de ces spheres grossiroit-elle actuellement par la dilatation de sa surface, si les spheres voisines qui font de pareils efforts pour s'étendre, ne l'en empêchoient. 5°. Mais y ayant un parfait équilibre entre les pressions par le moyen desquelles ces spheres agissent les unes sur les autres, il faut de necessité que chacune de ces spheres, tant grandes que petites, ait une force égale qui contrebalance l'effort de celles qui l'environnent, & l'empêche de ceder à leur pression.

23. Tout ceci bien entendu, j'en tire les consequences suivantes: 1°. Il faut que les mobiles qui circulent sur des surfaces spheriques de differentes grandeurs, ayent des vîtesses qui soient en raison sou-doublée, des rayons de leurs spheres; car de cette maniere les forces centrifuges deviennent égales par le Theorême de l'article 16. & les surfaces spheriques que j'appellerai dans la suite, *Spheres creuses*, ou simplement *Spheres*, se maintiendront dans un parfait équilibre, quoiqu'inégales en grandeur, par leurs pressions égales & reciproques. 2°. Comme les spheres contiguës aux parois du recipient, ne trouvent de réaction du côté de leur attouchement à ces parois, que la simple resistance passive, ou la fermeté du recipient, il est manifeste que toute sa surface interieure devant soutenir l'effort des spheres qui la touchent, sera continuellement pressée du dedans au dehors dans tous ses points, par des directions perpendiculaires. 3°. Les spheres qui ne touchent pas les parois du recipient, ne faisant autre chose que se contre-balancer mutuellement; & servant ainsi uniquement d'apui aux spheres qui touchent ces parois, il est évident que ce sont ces dernieres seules dont l'effort se fait sentir sur la surface interieure du recipient. Il en est de ceci comme de la pression de plusieurs ressorts rangez en ligne droite, dont j'ai parlé dans mon discours, (*Chap.6. art.3.*) où j'ai fait voir que la puissance *L*, qui empêche que les quatre ressorts égaux *ACB*, *BED*, *DGF*, *FIH*, ne se FIG. 1.

débandent, eſt égale à la puiſſance *P*, qui réſiſte à un ſeul de ces reſſorts, au reſſort *ACB*, par exemple. 4°. D'où il s'enſuit que la preſſion totale que ſouffre la ſurface interieure du recipient, ne doit pas être eſtimée par la multitude de toutes les ſpheres contenuës dans la cavité du recipient, mais ſeulement par le nombre de celles qui ſont contiguës à ſa ſurface. 5°. Ainſi tout l'amas de nos ſpheres creuſes, étant tranſporté dans un autre recipient de même capacité, mais de figure differente, la preſſion totale que le ſecond recipient ſoutiendra, ſera plus ou moins forte, ſelon que ſa ſurface ſera plus ou moins grande que celle du premier recipient. 6°. Il s'enſuit encore de là qu'un recipient beaucoup moins ſpatieux que le premier, quoiqu'il ne puiſſe contenir qu'une partie de ces mêmes ſpheres creuſes, ſera cependant expoſé à une plus forte preſſion, ſi ſa ſurface interieure eſt plus grande que celle du premier recipient.

24. Il eſt aiſé après tout ce que je viens de dire, de déterminer quelle peut être la cauſe probable du reſſort des corps élaſtiques. En effet on ne peut guéres attribuer qu'à une matiere ſubtile, telle que je l'ai décrite, la cauſe primitive de l'élaſticité de tous les corps à reſſort; ſoit que ces corps ſoient eux-mêmes fluides, comme l'air groſſier que nous reſpirons; ſoit que ces corps ſoient ſolides, & de la nature de ceux qu'on nomme *roides*, lorſque parmi les particules terreſtres qui compoſent une matiere fluide ou liquide, il ſe trouve quantité de ces ſpheres creuſes, leſquelles tendent continuellement à ſe dilater par la force centrifuge de leurs mobiles circulans; il eſt évident que ce mouvement imprime à ces particules terreſtres, une force ou une tendance à s'écarter les uns des autres, & à occuper ainſi un plus grand volume qu'auparavant. C'eſt en vertu de cette force, ou de cette tendance des ſpheres creuſes à ſe dilater, que le fluide où elles ſe trouvent eſt apellé *élaſtique*; tel eſt non ſeulement l'air ordinaire, mais encore l'eſprit de vin rectifié, & d'autres liqueurs ſpiritueuſes,

tueuſes, leſquelles ſe dilatent avec impetuoſité, dès que la preſſion exterieure de l'air qui retenoit leurs ſpheres creuſes en contrainte eſt ôtée, ou que la force centrifuge de leurs mobiles circulans eſt augmentée par un nouveau degré de vîteſſe, cauſé par la chaleur, ou par quelque autre cauſe étrangere. Auſſi voyons-nous que l'eſprit de vin mis dans la machine du vuide, boüillonne avec force ; & qu'étant expoſé à un air plus chaud, il ſe dilate ſenſiblement : les Thermometres ſont une preuve de ce que j'avance. Ce ſeroit ici le lieu de parler des effets ſurprenans des fermentations, & des efferveſcences chymiques, & particulierement de ceux de la poudre enflammée, ſi le ſujet le permettoit, n'y ayant aucun de ces effets qui ne découle naturellement de ma theorie ſur la cauſe du reſſort.

25. Il n'eſt pas plus difficile d'aſſigner aux ſolides élaſtiques, une cauſe probable de leur reſſort. Concevons que ces corps ſemblables à une éponge ſont remplis de petites cavitez ou cellules, & que chacune de ces cellules renferme des ſpheres creuſes, qui jointes aux particules terreſtres, compoſent ce que nous venons de nommer *matiere fluide élaſtique*. Concevons de plus, qu'outre ces cellules il y a une infinité de pores fort étroits, par leſquels la matiere ſubtile paſſe librement d'une cellule à l'autre, ſans que les mobiles circulans puiſſent s'échaper de leurs cellules à cauſe de la petiteſſe de ces pores. Voilà donc le corps roide ou élaſtique, conſideré comme un amas de petits recipiens, dont chacun contient une quantité de matiere fluide élaſtique, proportionnée à ſa capacité. Mais un corps compoſé de la ſorte, ne ſçauroit être plié ou comprimé, qu'une partie de ſes cellules ne ſe retreciſſent, & que les ſpheres creuſes qui y ſont renfermées, ſe retreciſſant auſſi à proportion, ne deviennent plus petites. Leurs mobiles circulans ſeront donc obligez de décrire de plus petits cercles, pendant qu'ils conſerveront toujours leur même vîteſſe ; la matiere ſubtile qui la leur imprime, continuant toujours

d'être agitée de même, quelque puiſſe être la compreſſion des pores & des cellules, ainſi que je l'ai fait voir art. 11. & 12. D'où il s'enſuit que chacun des mobiles circulans aura une force d'autant plus grande, que le rayon de la ſurface ſpherique ſur laquelle il circule diminuë davantage ; les forces centrifuges des mobiles égaux qui circulent avec des vîteſſes égales ſur des circonferences de cercles inégaux, étant en raiſon renverſée de leurs rayons. Les ſurfaces ſpheriques, ou les ſpheres creuſes contenuës dans les cellules retrecies, feront donc un plus grand effort pour les dilater, qu'elles ne faiſoient avant la compreſſion des cellules. Or c'eſt préciſement dans cet effort, exercé continuellement contre les parois des cellules, & qui tend à les élargir, que conſiſte la vertu des corps à reſſort ; & c'eſt auſſi ce que j'avois entrepris d'expliquer.

COROLLAIRE I.

26. Le reſſort des corps ſolides, provenant de l'effort que fait une matiere fluide renfermée dans leurs petites cellules, on voit aiſement pourquoi ce reſſort eſt parfait en quelque corps, & imparfait en d'autres. En effet un corps eſt parfaitement élaſtique, lorſque les fibres qui compoſent ces cellules, ſont aſſez fortes pour réſiſter à l'effort des ſpheres, pendant le retreciſſement de ſes cellules ; en ſorte que bien loin qu'il en creve aucune, elles ſe rétabliſſent toutes dans leur premier état. Il n'eſt au contraire qu'un corps parfaitement élaſtique, lorſque la ſtructure de ſes fibres eſt telle, qu'il creve une partie de ſes cellules retrecies par la compreſſion, tandis que l'autre partie de ſes cellules ſe rétablit.

COROLLAIRE II.

27. Tout ce qui augmente la vîteſſe des mobiles circulans ſur les ſurfaces ſpheriques, augmente auſſi en même tems la force de l'élaſticité du fluide élaſtique ; & plus la force centrifuge de chaque mobile circulant, de-

vient grande par l'augmentation de sa vîtesse, plus les spheres creuses tendent à se dilater avec effort ; c'est par cette raison que l'air enfermé dans une phiole, étant aprochée du feu, la casse, & la fait sauter avec bruit ; car la chaleur mettant en une agitation violente la matiere subtile ; & celle-ci augmentant la rapidité des mobiles circulans, augmente aussi leurs forces centrifuges, d'où dépend l'élasticité de la matiere fluide ; & cela à un point que les parois de la phiole n'étant plus en état de soutenir l'effort avec lequel les spheres creuses tendent à se dilater, il faut de necessité que le verre se casse avec éclat.

COROLLAIRE III.

28. C'est aussi de là que dépend la cause physique de ce que certains corps, dont les cellules sont composées de fibres peu flexibles, tels que le verre, le cristal, & diverses sortes de pierres étant jettées au feu, se fondent de toutes parts, les mobiles circulans du fluide élastique contenu dans les cellules de ces corps, étant excitez par la chaleur à se mouvoir d'une vîtesse extraordinaire, se dilatent avec tant de violence, qu'ils font crever leurs cellules incapables de soutenir un si grand effort, & s'échapant ainsi de tous côtez, laissent dans ces corps une infinité de crevasses ou fêlures ; aussi voit-on que ces corps perdent leur élasticité par la calcination.

COROLLAIRE IV.

29. D'autres corps, tels que les métaux, par exemple, ont une structure differente, & les fibres de leurs cellules sujets à extension, prêtent plutôt que de rompre par la dilatation de leurs cellules ; aussi voit-on que la contexture de ces corps demeure entiere, quoique leur volume augmente par la chaleur, à moins que la chaleur devenuë excessive, ne les fasse fondre ; & cela conformement à l'experience, qui montre qu'une plaque de fer rougie au feu, augmente sensiblement dans toutes ses dimensions. On doit cependant remarquer que les

corps les plus caſſans & les plus roides, tels que ceux dont j'ai parlé dans le Corollaire precedent, n'ont jamais leurs fibres aſſez inextenſibles, qu'elles n'obéiſſent un peu avant que de rompre, & qu'une chaleur moderée dilate ces ſortes de corps, ſans déſunir leurs petites parties. La pierre même eſt ſujete à cette loi ; & un bloc de marbre meſuré avec ſoin, a été trouvé plus long en Eté qu'en Hyver.

30. Je reviens aux fluides élaſtiques ; il ſera facile à preſent de découvrir le reſte de leurs proprietez : ç'en eſt une fort connuë, que celle dont j'ai parlé au ſecond Corollaire ; ſçavoir que la chaleur augmente la force du reſſort de l'air enfermé dans une phiole. Mais on n'a pas encore fait aſſez d'attention au raport qu'il peut y avoir entre les differens degrez de chaleur, les augmentations des forces du du reſſort de l'air que la chaleur occaſionne : Voici ce que je conçois ſur cela.

Puiſque la chaleur conſiſte dans une agitation violente de la matiere ſubtile, qui penetrant avec facilité les corps les plus compactes, met en mouvement leurs mobiles circulans ; il eſt évident que la vîteſſe de leur mouvement, eſt la meſure du degré de chaleur, ou ce qui revient au même, l'intenſité de la chaleur eſt en raiſon de la vîteſſe des mobiles circulans d'un ordre donné ; enſorte que ſi cette vîteſſe augmente, par exemple, du double, on doit conclure que la chaleur qui a produit cet accroiſſement de vîteſſe, à deux fois plus d'intenſité qu'elle n'en avoit avant cet accroiſſement.

31. Venons à la maniere de meſurer la proportion des divers degrez de vîteſſe que peuvent avoir entre eux les mobiles circulans. Les forces centrifuges des mobiles circulans d'un même ordre, c'eſt-à-dire, qui décrivent des cercles égaux, ſont comme les quarrez de leurs vîteſſes. Mais j'ai démontré que l'effet de ces forces centrifuges, n'eſt autre choſe que la force du reſſort d'un fluide élaſtique. On aura donc la juſte meſure de la force du reſſort, & par conſequent auſſi du degré de chaleur, ré-

duite au poids, & les intensitez de la chaleur seront en raison sou-doublée des forces du ressort ou des poids, que le fluide élastique, tantôt plus, tantôt moins échauffé, peut soutenir. Soient, par exemple, *A* & *B*, deux cylindres creux, parfaitement égaux en largeur & en hauteur, fermez par en bas, & ouverts par en haut, remplis tous deux d'air d'une même densité, & que nous suposerons d'abord de même temperature que l'air exterieur. Soient de plus deux diaphragmes *L M*, *N P*, qui bouchant exactement les ouvertures des cylindres, puissent neanmoins se mouvoir sans frottement, de haut en bas; & de bas en haut, il est clair que ces deux diaphragmes, considerez sans pesanteur, resteront en équilibre, chacun d'eux étant également pressé dessus & dessous, d'un côté par l'action de l'air exterieur, & de l'autre par une force égale du ressort de l'air interieur. FIG. 2.

Suposons à present que l'air exterieur étant ôté, on lui substituë deux poids *R* & *S*, dont chacun égal à la pression de l'air exterieur qui pesoit sur les diaphragmes, continuë à les tenir en équilibre, contre l'effort de l'air interieur, qui renfermé dans les cylindres *A* & *B*, agit contre ces diaphragmes, & tâche de les soulever par son ressort. Il est encore manifeste que cet équilibre durera aussi long-tems que l'air en *A* & en *B* restera dans son premier état de chaleur naturelle. Mais s'il survient un nouveau degré de chaleur, à l'un ou à l'autre de ces deux cylindres d'air, à *B*, par exemple, en ce cas son ressort sera augmenté, & il soulevera le diaphragme dont il est chargé, à moins qu'on n'augmente aussi la charge d'un nouveau poids *T*. Soient donc les poids *T* & *S* pris ensemble, ce qu'il faut précisement de pesanteur, pour empêcher que l'air en *B* ne souleve le diaphragme *N P*, je dis que suivant le systême que je viens d'établir, la chaleur de l'air naturel en *A*, sera à la chaleur augmentée en *B*, comme $\sqrt{R}$ est à $\sqrt{S+T}$.

32. Il seroit aisé de déterminer par ce moyen, ou par d'autres moyens équivalans, & plus faciles à pratiquer,

celui-ci n'ayant été proposé que pour mieux faire entendre ma pensée, il seroit, dis-je, aisé de déterminer la proportion qui regne entre les degrez de chaleur de l'air en Eté, & celle que ce même air conserve en Hyver. Je suis persuadé qu'il s'en faut beaucoup que la chaleur de l'air en Eté, ne surpasse autant qu'on le croit communément, la chaleur de l'air en Hyver : & qu'on ne soit pas surpris si j'attribuë un degré de chaleur à l'air en Hyver ; car le froid le plus violent n'étant causé que par une diminution, & non pas par une entiere extinction de la chaleur : il ne fait jamais si froid qu'il ne puisse faire encore plus froid ; ainsi quelque froid que l'air paroisse à nos sens, il conserve toujours quelque reste de chaleur.

33. Une des proprietez les plus curieuses qu'on ait reconnuë dans l'air, c'est la proportion constante qui regne entre son élasticité, & sa densité. L'experience ayant découvert que le même air, & dans un même degré de chaleur, devient d'autant plus élastique, qu'on le réduit à une plus grande densité ; les efforts que l'air fait pour se dilater, étant toujours en raison de ses densitez. La densité de l'air se mesure par la quantité d'air contenuë dans un volume donné, ou reciproquement, par l'espace connu qu'une quantité d'air occupe. Ainsi, par exemple, le piston d'une pompe pneumatique, & remplie d'air, étant enfoncé jusqu'à la moitié de la profondeur du cylindre, en sorte que l'air qui en occupoit auparavant toute la cavité, n'en occupe plus que la moitié ; cet air comprimé & réduit à un volume deux fois plus petit que son premier volume, sera dit avoir deux fois plus de densité qu'il n'en avoit avant l'avancement du piston. Reste à faire voir pourquoi dans cet état de compression, l'air repousse le piston avec deux fois plus de force ; car dans le premier état de consistance naturelle, l'air interieur repoussoit le piston en dehors avec autant de force que l'air exterieur le repoussoit en dedans. Mais dans l'état de compression dont nous venons

de parler, il faut outre la force de l'air exterieur, que celui qui enfonce le piston, employe de nouveau une force précisement égale à celle de l'air exterieur, si il veut empêcher que le piston ne rebrousse chemin ; & si on enfonce le piston dans le cylindre, en sorte que l'air enfermé se trouve réduit à un tiers de la hauteur qu'il occupoit auparavant. Cet air ainsi comprimé sera trois fois plus dense, & repoussera par consequent le piston avec trois fois plus d'effort. Car pour empêcher le retour du piston, il faut joindre à la pression contraire de l'air exterieur, une force double de cette pression, & oposer par ce moyen au piston une résistance égale à l'effort de l'air condensé ; il en est de même des autres cas que l'experience verifiera tous. J'en excepte les pressions excessivement grandes, où les forces de l'élasticité croissant en plus grande raison que les densitez ; la regle generale commence à s'écarter un peu de cette proportion. Ma theorie en découvre la raison.

34. Reprenons les deux cylindres égaux, & l'article 31. *A* & *B*, & suposons qu'il n'y ait point d'air exterieur qui agisse sur les diaphragmes *LM* & *NP*, que le cylindre *A* est rempli d'air naturel, & que le cylindre *B*, en contient huit fois autant ; l'air de ce cylindre sera huit fois plus dense que celui du cylindre *A*. Soient chargez les diaphragmes *LM*, *NP*, des poids *R* & $S + T$, dont la pesanteur proportionnée contrebalance précisement l'effort avec lequel l'air renfermé dans les cylindres *A* & *B*, tend à soulever ces diaphrames ; en sorte que les poids *R* & $S + T$, marquent les forces de l'élasticité de l'air en *A* & en *B* : il s'agit de démontrer que $R . S + T :: 1 . 8.$ c'est ce que j'execute de la maniere suivante.

35. Puisque dans l'espace *B* il y a par l'hypothese, huit fois plus d'air que dans l'espace *A*, il est visible que tout ce qui concourt à composer l'air naturel en *A*, se trouvera huit fois dans l'air en *B*, & que c'est la même chose que si j'avois introduit successivement dans le cylindre *B*, huit cylindres d'air naturel, dont chacun fut

égal au cylindre *A*; il y aura donc en *B* huit fois plus de particules terrestres, & parmi celles-ci, huit fois plus de spheres creuses de toutes façons, qu'il n'y en a en *A*, lesquelles seront entre-mêlées de la même maniere qu'elles le sont dans le cylindre *A*; avec cette seule difference, qu'en *B* toutes les dimensions des spheres creuses seront réduites à la moitié de ce qu'elles sont en *A*; je veux dire que le rayon de chacune de ces spheres, étant devenu deux fois plus petit par la compression, la distance des mobiles circulans au centre de leurs spheres, sera aussi deux fois plus petite: c'est dans cette proportion que les dimensions homologues doivent diminuer, pourvû qu'il y ait huit fois plus de spheres en *B* qu'en *A*: la raison en est manifeste, & la moindre attention aux principes de Géometrie, fait voir que dans le cas proposé, le nombre des spheres creuses de chaque espece contenuës en *B*, doit être au nombre des spheres creuses qui leurs répondent, & que contient l'espace *A* égal à l'espace *B*, en raison triplée reciproque de leurs rayons. Remarquez que je supose ici les espaces *A* & *B*, incomparablement plus grands que la plus grande des spheres creuses, sans quoi il pourroit arriver que la raison triplée reciproque ne seroit pas tout-à-fait exacte.

36. Il s'ensuit encore conformément aux mêmes principes de la Géometrie, que la multitude des spheres de chaque espece contiguës au diaphragme *NP*, est à la multitude de celles qui leurs répondent, contiguës au diaphragme *LM*, en raison doublée reciproque de leurs rayons, parce que les diaphragmes *NP* & *LM*, sont des cercles égaux; en sorte que dans le cas suposé, il y a quatre fois plus de spheres de chaque espece qui s'apuyent contre *NP*, qu'il n'y en a qui s'apuyent contre *LM*. Mais puisque de toutes les spheres que renferme un cylindre, son diaphragme n'est chargé que de la pression de celles qui le touchent immediatement; ainsi que nous l'avons fait voir dans les notes 3. & 4. de l'article 23. de ce Discours. Il reste à examiner ici combien la pres-

sion

ſion totale des ſpheres apuyées contre le diaphragme *NP*, dont le nombre eſt quadruple du nombre de celles qui s'apuyent contre le diaphragme *LM*, ſurpaſſe la preſſion que les ſpheres contenuës dans le cylindre *A*, font ſur ce même diaphragme *LM*, le calcul en eſt aiſé : le voici. Le rayon de chaque ſphere étant réduit à la moitié par la condenſation, comme on l'a dit dans l'article precedent ; & les mobiles continuans à circuler ſur chaque ſurface ſpherique avec la même vîteſſe après la condenſation, puiſqu'on ſupoſe le même degré de chaleur. Il eſt évident par le Theorême de l'article 16. que chacun des mobiles circulans, aura une force centrifuge, double de celle qu'il avoit avant la condenſation, & que chaque ſphere creuſe réduite à la moitié de ſon rayon, tendra à ſe dilater avec deux fois plus de force. Ainſi le diaphragme *NP* étant preſſé par quatre fois plus de ſpheres, & chacune de ces ſpheres ayant deux fois plus de force, il en réſulte une preſſion totale contre *NP*, deux fois, quatre fois, ou huit fois plus grande que celle avec laquelle l'air dans ſon état naturel agit ſur le diaphragme *LM*. On démontrera par le même raiſonnement, que la preſſion contre *NP* doit être vingt-ſept fois plus forte, lorſque l'air en *B* eſt vingt-ſept fois plus denſe que n'eſt l'air naturel en *A*, parce que chaque ſphere creuſe réduite par la condenſation au tiers de ſon rayon, augmentera au triple l'effort avec lequel elle tend à ſe dilater, y ayant dans ce cas trois fois trois, ou neuf fois plus de ſpheres qui agiſſent ſur *NP* ; de ſorte que la preſſion totale de l'air condenſé contre *NP*, ſera $3 \times 3 \times 3$, ou vingt-ſept fois plus grande que celle de l'air naturel contre *LM*. La démonſtration eſt generale, puiſque les preſſions ſuivent toujours la proportion des denſitez. Mais c'eſt dans la force de ces preſſions que conſiſte la force du reſſort de l'air, & de tout autre fluide élaſtique : donc les élaſticitez ſont proportionnelles aux denſitez. *C. Q. F. D.*

37. Dans tout ce raiſonnement, j'ai fait abſtraction de l'étenduë qu'auroit la matiere propre du fluide élaſti-

que, ſi toutes les particules qui la compoſent, & qui ne peuvent pas penetrer les pores des corps, étoient ramaſſées en une maſſe ſolide & ſans pores; ou plutôt j'ai ſuposé tacitement, que toute l'étenduë de cette maſſe ne feroit qu'une partie infiniment petite, de l'eſpace entier dans lequel le fluide élaſtique eſt contenu. En effet l'air naturel étant pour le moins 15000 fois moins pèſant, & par conſequent plus rare que l'or, qui lui-même n'eſt pas ſans pores; on peut dire que la matiere propre de l'air naturel, & des ſpheres creuſes qui nagent dedans, ne fait pas la quinze milliéme partie du volume qu'occupe l'air; de ſorte qu'on peut bien conſiderer cette partie comme infiniment petite par raport à l'étenduë de ſon volume entier. Mais un autre fluide élaſtique qui contiendroit beaucoup plus de matiere que l'air, ou l'air même extrêmement condenſé, demanderoit ſans doute qu'on eut égard à ce que ſon étenduë pourroit aporter de changement à notre regle; car ſoit l'eſpace A occupé par un fluide élaſtique, dont la matiere ramaſſée forme une étenduë $= b$, ſoit une autre eſpace $B =$ à A, qui tienne huit fois autant du même fluide élaſtique. On devroit dire, ſelon la définition ordinaire de la denſité, que le fluide en B eſt huit fois plus denſe que le fluide en A; mais on ſe tromperoit, puiſqu'à proprement parler, il eſt plus de huit fois plus denſe. Pour s'en convaincre on n'a qu'à conſiderer que l'eſpace entier A ou B étant nommé a, le volume que le fluide élaſtique occupe en A & en B par ſa dilatation, ſe détermine en retranchant de l'eſpace entier a, ce que le fluide ramaſſé contiendroit d'étenduë de part & d'autre, ſçavoir b & $8\,b$: de ſorte que le volume en A, n'eſt pas a, mais $a - b$, & le volume en B, $a - 8\,b$; ces deux volumes ne peuvent donc pas être pris pour égaux; comme lorſqu'on ſupoſe que la matiere du fluide ne fait pas une partie finie de l'eſpace dans lequel il eſt contenu. Je veux dire que b eſt infiniment petit par raport à a; & lorſque ces volumes ſont inégaux, la veritable denſité du fluide en B, n'eſt pas à la densité du fluide en *A*, comme la quantité de matiere en *B*, est à la quantité de matiere en *A*, ou comme 8 est à 1 ; mais en raison composée de la directe de ces quantitez, & de la raison inverse des veritables volumes que le fluide élastique occupe de part & d'autre par sa dilatation. Ainsi la densité en *B*, est à la densité en *A*, $:: \frac{8}{a-8b} \cdot \frac{1}{a-b} :: 8a - 8b. \ a - 8b.$ ce qui fait une raison plus grande que de 8 à 1. Mais par notre démonstration (*art.* 36.) les élasticitez sont toujours proportionnelles aux veritables densitez : donc la force de l'élasticité du fluide en *B*, est à la force de l'élasticité en *A*, $:: 8a - 8b. \ a - 8b.$ c'est-à-dire, en plus grande raison que 8 à 1. & en general si on introduit en *B* une quantité de fluide élastique n fois plus grande, que celle qui est en *A*, on aura l'élasticité en *B*, à l'élasticité en *A*, $:: na - nb. \ a - nb > n. \ 1.$ & par tant en une raison plus grande que celle des densitez aparentes.

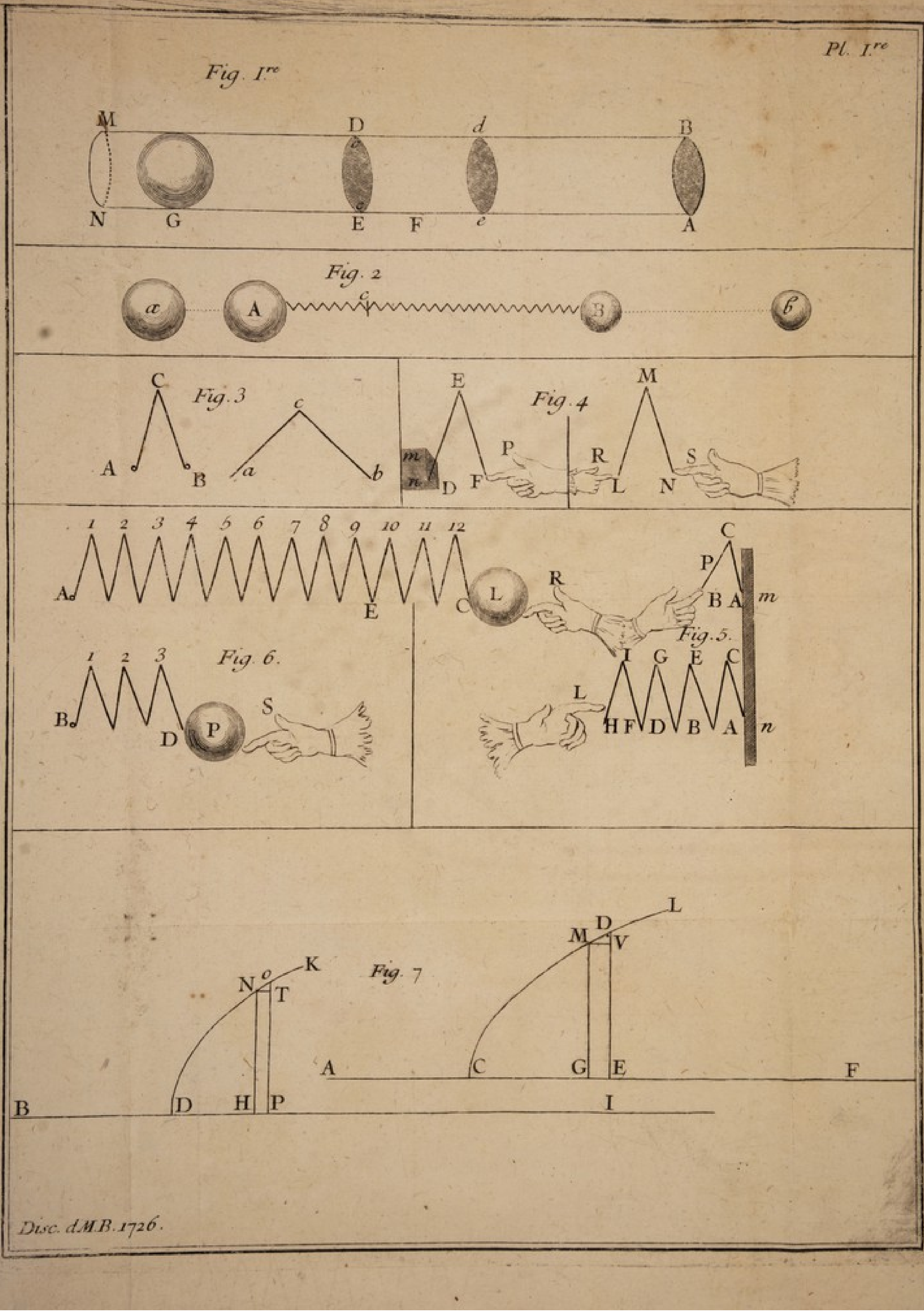
38. On remarquera que quoique b soit plus petit que $\frac{1}{15000}a$, lorsque l'air est dans son état naturel, & que par consequent il ne fasse pas une partie sensible de a ; cependant le nombre n peut augmenter si fort, que nb deviendra enfin sensible par raport à a. C'est ce qui fait que l'air extrêmement condensé, a la force de son ressort plus grande que ne semble l'exiger la densité aparente : lorsqu'on dit donc que les élasticitez de l'air sont proportionnelles à ses densitez aparentes, cela ne doit s'entendre que des densitez aparentes, mediocres ou moyennes, lesquelles ne different pas sensiblement des densitez veritables.

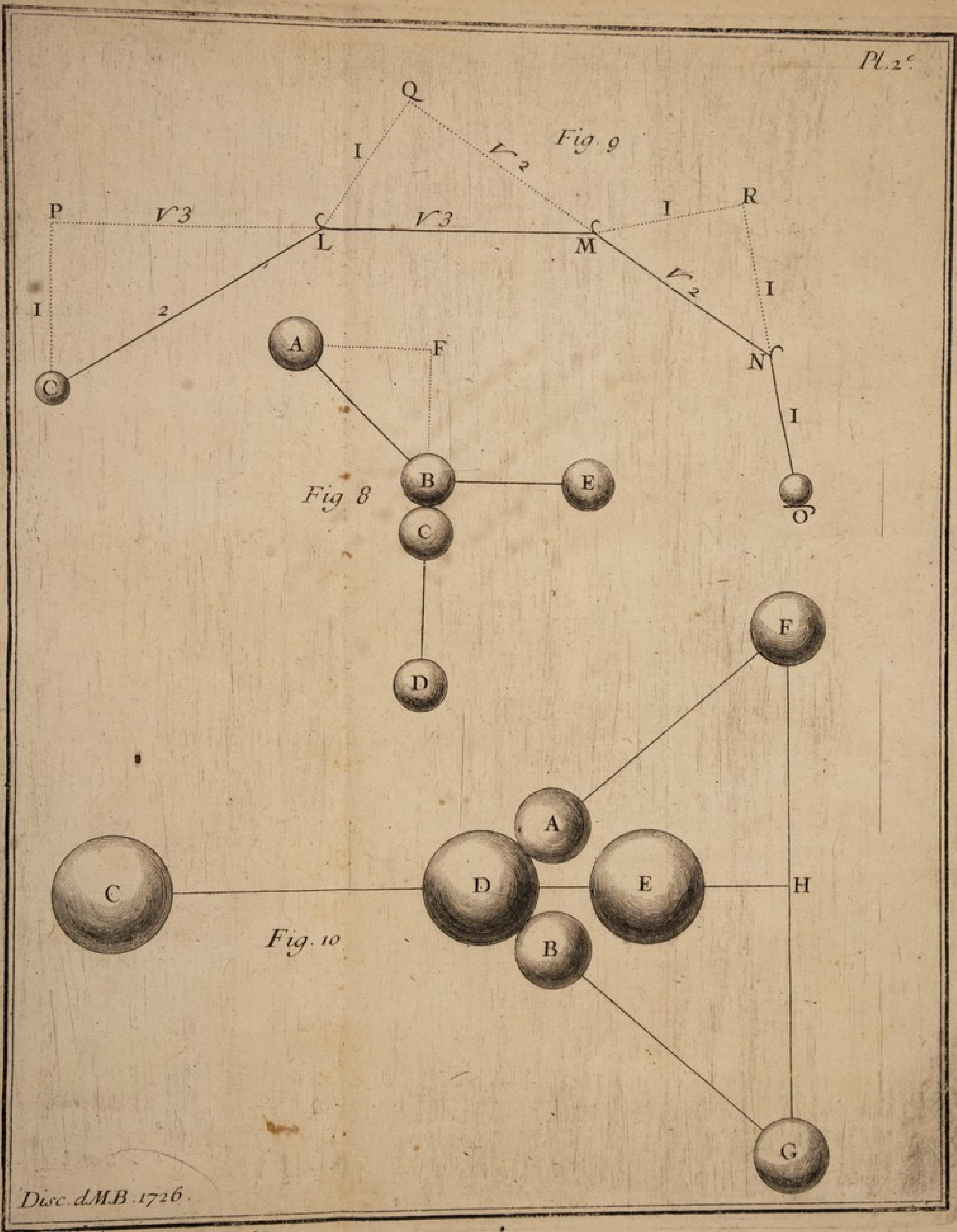
39. Nous ne connoissons jusqu'ici que la chaleur & la condensation qui augmentent le ressort de l'air, j'ai consideré ces causes separément, & j'ai determiné l'effet que chacune d'elles peut produire de son côté. Il ne sera pas difficile de determiner presentement l'effet que ces deux causes produisent étant combinées ensem-

ble, lorſque l'une & l'autre vient à être changée. Nous avons prouvé que les differens degrez de chaleur cauſent dans le même air des élaſticitez, qui ſont comme les quarrez des intenſitez de la chaleur ; & que les differentes denſitez (la même chaleur ſupoſée) ſont en ſimple raiſon des élaſticitez. On trouvera donc en composant ces deux raiſons, que les élaſticitez de deux volumes d'air differemment chauds, & differemment denſes, ſont en raiſon composée de la raiſon doublée des chaleurs, & de la ſimple des denſitez : verité qui a lieu tant que les denſitez aparentes ne different pas ſenſiblement des veritables : je veux dire tant que la compreſſion de l'air n'eſt pas aſſez grande pour que la quantité de matiere ramaſſée en une maſſe, faſſe une étenduë comparable à l'eſpace où il eſt renfermé.

40. J'aurois pû tirer ici de mes principes, diverſes conſequences qui peut-être contribuëroient à perfectionner l'uſage des Thermometres, & des Barometres. La matiere eſt riche & d'autant plus curieuſe, qu'il ne me paroît pas qu'on ait eu juſqu'à preſent des idées aſſez nettes ſur la meſure du froid & du chaud ; & ſi les Thermometres ordinaires marquent les variations qui arrivent à l'une & à l'autre de ces qualitez, c'eſt ſans indiquer au juſte la proportion qui regne entre elles, ni combien l'air eſt plus ou moins chaud en un tems qu'en un autre. Mais cette entrepriſe me meneroit trop loin, elle paſſe les bornes que je me ſuis preſcrites, & ce que Meſſieurs de l'Academie exigent de moi. Content donc de me renfermer dans une explication probable de la cauſe phyſique du reſſort, je pourrai un jour leur faire part de mes meditations, ſi cet Ecrit que j'ai l'honneur de leur preſenter, a le bonheur de leur plaire.

FIN.


Pl. I.re
Fig. I.re
M D d B
N G E F e A
Fig. 2
a A c B b
Fig. 3
C c
A B a b
Fig. 4
E M
m n D F P R L N S
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
A E C L R
C P B A m
Fig. 5.
I G E C
L
H F D B A n
Fig. 6.
1 2 3
B D P S
Fig. 7
L D M V
N o K T
A C G E F
B D H P I
Disc. d M.B. 1726.


Pl. 2e.
Fig. 9
Q
I
V 2
P
V 3
L
V 3
M
I
R
I
2
V 2
I
C
N
I
O
A
F
B
E
Fig 8
C
D
F
A
C
D
E
H
Fig. 10
B
G
Disc. d.M.B. 1726.

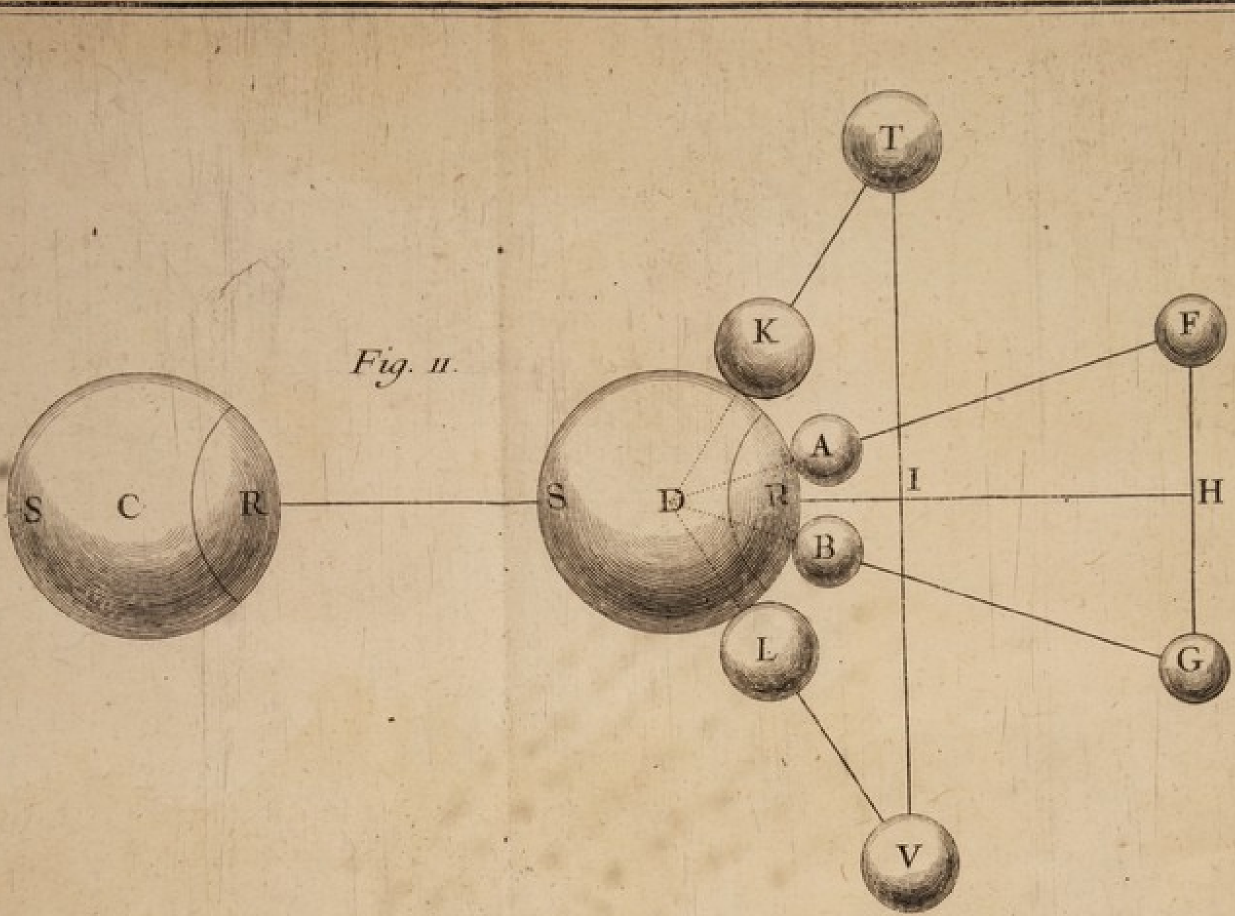


Fig. 11.

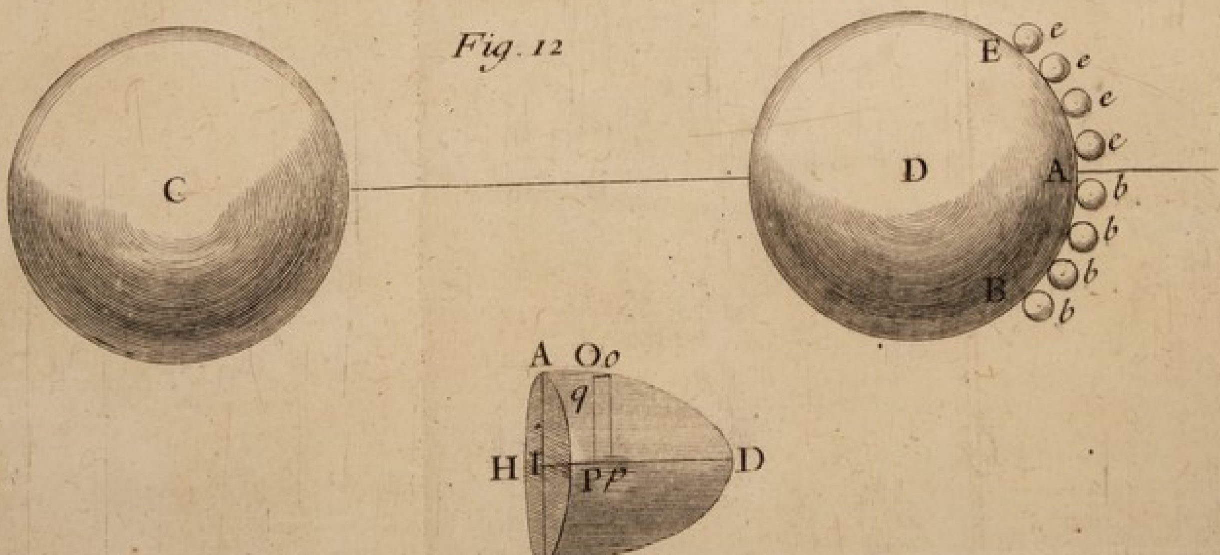


Fig. 12

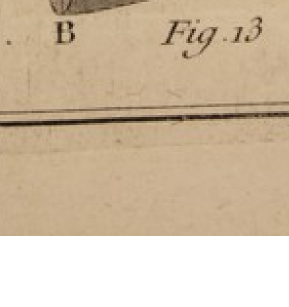


Fig. 13

Disc. d. M.B 1726

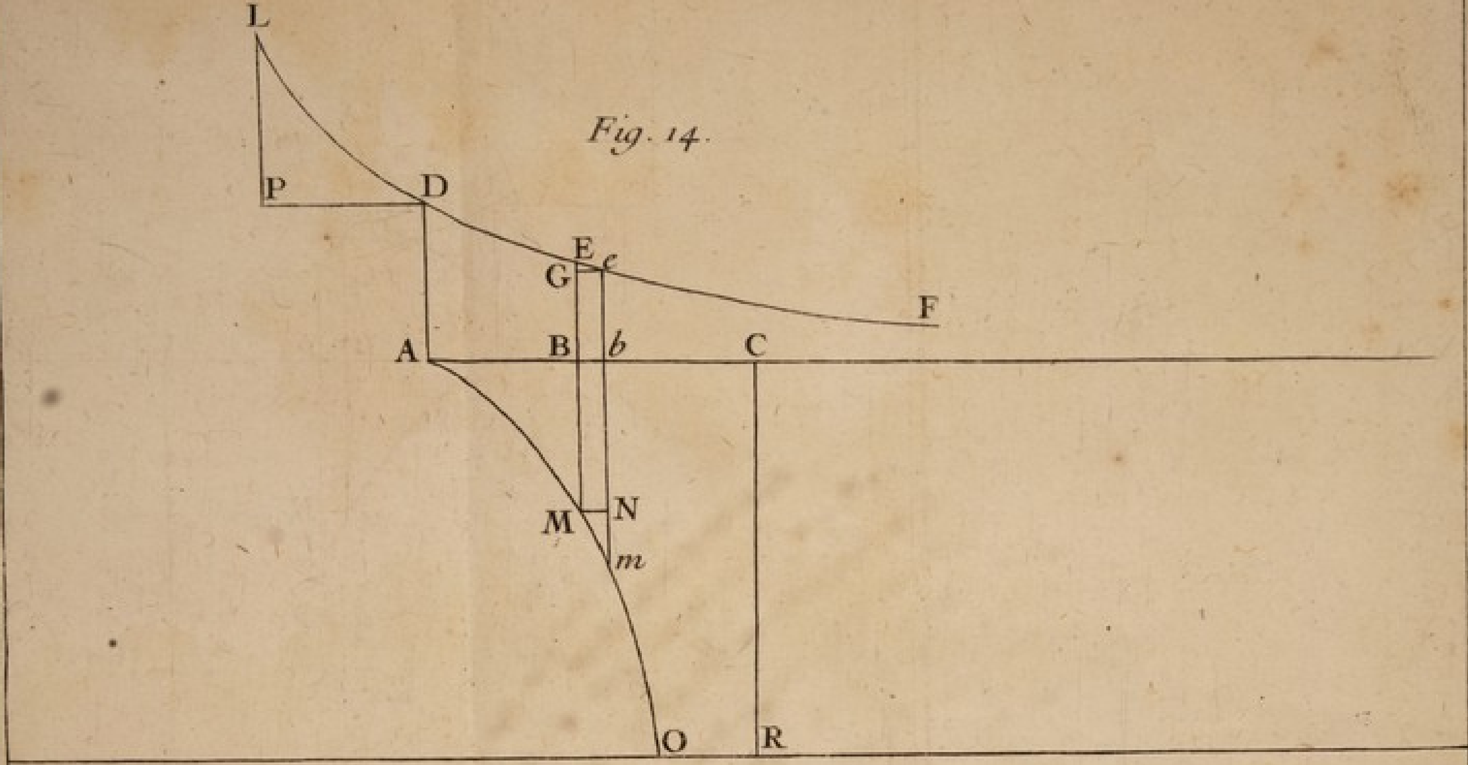


Fig. 14.

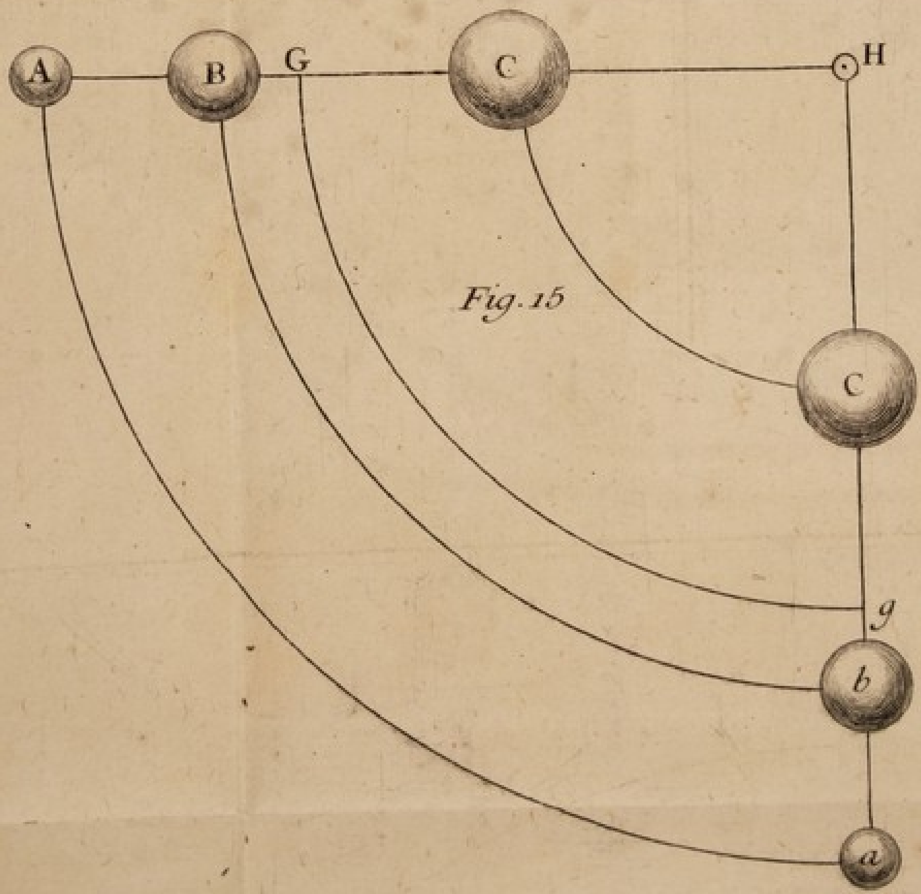
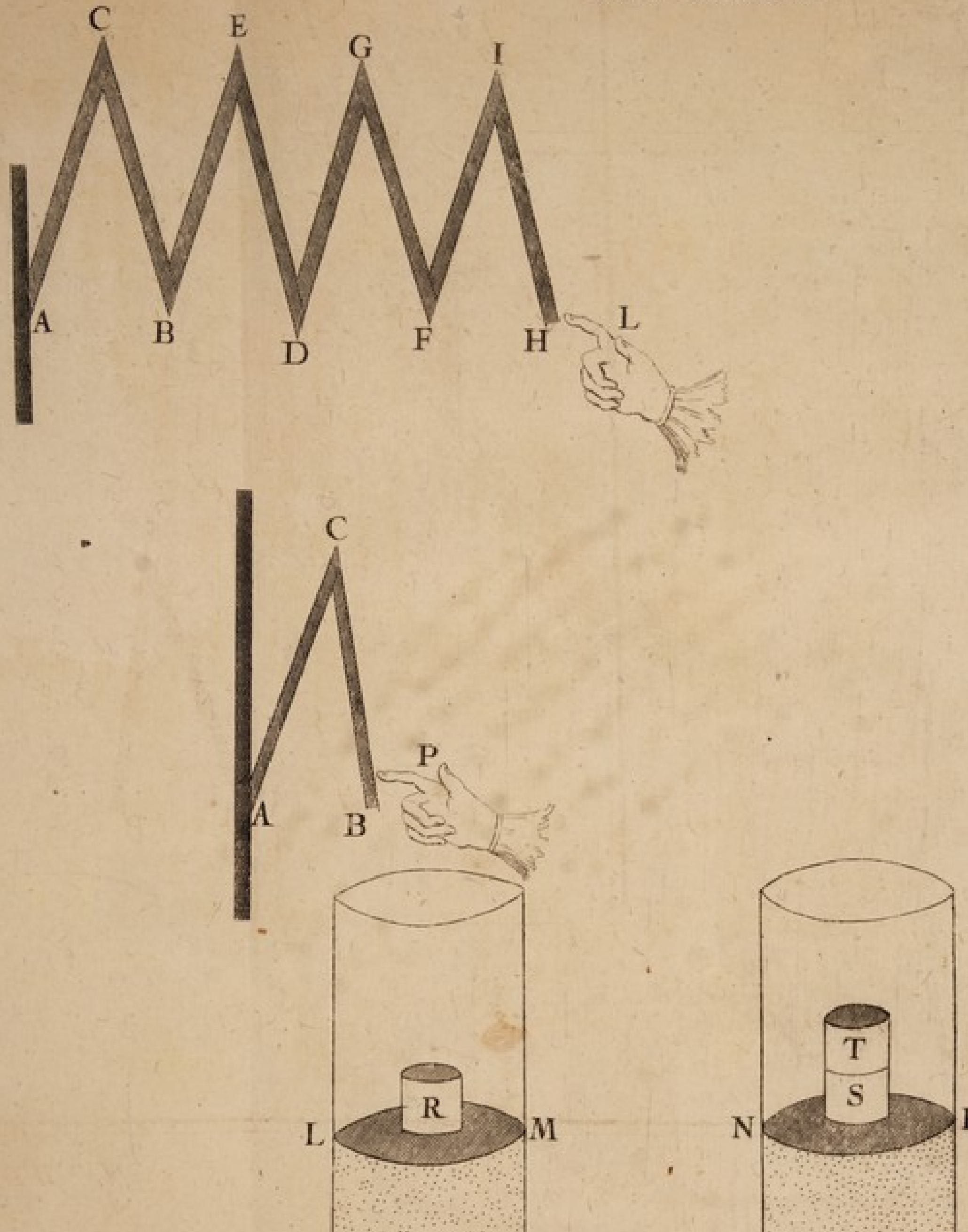


Fig. 15

Pl. 5e. Addition



Disc. d. M.B. 1726.

Fautes à corriger dans le Discours sur les Loix de la communication du Mouvement, outre celles qui sont notées dans l'Imprimé.

Page 13.	*lig.* 8.	*Art.* 6.	*A E.*	*lisez* *A e.*
16.	5.		ces ceux	ces deux
17.	*derniere*		on avoit	on n'avoit
18.	11.	12.	neuf plus	neuf fois plus
21.	6.	4.	*B A*,	*B. A*,
35.	5.	9.	un égal	une égale
43.	5.		ceder ainsi,	ceder, ainsi
44.	11. 12.		*BD, DH, DP;*	*BD. DH. DP.*
49.	21.	4.	*F D*	*F B*
56.	6.		où	ou
	ibid.		proposition, faute	proposition. Faute
	5.	5.	constament	constamment
57.	3.		l a	de la
63.	6.	21.	q ou $\frac{\sqrt{mpp}}{2n}$	q ou $\frac{\sqrt{mpp}}{\sqrt{2n}}$
67.	16.	6.	le tendre	l'étendre
	23.		*rrf*	*2rrf*
69.	7.		quelconques	quelconque
71.	5.		base *PO*, une	base, *PO* une
	12.		$\vert\frac{xdx^3}{ds^2}$	$\int\frac{xdx^3}{ds^2}$
76.	4. 5. *en place du dern.*		$\pm$	$\mp$
83.	*penultiéme*		les	ces
87.	4.	11.	inégal	inégale
88.	18.		tabules	tubules
98.	10.	26.	parfaitement	imparfaitement
99.	4.	28.	se fondent	se fendent
100.	7.	30.	chaleur, les	chaleur & les
	8.		du du	du
107.	16.		par tant	partant
108.	1.		a être	à être

Remarques sur les Figures.

Fig. 4. LEs Puiſſances *P* & *R* repreſentées par des mains, devroient avoir le bout du doigt contigu, & comme pouſſant les extremitez des reſſorts *L* & *F*.

Fig. 5. Cette Figure eſt fort mal repreſentée ; la main ſuperieure qui devroit être marquée par la lettre *P* placée trop haut, devroit être directement oppoſée au reſſort *ACB*, pour le tenir bandé : & la main inferieure *L*, devroit toucher l'extrémité *H* du dernier des reſſorts où les lettres *A*, *B*, *D*, *F*, devroient exactement répondre au commencement & aux pointes d'embas, comme ſont celles d'enhaut.

Fig. 6. Les mains *R* & *S* qui retiennent les boules *L* & *P*, devroient avoir le bout du doigt vis-à-vis des points *C* & *D*.

Fig. 7. *AC* devroit être plus longue que *BD*, en raiſon de *CG* à *DH*, au lieu qu'elle eſt plus courte.

Fig. 9. Les trois reſſorts *L*, *M*, *N*, devroient être repreſentez comme étant ſituez dans les directions *PL*, *QM*, *RN*, & le quatriéme reſſort comme perpendiculaire à *NO*.

Les Figures de la Planche 5. appartenant à l'*Addition*, devroient être numerotées, ſçavoir *Fig.* 1. celle qui repreſente les reſſorts ; & *Fig.* 2. celle qui repreſente les cylindres creux *A* & *B*.