Constructio lentium objectivarum ex duplici vitro ... dissertatio. Occasione quaestionis de perfectione telescopiorum ab Imperiali academia scientiarum Petropolitana pro praemio propositae conscripta / [Leonhard Euler].

Contributors

Euler, Leonhard, 1707-1783.
Imperiali academia scientiarum Petropolitana.

Publication/Creation

Petropoli : Typis Academiae scientiarum, 1762.

Persistent URL

https://wellcomecollection.org/works/krukfbfg

License and attribution

This work has been identified as being free of known restrictions under copyright law, including all related and neighbouring rights and is being made available under the Creative Commons, Public Domain Mark.

You can copy, modify, distribute and perform the work, even for commercial purposes, without asking permission.

Wellcome Collection
183 Euston Road
London NW1 2BE UK
T +44 (0)20 7611 8722
E library@wellcomecollection.org
https://wellcomecollection.org

21929/C

Digitized by the Internet Archive
in 2018 with funding from
Wellcome Library

https://archive.org/details/b30412559

CONSTRVCTIO
LENTIVM OBIECTIVARVM
EX
DVPLICI VITRO

quae neque confuſionem a figura ſphaerica oriundam, neque diſperſionem colorum pariant,

Auctore

LEONHARDO EVLERO.

DISSERTATIO

occaſione Quaeſtionis de Perfectione Teleſcopiorum ab Imperiali Academia Scientiarum Petropolitana pro praemio propoſitae conſcripta.

PETROPOLI

Typis Academiae Scientiarum

1762.

WELLCOME
HISTORICAL
MEDICAL
LIBRARY

1.

Lentes obiectiuas, quae vulgo ad Teleſcopia adhiberi ſolent, duplici vitio laborare, iam pridem eſt obſeruatum. Primum enim ob figuram ſphaericam, quae vtrique faciei inducitur, (quoniam ad alias figuras, quae aptiores eſſent futurae, praxis vitra poliendi nondum eſt accommodata,) a radiis extremis alia imago efformatur atque a mediis, quo fit, vt quo maior tali lenti apertura concedatur, eo maior confuſio in imaginem redundet. Alterum autem vitium, quo radii diuerſorum colorum haud pari refractione per vitrum transmittuntur, ideoque diſperguntur, non minus lentes infeſtat, dum imagines a diuerſis coloribus formatae, eo magis a ſe inuicem diuelluntur, quo maior earum a lente fuerit diſtantia. Atque ambo haec vitia ita arcte cum vitri natura et ſphaerica figura ſunt coniuncta, vt a lentibus nullo modo ſeparari queant.

2. Loquor hic autem de lentibus ſimplicibus ex vitro paratis; quodſi enim duas pluresue lentes coniungere velimus, vt vnicam quaſi lentem referant, iam

dudum modum expoſui, quo vtrumque vitium ſeorſim euitari poteſt. Binis enim pluribusue lentibus coniungendis oſtendi, quomodo ſingulas comparatas eſſe oporteat, vt confuſio ob ſphaericam figuram oriunda penitus tollatur, quod etiam in praxi vſu haud caruiſſe videtur. Alterum autem vitium, in diſperſione colorum poſitum, multiplicandis lentibus non ſolum non deſtruere, ſed ne diminuere quidem licet, ſiquidem lentes ex ſimili materia pellucida parentur.

3. Tum equidem credideram, omne vitrum ratione refractionis perinde eſſe comparatum, ideoque in mentem mihi venerat, lentes ex vitro et aqua, aliaue materia fluida pellucida, parare, ita vt fluidum intra binas lentes vitreas includeretur. Atque examine inſtituto inueni, figuram lentium vtique ita attemperari poſſe, vt diſperſio colorum coerceatur. Feci hac de re plurima experimenta, quibus iſtiusmodi lentes a diſperſione colorum immunes deprehendi, verum alterum vitium eas tanto magis inquinabat, vt nullus plane vſus inde expectandus videretur. Etſi enim priori ſcopo infinitis modis ſatisfieri poterat, inter quos alii magis, alii minus, altero vitio eſſent infecti, tamen partim prolixitas calculi, quam haec inueſtigatio poſtulat, me deterruit, ne in figuras lentium aptiores inquirerem, partim vero deſperaui, tales figuras, ſi quas inueniſſem, quam accuratiſſime per praxin obtineri poſſe. Alio autem tempore hoc negotium diligentius perſequi conſtitui.

4.

4. Theoria autem refractionis, cui illam lentium aqua repletarum confectionem superstruxi, etsi certissimis principiis innixa, plane erat noua, ac Theoriae *Newtonianae* aduersabatur, in qua assumitur, nunquam vllo modo dispersionem colorum ne diminui quidem posse, quotcunque etiam diuersa media refringentia in vsum vocentur. Etsi autem Vir summus hoc principium nusquam demonstrauerat, sed id potius precario assumserat, ne intricatioribus inuestigationibus, quae ad eius institutum minus pertinerent, se implicaret; tamen acrem ob hanc caussam adeptus sum aduersarium *Dollondum* Anglum, qui mea principia, vtpote a *Newtonianis* discrepantia, penitus censuit profliganda, quod mihi occasionem dedit Theoriam meam firmissimis rationibus confirmandi, et ab omnibus dubiis liberandi.

5. Tantum abest, vt defensio mea Viro Clarissimo displicuisse videatur, vt potius omni studio principium illud *Newtonianum* per experimenta explorauerit. Mox quidem binis prismatibus, altero vitreo, altero aqueo, coniunctis deprehendit, opinionem illam *Newtono* tributam subsistere non posse, dum obseruauit, sublata refractione dispersionem colorum non tolli ac vicissim; quod experimentum meae Theoriae corroborandae mirifice inseruit. (Vid. Transact. vol. L) Deinceps vero etiam varias vitri species pari modo examini subiecit, paratisque inde variis cuneis animaduertit, dispersionem colorum a refractionis quantitate non pendere, ideoque diuersas vitri species diuersa vi refringendi esse praeditas. Vnde recte conclusit, binis lentibus ex di-

verſis vitri ſpeciebus factis, coniungendis, vtique fieri poſſe, vt diſperſio colorum penitus tollatur. Hunc in finem neceſſe erat, alteram lentem conuexam confici, ita vt conuexitas ad concauitatem datam teneret rationem a diuerſitate refractionis determinatam.

6. Cum hac ratione tantum diſtantia foci vtriusque lentis definiatur, pro eadem vero diſtantia foci innumerabiles lentes confici poſſint, merito ſuſpicatus eſt, inter hos infinitos caſus eiusmodi binarum lentium fabricam reperiri, quae etiam ab altero vitio confuſionis a ſphaerica figura natae eſſet immunis. Non videtur Vir Clar. calculo, vel vlla Theoria, ad hanc inueſtigationem eſſe vſus; ſed potius plurimis huiusmodi lentibus diuerſae formae elaboratis, binis coniungendis explorauit, quo caſu confuſio imaginis minima, atque adeo nulla, eſſet proditura. Hoc modo eiusmodi conſtructionem ſe eruiſſe profitetur, quae lentem talem compoſitam ab vtroque vitio liberam praeſtaret; quod ſine dubio ſummum eſt inuentum, quod quidem in Dioptrica deſiderari queat, ac merito a Cel. *Shorto* ſummis laudibus condecoratur.

7. Minime autem quicquam de gloria Clar. Inventoris detracturus, hoc argumentum, meo more, per ſolam Theoriam pertractabo, quo clarius appareat, quomodo experientia cum Theoria conſentiat, ac num forte haec conſtructio lentium compoſitarum ad maiorem perfectionis gradum euehi queat. Aſſumo igitur, dari duplicis generis vitrum, atque in ſolutionem hu-

ius

ius problematis ſum inquiſiturus, *quomodo inde binas lentes confici oporteat, quae coniunctae obiecta vehementer remota tam ſine vlla colorum diſperſione, quam ſine vlla confuſione a figura ſphaerica oriunda, repraeſentent.* Quatuor ergo hic occurrunt facies ſphaericae, quarum ſingularum, ſiue ſint conuexae, ſiue concauae, radii determinari debent, vt huic duplici conditioni ſatisfiat; ex quo patet, etiamſi lentis compoſitae diſtantia foci praeſcribatur, tres tamen quantitates determinandas remanere, ideoque ob duas tantum conditiones adimplendas, infinitas adhuc ſolutiones locum habere poſſe, ex quibus deinceps eam, quae ad praxin commodiſſima videbitur, eligere licebit.

8. *S*int igitur AB et CD binae lentes ad communem axem FK conſtitutae, quas tanquam vtrinque conuexas ſpectabo, et quarum illa AB obiecta verſus dirigatur. Pro radiis lucis mediae naturae ſit ratio refractionis ex aere in vitrum, ex quo prior lens AB eſt confecta, vt ζ ad η; ratio autem refractionis ex aere in vitrum, ex quo lens poſterior CD conſtat, ſit vt ζ ad θ, ſingulae facies porro harum lentium ſint ſphaericae, et quidem: Fig. 1.

pro lente priori AB ſit radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris } AaB = a \\ \text{poſterioris } AbB = b \end{cases}$

pro lente altera CD ſit radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris } CcD = c \\ \text{poſterioris } CdD = d. \end{cases}$

Ambas autem lentes proxime eſſe coniunctas pono, et vtriusque craſſitiem quam minimam, vt eam in calculo negligere liceat.

9.

9. Statuatur porro prioris lentis AB diſtantia focalis $= p$, poſterioris vero lentis diſtantia focalis $= q$, eritque ex principiis dioptricis:

$$p = \frac{\eta a b}{(\zeta - \eta)(a + b)} \quad \text{et} \quad q = \frac{\theta c d}{(\zeta - \theta)(c + d)}$$

$$\text{ſeu } \frac{1}{p} = \left(\frac{\zeta}{\eta} - 1\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \left(\frac{\zeta}{\theta} - 1\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right),$$

qui valores quidem pro radiis lucis mediae naturae, iisque tantum, qui proxime ad axem tranſeunt, valent. Quodſi iam pro lente AB diſtantia obiecti ante eam fuerit $= f$, imago poſt eam cadet ad diſtantiam g, vt ſit $g = \frac{fp}{f - p}$, ſeu $\frac{1}{g} = \frac{1}{p} - \frac{1}{f}$, ideoque pro p reſtituto valore erit $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \left(\frac{\zeta}{\eta} - 1\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.
Simili modo ſi ante alteram lentem CD obiecti diſtantia ſit $= h$, imago poſt eam reperietur ad diſtantiam $= k$, vt ſit $\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \left(\frac{\zeta}{\theta} - 1\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$.

10. Iunctis igitur his lentibus, manenteque diſtantia obiecti ante primam $= f$, quia imago ab ea proiecta vicem gerit obiecti reſpectu alterius lentis CD, erit $h = -g$, hincque imago per lentem duplicatam cadet ad diſtantiam k, vt ſit

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{k} = \left(\frac{\zeta}{\eta} - 1\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{\zeta}{\theta} - 1\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$

ſeu $\frac{1}{f} + \frac{1}{k} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$; ita vt, ſumta diſtantia f infinita, lentis duplicatae diſtantia focalis ſit $k = \frac{pq}{p + q}$.
Quae ſi fuerit data, patet, non ſolum vtriusque lentis diſtantias focales p et q infinitis modis variari poſſe, ita vt, altera data, altera definiri poſſit, ſed etiam vtraque lens pro data eius diſtantia focali infinitas variationes reſpectu facierum recipere poteſt, ita vt, altera facie data, alteram ſemper determinare liceat.

11.

11. His in genere animaduerſis primo ſatisfaciamus huic conditioni, vt nulla colorum diſperſio oriatur, ſeu lentis duplicatae diſtantia imaginis k nullam variationem patiatur, etiamſi rationes refractionis $\zeta:\eta$ et $\zeta:\theta$ ob diuerſam radiorum lucis naturam immutentur. Cum autem haec immutatio ſit quaſi infinite parua, differentiando huic conditioni ſatisfieri poterit. Ponamus ergo pro radiis mediae naturae:

$$\frac{\zeta}{\eta}=m \text{ et } \frac{\zeta}{\theta}=n$$

ita vt habeamus hanc aequationem:

$$\frac{1}{f}+\frac{1}{k}=(m-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+(n-1)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

in qua literae a, b, c, d, f et k vt quantitates conſtantes ſunt ſpectandae, literae vero m et n vt variabiles, ita vt haec aequatio perinde ſubſiſtat, etiamſi ea differentietur. Differentiatio vero praebet:

$$dm\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+dn\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=0.$$

12. Cum igitur diſtantias focales p et q vtriusque lentis introducendo, ob $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{(m-1)p}$ et $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{(n-1)q}$, ſit $\frac{dm}{(m-1)p}+\frac{dn}{(n-1)q}=0$, ſeu $q=\frac{-p(m-1)dn}{(n-1)dm}$; hinc ratio inter diſtantias focales vtriusque lentis p et q determinatur, vt diuerſa radiorum natura nullam colorum diſperſionem pariat, ſed ab omnis generis radiis lucis imagines vniantur. Ac ſi talis ſtatuatur ratio inter diſtantias focales, vt ſit $q=-\frac{(m-1)dn}{(n-1)dm}p$, erit pro omnis generis radiis $\frac{1}{f}+\frac{1}{k}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$; neque haec determinatio ad obiecta infinite remota eſt reſtricta, ſed quaecunque fuerit obiecti diſtantia f, imago ſine vlla colorum

 diſper-

diſperſione poſt lentem geminatam ad diſtantiam $= k$ cernetur.

13. Quodſi ambae lentes ex pari vitro conficiantur, vt eſſet $n = m$, ac propterea $dn = dm$, foret $q = -p$, et diſtantia foci lentis compoſitae prodiret infinita, quae ratio eſt, quod ex vitro eiusdem indolis, quotcunque etiam lentes adhibeantur, diſperſio colorum nullo modo deſtrui poſſit. Admiſſo autem duplicis generis vitro, vt numeri m et n ſint inaequales, eatenus tantum diſperſio colorum tolli poteſt, quatenus non eſt $\frac{(m-1)dn}{(n-1)dm} = 1$, quia tum ſuperius incommodum recurreret. Quare ſi eſſet $dm : dn = m-1 : n-1$, vti *Newtonus* ſtatuiſſe perhibetur, lentes vtique compoſitae aeque parum ab hoc vitio liberari poſſent, ac ſimplices. Cum autem haec opinio non ſolum firmiſſimis argumentis a me ſit profligata, ſed etiam per experimenta a Cl. *Dollondo* ſufficienter refutata, deſtructio colorum ob hanc rationem locum habere eſt cenſenda.

14. Quoniam dm et dn variationem refractionis radiorum a media natura diſcrepantium exprimunt, vera ratio ita ſe habet, vt ſit $dm : dn = mlm : nln$, quemadmodum alio loco ſufficienter demonſtraui. Hac igitur ſtabilita ratione ex vitri differentia ratio diſtantiarum focalium $p : q$ ita ſe habebit, vt ſit $q = -\frac{(m-1)nln}{(n-1)mlm}p$. Statuamus ergo breuitatis gratia: $\frac{(m-1)nln}{(n-1)mlm} = \lambda$, vt ſit $q = -\lambda p$, neque λ vnitati aequetur, lentis compoſitae diſtantia focalis erit $k = \frac{-\lambda pp}{p - \lambda p}$, ſeu $k = \frac{\lambda p}{\lambda - 1}$. Data ergo iſta diſtantia focali k, vtriusque lentis ſimplicis

diſtan-

diſtantia focalis ita debet definiri, vt ſit $p = \frac{\lambda - 1}{\lambda} k$ et $q = -(\lambda - 1)k$.

15. Si ergo numerus λ fuerit vnitate maior, lens prior A B erit conuexa, ſeu diſtantiam focalem habebit poſitiuam, poſterior vero C D concaua, ſeu diſtantiam focalem habebit negatiuam; ſin autem λ ſit fractio vnitate minor, contrarium eueniet. Quo autem indoles numeri λ facilius perſpici queat, quia numeri m et n non multum vnitatem excedunt, erit per ſeries:

$$lm = l(1 + m - 1) = m - 1 - \tfrac{1}{2}(m-1)^2 + \tfrac{1}{3}(m-1)^3 - \tfrac{1}{4}(m-1)^4 + \text{etc.}$$

$$ln = l(1 + n - 1) = n - 1 - \tfrac{1}{2}(n-1)^2 + \tfrac{1}{3}(n-1)^3 - \tfrac{1}{4}(n-1)^4 + \text{etc.}$$

hincque numerus λ ita definietur:

$$\lambda = \frac{n(1 - \frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{3}(n-1)^2 - \frac{1}{4}(n-1)^3 + \text{etc.})}{m(1 - \frac{1}{2}(m-1) + \frac{1}{3}(m-1)^2 - \frac{1}{4}(m-1)^3 + \text{etc.}}$$

ſeu ſcribendo $m = 1 + m - 1$ et $n = 1 + n - 1$, erit

$$\lambda = \frac{1 + \frac{1}{2}(n-1) - \frac{1}{6}(n-1)^2 + \frac{1}{12}(n-1)^3 - \text{etc.}}{1 + \frac{1}{2}(m-1) - \frac{1}{6}(m-1)^2 + \frac{1}{12}(m-1)^3 - \text{etc.}}$$

vnde patet, ſi $n > m$ fore $\lambda > 1$, at ſi $n < m$ fore $\lambda < 1$.

16. Inuentis autem diſtantiis focalibus p et q, facies vtriusque lentis infinitas adhuc determinationes admittunt, quod quo facilius perſpiciatur, introducamus binos nouos numeros indeterminatos μ et ν, et cum eſſe debeat $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{(m-1)p}$ et $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{(n-1)q}$, ſtatuamus:

$$a = \frac{m-1}{\mu} p;\ b = \frac{m-1}{1-\mu} p;\ c = \frac{n-1}{\nu} q;\ d = \frac{n-1}{1-\nu} q.$$

 Quo-

Quomodocunque enim hi numeri μ et ν accipiantur, lentes semper praescriptas distantias focales obtinebunt, ac sumto $p = \frac{\lambda - 1}{\lambda} k$ et $q = -(\lambda - 1)k$, binae lentes coniunctae non solum distantiam focalem praescriptam k habebunt, sed etiam imagines quorumuis obiectorum sine vlla colorum dispersione repraesentabunt. Superest igitur, vt numeros μ et ν ita definiamus, vt etiam lens composita ab altero vitio, confusione scilicet a figura sphaerica facierum lentium oriunda, liberetur.

17. Primum igitur dispiciendum erit, quomodo in vnica lente imago a radiis extremis formata, ab imagine, quae a radiis per medium lentis transeuntibus formatur, discrepet. Sit igitur proposita lens AB, cuius faciei AaB radius sit $= a$, faciei vero $AbB = b$; quam vtramque vt conuexam specto, ratio refractionis autem ex aere in vitrum, quo haec lens constat, sit $\zeta : \eta$, seu $m : 1$, posito $\frac{\zeta}{\eta} = m$. Hinc eius distantia focalis erit $p = \frac{ab}{(m-1)(a+b)}$, vt sit $\frac{1}{p} = (m-1)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$, vnde vt ante ponamus $a = \frac{m-1}{\mu} p$ et $b = \frac{m-1}{1-\mu} p$. Iam si obiecti F ab hac lente distantia sit $aF = f$, a radiis axi proximis imago referetur in G, vt sit distantia $bG = \frac{fp}{f-p}$; per radios autem extremos FA, FB imago propius repraesentatur in g, et spatiolum Gg interuallum confusionis appellari solet, quod igitur sollicite inuestigari oportet.

18. Denotet x semidiametrum aperturae, atque calculo non parum taedioso, quem idcirco hic repetere nolo, spatium illud confusionis ita reperitur expressum:

 $((m+2)$

$$\frac{\begin{array}{l}((m+2)\mu\mu-m(2m+1)\mu+m^3)ff\\+(m-1)(4(m+1)\mu-m(3m+1))fp\\+(m-1)^2(3m+2)pp\end{array}}{2m(m-1)^2(f-p)}\cdot\frac{xx}{p}=Gg.$$

Vnde patet, si obiecti distantia f fuerit infinita, fore hoc spatium diffusionis:

$$Gg=\frac{(m+2)\mu\mu-m(2m+1)\mu+m^3}{2m(m-1)^2}\cdot\frac{xx}{p}$$

quod euanescere nequit, quicunque valor numero μ tribuatur. Minimum autem euadit, si capiatur $\mu=\frac{m(2m+1)}{2(m+2)}$; quem casum, quo diffusio imaginis in foco fit minima, *Hugenius* iam elicuit.

19. Reuertamur iam ad lentem nostram geminatam ante descriptam, ac ponamus obiecti distantiam esse quasi infinitam, eritque pro radiis per medium lentis transeuntibus distantia imaginis G, a sola prima lente proiectae $dG=p$, ac per lentes ambas proiectae $dK=\frac{pq}{p+q}$. Pro radiis vero extremis, posita aperturae semidiametro $=x$, per solam primam lentem imago erit in g, vt sit $dg=p-M.\frac{xx}{p}$ existente

$$M=\frac{(m+2)\mu\mu-m(2m+1)\mu+m^3}{2m(m-1)^2}$$

quae imago cum locum teneat obiecti ratione posterioris lentis, ponatur haec distantia negatiue sumta $-p+M.\frac{xx}{p}=g$; eritque imaginis per alteram lentem proiectae in k distantia $dk=\frac{gq}{g-q}-N.\frac{xx}{q}$, siquidem ponatur:

$$N=\frac{\begin{array}{l}((n+2)\nu\nu-n(2n+1)\nu+n^3)gg\\+(n-1)(4(n+1)\nu-n(3n+1))gq\\+(n-1)^2(3n+2)qq\end{array}}{2n(n-1)^2(g-q)^2}.$$

20. Cum iam ſit $g = -p + M.\frac{xx}{p}$, erit $\frac{gq}{g-q}$ $= \frac{-q(p - M.\frac{xx}{p})}{-p-q+M.\frac{xx}{p}}$ vbi cum particulam $\frac{xx}{p}$ vt valde paruam ſpectare liceat, erit ſatis exacte

$$\frac{gq}{g-q} = \frac{pq}{p+q} - \frac{qq}{(p+q)^2} M.\frac{xx}{p}.$$

Quam ob rem imago per lentem duplicatam a radiis extremis exhibita cadet in k, vt ſit:

$$dk = \frac{pq}{p+q} - \frac{qq}{(p+q)^2} M.\frac{xx}{p} - N.\frac{xx}{q}.$$

in valore autem numeri N, quia particulam minimam $\frac{xx}{q}$ afficit, loco g ſcribere licet valorem vero proximum $-p$, ita vt ſit:

$$N = \frac{\begin{array}{l} +((n+2)\nu\nu - n(2n+1)\nu + n^3)pp \\ -(n-1)(4(n+1)\nu - n(3n+1))pq \\ +(n-1)^2(3n+2)qq \end{array}}{2n(n-1)^2(p+q)^2}$$

et ſpatium diffuſionis eſt $Kk = (\frac{qq}{p(p+q)^2}M + \frac{1}{q}N)xx.$

21. Totum ergo negotium huc reductum eſt, vt hoc ſpatium diffuſionis ad nihilum redigatur, ſeu vt fiat:

$$Mq^3 + Np(p+q)^2 = 0$$

quae aequatio per $2n(n-1)^2$ multiplicata praebet:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n(n-1)^2}{m(m-1)^2}((m+2)\mu\mu - m(2m+1)\mu + m^3)q^3 \\ \quad + ((n+2)\nu\nu - n(2n+1)\nu + n^3)p^3 \\ \quad - (n-1)(4(n+1)\nu - n(3n+1))ppq \\ \quad + (n-1)^2(3n+2)pqq \end{array}\right\} = 0$$

Quia

Quia ergo prior conditio dedit $q = -\lambda p$, exiſtente $\lambda = \frac{(m-1)nln}{(n-1)mlm}$, habebimus:

$$\frac{n(n-1)^2}{m(m-1)^2}\lambda^2((m+2)\mu\mu - m(2m+1)\mu + m^2) =$$
$$(n+2)\nu\nu - n(2n+1)\nu + n^2$$
$$+ \lambda(n-1)(4(n+1)\nu - n(3n+1))$$
$$+ \lambda\lambda(n-1)^2(3n+2)$$

ex qua aequatione ſine dubio bini numeri μ et ν infinitis modis realiter definiri poſſunt.

22. Cum haec aequatio nimis ſit perplexa, eam ad formam ſimpliciorem reducamus, ponendo:

$$\mu = \frac{m(2m+1)+my}{2(m+2)} \text{ et } \nu = \frac{n(2n+1)-4\lambda(nn-1)+nz}{2(n+2)}$$

ac facta ſubſtitutione peruenietur ad hanc aequationem:

$$\frac{m(n-1)^2(n+2)}{n(m-1)^2(m+2)}\lambda^2(yy+4m-1) = zz-4\lambda(\lambda-1)(n-1)^2+4n-1.$$

Statuatur breuitatis gratia $\frac{m(n-1)^2(n+2)}{n(m-1)^2(m+2)}\lambda^2 = A$, qui numerus plerumque parum ab vnitate differet, eritque:

$$zz = A(4m-1)-(4n-1)+4\lambda(\lambda-1)(n-1)^2+Ayy$$

niſi igitur fuerit $4n-1 > A(4m-1)$, pro y omnes numeros accipere, et ex ſingulis numerum z definire licet; ſin autem $4n-1 > A(4m-1)$, minores tantum valores ipſius y excluduntur.

23. Ad vſum practicum autem inprimis curandum eſt, vt numeri μ et ν intra limites 0 et 1 contineantur, vel ſaltem ne multum eos transgrediantur, id quod plerumque eueniet, quando numeris y et z quam minimos valores tribuere licuerit. Tum vero etiam obſeruandum eſt, quicunque numeri pro y et z ſatis-

ſatisfaciant, eos aeque affirmatiue ac negatiue accipi poſſe, vnde quadruplices numeri pro μ et ν obtinebuntur, ſicque ſolutionum multitudo vehementer augetur. Dummodo ergo duae vitri ſpecies ratione refractionis notabiliter diuerſae habeantur, facile erit, infinitas huiusmodi lentium geminatarum conſtructiones exhibere, quae vtroque vitio, quo lentes ordinariae inquinantur, careant, atque ex illis eas, quae ad praxin maxime videantur accommodatae, eligi conueniet, ſicque nullum erit dubium, quin huiusmodi lentes perfectae confici atque ad vſum transferri queant.

24. Clar. *Dollond* quidem rationem refractionis pro vtraque vitri ſpecie, qua vſus eſt, non definiuit, neque ergo lentes duplicatas ab eo confectas mihi ad calculum reuocare licet. Ex ipſis autem calculi formulis perſpicuum eſt, vtramque refractionis legem, numeris m et n contentam, exactiſſime cognitam eſſe debere, cum leuis error ſaepe ingens diſcrimen in fabricam lentium inducere valeat. Conſultum ergo erit, pro quouis caſu oblato aliquot hypotheſes pro numeris m et n fingere, quae a vero in vtramque partem declinent, vt appareat, quanta inde differentia in conſtructione lentium naſcatur. Inprimis vero neceſſe erit, calculo peracto, plura experimenta inſtituere, ſicque Theoria adiuti tandem ad optatum finem pertingemus. Quin etiam merito ſperare licet, hoc modo non ſolum lentes ſolitis multo praeſtantiores, ſed etiam plane perfectiſſimas obtineri poſſe, in quo negotio certe neque ſumtibus neque labori parcendum videtur.

25.

25. Cum igitur ad certas vitri ſpecies calculum applicari nondum liceat, fingam, binas ſpecies vitri mihi proponi, alteram denſiorem, pro qua radiorum ex aere intrantium ratio refractionis ſit, 31 : 20; altera vero ſpecies aliquanto minus ſit denſa, ita vt ratio refractionis ſit vt 3 : 2. Illa ſpecies eius videtur vitri, quod vulgo ad lentes dioptricas adhiberi ſolet, haec vero fortaſſe vitrum vilius continet. Etiamſi autem talis ſpecies non daretur, tamen euolutio huius caſus nobis ſatis perſpicue monſtrabit, quomodo binae lentes, ex vitro denſiori et rariori paratae, formari debeant, vt effectum deſideratum praeſtent. Duplicem autem hic inueſtigationem inſtitui conueniet, prout lens prior ex vitro, vel rariori, vel denſiori, conficiatur; primo igitur in conſtructionem lentium perfectarum inquiram, quando ponitur $m = \frac{3}{2}$ et $n = \frac{31}{20}$; tum vero vice verſa ponam $m = \frac{31}{20}$ et $n = \frac{3}{2}$; pro vtroque vero caſu calculus haud multum diſcrepabit.

I. Caſus, quo $m = \frac{\zeta}{\eta} = \frac{3}{2}$ et $n = \frac{\zeta}{\theta} = \frac{31}{20}$.

26. Hic igitur primo pro radiis ſingularum facierum habemus:

$$a = \frac{1}{2\mu}p; \quad b = \frac{1}{2(1-\mu)}p; \quad c = \frac{11}{20\nu}q; \quad d = \frac{11}{20(1-\nu)}q$$

tum vero quaeratur numerus $\lambda = \frac{31\, l n}{33\, l m}$. Eſt vero

$ln = 0,1903317$; $lln = 9,2795111$; $llm = 9,2457380$

$lm = 0,1760913$; $l31 = 1,4913617$; $l33 = 1,5185139$

$$\begin{array}{rr} 0,7708728 & 0,7642519 \\ 0,7642519 & \\ \hline l\lambda = 0,0066209. & \end{array}$$

Ergo

Ergo $\lambda = 1,015315$; et $q = -1,015315 p$; tum vero si lentis compositae distantia focalis esse debeat $= k$, erit:

$$p = 0,015083 k \text{ et } q = -0,015315 k,$$

sicque lens prior erit conuexa, posterior vero concaua. Porro reperitur $A = \frac{25773}{21700} \lambda^3 dt$ $\quad l\lambda^3 = 0,0198627$

$$l 25773 = 4,4111650$$

hinc $A = 1,24328$. $\quad 4,4310277$.

$$l 21700 = 4,3364597$$

ideoque aequatio resoluenda $\quad lA = 0,0945680$

$$zz = 5A - 5,2 + 0,018815 + Ayy, \text{ seu}$$

$$zz = 1,035215 + 1,24328 yy.$$

27. A numeris autem y et z ita pendent numeri μ et ν, vt sit:

$$\mu = \frac{12 + 3y}{14} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{132,24 + 310z}{1420}.$$

Hi valores fere ad medium limitum 0 et 1 perduci possunt, sumendo $y = -\frac{5}{3}$, quo fiat exacte $\mu = \frac{1}{2}$; tum vero erit:

$$zz = 1,035215 + 3,453555 = 4,488770$$

et $z = 2,11867$, hincque $\nu = \frac{789,0277}{1420} = 0,55565$; vnde deducimus $a = p$; $b = p$; $c = \frac{0,55}{0,5556} q$; $d = \frac{0,55}{0,4444} q$. Cum nunc sit $p = 0,015083 k$ et $q = -0,015315 k$, radii facierum lentis ita se habebunt:

$$a = 0,015083 k; \quad c = -0,015159 k$$
$$b = 0,015083 k; \quad d = -0,018956 k.$$

In fig. 4. et 5. talem lentem duplicatam exhibeo pro casu $k = 10000$ scrup. pedis, seu 10 pedum. Prior quidem ad maiores arcus extenditur, qui vix admitti posse videntur; posterior nimis magnos arcus non inuoluit, at vero etiam sufficientis aperturae, qualem distantia focalis 10 pedum postulat, non est capax. Quodsi vero huiusmodi lentes ad multo maiores distantias focales construantur, aperturam satis magnam recipere poterunt. Fig. 4. et 5.

II. Casus, quo $m = \frac{21}{20}$ et $n = \frac{5}{2}$.

28. Hic statim fit pro facierum radiis:

$$a = \frac{11}{20\mu}p; \quad b = \frac{11}{20(1-\mu)}p; \quad c = \frac{1}{2\nu}q; \quad d = \frac{1}{2(1-\nu)}q$$

numeri vero λ valor praecedentis fit reciprocus, scilicet:

$$\lambda = 0,984685 \quad \text{et} \quad l\lambda = 9,9933791 \quad \text{hincque}$$

$$p = -0,015315k \quad \text{et} \quad q = 0,015083k,$$

vbi ratio inter conuexitatem et concauitatem eadem est atque ante. Quin etiam valor ipsius A praecedentis est reciprocus, ideoque $A = 0,804326$, vnde obtinetur haec aequatio:

$$zz = 4,182495 - 5 - 0,014855 + 0,804326yy$$

seu $zz = -0,832360 + 0,804326\,yy$; tum vero est

$$\mu = \frac{1271 + 310y}{1420} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{2,15312 + 3z}{14}$$

si capiatur $y = \frac{3}{2}$, reperitur $zz = 0,977373$ et $z = \pm 0,98860$, at si $y = 2$, reperitur $zz = 2,384944$ et $z = \pm 1,54432$.

29. Euidens est, postremum casum, si ipsius z capiatur valor positiuus, ipsius y vero negatiuus, numeros μ et ν proxime ad $\frac{1}{2}$ reducere; erit ergo:

 $\mu =$

$$\mu = \frac{651}{1420} = 0,45845 \text{ et } \nu = \frac{6,78608}{14} = 0,48472,$$

hincque

$$a = \frac{0,55}{0,45845}p;\ b = \frac{0,55}{0,54155}p;\ c = \frac{q}{0,96944};\ d = \frac{q}{1,03056}$$

qui valores per diſtantiam focalem k lentis ipſius compoſitae ita exprimuntur:

$$a = -0,018373k;\ c = +0,015558k$$
$$b = -0,015554k;\ d = +0,014636k.$$

Haec igitur lens compoſita vix differt a praecedente, ſi inuertatur, et lens concaua obiectum verſus dirigatur. Interim tamen calculus non oſtendit, talem inverſionem ſemper locum habere; vnde et hoc caſu inuerſio proxime tantum valet, et fortuito euenire cenſenda eſt. Probe autem tenendum eſt, menſuras calculo erutas ſummo ſtudio in praxi obſeruari oportere; ſi enim vel minimum ab iis aberrauerimus, lens inde confecta ingentia vitia facile contrahet.

30. Inprimis autem numerus λ accuratiſſime eſt obſeruandus, cum leuiſſima aberratio diſperſionem colorum vix minuat, id quod hoc modo oſtendi poteſt: Concipiatur lens ſimplex diſtantiae focalis $= k$, et ob diuerſam radiorum refrangibilitatem focus diffundetur per ſpatiolum dk, vt ſit $\frac{-dk}{kk} = \frac{dm}{(m-1)k}$. Nunc vero pro lente noſtra compoſita ſpatiolum diffuſionis dk ita exprimitur, vt ſit $-\frac{dk}{kk} = \frac{dm}{(m-1)p} + \frac{dn}{(n-1)q}$, quod ponamus non ad nihilum redigi, ſed parti $\frac{1}{\alpha}$ illius ſpatioli $\frac{dm}{(m-1)k}$ aequari debere; vt ſit ob $\frac{1}{k} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$:

$$\frac{dm}{(m-1)p} + \frac{dn}{(n-1)q} = \frac{dm}{\alpha(m-1)p} + \frac{dm}{\alpha(m-1)q}$$

vnde

vnde fit $\frac{q}{p} = \frac{-\alpha(n-1)dn}{(\alpha-1)(n-1)dm} + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{-\alpha\lambda}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1}$ ideoque $q = -(\lambda + \frac{\lambda-1}{\alpha-1})p$. Dummodo ergo diſperſio colorum modice imminuenda ſit, proxime fit $q = -\lambda p$; vnde intelligitur, a vero valore ipſius λ minime eſſe recedendum.

31. Cum in lentibus ſimplicibus, quae ingentem foci diſtantiam habere debent, magnitudo ſphaerarum, facies earum determinantium, in praxi maximam difficultatem creare ſoleat, hic commode vſu venit, vt etiam pro maxima diſtantia focali admodum exiguae ſphaerae negotium abſoluant; veluti ſi foci diſtantia k debeat eſſe 100 pedum, ex caſu primo radii facierum ita ſe habebunt:

$a = 1,5083$ ped. $c = -1,5159$ ped.

$b = 1,5083$ ped. $d = -1,8956$ ped.

ſicque ne ſphaera quidem opus eſt, cuius radius ad duos pedes exſurgat; ac talis lens facile aperturam 5 pollicum admittit, quantam diſtantia focalis 100 pedum exigit, quin etiam aperturam 10 pollicum admitteret, vnde tubus confici poſſet aeque amplificans, ac vulgaris 400 pedum, qui inſuper a diſperſione radiorum ſit immunis. Verum pro exiguis teleſcopiis huiusmodi lentes compoſitae nullum vſum praeſtabunt, quia debitae aperturae ſunt incapaces, quemadmodum iam pro diſtantia focali decem pedum obſeruaui, vbi apertura vix vnum pollicem ſuperare poteſt.

32. Ratio huius incommodi manifeſto in hoc eſt ſita, quod binae vitri ſpecies nimis parum ratione refractionis diſcrepant; ſi alia daretur materia diaphana,

multo magis a vitri ratione discrepans, nullum est dubium, quin duplicem scopum multo felicius attingere liceat. Aqua quidem multo minori refractionis gradu est praedita, sed ob fluiditatem figurae lentium refragatur; crustis autem vitreis inclusa etiam vitri refractio accedit, et negotium turbat. Verum hoc incommodum tolli posse videtur, si crustae vbique aequaliter sint crassae, seu instar meniscorum parentur, in quibus radius conuexitatis praecise sit radio concauitatis aequalis, simulque crassities sit minima. Tales ergo lentes tanquam aqueas spectare licebit, operaeque pretium erit, constructionem eiusmodi lentium compositarum euoluere, vbi altera sit vitrea, altera aquea.

III. Casus, quo lens AB est aquea et lens CD vitrea.

33. Pro lente ergo priori est $m = \frac{4}{3}$ et pro posteriori $n = \frac{31}{20}$, hinc fit $a = \frac{1}{3\mu} p$; $b = \frac{1}{3(1-\mu)} p$; $c = \frac{11}{20\nu} q$; $d = \frac{11}{20(1-\nu)} q$; tum vero $\lambda = \frac{31}{44} \frac{l\,n}{l\,m} = 1,073304$ et $l\lambda = 0,0307228$ et $A = \frac{77319}{31000} \lambda^3 = 3,08385$, atque $p = +0,06830\,k$; tum $\mu = \frac{11 + 3y}{15}$ et $\nu = \frac{6,6757 + 31z}{142}$; $q = -0,07330\,k$.

Nunc vero numeros y et z ex hac aequatione definiri oportet:

$$zz = 8,25855 + 3,08385\,yy$$

Sumamus y ita, vt fiat $\mu = \frac{1}{2}$, eritque $y = -\frac{7}{6}$, et

$$zz = 12,45601, \text{ ideoque } z = \pm 3,52930$$

Sumatur valor positiuus, fietque $\nu = 0,81749$, hincque

$a = b = \frac{2}{3}p$; $c = \frac{0,55}{0,81749}q$; et $d = \frac{0,55}{0,18251}q$; vnde radii facierum ita ſe habebunt :

$a = 0,04553\ k$; $c = -0,049315\ k$

$b = 0,04553\ k$; $d = -0,220892\ k$

ſi $y = -\frac{1}{2}$ reperitur $\mu = \frac{18}{38}$; $\nu = 0,70301$

$a = 0,035947$; $c = -0,057346$

$b = 0.062091$; $d = -0,135745$

ſi $y = -\frac{7}{8}$, fit $b = -c$, qui caſus notandus.

34. In figura appoſita ſumſi $k = 5$ ped. vel 50 dig. menſurae Rhenanae, ita vt in digitis ſit: Fig. 6.

pro lente AB vtriusque faciei radius conuex. $= 2,276$ dig.

ro lente autem CD radius faciei $\begin{cases} \text{anter.} = -\ 2,466 \text{ dig.} \\ \text{poſter.} = -11,045 \text{ dig.} \end{cases}$

vbi lentem anteriorem aqueam cruſtis vitreis incluſam repraeſentaui, quae duabus meniſcis conſtat, quarum tam conuexitatis quam concauitatis radius ſit 2,276 dig. Has igitur lentes iungendo oritur lens compoſita, diſtantiam focalem 5 pedum habens, quae ſi aperturam 2 dig. admitteret, ad multiplicationem ſexagies adhiberi poſſet. Sin autem menſurae aſſignatae duplicentur, vt lens compoſita conſequatur diſtantiam focalem 10 pedum, ea certe aperturam vltra 3 digitos admittet, ideoque obiecta plus quam centies multiplicare poterit.

35. Hic poſita ratione refractionis ex aere in vitrum $= 1,55 : 1$, pro ratione refractionis ex aere in aquam aſſumſi $= 1,33 : 1$, quae ſi forte a veritate aberret, conſtructio lentis compoſitae hic deſcriptae voto

minime

minime respondebit, siquidem, vt vidimus, minima aberratio omnem nostram expectationem fallere potest. Huic autem incommodo remedium afferri posse videtur, si mixtura ex aqua et spiritu vini ita praeparetur, vt differentia refractionum accuratissime conueniat cum ea, quae in calculo fuerit assumta. Cum igitur ratio refractionis ex aere in spiritum vini sit fere $= 1,37 : 1$, ponamus, eiusmodi fieri mixturam, in qua ratio refractionis sit $1,35 : 1$. quae semper certe obtineri poterit, atque retenta vitri refractione $= 1,55 : 1$, determinationes vtriusque lentis pro hoc casu quaeramus, vbi quidem lentem anteriorem ex aqua, posteriorem vero ex vitro confici ponamus.

IV. Casus, quo $m = 1,35$ et $n = 1,55$.

36. Erit ergo $a = \frac{0,35}{\mu} p$; $b = \frac{0,35}{1-\mu} p$; $c = \frac{0,55}{\nu} q$; $d = \frac{0,55}{1-\nu} q$, tum $\lambda = \frac{(m-1) n l n}{(n-1) m l m} = 1,06698$ et $l\lambda = 0,0281572$ et $p = (1 - \frac{1}{\lambda}) k = 0,06278 k$; $q = -(\lambda - 1) k = -0,06698 k$. Porro $A = \frac{m (n-1)^2 (n+2)}{n (m-1)^2 (m+2)} \lambda^5 = 2,76215$. Iam statuamus esse $\mu = \frac{1}{2}$, ac fit $my = 2 - 2mm$, hinc $y = -1,218518$ et aequatio, ex qua z definiri debet, est

$$zz = 12,15346 - 5,2 + 0.08648 + 4,11065$$

seu $zz = 11,15059$ et $z = 3,33925$,

vnde $\nu = \frac{n(2n+1) + 4\lambda(nn-1) + nz}{2(n+2)} = 0,78099$.

Ergo $a = b = 0,7 p$; $c = \frac{0,55 q}{0,78099}$; $d = \frac{0,55 q}{0,21901}$;

ex quo lentis constructio ita se habebit:

$$a = 0,043946\, k; \quad c = -0,04717\, k$$
$$b = 0,043946\, k; \quad d = -0,16807\, k.$$

37. Forma huius lentis parum differt a praecedente, et quo distantia focalis k fiat 50 dig. lentis aqueae A B conuexae radium vtriusque faciei sumi oportet $=2,1973$ dig. pro altera autem lente vitrea CD statui debet radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 2,3585 \text{ dig.} \\ \text{posterioris} = 8,4035 \text{ dig.} \end{cases}$ vtraque facta concaua. Quodsi talis lens omni cura fuerit elaborata, tum variae praeparentur mixturae ex aqua et spiritu vini secundum diuersas proportiones, et experimentando exploretur, quaenam earum binis meniscis inclusa optatum effectum producat: haecque methodus lentem omnibus numeris absolutam obtinendi commodissima videtur, et ad praxin maxime idonea. Distantiam quidem focalem non nimis paruam assumi conuenit, quia talis lens sufficientem aperturam non admitteret, et hanc ob causam ea non infra 5 pedes sumenda videtur; quo maior autem statuatur, eo luculentius erit lucrum prae lentibus simplicibus eiusdem foci.

38. Ex his casibus euolutis colligimus, si duae materiae pellucidae diuersae indolis praesto sint, ac lens anterior seu obiecta respiciens ex ea, quae minore refractione gaudet, conficiatur, eam vtrinque aeque conuexam fieri posse; tum autem alteram, ex materia magis refringente factam vtrinque quidem concauam, sed inaequaliter, confici debere. Operae igitur pretium erit, si lentis anterioris A B vtriusque faciei radius detur, conspectui exponere, quomodo radii vtriusque faciei concauae, alterius lentis definiantur Cum igitur in casibus expositis sit ratio refractionis pro lente po-

 steriori

ſteriori $n = \frac{31}{23}$, poſito $a = b = 1$, radii c et d ita ſe habebunt :

	ſi $m = 1,55$	ſi $m = 1,50$	ſi $m = 1,35$	ſi $m = 1,33$
$a = 1$	$c = -1,0000$	$c = -1,00506$	$c = -1,07336$	$c = -1,08314$
$b = 1$	$d = -1,0000$	$d = -1,25680$	$d = -3,82758$	$d = -4,85157$

vnde etiam pro caſibus mediis valores c et d concludere licet.

APPENDIX
de lentium obiectiuarum vulgarium emendatione.

39. Si vel duplicis generis vitrum, cuius quidem refractionis ratio ſatis ſit diuerſa, comparari nequeat, vel ſi aquae vſus minus ex voto ſuccedat, calculus ſupra euolutus ſumma cum vtilitate ad emendationem lentium vulgarium adhiberi poterit, neglecta priori conditione, qua diſperſioni colorum occurritur. Iam pridem quidem lentium multiplicatione confuſionem a figura ſphaerica oriundam imminuere, atque adeo ad nihilum redigere ſum conatus, verum ibi ſingulas lentes ſeorſim minimam confuſionem parere aſſumſi, qui caſus ad praxin maxime accommodatus videbatur; neque tum hunc ſcopum binis lentibus attingere licuit. Si autem lentes quaſcunque admittere velimus binis coniungendis confuſio omnis tolli poterit, vbi autem probe tenendum eſt, multo maiorem ſollertiam ad eas efformandas ab artifice requiri.

40. Quo igitur huic tantum conditioni ſatisfaciamus, ambas lentes ex pari vitri ſpecie confectas aſſumo

mo, vt ſit $n=m$; ac poſita prioris AB diſtantia focali $=p$, poſterioris CD vero $=q$, facies lentium ita ſe habebunt, vt ſint earum radii $a=\frac{m-1}{\mu}p$; $b=\frac{m-1}{1-\mu}p$; $c=\frac{m-1}{\nu}q$, et $d=\frac{m-1}{1-\nu}q$. Nunc cum de colorum diſperſione tollenda non ſit quaeſtio, numerus λ pro arbitrio aſſumatur, ſeu ſit $q=-\lambda p$, vnde poſita lentis compoſitae diſtantia focali $=k$, erit $p=(1-\frac{1}{\lambda})k$, et $q=-(\lambda-1)k$ Tum vero ſi ponamus $\mu=\frac{m(2m+1)+my}{2(m+2)}$ et $\nu=\frac{m(2m+1)-4\lambda(mm-1)+mz}{2(m+2)}$ ob quantitatem $A=\lambda^3$, vniuerſa determinatio ad huius aequationis reſolutionem perducitur:

$$zz=(4m-1)(\lambda^3-1)+4(m-1)^2\lambda(\lambda-1)+\lambda^3 yy,$$

vbi patet, ſingulos valores pro y et z inueniendos tam affirmatiue quam negatiue accipi poſſe.

41. Statuamus ergo pro vitro, vnde ambae lentes parantur, $m=\frac{31}{20}=1,55$, quo valore ſubſtituto habebimus:

$$a=\frac{0,55}{\mu}p\,;\ b=\frac{0,55}{1-\mu}p\,;\ c=\frac{0,55}{\nu}q\,;\ d=\frac{0,55}{1-\nu}q$$

tum vero $p=(1-\frac{1}{\lambda})k$ et $q=-(\lambda-1)k$.

Porro $\mu=\frac{1271+310y}{1420}$ et $\nu=\frac{1271-1122\lambda+310z}{1420}$ vnde aequatio reſoluenda erit:

$$zz=(\tfrac{26}{5}+yy)\lambda^3+1,21\lambda\lambda-1,21\lambda-\tfrac{26}{5}$$

vbi euidens eſt, pro y omnes numeros pro lubitu aſſumi poſſe, cum pro zz ſemper numerus poſitiuus prodeat, dum ſit $\lambda>1$. At ſi $\lambda<1$, ob terminos negatiuos praeualentes, numerus y certum limitem ſuperare debet. Verum pro λ valorem negatiuum omnino aſſumere non licet. Perpetuo autem cauendum eſt, ne

 nu-

numeri μ et ν extra limites 0 et 1 excurrant, quippe quo casu menisci orientur, in quibus leuissimus error funestus esse potest.

42. Statuatur ergo lens prior AB vtrinque aequaliter conuexa, seu $\mu = \frac{1}{2}$, sumique debet $310y = 710 - 1271$, seu $y = -\frac{561}{310}$, et $yy = 3,27493$. vnde nostra aequatio erit:

$$zz = 8,47493\lambda^3 + 1,21\lambda\lambda - 1,21\lambda - 5,2$$

et habebimus $a = b = 1,1p = \frac{11}{10}(1 - \frac{1}{\lambda})k$

si $\lambda = 2$; $a = b = 0,55k$; $c = \frac{-55k}{176,033}$; $d = \frac{55k}{76,033}$

seu $c = -0,31244k$; $d = +0,72337k$.

Hic primo obseruo, si esset $\lambda = 1$, fieret $zz = yy$ hoc autem casu ambae distantiae focales p et q euanescerent. Tum si λ parum superet vnitatem, quantitates p et q nimis fierent exiguae, quod in praxi non parum est incommodum. In superiori Casu III. habuimus $\lambda = 1,073$, quo ergo valore hic maiores assumamus. Neque vero opus est, vt ad valorem $\lambda = 2$ ascendamus, quia tum numerus ν limites 0 et 1 transgrederetur. Sequentes ergo casus euoluamus.

Casus I.

43. Sit $\lambda = \frac{11}{10}$, erit $p = \frac{1}{11}k$; $q = -\frac{1}{10}k$ et $a = b = \frac{1}{10}k$; tum vero $zz = 6,21323$ et $z = \pm 2,49263$, cuius sumto valore positiuo fit $\nu = \frac{809,5155}{1420} = 0,57008$, ergo $c = \frac{0,55q}{0,57008}$ et $d = \frac{0,55q}{0,42992}$. Ex quo binarum lentium radii facierum erunt:

$a = 0,10000k$; $c = -0,09649k$

$b = 0,10000k$; $d = -0,12796k$

haec

haec ergo lens ad ſummum admittit aperturam, cuius diameter $= \frac{64}{1000}k = \frac{1}{16}k$; quae ergo ad ſatis paruas diſtantias focales adhiberi poteſt.

Caſus II.

44. Sit $\lambda = \frac{12}{10} = 1,2$; erit $p = \frac{1}{6}k$ et $q = -\frac{1}{5}k$; atque $a = b = \frac{11}{60}k = 0,18333k$. Tum vero reperitur:

$$zz = 9,73507 \text{ et } z = 3,12011,$$

hincque $v = \frac{1271 - 1346 + 967,231}{1420} = 0,62805$

ergo $c = \frac{0,55q}{0,62805}$ et $d = \frac{0,55q}{0,37195}$,

vnde pro lentibus conſtruendis radii ita ſe habent:

$$a = 0,18333k; \quad c = -0,17514k,$$
$$b = 0,18333k; \quad d = -0,29573k$$

quae lens admittit aperturam $\frac{1}{9}k$ in diametro.

Caſus III.

45. Sit $\lambda = \frac{13}{10} = 1,3$; erit $p = \frac{2}{13}k$; $q = -\frac{2}{10}k$ atque $a = b = \frac{33}{130}k = 0,253846k$; tum vero prodit:

$$zz = 13,89130 \text{ et } z = 3,72710$$

hinc $v = \frac{967,801}{1420} = 0,68155$; $c = \frac{0,55q}{0,68155}$ et $d = \frac{0,55q}{0,31845}$

vnde radii pro vtraque lente ita ſe habent:

$$a = 0,25385k; \quad c = -0,24209k$$
$$b = 0,25385k; \quad d = -0,51813k$$

aperturae diameter eſſe poteſt $\frac{1}{8}k$.

Caſus IV.

46. Sit $\lambda = \frac{14}{10} = 1,4$; erit $p = \frac{2}{7}k$ et $q = -\frac{2}{5}k$; atque $a = b = \frac{22}{70}k$; tum vero prodit:

$$zz = 18,73277 \text{ et } z = 4,32814$$

 hinc

hinc $y = \frac{1041,923}{1420} = 0,73375$

Ergo $c = \frac{0,55q}{0,73375}$ et $d = \frac{0,55q}{0,26625}$, vnde radii vtriusque faciei erunt :

$a = 0,31429\,k$; $c = -0,29981\,k$

$b = 0,31429\,k$; $d = -0,82625\,k$

hic diameter aperturae esse potest $\frac{1}{5}k$.

Casus V.

47. Sit $\lambda = \frac{3}{2} = 1,5$; erit $p = \frac{1}{3}k$, $q = -\frac{1}{2}k$ atque $a = b = \frac{11}{30}k$; tum vero prodit :

$zz = 24,31033$ et $z = 4,93056$

hincque $y = \frac{1116,4706}{1420} = 0,78624$.

Ergo $c = \frac{0,55q}{0,78624}$ et $d = \frac{0,55q}{0,21376}$, vnde radii vtriusque faciei nostrarum lentium sunt :

$a = 0,36666\,k$; $c = -0,34976\,k$

$b = 0,36666\,k$; $d = -1,28650\,k$

cuius diameter aperturae fere ad $\frac{1}{4}k$ exsurgere potest, siquidem sumamus, in huiusmodi lentibus diametrum aperturae duabus partibus tertiis radii minimi aequari posse; vt arcus nullus 40 gradibus maior in aperturam ingrediatur.

48. Cum eadem ergo lente priori A B infinitae lentes concauae coniungi possunt, prout alia atque alia distantia focalis requiritur. Ita si lentis A B vterque radius vnitate exprimatur, alterius lentis C D radii vtriusque concauitatis ita se habebunt secundum 5 casus euolutos :

	Caf. I	Caf. II	Caf III	Caf. IV	Caf. V
$a = 1$; $c =$	0,9649	0,9553	-0,9537	-0,9539	-0,9539
$b = 1$; $d =$	-1,2796	-1,6131	-2,0411	-2,6290	-3,5c86

vbi

vbi imprimis notatu dignum euenit, quod in casibus II, III, IV et V valor ipsius c vix mutetur. Quodsi ergo lentis vtrinque aequaliter conuexae radius ponatur $= 1$, alterius vero lentis concauae altera facies ita formetur, vt eius radius sit $= 0,9538$, altera eius facies arbitrio nostro relinquitur, dummodo sit concaua, eiusque radius intra limites 2 et 4 contineatur; id quod in praxi maximum commodum praestat, cum non sit necesse, vt artifex tantopere sit sollicitus in hac postrema facie effingenda.

vbi imprimis notatu dignum euenit, quod in casibus II, III, IV et V valor ipsius c vix mutetur. Quodsi ergo lentis vtrinque aequaliter conuexae radius ponatur $= r$, alterius vero lentis concauae altera facies ita formetur, vt eius radius sit $= 0,9548$, altera eius facies arbitrio nostro relinquitur, cum adeo si conuexa, eiusque radius intra limites 2 et 4 contineatur; id quod in praxi maximum commodum praestat, cum non sit necesse, vt artifex tantopere sit sollicitus in hac posteriori facie effingenda.

Euler de Constructione lentium.

Fig. 1.

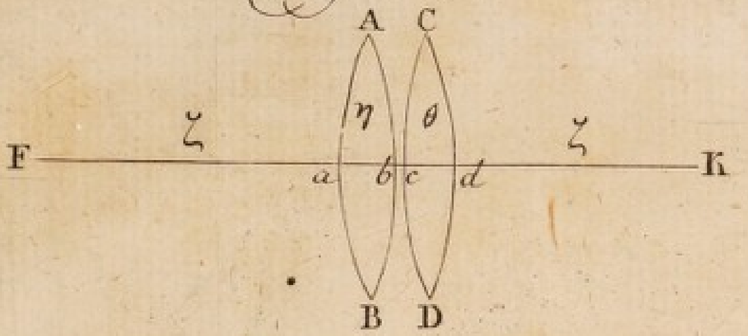

Fig. 2.

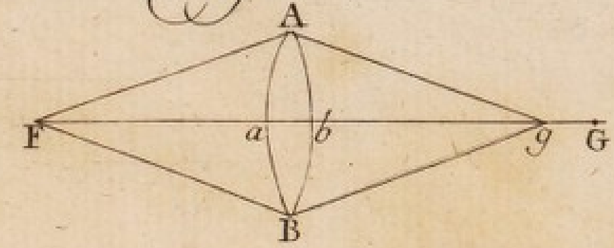

Fig. 3.

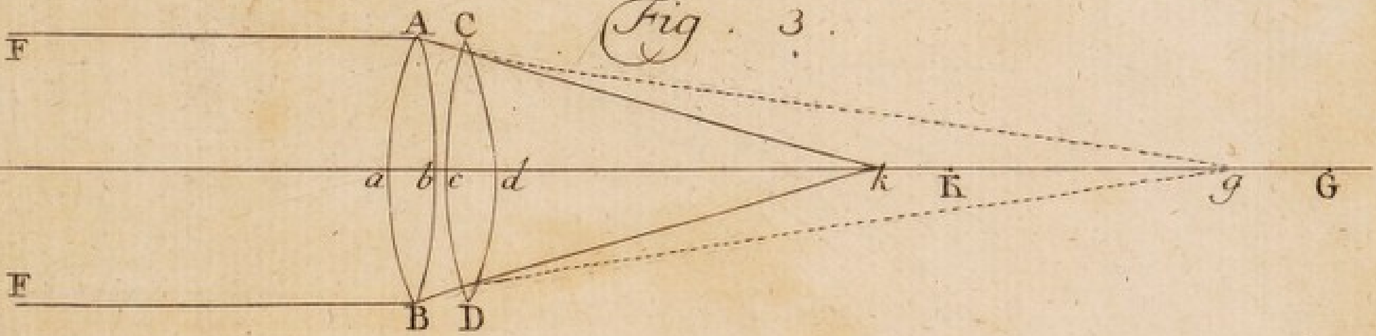

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.