Cplt 8 Tafeln 7 Bdr.

36 : 4.

N. IX. K

18

43854 / C

16580

fr 20—

246 pp.
1 leaf
7 plates

B 33

A 30

XVI

Graesse VI, 108: «Ouvrage important et estimé sur les loix d'acoustique quant à la vibration et la tension des cordes.» Riccardi II, p. 354. Gamba 2413. Poggendorff II, 625. Fétis VII, 241.

A valuable work, containing original investigations on the vibration of violin-strings.

«Giordano Riccati (1709—90) wrote on the Newtonian philosophy, geometry, cubic equations, and physical problems.» (Smith, History of Mathematics.)

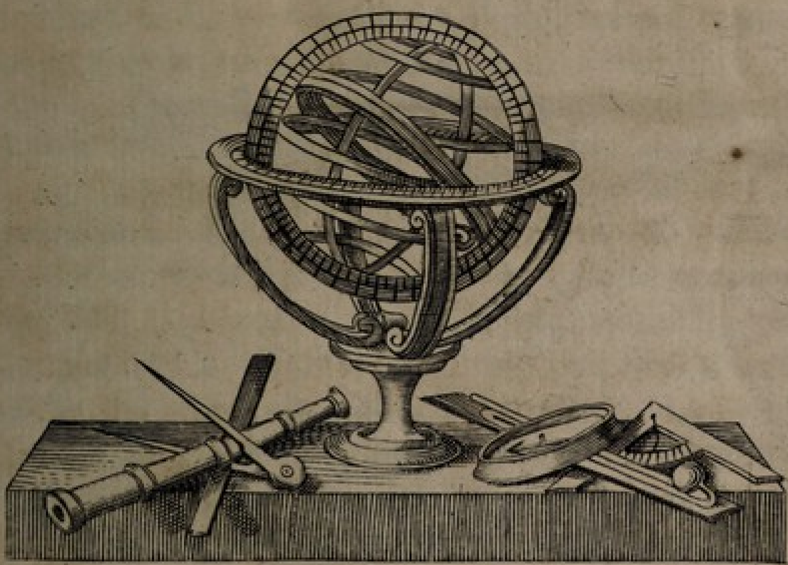
Uncut copy.

DELLE CORDE
OVVERO
FIBRE ELASTICHE
SCHEDIASMI
FISICO-MATEMATICI

DEL CONTE

GIORDANO RICCATI

NOBILE TREVIGIANO.



IN BOLOGNA MDCCLXVII.

NELLA STAMPERIA DI SAN TOMMASO D' AQUINO.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

PREFAZIONE.

SE mai si può sperare con fondamento di scoprire, o di porre in chiaro parecchie fisiche verità, egli è certamente quando si prende a maneggiare un qualche speciale argomento. Il piacere della musica mi ha invogliato di spendere non poche meditazioni intorno le corde solide, e fluide, colle quali essa compone la maggior parte de' suoi stromenti; ed avendo in varj tempi otto schediasmi distesi sopra questa materia, li ho nuovamente ripigliati per mano, e ritoccati qua e la, onde con meno di verecondia possano al pubblico presentarsi.

I. La proporzione fra le distensioni delle corde, e le forze, che le producono, non era stata per ancora rettamente determinata. Richiedeva la soluzione di questo problema la preconoscenza d'una proprietà delle corde elastiche, cioè ch' esse ripugnano alla distensione anche prima che sia loro applicata veruna forza stirante: alla quale ripugnanza io do nome di rigidità naturale, per distinguerla dall' artificiale, che si eguaglia alla forza tendente, da cui viene accresciuta la renitenza delle corde a lasciarsi di bel nuovo allungare. Con tale sicura scorta io sono nello Schediasma I. pervenuto felicemente alla meta, e la perfetta corrispondenza fra la teorica e gli sperimenti mi assicura di non aver traviato.

Mi è riuſcito altresì di ſcoprire il tempo, in cui una corda ſi vibra per lungo, mentre il peſo ad eſſa attaccato a vicenda aſcende, o diſcende. La trovata legge di oſcillazioni è diverſa da quella, che regola le vibrazioni traſverſali delle corde a due ſcannelli appoggiate. Se una corda ſi vibra per lungo, ſi pongono in moto la maſſa della corda, ed il peſo tendente: ma ſe oſcilla di traverſo, ſi muove la ſola ſua maſſa. In oltre trattandoſi delle oſcillazioni per lungo, va meſſa in computo la rigidità naturale della corda, la quale nulla altera le minime vibrazioni traſverſali della corda medeſima.

Merita rifleſſione la rigidità grande delle corde di metallo, equivalendo a libre $1134\frac{7}{13}$ la naturale rigidità della corda di ottone teſa dal peſo di due libre da me nelle ſperienze adoprata. Biſogna per altro diſtinguere la rigidità, che ripugna alle diſtenſioni delle corde, dalla tenacità, che ne impediſce il rompimento ſino ad un certo ſegno. Facendo uſo della regola ſtabilita dall' accuratiſſimo M. Sauveur, ho trovato, che la tenacità della teſtè mentovata corda di ottone era incomparabilmente minore della rigidità, ſiccome quella che ſi eguagliava ſoltanto a libre 12. in circa.

II. Col mezzo degli ſteſſi diſcorſi uſati nello Schediaſma I. giungo nello Schediaſma II. a diſcoprire la proporzione fra le compreſſioni di qualſivoglia fluido, e le forze, che le producono. La formola eſprimente la detta proporzione ci moſtra a dito, che poſta uguale a nulla la rigidità naturale del fluido, ſi dilaterebbe queſto infinitamente, qualora non foſſe da forza veruna compreſſo. Ora ella è tale la natura dell' aria di tanto maggiormente rarefarſi, quanto più ſcema il peſo premente; e per conſeguenza eſſa è priva ſiſicamente di naturale rigidità, e tutta la ſua ripugnangnanza a nuova costipazione dalla rigidità artificiale uguale alla pressione, che soffre, unicamente dipende. In oltre l' aria si vibra colle leggi di un pendolo a cicloide, quando agitata da un corpo sonoro ce ne porta il suono all' orecchio. Questo fluido frattanto non potrebbe oscillare in sì fatta guisa, se le sue densità non fossero proporzionali ai pesi comprimenti almeno nelle minime compressioni: ed essendomi riuscito di provare, che se le densità si adattano ad una tal legge nelle infinitesime costipazioni, la debbono accettare parimente nelle finite; ella è chiaramente dimostrata la proprietà dell' aria ammessa dal comune de' fisici, che le sue densità seguitano delle forze comprimenti la proporzione. Gli esperimenti sono favorevoli alla teorica quanto il comportano le particole eterogenee miste coll' aria, le resistenze, che nell' effettuare i detti esperimenti si deggiono superare, e lo scemamento, o l' aumentazione del calore nell' aria, che l' elasticità ne diminuisce, o ne accresce.

III. Il Co: Jacopo Riccati mio Padre nel Tomo I. de' Supplementi al Giornale d' Italia ha trattato prima di ogni altro della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte. Suppone egli, che la forza dell' obbietto agisca tutta raccolta nel punto medio di ciascuna fibra dell' organo, la quale piegandosi formi un angolo; che risolta la forza in due, che tirino direttamente le due metà della fibra, cagionino esse forze le distensioni nelle mentovate due metà; e che per ultimo le distensioni sieno proporzionali alle forze, che le producono. Ritenuta soltanto la prima supposizione, e fatta la riflessione, che gli allungamenti nelle due metà della fibra non sono generati dalle forze, che le tendono direttamente, ma bensì dagli accrescimenti di tensione, che sostengono, mentre la fibra

si va

ſi va ripiegando; determino la proporzione fra le forze applicate a ſquadra alla metà delle fibre, o corde teſe, e le ſaette, le diſtenſioni, e gli accreſcimenti di tenſione, che le dette forze nelle nominate fibre cagionano.

Colla ſteſſa occaſione ragiono della relazione fra le affezioni ſenſibili, e la forza degli obbietti eſterni, da cui vengono cagionate: e dopo aver notato le alterazioni, che producono nelle ſaette, nelle diſtenſioni, e negli aumenti di tenſione le varie miſure delle lunghezze, delle tenſioni, e delle rigidità delle fibre; paſſo alle conſeguenze fiſiche, e metto ſotto gli occhi di chi legge i vantaggi, ed i diſcapiti degli organi, e quali effetti ne derivino in riguardo alle ſenſazioni.

Le ſaette determinate dalla mia teorica le paragono con quelle ſomminiſtrate dalla ſperienza, l' eſatiſſima miſura delle quali la rettifico col mezzo dei ſuoni delle due metà della corda piegata in angolo dalle forze, che producono le mentovate ſaette. Quantunque gli eſperimenti vadano d' accordo colla teorica con quella maggiore fiſica adequazione, che in tali ricerche può mai ſperarſi; non laſcio di avvertire, che ſe alla metà della corda ſi applicaſſero forze notabilmente più grandi delle uſate nelle ſperienze che riferiſco, ne riſulterebbero ſaette alquanto minori di quelle, che richiede il mio canone; perchè in eſſo ſi è traſcurata la reſiſtenza, che a cagione della ſua groſſezza patiſce la corda nello piegarſi in tre ſiti, cioè a dire a mezzo, e nelle due eſtremità.

IV. Non ſi otterrà mai di trovare il tempo, in cui una corda fa una vibrazione, ſe prima non ſi determina la figura, alla quale nello vibrarſi ſi adatta. Nella ſoluzione di queſto problema io da prima ho ſeguito il metodo dell' acutiſſimo Signor Taylor. Non ſi è accorto il lodato Scrittore, che la coſtante da determinarſi dopo la ſeconda integrategrazione poteva ricevere infiniti valori, ai quali corriſpondono altrettante figure, a cui è conceſſo alla corda di adattarſi, mentre ſi vibra. Può dunque eſſa oſcillare intera con un ſolo ventre di oſcillazione, o diviſa in parti eguali con tanti ventri di oſcillazione collocati a vicenda uno al contrario dell' altro, quante ſono le parti uguali.

Per intero compimento della ſoluzione del problema non ho tralaſciato di provare, che conformata la corda ad una delle curve determinate, e cominciando poi a vibrarſi, ſi adatta ſempre in qualunque iſtante ad una curva di ſimil natura. E concioſſiachè le corde eſempigrazia di un gravicembalo ſi ſogliano incitare all' oſcillazione con una penna, che in angolo le ripiega, mi è riuſcito di dimoſtrare, che non ritengono queſta figura, ma poſto, che rendano un ſuono ſolo, ben preſto ſi adattano a quella fra le noſtre curve, che ha un ſolo ventre di oſcillazione. Chi confronterà la dimoſtrazione del Sig. Taylor colla mia, ſpero, che di queſta reſterà più contento; non avendo egli avvertito eſſerci biſogno della comunicazione del moto fra le particole contigue della corda, acciocchè tutti i ſuoi punti poſſano eſſere nello ſteſſo iſtante forniti di forze acceleratrici, e di velocità proporzionali agli ſpazj, che rimangono loro da ſcorrere.

Dopo le premeſſe ſpecolazioni non è ſtato difficile il ritrovare il tempo impiegato da una corda teſa nel fare una vibrazione. La formola, a cui ſi perviene c' inſegna, che i tempi d'una vibrazione della ſteſſa corda ſono proporzionali ai termini della ſerie $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, &c., ſecondochè oſcilla intera, o diviſa in due, tre, quattro, &c. parti eguali; e ſtando i numeri delle vibrazioni effettuate in pari tempo, per cui ſoglio eſprimere i ſuoni, in ragione reciproca delle durate d' una vibrazione, la corda

po-

potrà produrre i ſuoni dinotati dalla progreſſione 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Eſſendo queſti ſoli i ſuoni, che ſono atte a rendere le trombe marina, e da fiato, ed il corno da caccia, la mia teorica ſpiega chiaramente cotale fenomeno.

Una corda frattanto non ci fa ſolamente ſentire i detti ſuoni l' uno dopo dell' altro, ma gli uniſce tutti inſieme, la quale ſtupenda proprietà con alcuni ſperimenti faccio toccar con mano. Da queſta ſteſſa proprietà ſi deduce la legge della comunicazione dei tremiti ſonori da una corda all' altra, e col mezzo di eſſa ſi rende ragione della belliſſima eſperienza del celebre Signor Giuſeppe Tartini, il quale ha ſcoperto, che ſtimolate coll' arco due corde del violino, i di cui ſuoni ſi eſprimano con numeri fra loro primi, purchè il più picciolo di queſti numeri non pareggi l' unità, s' ode ſempre in aria un terzo ſuono dalla detta unità dinotato. Che ſe ſi finga una corda infinitamente lunga, una porzione finita di queſta corda, atta a generare qualſivoglia ſuono, ſarebbe parte aliquota della lunghezza infinita; e quindi la mentovata corda potrebbe in ſe ſteſſa ricevere qualunque ſuono. L' eſpoſta rifleſſione mi dà coraggio di arriſchiare una conghiettura intorno la maraviglioſa ſtruttura dell' organo dell' orecchio.

Il dottiſſimo Signor Jacopo Ermanno ha tentato negli Atti di Lipſia dell' anno 1716. di trovare il tempo periodico di una corda ſonora, che ſi vibra, ſenza prima indagare la curva, alla quale ſi adatta la predetta corda oſcillando. Non accordandoſi colla mia formola quella del Signor Ermanno, mi ſono poſto ad eſaminare la ſua ſoluzione, la quale ſenza dubbio è per più titoli difettoſa. Concioſſiachè il commendato Autore abbia ſbagliato nel determinare l' azione eſercitata dalla elaſticità della corda,

faccio

faccio vedere che nella mia ſoluzione tacitamente ne ho computata la vera azione; ed una rifleſſione aprendo la ſtrada ad un' altra, dimoſtro, che i punti della corda non ſi movono per le ordinate della curva da me determinata, ma bensì per ſegmenti di parabole Apolloniane, i quali e nella grandezza, e nella poſizione ſi adeguano colle predette ordinate. M' inoltro poſcia a cercare col metodo delle azioni, fondamento principaliſſimo della meccanica, la curva, a cui dee conformarſi una corda oſcillando, e mi ſi preſenta la ſteſſa curva colla prima ſoluzione ſcoperta.

Ella è ammirabile la proprietà delle corde ſonore, che la rigidità naturale nulla altera i tempi delle loro minime vibrazioni traſverſali. Si ſpiega chiaramente queſto fenomeno col provare, che la diverſità della rigidità non cagiona computabile alterazione nelle velocità dei punti analoghi di due corde, che nel ſolo elemento della rigidità differiſcono.

Sebbene abbia ſuppoſte infiniteſime le vibrazioni delle corde ſonore, le verità da me dimoſtrate ſi adattano alle minime fiſiche oſcillazioni, le quali o più riſtrette, o più dilatate conſervano ſempre lo ſteſſo tuono. La conformità della mia ſoluzione coi fenomeni ci fa toccare con mano, che ai minimi geometrici ſi poſſono ſempre ſoſtituire i minimi fiſici.

Pretendendo i ſommi Geometri Leonardo Eulero, Allembert, Luigi de la Grange, ch' oltre le figure da me determinate poſſa una corda, che ſi vibra prenderne infinite tutte fra loro diverſe, ed al contrario ſoſtenendo il celebre Signor Daniele Bernoulli, che la ſoluzione del Signor Taylor è ſola capace di ſoddisfare a tutti i caſi poſſibili del problema, di cui ſi parla, do fine allo Schediaſma IV. col mettere in chiaro la ragione, che mi perſuade d' aderire alla ſentenza di queſto Matematico inſigne.

V. L' aria è il corpo che ſuona negli ſtromenti da fiato, e la corda d' aria contenuta dentro una canna cilindrica d' organo fa le ſue vibrazioni non altrimenti che una corda ſolida, eſſendo queſta reſa elaſtica da una forza ſtirante, e quella da una forza premente. Quindi la ſteſſa formola determina i tempi delle oſcillazioni tanto delle corde ſolide, quanto delle fluide: e poichè nelle ſeconde le forze comprimenti ſtanno come le loro baſi, o come i quadrati dei loro diametri; i tempi delle vibrazioni accettano la proporzione delle lunghezze d' eſſe corde, purchè a cagione del freddo, o del caldo non ſi muti la proporzione fra la denſità dell' aria, ed il peſo che la comprime.

Serve la medeſima formola anche per ritrovare il tempo, in cui il ſuono ſi diffonde per un dato ſpazio; e perciò una corda d' aria nel fare una vibrazione, ed il ſuono nel viaggiare per uno ſpazio eguale alla lunghezza d' eſſa corda c' impiegano pari tempo. E concioſſiachè il ſuono cammini alquanto più lento l' inverno, ed alquanto più celere la ſtate; una canna d' organo per conſeguenza renderà nella fredda ſtagione un ſuono un poco più grave che nella calda. S' inganna il dottiſſimo Signor Eulero attribuendo tutta agli ſtromenti da fiato la varietà aſcendente ad un tuono, che ſi oſſerva nelle contrarie ſtagioni d' inverno, e di eſtate, paragonandoli cogli ſtromenti da corde; imperciocchè da me ſi dimoſtra, che queſti più di quelli ſono ſoggetti ad alterazione.

Una corda aerea non meno che una ſolida può generare i ſuoni 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. (e tali effettivamente li producono la tromba, ed il corno da caccia) ſecondochè trema o intera, o diviſa in parti aliquote: ed intanto i raggi ſonori ci portano i ſuoni tutti all' orecchio, inquan-

quan-

quanto che si possono considerare siccome corde d' infinita lunghezza, e qualunque corda finita atta a rendere un determinato suono è parte aliquota d' una corda infinita. Riesce adunque inutile l' ipotesi di M. de Mairan, che si è immaginato l' aria composta di particole di tutti i tuoni, fra le quali ogni suono faccia vibrare le unisone. Colla considerazione dei suoni della tromba deduco all' assurdo questa opinione; non essendo concepibile il perchè non possano oscillare dentro la tromba le particole di tuono medio fra 1 e 2, fra il 2 ed il 3, fra il 3 ed il 4, &c. Le spiegate leggi regolano altresì le vibrazioni delle corde d' aria contenute nelle canne convergenti, divergenti, e di qualsivoglia diversa figura.

Dalla velocità del suono io deduco il numero di vibrazioni, che fa una corda d' aria in un minuto secondo, e paragonando quello, che risulta dal computo, cogli esperimenti dell' accuratissimo M. Sauveur, dimostro col raziocinio, e colla sperienza, che una corda d' aria dentro una canna cilindrica d' organo, a cagione di replicate riflessioni che succedono, è alquanto più lunga della canna predetta. Quindi ne derivano siccome corollarj le ragioni, per cui il tuono di una canna cresca, o cali allargandone, o ristringendone l' apertura superiore, e discenda all' ottava grave, quando la detta apertura totalmente si chiude. Il sopralodato Signor Eulero stabilisce troppo scarso il numero delle vibrazioni effettuate da una canna d' organo in un minuto secondo; perchè in cambio d' indagare la densità dell' aria pura e sonora, introduce nella formola quella dell' aria mista colle particole eterogenee. Il numero delle oscillazioni da lui determinato discorda soverchiamente dalle osservazioni di M. Sauveur, non potendosi mai presumere, che un uomo così diligente abbia di tanto sbagliato.

VI. Uno ſtromento muſico riuſcirà perfetto, ſe renderà ſuoni della ſteſſa indole, grati, e forti egualmente. Egli è noto quanto gli artefici abbiano poſto di ſtudio nella fabbrica degli ſtromenti: ed in fatti avendo io cercato le miſure, che debbono aſſegnarſi alle corde d' uno ſtromento, ed alle canne d' organo, acciocchè producano ſuoni del pari forti, e aggradevoli; ho ſcoperto che la pratica, e la teorica vanno perfettamente d' accordo.

Io non riferirò il lungo giro di raziocinio, col quale dimoſtro, che due corde teſe da forze proporzionali alle loro baſi, e fornite nell' oſcillare di eguali forze vive generano ſuoni del pari forti: dirò bensì qualche coſa dei limiti, che ſtabiliſco, affinchè i ſuoni egualmente grati ſi ſentano. La corda grave per tanto paragonata coll' acuta non ha da eſſere più ſottile, nè oſcillando dee muoverſi per uno ſpazio più picciolo. Le corde ugualmente groſſe formano il primo limite, ed il ſecondo è determinato dalle corde, che ſi vibrano per uguali ſpazj, le quali deggiono avere le groſſezze proporzionali alle lunghezze, ſe di pari forze vive hanno da fare acquiſto nello vibrarſi. In quegli ſtromenti, ne' quali aſſegnandoſi a ciaſcun ſuono la ſua corda particolare, c' è un pieno arbitrio, l' arte ſta di mezzo fra i due confini eſtremi, aſſegnando alle corde groſſezze tali, che ſtiano in una ragione mezzana fra quella di egualità, e quella delle lunghezze: e così effettivamente ſi pratica nei gravicembali.

Egli è d' uopo ricorrere al primo limite in quegli ſtromenti, nei quali la ſteſſa corda rende più ſuoni per opera delle dita della mano ſiniſtra, che in diverſi ſiti la premono. In tale circoſtanza le corde, che ſuonano, egualmente groſſe, e varie ſolo nella lunghezza acquiſtano velocità in ſiti analoghi, che ſtanno in ragione inverſa dimezzata dei tempi delle loro vibrazioni. Ma facendoſi in sì fatti ſtromenti tranſito da una corda all' altra, mi ſono poſto ad indagare qual proporzione debba aſſegnarſi alle diverſe groſſezze, acciocchè paſſando da corda a corda, la mentovata legge delle velocità ſi conſervi, e ritenendo i ſuoni la ſteſſa indole, l' orecchio non ſi avveda, che ad una corda anzi che all' altra appartengano. Le groſſezze adunque delle corde hanno da riferirſi nella proporzione dei tempi delle loro vibrazioni, e l' eſperienza fatta ſopra le corde del violino mi ha reſo certo, che la pratica ſi conforma colla teorica.

Preſo ad eſaminare un gravicembalo lavorato da Vito de' Traſuntini l' anno 1559, ho trovato, che le groſſezze delle corde ſtanno quaſi eſattamente di mezzo fra i due ſtabiliti confini, e che le predette corde acquiſtano eguali forze vive, mentre che oſcillano. In tutti i gravicembali, e le ſpinette da me oſſervati, poſte al paragone le corde gravi colle acute, le ho rinvenute alquanto più corte di quello richiede la proporzione fra i tempi delle loro vibrazioni. Da ciò ne naſce la conſeguenza, che le corde gravi relativamente alle loro groſſezze ſono un po meno teſe delle corde acute. Io rendo ragione di queſta coſtante pratica, e finalmente noto non eſſere arbitrario l' armare uno ſtromento con corde di qualunque groſſezza, ed armato che ſia l' uſar forze a capriccio per far ſuonare eſſe corde. L' eſperienza uniforme alla teorica ha inſegnato ai pratici le confacenti groſſezze delle corde, e la congrua miſura delle forze preſſochè uguali delle penne per interamente pareggiare il vigore dei ſuoni.

Colla ſcorta delle verità poſte in chiaro riſpettivamente alle groſſezze delle corde dei gravicembali, ſi determinano agevolmente le miſure, che debbono aſſegnarſi alle canne d' organo, acciocchè rendano ſuoni del pari forti, e aggradevoli. Quello, che riſulta dai miei diſcorſi ſi è,

che

che moltiplicando per le lunghezze delle canne le potestà delle lunghezze, in cui si riferiscono le grossezze delle corde dei gravicembali, ne nascono prodotti, ai quali le basi delle canne d' organo hanno da farsi proporzionali. Le grossezze delle corde accettino una ragione esattamente media fra i due limiti sopra statuiti, e si corrispondano nella proporzione delle radici delle lunghezze: si moltiplichi questa per la ragione delle lunghezze, e ne proverrà una terza ragione come le radici dei cubi delle lunghezze, che alle basi delle canne d' organo dovrà dar regola. Conseguentemente i diametri, o le circonferenze di esse canne avranno da stare come le radici quadrato-quadrate dei cubi delle loro lunghezze.

L' organo di questa Cattedrale è un' opera molto perfetta lavorata da Urbano da Venezia l' anno 1420. Misurate diligentissimamente col ajuto del Sig. Liberale Marcuzzi valoroso suonatore d' organo le circonferenze di alcune canne, ho trovato che la pratica conviene esattamente colla teorica.

VII. Negli stromenti naturali, o artificiali da fiato viene determinato il tuono o da quell' ingegno, col quale si genera il suono, che rispettivamente ad alcuni stromenti chiamerò imboccatura, o dalla lunghezza della corda d' aria contenuta dentro il corpo di essi stromenti. Seconda il tuono una sola di queste cause, se dell' altra è molto più forte: e se ciò non si avvera, egli è d' uopo che le due cagioni si uniscano a produrre lo stesso tuono, onde non s' oda un suono falso, ed ingrato. Spiegato il modo, col quale l' aria concepisce il suono, noto che dall' imboccatura dipende il tuono del fischio, delle pivette dei fagotti, e degli oboè, e di certi registri d' organo con piva, come per esempio dei tromboncini. Se v' ha corda d' aria in questi stromenti, dalla sua lunghezza non trae l' origine il tuono, ma la canna serve a dar maggior corpo alla voce.

Alla stessa classe apparterrebbe anche la voce dell' uomo, e di altri animali, se conforme la sentenza dell' ingegnoso M. Dodart i tuoni d' essa derivassero dalle varie aperture della glottide. Frattanto il dotto M. Ferrein ha scoperto, e con accuratissimi sperimenti confermato, che le due labbra della glottide più o meno tese debitamente, cagionano della voce i diversi tuoni. Penso, se pure non prendo errore, che i due lodati Scrittori insieme conciliare si possano, riflettendo essere confacente alla maggior perfezione della voce, che l' apertura della glottide, e la tensione delle sue labbra si uniscano nella determinazione del medesimo tuono, calando quella colla dovuta proporzione, mentre questa si aumenta. In sì fatta guisa nulla perdono di stima le belle considerazioni di M. Dodart intorno alle menomissime alterazioni dell' apertura della glottide, che non supera una linea, qualora si passa per minutissimi gradi dal grave all' acuto, o pure non mutando tuono si fa transito con picciolissimi incrementi, o decrementi dal piano al forte, o a rovescio dal forte al piano.

Benchè il tuono delle canne d' organo, del flauto, del flauto traverso, dell' oboè &c. dipenda dalla lunghezza della corda d' aria, che si mette in oscillazione; nulladimeno bisogna talmente regolare l' imboccatura, che il fiato possa concepire un tremito unisono alla corda predetta. In fatti nella tromba secondochè l' imboccatura opportunamente si modifica, suonano o la corda intera, o le sue parti aliquote. Adattata al fagotto la pivetta dell' oboè, in cambio della corda intera o le metà, o le terze parti si vibrerebbero.

Termino lo Schediasma VII. col riferire un' esperienza, za, la quale ci fa toccar con mano, che negli ftromenti da fiato l' imboccatura, e la corda d' aria determinano il tuono, il quale obbedifce a quello dei due elementi, che ha maggior forza. Se la corda d' aria è affai corta, la varia imboccatura ottiene confiderabili cangiamenti di tuono, i quali vanno divenendo fempre minori, conforme a che la corda d' aria fi allunga. S' ode il fuono falfo, quando coll' imboccatura tento di alterare il tuono di una lunga corda d' aria. In sì fatta circoftanza fi mefcolano infieme due fuoni, uno proprio dell' imboccatura e l' altro della corda mentovata, e da quefta miftione il fuono falfo ha l' origine.

VIII. Lo Schediafma VIII. è da cinque brevi Differtazioni formato, ed ha per argomento la propagazione dei tremiti fonori nell' aria.

1. Suppongo nella prima Differtazione, che il fuono fi propaghi per linee o raggi, che partono dal corpo fonoro quafi da centro, e che tutti i punti aerei contenuti nel medefimo raggio fi vibrino per uguali fpazj. Tre fenomeni, cioè a dire che ofcillando un corpo fonoro, fento in diverfe diftanze lo fteffo fuono in riguardo al grave e all' acuto; che portandomi l' aria all' orecchio più fuoni, che differifcono foltanto nel piano e nel forte, debbono le fue particole neceffariamente vibrarfi colle leggi di un pendolo a cicloide; e che il fuono viaggia equabilmente, mi aprono la ftrada a fpiegare il quarto fenomeno, che al ceffare delle ofcillazioni del corpo fonoro, ceffano altresì le agitazioni nell' aria. Dimoftro, che le particole aeree nell' atto di ridurfi alla quiete ricuperano la loro ordinaria compreffione, e che accoppiandofi in effe la quiete coll' equilibrio, fe quefto non viene rotto da una nuova ofcillazione, o reciprocazione del corpo fonoro, più non fi muovono.

De-

Determino poſcia gli ſpazj ſcorſi dai varj punti di una linea aerea nell' iſtante, che il primo punto della ſteſſa viaggiando per un dato ſpazio ha fatto una mezza vibrazione: e concioſſiachè queſti ſpazj ſono a grado minori, ſecondochè le particole diſtano maggiormente dal principio dell' onda; ſi comprimono le particole ſteſſe, e dalla differenza delle compreſſioni di due particole contigue naſce la forza ſollecitante all' oſcillazione la particola meno compreſſa, che ſi tramuta in forza acceleratrice, qualora ſi divida per la maſſa della mentovata particola. Eſſendomi riuſcito di trovare le forze acceleratrici proporzionali agli ſpazj da percorrerſi, ſi ſcopre poſſibile nell' aria il moto ſimile a quello di un pendolo a cicloide, che colla ſcorta dei fenomeni è ſtato da me ſuppoſto.

Paſſo a ſtabilire la velocità, colla quale ſi propaga il ſuono, e ne deduco per corollario, che nel tempo d' una vibrazione di una canna d' organo il ſuono ſi diffonde ad una diſtanza eguale alla lunghezza della corda d' aria dalla canna compreſa. Ho nominato piuttoſto la lunghezza della corda d' aria che la lunghezza della canna; perchè conforme ho avvertito nello Schediaſma V. quella è alquanto maggiore di queſta. Si raccoglie dalla formola della velocità del ſuono, che nella ſteſſa ſtagione o ſia eſſo debole o forte, grave od acuto, camina egualmente veloce. Il caldo minora la denſità dell' aria, il freddo l' accreſce; e quindi la formola mentovata c' inſegna, che la celerità del ſuono nella ſtate è maggiore che nell' inverno, la qual verità dall' accuratiſſimo Sig. Lodovico Bianconi è ſtata confermata colla ſperienza.

Se per ridurre a computo la velocità del ſuono, s' introduce nella formola la denſità dell' aria miſta colle particole eterogenee, la quale ſta a quella del mercurio come 1 : 11.826, ſi ſcopre, che in un minuto ſecondo dovrebbe il ſuono viaggiare piedi parigini 912, mentre realmente ne ſcorre 1038. Ha ottimamente avvertito il Cavalier Nevvton, che le dette particole eterogenee poco elaſtiche, e meno coſtipabili non ſono atte a concepire le vibrazioni ſonore; e quindi preſo ſiccome dato il viaggio del ſuono manifeſtatoci dagli eſperimenti, col mezzo della noſtra formola ſtabiliremo la denſità dell' aria pura e ſonora, che nelle medie ſtagioni ſi riferiſce a quella del mercurio nella proporzione di 1 : 15294.

La proprietà, che una canna d' organo fa una vibrazione nel tempo ſteſſo, in cui il ſuono ſi propaga per uno ſpazio eguale alla lunghezza della corda d' aria contenuta dentro la canna, ci ſervirebbe di ſcorta per calcolare la velocità del ſuono, ſe poteſſero ſupporſi del pari lunghe la corda d' aria e la canna. Ammeſſa queſta ſuppoſizione, ed appoggiandoci agli eſperimenti di M. Sauveur intorno alle canne d' organo di cinque piedi, troveremo che il ſuono, il quale di fatto cammina piedi 1038 in un minuto ſecondo, ne dovrebbe ſcorrere 1020. Quindi mediante il viaggio reale del ſuono ſi ſtabiliſce la proporzione come 1020 : 1038, o ſia proſſimamente come 57 : 58 fra la lunghezza d' una canna d' organo di cinque piedi, e quella della tortuoſa corda d' aria, che dentro la canna ſteſſa va ſerpeggiando. Concioſſiachè il dottiſſimo Signor Luigi de la Grange nel Tomo primo della Società di Turino condanni il metodo da me ſeguito, col quale il Cav. Nevvton determina la velocità del ſuono, prendo dello ſteſſo metodo la difeſa, e moſtro, che le formole del Signor de la Grange ridotte al giuſto conducono alla medeſima conſeguenza del Nevvton, ch' egli avea giudicato ripugnare alla natura dell' aria.

2. Eſſendo il Signor Nevvton ſtato incolpato di petizion di principio la ſeconda Diſſertazione fa manifeſtamen-

mente toccar con mano non esser giusta l' accusa; imperciocchè supponendo, che le particole aeree situate nel medesimo raggio si vibrino a guisa di un pendolo a cicloide per ispazj, che vadano scemando, secondochè le particole stesse sono più rimote dal centro sonoro, e valendomi dello stesso metodo come nella prima Dissertazione, trovo che le forze acceleratrici, non sono proporzionali agli spazj da percorrersi, e che per conseguenza l' aria nella mentovata ipotesi non potrebbe (conforme s' era malamente supposto) oscillare colla legge di un pendolo a cicloide. Se il metodo peccasse di petizion di principio, dovrei scoprire anche in tale incontro le forze acceleratrici come gli spazj da scorrersi: ma succedendo il contrario, cade l' accusa, ed il metodo si dimostra incolpabile. Incorrerei nella petizion di principio, se dalla supposizione, che le particole aeree oscillino non altrimenti che un pendolo a cicloide, io deducessi che le forze acceleratrici si riferiscono nella ragione degli spazj, che restano da passarsi. Questa non è la strada ch' io batto. Dal moto supposto io raccolgo la costipazione delle particole, e dalla costipazione le forze acceleratrici, le quali trovandosi a dovere soltanto nella ipotesi, che il suono si propaghi per linee o raggi, e che le particole tutte collocate nello stesso raggio si vibrino per eguali spazj, si rende manifesta l' aggiustatezza del metodo.

3. Esamino nella terza Dissertazione, se l' aria possa vibrarsi colla legge dei pendoli a cicloide nella supposizione, che il suono per settori sferici si propaghi: e presentandomisi forze acceleratrici, che non abbracciano la proporzione degli spazj da percorrersi, dimostro non essere possibile, che il suono si diffonda in tal guisa. Ponendo anche qui in opera il metodo delle due prime dissertazioni, sempre più si conferma, ch' esso va esente dalla nota di petizion di principio.

4. L' acutiſſimo Sig. Leonardo Eulero nella diſſertazione ſopra la natura del fuoco ſtabiliſce la velocità del ſuono con una formola differente dalla Nevvtoniana da me parimente abbracciata. Dandoci eſſa formola la velocità del ſuono maggiore del giuſto, anche quando s' introduce nel calcolo la denſità dell' aria miſta colle particole eterogenee; molto peggio ſuccederebbe, ſe ſi metteſſe a computo la denſità dell' aria pura, la quale unicamente è capace di ricevere, e di comunicare le vibrazioni ſonore. Ora quantunque queſta ſola rifleſſione diſcopra la falſità della formola del commendato Scrittore; ho dedotta da eſſa la curva, che relativamente alle diſtanze dal primo punto di una corda aerea determina gli ſpazj ſcorſi dai punti della corda ſteſſa nell' iſtante, che il primo punto ha una mezza vibrazione compiuto: e mettendoci la mentovata curva ſotto gli occhi un fiſico aſſurdo, ho fatto toccar con mano, che la formola del Sig. Eulero non ſi accorda colla verità. Ed in fatti ſecondochè le particole aeree ſi diſcoſtano dal principio del raggio ſonoro, i detti ſpazj vanno ſcemando, in un dato punto lo ſpazio è nullo, diventano poſcia gli ſpazj negativi, e finalmente lo ſpazio torna ad uguagliarſi al nulla in un altro punto. Nella mezza vibrazione del primo punto del raggio ſcopro la ragione, per cui tutti i punti ſino al primo punto di quiete s' abbiano da movere per la medeſima direzione. Ma paſſato il punto immobile, non giungo ad intendere, qualmente i punti ſituati fra i due punti di quiete poſſano oſcillare per la direzione contraria.

5. Partecipati queſti miei penſamenti al dottiſſimo P. D. Paolo Friſi, mi propoſe di rintracciare, ſe ſi poteſſe ſalvare la formola del Sig. Eulero, ſupponendo che tutte le particole d' aria componenti l' onda, benchè nello ſteſſo tempo compiano il movimento, non lo principjno però

nell'

nell' iſtante medeſimo; di modo che da una all' altra ſucceſſivamente il tremito ſi comunichi. Accettata queſta ſuppoſizione ſiccome vera, le particole aeree impiegherebbero nell' oſcillare un tempo tanto più picciolo, quanto foſſero più proſſime all' ultimo punto dell' onda. Perciò ogni particola produrrebbe un ſuono diverſo, il quale ſi ſentirebbe vie più acuto conforme a che l' orecchio ſi avvicinaſſe al fine dell' onda: ma in qualſivoglia ſito s' ode lo ſteſſo ſuono uniſono a quello del corpo ſonoro; dunque le vibrazioni dell' onde aeree non ſi conformano all' ipoteſi propoſta da eſaminare.

A queſta palpabile oſſervazione aggiungo la coſtruzione della curva determinante gli ſpazj ſcorſi dalle particole aeree contenute nell' onda ſteſſa, quando nel medeſimo iſtante hanno compiuta una oſcillazione, e mi ſi preſentano dei fiſici aſſurdi maggiori di quello nella quarta Diſſertazione conſiderato.

Oltre a ciò eſſendo innegabile, che le particole aeree ricevono dal corpo ſonoro la forza viva acquiſtata nell' oſcillare; dimoſtro la ripugnante conſeguenza, che la forza viva delle mentovate particole ſupererebbe quella del corpo ſonoro, di modo che l' effetto eccederebbe la propria cagione.

Conchiudo finalmente col provare, che il moto non potrebbe far tranſito da un onda all' altra, ma nella ſola onda prima ſarebbe obbligato a fermarſi, e dall' aggregato dei notati inconvenienti ne inferiſco doverſi cancellare l' ipoteſi, di cui ſi parla, dal libro della Natura.

Era gia terminata la ſtampa dello Schediaſma IV., quando mi fù richieſta una diſtinta dichiarazione, qualmente dalle figure, e dai moti appartenenti ad una corda, che rende un ſuono ſolo, ſi compongano le figure, che prende, ed i movimenti, che concepiſce, ogni qual volta

col

col ſuono principale della corda intera ſono miſti quelli delle ſue parti aliquote. Accintomi all' impreſa, ho moſtrata la coſtruzione delle predette figure, ed ho fatto vedere, ch' i punti della corda ſono ſpinti dalle forze acceleratrici neceſſarie, acciocchè ne ſegua la data meſcolanza de' ſuoni. L' internarmi in queſti penſamenti ha prodotto altresì il non diſpregevole frutto, che mi rieſca di mettere nel ſuo vero lume la ſpiegazione fiſica del terzo ſuono, che mediante due ſuoni forti e continuati, ſi produce nell' aria ſecondo l' oſſervazione del ſopralodato Sig. Giuſeppe Tartini.

INDICE

DEGLI SCHEDIASMI.

Diſ-

SCHE-

SCHEDIASMA I.

Della proporzione fra le distensioni delle corde, e le forze che le producono.

I. MAneggiando questo stesso argomento il Conte Jacopo Riccati mio Padre in una sua dissertazione pubblicata nel Tomo I. dei Comentarj dell' Accademia di Bologna, e poscia ristampata ne Tomo III. delle sue Opere, suppone che leggi simili diano norma e alle consuete vibrazioni delle corde, che oscillano di traverso a due scannelli appoggiate, e alle vibrazioni delle corde, che oscillano per lungo, mentre il peso tendente a vicenda ascende o discende. La prima suppofizione ne chiama due altre, cioè che le corde sieno prive di naturale rigidità, e che il peso stirante sia minimo in relazione alle masse delle corde; ammesse le quali circostanze, osserveremo in progresso, che da canoni analoghi vengono regolati i due descritti generi di vibrazioni. Due rigidità vogliono nelle corde distinguersi: l' una, che chiamo naturale, consiste in quella ripugnanza, che ha la corda a lasciarsi allungare, anche prima che le venga applicata veruna forza tendente; l' altra, che chiamo artificiale, s' eguaglia all' accrescimento di ripugnanza per essere ulteriormente distesa, che dalla forza, o peso tendente nella corda proviene. Le due rigidità si possono parimente nominare intrinseca, ed estrinseca; dipendendo quella da cagione interna, cioè a dire dalla struttura della corda, e dall' intralciamento delle sue fibre, e questa da cagione esterna, cioè a dire dalla forza stirante. Conciossiachè ella è considerazione anzi geometrica che fisica l' assumere corde solide prive di naturale rigidità, stimo opportuno, accostandomi più alla Natura, di mettere a computo il detto elemento nella soluzione del seguente problema, e di supporre altresì finita la proporzione fra le masse delle corde, ed i pesi tendenti.

Trovare la proporzione fra gli allungamenti delle corde, ed i pesi o forze, che li producono.

II. Prima di tutto egli è necessario di porre in chiaro, quali sieno quelle forze o pesi, che producono gli allungamenti nelle corde. Sia la corda A B (*Fig.* 1.) tesa dal peso P, con cui stia in equilibrio; egli è certo, che per allungarla farà d' uopo aggiungere al peso P un nuovo peso per esempio p. Si ponga in B un impedimento N O, il quale non permetta, che il punto B della funicella A B possa muoversi da B verso A, e levato poscia il peso P, la corda A B eserciterà contro l'impedimento N O quello stesso sforzo, ch' esercitava contro del peso P. Se torneremo ad attaccare alla corda un peso o minore, o eguale a P, non cagionerà questo veruna distensione, impiegandosi tutta la sua energia o a minorare, o togliere interamente di mezzo il contrasto dell' impedimento N O colla corda A B, il quale tornato ad appendere alla stessa il peso P, non sostiene più veruna fatica. Chi vorrà dunque allungare la corda A B, dovrà applicarle un peso $P+p$ maggiore di P, ed il peso p aggiunto al dato P sarà quello, che produrrà in essa la distensione.

III. Dilucidato un tal punto a solo fine di evitare gli sbagli, avanciamoci a ricercare l' allungamento innassegnabile dl operato nella corda qualunque A B, la cui lunghezza $L+l$, dalla forza minima dp aggiunta alla forza o peso finito $P+p$ stirante la corda stessa. Avvertasi che per L s' intende la lunghezza della corda corrispondente al peso conosciuto P, e per l la distensione cagionata dal peso variabile p. Più elementi possono influire nel mentovato allungamento, la forza dp, la lunghezza della corda A B $=L+l$, il peso tendente $P+p$, la rigidità naturale r della corda, la grossezza della corda.

CANONE I.

Essendo tutti gli altri elementi pari, la distensione dl è come la forza minima dp, che la genera.

Qualunque sia la curva b D F (*Fig.* 2.), che determina la relazione fra le distensioni b c, b C della corda A b, e le forze cd, CD, che le producono; una sua minima porzione BD si confonde colla linea retta. Posto adunque che le forze cd, CD sieno minime, avremo bc : cd :: bC : CD; e perciò la distensione dl è come la forza minima dp, che la genera.

CANONE II.

Essendo gli altri elementi dati, la distensione dl è come la lunghezza $L+l$ della corda.

La citata dissertazione di mio Padre mi somministra la dimostrazione di questo secondo canone. Pendano da due chiodi A, a (*Fig.* 3.) le due corde AB, ab differenti solo nella lunghezza. Prendasi nella corda AB la parte minima AL, a cui nel punto L si applichi il peso dato *P*, che stirando la fibra AL, produca la distensione LM. Nell' altra corda ab parimente si pigli la parte al = AL, e adattato lo stesso peso in l, segua la distensione lm = LM. Il punto m si renda immobile con un chiodo, di modo che la fibra am non possa accorciarsi. Presa nuovamente nella medesima corda la porzione mn = AL, agisca il peso *P* nella fibra mn, ed effettuata la seconda distensione no = LM, il punto o come prima si fermi con un altro chiodo. Ripetuta in sì fatta guisa l'operazione, dall' ultima fibra, che si stabilisca essere op, liberamente penda lo stesso grave *P*, e sia pq = LM l' ultimo allungamento.

Conciossiachè le due fibre ugualmente stirate am, mo tentino di restituirsi alla consueta lunghezza, e sieno impedite dai due chiodi a, ed o; egli è manifesto che il chiodo frapposto m è tirato all' insù, e all' ingiù da forze uguali costituenti fra loro equilibrio. Similmente le due fibre mo, oq sono in equilibrio rispettivamente al chiodo o; imperciocchè la prima contro i chiodi m, o, e la seconda contro il chiodo o, ed il grave sospeso al punto q esercitano la medesima forza, ma per contrarie direzioni. Per la qual cosa levati i chiodi intermedj m, ed o, non si distrugge l' equilibrio, e rimanendo il tutto nello stesso stato, il grave *P* non ascenderà, nè discenderà; e quindi ne segue, che tante saranno le distensioni eguali, quante le fibre, e che l' allungamento di tutta la corda ab, ch' equivale a tutti gli allungamenti delle sue parti, all' allungamento di una fibra A L, o di tutte le fibre componenti la corda A B si riferirà come lunghezza a lunghezza. Il medesimo discorso si adatta anche al caso, che le corde A B, a b differenti soltanto nella lunghezza stiano in equilibrio col peso $P+p$, a cui si aggiunga il peso infinitesima dp, il quale cagionerà distensioni proporzionali alle lunghezze, onde sia sempre dl come $L+l$.

CANONE III.

Posti costanti tutti gli altri elementi, e nulla la rigidità naturale della corda, la distensione dl è inversamente come il peso $P+p$ tendente la corda.

Supponendosi nulla la rigidità naturale della corda, la forza $P+p$ s' eguaglia alla rigidità artificiale di essa corda, con cui sta in equilibrio. Un peso adunque minimo proporzionale a $P+p$ produce un allungamento costante, e per conseguenza, fatto uso del primo canone, uno peso costante dp genera un allungamento in ragione inversa dal peso tendente $P+p$.

CANONE IV.

Posti tutti gli altri elementi pari, e nullo il peso tendente la corda, l' allungamento dl sta in ragione reciproca della rigidità naturale r della corda.

La dimostrazione di questo canone è affatto simile a quella del canone precedente.

CANONE V.

Se due corde non differiscono in altro che nella rigidità, e nel peso tendente, la distensione dl cagionata dalla stessa forza minima dp è in ragione inversa della somma $r+P+p$ della rigidità e del peso tendente, cioè a dire d l come $\frac{1}{r+P+p}$.

Ho detto della somma, e non del prodotto, perchè se fosse dl come $\frac{1}{r.P+p}$, s' incontrerebbe nell' assurdo, che supponendo

egua-

eguale a nulla il peso tendente $P+p$, la distensione dl si scoprirebbe infinita.

Questo canone non è che una conseguenza dei canoni terzo e quarto insieme combinati.

CANONE VI.

Se gli altri elementi tutti saranno costanti, nulla la naturale rigidità di due corde, ed ineguali solamente le basi, un pari allungamento dl verrà prodotto dalla forza minima data dp.

Si considerino le due corde come fasci disuguali di funicelle di pari diametro. Il numero delle funicelle di un fascio al numero delle funicelle dell' altro fascio starà come la base di una corda a quella dell' altra. Tanto nel fascio picciolo, quanto nel grande si concepiscano e il peso tendente $P+p$, e la forza minima dp divisi in tanto numero di parti eguali, quante sono le funicelle componenti un fascio, e si scoprirà, che a due funicelle appartenenti a diversi fasci toccano e pesi tendenti, e forze minime, che si corrispondono in ragione inversa delle basi delle corde. Essendo dunque nelle dette funicelle le forze minime come i pesi tendenti, combinati i canoni primo e terzo, si troverà costante la distensione dl in ambe le funicelle. Quello, che si è detto d' una funicella, si può applicare a tutte l' altre componenti la stessa corda, ed indi cavare la conseguenza, che sono eguali le distensioni di due corde, la cui rigidità naturale sia nulla, ed in cui tutti gli altri elementi, eccetto le basi, sieno comuni. Questo sesto canone si conforma col terzo, il quale considerate due corde, in cui l' unico elemento variabile sia il peso tendente $P+p$, e la rigidità naturale uguale a nulla, stabilisce la distensione dl in ragione inversa del peso tendente, o sia come $\frac{1}{P+p}$. Supposto costante $P+p$, si trova parimente costante l' allungamento dl come vuole il sesto canone: e quindi i canoni terzo e sesto si uniscono in un solo, nè trattandosi di corde, la cui rigidità naturale sia nulla, importa in riguardo alle distensioni considerare l' elemento della varia grossezza.

CA-

CANONE VII.

Effendo coftanti tutti gli altri elementi, e nullo il pefo tendente, le diftenfioni di due corde differenti di groffezza ferberanno la ragione inverfa delle narurali rigidità, e fi verificherà effere dl come $\frac{1}{r}$.

Avvertafi, che il quarto, ed il fettimo canone fono una cofa fteffa. Amendue fuppongono nullo il pefo tendente, e variabile la rigidità: quello vuole la grofsezza coftante, e quefto variabile. Se due corde differentemente groffe faranno della fteffa materia, fi ritroveranno le rigidità come le bafi, o grofsezze, cioè r come g, e mediante la fteffa forza minima dp ne rifulteranno allungamenti in ragione inverfa delle groffezze, ch' è quanto dire dl come $\frac{1}{g}$. Paragonate infieme due corde di groffezza, e di materia differente, e pofto che la fpecie b efprima la rigidità variabile di corde dello fteffo diametro, ne rifulta la totale rigidità r come bg, e dl come $\frac{1}{r}$, come $\frac{1}{bg}$.

La Dimoftrazione del prefente canone riefce fempliciffima. Se fofse dp come r, l' allungamento dl fi fcoprirebbe coftante; dunque fupponendofi dp coftante, il detto allungamento per il primo canone è come $\frac{1}{r}$, come $\frac{1}{bg}$.

Non fi trafcuri il corollario, che rifpettivamente a corde fornite di finita naturale rigidità, l' elemento della varia grofsezza ferve a determinare la mifura d' efsa rigidità.

CANONE VIII.

Se gli unici elementi variabili fieno la grofsezza, e la rigidità, fi avrà dl come $\frac{1}{P+p+r}$, vale a dire le minime diftenfioni inverfamente come l' aggregato del pefo ftirante $P+p$, e della rigidità r.

Quefto canone altro non è, che un cafo particolare del canone

none quinto, supponendosi in quello variabile il peso $P+p$, che qui si assume costante.

IV. I canoni fra loro diversi sono il primo, che vuole dl come dp; il secondo, che vuole dl come $L+l$; il quinto, che vuole dl come $\frac{1}{r+P+p}$. Gli altri tutti si conformano col quinto, usato al più l' artifizio di supporre o la rigidità, o il peso tendente uguale a nulla. Combinati per tanto insieme i tre diversi canoni, si trova essere dl come $\frac{\overline{L+l}\,.\,dp}{r+P+p}$, o sia $b\,dl = \frac{\overline{L+l}\,.\,dp}{r+P+p}$, ch' è quanto dire le minime distensioni in ragione composta, diretta delle lunghezze delle corde, e della forza minima producente esse distensioni, ed inversa della somma della rigidità naturale delle corde, e del peso tendente.

V. Si vuole osservare, che nella stessa corda la rigidità r non è costante; imperciocchè quanto più in vigore dei pesi aggiunti p cresce la lunghezza $L+l$, altrettanto cala la base, a cui è proporzionale la rigidità. Chiamata dunque b la rigidità della corda corrispondente alla lunghezza L, ed al peso stirante P, avremo generalmente $r = \frac{bL}{L+l}$. La quantità $\frac{L}{L+l}$ è proporzionale alla base variabile della corda, la quale moltiplicata per la lunghezza variabile $L+l$ mi dà il prodotto costante L, indice della massa, che nella corda più o meno allungata resta sempre la stessa. L' espressione $r = \frac{bL}{L+l}$ si adatta anche a corde diverse, purchè per b s' intenda quella rigidità, che in esse corde corrisponde alla lunghezza L, ed al peso tendente P amendue dati. Per computare la specie b, bisogna aver riguardo alla rigidità della materia, ond' è formata la corda, ed alla base della stessa corda tesa dal peso P. Le basi si trovano esattamente col pesare le corde, e coll' avvertire, ch' esse basi sono proporzionali ai pesi divisi per le lunghezze, e per le densità.

Sostituito nella formola sopra trovata in cambio di r il suo valore $\frac{bL}{L+l}$, ci si presenterà l' equazione differenziale

$b\,dl$

$b\,dl = \frac{\overline{L+l}\,.\,dp}{\frac{bL}{L+l}+P+p}$, che generalmente eſprime la relazione fra gli allungamenti delle corde, e le forze o peſi, che li producono.

VI. Si metterà in maggior lume la verità della noſtra formola, coll' avvertire dedurſi da eſſa il noto canone, che ſe a due corde della ſteſſa materia, pari in lunghezza, differenti di baſe, e teſe da peſi proporzionali alle baſi, ſi applicheranno peſi minimi parimente proporzionali alle baſi, genereranno queſti diſtenſioni minime uguali.

Sia L la lunghezza della corda corriſpondente al peſo tendente P, ed aggiunto il peſo minimo dp, ſi avrà l' eſpreſſione $b\,dl = \frac{L\,dp}{b+p}$. Per le coſe dette nel canone ſettimo, la rigidità b di corde della ſteſſa materia, ma di baſe differente è proporzionale alla baſe: ma anche il peſo P ſi vuole proporzionale alla baſe; dunque la ſomma $b+P$ ſta come la baſe, e ſupponendo altresì come la baſe il peſo aggiunto dp, e coſtante la lunghezza L; ne ſegue che relativamente alle corde, di cui parliamo, ſi troverà coſtante il prodotto $\frac{L\,dp}{b+P}$, e conſeguentemente l' allungamento minimo dl proporzionale ad eſſo prodotto.

Egli è da notarſi per altro, che non tutte le materie, che collo ſteſſo nome ſi chiamano, ſono del pari rigide. Tutti gli ottoni per eſempio non ſaranno dotati della ſteſſa rigidità: ed oltre a ciò rendendoſi una corda vie più ſottile col ſeguitare a paſſar per trafila, la quale ſempre più la coſtipa; paragonate inſieme due corde della medeſima materia, una ſottile, e l'altra groſſa, ſi troverà la prima alquanto più rigida di quello porti la ragione della baſe, ciò ch' è ſtato da me confermato colla eſperienza. Nell' addotta dimoſtrazione ſi preſcinde da sì fatti elementi.

VII. Col mezzo della formola $b\,dl = \frac{L\,dp}{b+P}$ ſi troverà il tempo, in cui una corda A B (*Fig.* 2.) ſi vibra per lungo. Si tolga al peſo tendente P una minima porzione f, acciocchè rot-

to

to l' equilibrio la corda si metta in oscillazione. E qui mi dichiaro di supporre, che nello stesso istante si comincino ad accorciare le fibre tutte componenti la corda, e le più vicine, e le più rimote dal peso P; il che si verificherà almeno fisicamente, trattandosi di corde, la cui lunghezza sia moderata. Sia $BF = f$ la forza minima iniziale, che sollecita al moto il punto estremo B della corda AB, e Bb sia lo spazio, in fine del quale la forza sollecitante è nulla. Eguagliandosi il detto spazio alla somma degli accorciamenti delle fibre tutte, ond' è formata la corda AB, egli è facile da capire, che l' aja triangolare bBF pareggia l' intera azione delle forze sollecitanti. Ora a quest' azione s' eguaglia l' aggregato delle forze vive acquistate, e dal peso stirante P, e da tutte le menome particole, che compongono la corda, per ritrovare il quale, mi servo del seguente artifizio.

La lunghezza AB (*Fig.* 4.) della corda rapresenti la sua massa *m*, ed instituita l' analogia $m : P :: AB : BH$, una tal linea dinoterà la massa del peso P tendente la corda. Le due linee bD, bG normali, e tra loro, e coll' Ab si eguaglino alla velocità massima *u* del punto B nel sito b, e del peso tendente P, onde sia $DG = u^2$, ed agevolmente si scoprirà, che la forza viva del peso P giunto in b è proporzionale al parallelepipedo $BK = Pu^2$. In riguardo alla forza viva acquistata dalla corda AB, si compia la piramide ABE, e fatta la riflessione che le velocità massime di due particole bB, cC stanno fra loro come gli spazj trascorsi nello stesso tempicello, i quali serbano la ragione delle distanze AB, AC dal punto fisso A; deducasi, che se bG esprime la massima velocità della particola bB, la linea cI dinoterà la velocità massima della particola cC, ed il quadrato NI il quadrato d' essa velocità. Quindi i due solidi be, cO espongono le forze vive delle due fibre bB, cC: ma da tutti i solidi be, cO &c. dinotanti le forze vive delle corrispondenti particelle viene formata la piramide $ABE = \frac{mu^2}{3}$; dunque la stessa è proporzionale alla somma delle forze vive di tutte le fibre componenti la corda AB.

VIII. Ciò dimoſtrato, riflettaſi, che ſe ſi daſſe una corda matematica A B (*Fig.* 2) ſollecitata dalla ſcala di forze b B F, teſa dallo ſteſſo peſo P, ed in queſto ſolo differente dalla corda fiſica A B, che la ſua maſſa $\frac{m}{3}$ foſſe tutta unita nel punto B, acquiſterebbe eſſa la medeſima forza viva. Eſſendo perciò nell' uno, e nell' altro caſo il punto eſtremo B delle due corde fiſica, e matematica dotato in ſiti analoghi della ſteſſa velocità, e ſcorrendoſi lo ſteſſo ſpazio B b, egli è manifeſto, che la corda matematica ſarebbe iſocrona alla fiſica. Trovato per tanto il numero di vibrazioni, che ſarebbe la corda matematica in un minuto ſecondo, ſi caverà la conſeguenza, che un pari numero di oſcillazioni fa nello ſteſſo tempo la corda fiſica.

IX. Rivolgendomi alla corda matematica A B, la cui maſſa eguale alla terza parte di quella, ond' è fornita la corda fiſica di pari lunghezza L, ſtia tutta concentrata nel punto B, ſuppongo, che il detto punto ſeguitato dal peſo P ſia giunto nel ſito C, e che indi muova un menomiſſimo paſſo C c. Si tiri l' ordinata C D $= p$, e denominata b C $= l$, ſarà la infiniteſima C c $= -dl$, e per le note formule ſi avrà $-p\,dl = \overline{\frac{m}{3} + P}\,.\,u\,du$: ma conforme ſi è ſopra determinato $b\,dl = \frac{L\,dp}{\overline{b+P}}$; dunque fatta la ſoſtitutione, $\frac{L}{b\,.\,\overline{b+P}}\,.-p\,dp = \overline{\frac{m}{3}+P}\,.\,u\,du$, ed integrando, $f^2 - p^2 = \frac{b\,.\,\overline{b+P}\,.\,\overline{\frac{1}{3}m+P}\,.\,u^2}{L}$. Si aggiunge la coſtante f^2; perchè nel principio del moto, quando la velocità $u = o$, la forza ſollecitante ſi eguaglia ad f peſo minimo detratto dal finito P. Fatta l' eſtrazione della radice, troveremo $\sqrt{f^2 - p^2} = \frac{\sqrt{b\,.\,\overline{b+P}\,.\,\frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{L}}\,.\,u$: ma

$u =$

$u=\frac{-dl}{dt}$, e $dl=\frac{Ldp}{b.\overline{b+P}}$; dunque $u=\frac{-Ldp}{b.\overline{b+P}.dt}$, e per conſeguenza eſeguita la ſoſtituzione, dopo le debite operazioni, $dt=\frac{\sqrt{L.\overline{\frac{1}{3}m+P}}}{\sqrt{b.\overline{m+P}}}.\frac{-dp}{\sqrt{f^2-p^2}}$. L' integrale di $\frac{-dp}{\sqrt{f^2-p^2}}$, quando il punto B, compiuta una ſemivibrazione, ſia giunto in b, ſi eguaglia al quadrante diviſo pel raggio, e ſia proſſimamente alla frazione $\frac{355}{226}$; e perciò integrando; $t=\frac{\sqrt{L.\overline{\frac{1}{3}m+P}}}{\sqrt{b.\overline{b+P}}}.\frac{355}{226}$, ed il tempo d' una intera vibrazione del punto B, o ſia della corda AB, $t=\frac{\sqrt{L.\overline{\frac{1}{3}m+P}}}{\sqrt{b.\overline{b+P}}}.\frac{355}{113}$. E giacchè ſcopriremo in progreſſo eſſere $b=1$, $t=\frac{\sqrt{L.\overline{\frac{1}{3}m+P}}}{\sqrt{\overline{b+P}}}.\frac{355}{113}$.

X. Si troverà il valore del tempo t eſpreſſo per eſempio in ſecondi, paragonando la corda AB con un pendolo a cicloide, il tempo d' una vibrazione del quale generalmente ſi eſpone per la frazione $\frac{355}{113}$ moltiplicata nella radice della lunghezza. Un pendolo lungo once $36\frac{17}{24}$ del piede di Parigi fa una vibrazione per ſecondo; dunque inſtituita l' analogia

$t : \frac{\sqrt{L.\frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{b+P}} . \frac{355}{113} :: 1 : \sqrt{36\frac{17}{24}} . \frac{355}{113}$, ſcopri-temo $t = \frac{\sqrt{L.\frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{b+P.36\frac{17}{24}}}$, valore del tempo d' una vibrazione per lungo della corda matematica iſocrona alla fiſica A B eſpreſſo in ſecondi.

XI. Egli è noto, che oſcillando per traverſo la corda A B appoggiata a due ſcannelli, e teſa da una forza equivalente al peſo P, e chiamato T il tempo d' una ſua vibrazione, preſo un ſecondo per unità, ſi ha l'equazione $T = \frac{\sqrt{Lm}}{\sqrt{P.36\frac{17}{24}}} . \frac{113}{355}$.

Oſſervi chi legge, quanto ſieno differenti i tempi t, T di due oſcillazioni della ſteſſa corda, una per lungo, e l'altra per traverſo, riſpondendoſi eſſi nella proporzione di $\frac{\sqrt{\frac{1}{3}m+P}}{\sqrt{b+P}} : \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{P}} . \frac{113}{355}$, la quale non può eſſere di egualità, ſe non nel caſo particolare, che ſia la rigidità $b = \frac{\frac{1}{3}mP+P^2}{m} . \frac{\overline{355}^2}{\overline{113}^2} - P$. Nella corda, che ſi vibra per lungo, ſi pongono in moto la maſſa della corda, ed il peſo tendente: nella corda, che oſcilla di traverſo, la ſola maſſa poſta in moto ſi è quella della corda. Trattandoſi delle oſcillazioni per lungo, va meſſa in computo la rigidità naturale b della corda, la quale niente altera le vibrazioni traſverſali della corda medeſima.

XII. Fra le molte ipoteſi, che potrebbero conſiderarſi, mi riſtrinriftringerò alle due fole, a cui ci guida la prima fuppofizione del Conte Jacopo mio Padre, che leggi fimili diano norma e alle confuete vibrazioni delle corde, che ofcillano di traverfo a due fcannelli appoggiate, e alle vibrazioni delle corde, che ofcillano per lungo, mentre il pefo tendente alternatamente afcende, o difcende. Richiedono le due mentovate ipotefi, che le corde fieno prive di naturale rigidità, onde fi eguagli a nulla la fpecie b, e che il pefo ftirante P fia minimo rifpettivamente alla maffa m della corda. Modificata la formola del tempo d' una vibrazione per lungo a norma di quefte fuppofizioni, prende il feguente afpetto $t = \frac{\sqrt{L.\frac{1}{3}m}}{\sqrt{P}} . \frac{355}{113}$. Fatta la divifione per la quantità coftante $\frac{355}{113}. \sqrt{\frac{1}{3}}$, fi trova t come $\frac{\sqrt{Lm}}{\sqrt{P}}$, legge fimile a quella, che regola le ofcillazioni trafverfali delle corde.

XIII. Torno a prender per mano l' equazione differenziale del numero V. cioè $bdl = \frac{\overline{L+l}.dp}{\frac{bL}{L+l}+P+p}$, da cui generalmente fi efprima la relazione fra gli allungamenti delle corde, e le forze, o pefi, che li producono. Moltiplico per $\frac{bL}{L+l}+P+p$, e trafportato un termine da una parte all' altra mutato il fegno, trovo $\frac{bbLdl}{L+l} = \overline{L+l}.dp - \overline{P-p}.bdl$. Divido tutti i termini per $\overline{L+l}^{\,b+1}$, ed ho $\frac{bbLdl}{\overline{L+l}^{\,b+2}} = \frac{\overline{L+l}.dp - \overline{P-p}.bdl}{\overline{L+l}^{\,b+1}}$; ed Integrando, non ommeffa l' aggiunta della coftante, $c - \frac{bbL}{\overline{b+1}.\overline{L+l}^{\,b+1}} = \frac{P+p}{\overline{L+l}^{\,b}}$.

Si

Si determina il valore della coſtante c, ponendo il peſo aggiunto $p = o$, nel qual caſo è parimente $l = o$, onde abbiaſi $c = \frac{bb}{\overline{b+1}.L^{b}} + \frac{P}{L^{b}}$. Si ſoſtituiſca un tale valore, e ſi troverà $\frac{bb}{\overline{b+1}.L^{b}} + \frac{P}{L^{b}} - \frac{bbL}{\overline{b+1}.\overline{L+l}^{\,b+1}} = \frac{P+p}{\overline{L+l}^{\,b}}$, o ſia moltiplicando per $\overline{L+l}^{\,b}$, $\frac{bb}{b+1} + P.\frac{\overline{L+l}^{\,b}}{L^{b}} - \frac{bb}{b+1}.\frac{L}{L+l} = P+p$, equazione finita eſperimenta la relazione fra le diſtenſioni l, ed i peſi o forze p, dai quali vengono cagionate.

XIV. Ho promeſſo di provare eſſere il coefficiente $b = 1$. Otterremo ciò conſiderando le compreſſioni dell' aria, la quale, conforme metterò in pieno lume nello Schediaſma II. ha la proprietà, che le ſue denſità ſono proporzionali ai peſi comprimenti. Oſſervo nell' ultima premeſſa formola, che poſta la rigidità $b = o$, ne riſulta $P.\frac{\overline{L+l}^{\,b}}{L^{b}} = P+p$, eſpreſſione da cui ſi deduce, che al peſo tendente $P+p = o$ corriſponderebbe la lunghezza $L+l = o$ della corda, che non foſſe dotata di veruna naturale rigidità.

Paſſando dalle corde, che ſi rendono elaſtiche per mezzo dello ſtiramento, a quelle, che divengono elaſtiche per mezzo della compreſſione, ſi cavi la conſeguenza, che levato qualſiſia peſo comprimente ad una corda, o elaſtro, la cui rigidità naturale ſia nulla, ſi dilaterà eſſo infinitamente. Ora ella è tale la proprietà dell' aria, la quale, minorandoſi ſempre più il peſo comprimente, è capace di una indefinita rarefazione. Riſpettivamente adunque all' aria la ſpezie b s' eguaglia a nulla almeno fiſicamente.

Ci ſia un tubo cilindrico AF (*Fig.* 5) ripieno d' aria compreſſa dal peſo P, e ſia la lunghezza AB d' eſſo tubo uguale ad L. Al peſo P aggiungaſi il peſo p, che generi la compreſſione AC $= l$, onde la noſtra corda ſi ſcorti, e ſi riduca alla lunghez-

za

za $BC = L - l$. Il peſo comprimente $P + p$ accreſcaſi di nuovo per una fluſſione infiniteſima dp, a cui corriſponda la minima compreſſione $Cc = dl$, e fatto uſo degli ſteſſi canoni come nelle corde ſolide, che ſi ſtirano, col ſolo divario che ſia $b = o$, ſcopriremo $bdl = \frac{\overline{L-l}.dp}{P+p}$, equatione differentiale dinotante la relazione fra le compreſſioni dell'aria, ed i peſi che le producono.

Divido ambo i membri della equazione per $L - l$, ed ho $\frac{bdl}{L-l} = \frac{dp}{P+p}$, o pure $o = \frac{dp}{P+p} - \frac{bdl}{L-l}$, ed integrando, preſi i logaritmi nella logiſtica della ſotto tangente 1, log. c = log. $\overline{P+p} + b$. log. $\overline{L-l}$, e paſſando dai logaritmi alle quantità ordinarie, $c = \overline{P+p}\,.\,\overline{L-l}^{\,b}$.

Si ſtabiliſce il valore della coſtanre c, ponendo $p = o$, nel qual incontro e parimente $l = o$, e per conſeguenza $c = P.L^b$. Adempiuta la ſoſtituzione nell' ultima ſovrappoſta formola, troveremo $P.L^b = \overline{P+p}\,.\,\overline{L+l}^{\,b}$.

Ora eſſendo, conforme vuol l' eſporienza, le denſità d, D dell' aria come i peſi comprimenti P, $P+p$, e deducendoſi dalla ritrovata equazione l' analogia $P : P+p :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{\overline{L-l}^{\,b}}$, avremo $d : D :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{\overline{L-l}^{\,b}}$. Ma le denſità, che generalmente ſerbano la ragione compoſta, diretta dalle maſſe, ed inverſa dei volumi, nel noſtro caſo, in cui la maſſa è ſempre coſtante, ſono inverſamente come i volumi, ed i volumi dei cilindri FA, FC, che hanno comune la baſe, ſono come le lunghezze $BA = L$, $BC = L - l$; dunque $d : D :: \frac{1}{L} : \frac{1}{L-l}$. E perchè abbiamo altresì ſcoperto eſſere $d : D :: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{\overline{L-l}^{\,b}}$, avremo $\frac{1}{L} : \frac{1}{L-l}$

::

$:: \frac{1}{L^b} : \frac{1}{\overline{L-l}^b}$, e perciò $\overline{L-l}^{b-1} = L^{b-1}$, il che non può mai verificarsi, se non posto $b = 1$.

Se $b = 1$ nelle compressioni, deve avere lo stesso valore anche negli stiramenti, servendo all' uno, ed agli altri la stessa formola differentiale $b\,dl = \frac{\overline{L \mp l}.\,dp}{\frac{bL}{L \mp l} + P + p}$, ed essendo la Natura costante nelle sue leggi. Ciò, come vedremo, viene esattissimamente confermato dalla esperienza.

XV. La formola dunque del numero XIII. cioè

$$\overline{\frac{bb}{b+1} + P} \,.\, \overline{\frac{L+l}{L^b}}^{\,b} - \frac{bb}{b+1} \,.\, \frac{L}{L+l} = P + p,$$

sostituita in cambio di b l' unità, ci si presenta sotto la forma seguente

$$\frac{1}{2}\,\overline{b+P} \,.\, \frac{\overline{L+l}}{L} - \frac{1}{2}\,b \,.\, \frac{L}{L+l} = P + p.$$

Nel asse AB (*Fig. 6.*) segno AB $=$ L, ed indi a squadra conduco AK, e BF $=$ P $+ \frac{1}{2} b$. Congiunti con una linea, che si proroghi indefinitamente, i punti A, F, si tagli BH $= P$, onde resti HF $= \frac{1}{2} b$, e fra gli assintoti AK, AF descrivasi l' iperbola Apolloniana i CHI, la quale passi pel punto H; dico che posta l' assissa AD $=$ L $+ l$, sarà l' ordinata DI $=$ P $+ p$, peso tendente atto a ridurre la corda alla lunghezza AD.

Per la natura dell' iperbola i CHI abbiamo $\frac{\text{FH}.\text{AF}}{\text{AG}} = \text{GI}$: ma stante la similitudine dei triangoli ABF, ADG, $\frac{\text{AF}}{\text{AG}} = \frac{\text{AB}}{\text{AD}}$; dunque $\frac{\text{FH}.\text{AB}}{\text{AD}} = \text{GI}$, o sia analiticamente $\frac{\frac{1}{2} bL}{L+l} = \text{GI}$, linea esperimente la metà della rigidità naturale della corda, mentre

tre il peso tendente l' ha ridotta alla lunghezza $AD = L+l$. Ad AD infinita corrisponderebbe GI infinitesima, e minima conseguentemente sarebbe in tal incontro la rigidità naturale della corda divenuta infinitamente sottile. I mentovati triangoli ABF, ADG mi suggeriscono l' analogia

AB : BF :: AD : DG

$L : P + \frac{1}{2}b :: L+l : \frac{\overline{P+\frac{1}{2}b}.\overline{L+l}}{L}$, da cui si deduce il valore di DG. Essendo per tanto $DG = \frac{\overline{P+\frac{1}{2}b}.\overline{L+l}}{L}$, e $GI = \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l}$, ne risulta $DI = DG - GI = \frac{\overline{P+\frac{1}{2}b}.\overline{L+l}}{L} - \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l}$. Ma per la nostra equazione $\frac{\overline{P+\frac{1}{2}b}.\overline{L+l}}{L} - \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l} = P+p$; dunque presa $AD = L+l$, sarà la corrispondente ordinata $DI = P+p$.

XVI. Alla lunghezza della corda $AB = L$ corrisponde per la costruzione il peso dato $BH = P$, e perciò condotta pel punto H la linea mHM parallela ad AD, si scoprirà $MI = p$, peso aggiunto, da cui è stata prodotta la distensione BD.

Nel punto C, in cui si tagliano la linea AD, e l'iperbola iCHI, il peso tendente s' eguaglia a nulla, e per conseguenza AC si è la lunghezza naturale della corda non istirata da peso alcuno. Il doppio della linea CE dinota la rigidità naturale della corda, mentre è nullo il peso tendente. Per ritrovare il valore di $AC = L+l$, si ponga nella nostra formola $P+p = o$, e fatti i dovuti computi, scopriremo la lunghezza naturale della corda $AC = L+l = L.\sqrt{\frac{b}{b+2P}}$. In questa circostanza $l = BC$ è quantità negativa $= L.\sqrt{\frac{b}{b+2P}} - L$, la la quale ci manifesta, che levato il peso tendente $BH = P$, la corda si scorta per la porzione BC. La linea CB adunque uguale ad $L - L\sqrt{\frac{b}{b+2P}}$ misura l' allungamento cagionato dal peso $BH = P$. Si troverà il valore di $CE = \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l}$, surrogando in vece di $L+l$ la rinvenuta pari grandezza $L\sqrt{\frac{b}{b+2P}}$, onde abbiasi, adempiuti i calcoli necessarj, $CE = \frac{\sqrt{b^2+2bP}}{2}$, e conseguentemente $2CE = \sqrt{b^2+2bP}$, rigidità naturale della corda non istirata da peso alcuno.

Posta la lunghezza AD infinita, sarà parimente infinito il peso tendente DI uguale adequatamente a DG ordinata al triangolo ADG; giacchè in tale ipotesi è infinitamente picciola l' ordinata GI all' iperbola. Per allungare adunque immensamente una corda, non ci vuol meno di un peso infinito. In fatto per altro questo allungamento indefinito non segue. La tenacità, che connette l' una coll' altra le particole componenti la corda, è finita; e quindi accresciuto il peso tendente fino ad una certa misura, la tenacità resta superata dalla forza del peso, e la corda si spezza. Ha sperimentato M. Sauveur, che una corda d' acciajo si rompe, quando è tirata da un peso, che sia all' in circa 12000 volte maggiore del peso di 40 once del piede di Parigi di detta corda: che per ispezzare una corda d' ottone ci vuol un peso 9000 volte più grande del peso di 40 once d' essa corda: e per rompere una corda di rame, un peso 5000 volte maggiore del nominato peso d' once 40.

XVII. Esaminata quanto basta la premessa construzione rispettivamente agli allungamenti della corda AC, resta che si dicano alquante parole di quella porzione di curva da C verso A, in cui divenendo negativo il peso tendente, cioè a dire cangiandosi di tirante in premente, ci si presenta agli occhi una legge matematica, ma non fisica di compressioni della corda AC.

AC. Per vedere come nelle compressioni si modifichi la formola del numero XV. il peso premente $mi = p$ abbia cagionato nella corda $AB = L$ tesa dal peso $P = dm$ l' accorciamento $Bd = l$, onde alla corda resti la lunghezza $Ad = L - l$, ed avremo per l' equazione al triangolo ADG; $dg = \overline{\frac{1}{2}b + P} . \frac{\overline{L-l}}{L}$, e per l' equazione all' iperbola $gi = \frac{\frac{1}{2}bL}{L-l}$, e conseguentemente giacchè $di = mi - md = p - P$,

$$gi - dg = di = p - P = \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l} - \overline{\frac{1}{2}b - P} . \frac{\overline{L-l}}{L}.$$

Questa formola tira l' origine dalla espressione differenziale $dl = \frac{\overline{L-l}.dp}{\frac{bL}{L-l} + P - p}$, la quale suppone, che la minima compressione dl sia in ragione composta, diretta della forza inassegnabile dp, che la produce, e della lunghezza $L - l$ della corda, ed inversa della differenza $\frac{bL}{L-l} + P - p$ fra la rigidità naturale della corda $\frac{bL}{L-l}$, ed il peso $p - P = di$, che nella corda AC non istirata da forza alcuna ha cagionata la compressione Cd. Ora essendo il resto pari, le minime compressioni fisiche stanno in proporzione reciproca della somma, e non della differenza della rigidità, e del peso premente; riuscendo tanto più picciole, quanto è maggiore l' aggregato della rigidità, e del peso che preme.

Se L sarà la lunghezza d' un cilindro, ed b la rigidità naturale corrispondente a un dato peso premente P, e che in oltre sia $L - l$ la lunghezza, a cui si riduce la lunghezza del cilindro presso dal peso $P + p$, nel quale stato la rigidità naturale s' esprime per $\frac{bL}{L-l}$, si verificherà la seguente formola differentiale $dl = \frac{\overline{L-l}.dp}{\frac{bL}{L-l}+P+p}$; la quale ſendo un dato corpo privo di qualunque rigidità naturale, ſi riduce alla quì regiſtrata $dl = \frac{\overline{L-l}.dp}{P+p}$, ch' è quella ſteſſa da me ritrovata (num. XIV.) riſpettivamente all' aria. La mia conſtruzione per tanto non dà la norma alle fiſiche compreſſioni dei corpi.

XVIII. La legge delle diſtenſioni delle corde dinotata dalla equazione $\overline{\frac{1}{2}b+P}.\overline{\frac{L+l}{L}} - \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l} = P+p$ vuol confermarſi colla eſperienza. Dalla premeſſa formola ſi deduce eſſere $b = \frac{\overline{2pL-2Pl}.\overline{L+l}}{\overline{2L+l}.l}$ (1), $L+l = \frac{L}{b+2P}$.

$P+p+\sqrt{\overline{P+p}^2+b^2+2bP}$ (2). Amendue queſt' eſpreſſioni verranno a taglio per confrontare colla teorica alcuni eſperimenti, che ſono per riferire. Furono queſti da me fatti con ſomma diligenza molti anni fà nella occaſione di eſaminare una legge, che appunto eſſi ſperimenti mi fecero riconoſcer per falſa. Raccomandata una corda di ottone al chiodo A (*Fig.* 7), il quale era diſtante dallo ſcanello NO once $32\frac{1}{2}$ del piede di Parigi equivalenti a linee 390, attaccai primieramente ad eſſa corda il peſo P di libre 2, e ſegnai con inchioſtro il punto B, in cui la corda toccava lo ſcannello NO. Applicai poicia alla corda il peſo $P+p$ eguale a libre $2+4=6$, ed oſſervai, che il punto B era diſceſo ſotto dello ſcannello NO linee $1\frac{3}{8}$. Aggiunto poi al peſo $P=2$ il peſo $p=8$, onde il peſo totale $P+p$ foſſe di libre 10, cagionò eſſo peſo aggiunto 8 la diſtenſione di linee $2\frac{3}{4}$; la quale era doppia di quella prodotta dal peſo aggiunto 4. Nella equazione ſegnata (1) ſi faccia $L=390$, $P=2$,

$P=2$, $l=1\frac{3}{8}$, $p=4$, dati somministratici dalla prima sperienza, e troveremo il valore della rigidità della corda tesa dal peso $P=2$, cioè a dire $b=1134+\frac{37022}{68761}=1134+\frac{7}{13}$. Dopo ciò nella equazione segnata (2) si ponga in cambio di b il ritrovato valore $L=390$, $P=2$, $p=8$ peso aggiunto adoprato nella seconda esperienza, e si scoprirà l' allungamento generato dal peso $p=8$, vale a dire $l=2+\frac{3}{4}+\frac{1}{207}$. Avendo colla esperienza rinvenuto $l=2+\frac{3}{4}$, giudichi il Lettore, se si può sperare maggiore accordo fra il nostro canone, e l'esperimento, consistendo tutto il divario in $\frac{1}{207}$ di linea, minuzia totalmente inosservabile.

XIX. Merita riflessione la rigidità grande delle corde di metallo. La rigidità della nostra corda d' ottone equivaleva a libre $1134+\frac{7}{13}$. La maniera, con cui si lavorano le corde sonore, aumenta moltissimo la loro rigidità. Diventano esse così sottili, passando innumerabili volte per trafila, che sempre più le costipa ed irrigidisce.

L' essere la rigidità b assai grande in relazione ai pesi adoprati nelle due sperienze, si è il motivo, per cui le distensioni $1+\frac{3}{8}$, $2+\frac{3}{4}+\frac{1}{207}$ sono adequatamente come i pesi aggiunti 4, 8. Fingasi b infinita, nel qual caso sarà infinitesimo l' allungamento l prodotto dal peso aggiunto p, che si suppone finito. Nella equazione (1) si cancellino tutti i termini rispettivamente nulli, e resterà $b=\frac{pL}{l}$, e conseguentemente $l=\frac{Lp}{b}$, da cui si deduce, che sendo $\frac{L}{b}$ quantità costante, le distensioni l stanno sempre come i pesi aggiunti p. Or ecco la ragione per cui essendo la rigidità b assai grande in riguardo ai pesi usati nelle sperienze, si sieno trovati gli allungamenti nella stessa adequata proporzione dei pesi aggiunti.

XX.

XX. Dalla oſſervazione, colla quale finiſce il numero XVI. ſi raccoglie, che in una corda ſono due coſe diverſe la rigidità, che ripugna alle diſtenſioni, e la tenacità, che ne impediſce il rompimento fino ad un certo ſegno. Once $32\frac{1}{2}$ della corda uſata nelle due deſcritte ſperienze peſavano grani $7\frac{1}{2}$, dei quali 576 compongono un oncia. Facciaſi $32\frac{1}{2} : 40 :: 7\frac{1}{2} : \frac{120}{13} = 9\frac{3}{13}$; ed il quarto termine dell' analogia dinoterà il peſo d' once 40 della noſtra corda. Conforme la regola determinata per le corde d' ottone da M. Sauveur, nel citato numero da me riferità, moltiplicando il ſuddetto peſo per 9000, il prodotto che ne riſulta di grani $83076\frac{12}{13}$ = ad once 144 + grani $132\frac{12}{13}$ = a libre 12 + grani $132\frac{12}{13}$ s' eguaglia al peſo, che romperebbe la corda, la cui tenacità per conſeguenza è minore del peſo di libre 12 e grani $132\frac{12}{13}$. Queſto peſo attaccato alla corda produrrebbe l'allungamento l = linee $3\frac{1}{2}$ un po ſcarſe, al quale corriſponderebbe la rigidità naturale $\frac{bL}{L+l}$ = a libre $1124\frac{1}{2}$ a un dipreſſo; grandezza incomparabilmente maggiore della tenacità della corda alquanto più piccola del peſo di libre 12 e grani $132\frac{12}{13}$.

SCHE-

SCHEDIASMA II.

Delle compreſſioni dell' aria.

I. NEL precedente Schediaſma ho detto delle compreſſioni dell' aria ſoltanto ciò, che cadeva a propoſito: ora questa materia ſi vuol trattare diſtintamente. Il tubo cilindrico AF (*Fig.* 5.) ſia ripieno di un fluido compreſſo dal peſo P, e la ſua lunghezza AB ſi eſprima per L. Al peſo dato P aggiungaſi il variabile p, che cagioni la compreſſione $AC = l$, e riduca la lunghezza della corda fluida alla miſura $BC = L - l$. S' aumenti nuovamente il peſo $P + p$ per la fluſſione dp, a cui ſi riferiſca la minima compreſſione $Cc = dl$, e chiamata r la rigidità naturale del noſtro fluido, col mezzo dei canoni ſtabiliti nel mentovato Schediaſma riſpettivamente alle corde ſolide, che ſi diſtendono, troveremo $b\,dl = \dfrac{\overline{L - l}\,.\,dp}{r + P + p}$ (1). Nelle corde ſolide il valore della rigidità r non è coſtante, ma va ſcemando, ſecondochè cala la loro baſe. Non così ſuccede nella noſtra corda fluida, la cui rigidità r ſi conſerva invariabile, ſupponendoſi eguali tutte le ſezioni AH, CD.

II. Cerco le proprietà di un fluido, in cui ſe non altro nelle minime compreſſioni le denſità ſtiano nella ragione de' peſi comprimenti. Conciofſiachè le denſità della ſteſſa quantità di materia ſi corriſpondano nella proporzione inverſa de' volumi, e queſti nel noſtro caſo ſieno come $BC = L - l : Bc = L - l - dl$, ci ſi preſenterà l' analogia $P + p : P + p + dp :: \dfrac{1}{L - l} : \dfrac{1}{L - l - dl}$, e conſeguentemente l' equazione $\overline{P + p}\,.\,\overline{L - l} = \overline{P + p + dp}\,.\,\overline{L - l - dl}$, che ſi riduce così $\overline{P + p}\,.\,dl = \overline{L - l}\,.\,dp$. Nella formola (1) in vece di $\overline{L - l}\,.\,dp$ ſoſtituiſco lo ſcoperto valore, onde ne riſulti $b\,dl = \dfrac{\overline{P + p}\,.\,dl}{r + P + p}$, ovvero $b = \dfrac{P + p}{r + P + p}$. Oſſervo che dovendo eſſere coſtante il coefficiente b, non può ciò effettuarſi ſe non nella circoſtanza, in cui $r = o$, e $b = \dfrac{P + p}{P + p} = 1$. Quin-

dii

di se almeno nelle minime compressioni le densità hanno da riferirsi nella ragione dei pesi comprimenti, deve il coefficiente b eguagliarsi all' unità, ed il fluido esser privo di rigidità naturale. S' incontra la medesima conseguenza, deducendo dalla equazione $b = \frac{P+p}{r+P+p}$ la grandezza di $r = \frac{\overline{1-b}.\overline{P+p}}{b}$. Dinotando r la rigidità naturale, di cui il fluido è fornito prima d' esser compresso, il suo valore non dee dipendere dal peso premente $P+p$; e per salvare questa indipendenza, non c'è altro ripiego, fuorchè porre come sopra $b=1$, $r=o$.

III. Ripiglio per mano la formola (1) $b\,dl = \frac{\overline{L-l}.dp}{r+P+p}$, o dividendo per $L-l$, $\frac{b\,dl}{L-l} = \frac{dp}{r+P+p}$, e passando all' integrazione trovo $b.\log.\frac{L}{L-l} + A = \log.\overline{r+P+p}$. Si determina la cossante A riflettendo, che quando $p=o$, è parimente $l=o$, e perciò $A = \log.\overline{r+P} - b.\log.1$, e mettendo $\log.1 = o$, $A = \log.\overline{r+P}$. Avremo per tanto $b.\log.\frac{L}{L-l} = \log.\frac{r+P+p}{r+P}$, e fatto il transito dai logaritmi ai numeri, $\frac{L^b}{\overline{L-l}^b} = \frac{r+P+p}{r+P}$ (2), equazione ad una delle infinite iperbole fra gli assintoti, ch' esprime la relazione fra le compressioni l di qualsivoglia fluido, e le forze p, dalle quali sono prodotte.

IV. Noto, che la supposizione $b=1$, $r=o$ ci dà $\frac{L}{L-l} = \frac{P+p}{P}$, ed indi l' analogia $P:P+p :: \frac{1}{L} : \frac{1}{L-l}$: ma le quantità $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{L-l}$ stanno come le densità del fluido compresso dai pesi P, $P+p$; dunque mettendo $b=1$, $r=o$, le densità del fluido accettano la proporzione dai pesi comprimenti non solo nelle compressioni minime, ma ancora nelle finite, nè si può dare

flui-

fluido dotato di questa proprietà soltanto nelle infinitesime compressioni.

V. Fra gli assintoti BG, BH (*Fig.* 8.) si descriva l'iperbola IDL adattata all'equazione (2) $\frac{L^{b}}{\overline{L-l}^{\,b}} = \frac{r+P+p}{r+P}$, in cui all'assissa BA $= L$ corrisponda l'ordinata AD $= r+P$. Tagliata AK $= r$, pei punti D, K si conducano parallele a BH le linee FDO, EKL, l'ultima delle quali interfecherà l'iperbola nel punto L, e determinerà l'ordinata HL $= r$. Per costipare vie più la colonna fluida BA $= L$, e ridurla all'altezza BC $= L - l$ egli è d'uopo al peso KD $=$ NM $= P$ aggiungere MI $= p$, onde ne risulti l'ordinata CI $= r+P+p$. Che se si pretendesse di ridurre la colonna BA ad un'altezza infinitesima BC, si richiederebbe l'accrescimento di un infinito peso MI $= p$. Scemando il peso KD per la misura mi, la corda fluida BA $= L$ si dilaterà fino all'altezza Bc $= L + l$, e giungerà finalmente alla sua naturale lunghezza BH $= L + l$ $= \frac{L.\overline{r+P}^{\frac{1}{b}}}{r^{\frac{1}{b}}}$, quando essendo il peso levato OL $=$ KD $= P$, non sia più compressa da peso alcuno. La naturale lunghezza BH si scoprirà infinita in un fluido, che sia privo di rigidità, dimodochè HL $= r$ si eguagli a nulla, o almeno ad una minima quantità.

VI. C'insegnano le osservazioni, che quanto l'aria è meno compressa, tanto più si dilata, ne di questa sua rarefazione l'ultimo confine si è potuto mai discoprire. Si estragga pur a piacere l'aria dalla macchina del Boile, che la restante occuperà sempre tutto il recipiente, ne mai accaderà, che la parte inferiore dello stesso sia piena d'aria, e vuota la parte superiore. Egli è dunque manifesto, che in questo fluido, o non v'ha rigidità, ovvero essa dee riputarsi talmente minima, che dentro certi confini possa fisicamente trascurarsi con sicurezza, onde la ripugnanza al costipamento unicamente dipenda dalla forza che preme. Quindi rispettivamente all'aria si adempierà la formola $\frac{L^b}{\overline{L-l}^b} = \frac{P+p}{P}$, o ſia $\frac{L}{L-l} = \frac{\overline{P+p}^{\frac{1}{b}}}{P^{\frac{1}{b}}}$, e le denſità $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{L-l}$ ſtaranno come i peſi comprimenti P, $P+p$ alzati alla dignità, il cui eſponente $\frac{1}{b}$.

VII. Ora egli è d' uopo determinare il valore di b. Nell' antecedente Schediaſma ho avvertito, che ſe b pareggia l' unità in riguardo alle corde d' aria, dee conſervare la ſteſſa grandezza anche riſpettivamente alle corde ſolide. In fatti ci ſieno due corde, una liquida, e l' altra ſolida, egualmente lunghe, del pari rigide naturalmente, preſſa quella, e ſtirata queſta dal medeſimo peſo P, e ſervendo ad entrambe la comune formola differenziale $b\,dl = \frac{L\,dp}{r+P}$, non ſi può aſſegnare ragione alcuna, per cui la forza minima dp non abbia da cagionare in amendue la ſteſſa compreſſione, o allungamento dl. Il perchè in ambo i caſi deve aſſegnarſi a b un pari valore, onde ſi conſervi l' equazione $b\,dl = \frac{L\,dp}{r+P}$. Gli eſperimenti frattanto ci hanno moſtrato, che nelle corde ſolide è $b = 1$; dunque tale è la ſua grandezza anche nelle corde d' aria, le compreſſioni della quale relative ai peſi comprimenti ſono per conſeguenza eſpreſſe dalla formola $\frac{L}{L-l} = \frac{P+p}{P}$, la quale ci manifeſta, che le denſità $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{L-l}$ abbracciano la proporzione dei peſi comprimenti P, $P+p$, e che la curva IDL è una iperbola Apolloniana.

VIII. Il caldo accreſce l' elaſticità dell' aria, il freddo la diminuiſce. Acquiſti l' aria maggior calore, e ſi muterà la proporzione fra la denſità ed il peſo comprimente; laonde acciocchè la colonna BA mantenga la priſtina denſità, ſi richiederà il peſo più grande A 2 D. Deſcritta agli ſteſſi aſſintoti BG, BH l' iperbola Apolloniana 2 I 2 D 2 L, che paſſi pel punto 2 D, determinerà eſſa la proporzione fra le lunghezze BA, BC della

	Altezze dell' aria.	Altezze del mercurio.	Differenze fra le altezze dell' aria secondo l' esperienza, e secondo la teorica.	Differenze fra le altezze del mercurio secondo l' esperienza, e secondo la teorica.
	12	0		
1.	$11 \frac{1}{2}$	$1 \frac{7}{16}$	$\frac{63}{478} = \frac{2}{31}$	$\frac{63}{368} = \frac{2 \frac{17}{23}}{16}$
2.	11	$2 \frac{15}{16}$	$\frac{51}{513} = \frac{1}{10}$	$\frac{14}{48} = \frac{4 \frac{2}{3}}{16}$
3.	$10 \frac{1}{2}$	$4 \frac{6}{16}$	$\frac{9}{134} = \frac{1}{15}$	$\frac{3}{14} = \frac{3 \frac{3}{7}}{16}$
4.	10	$6 \frac{3}{16}$	$\frac{58}{565} = \frac{1}{10}$	$\frac{29}{80} = \frac{5 \frac{4}{5}}{16}$
5.	$9 \frac{1}{2}$	$7 \frac{14}{16}$	$\frac{2}{37}$	$\frac{61}{304} = \frac{3 \frac{3}{14}}{15}$
6.	9	$10 \frac{2}{16}$	$\frac{21}{313} = \frac{1}{15}$	$\frac{5}{12} = \frac{6 \frac{2}{3}}{16}$
7.	$8 \frac{1}{2}$	$12 \frac{8}{16}$	$\frac{23}{222} = \frac{1}{10}$	$\frac{69}{136} = \frac{8 \frac{2}{17}}{16}$
8.	8	$15 \frac{1}{16}$	$\frac{64}{707} = \frac{1}{11}$	$\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$
9.	$7 \frac{1}{2}$	$17 \frac{15}{16}$	$\frac{111}{1506} = \frac{2}{27}$	$\frac{37}{80} = \frac{7 \frac{2}{5}}{16}$
10.	7	$21 \frac{3}{16}$	$\frac{43}{805} = \frac{1}{19}$	$\frac{43}{112} = \frac{6 \frac{1}{7}}{16}$
11.	$6 \frac{1}{2}$	$25 \frac{3}{16}$	$\frac{113}{1738} = \frac{1}{15}$	$\frac{113}{208} = \frac{8 \frac{9}{13}}{16}$
12.	6	$29 \frac{11}{16}$	$\frac{54}{941} = \frac{1}{17}$	$\frac{9}{16}$
13.	$5 \frac{3}{4}$	$32 \frac{3}{16}$	$\frac{195}{3924} = \frac{1}{20}$	$\frac{195}{368} = \frac{8 \frac{11}{23}}{16}$
14.	$5 \frac{1}{2}$	$34 \frac{15}{16}$	$\frac{91}{2050} = \frac{1}{23}$	$\frac{91}{176} = \frac{8 \frac{3}{11}}{16}$
15.	$5 \frac{1}{4}$	$37 \frac{15}{16}$	$\frac{165}{4292} = \frac{1}{26}$	$\frac{55}{112} = \frac{7 \frac{6}{7}}{16}$
16.	5	$41 \frac{9}{16}$	$\frac{63}{[illegible]} = \frac{1}{18}$	$\frac{63}{80} = \frac{12 \frac{3}{5}}{16}$
17.	$4 \frac{3}{4}$	45	$\frac{83}{2372} = \frac{1}{29}$	$\frac{83}{152} = \frac{8 \frac{14}{19}}{16}$
18.	$4 \frac{1}{2}$	$48 \frac{12}{16}$	$\frac{15}{1246} = \frac{1}{83}$	$\frac{10}{48} = \frac{3 \frac{1}{3}}{16}$
19.	$4 \frac{1}{4}$	$53 \frac{11}{16}$	$\frac{157}{5300} = \frac{1}{34}$	$\frac{157}{272} = \frac{9 \frac{4}{17}}{16}$
20.	4	$58 \frac{12}{16}$	$\frac{32}{1406} = \frac{1}{44}$	$\frac{8}{16}$
21.	$3 \frac{3}{4}$	$63 \frac{15}{16}$	$-\frac{33}{5956} = -\frac{1}{180}$	$\frac{-11}{80} = \frac{-2 \frac{1}{5}}{16}$
22.	$3 \frac{1}{2}$	$71 \frac{5}{16}$	$\frac{65}{3214} = \frac{1}{49}$	$\frac{65}{112} = \frac{9 \frac{2}{7}}{16}$
23.	$3 \frac{1}{4}$	$78 \frac{11}{16}$	$\frac{57}{6900} = \frac{1}{121}$	$\frac{57}{208} = \frac{4 \frac{5}{13}}{16}$
24.	3	$88 \frac{7}{16}$	$\frac{51}{1881} = \frac{1}{37}$	$\frac{17}{16}$

la corda aerea, ed i pesi comprimenti A 2 D, C 2 I. Conciossiachè $\frac{BA}{BC}=\frac{CI}{AD}=\frac{C\,2\,I}{A\,2\,D}$, avremo $AD=P : A\,2\,D :: CI = P+p : C\,2\,I$, e quindi posta $A\,2\,D=nP$; sarà $C\,2\,I=nP+np$, ed all' iperbola 2 I 2 D 2 L competerà l' equazione

$$\frac{L}{L-l}=\frac{nP+np}{nP}.$$

IX. Affine di mettere la stabilita teorica alla prova della sperienza, prendo in prestanza dall' accuratissimo Boile alcuni esperimenti. L' aere da prima nel tubo riempieva uno spazio alto 12 dita Anglicane, e poscia col mezzo del mercurio si comprimeva, sicchè occupasse altezze sempre minori. Nell' annessa tavola la prima colonna indica le altezze dell' aria nel tubo, e la seconda le altezze del mercurio comprimente, l' une e l' altre espresse in dita Anglicane. Si avverta per altro, che col peso del mercurio si dee accoppiare quello dell' atmosfera, che parimente l' aria comprime, e che mentre il Boile faceva gli esperimenti, equivaleva a dita $29\frac{1}{8}$ di mercurio. Alle due mentovate aggiungo le colonne terza, e quarta contenenti, quella le differenze fra le altezze dell' aria, e questa le differenze fra le altezze del mercurio secondo l' esperienza, e secondo la teorica.

X. La molta irregolarità, colla quale procedono le due serie delle differenze fra le altezze dell' aria, e del mercurio secondo l' esperienza, e secondo la teorica, apertamente dimostra che le osservazioni, comechè diligenti, ci danno il prossimo, e non l' esatto. Nulladimeno a chiaro lume comprendesi, che corretti gli errori, anderebbero divenendo sempre più piccioli i termini della prima progressione, e sempre più grandi quelli della seconda. Se non ci fossero resistenze, i pesi espressi nella colonna quarta avrebbero cagionato compressioni eguali alle grandezze contenute nella colonna terza, ed esercitata quell' azione, che dalle accennate resistenze è stata impedita. Si rifletta frattanto, che coll' aria sono miste molte particole eterogenee poco o nulla costipabili, e che per conseguenza dallo stesso peso l' aria pura viene più dell' impura compressa. In fatti leggesi nel Tomo II. dei Comentarj dell' Accademia di Bologna aver la celebre Signora Laura Baſſi coll' eſperienza trovato, che l' umidità dell' aria ne diminuiva le compreſſioni. Aggiungaſi che acquiſtando il volume delle particole eterogene tanto maggior proporzione a quello dell' aria pura, quanto eſſa è più coſtipata, ſi richiederanno accreſcimenti di peſi vie più grandi ad ottenere quelle compreſſioni, che conforme la teorica, levati eſſi accreſcimenti, ſeguirebbero nell' aria ſenza la miſtione delle particole eterogenee.

XI. Oltre a ciò non dobbiamo porre in non cale i fregamenti dell' aere, e del mercurio contro l' interna ſuperficie del tubo. La fregagione patita dall' aria più, o meno compreſſa la poſſiamo conſiderare come coſtante; imperciocchè ſtando eſſa in ragione compoſta della preſſione, e della ſuperficie del tubo occupato dall' aere, e queſta come l' altezza, e l' altezza come il volume aereo, ed il volume inverſamente come la denſità, e la denſità direttamente come la preſſione a un di preſſo; ne ſegue che la fregagione ſuddetta è in proporzione compoſta diretta, ed inverſa della preſſione, e perciò coſtante. Altrettanto non può affermarſi del fregamento ſofferto dal mercurio, il quale, conforme a che ſe ne infonde nel tubo una maggior quantità, s' aumenta al creſcere del cumulo delle preſſioni, e della ſuperficie fregata.

XII. Divenendo adunque più grandi le reſiſtenze, ſecondochè l' aria più ſi coſtipa, hanno eſſe da far equilibrio con una quantità maggiore di peſo, e da impedire la compreſſione, che dallo ſteſſo peſo verrebbe prodotta, come realmente ſuccede. E qui egli è d' uopo riflettere, che quando ſi affermano le denſità dell' aria proporzionali ai peſi comprimenti, ſi parla dell' aria pura, e dalle reſiſtenze preſcindeſi. Ho fatto vedere che nell' aria miſta colle particole eterogenee, computate le reſiſtenze, deggiono apparire le denſità alquanto più picciole dei peſi comprimenti: e tali ſcoprendole gli eſperimenti, confermano eſſi la già dimoſtrata teorica, la quale reſterebbe convinta di falſità, ſe nell' aria impura fraſtornata dalle reſiſtenze le altezze della colonna d' aria ſi foſſero puntualmente trovate in ragione reciproca dei peſi, che la coſtipano.

XIII Non diſſimulo una forte obbiezione, ed è, che in due giorni ſuſſeguenti ha la lodata Signora Laura Baſſi oſſervato eſſere ſtata ſufficiente una colonna di mercurio un dito minore

nore dell' altezza del barometro notata con sommo studio, per istringere l'aria nella metà dello spazio. In questi due casi non giova, anzi pregiudica la considerazione delle resistenze, rimosse le quali avrebbe bastato un peso ancora più picciolo, che dalla legge prescritta si sarebbe vie più allontanato. Quantunque molte cagioni possano aver prodotto il mentovato effetto, nulladimeno valendomi del principio stabilito dal Co. Jacopo Riccati mio Padre nell'ultimo Capitolo del Libro III. dei Principj, e dei Metodi della Fisica, cioè che se contro una teorica ben avverata si mette in campo qualch' eccezione, o difficoltà, di cui non si vede chiara la soluzione, non si può condannare l'uso moderato di qualche semplice ipotesi, la quale metta in calma la fantasia, e ci adombri un modo, onde si dilegui la proposta difficoltà; dico che non conservandosi sempre costante la proporzione fra la densità dell'aria, ed il peso comprimente, ma ricevendo variazione dal caldo, e dal freddo, l'effetto, di cui si parla, può aver tratta da questo fonte l'origine. Al peso A 2 D (*Fig.* 8) corrisponda la corda d'aria B A; e se non si mutasse il calore dell'aria stessa, per costiparla fino in C, si renderebbe necessario il peso C 2 I. Si raffreddi l'aria nel tempo in cui si fa l'osservazione, e si adempierà la medesima compressione A C col peso C I minore di C 2 I.

XIV. Affine di maggiormente confermare la mia teorica, noto, che avendo dimostrato al numero VI. doversi nell' aria priva di naturale rigidità verificare la formola $\dfrac{L^{b}}{\overline{L-l}^{\,b}} = \dfrac{P+p}{P}$, si deduce da questa il valore di $b = \dfrac{\log.\left(\dfrac{P+p}{P}\right)}{\log.\left(\dfrac{L}{L-l}\right)}$, il quale ha da esser costante. Ricorro nuovamente agli esperimenti del Boile, e per non moltiplicare soverchiamente i calcoli, scielgo il primo, il duodecimo, ed il ventiquattresimo, e cerco i valori di b.

Sia come nella prima sperienza $L = 12$, $L - l = 11\frac{1}{2}$, $P = 29\frac{1}{8}$, $P + p = 29\frac{1}{8} + 1 + \frac{7}{16} = 30\frac{9}{16}$, e troveremo

$b =$

$$b = \frac{\log.\left(\dfrac{30\frac{9}{16}}{29\frac{1}{8}}\right)}{\log.\left(\dfrac{12}{11\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\log.\left(\dfrac{489}{466}\right)}{\log.\left(\dfrac{24}{23}\right)} = \frac{209230}{184834}$$

$$= 1 + \frac{24396}{184834} = 1 + \frac{2}{15} \text{ in circa.}$$

Nella ſperienza duodecima abbiamo $L-l=6$, $P+p=58\frac{13}{16}$, e queſti dati accoppiati colle quantità invariabili $L=12$, $P=29\frac{1}{8}$ determinano $b = \dfrac{\log.\left(\dfrac{58\frac{13}{16}}{29\frac{1}{8}}\right)}{\log.\ 2} = \dfrac{\log.\left(\dfrac{941}{466}\right)}{\log.\ 2} =$

$$\frac{3052023}{3010300} = 1 + \frac{41723}{3010300} = 1 + \frac{1}{72}.$$

L' ultima ſperienza c' inſegna eſſere $L-l=3$, $P+p=117\frac{9}{16}$, e quindi ſcopriremo $b = \dfrac{\log.\left(\dfrac{117\frac{9}{16}}{29\frac{1}{8}}\right)}{\log.\ 4} = \dfrac{\log.\left(\dfrac{1881}{466}\right)}{\log.\ 4} =$

$$\frac{6060029}{6020600} = 1 + \frac{39429}{6020600} = 1 + \frac{1}{153}.$$

La varietà dei valori di b, ch' eſſer dovrebbe coſtante, ci fa toccare con mano, che gli eſperimenti vengono turbati da elementi eſtrinſechi, che in eſſi s' inſinuano, tolti di mezzo i quali, ſi troverebbe ſtabilmente $b=1$, conforme richiede la legge delle denſità proporzionali ai peſi comprimenti. Poſto $b<1$, le denſità ſarebbero proporzionatamente maggiori dei peſi comprimenti, ed il contrario ſuccederebbe ammeſſa l' ipoteſi di $b>1$. Ora intanto

to l' eſperienze del Boile ci danno $b > 1$, inquanto che reſtando in parte impedita dalle reſiſtenze la coſtipazione, le denſità appariſcono a proporzione più picciole dei peſi comprimenti.

XV. Riſervo all' ultimo luogo l' argomento più convincente. Quando ſi propaga il ſuono, le fibre aeree di pari lunghezza componenti una corda o raggio ſonoro cominciano una dopo dell' altra per eguali intervalli di tempo le loro vibrazioni uniſone a quelle del corpo che ſuona, e che per conſeguenza ſi effettuano colle leggi di un pendolo a cicloide. Dal principiarſi ſucceſſivamente il moto, ne ſegue che le dette fibre ſi coſtipano, che ſi accreſce la loro elaſticità, e che dalla differenza delle elaſticità di due fibre vicine diviſa per la maſſa della fibra meno compreſſa viene determinata la forza acceleratrice della ſteſſa fibra, la qual forza ha da eſsere proporzionale alla diſtanza dal punto medio della vibrazione, ſe l' aria può oſcillare colle leggi di un pendolo cicloidale.

Sia dx la lunghezza di una fibra, mentre ſta in equilibrio col peſo dell' atmosfera, e $dx - dq$ ſia la lunghezza della medeſima fibra coſtipata per la quantità riſpettivamente minima dq. Se il principio ſi aſſume, che le forze elaſtiche ſtiano nella ragione inverſa delle lunghezze, cioè a dire come $\frac{1}{dx} : \frac{1}{dx-dq}$, le forze acceleratrici ſi trovano proporzionali alle diſtanze dal punto medio della oſcillazione, conforme vedremo nella Diſſertazione I. dello Schediaſma VIII., e l'aria può in ſe ricevere il moto vibratorio colle leggi di un pendolo a cicloide. Ora eſſendo anche le denſità in ragione reciproca delle lunghezze dx, $dx - dq$, ed uguagliandoſi le forze elaſtiche alle forze comprimenti, colle quali ſi equilibrano, dall' ammeſſo principio ne naſce, che le denſità delle fibre aeree ſi corriſpondano nella proporzione delle forze comprimenti. Ciò poſto adunque ne riſultano le forze acceleratici come le diſtanze dal punto di mezzo della vibrazione, e l' aria può oſcillare non altrimenti che un pendolo a cicloide: ma l' aria in fatti ſi vibra con queſta legge; dunque tornando indietro per le ſteſſe veſtigia, troveremo, che nelle menome compreſſioni le denſità dell' aria hanno da ſtare come le forze comprimenti. E giacchè ho provato al numero IV. che ſe nelle compreſſioni infiniteſime le denſità ſtanno come i peſi comprimenti, accettano le ſteſſa proporzione an-

anche nelle compreſſioni finite; chiaramente ſi ſcopre, che queſta proprietà compete all' aria nelle coſtipazioni dell'uno, e dell' altro genere. Quindi ſiccome non ſi può dubitare, che al vibrarſi di un corpo ſonoro l' aria non oſcilli con legge ſimile, mentre ce ne porta il ſuono all' orecchio; così è del pari certo, che le denſità dell' aria ſeguitano la proporzione delle forze, che la coſtipano.

XVI. Ho aſſerito ſoltanto, che le denſità dell'aria ſi riferiſcono nella ragione delle forze comprimenti, quando le coſtipazioni ſtanno dentro i limiti dell' infiniteſimo, e del finito; perchè ſono perſuaſo, che queſto canone non poſſa aver luogo nelle dilatazioni, e nelle compreſſioni infinite, alle quali dovrebbe corriſpondere la lunghezza della corda aerea o immenſa, o eguale a nulla.

Quantunque cogli eſperimenti non ſi abbia mai potuto trovare l' ultimo confine delle dilatazioni dell' aria, nulladimeno dobbiamo crederle grandiſſime sì, ma finite. Quindi fa d' uopo aſſegnare alla rigidità naturale un valore fiſicamente minimo, e non già uguale a nulla. Finchè la forza premente ha una maſſima proporzione alla rigidità naturale, ſi può queſta traſcurare, e le denſità abbracciano dei peſi comprimenti la proporzione. Che ſe queſti peſi ſono talmente diminuiti, che non ſia più lecito traſandare la rigidità, allora ſi muta legge, e vale la formola

$$\frac{L}{L-l} = \frac{r+P+p}{r+P}.$$

Se conforme l' idea matematica del Cavalier Nevvton l' aria foſse formata di punti, che ſi reſpingeſsero con forze in ragione inverſa delle diſtanze, le ſue denſità conſerverebbero ſempre la proporzione dei peſi comprimenti benchè all' infinito aumentati. Ma concioſſiachè le particole elementari aeree per altro menomiſſime non paſſino i termini del finito; non può continuare ad avverarſi il canone ſtabilito, qualora la lunghezza BC (*Fig.* 5) della corda d' aria ſi finga talmente picciola, che per giungere ad una così grande coſtipazione, foſse neceſsario, che le particole aeree ſi compenetraſsero l' una coll' altra.

SCHE-

SCHEDIASMA III.

Della proporzione fra le forze applicate a squadra alla metà delle corde tese, ed i varj effetti da esse forze cagionati. Colla stessa occasione si ragiona della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte.

I. Qualora alla metà di una corda tesa, e a due scannelli appoggiata si applica a squadra una forza, ripiega essa la detta corda per un determinato spazio, o saetta, ne allunga egualmente le due metà, ed accresce del pari la loro tensione. Dei mentovati tre effetti, e colla stessa occasione anche della proporzione, che passa fra le affezioni sensibili, e la forza degli obbietti esterni, da cui vengono prodotte, terrò discorso nel presente Schediasma. Il Conte Jacopo Riccati mio Padre trattando prima d' ogni altro questa materia in una sua Dissertazione inserita nel Tomo I. de' supplementi al Giornale d' Italia, e ristampata nel Tomo III. delle sue Opere, suppone primieramente, che la forza $DH = f$ (*Fig.* 9) dell' obbietto esterno agisca tutta raccolta nel punto medio C della fibra $AB = 2L$, dimodochè essa fibra mediante l' azione della forza DH prenda la figura triangolare ADB. Suppone in secondo luogo, che continuata la linea BD verso I, e condotta HI parallela ad AD, onde la forza DH si risolva nelle due HI, DI, e delineata col raggio BC la porzione di circolo CE, la distensione $ED = l$ sia cagionata dalla forza DI; il che, come vedremo, succederebbe soltanto, se si uguagliasse a nulla la forza P tendente la fibra nella sua naturale positura ACB. Suppone finalmente in terzo luogo, che gli allungamenti $ED = l$ serbino sempre la ragione delle potenze DI. Ora giacchè mi è riuscito nello Schediasma I. di scoprire le vere relazioni fra le distensioni $ED = l$, e le forze, che direttamente le generano, ho presa risoluzione di maneggiare la cosa con maggior generalità, non ritenendo salvo, che la prima fra le tre supposizioni del Conte Jacopo mio Padre.

Trovare la proporzione fra le saette, e le forze applicate a squadra alla metà delle corde tese appoggiate a due scannelli, e raccomandate a due chiodi immobili.

II. Al punto di mezzo C della corda $AB = 2L$ raccomandata a due chiodi immobili A, B, e tesa da una forza equivalente al peso dato P, si applichi con direzione normale ad AB la forza $DH = f$, la quale produca la saetta $CD = s$; si cerca la relazione fra la forza f, e la saetta s. Rifletto, che la semicorda $BD = BE + ED = L + l$ è tesa nella positura ADB da una forza, o peso $DI = P + p$ maggiore di quello uguale a P, che la stirava nella situazione ACB, per la quantità accresciuta p, da cui, e non da $DI = P + p$ (eccettuato il caso di $P = o$) è stato prodotto l' allungamento ED, conforme a ciò che ho spiegato nel citato Schediasma I. Chiamo b la rigidità naturale della corda nel sito ACB, ed il mentovato Schediasma m' insegna essere $\overline{\frac{1}{2}b + P} \cdot \overline{\frac{L+l}{L}} - \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l} =$ $P + p$ (1). Tirata la linea IG parallela ad AB, la similitudine dei triangoli BDC, IDG suggerisce l' analogia

DG : DI :: DC : BD

$\frac{1}{2}f : P+p :: s : L+l$, da cui si deduce l' equazione

$\frac{\overline{P+p} \cdot s}{L+l} = \frac{1}{2}f$ (2). Finalmente il triangolo rettangolo BCD ci somministra la formola $BD = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2}$

$L + l = \sqrt{L^2 + s^2}$ (3). Nella equazione (2) in cambio di $P + p$ si sostituisca il suo valore preso dalla equazione (1), e si avrà, adempiuti i necessarj calcoli, $\frac{\overline{b + 2P} \cdot s}{L} - \frac{bLs}{\overline{L+l}^2} = f$. In vece di $L + l$ pongasi il suo valore contenuto nella equazione (3), e si scoprirà

prirà $\frac{\overline{b+2P}.s}{L}-\frac{bLs}{L^2+s^2}=\frac{2Ps}{L}+\frac{bs^3}{L^3+Ls^2}=f\,(4)$, formola ch' esprime la relazione cercata fra le saette s, e le forze f, che le producono.

III. Per maggiormente confermare la verità della nostra formola, poniamola al cimento della esperienza. Da essa formola si deduce quest' altra $b=\frac{L^3f+Lfs^2-2PL^2s-2Ps^3}{s^3}$ (5).

Ora perchè qualunque, benchè menomo sbaglio, che si commetta nel misurare la saetta s, porta grandissimo divario nel valore della naturale rigidità b della corda ACB tesa dalla forza equivalente al peso P; fa d' uopo rettificare il valore della saetta s prodotta dalla forza f, paragonando insieme i suoni delle due semicorde CB, DB. Il suono, o numero n di vibrazioni, che fa la corda CB per esempio in un secondo, s'eguaglia all' unità divisa pel tempo t, durata di una d' esse vibrazioni espressa in parti di secondo, onde abbiasi l' equazione $n=\frac{1}{t}$: ma nelle corde fisiche di massa m, che si vibrano di traverso, $t=\frac{\sqrt{Lm}}{\sqrt{P.36\frac{17}{24}}}\cdot\frac{113}{355}$, dinotando la quantità $36\frac{17}{24}$ la lunghezza d' un pendolo a secondi, e $\frac{113}{355}$ la proporzione del diametro al circolo; dunque $n=\frac{\sqrt{P.36\frac{17}{24}}}{\sqrt{Lm}}\cdot\frac{355}{113}$. Ed avvegnachè rispettivamente a qualunque corda le grandezze $36\frac{17}{24}$, $\frac{355}{113}$ sono sempre costanti, ne segue, che generalmente il suono n è come $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Lm}}$. Se il peso, o forza tendente P si mantiene costante, e la massa m della corda sta come la lunghezza L, il che interviene nelle corde, che non differiſcono ſalvo che nella lunghezza; allora ſi trova n come $\frac{1}{L}$, o ſia il ſuono in ragione inverſa della lunghezza della corda. Se la maſsa m non ſi diverſifica, il che ſuccede nelle ſemicorde, C B, D B; in tal caſo ſi ſcopre n come $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L}}$, cioè in ragione compoſta, diretta dimezzata della forza tendente P, ed inverſa parimente dimezzata della lunghezza L. Ho notate queſte due circoſtanze, perchè verranno a taglio nelle noſtre ſperienze.

IV. Si determinerà la proporzione fra i ſuoni n, N delle corde C B, B D col ſeguente metodo. Si prenda una corda a c b (*Fig.* 10) uniſona all' A C B, e ſi ſottoponga ad eſsa uno ſcannello d in ſito tale, che le corde d b, D B ſi corriſpondano all' uniſono, e ne ſeguirà che i ſuoni n, N ſtaranno fra loro in ragione inverſa di c b a d b, onde ſi verifichi l' analogia $n : N :: db : cb$. La dimoſtrazione è ſempliciſſima. I ſuoni delle due corde c b, d b teſe dallo ſteſso peſo, e che non differiſcono ſalvo che nella lunghezza, ſerbano la ragione inverſa delle lunghezze c b, d b, ch' è quanto dire ſi corriſpondono nella proporzione $db : cb$: ma le corde c b, d b ſono uniſone alle corriſpondenti C B, D B; dunque i ſuoni n, N di queſte ultime ſtanno come $db : cb$.

V. Inſegnata la maniera di ſcoprire la proporzione fra i ſuoni n, N, m' inoltro ad indagare qualmente per le ſpecie n, N, e per le altre quantità date ſi poſſa eſprimere il valore della ſaetta $CD = s$. Eſſendo pari la maſſa delle corde C B, B D, le lunghezze come $L : L + l$, i peſi tendenti come $P : P + p$, avremo per le coſe dette nel numero III. $n : N :: \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L}} : \frac{\sqrt{P+p}}{\sqrt{L+l}}$, o ſia $n^2 : N^2 :: \frac{P}{L} : \frac{P+p}{L+l}$: ma conforme ſi è fatto vedere al numero II. $\frac{P+p}{L+l} = \frac{\frac{1}{2}f}{s}$; dunque ſoſtituito queſto valore in

cam-

cambio di $\frac{P+p}{L+l}$ nella sovrapposta analogia, si avrà

$n^2 : N^2 :: \frac{P}{L} : \frac{\frac{1}{2}f}{s}$, e conseguentemente l' equazione

$\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = s$ (6).

VI. Al punto medio C della corda d' ottone AB situata orizzontalmente, la cui semilunghezza $CB = 30$ mezz' oncie, e la forza tendente P equivalente ad once 140, attaccai il peso o forza $DH = f = 4$, la quale produsse la saetta $CD = s$, che con diligente misura trovai eguale a $\frac{3}{7}$. I suoni n, N delle semicorde CB, DB, usato il metodo esposto al numero IV., li ritrovai corrispondersi nella ragione $119 : 120$. Quindi si verificava essere

$n^2 : N^2 :: \overline{119}^2 : \overline{120}^2$, o sia prossimamente $118 : 120 :: 59 : 60$,

e passando alla equazione, $\frac{n^2}{N^2} = \frac{59}{60}$. Sostituiti nella formola del numero precedente $\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = s$, in vece di $\frac{n^2}{N^2}$, di f, di L, e di $2P$ i valori somministratici dalla sperienza, avremo

$s = \frac{59}{60} \cdot \frac{4 \cdot 30}{2 \cdot 140} = \frac{59}{140} = \frac{3}{7} - \frac{1}{140}$. La frazione $\frac{1}{140}$, per cui la saetta rettificata differisce da quella, che s' è scoperta colla misura, sfugge la più scrupolosa diligenza di chi esperimenta, consistendo in $\frac{1}{24}$ di linea. Fatto uso del valore purificato della saetta $CD = s = \frac{59}{140}$ nella formola (5), si troverà dopo i necessarj computi $b =$ ad once $24054 =$ a libre $2004\frac{1}{2}$, valore della rigidità naturale della corda ACB cor-

ris-

rispondente al peso, o forza tendente $P=$ ad once 140.

VII. Applicai al punto medio C della corda ACB la forza $f=15\frac{3}{5}=\frac{78}{5}$, la quale cagionò la saetta $CD=s$, che accuratamente misurata si trovò eguale a $\frac{7}{5}$. I suoni n, N delle due semicorde CB, DB serbavano la proporzione 11 : 12. Se col mezzo della relazione dei suoni cercheremo il valore della saetta, scopriremo $CD=s=\frac{1573}{1120}=\frac{7}{5}+\frac{1}{224}$. La differenza $\frac{1}{224}$ si sottragge all' attenzione dei più circospetti osservatori. Sostituiscasi nella formola (5) in cambio di b il valore determinato nel numero antecedente, ed in vece di L, f, P le grandezze 30, $\frac{78}{5}$, 140 giusta la presente sperienza, e poste in opera le regole per iscioglierel' equazioni cubiche, ci si presenterà $s=\frac{211}{150}=\frac{7}{5}+\frac{1}{150}$. La $\overline{150}^{ma}$ parte di mezz' oncia consiste in $\frac{1}{25}$ di linea, divario totalmente inosservabile. Molto minore si è la differenza fra i due valori $\frac{211}{150}=\frac{7}{5}+\frac{1}{150}$, $\frac{1573}{1120}=\frac{7}{5}=\frac{1}{124}$, il primo somministratoci dalla nostra equazione, ed il secondo dedotto dalla proporzione fra i suoni delle due semicorde CB, DB. Chi volesse schivare l' imbroglio di diciferare la sovrapposta equazione (5) cubica, tenga un metodo inverso, e supposta $s=\frac{211}{150}$, cerchi il valore della rigidità b, che troverà eguale ad once 24013, e pochissimo differente dall' altro determinato nel numero precedente uguale ad once 24054. La cagione di questa diversità dipende da qualche picciola adequazione usata nello stabilire la grandezza della saetta $s=\frac{211}{150}$.

VIII. Quanto inosservabile è la differenza fra la saetta scoperta colla misura, e quella, che abbiamo dedotta dalla nostra

equa-

equazione, altrettanto riesce menomissima l' alterazione, che la saetta $s = \frac{211}{150}$ introduce nella proporzione dei suoni $n:N$, che s' è rinvenuta come $11:12$. Giacchè nel numero V. abbiamo dimostrato essere $\frac{n^2}{N^2} \cdot \frac{fL}{2P} = s$, avremo per conseguenza $\frac{n^2}{N^2} = \frac{2Ps}{fL}$, e fatti $P = 140$, $s = \frac{211}{150}$, $f = \frac{78}{5}$, $L = 30$, si troverà $\frac{n^2}{N^2} = \frac{1477}{1755}$. La differenza fra le ragioni $\frac{1477}{1755}$, $\frac{121}{144}$ somministrateci, quella dalla nostra formola, e questa dalla osservazione, consiste nella frazione $\frac{212688}{212355}$, che prossimamente equivale alla seguente $\frac{639}{638}$. Se dunque fra le proporzioni dei quadrati dei suoni n^2, N^2, una ricavata dalla formola, e l' altra scoperta colla esperienza c' è il divario $\frac{639}{638}$; fra le ragioni dei suoni n, N passerà la differenza $\frac{638\frac{1}{2}}{638} = \frac{1277}{1276}$, la quale adempiuti i dovuti calcoli, si trova equivalere alla decimasesta parte di un comma, minuzia, di cui l'orecchio non se ne accorge.

IX. Si conchiuda, che l'esperienza conferma la verità della mia teorica, andando essa d' accordo con quella maggiore fisica adequazione, che in così fatte indagazioni può mai sperarsi. Noto per altro, che se alla metà della corda A B si applicassero forze notabilmente maggiori dell' adoprata nell' esperimento secondo, ne risulterebbero saette alquanto più picciole di quelle, che richiede il mio canone; perchè in esso si è trascurata la resistenza, che patisce la corda ripiegandosi nei siti A, D, B.

X. Affine d' internarmi più a fondo nel magistero della

Na-

Natura, la quale ha collocato le fibre in maniera, che ricevano di traverſo le impreſſioni degli obbietti eſterni, darò prima la coſtruzione della formola (4)

$$\frac{\overline{2P+b}.s}{L}-\frac{bLs}{L^2+s^2}=\frac{2Ps}{L}+\frac{bs^2}{L^3+Ls^2}=f,$$ e fatte le dovute conſiderazioni ſopra la relazione fra le ſaette s, e forze f, che le producono, indagherò quali conſeguenze derivino dalla varia modificazione delle coſtanti P, b, L, che dinotano la tenſione, la rigidità, e la metà della lunghezza della fibra AB, mentre ſi trova in linea retta. M'inoltrerò poſcia ad eſaminare con ſimile metodo la proporzione fra le forze f, e le aumentazioni l di lunghezza, e p di tenſione da eſſe forze cagionate nella fibra AB.

XI. Segnate a ſquadra (*Fig.* 11.) le linee $CF=L$, $FK=2P+b$, pei punti C, K tiro la linea CK, che continuo indefinitamente, ed a queſta faccio perpendicolare KT, che taglia la linea CF prodotta nel punto T. Col vertice C, parametro CT, e colla condizione che le coordinate formino l' angolo CKF, deſcrivo la parabola Apolloniana CQV. Segno arbitrariamente l' aſſiſſa CG, e condotta l' ordinata GQ, che ſi continui fino in D, delineo $CB=L$ parallela a DG, e congiungo con una linea i due punti B, Q. Si tagli $FA=2P$, onde reſti $AK=b$, e ſi tiri AX normale a KT. Determinata $CR=KX$, e deſcritta RZ parallela a BQ, facciaſi $GH=CZ$, ed il punto H apparterrà alla curva CHE, che ſi vuol deſcrivere, le cui aſſiſſe $CD=s$, e le ordinate $DH=f$. Pel punto B ſi meni BP parallela a CK, e ſi continui DG fino in P.

Per la proprietà della parabola CQV ſi verifica l' equazione $\frac{\overline{CG}^2}{CT}=GQ$. La ſomiglianza dei triangoli CDG, CFK, CKT mi ſomminiſtra le analogie $CD:CF::CG:CK$, $CD:CK::CG:CT$. Dalla prima ricavo eſſere $CD:CK::\overline{CD}^2:CF.CG$, e quindi la ſeconda prende il ſeguente aſpetto $\overline{CD}^2:CF.CG::CG:CT$, e mi dà l' equazione ne $\frac{\overline{CD}^2}{CF}=\frac{\overline{CG}^2}{CT}$. Avremo adunque $GQ=\frac{\overline{CD}^2}{CF}=\frac{s^2}{L}$, a cui aggiunta $GP=L$, ſi forma $PQ=L+\frac{s^2}{L}=\frac{L^2+s^2}{L}$. I triangoli ſimili, QPB, RCZ ſuggeriſcono l' analogia $PQ:PB=CG::RC=KX:CZ$, da cui deduceſi l' equazione $CZ=\frac{CG.KX}{PQ}$: ma ſtante la ſimilitudine dei triangoli CDG, KXA abbiamo $CD:CG::KX:AK$, e conſeguentemente $CG.KX=CD.AK$; dunque $CZ=HG=\frac{CD.AK}{PQ}$, o ſia analiticamente $CZ=HG=\frac{bLs}{L^2+s^2}$. Finalmente l' analogia, che ci viene additata dai triangoli ſimili CDG, CFK, cioè a dire $CF: FK ::CD: DG$

$L : \overline{2P+b} :: s : \frac{\overline{2P+b}.s}{L}$ determina il valore di $DG=\frac{\overline{2P+b}.s}{L}$. Avremo per tanto $DH=DG-HG=\frac{\overline{2P+b}.s}{L}-\frac{bLs}{L^2+s^2}$: ma $\frac{\overline{2P+b}.s}{L}-\frac{bLs}{L^2+s^2}=f$; dunque poſta $CD=s$, ſarà la corriſpondente ordinata $DH=f$.

XII. La noſtra curva è fornita d' un altro ramo ſimile al CHE, nel quale tanto le ſaette s, quanto le forze f ſono negative. Queſto ramo ſerve per le ſaette Cd (*Fig.* 9) della corda AB.

La linea $HG=\frac{bLs}{L^2+s^2}$ (*Fig.* 11) ha un maſſimo valore $KE=\frac{1}{2}b$: corriſpondente a $CD=s=CF=L$. In tale incontro la linea BQ tocca la parabola CQV nel punto V, e l' angolo CBQ, ed altresì l' eguale CRZ aſcendono al maſſimo, e maſſima conſeguentemente diviene la grandezza di $CZ=HG$.

Conciossiachè $DH = f = \frac{\overline{2P+b}.s}{L} - \frac{bLs}{L^2+s^2} = \frac{2Ps}{L} + \frac{bs^3}{L^3+Ls^2}$, e $DY = \frac{2Ps}{L}$, formola nascente dall' analogia

$$CF : CD :: FA : DY$$
$$L : s :: 2P : \frac{2Ps}{L},$$ ne risulta $YH = \frac{bs^3}{L^3+Ls^2}$, valore della intercetta fra l' inclinata CA, e la curva CHE.

Quando le saette s sono minime, l' intercetta $YH = \frac{bs^3}{L^3+Ls^2}$ scopresi infinitesima del terzo grado, ed incomparabile con $DY = \frac{2Ps}{L}$ infinitesima del primo grado. Cancellato adunque il termine rispettivamente nullo, ci si presenta $DH = DY = f = \frac{2Ps}{L}$, ed in questo caso le saette sono come le forze, verificandosi la proporzione $L : 2P :: s : f$. Non trascuro di avvertire, che la linea CA tocca la curva CHE nel punto C.

Se le saette divenissero infinite, ipotesi per altro, che non è fisica, trasandato il termine infinitamente picciolo $\frac{bLs}{L^2+s^2} = HG$, si troverebbe $DH = DG = \frac{\overline{2P+b}.s}{L} = f$; espressione, da cui dedurrebbesi l'analogia $L : 2P+b :: s : f$, la quale c' insegnerebbe, che anche in tal circostanza le saette serberebbero la ragione delle forze. Egli è facile da scoprire, che la linea CK serve d' assintoto alla curva CHE h, la quale giace tutta dentro l' angolo KCA.

XIII. Nei casi intermedj, mentre cioè le saette sono finite, meno crescono, o scemano le saette di quello crescano, o scemino le forze, che le producono; dovendosi per gradi passare dalla ragione $L : 2P$ alla più rimota $L : 2P+b$.

Per dimostrar ciò rigorosamente, sia $CD = s$, e conseguentemente DH$=f=\frac{2Ps}{L}+\frac{bs^3}{L^3+Ls^2}$. Si ſegni Cd$=ns$, vale a dire in qualunque proporzione con CD, e ſi avrà dh$=F=\frac{2Pns}{L}+\frac{bn^3s^3}{L^3+Ln^2s^2}$. Se le forze ſerbaſſero la ragione delle ſaette, dovrebbe eſſere $nf=\frac{2Pns}{L}+\frac{bns^3}{L^3+Ls^2}=F=\frac{2Pns}{L}+\frac{bn^3s^5}{L^3+Ln^2s^2}$. Ora io dico, che poſto $n>1$, e per conſeguenza $ns>s$, è parimente $F>nf$, e poſto $ns<s$, è parimente $F<nf$; laonde meno creſcono, o ſcemano le ſaette di quello creſcano, o ſcemino le forze, che le producono.

Comincio dal provare, che ad $n>1$ corriſponde $F=\frac{2Pns}{L}+\frac{bn^3s^3}{L^3+Ln^2s^2}>nf=\frac{2Pns}{L}+\frac{bns^3}{L^3+Ls^2}$. Se così è, tolto di mezzo il termine comune $\frac{2Pns}{L}$, reſterà $\frac{bn^3s^3}{L^3+Ln^2s^2}>\frac{bns^3}{L^3+Ls^2}$, e dividendo per $\frac{bns^3}{L}$, $\frac{n^2}{L^2+n^2s^2}>\frac{1}{L^2+s^2}$. Moltiplico ambo i membri per $L^2+n^2s^2 \cdot L^2+s^2$, e mi ſi preſenta $n^2L^2+n^2s^2>L^2+n^2s^2$, e ſottratta la quantità comune n^2s^2, $n^2L^2>L^2$, o ſia $n>1$, conſeguenza vera, e conforme alla ipoteſi ſtabilita.

Se ſi ſupporrà $n<1$, ne ſeguirà eſſere $n^2L^2<L^2$, ed indi tornando in dietro per la ſtrada or ora calcata, ſi ſcoprirà $F=\frac{2Pns}{L}+\frac{bn^3s^3}{L^3+Ln^2s^2}<nf=\frac{2Pns}{L}+\frac{bns^2}{L^3+Ls^2}$.

XIV. Egli è per tanto manifeſto, che ſtando dentro i limiti delle quantità finite, meno crescono, o scemano le saette di quello crescano, o scemino le forze, che le producono: verità, che ottimamente si accorda colla esperienza. In fatti c' insegna l' esperimento sopra riferito al numero VI. che applicata al punto medio di una corda, la cui semilunghezza $L=30$, la forza $f=4$, produsse questa la saetta, che con diligente misura si trovò eguale a $\frac{3}{7}$. Col mezzo della proporzione fra i suoni della corda mentre dimora in linea retta, e mentre sta in equilibrio colla forza f, la stessa saetta si scoprì eguale a $\frac{59}{140}=\frac{3}{7}-\frac{1}{140}$, e questo valore si è stabilito fisicamente giusto. Se le saette crescessero in proporzione delle forze, si determinerebbe la saetta S generata dalla forza $F=\frac{78}{5}$ colla seguente analogia $4:\frac{59}{140}::\frac{78}{5}:S=\frac{2301}{1400}=\frac{8+\frac{61}{280}}{5}$. Ricorrendo all' esperimento descritto al numero VII. osserviamo, che la forza $\frac{78}{5}$ cagionò una saetta, che, o sia eguale a $\frac{7}{5}$, come si rinvenne colla misura, o a $\frac{7}{5}+\frac{1}{224}$, come si trovò col mezzo della proporzione dei suoni, è sempre notabilmente minore di $\frac{8+\frac{61}{280}}{5}$. Con ragione adunque ho poco fa asserito conformarsi colla esperienza la legge, che non oltrepassando i termini delle grandezze finite, meno crescono, o scemano le saette di quello crescano, o scemino le forze, onde vengono generate.

XV. M' innoltro alle conseguenze fisiche, e noto, che mentre le forze sono minime anche fisicamente, producono saette a se stesse proporzionali, e mantenendosi, come vedremo dappoi, adequatamente costante la natural tensione della fibra, fa questa le sue vibrazioni più, o meno estese nel tempo stesso, le quali risvegliano nell' anima sensazioni più, o meno forti, ma tutte ag-

aggradevoli. Che se la forza s' aumenta soverchiamente, allora la fibra troppo si stira, e corre rischio di patir danno. Ad un tale inconveniente mette in parte riparo la legge, che mentre le forze non sono minime, più crescono le forze delle saette. La forza f generi la saetta s, e sia $2s$ quella saetta, che comincia a danneggiar l' organo; e concioffiachè ci vuole una forza maggiore di $2f$ per produrre la saetta $2s$, ne segue che la forza $2f$ si dee contare nel numero di quelle, che non molestano la fibra.

XVI. Considero presentemente le alterazioni, che cagiona nelle saette s la varia grandezza della rigidità b. Presa nuovamente per mano la formola $\frac{2Ps}{L} + \frac{bs^3}{L^3 + Ls^2} = f$, rifletto, che posta la saetta s infinitesima, e stando la rigidità b dentro i termini del finito, la linea $YH = \frac{bs^3}{L^3 + Ls^2}$ è incomparabile colla linea $DY = \frac{2Ps}{L}$. Quindi in tale ipotesi, qualunque sia il valore finito della rigidità b, la forza $f = DH = DY$ produrrà sempre la saetta costante $s = CD$.

Si fingano infinite le saette s, e si troverà $DH = DG = f = \frac{\overline{2P+b}}{L} . s$: formola, da cui si ricava, che nella detta circostanza più cresce, o cala la rigidità b di quello che al contrario, calino, o crescano le saette s generate dalla forza invariabile f. Ciò tanto maggiormente si verifica, mentre si tratti di saette finite.

Che se queste si assumano minime fisicamente, quali sono rispettivamente alla lunghezza delle fibre le saette in esse operate dalle forze non nocive degli oggetti esterni; si cavi la conseguenza, che per diversificare notabilmente le saette prodotte da una forza data, bisogna, che le rigidità stiano fra loro in una proporzione molto lontana. L' esperienza c' insegna, che le sensazioni d' un uomo adulto sono più vive di quelle d' un vecchio, e meno vive di quelle d' un giovane. S' inferisca dunque, che gran diversità ci ha da essere fra le rigidità delle fibre d'

un

un adulto, d' un vecchio, e d' un giovane, e si ammiri l' artifizio dell' Autore della Natura, che ciò non ostante le sensazioni per una parte non isvaniscano, e per l' altra non divengan moleste. Merita d' essere distintamente avvertita la bellissima proprietà, che i discapiti dell' organo superano di gran lunga quei delle sensazioni.

XVII. Sia s la minima saetta, fino a cui faccia d' uopo incurvare una fibra di data massa, tensione, e lunghezza, perchè vibrandosi risvegli nell' anima una distinta sensazione. La forza f operi questa saetta nella fibra d' un uomo adulto, la cui rigidità b. Per produrre la stessa saetta nella fibra d' un uomo vecchio fornita di maggiore rigidità H, ci vorrà una forza più grande F. Quindi la forza primiera f genererà nella fibra del vecchio una saetta minore di s, a cui non corrisponderà sensazione distinta. In fatti osserviamo, che per farci intendere dai vecchi, bisogna alzare la voce, e che a quel lume fiacco, a cui legge un adulto, non legge un vecchio. Per la stessa ragione un lume ancora più tenue basterà ad un giovane, e non ad un uomo adulto.

Ma questo vantaggio, che le fibre d' un giovane sieno più pieghevoli di quelle d' un adulto, viene compensato dal maggior pericolo, che dalla troppa azione delle forze esterne restino danneggiate. Suppongasi s la massima saetta, che non porta pregiudizio ad una fibra. Venga questa prodotta dalla forza f nella fibra di un adulto, la cui rigidità b: egli è chiaro che la stessa forza innocente in riguardo all' adulto, recherà nocumento alla fibra più molle dell' uomo giovane, cagionando in essa una saetta maggiore di s, che si suppone la massima fra quelle, che all' organo non sono nocive. E' stato sperimentato in Bologna, che l' empito della materia elettrica, che per lo più non apporta danno agli uomini di età consistente, riesce ai giovanetti sommamente pregiudiziale.

Le fibre degli uomini sani, ed adulti sono nell' ottimo stato di perfezione. Le ha il sapientissimo Iddio dotate di quella rigidità conveniente, onde faccia in loro una impressione sensibile, ma non nociva la forza ordinaria di quegli oggetti esterni, con cui siamo in commerzio, e dei quali importa alla nostra conservazione, ed al nostro ben essere, che ci accorgiamo. Prima di giungere alla virilità, le fibre non sono ancora quanto ba-

basta robuste, per resistere a certe forze più vigorose: ma quando poi c' incamminiamo dalla virilità alla vecchiaja, il mondo sensibile (per valermi d' una espressione, con cui dà fine il Conte Jacopo mio Padre alla sua sopraccitata dissertazione) si và per noi successivamente, ed insensibilmente perdendo.

XVIII. Agli ammalati danno fastidio quegli oggetti, che in tempo di sanità riuscivano loro gratissimi. Nelle stanze degl' infermi bisogna chiudere le finestre, parlar sottovoce; perchè la forza anche moderata della luce, e del suono gli offende. Questi effetti credo, che poco o nulla dipendendo dalla rigidità, che nelle fibre degli uomini infermi si scemi, traggano principalmente l' origine dal minoramento della forza de' muscoli, che pongono in tensione le fibre, la qual forza da me si esprime per la lettera P. Mi accingo dunque a far vedere a chi legge, quanto influisca nelle sensazioni l' alterazione d' un sì fatto elemento.

XIX. Supposta nulla la forza P, che stira la fibra, mentre si trova in linea retta, svanisce nella Fig. 11. la linea $FA = 2P$, e la linea CA cade sopra la CF. Perciò in tale ipotesi

avremo $YH = f = \dfrac{bs^3}{L^3 + Ls^2}$, e posto che s sia minima rispettivamente ad L, $YH = f = \dfrac{bs^3}{L^3}$, conforme ha ritrovato il Conte Jacopo mio Padre nel suo schediasma.

Più conseguenze si possono dedurre dalla premessa formola: e primieramente per cagionare uguali saette in fibre di pari lunghezza, ci vorrebbero forze proporzionali alle rigidità. Che se la forza esteriore fosse costante, le saette starebbero inversamente come le radici cubiche delle rigidità. Quindi si scopre quanto giovi alla buona economia delle sensazioni, che le fibre sien poste in tensione, avendo non ha molto osservato, che la diversa misura della rigidità altera pochissimo le picciole saette, che dalle fibre tese nell' oscillare si scorrono.

Serbando le forze la ragione dei cubi delle saette, non si compirebbero in pari tempo le vibrazioni più o meno dilatate della stessa fibra, imperciocchè richiede necessariamente l' isocrocronifmo, che le forze ftiano come le faette, o come gli fpazj da paffarfi.

Finalmente le fibre non iftirate riufcirebbero inettiffime per ofcillare, perchè in una vibrazione c' impiegherebbero un tempo infinito. Fingafi tutta raccolta nel punto D (*Fig.* 12.) la maffa della corda A D B, il che non turba l' efsenzial delle deduzioni. La fcala delle forze follecitanti riferite alle faette, o fia agli fpazj da percorrerfi farebbe la parabola cubica C n N corrifpondente all' equazione $\frac{L^3}{b} . f = s^3$, le cui ordinate D N, d n efprimono le forze, e le affiffe D C, d C le faette. Sanno i Geometri, che la forza viva acquiftata dalla corda A B, quando è ritornata nella pofitura A C B, s' eguaglia all' aja C D N n C, la qual è proporzionale a $\overline{DC}^4$, ch' è quanto a dire ad una fluffione infinitefima del quarto grado. Effendo finita la maffa della corda concentrata in D, ne fegue che il quadrato della velocita nel fito C deve afcriverfi al quarto ordine delle quantità minime, e che per confeguenza la detta velocità fpetta al fecondo grado degl' infinitamente piccioli. Ora con una velocità, che al più giunge ad effere infinitefima dell' ordine fecondo, non fi può paffare lo fpazio D C minimo del primo grado, falvo che in tempo infinito. Se alle faette infinitefime fi foftituiranno le fificamente minime, agevolmente ci accorgeremo, che rimoffa dalla linea retta A C B una fibra priva di tenfione, fi fermerebbe fenza reftituirfi nella fituazione A D B.

XX. Abbandonata un' ipotefi non accettata dalla Natura, confideriamo variabile sì, ma fempre finita la forza tendente P. Se le faette fien minime, la formola $\frac{2 P s}{L} = f$m' infegna, che prefe come coftanti la forza eftrinfeca f, e la lunghezza L della fibra, le faette s ftaranno reciprocamente come le forze tendenti P.

Supponendo infinite le faette, fi verifica l' equazione $\frac{\overline{2 P + b} . s}{L} = f$, da cui poffiamo ricavare, ch' effendo date le quantità b, f, L, le faette s abbracciano la ragione inverfa del-

la

la somma della doppia forza tendente P, e della rigidità b. In tale circostanza meno crescono, o calano le saette di quello, che al contrario calino, o crescano le forze tendenti.

Le saette frattanto, per cui si ripiegano le fibre, s' accostano molto più al minimo, che all' infinito, e perciò quasi colla stessa proporzione, onde si minorano, o s'aumentano le tensioni, tutto a rovescio s' aumentano, o si minorano le saette. Quindi fondatamente ho asserito al numero XVIII. che quel fastidio, che recano agli ammalati certi oggetti loro aggradevoli in tempo di sanità, dipende principalmente dallo sminuimento della forza tendente.

Se la tensione s' ingrandisse smoderatamente (messo da parte il danno, che potrebbe patir la fibra) l' impressione, della forza f scemerebbe talmente, che o fievolissime, o nulle si risveglierebbero le sensazioni nell' anima.

Non tralascio d' avvertire, che se alquanto meno crescono, o calano le saette di quello, che al contrario calano, o crescono le tensioni, egli è tutto frutto della rigidità delle fibre, tolta di mezzo la quale svanirebbe nella equazione

$\frac{2Ps}{L} + \frac{bs^3}{L^3 + Ls^2} = f$ il termine $\frac{bs^3}{L^3 + Ls^2}$, e le saette seguirebbero esattamente la proporzione reciproca delle forze tendenti.

XXI. I tempi delle vibrazioni di due corde ugualmente lunghe, e di pari massa stanno inversamente come le radici delle forze tendenti. Perciò se decrescerà notabilmente la tensione delle fibre, oscilleranno queste più lentamente. Da un tale principio penso, che proceda quella languidezza, che si osserva negli occhi de' moribondi.

XXII. Posto che le fibre sieno simili, tese da forze proporzionali alle loro basi, composte di materia egualmente rigida, e fornite di massa proporzionale a quella degli organi, a cui devono partecipare il moto, l' elemento della varia lunghezza nulla influisce nella vivacità delle sensazioni. Le masse delle nostre fibre si corrispondono nella proporzione dei cubi delle lunghezze, le superficie e le basi nella proporzion dei quadrati. Ed atteso che le tensioni P, e le rigidità b stanno come le basi, ne segue, che da loro la ragione dei quadrati L^2 delle lunghezze viene abbracciata. Nella ſteſſa proporzione ſi riferiſcono parimente le forze eſterne; imperciocchè a miſura delle ſuperficie ricevono le fibre l' impreſſione dagli oggetti.

Ciò premeſſo, dico che le ſaette ſerbano la ragione della lunghezze. In grazia della ſemplicità mi ſervo d' una dimoſtrazione indiretta. Sia dunque $s=nL$, cioè le ſaette come le lunghezze, e ſoſtituito queſto valore nella formola

$$\frac{2Ps}{L}+\frac{bs^3}{L^3+Ls^2}=f, \text{ troveremo } 2n.P+\frac{n^3}{1+n^2}.b=f: \text{ ma}$$

i coefficienti $2n$, $\frac{n^3}{1+n^2}$ ſono quantità coſtanti, e tanto le tenſioni P, quanto le rigidità b ſtanno come L^2: dunque f come L^2; conſeguenza che va d' accordo col vero.

Si potrebbe agevolmente provare, che i tempi delle vibrazioni delle noſtre fibre, anche per ſaette, che non ſien minime, accettano la ragione delle lunghezze d' eſſe fibre, e ſi caverebbe poſcia la conſeguenza, che ſendo i tempi proporzionali agli ſpazj, che ſi ſcorrono, e creſcendo, o calando le velocità con pari legge, ſi trovano queſte uguali in ſiti analoghi; dimodochè le forze vive delle fibre ſeguitano la proporzione delle loro maſſe. Ora dovendoſi comunicare il moto ad organi, la cui maſſa è proporzionale a quella delle fibre, acquiſteranno eſſi pari velocità, alle quali corriſponderanno ſenſazioni egualmente ſpiritoſe.

XXIII. Se le ſtabilite miſure delle forze ſtiranti, e delle rigidità ſi ſuppongano variate, vagliono le ſteſſe conſeguenze per me dedotte, mentre ho trattato delle fibre di eguale maſſa e lunghezza, ma diverſamente rigide e teſe. Fatta la rifleſſione, che la materia componente le fibre dei fanciulli è più molle di quella, onde conſtano le fibre degli adulti; ſi conchiuderà, che le ſenſazioni dei primi ſono più vive di quelle dei ſecondi.

XXIV. Ne riſulterebbero ſenſazioni diverſamente vivaci, quando le maſſe delle fibre ſimili, rigide, e teſe proporzionatamente, non ſi corriſpondeſſero come le maſſe degli organi, a

cui

cui deve paſſare il tremito. Le fibre di maggiore, o minore maſſa relativa ſveglierebbero più, o meno brillanti le ſenſazioni.

XXV. Reſta ch' io dica qualche coſa delle fibre diſſimili. Conſiſtendo la diſſomiglianza nelle baſi o troppo grandi, o troppo picciole, le quali hanno luogo nella determinazione della rigidità; egli è facile lo ſtabilire la proporzione delle forze eſtrinſeche, e delle ſaette. Biſognerebbe poſcia computare le forze vive guadagnate dalle fibre, e paragonarle colle maſſe degli organi, ai quali deggiono partecipare il moto, per dedurre la relazione fra l' energia delle ſenſazioni. Frattanto mi contenterò di notare col Conte Jacopo mio Padre, che in quella guiſa, che negli uomini di rado ſi trovano due volti affatto ſimili, ſi dee credere, che per lo più le loro fibre ſieno di differente ſtruttura, e che ognuno abbia al pari della fiſonomia le ſue particolari ſenſazioni.

XXVI. Eſaminata quanto baſta la proporzione fra le forze f e le ſaette s, metto al paragone colle medeſime forze le diſtenſioni l, ch' eſſe producono nelle fibre, e ne deduco poſcia alquante importanti fiſiche conſeguenze.

Determinare la relazione tra le forze applicate a ſquadra al punto medio d' una fibra, e le diſtenſioni, ch' eſſe nella detta fibra cagionano.

Per la formola (4) abbiamo $\frac{2Ps}{L}+\frac{bs^3}{L^3+Ls^2}=f$: ma per la (3) $L+l=\sqrt{L^2+s^2}$, o ſia $2Ll+l^2=s^2$; dunque ſoſtituito in cambio di s il ſuo valore, ne riſulta

$$\frac{2P}{L}\cdot\sqrt{2Ll+l^2}+\frac{b.\overline{2Ll+l^2}^{\frac{3}{2}}}{L.\overline{L+l}^2}=f \ (7),$$ equazione, che determina la proporzione cercata fra gli allungamenti l, e le forze f, dalle quali ſono prodotti.

Ripetuta la curva CHE (*Fig.* 13), le cui coordinate CD $= s$, DH $= f$, all' asse CF si descriva l' iperbola equilatera CIQ della equazione $2Ll + l^2 = s^2$, in cui a CD $= s$ corrisponde DI $= l$, e ne seguirà che dalle forze DH $= f$ verranno operate le distensioni DI $= l$.

XXVII. Sin tanto che la forza f non esce dal confine delle quantità infinitesime, cancellati nella formola (7) i termini rispettivamente minimi, prende la stessa il seguente aspetto $\frac{2P}{L}\sqrt{2Ll} = f$, ovvero $l = \frac{Lf^2}{8P^2}$, e ci mostra a dito essere in tale circostanza l' allungamento l della metà della fibra in ragione composta, diretta della lunghezza costante L, e del quadrato f^2 della forza variabile, che di traverso stimola la fibra intera, ed inversa del quadrato P^2 del peso, o forza tendente, che altresì si considera come costante. Supponendosi finito il coefficiente $\frac{L}{8P^2}$, alla forza minima f corrisponde la distensione l minima del secondo ordine siccome quella, che ha una proporzione finita con f^2, e perciò rispettivamente nulla dee riputarsi. E poichè nella formola non c' entra la rigidità naturale b, la stessa forza in due fibre differenti solo nella rigidità naturale produrrà la medesima distensione. Se in due fibre sia costante la frazione $\frac{L}{P^2}$ cioè a dire se i quadrati dei pesi, o delle forze stiranti seguitino la ragione delle lunghezze, le distensioni staranno come i quadrati delle forze normali alle dette fibre.

L' ipotesi della forza f infinita modifica così la formola (7) $\frac{2P+b}{L}.\ l = f$, o nella equivalente maniera $l = \frac{Lf}{2P+b}$, e determina l' allungamento l in proporzione composta, diretta della lunghezza data L, e della forza variabile f, ed inversa della somma parimente data della doppia forza tendente $2P$, e della

della rigidità b conveniente alla fibra, mentre si trova nella positura ACB (*Fig. 9.*). Giacchè il coefficiente $\frac{L}{\overline{2P+b}}$ si suppone finito, la distensione l, e la forza f saranno infinite dello stesso grado, e nella stessa fibra, o in fibre diverse, quando $L : \overline{2P+b}$ si riferisca nella medesima proporzione, le distensioni abbraccieranno la ragione delle forze, che le producono. Che se due fibre non differiranno salvo che nella forza tendente, o nella rigidità naturale; più crescerà, o calerà uno di questi elementi di quello, che al contrario calino, o crescano gli allungamenti.

XXVIII. Passando dal geometrico al fisico, le distensioni finite della medesima fibra si riferiranno in una ragione media fra la duplicata, e la semplice delle forze parimente finite, onde traggon l' origine. Posto che le forze sieno minime fisicamente, le distensioni accetteranno con fisica adequazione la proporzione duplicata delle mentovate forze, la quale in fibre diverse nulla verrà turbata dalla naturale rigidità b, purchè questa non sia tanto grande, che impedisca il trascurare nella formola (7) il termine $\frac{b \cdot \overline{2Ll+l^2}^{\frac{3}{2}}}{L \cdot \overline{L+l}^2}$.

Aumentandosi notabilmente le forze, le distensioni si allontaneranno dalla ragione duplicata, e si accosteranno alla semplice delle forze suddette. In tali circostanze l' elemento della rigidità naturale non potrà trasandarsi, crescendo essa per altro, o scemando assai più di quello, che all' opposto scemino, o crescano le distensioni.

Eccettuata la forza tendente P, sia tutto il resto pari, e giacchè in riguardo alle forze minime $l = \frac{Lf^2}{8P^2}$, ed in riguardo alle massime $l = \frac{Lf}{\overline{2P+b}}$, ed in oltre le distensioni fisiche delle fibre assai più si accostano al minimo che al massimo; si corrisponderanno esse in una proporzione più rimota della inversa delle forze stiranti.

Nella

Nella formola (7) ſi ponga l' allungamento l proporzionale alla lunghezza L della fibra, cioè a dire $l = nL$, e ſi troverà $f = 2P\sqrt{2n+n^2} + \frac{b \cdot (2n+n^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+n)^2}$. Egli è d' uopo adunque, che le forze ſieno fornite di tali grandezze, ſe nella ragione delle lunghezze hanno da corriſponderſi le diſtenſioni. Che ſe in due fibre la forza tendente P, e la rigidità b ſaranno pari, l' omogeneo di comparazione avrà un valore coſtante, e la ſteſſa forza o minima, o finita, o infinita produrrà in eſſe fibre diſtenſioni proporzionali alle lunghezze.

XXIX. Deduco ora alcune fiſiche conſeguenze. Sin che le forze minime f hanno una picciola ragione alla forza tendente P, ed alla rigidità naturale b, le diſtenſioni l ſtanno adequatamente come f^2, ed eſſendo quaſi traſcurabili riſpettivamente ad L, la fibra oſcilla ſenza notabile alterazione della ſua lunghezza.

Da un allungamento inſenſibile ſi fa tranſito facilmente ad un altro, di cui l' anima ſi poſſa accorgere; imperciocchè gli allungamenti piccioli creſcono in una proporzione, che ſi avvicina aſſaiſſimo alla duplicata delle forze f.

Potrebbe frattanto ben preſto la diſtenſione divenir troppo grande, ſe ſeguitaſſe ad aver luogo la legge teſtè nominata; ma cangiandoſi eſſa, ed accoſtandoſi a poco a poco le diſtenſioni alla ragione ſemplice delle forze, gli allungamenti ſi aumentano più lentamente.

XXX. La determinazione congrua della forza tendente P, e della rigidità naturale b giova moltiſſimo per trattenere le diſtenſioni l dentro certi diſcreti limiti, onde per un verſo le palpitazioni delle parti minime componenti la fibra non rieſcano troppo fiacche, languide, e ſenza ſpirito, e per l' altro troppo violente.

Si rompe la fibra qualora la ſua tenacità viene ſuperata dalla forza tendente. Ho notato nello Schediaſma I. al numero XX. eſſere in una corda due coſe diverſe la rigidità che ripugna alle diſtenſioni, e la tenacità che ne impediſce il rompimenmento fino ad un certo ſegno. In fatti ſi è per me nel citato luogo determinato, che in una corda d' ottone la rigidità naturale equivaleva a libre $1124 \frac{1}{2}$, e la tenacità a libre 12 a un di preſſo. Quantunque al creſcere della forza tendente P cali la diſtenſione l, e come vedremo al numero XXXVII. l'aumento di tenſione p cagionato dalla forza f; nulladimeno ſe P troppo ſi avvicina al valore della tenacità della fibra, la forza f può romperla.

Più ancora dannoſa riuſcirà la ſoverchia grandezza della rigidità b. La forza f, che non ſia minima, produce in una corda più rigida diſtenſione minore, e non pertanto moſtrerò al numero XXXVI. che l' accreſcimento di tenſione è più grande. Quindi la ſteſſa forza innocente riſpettivamente alle fibre di un uomo adulto, e che riſveglia una viva ſenſazione, può divenire pregiudiziale in riguardo alle fibre troppo rigide d' un vecchio, benchè ad eſſa una ſenſazione debole corriſponda.

Non giova tampoco, che la tenſione, e la rigidità pecchino nel difetto; imperciocchè (meſſa per ora da parte la maggior fatica dell' organo, traente l'origine dallo ſcemamento della forza tendente, di cui al numero XXXVII. terrò diſcorſo) le diſtenſioni effettuate dalla forza f ſi aumentano ſoverchio, e ne naſcono ſenſazioni analoghe al ſuono grave, che rende una corda troppo ſottile, e poco teſa, ch' è quanto a dire ſenza corpo, e ſnervate.

XXXI. Ho detto al fine del numero XXVIII. che ſe in due fibre la tenſione P, e la rigidità b ſaranno pari, la ſteſſa forza f produrrà diſtenſioni in ragione delle lunghezze. Supponganſi queſte due fibre ugualmente groſſe, e l' urto, che riceveranno dall' obbietto eſterno, riuſcirà alle lunghezze proporzionale; laonde le forze f ſtaranno come le lunghezze. Quindi la fibra più lunga verrà a proporzione più allungata della fibra più corta, e correrà maggior pericolo di reſtar danneggiata.

Ripiglio per mano la formola del numero XXVIII.

$$f = 2P\sqrt{2n+n^2} + \frac{b.\overline{2n+n^2}^{\frac{3}{2}}}{\overline{1+n}^2},$$ che determina i valori delle

le forze f atte a produrre le diſtenſioni in proporzione delle lunghezze, ed oſſervo che ſe due fibre ſimili ſieno teſe da forze proporzionali alle loro baſi, e compoſte di materia egualmente rigida, ſtaranno P, ed b come L^2: ma parimente l' impreſſione dell' obbietto eſterno, che ſegue la proporzione delle ſuperficie, è relativa ad L^2; dunque lo ſteſſo obbietto in due fibre ſimili, dotate delle deſcritte condizioni cagionerà allungamenti in ragione delle lunghezze. E concioſſiachè in tali fibre alle forze f proporzionali ad L^2 corriſpondano, conforme vedremo al numero XXXVIII., accreſcimenti di tenſione altresì come L^2, ed anche le loro tenacità (ſupponendoſi la materia, onde ſono formate, ugualmente tenace) ſi riguardino nella medeſima ragione; ne ſegue che un dato oggetto o recherà danno ad amendue le fibre, o a neſſuna. Per la qual coſa ſapientemente ha la Natura ordinato, che nei fanciulli le fibre creſcano e in lunghezza, e in groſſezza, eſſendo troppo eſpoſte a ricevere detrimento le fibre ſoverchiamente lunghe, e ſottili.

XXXII. Mi accingo preſentemente a porre al confronto le forze f cogli accreſcimenti di tenſione p, ch' eſſe cagionano nelle fibre. Gioverà queſto paragone per indagare la fatica, che ſoffre l' organo, la quale ſta in ragione compoſta, diretta delle aumentazioni di tenſione p, ed inverſa delle forze P dei muſcoli ſtiranti le fibre, cioè a dire come $\frac{p}{P}$.

Trovare la relazione tra le forze applicate a ſquadra al punto medio d' una fibra, e gli accreſcimenti di tenſione, ch' eſſe nella detta fibra cagionano.

Ripetuta la curva CHEh (*Fig.* 14), le cui aſſiſſe CD $= s$, e le ordinate DH $= f$, tiro a ſquadra di CD, e parallela a DH la linea CB $= L$. Conduco poſcia la diagonale BD, e ſegnata CN $= \frac{1}{2}$ DH $= \frac{1}{2} f$, deſcrivo NO parallela a DB. Nella HD prorogata taglio DI $=$ NO, e pel punto

I, e

I, e per altri ſimilmente determinati fatta paſſare la curva M I i; dico che l' ordinata D I eſprime l' intera tenſione $P+p$, che patiſce la corda C B, dopochè la forza D H ha in eſſa operato la ſaetta C D, e che per conſeguenza ſottratta $DR=P$, e delineata M R r parallela a C D, il reſiduo R I s' eguaglia all' accreſcimento di tenſione p cauſato nella mentovata corda dalla forza D H.

Dai triangoli ſimili C B D, C N O ſi ricava l' analogia

$$CD : DB :: CN = \frac{1}{2} DH : NO = DI,$$

$$s : L+l :: \frac{1}{2} f : \frac{\frac{1}{2} f . \overline{L+l}}{s},$$ che ci addita il valore di $DI = \frac{\frac{1}{2} f . \overline{L+l}}{s}$: ma per l' equazione (2) contenuta nel numero II. $\frac{\overline{P+p} . s}{L+l} = \frac{1}{2} f$, o ſia $\frac{\frac{1}{2} f . \overline{L+l}}{s} = P+p$; dunque $DI = P+p$.

XXXIII. Egli è chiaro in primo luogo, che quando ſi eguagliano a nulla la forza D H, e la ſaetta C D, è nullo parimente l' accreſcimento di tenſione R I, e perciò la noſtra curva paſſa pel punto M.

In grazia delle conſeguenze ſtimo opportuno di porre ſotto gli occhi di chi legge la formola, in cui non ſi contengono ſalvo che le due incognite f, p. Nell' ultima equazione ſi collochi in cambio di s il ſuo valore $\sqrt{2Ll+l^2}$, onde s' abbia $\frac{\frac{1}{2} f . \overline{L+l}}{\sqrt{2Ll+l^2}} = P+p$. Maneggiata queſta a dovere, ſi troverà $L+l = \frac{L . \overline{P+p}}{\sqrt{\overline{P+p}^2 - \frac{1}{4} f^2}}$ (8). Una tale eſpreſſione di $L+l$ ſi sostituisca nella formola (1) $\frac{1}{2}\overline{b+P}.\frac{\overline{L+l}}{L} - \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l} = P+p$, della quale ho fatto uso nel numero II., e ne risulterà

$$\frac{\frac{1}{2}\overline{b+P}.\overline{P+p}}{\sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2}} - \frac{\frac{1}{2}b.\sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{2}f^2}}{P+p} = P+p,$$

ed adempiuti i necessarj calcoli, $P+\frac{bf^2}{8.\overline{P+p}^2} = \sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2} = CO$ (9).

A buon conto si noti, che restando esclusa dalla formola la specie L, la varia lunghezza della fibra non ha per se stessa luogo nel determinare l' accrescimento di tensione p, il quale, sendo il resto pari, si scoprirà sempre costante, qualunque sia la lunghezza della fibra. Ho detto per se stessa; perchè, conforme si è veduto nel numero XXII., la lunghezza delle fibre c' entra nello stabilire la misura della forza esteriore f.

Quando è minima la forza f, si trova $\sqrt{\overline{P+p}^2-\frac{1}{4}f^2} = P+p-\frac{\frac{1}{8}f^2}{P+p}$. Avremo per tanto $P+\frac{bf^2}{8.\overline{P+p}^2} = P+p-\frac{\frac{1}{8}f^2}{P+p}$, o sia $\frac{\overline{b+P+p}}{8.\overline{P+p}^2}.f^2 = p$, e cancellate le quantità rispettivamente nulle, $\frac{\overline{b+P}}{8P^2}.f^2 = \frac{\overline{b+p}.s^2}{2L^2} = p$. Supponendosi data la grandezza $\frac{b+P}{8P^2}$, ne segue che le aumentazioni di tensione p stanno come i quadrati f^2 delle forze minime, onde

vervengono prodotte, e che conseguentemente appartengono al secondo ordine degl' infinitamente piccioli.

Abbiamo avvertito al numero XII. essere la forza infinitesima $f = \frac{2Ps}{L}$, e quindi ne dedurremo $\frac{\overline{b+P}.f^2}{8P^2} = \frac{\overline{b+P}.s^2}{2L} = p$. Impariamo da questa formola, che a CD $= s$ minima corrisponde RI $= p$ infinitesima del secondo grado, che la linea MR tocca la curva MIi nel punto M, e che la detta curva verrebbe combacciata nel nominato punto da una parabola Apolloniana, il cui vertice M, ed il parametro $\frac{2L^2}{b+P}$.

Immaginiamoci infinita la forza f, e dalla sola considerazione della figura ricaveremo, che siccome in tal caso CD $= s$ uguaglia adequatamente DB $= L + l$, non altrimenti CN $=$ NO, ovvero analiticamente $\frac{1}{2}f = P + p$, e trascurata, se così piace, la quantità incomparabile P, $\frac{1}{2}f = p$, cioè a dire gli accrescimenti di tensione p come le forze infinite f, da cui sono cagionati. Il valore di $p = \frac{1}{2}f$ non resta in conto alcuno alterato dalla diversa misura della rigidità b, e della forza tendente P.

Nella supposizione, che abbiam per le mani, è CO $= \frac{1}{2}b + P$. E vaglia il vero; pongasi in vece di $P + p$ il suo valore $\frac{1}{2}f$ nella formola (9) CO $= P + \frac{bf^2}{8.\overline{P+p}^2}$, e ne proverrà CO $=$ $P + \frac{1}{2}b$, conforme si dovea ritrovare.

L' analogia CB : CD :: CO : CN

$L : s :: P + \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}f$ somministra l' equazione sopra scoperta nel numero XII. conveniente alle forze infinite $\frac{\sqrt{P+\frac{1}{2}b.s}}{L}=\frac{1}{2}f$. Sostituito in cambio di $\frac{1}{2}f$ il suo valore $P+p$, ci si presenta $\frac{\sqrt{P+\frac{1}{2}b.s}}{L}=P+p$; espressione da cui si raccoglie, che segnata $FQ=\frac{FK}{2}=P+\frac{1}{2}b$, e congiunti i punti C, Q con una linea, che si continui all' infinito, servirà questa d' assintoto alla curva MIi.

XXXIV. Avendo osservato che posta f minima, la tensione aggiunta p è immensamente più picciola, e che divenendo f infinita $p=\frac{1}{2}f$, ne dedurremo, che, stando nei confini del finito, l' accrescimento di tensione p è sempre minore della metà della forza f. Operando le forze esteriori di traverso, s' accresce la tensione per la quantità p, che, quando le fibre non restano molestate, è assaissimo minore di f, e che, mentre f sia molto grande, non può mai giungere a pareggiarne la metà. Con sì stupendo artificio si mettono le fibre in una agitazione spiritosa, atta a risvegliare nell' anima le sensazioni, con pochissima alterazione della loro consueta tensione.

XXXV. Conciossiachè in un caso estremo sta p come f^2, e nell' altro p come f, s' inferisca che più crescono, o scemano le aumentazioni di tensione p di quello, che parimente crescano o scemino le forze finite trasversali.

Più conseguenze fisiche possono ricavarsi. E primieramente aumentandosi la forza esteriore, cresce e con maggior proporzione la fatica dell' organo, e perciò quando la mentovata forza è troppo grande, e continuata, l' organo facilmente si stanca. L' assidua contemplazione dei luminosi corpi celesti affatica talmente gli occhi degli Astronomi, che a più d' uno è accaduto di rimaner privo della vista in tempo della vecchiaja.

Agevolmente si passa dall' insensibile al sensibile, o a rovescio; dal piacevole al disgustoso, o a rovescio. All' accrescimento di tensione p non corrisponda sensazione. Se per eccitar-

la

la faccia bisogno l' ingrandimento di tensione $4p$, si otterrà questo effetto con aumentare la forza trasversale f pochissimo più del doppio.

Nell' organo delicatissimo della vista, che ricoprendolo colle palpebre, o colle mani, o volgendo altrove la faccia, si difende dall' empito d' una luce troppo violenta, la Natura si serve di una bellissima industria, perchè non si passi con tanta facilità dal sensibile all' insensibile, dal grato all' ingrato. Consiste questa nel potersi allargare, o ristringere il diametro della pupilla. Le dilatazioni, e i ristringimenti si osservano grandissimi in quegli animali, che sono destinati a vederci di giorno, e di notte. Se il lume infiacchisce, si allarga assai la pupilla, e molto lume debole fa la stessa impressione, come un lume mediocre e di forza, e di quantità. Accrescendosi il vigore della luce, si ristringe la pupilla, e la minore quantità compensa la forza maggiore. Anche gli altri organi avranno forse degli equivalenti artificj, che non ci sono per anco noti.

XXXVI. Mi faccio adesso a ponderare qual parte possa avere la diversa rigidità b delle fibre nella fatica degli organi, la quale, supponendosi costante la forza tendente P, serba la ragione degli accrescimenti di stiramento p.

La formola propria delle forze minime $\frac{\overline{b+P}.f^2}{8P^2}=p$ ci manifesta, che assumendosi siccome dato il coefficiente $\frac{f^2}{8P^2}$, le aumentazioni di tensione p, mentre la forza f sia picciolissima, stanno come la somma $b+P$ della rigidità, e della forza stirante. In tale circostanza dunque la fatica dell' organo si aumenta, o si minora proporzionatamente meno di quello cresca, o si diminuisca la rigidità.

Si è già avvertito al numero XXXIII., che sendo infinita la forza f, la varia rigidità b delle fibre nulla influisce nella misura dell' aumento di tensione $p=\frac{1}{2}f$.

Quindi una forza finita cagionerà incrementi di tensione, che all' ingrandire, o all' impicciolire della rigidità si troveranno meno diversi di ciò, che richiede la legge delle forze minime.

Dal-

Dalle premesse verità si desume la ragione, per cui un adulto più d' un giovane, ed un vecchio più d' un adulto è soggetto a stancarsi. Un adulto per modo di esempio non durerà tanto a leggere quanto un giovane, nè un vecchio quanto un adulto.

Per risparmiare frattanto più che fosse possibile agli organi la fatica, ha il sapientissimo Iddio providamente ordinato, che gli accrescimenti di questa riescano a proporzione minori di quelli della rigidità.

XXXVII. Di maggiore rilievo sono le conseguenze, che derivano dall' alterazione della forza tendente P.

Impariamo dalla formola spettante alle forze infinitamente picciole $\frac{\overline{b+P}\cdot f^2}{8P^2}=p$, che le aumentazioni di tensione crescono, o calano con proporzione più rimota di quella, onde al contrario calano, o crescono le forze tendenti P. In fatti se b variasse nella stessa ragione di P, si troverebbe $\frac{b+P}{8P^2}$ come $\frac{1}{P}$, e l' accrescimento di tensione p starebbe inversamente come la forza stirante P. Ma supponendosi la rigidità b costante, ne segue, che se cala la forza tendente P, la somma $b+P$ è proporzionatamente maggiore di P, e se la detta forza ingrandisce, la quantità $b+P$ è a proporzione minore di P. Perciò rettamente ho asserito, che gli accrescimenti di tensione si corrispondono in una relazione più lontana della reciproca delle forze tendenti. E giacchè la fatica dell' organo sta come $\frac{p}{P}$, si conchiuda, che sendo minima la forza esteriore, più si aumenta, o si minora la fatica dell' organo di quello ricerca la ragione inversa duplicata delle forze tendenti.

Mi rivolgo all' opposto limite della forza infinita f, e presupposto che questa non patisca alterazione, trovo costante l' incremento di tensione $p=\frac{1}{2}f$. Per la qual cosa la fatica dell' organo $\frac{p}{P}$ serberà la ragione reciproca delle forze tendenti P. Quin-

Quindi poſſiamo ſicuramente affermare, che quando è finita la forza f, la fatica dell' organo prende regola da una proporzione più lontana della inverſa delle forze ſtiranti.

Ora ſi capirà la ragione, per cui alle donne infievolite dal parto recente, nelle quali ſi è ſcemata la tenſione delle fibre, cagioni ſtanchezza, e faſtidio la forza quantunque moderata del lume, del ſuono, e degli odori. Gioverà parimente a coloro, che ſi fanno cavar ſangue, il riparare gli occhi dalla luce ſoverchia, potendo queſta produrre nelle fibre meno teſe dell' organo della viſta una impreſſione troppo grande, e nociva.

XXXVIII. Conchiuderò queſto Schediaſma coll' indagare, ſe la varia lunghezza delle fibre rechi modificazione veruna alla fatica degli organi.

Poſto che le fibre ſieno ſimili di figura, ſtirate da forze proporzionali alle loro baſi, formate di materia egualmente rigida; le forze tendenti P, le rigidità b, e le impreſſioni f delle forze eſtrinſeche ſtanno come L^2. Aggiungo, che ancora gli accreſcimenti p di tenſione abbracciano la medeſima ragione. Mi ſervo in queſto luogo altresì, come altrove ho praticato, d' una dimoſtrazione indiretta. Suppoſti b, f, e $P+p$ come L^2, cerco la proporzione di P, e trovandola anch' eſſa come L^2, inferiſco che ſe P ſerberà la ragione di L^2, verrà parimente queſta accettata da $P+p$, e conſeguentemente ancora da p. Preſa per mano la formola generale (9) $P + \frac{bf^2}{8.\overline{P+p}^2} = \sqrt{\overline{P+p}^2 - \frac{1}{4}f^2}$, oſſervo che nell' addotta ſuppoſizione ciaſcun dei due termini $\frac{bf^2}{8.\overline{P+p}^2}$, $\sqrt{\overline{P+p}^2 - \frac{1}{4}f^2}$ ſta come L^2, e perciò P, che s' eguaglia alla differenza dei termini ſteſſi, ſi ſcopre proporzionale ad L^2.

Venendo la fatica dell' organo dinotata dalla frazione $\frac{p}{P}$, ed ed essendo nel nostro caso tanto il numeratore, quanto il denominatore come L^2; si raccoglie, che gli organi e grandi, e piccioli forniti delle descritte proprietà sosterebbero pari fatica.

XXXIX. Che se le forze tendenti, e le rigidità non si corrispondessero nella ragione delle basi delle fibre simili; si verificano le medesime conseguenze, che ho ricavate trattando delle fibre ugualmente lunghe, ma diversamente rigide, e tese. Essendo le fibre dei fanciulli proporzionatamente più molli di quelle degli uomini fatti, si capisce il perchè l' organo per esempio della vista si stanchi più facilmente in questi, che in quelli.

XXXX. Rispettivamente a due fibre varie solo nella lunghezza, l' impressione f delle forze esterne sta come L. Le cose dette nel numero XXXV. ci ammoniscono, che gli accrescimenti p di tensione proporzionali alla fatica $\frac{p}{P}$ del sensorio, nella presente supposizione di P costante, abbracciano una ragione media tra f^2, ed f: ma le forze f serbano la relazione delle lunghezze L; dunque la fatica dell' organo seguita una proporzione di mezzo fra L^2, ed L.

Per la qual cosa paragonati insieme due sensorj composti di fibre del pari grosse, rigide, e tese, e diverse solamente nella lunghezza, quello sosterrà maggiore fatica, che sarà fornito di fibre più lunghe.

Finisco colla riflessione, che dipendendo la fatica dell' organo dalla combinazione di più elementi, non ci dobbiamo maravigliare, se l' azione del medesimo obbietto esterno affatichi diversamente gli organi d' uomini quantunque sani, e che nel fiore dell' età si ritrovano.

SCHE-

SCHEDIASMA IV.

Delle Vibrazioni delle Corde sonore.

I. I Più usitati stromenti musici sono tutti formati di corde solide, o fluide, di minugia, di metallo, d' aria, la quale è il corpo, che suona negli stromenti da fiato. Nè questa scelta è senza la sua ragione; imperciocchè col suono predominante d' una corda espresso dalla unità sono incorporati, come vedremo, i suoni 2, 3, 4, 5, 6 &c., che al principale si riferiscono nelle proporzioni fra tutte le più semplici. Gli altri corpi sonori accoppiano insieme suoni, che avendo tra loro stranissime relazioni, non possono, quantunque coperti dal principale, interamente appagare l' orecchio. Essendo adunque le corde più di qualsivoglia altro corpo adattate alla musica, ad esse rivolgo le mie riflessioni, e delle loro vibrazioni, e primieramente di quelle delle corde solide cercando le leggi, do principio dallo scioglimento del seguente problema.

Determinare la curva, alla quale si accomoda una corda tesa, che si vibra.

II. Suppongasi AFB (*Fig.* 15) la curva cercata. Sia $BH = x$, $HK = dx$, $HD = y$, $GE = dy$, $DE = ds$, ed $ID = IE = r$ raggio osculatore. Condotte le minime tangenti DP, EP, e compiuto il parallelogramo PN, m' insegnano i canoni delle forze composte, che la tensione P della corda ED, la qual tensione si mantiene costante, perchè suppongo minima la saetta CF, sta alla forza f, che la spinge per la direzione PN, come DP : PN : ma

DP : PN :: ID : DE; dunque analiticamente

$P : f :: r : ds$, e conseguentemente

$f = \frac{P\,ds}{r}$ si è quella forza, che sollecita la particola DE per la direzione PI, la quale, supponendosi conforme ho detto la saetta CF infinitamente picciola, è adequatamente la stessa colla direzione DH.

Dinoti M la massa della corda intera, L la sua lunghezza, e si troverà la massa della nostra particella DE uguale ad $\frac{M\,ds}{L}$. Se divideremo per detta massa la forza sollecitante $f = \frac{P\,d\,s}{r}$, ne risulterà la forza acceleratrice per la nominata direzione uguale ad $\frac{L\,P}{M\,r}$. Fatta la riflessione, che se tutti i punti della corda hanno da pervenire alla linea retta ACB nel tempo stesso, le forze acceleratrici debbono serbar la ragione delle ordinate $HD = y$; ci accorgeremo d' essere giunti all' equazione $\frac{L\,P}{M\,r} = \frac{y}{a}$, o sia $\frac{L\,a\,P}{M\,y} = r$, da cui ci viene mostrata a dito la proprietà essenziale della nostra curva, che i raggi osculatori stanno in ragione inversa delle ordinate, e per conseguenza ancora delle forze acceleratrici. (*a*)

III. Prendo il seguente metodo dal P. Vincenzo Riccati mio Fratello (*b*), per determinare con semplicità la misura del raggio osculatore r. Si tagli $DL = a$, e dal punto L conducasi LM normale ad ID, la quale taglierà EK continuata nel punto O. Giacchè LM interseca ad angolo retto il raggio combacciante ID, sarà parallela a DE, e quindi $EO = DL = a$. Pel punto O si delinei OT normale al raggio IE, la quale incontrerà nel punto V l' altro raggio ID. Chiamata $DM = q$, sarà $MV = dq$.

Per la similitudine dei triangoli EGD, LMD avremo $EG : DE :: LM : LD$: ma essendo il triangolo OMV simile all' ITV, o all' IDE, sarà $DE : MV :: ID : OM = LM$; dunque *ex æquo perturbate*

$EG : MV :: ID : LD$, o sia analiticamente

$dy : dq :: r : a$, e perciò $r = \frac{a\,dy}{dq}$. Serbando similianza i due triangoli DEG, DLM, ci si presenta l' analogia DM:

(*a*) *Per non defraudare il primo inventore della dovuta lode, ingenuamente confesso, che fino a questo segno ho seguito il metodo tenuto dal Signor Taylor nella sua Opera* Methodus Incrementorum directa, & inversa, *pag.* 88.

(*b*) De principio conjungendo cum principio actionis ad determinandas proprietates motus liberi, & curvilinei.

DM : DL :: DG : DE

q : a :: dx : ds, da cui ſi ricava l' equazione $q = \frac{a\,dx}{ds}$.

Tolta nuovamente per mano la formola $\frac{LaP}{My} = r$, e ſurrogato in cambio di r il valore ritrovato $\frac{a\,dy}{dq}$, avremo $\frac{LaP}{My} = \frac{a\,dy}{dq}$, o pure $\frac{LP\,dq}{M} = y\,dy$, ed integrando, $\frac{LPq}{M} + g = \frac{y^2}{2}$. Si determina la coſtante g, riflettendo che quando l' ordinata y ha il maſſimo valore, e s' eguaglia a CF $= c$, la linea IP cade ſopra la IF, ed unendoſi i punti L, M, è DM $= q =$ DL $= a$. Soſtituiti queſti valori nella formola generale, ſi tramuta così $\frac{LPa}{M} + g = \frac{c^2}{2}$, e mi ſomminiſtra il valore della coſtante $g = \frac{c^2}{2} - \frac{LPa}{M}$. Colloco queſto in cambio di g nella formola generale, ed ho l' eſpreſſione compiuta $c^2 - y^2 = \frac{2LP.\overline{a-q}}{M}$: ma $q = \frac{a\,dx}{ds}$; dunque $c^2 - y^2 = \frac{2LP}{M}.\overline{a - \frac{a\,dx}{ds}}$. Nella preſente ſuppoſizione che y ſia minima riſpettivamente ad x, e dy riſpettivamente a dx, abbiamo $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx + \frac{dy^2}{2dx}$; dunque $c^2 - y^2 =$

$$\frac{2LP}{M}.\overline{a - \frac{a\,dx}{dx + \frac{dy^2}{2dx}}} = \frac{aLP\,dy^2}{M\,dx^2}$$, e conſeguentemente

$d x = \sqrt{\frac{aLP}{M}} . \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$, ed integrando, $x = \sqrt{\frac{aLP}{M}} S \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$.

IV. Reſta che ſi determini il valore della coſtante a. Deſcritto col raggio $CF = c$ il circolo $fQF2f2F$, e prorogata DG ſino in Q, ſi taglia l' arco $fQ = z$, il quale diviſo pel raggio $CF = c$ s' eguaglia a $S \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$, conforme fanno i Geometri. Avremo dunque $x = \sqrt{\frac{aLP}{M}} S \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{aLP}{M}} . \frac{z}{c}$. Si verifica eſſere l' ordinata $y = o$, mentre l' arco z s' eguaglia al nulla, o pure ad 1, 2, 3, &c. ſemicircoli. Si chiamino n queſti numeri o, 1, 2, 3, &c. di ſemicircoli, e poſto il quadrante $fQF = b$; ſarà $y = o$, quando l' arco z accetti uno dei valori $2nb$. Il caſo di $n = o$ appartiene al punto B, in cui x, y, z pareggiano il nulla. Per tal motivo non s' è aggiunta la coſtante nell' ultima integrazione. Col mezzo delle altre grandezze di n ſi ſtabiliſcono infiniti valori della coſtante a. Si oſſervi che mentre $x = BA = L$, dev' eſſere $y = o$, e per conſeguenza $z = 2nb$. Adempiute queſte ſoſtituzioni, ci ſi preſenterà $L = \sqrt{\frac{aLP}{M}} . \frac{2nb}{c}$, formola, da cui ſi ricava $\frac{c^2 LM}{4n^2 b^2 P} = a$. Fatto uſo di un tal valore, troveremo finalmente $x = \frac{cL}{2nb} S \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \frac{Lz}{2nb}$, equazione delle infinite curve, nelle quali ſi può ripiegare oſcillando la corda AB.

V. Delineo col raggio $CF = c$ il circolo $fQF2f2F$, e tagliato ad arbitrio l' arco $fQ = z$, pel punto Q tiro l' indefinita QD. Faccio poi $BH = x$ eguale alla grandezza quarta proporzionale dell' analogia $n . fQF2f : fQ :: BA : BH$,
$2nb : z :: L : x$

e con-e condotta HD normale a BC, taglierà essa la linea QD nel punto D spettante alla nostra curva.

VI. Se $n = 1$, la corda s' adatta alla curva nella Fig. 15. delineata, e l' ordinata y ha un solo massimo valore. Se $n = 2$, la corda si vibra divisa in due parti eguali AS, SB (*Fig.* 16.) separate da un punto stabile, o nodo S, e l' ordinata y ha due massimi valori CF, 2C2F, uno positivo, e l' altro negativo. Tremerà la corda divisa in tre parti eguali A2S, 2SS, SB (*Fig.* 17.), quando sia $n = 3$, le quali verranno frammezzate da due punti immobili 2S, S. I massimi valori della ordinata y ascenderanno al numero di tre, due positivi, ed un negativo. Generalmente si eguaglierà ad n il numero e delle parti eguali, nelle quali si distribuisce la corda, e dei massimi valori parimente uguali della ordinata y, che saranno uno positivo, e l' altro negativo a vicenda. Il numero dei nodi s' eguaglierà ad $n - 1$.

Si cavi l' importantissima conseguenza, che una corda tesa non può vibrarsi salvo che o intera, o divisa in parti eguali. Nelle vibrazioni delle corde sonore la Natura accoppia insieme questi diversi moti con mirabile meccanismo, insegnandoci alcuni esperimenti, come vedremo, che una corda si vibra e tutta intera, e divisa in parti eguali, e ciò fino a minutissime distribuzioni.

Dalla notata proprietà, che una corda non può oscillare se non se intera, o divisa in parti eguali, deriva la spiegazione dei suoni delle due trombe, marina, e da fiato. Questi stromenti sono forniti d' una sola corda, di minugia in un caso, e d' aria nell' altro, la prima delle quali è resa idonea all' oscillazione da una forza stirante, e la seconda da una forza premente, cioè a dire dal peso dell' atmosfera. Le due trombe adunque non possono rendere altri suoni salvo che quelli, che traggono l' origine dallo vibrarsi l' unica loro corda o intera, o in parti eguali distribuita.

VII. Nel determinare la figura delle curve, a cui s' adatta la corda AB (*Fig.* 15. 16. 17. &c.), non hanno punto luogo nè la massa M della corda, nè la forza tendente P, le quali sono escluse dalla equazione $x = \frac{Lz}{2nb}$. I soli elementi atti a variare la detta figura (supposto che paragonando insieme più

cor-

corde, il numero n abbia rifpettivamente a tutte lo fteffo valore) fono la lunghezza della corda AB$=L$, e la faetta CF $=c$, a cui fono proporzionali il quadrante fQF$=b$, e gli archi fQ$=z$ corrifpondenti ad angoli eguali fCQ. Quindi fe le faette fieno come le lunghezze, ne rifulteranno curve fimili.

Le forze acceleratrici $\frac{y}{a}$ le troveremo eguali a $\frac{4n^2b^2Py}{c^2LM}$, foftituito in cambio di a il fuo valore; e perciò fi vede, che nella loro determinazione c' entrano quegli elementi M, P, che nulla influifcono nella figura della curva AFB.

VIII. Segnata CX$=$fQF (*Fig.* 15. 16. 17. &c.), e condotta la linea XB, tocca quefta le noftre curve nel punto B. Si chiami p la futtangente gZ, che corrifponde al punto D, o fia all' ordinata gD$=\frac{L}{2n}-x$, e per la nota formola fi avrà $\overline{\frac{L}{2n}-x}\cdot\frac{dy}{dx}=p$. Softituifco in cambio di x, e di dx i loro valori $\frac{Lz}{2nb}$, $\frac{cLdy}{2nb\sqrt{c^2-y^2}}$, e trovo dopo fatte le neceffarie operazioni $\frac{\overline{b-z}\sqrt{c^2-y^2}}{c}=p$: ma rifpettivamente al punto B, fQ$=z=o$, HD$=y=o$; dunque in tal cafo $b=p$, cioè a dire la fottotangente CX eguale al quadrante fQF.

L' ultima formola $\frac{\overline{b-z}\sqrt{c^2-y^2}}{c}=p$ mi addita la maniera facile di condur la tangente a qualunque punto D della curva col mezzo dell'analogia CF : QYF :: $\overline{\text{gQ}}$: gZ

$$c : b-z :: \sqrt{c^2-y^2} : p,$$

la quale determina la fottotangente gZ$=p$.

IX. Per intero compimento della foluzione del noftro problema egli è d' uopo dimoftrare, che conformata la corda AB ad una delle curve delineate nelle Fig. 15. 16. 17. &c., e cominciando pofcia a vibrarfi, fi adatta fempre in qualunque iftantante ad una curva di ſimil natura; dimodochè le forze di qualſiſia punto abbracciano la ragione delle diſtanze dall' aſſe A B, o ſia degli ſpazj, che rimangono da percorrerſi.

Sia A F D B (*Fig.* 18.) o la curva della Fig. 15. ovvero uno de' rami delle Fig. 16. 17. &c., in cui ſia diſpoſta la corda A F D B, e giacchè le forze del punto medio F, e di qualſivoglia altro punto D ſtanno come le diſtanze $FC=c$, $DH=y$, produrranno in tempo minimo velocità proporzionali alle ſteſſe diſtanze, colle quali i punti F, D ſcorreranno gli ſpazj Ff, Dd, che ſi riguarderanno nella medeſima ragione. Quindi gli ſpazj reſidui fC, dH ſi ſcopriranno eſſere come i totali FC, DH, e perciò poſto $fC=kc$, ſarà $dH=ky$, e la ſua differenza $=kdy$: ma pel numero IV. $dx=\frac{cL}{2nb}\cdot\frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$; dunque avremo altresì $dx=\frac{kcL}{2nkb}\cdot\frac{kdy}{\sqrt{k^2c^2-k^2y^2}}$, equazione della curva AfdB della ſteſſa natura di quella della curva A F D B.

Dal numero VII. ſi raccoglie, che uguagliandoſi le forze acceleratrici dei punti F, D alle grandezze $\frac{4n^2b^2Pc}{c^2LM}$, $\frac{4n^2b^2Py}{c^2LM}$, le forze dei punti f, d pareggeranno le quantità

$$\frac{4n^2k^2b^2P.kc}{k^3c^2LM}=\frac{4n^2b^2P.kc}{c^2LM},\ \frac{4n^2k^2b^2P.ky}{k^3c^2LM}=\frac{4n^2b^2P.ky}{c^2LM};$$

e che per conſeguenza ſaranno le forze dei punti F, f; D, d come le relative lontananze dall' aſſe A B.

Nel ſecondo minimo tempicello dalle forze dei punti f, d verranno generati aumenti di velocità, che ſtaranno fra loro come le dette forze, ch' è quanto a dire come gli ſpazj reſidui da percorrerſi fC, dH, o come i totali FC, DH. Colle velocità acquiſtate nei due tempicelli ambe proporzionali alle linee FC, DH ſi paſſeranno ſpazj f2f, d2d in ragione delle

ſteſſe

ſteſſe linee; laonde gli ſpazj rimanenti 2fC, 2dH accetteranno la medeſima proporzione, e poſta $2fC = kc$, ſarà $2dH = ky$, ed alla curva A2f2dB competerà l' equazione $dx = \frac{kcL}{2nkb} \cdot \frac{kdy}{\sqrt{k^2c^2 - k^2y^2}}$.

Il numero VII. m' inſegna uguagliarſi le forze acceleratrici dei punti 2f, 2d alla coſtante $\frac{4n^2b^2P}{c^2LM}$ moltiplicata nelle diſtanze 2fC, 2dH dall' aſſe AB, non altrimenti che quelle dei punti F, D; f, d.

Troveremo le ſteſſe conſeguenze conſiderando la figura della corda, e le forze dei ſuoi punti dopo i tempi minimi terzo, quarto, quinto &c., e finalmente conchiuderemo, che in qualunque iſtante la corda s' adatta alla curva dell' equazione $dx = \frac{kcL}{2nkb} \cdot \frac{kdy}{\sqrt{k^2c^2 - k^2y^2}}$, in cui a k competono ordinatamente tutti i valori, che principiano dall' unità, e vanno a terminare nel nulla, e che qualſivoglia punto D è ſempre accelerato da una forza eguale al prodotto della coſtante $\frac{4n^2b^2P}{c^2LM}$ nella lontananza dall' aſſe AB.

X. Quantunque le corde eſempigrazia d' un gravicembalo ſi ſogliano incitare all' oſcillazione con una penna, che fa loro prendere una figura triangolare, nulladimeno non ritengono queſta figura, ma poſto, che rendano un ſuono ſolo, ben preſto ſi conformano alla curva nel numero V. determinata. Per mettere in chiaro un tal punto, egli è d' dopo provare, che ſono proporzionali alle ordinate infiniteſime DH, dH (*Fig.* 18.) le forze acceleratrici dei punti D, d appartenenti a due curve AFDB, AfdB, che abbiano l' aſſiſſa comune BH, e le dette ordinate in data proporzione come 1 : k, onde poſta $DH = y$, ed i ſuoi elementi primo, e ſecondo dy, ddy, ſia $dH = ky$, ed i ſuoi elementi primo e ſecondo kdy, $kddy$.

Poichè (*Fig.* 15.) continuata la retta KE fino in l, le linee

nee E l, N P adequatamente parallele congiungono le linee EN, l P parallele, e proffimamente uguali; pafferà fra loro adequata uguaglianza; ed effendo $El = -\frac{1}{2} ddy$, fi fcoprirà parimente $PN = -\frac{1}{2} ddy$: ma giufta l' offervazione fatta al numero II. $DP = \frac{1}{2} ds : PN = -\frac{1}{2} ddy :: P : f$; dunque $f = -\frac{Pddy}{ds}$, valore della forza affoluta, o follecitante, che divifo per la maffa $\frac{Mds}{L}$ dell' elemento DE della corda BD, mi fuggerifce la grandezza della forza accelerante il punto $D = -\frac{LPddy}{Mds^2}$. L' adequazione fra ds, e dx, che fi è affunta come coftante, fa vedere poterfi confiderare invariabile la quantità $\frac{LP}{Mds^2}$, e per confeguenza effere la forza acceleratrice del punto D proporzionale alla feconda differenza $= -ddy$ dell' ordinata $HD = y$. Dalle cofe non ha molto dette fi raccoglie, che le feconde differenze delle ordinate (*Fig.* 18.) HD, Hd, che fi riferifcono nella ragione data $1 : k$, abbracciano la fteffa ragione; dunque le forze acceleratrici dei punti D, d ftanno fra loro come le ordinate HD, Hd.

XI. Premeffa quefta neceffaria dimoftrazione, non abbia ancora la corda AFDB prefa la figura del numero V., ma fia talmente incurvata, che la forza, e la velocità del punto F abbia maggior proporzione alla forza, e alla velocità del punto D di quella, che paffa fra le diftanze FC, DH dall' affe AB. In un minimo tempo fi fcorreranno dai punti F, D gli fpazj Ff, Dd proporzionali alle velocità, e quindi farà Ff : Dd in maggior proporzione di FC : DH, e per confeguenza ne rifulterà fC : dH in minor proporzione di FC : DH.

Se ftaffe FC : fC :: DH : dH, ho provato che la forza in F alla forza in f fi riferirebbe nella fteffa ragione della forza in D alla forza in d. Ma effendo fC minore di quello, che la detta proporzione richiede, e diventando fempre più picciola la feconda differenza dell' ordinata fC, a cui è proporzionale la forza nel fito f, quanto più la corda AfdB s' avvicina alla linea

K

nea retta ACB; ne segue, che la forza in f alla forza in d avrà minor proporzione della forza in F alla forza in D.

Seguitando adunque la corda la sua vibrazione, le forze dei punti F, D s' anderanno sempre più accostando alla proporzione delle lontananze dall' asse AB, fin tanto che giunta la corda nella positura A2f2dB, le dette forze si riguarderanno nella ragione 2fC:2dH, e la corda si sarà adattata alla curva del numero V.

XII. In tale circostanza egli è d' uopo provare, che altresì le velocità accettano la proporzione medesima, onde la corda conservi la figura d' una delle mentovate curve.

Sia ED un elemento della nostra corda. Al punto medio G conduco la tangente GP, la quale si confonde coll' arco ED. Movendosi i punti E, G, D per la direzione dei loro raggi osculanti, ch' è normale alla tangente GP, si girano intorno al punto P, quando le velocità sieno proporzionali alle distanze EK, GI, DH, o sia ai raggi PE, PG, PD, e descrivono archetti in ragione d' esse distanze: ed in questa supposizione il moto d' un punto nulla influisce in quello degli altri. Ma se le celerità da E verso D vanno scemando più di quello la nominata proporzione richiede, si comunica il movimento dal punto E al vicino dalla parte di D, e così da punto a punto contiguo, fino a che tutti i punti dell' elemento ED camminino con velocità proporzionali alle relative lontananze dall' asse AB. Le cose affermate dell' elemento ED s' applichino agli altri elementi della nostra corda, i punti della quale ben presto si ridurranno a vibrarsi con velocità proporzionali alle distanze dall' asse AB col mezzo della comunicazione del moto, che sarà compiuta in quell' istante, e non prima, in cui nel sito A2f2dB le forze accettano la ragione d' esse distanze.

Ed in fatti essendo sempre le forze, e per conseguenza anche le accelerazioni in tempi minimi pari fra i punti F, 2f proporzionatamente maggiori di quelle fra i punti D, 2d, questi eccessi di velocità si distribuiscono alle altre particole della corda, le quali solo nella positura A2f2dB sono fornite di forze, e di velocità in ragione delle relative distanze dall'asse AB.

XIII. Tralascio di prender per mano gli altri casi, come per esempio che la forza del punto F alla forza del punto D stia in maggior proporzione, e tutto all' opposto la velocità del

pun-

punto F alla velocità del punto D in proporzione minore di quella, che passa fra le distanze FC, DH; perchè incitandosi al tremito la corda, conforme è consueto, o con una penna, o coll' unghia, o battendola, ha sempre luogo la prima supposizione. E vaglia il vero, nell' atto che la corda principia a vibrarsi ha la figura triangolare AFB (*Fig.* 19.), in cui il solo punto F è fornito di forza rimanendone gli altri privi, a cagione che gli elementi delle due porzioni di corda AF, FB non sono punto incurvati, e la seconda differenza di qualsivoglia ordinata HD, a cui è proporzionale la forza accelerante il punto D, si eguaglia al nulla. Comincj l' oscillazione; la mentovata forza del punto F imprime velocità al detto punto, la quale col mezzo della comunicazione del moto passa agli altri punti, dimodochè la corda un poco s' incurva, e prende la figura AfdB dotata della proprietà, che la forza, e la velocità del punto f alla forza, ed alla velocità del punto qualunque d si riferisce in proporzione maggiore di fC: dH.

Trovare il tempo impiegato da una corda tesa nel fare una vibrazione.

XIV. Conciossiachè tutti i punti della corda AFB (*Fig.* 15.) pervengano nel tempo stesso alla retta ACB, egli è indifferente il considerare il moto di qualunque punto. Scelto per esempio il punto F, sia esso giunto al sito e, e chiamata $Ce = y$, sarà la forza acceleratrice $\frac{4n^2b^2Py}{c^2LM}$. Avremo adunque per le note formole, chiamata u la velocità della particola F nel sito e, $-\frac{4n^2b^2Pydy}{c^2LM} = udu$, e passando alla integrazione, $\frac{4n^2b^2P}{c^2LM} \cdot \overline{c^2 - y^2} = u^2$. Ho aggiunta la dovuta costante, che quando è $u = o$ nella situazione F mi dia $y = c$. Estratta la radice ci si presenta $\frac{2nb}{c}\sqrt{\frac{P.\overline{c^2-y^2}}{LM}} = u = \frac{-dy}{dt}$, e conseguentemente $dt = \sqrt{\frac{LM}{P}} \cdot \frac{-c\,dy}{2nb\sqrt{c^2-y^2}}$. La sommatoria di $\frac{-c\,dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ s' eguaglia all' arco FY $= b - z$, e perciò troveremo integrando $t = \sqrt{\frac{LM}{P}} \cdot \frac{b-z}{2nb}$, misura del tempo, in cui la particella F scorre lo spazio F e $= c - y$.

Pervenuta che sia la minima fibra F al punto C, egli è da osservarsi, che in tal circostanza fY $= z = o$, e per conseguenza $t = \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{LM}{P}}$, tempo d' una semivibrazione del punto F, ed altresì per le cose dette, di tutta la corda AFB. Quindi $t = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{LM}{P}}$ indicherà il tempo d' una intera vibrazione della corda medesima.

XV. Ritroveremo il tempo t espresso a cagione d' esempio in secondi, paragonando la corda AFB con un pendolo a cicloide, il tempo d' una vibrazione del quale generalmente si espone per la frazione $\frac{2b}{c}$ moltiplicata nella radice della lunghezza. Sia b la lunghezza del pendolo, che fa una vibrazione per secondo, ed istituita l' analogia $t : \frac{1}{n}\sqrt{\frac{LM}{P}} :: 1 : \frac{2b}{c}\sqrt{b}$, scopriremo $t = \frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{LM}{Pb}}$.

XVI. Confrontate insieme due corde rispettivamente alle quali il numero n abbia lo stesso valore, onde amendue si vibrino intere, o in pari numero di parti eguali distribuite, i tempi delle loro oscillazioni staranno come $\sqrt{\frac{LM}{P}}$.

Se le predette corde saranno formate della stessa materia, si chiaſi chiami d il loro diametro, e la maſſa M ſi ſcoprirà proporzionale ad Ld^2. Soſtituita queſta grandezza in cambio di M, troveremo i tempi delle vibrazioni come $\frac{Ld}{\sqrt{P}}$.

XVII. I tempi delle vibrazioni della ſteſſa corda, che s' agita intera, o diviſa in parti eguali, ſi corriſpondono nella ragione $\frac{1}{n}$. Aſſegnati per tanto ad n ordinatamente i ſuoi valori 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c., i mentovati tempi formeranno la ſerie armonica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$ &c. ma i ſuoni, o i numeri delle vibrazioni fatte in tempo pari ſtanno inverſamente come i tempi d' eſſe vibrazioni; dunque i ſuoni della medeſima corda, che trema o intera, o diſtribuita in due, in tre, in quattro &c. parti eguali, vengono dinotati dalla ſerie aritmetica 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c., e tali realmente ſono i ſuoni delle due trombe.

Non laſcio d' avvertire, che la corda BS (*Fig.* 16. 17. &c.) ſi vibra nel medeſimo tempo, e produce lo ſteſſo ſuono e come parte aliquota della corda AB, e come corda ſolitaria, ed intera fermata immobilmente nel punto S. Sia la lunghezza BS $=l$, e la maſſa m, e purchè la noſtra corda, come ſi ſuppone, oſcilli intera, avremo $t=\frac{c}{2b}\sqrt{\frac{lm}{Pb}}$: ma $l=\frac{L}{n}, m=\frac{M}{n}$; dunque $t=\frac{c}{2b}\sqrt{\frac{LM}{n^2Pb}}=\frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{LM}{Pb}}$, ch' è quella formola iſteſſa, per cui ſi eſprime il tempo d' una vibrazione della corda BS parte aliquota della corda AB. Queſta verità non abbiſognava di dimoſtrazione; imperciocchè ſtando immobile in amendue le circoſtanze il punto S, la corda BS non può indovinare da qual cagione proceda la detta immobilità, e deve in un caſo, e nell' altro in pari tempo oſcillare.

XVIII. Se la corda AB (*Fig.* 15.) foſſe infinitamente lunga, la porzione finita BH atta a rendere qualſivoglia ſuono ſarebbe parte aliquota della lunghezza infinita AB; e quindi

la

la mentovata corda potrebbe in se stessa ricevere qualunque suono. Le corde d' aria, col mezzo delle quali si diffonde il suono, deggiono considerarsi infinitamente lunghe; perchè continuano all' indefinito o direttamente, o col mezzo di riflessioni, e prima per opera delle replicate resistenze si estinguono le vibrazioni sonore, di quello che manchi l'aria, a cui si possano comunicare. Or ecco la ragione per cui l' aria ci porta qualsivoglia suono all' orecchio.

Io conghietturo, che organizzando l' orecchio abbia la Natura scavati nell' osso delle tempie tre canali semicircolari, ed una chiocciola, i quali insieme col vestibolo compongono la cavità, che chiamasi laberinto, acciocchè in essi racchiudasi un lungo nervo uditorio, che, facendo figura d' indefinito, possa in se ricevere qualunque suono. Il nervo uditorio, che per varj forellini aperti nel cranio in faccia alla base della staffa, e nel centro della chiocciola va speditamente al cerebro, si propaga per la cavità del labirinto; ed essendo assai molle, massimamente che il laberinto è sempre ripieno d' umore, porzioni molto picciole, e fisicamente minime della sua lunghezza corrisponderanno all' unisono esempigrazia colle corde di un gravicembalo; e poichè con fisica adequazione sono parti aliquote della totale lunghezza, possono concepire palpitazione.

Se le dette parti sieno soverchiamente minime, diverranno inflessibili, e non potranno vibrarsi. Che se il corpo sonoro determinerà queste parti troppo lunghe, non saranno fornite di rigidità sufficiente, e non porteranno all' anima suono sensibile. Proviamo tutto giorno coll' esperienza, che i più lunghi contrabbassi dell' organo producono piuttosto un fremito muto che un suono; e perciò i suoni alla nostra orecchia sensibili deggiono essere ristretti fra certi limiti di gravità, e di acutezza, che dall' accuratissimo M. Sauveur sono stati determinati.

XIX. Si potrebbe ancor sospettare, che il nervo uditorio fosse composto da un fascio di nervi, che per picciolissimi gradi passassero dal tuono più grave al più acuto, fra i quali si ponesse in tremito quello, che corrispondesse all' unisono col corpo sonoro. Fingasi che i mentovati piccioli gradi sieno la decima parte di un comma: e giacchè non solo si comunicano i suoni unisoni esattamente, ma parimente quelli, che all' unisono si avvicinano, insegnandoci l' esperienza, che una corda fa

tre-

tremar l' altra accordata in semituono minore uguale a quattro comma; ne seguirebbe, che all' oscillare di un corpo sonoro si vibrerebbero oltre il nervo unisono quaranta nervi più acuti, ed altrettanti più gravi, gli estremi dei quali si corrispondereb- bero a un di presso in seconda maggiore. Si udirebbe adunque una mescolanza di suoni, che formerebbe un suono falso, ed ingrato, il che certamente non adiviene. Per la qual cosa la prima mia conghiettura riceve lume maggiore, e sempre più in- clino a credere, che intanto il nervo uditorio porti all' anima tutti i suoni dentro certi stabiliti confini, inquanto che possa far figura d' indefinito.

XX. Ho promesso ai numeri I. e VI. di recare alcuni espe- rimenti, i quali facciano toccar con mano, che a un tratto e tutta intera, e divisa in parti eguali una corda sonora si vi- bra. Intanto non s' odono senza molta attenzione i suoni del- le parti aliquote, inquanto che il suono predominante della corda intera occupa talmente l' orecchio, che non glieli la- scia così agevolmente discernere. Quello, che ho detto della cor- da intera rispettivamente alle sue parti aliquote, s' intenda al- tresì d' una parte aliquota in riguardo alle sue divisioni, e pa- rimente d' una parte aliquota messa al confronto d' un' altra notabilmente minore. Mal grado per altro la relativa fievolez- za dei suoni delle parti aliquote d' una corda, se la incitere- mo vigorosamente al tremito in poca distanza da uno scannello, sentiremo, ponendovi la dovuta attenzione, i suoni delle ter- ze, e delle quinte parti, che al suono della corda totale si ri- feriscono, quello in quinta sopra l' ottava, questo in terza maggiore sopra la doppia ottava. Difficilmente si distinguono i suoni delle metà, e delle quarte parti, che formano col suo- no fondamentale ottava semplice, e duplicata, perchè tali equi- sonanze si confondono, e per così dire s' incorporano col suono della corda intera.

Chi volesse frattanto udire belli, e distinti i suoni delle parti aliquote, lavori una molla con un pezzo di corda d' ot- tone delle più grosse, e le dia, se così gli piace, quella for- ma, che nella Fig. 20. sta espressa. Tenga questa molla nella mano sinistra, e stimolata, acciocchè si vibri, colla mano destra la corda A B (*Fig.* 15. 16 17. &c.) a un di presso nel si- to C, prema subito colla molla uno de' punti S, 2 S, &c., e restan-

restando con ciò ammortiti i suoni della corda intera A B, e di quelle porzioni, che non sono parti aliquote delle corde BS, S2S &c., sentirà spiritoso, e chiaro il suono delle corde or ora mentovate. Per tal mezzo si udiranno quanto basta distinti fino i suoni delle parti trentesime.

XXI. Potrebbe taluno ridire, che prima dell' accostamento della molla ad uno de' punti S, 2 S, &c. la corda A B non tremava divisa nelle parti BS, S2S, &c., essendo essa stata determinata dall' applicazione della nominata molla a sì fatta maniera di vibrazione. Rispondo, che se la pressione della molla avesse indotto la corda A B ad oscillare compartita nelle porzioni eguali BS, S2S, &c. nulla servirebbe per sentire i suoni d' esse porzioni più, o meno forti, che fosse stata da me stimolata al moto piuttosto nei siti C, 2C, 3 C, &c. che nei punti S, 2S, &c. ma se la percuoto ne' primi siti, odo un suono forte, se nei secondi, l' odo debole, dunque un tal suono dall' impedimento della molla non trae l' origine. L' incitare la corda in uno de' punti S, 2S, &c. è un modo inettissimo per imprimere alle parti BS, S2S, &c. le loro particolari vibrazioni, usandosi il massimo sforzo contro uno di que' punti, che le oscillazioni delle parti mentovate vogliono stabili, e non ripiegandosi veruna d' esse parti, onde possa oscillare, e comunicare il tremito alle compagne. L' esposta verità verrà posta in tutto il suo lume dalla seguente sperienza.

S' applichi la molla per esempio al punto 2S (*Fig.* 17.) e se si stimolerà poscia la corda nel posto S, fievolissimo giungerà all' orecchio il suono delle terze parti BS, S2S, 2SA. Tutto all' opposto imprimendo il moto nei siti C, 2C, 3C, concepiscono le dette parti un suono chiaro, e robusto. Avverto, che giova al vigore del suono il battere piuttosto la corda ne' punti C, 3C, che nel punto medio 2C. La maggior vicinanza degli appoggi rende la corda più resistente, e fa sì ch' essa acquisti una più viva palpitazione.

Conchiudo, che la pressione della molla non introduce nella corda A B i suoni, che antecedentemente non c' erano, ma cagiona l' unico effetto di rendere sensibili quelli, ch' erano già stati impressi, e ciò coll' estinguere i suoni più forti della corda intera, e delle maggiori parti aliquote.

XXII. Dalla fondamental proprietà, che una corda unitamente

tamente

tamente si vibra e tutta intera, e divisa in parti eguali, agevolmente deducesi la legge della comunicazione dei tremiti sonori da una corda all' altra. Egli è d' uopo premettere, che non si comunicano sensibilmente altre vibrazioni, che le unisone o esattamente, o prossimamente. Per ottenere, che passi notabile palpitazione dall' una all' altra corda, ci vuole una forza continuamente applicata, la cui azione sia favorevole costantemente. Due corde unisone oscillano sempre a seconda, e non si contrastano mai. Non così succede in due corde, che molto dall' unisono si discostano; imperciocchè spesse volte, mentre la corda agente oscilla, e spinge l' aria verso la paziente, questa reciproca, ed incontra perciò resistenza; ed all' opposto mentre la corda agente reciproca, la paziente oscilla, nè può essere da quella ajutata.

Date due corde, sono note le serie di suoni prodotti dalle corde stesse, secondochè tremano o intere, o divise in parti eguali. Quando i suoni delle due corde intere non si riferiscano in una proporzione assimetra, le predette corde avranno dei suoni comuni. Ora questi suoni comuni, e specialmente il più grave proprio d' una parte aliquota più lunga, e conseguentemente più flessibile, da una corda all' altra faran passaggio. Il canone generale vuol essere illustrato con un esempio. Ci sieno due corde della stessa materia ugualmente grosse, e tese con pari forza, le cui lunghezze 1, $\frac{2}{3}$. Posto che i suoni della prima si esprimano colla serie $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, &c., quelli della seconda verranno dinotati dalla progressione

$$\frac{3}{2}, \frac{6}{2} = 3, \frac{9}{2}, \frac{12}{2} = 6, \frac{15}{2}, \frac{18}{2} = 9, \&c.$$

Si osservino comuni alle due i suoni $3, 6, 9$, &c., e si cavi la conseguenza, che tali suoni, e principalmente il più grave 3 proprio delle terze parti della corda 1, e delle metà della corda $\frac{2}{3}$, dalla corda agente alla paziente si apriranno la strada. Ella è la corda 1, che oscilla divisa in tre parti eguali, che fa suonare la corda $\frac{2}{3}$ in due porzioni eguali partita: e così pari-

L men-

mente la corda $\frac{2}{3}$, che si vibra divisa per metà, partecipa il suono alla corda 1 in tre parti eguali distribuita. Quindi parlando con precisione dobbiamo dire, che le tre corde $\frac{1}{3}$ fanno suonare le due corde $\frac{1}{3}$, o a rovescio.

XXIII. Fra le molte sperienze, colle quali si può confermare la legge da me stabilita, fo scelta della seguente, che ha relazione all' esempio or ora recato. La corda AB (*Fig.* 21.), la cui lunghezza $= \frac{5}{3}$, dividasi in cinque parti eguali BS, S2S, 2S3S, 3S4S, 4SA. Al punto 2S sottopongasi lo scannello E2SD, e col corpo duro, e curvo 2SF (io mi soglio servire della testa d' un compasso) il quale tocchi la corda nell' unico sito 2S, si prema essa corda, di maniera che non possa far moto alcuno al di sopra dello scannello. Partita così la corda in due segmenti $B2S = \frac{2}{3}$, $2SA = 1$, si faccia suonare per modo d' esempio il primo, stimolandolo coll' unghia in uno de' punti C, 2C, che dividono per metà le porzioni eguali BS, S2S, ed ammortitone incontanente il suono col polpastrello del dito, si sentirà chiaramente sonare il segmento 2SA non già intero, o diviso per metà, ma in tre parti eguali distribuito 2S3S, 3S4S, 4SA. Questo suono da me nell' addotto esempio espresso pel numero 3 è il più grave fra quelli, che sono comuni ad ambe le corde B2S, 2SA, e quindi più vigoroso degli altri dalla corda agente alla paziente fa transito.

Ho detto, che la corda B2S s' inciti al tremito in uno de' punti C, 2C, perchè tali siti sono assai favorevoli alle vibrazioni della nostra corda in due porzioni eguali divisa. Per altro applicata l' unghia al punto più svantaggioso S, le due metà BS, S2S, conforme ho avvertito al numero XXI., concepiranno vibrazione, ma fiacca, la quale si comunicherà alle terze parti della corda 2SA.

XXIV. L' artificio, ch' espongo, servirà a far toccar con mano, che nel suono della corda 2SA non ha parte alcuna quello della corda intera B2S, ma che unicamente è cagionato dalle oscillazioni delle due metà BS, S2S. Cingasi il fito to S con uno ſpago, e dopo averlo aggroppato, ſi recida lo ſpago ſteſſo in vicinanza del gruppo. Queſto ſpago ammorza il ſuono della corda intera B2S, e nulla, o poco impediſce le vibrazioni delle due metà BS, S2S. Stimolata la corda al tremito in uno de' ſiti C, 2C, ed ammortendolo poſcia col polpaſtrello del dito, reſterà il ſuono delle terze parti della corda 2SA, che s' udirà non meno forte di quello, che rende la corda ſteſſa, mentre al punto S lo ſpago non è legato. S' inferiſca per tanto, che le vibrazioni della corda intera B2S nulla influiſcono nel ſuono della corda 2SA, che oſcilla in tre parti eguali diſtribuita.

XXV. Difficiliſſima ſembra a prima viſta la ſpiegazione d' una belliſſima eſperienza del celebre Signor Giuſeppe Tartini. Stimolate coll' arco due corde del violino, i di cui ſuoni s' eſprimano con numeri fra loro primi, e purchè il più picciolo di queſti numeri non ſia eguale ad uno, s' ode ſempre in aria il nuovo ſuono denotato dalla unità. Rendano per modo d' eſempio due corde i ſuoni 3, 5, e ſi farà ſentire in aria il ſuono 1, a cui i predetti ſuoni 3, 5 ſi riferiranno, quello in quinta ſopra l' ottava, queſto in terza maggiore ſopra l' ottava duplicata. (a)

(a) Quantunque il lodato Sig. Tartini, il quale eſprime i ſuoni, non come è mio coſtume pe' numeri delle vibrazioni 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 &c. fatte in tempi eguali, ma per le loro durate 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, &c. affermi alla pag. 18. del ſuo trattato di Muſica, che s' ode in aria il terzo ſuono $\frac{1}{2}$: nulladimeno avviſato da me col mezzo del P. Franceſcantonio Vallotti eccellente Maeſtro di cappella nel tempio di S. Antonio di Padova, che queſto ſuono dovea pareggiar l' unità, ſcrive alla pag. 172. *Il terzo ſuono, ch' io dico uniſono coſtantemente a $\frac{1}{2}$, quando i dati ſuoni ſieno in ſerie armonica, ſi può dubitare, che ſia uniſono al tutto, o ſia alla prima unità della ſerie.* Di *fatto la qualità di queſto terzo ſuono eſſendo diverſa dalla qualità del ſuono naturale delle corde, queſta diverſità può cagionare equivoco ad onta del più eſquiſito ſenſo di udito, e di migliaja di prove.* Facendo il Sig. Serre menzione della ſperienza del Sig. Tartini nella ſua opera ſopra i principj dell' armonia ci aſſicura, che i terzi ſuoni prodotti dalle terze maggiori, e minori corriſpondono all' ottava baſſa con quelli del Sig. Tartini.

Immaginiamoci tre corde BD, E, F (*Fig.* 22.), la prima infinitamente lunga, e le altre due di lunghezza determinata. Si facciano sonare le due corde finite, ed in virtù dell' azione della corda E, tremerà la corda indefinita BD divisa in porzioni eguali BS, S2S, &c. ciascuna delle quali sarà unisona alla corda E. Non altrimenti per opera della corda F oscillerà la corda BD distribuita in parti eguali B1, 1 2 I, 2 I 3 I, &c. che alla corda F risponderanno all' unisono. Le lunghezze delle parti BS, BI della stessa corda stanno inversamente come i loro suoni unisoni a quelli delle corde E, F: e quindi espressi tali suoni pe' numeri n, N fra loro primi, avremo BS : BI : : $\frac{1}{n}$: $\frac{1}{N}$, e conseguentemente ponendo BS $= \frac{L}{n}$, sarà BI $= \frac{L}{N}$. Se prenderò la lunghezza BS $= \frac{L}{n}$ tante volte BS, S2S, &c. quante unità si contengono in n, e così parimente la lunghezza BI $= \frac{L}{N}$ tante volte BI, I 2 I, 2 I 3 I, &c. quante unità comprende il numero N, ne risulterà in ambo i casi la stessa lunghezza BA $= L$. Egli è facile da scoprire, che il punto A, non meno che il punto B, sta immobile in riguardo alle vibrazioni e delle parti BS, e delle parti BI, terminando in esso due porzioni di varia grandezza 2SA, 4IA.

Fra i punti B, A non si può dare altra coppia di nodi, che nello stesso punto si uniscano. Per ottenere questa unione, sarebbe d' uopo che i numeri n, N avessero una comune misura K maggiore della unità; dimodochè $\frac{n}{K}$, $\frac{N}{K}$ fossero numeri interi minori di n, N. In tale ipotesi moltiplicando BS $= \frac{L}{n}$ per $\frac{n}{K}$, BI $= \frac{L}{N}$ per $\frac{N}{K}$ ci si presenterebbe la medesima lontananza $\frac{L}{K}$ dal punto B, minore di AB $= L$; in cui seguirebbe dei due punti stabili l' accoppiamento: ma i numeri n, N, che si suppongono fra loro primi, non hanno comune misura maggiore della unità; dunque non può darsi sito alcuno fra i punti B, A, nel quale succeda l' union di due nodi. Perciò

ciò non c' è punto nella corda BA, detratti gli estremi B, A, che non si vibri; imperciocchè quei punti S, 2 S, che dovrebbero rimaner immobili rispettivamente alle oscillazioni delle parti BS, S 2 S, &c. tremano per cagion delle vibrazioni delle parti BI, I 2 I, &c. e così parimente que' punti I, 2 I, &c. che i tremiti delle porzioni BI, I 2 I, &c. vorrebbero stabili, si muovono per motivo delle oscillazioni delle parti BS, S 2 S, &c.

La palpitazione di qualunque punto medio fra B, ed A fa sì, che la corda intera BA concepisce vibrazione, e rende quel suono, ch' è conveniente alla lunghezza BA. Cerchiamo il valore di questo suono, e vediamo se vada d' accordo con quello, che la sperienza del Sig. Tartini ci somministra. I suoni di due parti BS, BA della stessa corda BD serbano la ragione reciproca delle lunghezze BS, BA. Il termine quarto proporzionale adunque di $\frac{1}{BS} = \frac{n}{L}$, $\frac{1}{BA} = \frac{1}{L}$, e di n suono della porzione BS, s' eguaglierà al suono della corda BA: ma il detto quarto termine proporzionale pareggia l' unità; dunque per questa s' esprime il suono della corda BA, e tale si è il suono, che ci fa udire in aria l' esperimento del Signor Giuseppe Tartini.

XXVI. Abbiamo veduto al numero XVIII., che le corde d' aria apportatrici dei suoni si deggiono considerare infinitamente lunghe. La corda BD è uno di que' raggi sonori, che vengono dal violino al mio orecchio, lungo il quale si segnano le porzioni BS, S 2 S, &c. BI, I 2 I, &c. unisone alle corde E, F del violino. Comincia essa corda BD da quel punto B, in cui incontrandosi i due raggi EB, FB provenienti dalle due corde E, F del violino, sono obbligati dall' urto ad incamminarsi di conserva per la media direzione BD. Dall' unirsi poi due nodi nel punto A, e dallo schivarsi tutti gli altri nodi medj fra B, ed A, ne nasce il suono $= 1$ della corda BA, che si sente in aria, siccome è stato da me spiegato. Si avverta che l' accoppiamento dei nodi in un solo punto si replica alle distanze 2 BA, 3 BA, &c. dal punto B; laonde la corda BD trema divisa nelle tre parti di varia misura BI, BS, BA, che rendono i suoni N, n, 1. Posto $n = 1$, non nascerebbe in aria nuovo suono, e la corda BD oscillerebbe divisa nelle

sole

fole due parti BI, $BS=BA$ unifone alle corde F, E del violino. In fatti le ragioni 1:2, 1:3, 1:4, &c. non producono il terzo fuono.

XXVII. Conchiudo colla rifleffione, che fi fpiegano cogli fteffi principj due fperienze una reciproca dell' altra, cioè, che toccata una corda, fi fentono i fuoni delle fue parti aliquote, ed all' oppofto ftimolate al fuono due parti aliquote, s' ode il fuono della più picciola corda intera, che poffa da effe parti effere mifurata. Incurvata la corda tutta, s' incurvano altresì le fue parti aliquote, e fanno le loro particolari ofcillazioni. Non altrimenti incurvate due parti aliquote, s' incurva parimente la corda intera minimo tutto da effe mifurato, e confeguentemente fi pone in ofcillazione. Due fuoni del violino fanno nafcere in aria un fuono fenfibile, perchè tali fuoni fono affai forti. Surrogato al violino un gravicembalo, o un mandolino, il fuono in aria riefce talmente fiacco, che non fa impreffione fifica nell' orecchio.

XXVIII. Proccura il dottiffimo Signor Jacopo Ermanno negli Atti di Lipfia dell' anno 1716. di trovare il tempo periodico d' una corda fonora, che fi vibra, fenza prima indagare la curva, alla quale fi adatta la predetta corda ofcillando; ed ecco il metodo, di cui fi ferve.

Quando la corda AB (*Fig.* 18.) tefa dalla potenza *P* acquifta le curvature AFB, AfB, la fua lunghezza AB è accrefciuta per le quantità $AFB-AB$, $AfB-AB$, e quefte diftenfioni ficcome minime fono proporzionali alle forze, che le producono. Quindi fe (*Fig.* 18. 23.) fia $AB=DP$, $AFB=HP$, $AfB=EP$, e la retta HN normale ad HP efponga la forza producente la diftenfione $HD=AFB-AB$, didinoterà EO parallela ad HN la forza, che cagiona l'allungamento $ED=AfB-AB$.

Conducafi parallela ad HN la linea $DK=P$, potenza, che alla noftra corda somminiftra quel grado di tenfione, o di elafticità, che ha in ACB, e fegnata PKM, a cui il Signor Ermanno fuppone equidiftante DN, fi fcopriranno HM, EL uguali ai gradi affoluti di tenfione, che competono alla corda nei fiti AFB, AfB; e non altrimenti le altre ordinate del trapezio HDKM efporranno le tenfioni affolute nelle corrifpondenti pofizioni della corda. Ora quefte ordinate non poffono uguagliarfi gliarsi alle forze, che obbligano la corda ad accorciarsi; imperciocchè giunta nel sito ACB, ove la sua energia $= P$, non può ulteriormente scemar di lunghezza. Le sole HN, EO, &c. dinotano le forze, che l' accorciamento della corda producono. Ciò posto, immaginiamoci un corpo H, la cui massa si eguagli a quella della corda AB, il quale venga spinto per lo spazio HD dalla scala di forze HDN, e siano $AB = DP = L$, $DK = P$, la massa del mobile $H = M$, $DH = a$, $DE = x$, la velocità acquistata nella discesa per $HE = u$, il suo elemento $= du$, e l' elemento del tempo, nel quale lo spazietto Ee si percorre, $= dt$. Avremo per la similitudine dei triangoli PDK, DEO, $PD = L : DK = P :: DE = x : EO = \frac{Px}{L}$. Egli è noto che $EO . dt = \frac{Px\,dt}{L} = M\,du$, e moltiplicando il tutto per Lu, $Px\,u\,dt = ML\,u\,du$: ma $u\,dt = -dx$; dunque $-Px\,dx = ML\,u\,du$, e sommando, $a^2 - x^2 = \frac{ML}{P} . u^2$, e conseguentemente $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{\frac{ML}{P}} . u$. Pongo in vece di u il suo valore $-\frac{dx}{dt}$, onde ne risulti $dt = \sqrt{\frac{ML}{P}} . \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, e fatta l' integrazione, $t = \sqrt{\frac{ML}{P}}\, S \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Descritto frattanto col centro D, e col raggio HD il quadrante HQSD, e continuata OE fino in Q, avremo $S \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{HQ}{HD}$; e perciò $t = \sqrt{\frac{ML}{P}} . \frac{HQ}{HD}$, e quando il mobile è pervenuto al punto D, $t = \sqrt{\frac{ML}{P}} . \frac{HQS}{HD}$. Sia il quadrante HQS al raggio HD come $b : c$, e ne proverrà $t = \sqrt{\frac{ML}{P}} . \frac{b}{c}$, misura del tempo, che impiega il mobile a scorrere l' intero spazio $HD = a$.

Si faccia la riflessione, ch' essendo il mobile H, e la corda da AB forniti della ſteſſa maſſa, ſtimolati dalla ſteſſa ſcala di forze NHD, ed accorciandoſi la detta corda pel medeſimo ſpazio, per cui ſi move il corpo H, ſpenderà eſſa nell' accorciarſi per lo ſpazio $HD = AFB - AB = a$, o ſia nel fare una mezza vibrazione il tempo $t = \sqrt{\frac{ML}{P}} \cdot \frac{b}{c}$, che conſuma il corpo nel viaggiare per lo ſpazio HD, e quindi a compiere una intera vibrazione ci vorrà il tempo $t = \frac{2b}{c} \sqrt{\frac{ML}{P}}$.

XXIX. Per paragonare il moto della noſtra corda con quello dei pendoli a cicloide, ſia b la lunghezza d' un pendolo, che fa una vibrazione per ſecondo, il tempo della quale ſi eſpone per $\frac{2b}{c} \sqrt{b}$. Facciaſi adunque $t : \frac{2b}{c} \sqrt{\frac{ML}{P}} :: 1 : \frac{2b}{c} \sqrt{b}$, e ſcopriremo $t = \sqrt{\frac{LM}{Pb}}$, formola del tempo eſpreſſo in ſecondi d' una vibrazione della corda AB, che non ſi accorda con quella, ch' è ſtata da me determinata nel numero XV.

XXX. La diverſità delle mentovate due formole, ed il nome celebre del Signor Ermanno mi hanno obbligato ad eſaminare poſatamente la ſua ſoluzione, la quale certamente è per più titoli difettoſa.

E primieramente prend' egli sbaglio nel mettere a computo l' azione della elaſticità della corda AFB, la quale non viene rappreſentata dal ſolo triangolo $HDN = \frac{Pa^2}{2L}$, come vuole il Sig. Ermanno, ma bensì dal detto triangolo più il rettangolo KD. $DH = Pa$, cioè a dire dalla quantità $Pa + \frac{Pa^2}{2L}$. la quale ſupponendoſi a minima ſi adegua a Pa. In fatti quando la corda dalla poſitura AFB paſſa alla linea retta, ſegue l' accorciamento $AFB - AB = a$, e la ſua elaſticità adequatamente coſtante, ed uguale a P ſi applica allo ſpazio $AFB - AB = a$, ed eſercita l' azione Pa. Nè quì c' è alcuna reazione, che ſi debba ſottrarre, ſupponendoſi la noſtra corda, da, ch' è tesa dalla forza P raccomandata a due chiodi immobili A, B. Se ci fosse una corda verticale, la cui lunghezza AFB, dalla quale pendesse il peso $P+\frac{Pa}{L}$, che colla sua elasticità formasse equilibrio, levato il peso $\frac{Pa}{L}$, ed avendo la corda tirato in alto il grave P per lo spazio $=a$, la forza elastica avrebbe esercitata l' azione $Pa+\frac{Pa^2}{2L}$, da cui dovendosi sottrarre la reazione Pa del peso, resterebbe l' azione $\frac{Pa^2}{2L}$. Ma, come dissi, nel nostro caso della corda a due chiodi attaccata non si dà reazione veruna, supponendosi i chiodi immobili; laonde va introdotta nel calcolo l' azione Pa, e non la $\frac{Pa^2}{2L}$. Nè punto conchiude la ragione addotta dal Sig. Ermanno, che intanto si dee tener conto della sola differenza $\frac{Pa}{L}$ fra le elasticità della corda $P+\frac{Pa}{L}$, P nei siti AFB, ACB, inquanto giunta la corda in ACB, la sua elasticità P non può agire; imperciocchè questo non impedisce, che mentre la corda si accorcia per lo spazio AFB $-$ AB $=a$, l' elasticità P non eserciti l' azione Pa, a cui non si oppongono i chiodi, i quali solamente frastornano un' azione ulteriore.

XXXI. In secondo luogo suppone non rettamente il nostro insigne Autore parallele le due linee PM, DN. Ho dimostrato nello Schediasma I. che nell' allungamento d' una corda c' entra l' elemento della rigidità naturale, la quale consiste in quella ripugnanza, che ha la corda a lasciarsi distendere, anche prima che le venga applicata veruna forza tendente. Questa rigidità naturale corrispondente alla lunghezza PD $=L$, ed alla forza stirante DK $=P$, si chiami r, e posta la forza minima HN $=p$, mi è riuscito di scoprire l' allungamento infinitesimo DH $=a=\frac{Lp}{r+P}$, il quale se le linee PM, DN fosſero parallele, dovrebbe uguagliarſi alla grandezza $\frac{Lp}{P}$.

Quindi il corpo $H = M$ conſiderato dal Signor Ermanno, che foſſe ſpinto per lo ſpazio H D dalla ſcala di forze N H D, non ſi moverebbe nel tempo da lui determinato, ma il vero tempo eſpreſſo in ſecondi d' una ſua vibrazione ſarebbe $= \frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{r+P.b}}$, formola totalmente diſcorde da quella, che conviene alle vibrazioni traſverſali delle corde ſonore, i tempi delle quali (e ne vedremo il perchè al numero XXXXIII.) non vengono punto alterati dalle rigidità naturali.

Ma preſcindendo anche da ciò, il corpo H, la cui maſſa M uguale a quella della corda, non può mai eſſere ad eſſa iſocrono; perchè tutte le particole di quello ſi muovono per lo ſpazio $HD = a$; il che non ſi adempie degli elementi di queſta. L' elemento della ſemicorda BF vicino al punto F con moto di accorciamento viaggia per lo ſpazio $\frac{1}{2} a$, e gli altri elementi, eſempigrazia DE, ſcorrono ſpazj ſempre minori, quanto più ſi accoſtano al punto B. Lo ſteſſo dicaſi dell' altra ſemicorda A F.

XXXII. Si ponga mente in terzo luogo, che il vero moto della corda A F B ſi è il traſverſale per gli ſpazj F C, D H, &c., eſſendo, come oſſerveremo nel ſeguente numero XXXIII. il moto di accorciamento riſpettivamente infiniteſimo, e traſcurabile. Perciò due conſeguenze vogliono dedurſi, cioè che agendo l' elaſticità della corda per lo ſpazio $AFB - AB = a$, e movendoſi la ſua maſſa per iſpazj onninamente diverſi F C, D H, &c., non poteva il Signor Ermanno ſenza paralogiſmo valerſi della formola Carteſiana $fdt = Mdu$, che non ſi verifica ſalvo in que' caſi, ne' quali la forza agiſce, ed il corpo ſi muove per iſpazj eguali. In oltre dipendendo gli ſpazj F C, D H, &c., per cui ſi fa il vero moto, dalla curva A F B, alla quale ſi adatta la corda oſcillando, egli è impoſſibile determinare il tempo d' una vibrazione indipendentemente dalla curva mentovata.

XXXIII. Ora paſſo ad eſaminare la mia ſoluzione, e dimoſtro, che tacitamente ho in eſſa computata la vera azione Pa;

di-

dimodochè quando la corda è giunta alla linea retta ACB (*Fig.* 15.) ha fatto acquisto di un aggregato di forze vive uguale alla detta azione. La supposizione, che dy sia minima rispettivamente a dx, determina l' elemento $DE = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx + \frac{dy^2}{2dx}$: ma per l' equazione della curva AFB, $dx = \frac{cLdy}{2nb\sqrt{c^2 - y^2}}$; dunque $ds = dx + \frac{nbdy\sqrt{c^2 - y^2}}{cL}$, ed integrando $s = x + \frac{nb}{cL} S\sqrt{c^2 - y^2}.dy$. Tralascio la costante, perchè in questo caso non ci va aggiunta. Riflettasi essere $S\sqrt{c^2 - y^2}.dy$ eguale all' aia circolare CgQf, e quindi scopriraffi $s = x + \frac{nb}{cL}$. CgQf: ma quando $BH = x = BA = L$, l' aia CgQf è divenuta uguale al semicircolo $fQF2ff = bc$ moltiplicato per n (*Fig.* 15. 16. 17.); dunque in tal circostanza $s = AFB = AB + \frac{n^2b^2}{L}$, e l' azione $Pa = \frac{Pn^2b^2}{L}$.

E qui noti meco chi legge, che supponendosi minimi del primo ordine il raggio $FC = c$, il quadrante $FQf = b$, e le ordinate $DH = y$; la grandezza $AFB - AB = a = \frac{n^2b^2}{L}$ appartiene al secondo ordine degl' infinitesimi, e perciò il moto di accorciamento della porzione di corda BF per lo spazio $\frac{a}{2n}$ è trascurabile rispettivamente a quello per le ordinate FC, DH, &c., conforme al numero XXXII. avea promesso di far vedere.

XXXIV. Al punto F rimanga da scorrere lo spazio $gC = kc$, ed al punto D lo spazio corrispondente ky, onde, come si raccoglie dal numero XIV. la velocità del punto F sia

$= 2nb\sqrt{\frac{P}{LM}\cdot\overline{1-k^2}}$, e la corrispondente del punto D$=\frac{2nby}{c}\sqrt{\frac{P}{LM}\cdot\overline{1-k^2}}$. Il semiquadrato di quest' ultima velocità si scoprirà $=\frac{2n^2b^2y^2P.\overline{1-k^2}}{c^2LM}$, e la forza viva dell' elemento DE, la cui massa $\frac{Mdx}{L}$, $=\frac{2n^2b^2y^2Pdx.\overline{1-k^2}}{c^2L^2}$.

Pongo in cambio di dx il suo valore $\frac{kcL}{2nkb}\cdot\frac{kdy}{\sqrt{k^2c^2-k^2y^2}}=\frac{cL}{2nb}\cdot\frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, e trovo la detta forza viva $=\overline{1-k^2}\cdot\frac{nbP}{cL}\cdot\frac{y^2dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, e conseguentemente quella della porzione BD della nostra corda $=\overline{1-k^2}\cdot\frac{nbP}{cL}\cdot S\frac{y^2dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$.

Avverto essere g Q$=\sqrt{c^2-y^2}$, e la sua differenza negativa QR$=\frac{ydy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, e perciò tirate le linee Qq, Yy parallele ad FC, $y\cdot\frac{ydy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ pareggia l' aia elementare qQYy. Avremo dunque $\overline{1-k^2}\cdot\frac{nbP}{cL}\cdot\frac{y^2dy}{\sqrt{c^2-y^2}}=\overline{1-k^2}\cdot\frac{nbP}{cL}\cdot$qQYy, e per conseguenza la forza viva della porzione di corda

BD

$BD = \overline{1-k^2} \cdot \frac{nbP}{cL} S \frac{y^2 dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \overline{1-k^2} \cdot \frac{nbP}{cL} \cdot Qfq$. Fatta l' offervazione che quando $BH = BA = L$, l' aja $Qfq = n. 2fFQf2f = nbc$, ci accorgeremo effere la forza viva della intera corda, allora che il punto F è pervenuto in g $= \overline{1-k^2} \cdot \frac{n^2 b^2 P}{L}$. L' allungamento della corda nella pofitura AFB è $\frac{n^2 b^2}{L}$, e nella $AgB = \frac{n^2 k^2 b^2}{L}$, e quindi paffando da un fito all' altro fi è accorciata per la quantità $\overline{1-k^2} \cdot \frac{n^2 b^2}{L}$, e l' elafticità della corda ha efercitata l' azione $P. \overline{1-k^2} \cdot \frac{n^2 b^2}{L}$, a cui fi eguaglia la forza viva della corda nel fito AgB. Giunta pofcia la corda alla linea retta ACB, abbiamo $k = o$, e la forza viva $= \frac{Pn^2 b^2}{L}$ di effa corda pareggia l' azione $Pa = \frac{Pn^2 b^2}{L}$ efercitata dalla energia elaftica P per lo fpazio $AFB - AB = a = \frac{n^2 b^2}{L}$.

XXXV. Le cofe dette mettono in chiaro lume l' aggiuftatezza della mia foluzione, e quanto rettamente abbia determinata la curva AFB, pofta la quale (oltrechè l' aggregato delle forze vive acquiftate dagli elementi della corda è fempre uguale all' azione della elafticità d' effa corda) derivano dalla tenfione adequatamente coftante, ed uguale a P della corda medefima tali forze acceleratrici, che fono proporzionali agli fpazj da percorrerfi FC, DH, &c. condizione indifpenfabilmente neceffaria, acciocchè tutti i punti della corda giungano alla linea retta ACB nello fteffo momento.

XXXVI. Aggiungo una rifleffione, che fervirà a far vie più toccare con mano la verità della mia foluzione. Le formole nei numeri XXXIII. e XXXIV. ritrovate m' infegnano effere

BD

$BD - BH = \frac{nb}{cL} . CgQf = \frac{nb}{cL} . Qfq + \frac{nb}{cL} . CgQq$, e la forza viva del pezzo di corda BD, quando è giunto alla linea retta AB, $= P . \frac{nb}{cL} . Qfq$. Dovendosi a questa forza viva eguagliare l' azione, che l' ha generata, cioè a dire il prodotto della elasticità P nell' accorciamento della corda BD, ne risulta il detto accorciamento $= \frac{nb}{cL} . Qfq$. Conciossiachè la curva BD superi in lunghezza l' assissa BH più di quello essa corda si accorci per la quantità $\frac{nb}{cL} . CgQq$; egli è segno, che il punto D non viaggia per l' ordinata DH, ma bensì per la curva Dh, la quale è una parabola Apolloniana, che taglia la lineetta $hH = \frac{nb}{cL} . CgQq$, onde s' abbia $BD - BH - Hh = \frac{nb}{cL} . Qfq$ accorciamento della corda BD. Poichè $Cg = y$, e $gQ = \sqrt{c^2 - y^2}$, avremo $CgQq = y\sqrt{c^2 - y^2}$, ed $hH = \frac{nb}{cL} . CgQq = \frac{nby}{cL} \sqrt{c^2 - y^2}$. Dividendo il quadrato y^2 dell' ordinata $HD = y$ per l' assissa $Hh = \frac{nby}{cL} \sqrt{c^2 - y^2}$, scopriremo il parametro della parabola $= \frac{cLy}{nb\sqrt{c^2 - y^2}}$, che si manterrà costante in qualunque positura AfB (*Fig.* 18.) si trovi la nostra corda; dimodochè Dh (*Fig.* 15.) sarà sempre la stessa parabola. In fatti sia (*Fig.* 18.) $Cf = kc$, $Hd = ky$, e non si altererà il valore di esso parametro $= \frac{kcLky}{nkb\sqrt{k^2c^2 - k^2y^2}} = \frac{cLy}{nb\sqrt{c^2 - y^2}}$.

La linea Hh (*Fig.* 15.) è nulla in due circostanze o quando $y = o$, o quando $y = c$. La sua massima grandezza rispettivamente ad y corriſponde ad $y = \frac{c}{\infty}$, nel qual caſo Hh $= \frac{nby}{L}$: ed anche in queſto incontro più ſvantaggioſo la lineetta Hh è minima in riguardo ad HD. La direzione in D della curva Dh è la ſteſſa con quella del raggio DI oſculante la curva AFDB nel punto D, il qual raggio taglia Hi doppia di Hh, e per conſeguenza infiniteſima riſpettivamente ad HD. Innoltrandoci dal punto D al punto h, gli elementi della curva Dh paſſano per tutti i gradi dalla direzione Di alla DH normale ad AB. Quindi eſſendo Dh $=$ DH adequatamente, e l' angolo iDH infiniteſimo, rettamente nella mia ſoluzione ho confuſe in una ſola le lunghezze, e le direzioni delle linee Dh, DH.

XXXVII. Rieſce agevole preſentemente il dare una nuova ſoluzione del problema del numero II. ponendo in opera il metodo delle azioni. Quando la porzione di corda BD è pervenuta nel ſito Bh, l' elaſticità adequatamente coſtante, ed uguale a P d' eſſa corda ha replicati i ſuoi impulſi per tutti gli elementi dello ſpazio BD $-$ BH $-$ Hh, che s' eguaglia all' accorciamenro della corda predetta. La ſimilitudine dei triangoli DGE, DHi mi ſomminiſtra l' analogia

$$DG : GE :: DH : Hi$$

$$dx : dy :: y : \frac{ydy}{dx}$$, che determina Hi $= \frac{ydy}{dx}$, e conſeguentemente la ſua metà $\frac{1}{2}$ Hi, come pocoſtante proverò $=$ Hh $= \frac{ydy}{2dx}$. Avremo dunque BD $-$ BH $-$ Hh $= s - x - \frac{ydy}{2dx}$, e l' azione della corda BD giunta in Bh eguale a $P.\overline{s - x - \frac{ydy}{2dx}}$. Preſe le differenze, aſſumendo dx come coſtante, mi ſi preſenta l' eſpreſſione $P.\overline{ds - dx - \frac{yddy}{2dx} - \frac{dy^2}{2dx}}$, e ponendo in vece di ds il ſuo valore $dx + \frac{dy^2}{2dx}$,

P.

$$P. \, dx + \frac{dy^2}{2dx} - dx - \frac{yddy}{2dx} - \frac{dy^2}{2dx} = - \frac{Pyddy}{2dx},$$ infinitesimo incremento di azione, che s' impiega ad imprimere forza viva nell' elemento HK dalla corda BH, la massa del quale $= \frac{Mdx}{L}$.

XXXVIII. Mettendo $Hh = \frac{1}{2} Hi$, ho tacitamente supposto, che la curva Dh sia una parabola Apolloniana, la qual verità ha bisogno d' essere dimostrata. Dalle cose spiegate al num. X. si raccoglie, che se in qualunque positura AfB (*Fig.* 18.) della corda AFB le forze acceleratrici hanno da stare come le ordinate fC, dH; chiamate $FC = c$, $DH = y$, deggiono essere $fC = kc$, $dH = ky$. Avremo dunque $y : ky :: dy : kdy$, e quindi la differenza kdy di qualsivoglia ordinata dH sarà come l' ordinata medesima. Ora giacchè a $DH = y$ corrisponde la suttangente (*Fig.* 15.) $Hi = \frac{ydy}{dx}$ della curva Dh, alla ordinata dH (*Fig.* 18.) si riferirà la suttangente $= \frac{kykdy}{dx}$, e sostituendo in vece di dy, kdy i termini proporzionali y, ky, le dette suttangenti si riguarderanno nella ragione di $y^2 : k^2 y^2$, o sia dei quadrati delle ordinate DH, dH: ma questa è proprietà della parabola Apolloniana; dunque tale è la curva Dh (*Fig.* 15.), e perciò $Hh = \frac{1}{2} Hi$.

XXXIX. Conciossiachè i punti F, D hanno da passare gli spazj FC, Dh, ovvero DH nello stesso tempo, e colla legge di accelerazione d' un pendolo a cicloide, le velocità nei punti C, h dovranno corrispondersi nella ragione di FC : DH; e quindi la velocità nel punto h si esporrà per Ay (A è una costante da determinarsi a suo tempo) ed il semiquadrato della stessa per $\frac{A^2 y^2}{2}$, onde ne risulti la forza viva dell' elemento

HK

$HK = \frac{Mdx}{L} \cdot \frac{A^2y^2}{2}$: ma questa forza viva dee pareggiare l'azione, che la produce; dunque siamo pervenuti alla equazione $-\frac{Pyddy}{2dx} = \frac{MA^2y^2dx}{2L}$, che si riduce alla seguente $-\frac{LPddy}{y} = MA^2dx^2$.

XL. Acciocchè svaniscano le seconde differenze, pongo $dy = Qdx$, ed ho nuovamente differenziando $ddy = dQdx$. Adempiuta la sostituzione del suo valore in cambio di ddy, trovo $-\frac{LPdQdx}{y} = MA^2dx^2$, o sia $-\frac{LPdQ}{y} = MA^2dx$, e poichè $dx = \frac{dy}{Q}$, $-\frac{LPdQ}{y} = \frac{MA^2dy}{Q}$, e levando le divisioni $-LPQdQ = MA^2ydy$, e finalmente integrando, $LP.\overline{G^2 - Q^2} = MA^2y^2$.

XLI. Si determina la costante G, riflettendo, che quandó $HD = y$ giunge al massimo valore $CF = c$, diviene $\frac{dy}{dx} = Q = 0$. avremo dunque $LPG^2 = MA^2c^2$; e per conseguenza $G^2 = \frac{MA^2c^2}{LP}$, e fatta la surrogazione di questo valore, $LP.\overline{\frac{MA^2c^2}{LP} - Q^2} = MA^2y^2$, o pure $MA^2.\overline{c^2 - y^2} = LPQ^2 = \frac{LPdy^2}{dx^2}$, ed effettuate le necessarie operazioni, $dx = \frac{\sqrt{LP}}{\sqrt{MA^2c^2}} \cdot \frac{cdy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$. Dalla integrazione ne nasce $x = \frac{\sqrt{LP}}{\sqrt{MA^2c^2}} . S\frac{cdy}{\sqrt{c^2-y^2}}$: non aggiungo costante; perchè sendo $S\frac{c\,dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ uguale all' arco circolare fQ, ad $x=o$ corrisponde $fQ=o$.

XLII. Resta da stabilire il valore della costante A. Ho già notato essere nel punto B, $y=o$, in cui è parimente $fQ=o$. La detta ordinata frattanto deve altresì essere nulla nel punto A, il che interverrà, quando sia l'arco fQ o eguale ad un semicircolo fQF2f $=2b$ (*Fig.* 15.), o a due semicircoli (*Fig.* 16.), o a tre (*Fig.* 17.), &c., o generalmente ad $n.2b$, essendo n uguale a qualsivoglia numero intero positivo. Ripigliata per mano la formola $x=\frac{\sqrt{LP}}{\sqrt{MA^2c^2}}.S\frac{c\,dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, si faccia in essa $x=L$, $S\frac{c\,dy}{\sqrt{c^2-y^2}}=2nb$, e ne risulterà $L=\frac{\sqrt{LP}}{\sqrt{MA^2c^2}}$. $2nb$, e fatte le necessarie operazioni, $A^2=\frac{4n^2b^2P}{c^2LM}$. Pongasi in luogo di A^2 questo valore nella nostra formola, e si scoprirà finalmente $x=\frac{cL}{2nb}S\frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$, conforme abbiamo trovato al numero IV.

XLIII. Ho affermato al numero XXXI. che le rigidità naturali r delle corde sonore non alterano punto i tempi delle minime vibrazioni trasversali. Si applichi al punto medio C (*Fig.* 24.) della corda A B con direzione ad essa normale la forza f, che cagioni la saetta CF $=s$. Nello Schediasma III. mi è riuscito di dimostrare $f=\frac{2Ps}{\frac{1}{2}L}+\frac{rs^3}{\frac{1}{8}L^3+\frac{1}{2}Ls^2}=\frac{2Ps}{\frac{1}{2}L}+\frac{rs^3}{\frac{1}{8}L^3}$ posta s minima. Se la nostra corda fosse priva di naturale

rigi-

rigidità, per ottenere la saetta CF $= s$ ci vorrebbe la forza $\frac{2Ps}{\frac{1}{2}L}$, ed essendo essa corda fornita della rigidità r, si richiede la forza $\frac{2Ps}{\frac{1}{2}L} + \frac{rs^3}{\frac{1}{8}L^3}$, le quali forze sono adequatamente uguali, consistendo la loro differenza in una quantità infinitesima del terzo grado.

Si ponga FB $= \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}l$, e $P + p$ sia la forza, che stira direttamente la semicorda FB. Per le cose dimostrate nello Schediasma poco fa citato avremo $\frac{\overline{2P+2p}.s}{\frac{1}{2}L+\frac{1}{2}l} = f$, $\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}l = \sqrt{\frac{1}{4}L^2 + s^2}$. Sostituisco nella prima formola in vece di $\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}l$ il suo valore somministratomi dalla seconda, e trovo $\frac{\overline{2P+2p}.s}{\sqrt{\frac{1}{4}L^2+s^2}} = f$. Da questa espressione, e dalla formola soprapposta $f = \frac{2Ps}{\frac{1}{2}L} + \frac{rs^3}{\frac{1}{2}L.\overline{\frac{1}{4}L^2+s^2}}$ nasce l' equazione

$$\frac{\overline{2P+2p}.s}{\sqrt{\frac{1}{4}L^2+s^2}} = \frac{2Ps}{\frac{1}{2}L} + \frac{rs^3}{\frac{1}{2}L.\overline{\frac{1}{4}L^2+s^2}},$$ da cui si raccoglie

$$P + p = \frac{P}{\frac{1}{2}L}\sqrt{\frac{1}{4}L^2+s^2} + \frac{rs^2}{L\sqrt{\frac{1}{4}L^2+s^2}}:$$

 ma

ma $\sqrt{\frac{1}{4}L^2+s^2}=\frac{1}{2}L+\frac{s^2}{L}$; dunque $P+p=P+\frac{Ps^2}{\frac{1}{2}L^2}+\frac{rs^2}{\frac{1}{2}L^2+s^2}$, o sia $p=\frac{\overline{2P+2r}.s^2}{L^2}$, aumento di tenſione, che la forza f cagiona nella corda AFB.

Se la corda è priva di naturale rigidità, la forza $f=\frac{2Ps}{\frac{1}{2}L}$ produce l'accreſcimento di tenſione $p=\frac{2Ps^2}{L^2}$: che ſe la corda, come in fatti interviene nelle corde fiſiche, è fornita di rigidità, la forza $f=\frac{2Ps}{\frac{1}{2}L}+\frac{rs^3}{\frac{1}{8}L^3}$ fa giungere il detto accreſcimento alla grandezza $\frac{\overline{2P+2r}.s^2}{L^2}$, che può corriſpondere a $\frac{2Ps^2}{L^2}$ in qualunque finita proporzione di maggiore inegualità, ſecondo il valore della rigidità r. Una ſperienza regiſtrata nel mentovato Schediaſma III. c' iſtruiſce, che la rigidità d' una corda di ottone teſa dalla forza P uguale ad once 140 aſcendeva ad once 24054, e perciò riſpettivamente ad eſſa corda $\frac{\overline{2P+2r}.s^2}{L^2}:\frac{2Ps^2}{L^2}::24194:140$, cioè proſſimamente come 173:1.

Ella è coſa notabile, che due forze adequatamente uguali cagionino tanta diverſità nell' aumento della tenſione: ma queſta circoſtanza appunto, che la differenza di aumento di tenſione, naſcente dal vario valore della rigidità naturale, ſia prodotta da forze traſverſali pari adequatamente, ci guida alla conſeguenza, che non naſcendo computabile mutazione nelle forze vive,

vive, e nelle velocità, i tempi delle minime oſcillazioni dalla rigidità della noſtra corda, la cui maſſa foſſe tutta raccolta nel punto F, non reſtino punto alterati. Ho ſuppoſto l' intera maſſa unita nel punto F, a cagione che una corda fiſica oſcillando non mantiene la figura triangolare A F B, ma ſi adatta alla curva A F D B (*Fig.* 15.) da me determinata, conforme ho fatto vedere ai numeri XI. e XII.

XLIV. In ſimil guiſa nella corda A F D B, in cui la ſaetta C F $= c$ ſia ſempre coſtante, ella è traſcurabile la diverſità della forza viva, e della velocità di qualſivoglia elemento D E, traente l' origine dal vario valore della rigidità. E vaglia il vero, giacchè in riguardo alla corda A F B (*Fig.* 24.) $\frac{1}{2}L+\frac{1}{2}l=\sqrt{\frac{1}{4}L^2+s^2}=\frac{1}{2}L+\frac{s^2}{L}$, ne ſegue eſsere $l=\frac{2s^2}{L}$, e ponendo $s=c$, $l=\frac{2c^2}{L}$. L' allungamento della corda A F D B (*Fig.* 15.) l' abbiamo trovato eguale ad $\frac{nb^2}{L}$. Facciaſi $\frac{2c^2}{L}:\frac{nb^2}{L}::\frac{\overline{2P+2r}\,.\,c^2}{L^2}:\frac{nb^2\,.\,\overline{P+r}}{L^2}$, ed il quarto termine eſprimerà l' accreſcimento di tenſione, che ſi richiede per produrre l' allungamento $\frac{nb^2}{L}$. Quindi la totale elaſticità della corda nella poſitura A F D B $=P+\frac{nb^2\,.\,\overline{P+r}}{L^2}$, la quale operando per lo ſpazio $\frac{nb^2}{L}$ eſercita l' azione $\frac{nb^2P}{L}+\frac{n^2b^4\,.\,\overline{P+r}}{2L^3}$, a cui ſi eguaglia la forza viva della corda medeſima: ma queſta è ſempre adequatamente uguale ad $\frac{nb^2P}{L}$, qualunque grandezza o nulla, o finita ſi aſſegni alla rigidità r, e da eſſa forza

viva

viva dipendono le velocità de' punti F, D, &c. della corda; dunque nelle velocità dei nominati punti non nafce computabile alterazione, e perciò la rigidità r nulla influifce ne' tempi delle minime vibrazioni.

XLV. Se taluno trovaffe che ridire fopra la mia foluzione, afferendo, ch'effa ferve non per le finite, ma foltanto per le infinitefime vibrazioni delle corde fonore; foggiungerei, che quando fi paffa dal matematico al fifico, i minimi fifici ftanno in luogo dei geometrici infinitefimi. La mia foluzione adunque fi adatta alle minime fifiche ofcillazioni, e di tal fatta fi debbono riputar tutte quelle accettate dalla mufica, che o più riftrette, o più dilatate confervano fempre lo fteffo tuono, conforme la mentovata foluzione richiede. Ed in fatti tanto è giufta la mia foluzione, quanto che da effa fi raccolgono tutti que' fenomeni, che nelle corde fifiche fi fperimentano, fra i quali di due foli molto importanti terrò difcorfo. M' infegna la fteffa, che una corda non può ofcillare falvo che intera, o divifa in parti eguali, nè rendere fe non fe i fuoni efpreffi dalla ferie 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., e le corde fifiche fi fottomettono a quefta legge, dandoci efempigrazia la tromba marina folamente i defcritti fuoni, efclufi gli altri tutti. In oltre dalla mia foluzione deducefi, che nei tempi delle vibrazioni delle corde non ha luogo la loro naturale rigidità, e dalla efperienza raccolgo, che due corde, una d' ottone, e l' altra d' acciajo, benchè diverfamente rigide, fi vibrano in tempi proporzionali alle quantità $\sqrt{\frac{LM}{P}}$, nelle quali la rigidità nè punto nè poco non c' entra. Quefta conformità della mia foluzione coi fenomeni mi rende ficuriffimo della fua aggiuftatezza.

XLVI. I fommi geometri li Signori d' Alembert, e Leonardo Eulero nelle Memorie della Regia Accademia di Berlino, ed il Signor Luigi de la Grange nel tomo primo intitolato *Mifcellanea Philofophico-Mathematica Societatis Privatæ Taurinenfis* pretendono, che oltre la figura dal Taylor determinata, poffa una corda, che fi vibra, prenderne infinite tutte fra loro diverfe. Al contrario il celebre Signor Daniello Bernoulli nelle citate Memorie dell' Accademia di Pruffia foftiene, che la foluzione del Sig. Taylor è fola capace di foddisfare a tutti i cafi poffibili del problema, di cui fi parla. Salvo fempre il dovuto to rispetto ai tre Matematici primieramente nominati, io aderisco alla sentenza del quarto. E per mettere in chiaro la ragione che mi convince, osservo, che si vagliono essi di formole, le quali non possono avverarsi se non in que' casi, in cui la forza, che spinge direttamente una particola della corda, non abbia parte nel moto dell' altre particole. Esercitando azione per lo spazio minimo $-dy$ la forza sollecitante f accresca la velocità u nella massa m, e si avrà la formola sempre vera $-fdy = mudu$. Che se la massa m cammina lo spazio $= -dy$ nello stesso tempicello dt impiegato dalla forza ad agire per lo spazio suddetto, avremo in tal circostanza $u = -\frac{dy}{dt}$, e $du = -\frac{ddy}{dt}$, preso dt come costante, ed effettuate le sostituzioni giungeremo alla equazione $\frac{fdt^2}{m} = -ddy$ usata dai lodati Scrittori. Si muti ora supposizione, e si finga che la forza f applicandosi allo spazio $-dy$ acceleri le velocità u, $\overset{\mathrm{I}}{u}$ delle due masse uguali m, $\overset{\mathrm{I}}{m}$, la prima delle quali nel tempo dt dell' azione passi lo spazio $-dy$, ma non così la seconda. Nella formola $-fdy = mudu + \overset{\mathrm{I}}{m}\,\overset{\mathrm{I}}{u}\,d\overset{\mathrm{I}}{u}$ si sostituiscano in cambio di u, e di du i valori uguali $-\frac{dy}{dt}$, $-\frac{ddy}{dt}$, e ne risulterà l' equazione $-fdy = \frac{mdyddy}{dt^2} + \overset{\mathrm{I}}{m}\,\overset{\mathrm{I}}{u}\,d\overset{\mathrm{I}}{u}$, la quale non si accorda colla $\frac{fdt^2}{m} = -ddy$, di cui perciò in quest' incontri è vietato il far uso.

XLVII. Passiamo adesso dal generale al particolare delle corde vibranti. Se la forza (*Fig.* 15.), che spinge l' elemento ED dalla corda AFB per la direzione PI, accelera soltanto il detto elemento, è concesso l' adoprare la formola $\frac{fdt^2}{m} = -ddy$: ma se la fibra ED comunica il suo moto alle fibre collocate a destra, e a sinistra; egli è d' uopo abbandonare la

det-

detta formola, ficcome quella, che non contien verità. Pofto che la corda fi adatti ad una delle figure da me determinate, i fuoi punti fi movono con velocità proporzionali alle diftanze dall' affe A B, e conforme ho provato al numero XII. il moto di un punto non influifce in quello dell' altro. Ma quando conformata la corda a figure diverfe, non fi offerva la detta legge di velocità; fegue la comunicazione di moto fra gli elementi della corda. La formola pertanto $\frac{f\,dt^2}{m} = -ddy$ non può fomministrare altre vere figure, falvo che quelle da me ftabilite. E quindi non è maraviglia, fe ufandola il Signor Eulero fenza le debite reftrizioni, fi fia abbattuto in tali confeguenze, che non giudica neceffario l' aver riguardo alla legge di continuità in una funzione, che dipende dalla curva iniziale della corda. Il Signor d' Alembert è di contraria opinione, e con lui va d' accordo il Signor de la Grange.

XLVIII. Se la corda vibrandofi un folo fuono produce, dee prendere una delle mentovate figure: ma fe, come realmente fuccede, col fuono principale 1 della corda intera fono mifti i fuoni 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. delle fue parti aliquote; fi compongono infieme i moti proprj delle figure 15, 16, 17, &c., ed innumerabili nuove figure ne nafcono. Ed ecco col mezzo della compofizione dei moti fciolto agevolmente un problema, che per altra ftrada riufcirebbe difficiliffimo. Secondochè la corda s' incita al tremito piuttofto in un modo, che nell' altro, fceglierà effa la più acconcia figura, a cui può accomodarfi; e perciò il fuono della corda non è mai folitario. Ho narrato al numero XX. avermi l' efperienza iftruito, che ftimolata una corda vigorofamente all' ofcillazione in poca diftanza da uno dei due fcannelli, fi fentono, ponendovi la dovuta attenzione, i fuoni 3, 5, che al principale 1 fi riferifcono in quinta fopra l' ottava, ed in terza maggiore fopra la doppia ottava. L' ottava femplice 2, e la duplicata 4 fi poffono malagevolmente difcernere; perchè ficcome equifonanze, s' incorporano col fuono della corda totale. Nel citato luogo ho infegnato un artificio per udire belli, e diftinti in una corda i fuoni delle fue parti aliquote, ch' erano dianzi mifchiati col fuono fondamentale.

SCHEDIASMA V.

Delle vibrazioni delle corde aeree.

I. DEtto quanto basta intorno alle corde solide, mi rivolgo alle fluide contenute nelle canne degli stromenti da fiato, le quali corde sono que' corpi, che concepiscono suono nei nominati stromenti. E vaglia il vero, non può certamente il suono attribuirsi ai corpi di tali stromenti; perchè se questi suonassero, prendendoli in mano la loro palpitazione sonora si ammortirebbe, come in un campanello, o in un cilindro di creta, o di acciajo succede. Ora la voce di un flauto, d' una canna d' organo presi in mano non resta punto pregiudicata, e conseguentemente in essi il legno, o lo stagno non suona. Oltre a ciò se i corpi di sì fatti stromenti suonassero, lavorate due canne d' organo egualmente lunghe, ma di diametro, grossezza, e materia diverse, dovrebbero produrre suoni differentissimi in riguardo al grave, e all' acuto, il che di fatto interviene nei cilindri vuoti, varj di materia, di grossezza, e di diametro, ma pari in lunghezza. Le nominate canne frattanto si trovano unisone; dunque non suona la materia solida, onde sono formate, ma bensì l' aria in esse canne rinchiusa.

II. La chiarezza del metodo richiede, che dia principio dalla considerazione delle canne cilindriche d' organo, per fare poi transito alle convergenti, divergenti, e d' altre svariate figure. L' aria in una canna cilindrica fa le sue vibrazioni nello stesso modo come una corda tesa. Questa viene resa elastica dalla forza, o peso, che se le suppone applicato, e quella dal soprapposto peso dell' atmosfera. Espressa dunque per m la massa della corda d' aria, che riempie la canna, per l la lunghezza d' essa corda, per p il peso della colonna d' aria soprastante, per t il tempo misurato coi secondi d' una vibrazione della corda stessa, e dinotando $b:c$ la proporzione del quadrante al raggio, b la lunghezza del pendolo a secondi, e finalmente n un numero della serie 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. secondochè la nostra corda oscilla o intera, o divisa in parti uguali, avremo come nelle corde solide $t = \frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{lm}{bp}}$ (1).

Il peso dell' atmosfera soprastante alla canna equivalga ad un volume di mercurio di figura cilindrica, la cui altezza a, e la base uguale a quella della canna; e conciossiachè il volume della corda d' aria si eguaglia alla lunghezza l moltiplicata nella base della corda stessa, o sia della canna; si raccolga, che i due volumi di mercurio, e d' aria stanno fra loro come $a:l$. Si suppongano come $G:g$ le gravità specifiche, o densità del mercurio, e dell' aria; e giacchè le masse si corrispondono nella ragione composta dei volumi, e delle gravità specifiche, si avrà $p:m::aG:lg$. Nella soprapposta formola si sostituiscano in cambio di p, m le grandezze proporzionali aG, lg, e ci si presenterà $t = \frac{cl\sqrt{g}}{2nb\sqrt{baG}}$ (2).

III. La base della canna non ha luogo nella determinazione del suo tuono, o sia nella durata d' una sua vibrazione, restando essa base esclusa dalla formola $t = \frac{cl\sqrt{g}}{2nb\sqrt{baG}}$, e colla teorica trovandosi uniformi gli esperimenti. Quantunque la base della canna indeffinitamente crescesse, non pertanto il suo tuono si muterebbe. Ora l' allargare indeffinitamente le pareti della canna, egli è lo stesso che il totalmente levarle, e far transito dall' aria chiusa all' aria libera; dunque anche nell' aria libera un' onda pari in lunghezza alla corda aerea nella canna contenuta sarà unisona ad essa canna.

Nella Dissertazione I. dello Schediasma VIII. dimostrerò, che il suono scorre lo spazio l nel tempo $t = \frac{cl\sqrt{g}}{2b\sqrt{baG}}$; formola, che si accorda colla testè ritrovata, purchè sia $n = 1$, e la corda d' aria intera si vibri. Quindi nel tempo stesso, in cui la canna fa una oscillazione, il suono viaggia per uno spazio lungo quanto la corda d' aria contenuta dentro la canna. Afferma il Cavalier Nevvton (a) che l' onde generate nell' aria da una canna d' organo sono il doppio lunghe della stessa can-

(a) *Philos. natur. Princ. Math. Amstalodami* 1714. *pag.* 344.

canna. A questo equivoco ha dato motivo il celebre M. Sauveur, il quale nelle canne d' organo conta per una vibrazione un' andata, ed un ritorno, cioè a dire due vibrazioni conforme il linguaggio comune. Se dunque in tempo di due vibrazioni della canna, che contiene una corda, la cui lunghezza l, il suono, che si move equabilmente, scorre lo spazio $2l$; egli è manifesto che nel tempo d' una sola vibrazione camminerà lo spazio l, e si genererà un onda eguale nella lunghezza alla corda d' aria rinchiusa nella canna.

IV. C' insegna la nostra formola $t = \frac{c\,l\sqrt{g}}{2\,n\,b\sqrt{b\,a\,G}}$, che nello stesso parallelo, o anche in praralleli diversi, ma non sì fattamente rimoti, che si alteri sensibilmente la lunghezza b del pendolo a secondi, colla condizione altresì, che l' aria sia egualmente calda, onde le sue densità g accettino la proporzione dei pesi comprimenti $a\,G$, e si mantenga costante la frazione $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a\,G}}$, i tempi delle oscillazioni delle corde aeree in più canne rinchiuse, le quali corde si vibrino intere, o divise nello stesso numero n di parti eguali, si riferiranno nella ragione delle lunghezze. Questo canone è noto per pratica ai facitori d' organi, i quali allora quando vogliono, che per esempio due canne facciano l' ottava, cioè che i tempi delle vibrazioni loro stiano come $2:1$, stabiliscono la prima canna il doppio lunga della seconda. Intanto si cavi la conseguenza necessaria alle cose, che son per dire, che divise due corde aeree in minimi strati ugualmente alti, il tuono d' esse corde non dalle basi degli strati, ma dal numero loro proporzionale alla lunghezza della corda unicamente dipende.

V. Che se in diversi siti, o pure nello stesso, ma in differente stagione, il calore dell' aria sia vario, rimanendo per altro costante la lunghezza b del pendolo a secondi, si scopriranno i tempi delle vibrazioni delle canne come $\frac{l\sqrt{g}}{\sqrt{a\,G}}$, e quelli della canna medesima come $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a\,G}}$. Osserveremo nella Dissertazione I. dello Schediasma VIII. che nelle opposte stagioni d' inverno, e di estate le velocità del suono si corrispondono come $26:27$, e che per conseguenza scorre lo stesso spazio in tempi, che stanno in ragione di $27:26$: ma nel tempo, in cui dal suono si cammina lo spazio l, una corda d' aria egualmente lunga contenuta dentro una canna compie una vibrazione; dunque la medesima corda nelle stagioni iemale, ed estiva oscilla in tempi, che si riferiscono nella proporzione di $27:26$, ed è nell' inverno un terzo di tuono, o di seconda maggiore più grave che nella state. E poichè t come $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{aG}}$ rispettivamente alla stessa canna, sarà questa grandezza nelle contrarie mentovate stagioni come $27:26$, ed il suo quadrato $\frac{g}{aG}$, o sia la densità dell' aria divisa pel peso comprimente come $\overline{27}^2 : \overline{26}^2$, o a un di presso come $14:13$; e quando il peso comprimente non sia diverso, le densità dell' aria si riguarderanno in tale ragione.

VI. Il dottissimo Signor Leonardo Eulero guidato dalle sue teoriche asserisce (b), che in varie stagioni la diversità del suono di una canna d' organo può giungere ad un tuono intero. Conferma egli questo suo detto coll' esperienza dei musici, i quali usando nel tempo stesso stromenti da corde, e da fiato, trovano questi così fattamente mutabili (e la varietà massima ascende ad un tuono) che bisogna, ch' ora rallentino, ed ora stirino le corde di quelli, acciocchè cogli stromenti da fiato vadan d' accordo. Per accertarmi della verità della riferita sperienza, accordai all' unisono nella stagione d' inverno un gravicembalo, ed un flauto, e paragonatili insieme nel cuor della state, trovai per appunto il secondo notabilmente più acuto del primo per una seconda maggiore, o tuono all' in circa. Se il gravicembalo non fosse soggetto a variazione, egli è indubitato, che la diversità tutta d' un tuono dovrebbe attribuirsi allo stromento da fiato. Messi frattanto da parte gli stromenti variabilissimi guerniti di corde di minugia, un gravicembalo cangia di tuono al mutarsi delle stagioni: ed essendo, come poco stante vedremo, l' alterazione delle corde solide contraria a quella delle fluide, di maniera che calando quelle di tuono, crescono queste, o all' opposto,

(b) *Tentamen novæ Theoriæ Musicæ*, pag. 21.

ſto; ne ſegue che accordati all' uniſono un gravicembalo, ed uno ſtromento da fiato in tempo d' inverno, ſi trovi il primo in tempo d' eſtate più grave del ſecondo per un intero tuono. Ho già ſtabilito che paſſando dall' inverno alla ſtate i ſuoni delle corde d' aria creſcono per la terza parte di un tuono; dunque fa d'uopo, che i ſuoni delle corde di metallo calino per due terzi di tuono, onde ne riſulti nella più calda ſtagione, conforme ſi raccoglie dalla ſperienza, un tuono di ſvario fra uno ſtromento da fiato, ed un gravicembalo, che in tempo d' inverno erano tra loro uniſoni.

VII. Baſta riflettere, che due corde, una fluida, e l' altra ſolida, ſono reſe elaſtiche da forze contrarie, cioè quella da una forza premente, e queſta da una forza ſtirante, per chiaramente capire, che la rarefazione cagionata dal caldo debba in eſſe corde produrre contrarj effetti, e lo ſteſſo dicaſi della coſtipazione cagionata dal freddo. Allora che una corda ſolida ſi rarefà pel caldo, eſercita meno sforzo contro il perno ſtirante, e conſeguentemente cala di tuono, ſeguendo in eſſa il medeſimo effetto, come ſe non eſſendoſi rarefatta, aveſſi allentato il perno. All' oppoſto coſtipata dal freddo una corda ſolida, s' aumenta il ſuo sforzo contro del perno, e perciò creſce di tuono, ſuccedendo in eſſa lo ſteſſo effetto, come ſe non eſſendoſi coſtipata, aveſſi ingrandita la ſua tenſione.

Soſtituito al perno un peſo tendente, non ſi altera per motivo della tenſione il tuono della corda allo variarſi delle ſtagioni. Mentre la corda ſi rarefà, il peſo diſcende, e mentre ſi coſtipa, il peſo aſcende; e perciò le ſue fibre ſono ſempre ugualmente teſe. Immaginiamoci che rarefacendoſi la corda, il peſo corriſpondentemente ſi ſcemi, di maniera che non diſcenda, e ſi fermi immobile nel ſuo ſito; e che al contrario ſecondochè la corda ſi coſtipa, il peſo ſi accreſca, onde rimanendo ſtabile nel poſto ſolito, non aſcenda; e facilmente ſcopriremo, che da sì fatti peſi variabili vengono giuſtamente rappreſentati i mutui sforzi della corda, e del perno, minori l' eſtate, e maggiori l' inverno.

Intanto non diſſimulo una obbiezione, ed è che rarefacendoſi, o coſtipandoſi una corda ſolida, ſi rarefà parimente, o ſi coſtipa la tavola, in cui è teſa; e conſeguentemente non ſi altera la ſua tenſione. Sarebbe vera la concluſione, ſe la corda,

e la

e la tavola per la direzione delle ſue vene ſi rarefaceſſero, e coſtipaſſero dal pari; ma l' eſperienza dimoſtra che la prima è più atta alla rarefazione, ed alla coſtipazione della ſeconda. Ella è la differenza fra le rarefazioni, e le coſtipazioni della corda, e della tavola ſu cui è teſa, che opera i cangiamenti di tuono in eſſa corda, i quali ſi troverebbero molto maggiori, ſe la lunghezza della tavola non veniſſe o accreſciuta, o diminuita dall' azione delle ſtagioni.

VIII. Paſſiamo adeſſo alla conſiderazione delle corde aeree reſe elaſtiche da una forza premente. Quando l' aria viepiù ſi riſcalda, creſce la ſua elaſticità, ed acciocchè non ſi rarefaceſſe, ſarebbe d' uopo accreſcere a dovere il peſo dell' atmosfera. Quindi ſi diminuiſce la proporzione fra la denſità g dell' aria, ed il peſo comprimente aG, e per conſeguenza il valore della quantità $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{aG}}$ nella ſtagione d' eſtate è più picciolo che in quella d' inverno. E concioſſiachè i tempi delle vibrazioni della ſteſſa canna ſieno proporzionali a. $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{aG}}$, conforme ho avvertito al numero V., ne ſegue che in una oſcillazione d' eſtate c' impiegherà minor tempo che in una d' inverno, è perciò renderà un ſuono più acuto, e già ho dimoſtrato nel citato numero V., che i detti tempi nella più fredda, e nella più calda ſtagione ſi corriſpondono nella ragione di 27: 26.

IX. Raccoglieſi dalla formola $t = \frac{cl\sqrt{g}}{2nb\sqrt{aG}}$, che potendo ſoltanto competere ad n i valori, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ſecondochè la corda d' aria ſi vibra o intera, o diviſa in due, in tre, in quattro, &c. parti eguali, ha la ſteſſa ſolamente facoltà di oſcillare in tempi proporzionali ai termini della ſerie 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, &c. E poichè i ſuoni, o i numeri delle vibrazioni fatte in tempo pari ſtanno in ragione inverſa dei tempi, che in una vibrazione s' impiegano, produrrà eſſa corda nelle addotte circoſtanze i ſuoni 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. eſcluſi tutti gli altri di mezzo. In fatti dando il conveni-

en-

ente fiato ad una canna d' organo, s' udirà il ſuono 1, ed incitandolo poſcia a dovere ſi paſſerà con un ſalto di ottava al ſuono 2, ed indi con un ſalto di quinta al ſuono 3, &c. nè per quante prove ſi facciano, riuſcirà mai di ottenere alcun ſuono intermedio fra l' uno e il due, fra il due e il tre, &c. Or ecco chiaramente ſpiegato il maraviglioſo fenomeno dei ſuoni 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. della tromba, e del corno da caccia, della qual coſa ne ho dato un cenno nel precedente Schediaſma IV. al numero VI. Il citato numero ci documenta, che una corda elaſtica non può oſcillare, ſalvo che intera, o diviſa in parti aliquote; e perciò riferendoſi i ſuoni in proporzione reciproca delle lunghezze di eſſe parti, ſe la corda intera produce il ſuono 1; le due metà renderanno il ſuono 2, le tre terze parti il ſuono 3, e così di mano in mano. Nè ſi troverà giammai alcuna voce di mezzo; perchè queſta ſarebbe propria di una parte aliquanta, e la corda non può ſuonare in parti aliquante diſtribuita.

X. Una corda di lunghezza finita, atta a concepire un ſuono determinato, è parte aliquota di una corda lunga infinitamente, la quale per conſeguenza può in ſe ſteſſa il detto ſuono ricevere qualunque egli ſiaſi. Quando palpita un corpo elaſtico, il tremito ſonoro ſi diffonde sfericamente all' intorno per tanti raggi, o corde aeree, che continuerebbero all' infinito, ſe il mentovato tremito non veniſſe finalmente dalle reſiſtenze attutito, mentre ancora ci reſta dell' aere immenſo, a cui ſi avrebbe potuto comunicare. Ciò non ſi verifica ſolo nell' aria libera, come in un' aperta campagna, ma parimente nei luoghi chiuſi, nei quali qualſivoglia linea ſonora ſi continua col mezzo di replicate rifleſſioni, fin tanto che la palpitazione ſi annichila. Potendo adunque le corde eſterne d' aria conſiderarſi d' infinita lunghezza, ſono idonee a ricevere, ed a portarci all' orecchio qualunque ſuono.

Non c' è per tanto biſogno di ricorrere all' ipoteſi di M. de Mairan, che ſi è immaginato l' aria compoſta di particole di tutti i tuoni, fra le quali ſi vibrino quelle ſoltanto, che ſono uniſone al corpo ſonoro, o alla cauſa determinante il ſuono. Se l' aria è capace di qualunque ſuono, perchè formata di particelle talmente varie di tuono, che ogni ſuono ritrova le uniſone da porre in moto; dunque anche la tromba, in cui il corpo po, che suona, si è l' aria, sarà atta a ricevere qualunque suono, il che è contrario agli esperimenti. Dando al fiato un impulso conveniente, oscillano le particole, il cui tuono si esprime per l' unità: accrescendo debitamente lo sforzo del fiato, le particole del tuono due concepiscono vibrazione. Ora io dimando il perchè i fiati di vigore intermedio non facciano oscillare le particole di tuono mezzano fra l' unità, ed il binario. S' applichi il discorso alle particole di tuono medio fra il due ed il tre, fra il tre ed il quattro, &c. Di più accresciuta, o diminuita la lunghezza della tromba, le particole, che prima si vibravano, rimangono in quiete, ed al contrario quelle, ch' erano immobili, acquistano palpitazione. Quindi chiaramente comprendesi, che non dai tuoni delle particole aeree, ma bensì dalla lunghezza della corda nel corpo della tromba contenuta, e dalle sue divisioni in parti aliquote i suoni d' esso stromento dipendono: fatto uso del qual principio, agevolmente si spiega, conforme ho fatto vedere, poter l' aria esterna in se stessa qualsivoglia suono ricevere. Questa è per lo più l' infelice condizione delle ipotesi, che servono non v' ha dubbio a spiegare que' fenonemi, in grazia dei quali sono state inventate; ma poste al cimento di qualche sperienza, che non sia caduta sotto la considerazione del loro autore, non istanno salde alle prove.

XI. Sin quì non ho considerato salvo che le canne cilindriche, e scoperte le leggi delle loro oscillazioni, mi sono fatto strada a dilucidare alcuni fenonemi dell' onde aeree apportatrici dei suoni. Ma conciossiachè non solo si danno delle canne, ch' io chiamerò con vocabolo generale prismatiche, alle quali tutte si applicano i soprapposti raziocinj, ma eziandio di quelle, che sono lavorate a forma di frusti conici, o piramidali, convergenti, o divergenti, o in qualsisia altra guisa, egli è di mestieri, per non prendere abbaglio, l' avvertire, come vadano generalmente espressi i pesi comprimenti, e le masse d' aria, che dentro esse canne vengono poste in oscillazione; onde chiara spichi la verità comprovata dalla sperienza, che le vibrazioni di sì fatte canne altresì seguitano la legge di quelle delle canne prismatiche.

La densità dell' aria è la stessa tanto in una canna prismatica, quanto in un' altra di qualsisia differente figura. E poichè la densità segue la proporzione del peso comprimente, dovrà

vrà a questo adattarsi in ambo i casi la stessa espressione: ma in riguardo alle canne prismatiche viene dinotato dalla quantità aG; dunque la medesima quantità lo indicherà anche nelle canne, di cui parliamo.

Ho di sopra avvertito ai numeri IV. e V. che i soli elementi atti a variare il suono delle corde aeree contenute in due canne sono, non la base maggiore, o minore degli strati egualmente alti, che le compongono, ma solamente il numero loro, o sia la lunghezza delle corde, ed il diverso valore della grandezza $\frac{g}{aG}$, cioè della densità g dell' aria divisa pel peso comprimente aG, purchè, come si suppone, perseveri sempre invariata la lunghezza b del pendolo a secondi. Da ciò se ne deduce essere unisone due canne, in cui il numero degli strati ugualmente alti è costante, e costante altresì la relazione di $g:aG$. Rispettivamente ad entrambe adunque il tempo di una vibrazione si esporrà per $\frac{c}{2nb} \cdot \frac{\sqrt{lg}.\sqrt{l}}{\sqrt{aG}.\sqrt{b}}$, e siccome aG esprime da un canto, e dall' altro il peso comprimente, così lg dinoterà quella massa di amendue le corde, la quale ha luogo nella determinazione del tuono.

XII. Leggo nell' opera altrove citata dell' acutissimo Signor Eulero pag. 25. che per trovare il suono d' una canna convergente, o divergente, o di qualsisia altra figura, fa d' uopo considerare una corda simile, e scopertone il suono, supporre la stessa corda formata d' aria, ed il peso tendente uguale alla forza dell' atmosfera, e raccogliere poi da questi nuovi dati il suono della canna. Che se un tale problema si scioglierà universalmente assegnando qualsivoglia figura alla canna, si capirà la notissima proprietà delle canne prismatiche, che serrate al di sopra rendono un suono per un' ottava più grave. Quanto a quest' ultimo fenomeno vedrà il Lettore con quale semplicità io lo spieghi al numero XVIII. Ma rivolgendo la riflessione alle canne di figura diversa dalla prismatica, sembrami non potersi il metodo del Signor Eulero approvare. Ai tempi delle vibrazioni delle canne, e delle corde prismatiche si adattano le stesse formole; perchè gli strati tutti ed in quelle, ed in queste hanno ricevuta da una compressione, o stiramento uniforme pari elasticità.

Ora una tale corrifpondenza non paffa fra una canna, ed una corda folida fimili di figura, ma non prifmatiche. In ogni ftrato della canna le particole tutte fono ugualmente denfe, compreffe, ed elaftiche: così non fuccede negli ftrati della corda, i quali quanto hanno la bafe maggiore, tanto fono compofti di particole meno tefe; imperciocchè diftribuendofi la forza ftirante in un numero di parti eguale a quello delle particole formanti la bafe d' uno ftrato, ne tocca a ciafcuna particola minor porzione, fecondochè è più grande il numero di effe particole. Dipende la notata diverfità dalla varia natura del fluido, e del folido.

XIII. Che fe fi concepiffe l' idea matematica sì, ma non fifica di una corda folida non prifmatica, in cui le fibre di qualunque minimo ftrato foffero ugualmente tefe, il che addiverrebbe, quando ogni ftrato foffe tefo da forze alla bafe proporzionali, in tal cafo la noftra corda fi potrebbe fenza taccia di paralogifmo con una canna di fimil figura paragonare.

Si generi la figura della corda Mo (*Fig.* 25.) dal girarfi della corda MNO intorno l' affe AB, e fiano $AB = L$, $BH = x$, $HK = dx$, e le due fezioni circolari $Oo = \epsilon$, $Nn = \mu$. Nominata M la maffa di una corda cilindrica egualmente lunga, fornita della bafe $Oo = \epsilon$, e compofta della fteffa materia, determino la maffa $\frac{M \mu dx}{\epsilon L}$ dell' elemento HK della corda Mo col mezzo della feguente analogia $\epsilon L : \mu dx :: M : \frac{M \mu dx}{\epsilon L}$. Sia P la forza tendente la fezione $Oo = \epsilon$, e conciofliachè le forze ftiranti deggiono effere proporzionali alle fezioni, avremo $\epsilon : \mu :: P : \frac{P \mu}{\epsilon}$, ed il quarto termine fi eguaglierà alla forza ftirante l' elemento HK.

Vibrandofi la noftra corda fi adatterebbe alla curva AFB (*Fig.* 15.) determinata nel numero V. dello Schediafma IV. e farebbe ifocrona ad una corda cilindrica della fteffa materia, e lunghezza, la cui groffezza $Oo = \epsilon$, e la tenfione $= P$. Allora che l' elemento HK fi ritrovaffe nel fito DE, farebbe tirato per le direzioni delle tangenti PD, PE dalla medefima forza $\frac{P \mu}{\epsilon}$,

come

come se la corda A B avesse la grossezza costante $\bar{\mu}$, le convenisse la massa $\frac{M\mu}{e}$, e tutti i suoi elementi fossero tirati dalla mentovata forza $\frac{P\mu}{e}$. Quindi posta l' ordinata $DH = y$, per le cose dimostrate nel numero VII. del citato Schediasma sarebbe la forza acceleratrice dell' elemento DE per la direzione

$$DH = \frac{4n^2b^2y}{c^2L} \cdot \frac{P\mu}{e \cdot \frac{M\mu}{e}} = \frac{4n^2b^2Py}{c^2LM}$$: ma dalla stessa forza acceleratrice è stimolato l' elemento DE d' una corda cilindrica della medesima materia, e lunghezza, la cui grossezza $Oo = e$ (*Fig.* 25.), e la tensione $= P$; dunque la corda Mo, e la detta corda cilindrica sarebbero unisone; proprietà, che ho già stabilito al numero XI. parimente avverarsi nella canna di qualsivoglia figura Mo, e nella cilindrica AB.Oo. Perciò paragonando insieme la corda Mo colla canna Mo, e la tante volte nominata corda cilindrica con una canna di simile ugual volume, potrei rettamente conchiudere, che nella stessa proporzione, in cui si corrispondono i suoni della terza e della quarta, si riguardano altresì quelli della prima, e della seconda.

XIV. Quantunque sembri perfetta la corrispondenza fra la descritta corda Mo, ed una canna di figura simile ed uguale, vien essa turbata da una particolarità, che non si vuol trasandare. Insieme colla corda Mo si vibrano tutti i suoi elementi egualmente lunghi HK, le masse dei quali sono maggiori, o minori secondo l' indole della curva MNO. Sia collocata in B la bocca della canna Mo, da cui ha l' origine il suono, che si propaga da B verso A. Nello Schediasma VIII. dimostrerò che nell' aria si diffondono le vibrazioni non per settori sferici, ma bensì per linee, o raggi sonori. Quindi tanti raggi contandosi nella sezione Nn, quanti nella Mm, non oscilla tutta la massa aerea Mo, ma soltanto l' aggregato dei detti raggi, il quale è congruamente rappresentato dalla massa di una corda cilindrica, e non già da quella della corda Mo. Con ragione adunque nella canna Mo, non altrimenti che nelle cilindriche, ho espressa al numero XI. per lg la massa, che ha luogo nella determinazione del tuono.

 XV.

XV. Per sapere il numero delle vibrazioni, ch' io chiamo s, effettuate da una corda d' aria di data lunghezza l in un minuto secondo, fatta la riflessione, adempiersi l' equazione $s = \frac{1}{t} = \frac{2nb\sqrt{baG}}{cl\sqrt{g}}$ (3), e supponendosi, che la corda si vibri intera, onde sia $n = 1$, egli è d' uopo collocare nell' omogeneo di comparazione in cambio di $\frac{2b}{c}$, di b, e di $\frac{aG}{g}$ i convenienti valori. Il semicircolo diviso pel raggio, cioè $\frac{2b}{c}$ si adegua a $\frac{355}{113}$, e si fa essere la lunghezza b di un pendolo a secondi eguale ad once del piede di Parigi $36\frac{17}{24}$. Resterebbe da mettersi a computo la grandezza $\frac{aG}{g}$, o sia la proporzione fra il peso aG dell' atmosfera, e la densità g dell' aria: ma conciossiachè si potrebbe sbagliare nella determinazione della densità dell' aria pura, a cui soltanto si comunicano le vibrazioni sonore, della qual cosa ne parlerò exprofesso nello Schediasma VIII. e poichè ho dimostrato viaggiare il suono per lo spazio l nel tempo stesso, in cui una corda d' aria lunga quanto il detto spazio si vibra una volta; dedurrò dalla velocità del suono, resa nota coll' esperienza, il valore della totale quantità $\frac{2b\sqrt{baG}}{c\sqrt{g}}$.

C' insegnano le diligenti osservazioni fatte l' anno 1738. dai Signori Cassini di Toury, Maraldi, Abbate della Caille, scorrere il suono in un minuto secondo piedi Parigini 1038 equivalenti ad once 12456, nel qual tempo una corda aerea di pari lunghezza compierebbe una oscillazione. Essendo dunque $s = 1$, ne risulta $\frac{2b\sqrt{baG}}{c\sqrt{g}} = l = 12456$. Sostituito questo valore in vece di $\frac{2b\sqrt{baG}}{c\sqrt{g}}$ nella formola (3), scopriremo $s = \frac{12456}{l}$ (4), espressione semplicissima, da cui facilmente si

rac-

raccoglie il numero s delle vibrazioni, che nelle temperate stagioni del nostro clima effettua una corda d' aria di qualsivoglia lunghezza l in un minuto secondo.

XVI. Si deduce dalla nostra formola, che una corda d' aria lunga once $61\frac{1}{17}$ fa in un secondo vibrazioni 204. Il rinomato M. Sauveur ha con accuratissimi esperimenti scoperto, che una canna d' organo lunga once 60 fa in pari tempo giusta il suo metodo di computare vibrazioni 102 composte di un' andata e di un ritorno, equivalenti a 204 calcolate conforme l' uso comune. Avendo io dimostrato nel numero III. che due corde d' aria unisone, una libera, e l' altra da una canna circondata, sono di eguale lunghezza; fa d' uopo dire, che a cagione di replicate riflessioni si segni dentro la canna una corda tortuosa, che sia once $1\frac{1}{17}$ più lunga della canna predetta; dimodochè la lunghezza della corda, e quella della canna stiano fra loro in ragione di $61\frac{1}{17}:60$, o prossimamente come $58:57$. Le pareti della canna impediscono, che il tremito sonoro non si comunichi all' aria, ch' esternamente tocca la canna medesima. Or ecco adunque che seguono innumerabili urti delle particole aeree contro i lati della canna, ai quali urti corrispondono altrettante riflessioni; ed effetto delle percosse, e delle ripercosse si è l' allungamento notato della corda d' aria rinchiusa nella canna.

Quando si tratta per tanto di ritrovare il numero delle vibrazioni, che fa una canna d' organo in un minuto secondo, bisogna avvertire, che dalla lettera l nella formola $s=\frac{12456}{l}$ vien dinotata non la lunghezza della canna, ma bensì quella della corda aerea, la quale si riferisce alla lunghezza della canna di piedi cinque, o sia d' once 60 in ragione di $58:57$. Questa proporzione si altera qualche poco nelle canne più lunghe, e più corte di cinque piedi, per cagione della dissimiglianza delle loro figure, meno crescendo, o scemando i diametri, di quello che crescano, o scemino le lunghezze; e quindi non dovremo maravigliarci, se le lunghezze, ed i tempi delle vibrazioni delle canne non si corrisponderanno nella stessa precisa scrupolosa ragione.

XVII.

XVII. La tortuosità delle corde d' aria contenute nelle canne si conferma evidentemente colle seguenti esperienze. Feci lavorare tre canne 1, 2, 3 (*Fig*: *26.*) egualmente lunghe once 11, linee 2 $\frac{1}{2}$ del piede di Parigi, e pari di diametro nel sito della bocca AB, dove si genera il suono. La prima canna era cilindrica, la seconda un frusto conico convergente, e la terza al contrario un frusto conico divergente. Il diametro CD della estremità della seconda canna era la metà del diametro CD = AB della prima, ed all' opposto la terza canna aveva il diametro CD doppio del diametro CD = AB della prima canna cilindrica. Suonando la canna convergente 2, dovranno entro la stessa seguire più riflessioni che nella canna cilindrica 1, e segnarsi conseguentemente in quella un' onda più lunga che in questa. Tutto a rovescio sottraendosi per dir così all' urto dell' aere le pareti della canna divergente 3, l' onda si segnerà meno tortuosa, e sarà più corta di quella, che nella canna cilindrica è contenuta. L' esperienza corrispose interamente all' aspettazione, ed essendo la prima canna unisona al B del mio stromento da tasto, trovai la seconda sonare il Bb, e la terza il C.

XVIII. Atteso che la prima canna è proporzionatamente più larga di una canna di cinque piedi, la sua lunghezza a quella della corda d' aria si riferirà in una proporzione alquanto più prossima di 57 : 58, che si adegua alla terza parte di un semituono all' in circa: ma la terza canna divergente è un semituono più acuta della prima canna cilindrica; dunque la corda di aria rinchiusa nella terza canna divergente è di essa canna più corta. Ora anche dentro sì fatta canna segnandosi tortuosa la corda d' aria, egli è manifesto che non terminerà alla estremità della canna, ma bensì alquanto al di dentro nel sito E; imperciocchè se così non fosse, la lunghezza della corda sarebbe maggiore di quella della canna.

Allora quando gli accordatori d' organo vogliono far crescere il suono d' una canna, ne allargano un miccino l' estremità, e succede lo stesso effetto, come se la canna un po si accorciasse. L' allargamento adunque opera sì, che la corda d' aria, finisca alquanto più abbasso. Ristretto un poco il diametro della estremità della canna, si aumentano le riflessioni, e crescendo la lunghezza della corda d' aria, il suono decresce. Di tale artificio si servono

gli

gli accordatori per far calare una canna d' organo.

Che ſe l' apertura DC totalmente ſi ottura, il tremito ſonoro ſi riflette nel coperchio DC, e tornando indietro trova l' uſcita per la bocca AB. Dentro una canna ſerrata per tanto ſi determina un' onda il doppio lunga di quella, ch' è contenuta dentro una canna aperta, e conſeguentemente la canna ſerrata corriſponderà in ottava grave alla canna aperta, conforme in fatti l' eſperienza c' inſegna.

XIX. Fatti ſuonare due differenti ſtromenti da fiato, come per eſempio un oboè ed un flauto, le lunghezze delle corde tortuoſe d' aria ſtaranno fra loro in ragione inverſa dei ſuoni dei nominati ſtromenti. Ma ſe le loro canne non ſi corriſponderanno nella medeſima proporzione, ciò dinoterà, che l' onde non ſi deſcrivono egualmente tortuoſe, e che forſe amendue non finiſcono alla eſtremità della canna. Oltre la varia figura delle canne, può eſsere cagione del primo effetto la diverſa maniera, colla quale ſi genera il ſuono. Spinto il fiato dentro la pivetta dell' oboè, ſi dilata eſsa, ed indi ſi comprime, ed il fiato concepiſce un tremito ſonoro avente una direzione aſsai traſverſale. Quindi non poco conſiderabile riuſcirebbe la tortuoſità dell' onda, ſe da un contrario elemento, cioè a dire dalla divergenza della canna, non veniſse modificata. Nel flauto tutto all' oppoſto poco tortuoſa ſi ſegna l' onda mediante l' artificio, con cui ſi produce il ſuono, ma non così adiviene per cagione della figura della canna, la quale ſiccome convergente, alla tortuoſità è favorevole. Nei due mentovati ſtromenti ſi contemperano in guiſa tale gli elementi contrarj, che conforme ho trovato cogli eſperimenti, la lunghezza dell' oboè a quella del flauto ſta in ragione inverſa dei ſuoni prodotti da eſſi ſtromenti.

Paragonando il ſuono di qualunque ſtromento da fiato con quello di una canna d' organo di cinque piedi, o d' once 60, riuſcirà facile il determinare la proporzione fra la lunghezza del corpo dello ſtromento, e della corda tortuoſa d' aria dentro lo ſteſſo rinchiuſa. Concioſſiachè l' armonia, che rendono i due ſuoni, manifeſta la relazione fra i tempi delle vibrazioni; facciaſi come il tempo d' una vibrazione della ſuddetta canna d' organo al tempo d' una oſcillazione dello ſtromento, così $61\frac{1}{17}$, lunghezza della corda d' aria contenuta dentro la ſteſſa canna,

al

al quarto termine proporzionale, che si eguaglierà alla lunghezza della corda aerea, che nel corpo dello stromento fa le sue vibrazioni, la quale colla lunghezza d' esso corpo si può mettere agevolmente al confronto.

XX. Il sopra lodato Signor Leonardo Eulero è stato il primo, che abbia dato al pubblico nell' opera altre volte citata (c) la formola, colla quale si determina il numero delle vibrazioni fatte da una canna d' organo in un minuto secondo. Ora in cambio d' indagare la proporzione fra le densità del mercurio, e dell' aria sonora, stabilisce quella fra le densità del mercurio, e dell' aria mista colle particole eterogenee. Da ciò ne segue, che giusta il suo computo si attribuisce ad una data canna un numero di vibrazioni notabilmente minore di quello, che con accurate sperienze ha ritrovato M. Sauveur. L' ignorare la verità, che il suono scorre la lunghezza di una corda d' aria nel tempo, in cui essa fa una vibrazione, ha dato motivo al notato sbaglio.

Secondo il Signor Eulero le densità G, g del mercurio e dell' aria stanno fra loro nelle stagioni temperate come $11000 : 1$, e quindi $\frac{G}{g} = 11000$. Mediante il viaggio del suono ho scoperto al numero XV. $\frac{2b\sqrt{baG}}{c\sqrt{g}} = 12456$, formola da cui si deduce $\frac{c^2 \cdot \overline{12456}^2}{4b^2 \cdot ba} = \frac{G}{g}$: ma il raggio diviso pel semicircolo, o sia $\frac{c}{2b} = \frac{113}{355}$, la lunghezza b del pendolo a secondi si uguaglia ad once $36\frac{17}{24}$ del piede di Parigi, e l' altezza media a del mercurio nel barometro ad once 28; dunque $\frac{\overline{113}^2}{\overline{355}^2} \cdot \frac{\overline{12456}^2}{36\frac{17}{24} \cdot 28} = 15294 = \frac{G}{g}$, e conseguentemente le den-

(c) *Tentamen novæ Theoriæ Musicæ* pag. 20.

densità G, g del mercurio, e dell' aria sonora si corrispondono nella ragione 15294 : 1. Il numero delle vibrazioni di una canna d' organo in un minuto secondo, che generalmente si esprime per $\frac{2b\sqrt{baG}}{cl\sqrt{g}}$, seguita la proporzione della grandezza $\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}}$, supponendo costanti le quantità b, a, l. Avremo pertanto $\sqrt{15294} : \sqrt{11000} :: 204 : 173$, e l' ultimo termine dell' analogia c' insegna, che una canna di cinque piedi, la quale M. Sauveur ha trovato coll' esperienza oscillare 204 volte nel detto tempo, sarebbe soltanto vibrazioni 173, se si dovesse introdurre nel calcolo la densità dell' aria mescolata colle particole eterogenee. Oltrechè questo troppo scarso numero di oscillazioni mal si concilia colla velocità del suono; non è verisimile, che un uomo così diligente come M. Sauveur abbia commesso l' errore di 31 vibrazioni in 204.

SCHEDIASMA VI.

Delle misure, che debbono assegnarsi alle corde d' uno stromento, ed alle canne d' organo, acciocchè rendano suoni del pari forti, e aggradevoli.

I. ACciocchè un musico stromento produca grata sensazione nell' organo dell' udito, non basta, che ciascun suono considerato da se solo sia dilettevole, ma bisogna altresì, che sieno forniti della stessa indole, e di egual forza. La seconda proprietà rende lo stromento uniforme, e fa sì che ogni suono meriti la medesima stima: la terza proprietà ottiene l' effetto, che, come si suol dire, un suono non copra l' altro, e del pari s' odano le voci gravi, ed acute. Darò principio dalle corde d' uno stromento, ed indi passerò alle canne d' organo, e stabilirò in quelle ed in queste le misure opportune, onde i loro suoni riescano aggradevoli, e vigorosi egualmente.

Determinare qual proporzione si debba assegnare alle dimensioni delle corde, acciocchè i loro suoni riescano del pari aggradevoli, e forti.

II. Le corde sonore vogliono esser tese sì fattamente, che per poco che si accresca la loro tensione, si rompano. Se due corde formate della stessa materia sieno differentemente grosse, correranno eguale pericolo di spezzarsi, quando le forze tendenti stiano in ragione delle grossezze; e quindi sì fatte corde di varia grossezza si debbono stirare con forze proporzionali alle loro basi. Il gagliardo distendimento delle corde rende viva, e spiritosa la palpitazione delle parti minime componenti esse corde, nella quale il suono principalmente consiste.

III. Ciò premesso, io mi servo del seguente giro di raziocinio. Abbiansi due corde AB, ab (*Fig.* 27.) della stessa materia, grossezza, e tensione, e differenti solo nella lunghezza, le quali compiuta una vibrazione si ripieghino talmente, che sieno le massime saette $CF = C$, $cf = c$. Dalla equazione delle curve AFB, afb determinata nel numero IV. dello Schediasma IV. agevolmente si deduce, che segnate le assisse BH, bh, BK, bk proporzionali alle lunghezze delle corde BA, ba,

sarà

sarà sempre H D : h d :: KE : k e :: C F = C: cf = c.

Giacchè BH :: bh :: BK : bk :: BA : ba, avremo parimente HK :: hk :: BA : ba. Sieno DE, de, che adequatamente s' eguagliano ad HK, hk due menome porzioni delle corde A F B, a t b: poichè le nostre corde sono della stessa materia, e del pari grosse, le loro masse serbano la proporzione delle lunghezze BA, ba, ch' io chiamo L, l, e tale è altresì la relazione, che passa fra le masse degli elementi DE, de. Si osservi al numero XIV. del citato Schediasma IV. la formola delle velocità, che acquista una corda oscillando, e trattandosi di corde ugualmente tese, e grosse, e che oscillano intere, troveremo, che le velocità degli elementi DE, de, quando distano dalle linee rette BA, ba per ispazj proporzionali alle massime saette CF = C, cf = c, o ad esse linee son pervenuti, stanno in ragione composta, diretta delle nominate massime saette C, c, ed inversa delle lunghezze delle corde L, l, cioè a dire come $\frac{C}{L} : \frac{c}{l}$. Da tali velocità prendono norma quelle, che dalle infinitesime porzioni DE, de delle corde A F B, a t b vengono impresse alle particole aeree, le quali, mentre sono lontane dal punto medio delle loro vibrazioni per distanze proporzionali alle grandezze C, c, si muovono con celerità, che accettano la ragione $\frac{C}{L} : \frac{c}{l}$.

IV. Il numero de' raggi sonori cagionati nell' aere dal tremito degli elementi egualmente grossi DE, de è certamente proporzionale alle loro lunghezze DE, de, e conseguentemente alle lunghezze delle intere corde L, l. Conciossiachè questi raggi si spargono sfericamente all' intorno per ogni verso, egli è fuor di dubbio, che all' orecchio di chi ascolta il suono delle due corde ugualmente distanti ne giungerà una quantità relativa al numero intero d' essi raggi; laonde il numero de' raggi stimolanti il sensorio serberà la proporzione di $L : l$.

V. All' orecchio situato in O pervengano i due raggi sonori DO, dO. C' insegna la teorica della propagazione del suono contenuta nello Schediasma VIII. che le distanze fra due coppie di punti aerei G, O; g, O, frà quali i primi G, g compiuta una vibrazione sieno ridotti in quiete, ed i secondi O, O effettuata per esempio una mezza vibrazione sien pervenuti

Q 2 alla

alla maſſima velocità, ſono proporzionali ai tempi delle oſcillazioni delle corde AFB, afb: ma queſti tempi ſtanno come le lunghezze d'eſſe corde L, l; dunque GO : gO :: $L : l$, e nella ſteſſa proporzione altresì ſi riguarderanno le maſſe delle linee d'aria GO, gO. Se i punti eſtremi O, O dei raggi DO, dO urteranno nel timpano uditorio, reſterà fraſtornato il moto delle linee aeree GO, gO, e quindi le porzioni delle maſſe dei raggi ſonori DO, dO, che urtano nel ſenſorio, ſi riferiſcono nella proporzione $L : l$. Si metta a computo il numero dei raggi, che provengono dagli elementi DE, de, e ſi troverà che le maſſe eſercitanti impulſo contro l' organo dell' udito ſtanno fra loro come $L^2 : l^2$.

VI. Abbiamo veduto che le velocità degli elementi aerei ſituati nei raggi DO, dO, mentr' eſſi elementi diſtano in ragione di $C : c$ dalla metà delle loro oſcillazioni, accettano la proporzione $\frac{C}{L} : \frac{c}{l}$. Perciò i quadrati delle mentovate velocità ſaranno proporzionali a $\frac{C^2}{L^2}$, $\frac{c^2}{l^2}$. Immaginiamoci diſtribuite le linee GO, gO in pari numero di particelle MI, mi, le cui lunghezze abbraccieranno la ragione di GO : gO, o ſia di $L : l$, ſupponendoſi fra loro eguali le particelle alla ſteſſa linea ſpettanti. Sia MO : mO :: GO : gO :: $L : l$, e dai canoni della propagazione del ſuono ſiamo iſtruiti, che le particole infiniteſime MI, mi ſono lontane come $C : c$ dal punto medio delle loro vibrazioni. Per conſeguenza i quadrati delle loro velocità ſtaranno come $\frac{C^2}{L^2} : \frac{c^2}{l^2}$: ma le maſſe delle particelle aeree MI, mi replicate tante volte, quanti raggi ſonori poſti in moto dagli elementi DE, de delle corde giungono al ſenſorio, ſi corriſpondono come $L^2 : l^2$; dunque gli aggregati delle predette maſſe ſono dotati di forze vive proporzionali a C^2, c^2. Potendoſi la ſteſſa coſa aſſerire di tutte le particole uguali ad MI, mi, e ſituate o più vicine al punto O, o più lontane, ma ſempre

in

in diſtanze tali, che ſerbino la proporzione di GO: gO; ne ſegue, che per cagione delle porzioni minime DE, de delle corde AFB, afb l' aria urta nell' orecchio con forze vive in ragione di $C^2 : c^2$. Un ſimile effetto producono gli altri elementi delle noſtre corde ſimili nella lunghezza alle corde ſteſse, e ſimilmente collocati; e perciò le corde intere AFB, afb della ſteſsa materia, groſsezza, e tenſione, e ripiegate per le ſaette C, c ſpingono l' aria di forze vive fornita proporzionali ai quadrati di eſse ſaette contro l' organo dell' udito.

Replicandoſi queſti colpi eguali ad ogni nuova vibrazione delle due corde, egli è manifeſto, che l' impreſſione, che ne riceve l' orecchio, ſerba la proporzione compoſta dei quadrati C^2, c^2, e del numero delle vibrazioni fatte in tempo pari dalle due corde: ma il detto numero ſta inverſamente come i tempi, che in una oſcillazione s' impiegano, i quali tempi ſi riferiſcono nella ragione di $L : l$; dunque l' impreſſioni ſoſtenute dal ſenſorio accettano la proporzione $\frac{C^2}{L} : \frac{c^2}{l}$.

VII. Acciocchè divengano eguali le mentovate impreſſioni, egli è d' uopo moltiplicare il numero delle corde AFB, afb in ragione delle grandezze $\frac{L}{C^2}$, $\frac{l}{c^2}$, o pure con equivalente artificio far sì, che le groſſezze delle corde ſtiano come $\frac{L}{C^2} : \frac{l}{c^2}$, e che le forze, o peſi tendenti P, p ſi riguardino colla ſteſſa proporzione. Le maſſe di tali corde, e conſeguentemente anche quelle degli elementi DE, de ſerbano la ragione $\frac{L^2}{C^2} : \frac{l^2}{c^2}$. Mentre le due corde ſi ſupponevano di egual groſſezza, ho fatta l' oſſervazione, che gli elementi analoghi DE, de diſtanti dalle linee rette BA, ba in proporzione di $C : c$ ſi moveano con velocità in ragione di $\frac{C}{L} : \frac{c}{l}$. Lo ſteſſo ſi verifica di due corde inegualmente groſſe, ſtirate da peſi proporzionali alle lo-

ro

ro grossezze, ed incurvate per le saette C, c; imperciocchè equivalgono esse a due aggregati di corde di pari grossezza. Moltiplicando le masse degli elementi DE, de, che stanno come $\frac{L^2}{C^2} : \frac{l^2}{c^2}$, pe' quadrati delle rispettive velocità, che stanno come $\frac{C^2}{L^2} : \frac{c^2}{l^2}$, ne risultano prodotti eguali, che dinotano l' eguaglianza delle forze vive degli elementi DE, de. Un simile discorso si adatti a tutte l' altre coppie di particole, nelle quali si adempiano le medesime condizioni, onde vanno forniti gli elementi DE, de, e s' inferisca, che quando le corde AFB, afb, le cui grossezze si corrispondano nella proporzione delle grandezze $\frac{L}{C^2} : \frac{l}{c^2}$, distano come $C : c$ dalle linee rette AB, ab, vengono da pari forze vive animate.

VIII. Dovendosi queste corde nelle oscillazioni loro allontanare in siti analoghi ED, ed dalle linee rette AB, ab in ragione di $C : c$, impareremo dal numero VII. dello Schediasma IV. che gli elementi DE, de sono stimolati da forze acceleratrici, che stanno come $\frac{CP}{LM} : \frac{cp}{lm}$, chiamate M, m le masse delle due corde. Si moltiplichino le dette quantità per M, m, grandezze proporzionali alle masse degli elementi DE, de, e ci si affaccieranno le frazioni $\frac{CP}{L}$, $\frac{cp}{l}$, ch' esprimeranno la ragione delle forze sollecitanti le particelle DE, de: ma per la stabilita analogia $P : p :: \frac{L}{C^2} : \frac{l}{c^2}$; dunque sostituendo in cambio di P, p le grandezze proporzionali $\frac{L}{C^2}$, $\frac{l}{c^2}$, troveremo, che gli elementi DE, de, le cui distanze dai punti estremi B, b serbino la proporzione delle lunghezze AB, ab delle corde, sostengono le sollecitazioni di forze, che stanno inversamente co-

me

me le maſſime ſaette CF, cf delle corde ſteſſe, cioè a dire come $\frac{1}{C} : \frac{1}{c}$.

IX. Raccogliendo in poche parole le coſe diffuſamente ſpiegate, dico, che due corde della ſteſſa materia, incurvate oſcillando fino alle maſſime ſaette C, c, teſe da peſi proporzionali alle groſſezze, e groſſe in ragione di $\frac{L}{C^2} : \frac{l}{c^2}$, vengono ſtimolate in ſiti analoghi da forze ſollecitanti come $\frac{1}{C} : \frac{1}{c}$, ſono fornite di pari forze vive, e producono ſuoni egualmente forti.

X. Reſta, che ſi determini la proporzione, in cui ſi deggiono riferire le maſſime ſaette C, c, acciocchè i ſuoni delle corde AB, ab rieſcano del pari aggradevoli. Io ſtabiliſco due limiti, fuori dei quali non ſi dee certamente ſvagare, cioè a dire che la corda grave non ſia più ſottile dell'acuta, e che queſta non traſcorra oſcillando uno ſpazio maggiore di quello, per cui ſi move la corda grave.

Se da un canto le due corde ſono egualmente groſſe, ſi avrà $\frac{L}{C^2} = \frac{l}{c^2}$, e per conſeguenza $C : c :: \sqrt{L} : \sqrt{l}$, cioè le maſſime ſaette C, c in ragione dimezzata delle lunghezze L, l delle corde. In queſto incontro le groſſezze delle noſtre corde ſtanno come $L^0 : l^0$. Nomino T, t i tempi delle vibrazioni delle corde AB, ab, ed U, u le velocità degli elementi DE, de, mentre le diſtanze loro dalle linee rette BA, ba ſerbano la ragione di $C : c$. Abbracciando le dette velocità la general proporzione $\frac{C}{L} : \frac{c}{l}$, ſe in cambio di C, c ſoſtituiremo le grandezze nel caſo preſente proporzionali $\sqrt{L}$, $\sqrt{l}$, troveremo $U : u :: \frac{1}{\sqrt{L}} : \frac{1}{\sqrt{l}}$: ma riſpettivamente a corde teſe da peſi in ragione delle baſi i tempi T, t delle oſcillazioni ſi riguardano come $L : l$; dunque $U : u :: \frac{1}{\sqrt{T}} : \frac{1}{\sqrt{t}}$, cioè a dire le deſcritte

velo-

velocità delle due corde in proporzione inversa dimezzata dei tempi T, t delle vibrazioni.

XI. Passo al limite opposto, e suppongo $C = c$. In tale circostanza si scopriranno le grossezze delle corde $\frac{L}{C^2}$, $\frac{l}{c^2}$ proporzionali alle lunghezze L, l: canone stabilito dal celebratissimo Signor Leonardo Eulero nella sua opera *Tentamen novæ Theoriæ Musicæ* pag. 11. In riguardo alle velocità U, u s' adempierà l' analogia $U : u :: \frac{1}{L} : \frac{1}{l} :: \frac{1}{T} : \frac{1}{t}$, la quale c' insegnerà, ch' esse accettano la ragione reciproca o delle lunghezze L, l delle corde, o dei tempi T, t delle loro vibrazioni.

XII. In quegli stromenti, ne' quali assegnandosi a ciascun suono la sua corda particolare, c' è un pieno arbitrio, l' arte si tiene di mezzo fra i due confini estremi. Di tal natura sono i gravicembali, che nel numero XVII. e ne' seguenti mi serviranno d' esempio.

XIII. Non lasciano la scelta libera gli stromenti, in cui una corda stessa rende più suoni, e ciò col mezzo delle dita della mano sinistra, che in diversi siti la premono. La pressione accorcia più, o meno la corda, e fa sì, che più corde differenti solo nella lunghezza producan suono. Egli è d' uopo adunque ricorrere al limite in primo luogo ricordato, se vogliamo, che i varj suoni cagionino nell' orecchio una impressione ugualmente forte. Nel violino a cagion d' esempio la corda intera, e le sue porzioni di lunghezza diversa determinate dal dito premente acquistano pari forze vive MU^2, mu^2 per motivo della costante azione dell' arco. Avremo per tanto $U : u :: \frac{1}{\sqrt{M}} : \frac{1}{\sqrt{m}}$: ma essendo le corde ugualmente grosse, e tese, $M : m :: L : l :: T : t$; dunque $U : u :: \frac{1}{\sqrt{T}} : \frac{1}{\sqrt{t}}$, conforme ricerca il limite nominato.

XIV. Benchè abbia sopra supposto ai numeri II. e VII. che le forze tendenti sieno proporzionali alle grossezze delle corde; se procedendo con maggior generalità non avessi ristretti i pesi stiranti alla detta legge, nulladimeno con un simile giro di raziocinio sarei pervenuto alla conseguenza, che due corde fornite di

egua-

eguali forze vive rendono ſuoni egualmente forti. In fatti i ſuoni del violino prodotti da corde animate, come vedremo, da eguali forze vive rieſcono di pari vigore, quantunque le forze tendenti non ſerbino la ragione delle groſſezze delle corde. Ho abbracciata la nominata ipoteſi, perchè queſta dee verificarſi almeno proſſimamente negli ſtromenti più perfetti, ne' quali le ſpeciali circoſtanze non obbligano gli artefici a regolarſi diverſamente.

XV. Faccio ritorno al violino, e giacchè il noſtro ſtromento è guernito di quattro corde ugualmente lunghe, e variamente groſſe, ſtimo opportuna coſa l' indagare qual proporzione debba aſſegnarſi alle diverſe groſſezze, acciocchè paſſando da corda a corda ſi conſervi la legge $V:u::\frac{1}{\sqrt{T}}:\frac{1}{\sqrt{t}}$, e ritenendo i ſuoni la ſteſſa indole, l' orecchio non s' accorga, che il ſuono piuttoſto da una corda che dall' altra provenga.

Egli è d' uopo premettere, che quantunque l' arco tocchi una maggior ſuperficie nelle corde più groſſe, nulladimeno la ſua azione è coſtante, purchè ſi uſi pari forza a premer l' arco ſopra le corde. Queſta forza ſi diſtribuiſce ugualmente a tutte le parti toccate, e quindi due particelle uguali in corde differenti ſoffrono preſſioni in ragione inverſa delle totali ſuperficie combacciate dall' arco. Facendo l' arco ſuonare le corde col mezzo del fregamento, ed eſſendo queſto in proporzione compoſta della preſſione ſoſtenuta da particole uguali, che ſta reciprocamente come le intere ſuperficie, e del numero d' eſſe particole, che ſta direttamente come le intere ſuperficie; ne ſegue che il fregamento è pari riſpettivamente a tutte le corde, e che l' azione dell' arco è coſtante.

Ciò dimoſtrato, egli è chiaro, che le diverſe corde concepiranno eguali forze vive MV^2, mu^2, onde s' abbia $V:u::\frac{1}{\sqrt{M}}:\frac{1}{\sqrt{m}}$: ma ſi vuole parimente, che ſi verifichi l' analogia, $V:u::\frac{1}{\sqrt{T}}:\frac{1}{\sqrt{t}}$; dunque $M:m::T:t$. E poichè nel caſo preſente le maſſe delle corde, che ſono della ſteſſa materia, ed egualmente lunghe, ſerbano la ragione delle groſſezze, troveremo, che queſte debbono riferirſi nella ragione dei tempi delle vibrazioni.

Due corde proſſime del violino formano quinta, e perciò $M:m::T:t::3:2$, proporzione, in cui hanno da corriſponderſi le groſſezze di due corde vicine nel mentovato ſtromento.

XVI. La ſeguente ſperienza ci additerà, qualmente ſi conformi la pratica alla teorica. Colle bilancette dell' oro peſai tre porzioni egualmente lunghe piedi $1\frac{1}{2}$ Veneziani delle tre corde del violino, che ſi chiamano il tenore, il canto, ed il cantino. Tralaſciai d' indagare il peſo della corda più grave; perchè queſta non è come l' altre di ſola minugia, ma ſuole circondarſi con un ſottil filo di rame. Pesò adunque il tenore grani 15, il canto grani 10, ed il cantino grani *6*. Eſſendo le corde del pari lunghe, le groſſezze ſtanno come i peſi: le groſſezze per tanto del tenore, e del canto ſi corriſpondevano eſattamente nella ragione 3 : 2. Le groſſezze del canto, e del cantino ſi avvicinavano ad una tale proporzione, la quale ſi ſarebbe trovata giuſta, ſe il cantino aveſſe peſato grani $6\frac{2}{3}$ in cambio di grani *6*. Trattandoſi di corde di minugia, che ſono ſoggette a moltiſſime imperfezioni, io non credo, che ſi poſſa pretendere fra la teorica, e la pratica più aggiuſtata conformità, e ciò tanto più, quanto il cantino, ſiccome mi aſſeriva un perito Sonatore, era un po troppo ſottile.

XVII. Mi accingo preſentemente a provare, che le corde dei gravicembali acquiſtano oſcillando eguali forze vive, e che di più le loro groſſezze, e velocità accettano una ragione media, quelle fra $L^{\circ} : l^{\circ}$, $L : l$; e queſte fra $\frac{1}{\frac{1}{L^2}} : \frac{1}{\frac{1}{l^2}}$, $\frac{1}{L} : \frac{1}{l}$.

Per far ſuonare le corde dei noſtri ſtromenti, s' uſano penne a un di preſſo egualmente rigide, e s' adopra in oltre l' artificio d' incitare le corde gravi al moto in ſito più proſſimo all' appoggio di quello porti la proporzione delle loro lunghezze. Si rende adunque neceſſario il determinare le ſaette cagionate da una forza minima, la quale s' applichi a qualunque punto d' una data corda.

XVIII. La forza DC (*Fig.* 28.), la cui direzione ſia normale alla retta AB, ſtia in equilibrio colla corda ADB,

e la

e la tenga talmente ripiegata, che il punto D si allontani dalla linea AB per la saetta DH, di cui si cerca il valore. Continuo indefinitamente la linea BD, e pel punto C conduco la linea CG parallela a DA, la quale taglierà la retta BD nel punto G. Per un tal punto meno GE parallela ad AB, e conseguentemente perpendicolare a CH. La forza DC si risolve nelle due DG, GC, che tirano direttamente, quella la corda BD, e questa la corda AD. In oltre la forza DG è composta delle due equipollenti DE, EG, l'una normale, e l'altra parallela ad AB. Avverto, che supponendosi minima la forza DC, non si altera fisicamente la tensione della corda, e perciò EG si adegua alla forza tendente la detta corda AB, mentre si trova in linea retta. Non altrimenti la forza GC equivale alle due EC, EG. La prima unita alla DE pareggia la forza DC, e la seconda l' ho già affermata eguale al vigore tendente la corda AHB.

XIX. Per la similitudine dei triangoli DEG, DHB; CEG, DHA avremo le analogie

$$GE : ED :: BH : HD = \frac{ED.BH}{GE},$$

$$GE : EC :: AH : HD = \frac{EC.AH}{GE}.$$

Si deduca essere $ED.BH = EC.AH$, equazione da cui si ricava l' analogia $ED : EC :: AH : BH$, la quale c' insegna, che le forze ED, EC opponentisi, quella alla corda BD, questa alla corda AD, stanno tra loro in ragione inversa delle lunghezze BH, AH d' esse corde, mentre la corda intera AB si ritrovava in linea retta.

Conciossiachè $ED : EC :: AH : BH$, avremo componendo $ED + EC = DC : EC :: AH + BH = AB : BH$, e perciò $EC = \frac{DC.BH}{AB}$. In cambio di EC si sostituisca il suo valore nella superior equazione $HD = \frac{EC.AH}{GE}$, e scopriremo essere $HD = \frac{DC.BH.AH}{AB.GE}$. La stessa conseguenza s' incontrerebbe cercando prima il valore di $ED = \frac{DC.AH}{AB}$, e sostituendolo poscia nella formola $HD = \frac{ED.BH}{GE}$.

Si chiami la lunghezza della corda AB$=L$, la forza tendente GE$=P$, la forza DC$=F$, la faetta HD$=S$, la porzione della corda BH$=KL$, il refiduo AH$=L-KL$, e ci

fi prefenterà l' equazione $S=\frac{F.KL.\overline{L-KL}}{LP}=\frac{\overline{K-K^2}.FL}{P}$,

la qual efprime il valore della faetta S corrifpondente alla forza F applicata a qualfifia punto H della corda AB.

XX. Se BH$=KL$ fi eguaglierà ad $\frac{1}{2}L$ metà della corda AB, la faetta HD$=S$ farà la maffima. Senza ricorrere al metodo dei maffimi, e dei minimi, fi offervi nella formola

$S=\frac{F.KL.\overline{L-KL}}{LP}$, che in riguardo alla fteffa corda la quantità $\frac{F}{LP}$ è coftante, e che per confeguenza il valore di S è proporzionale al rettangolo $KL.\overline{L-KL}$, cioè a dire al rettangolo BHA: ma i rettangoli BHA hanno coftante la fomma BH$+$HA$=L$ dei lati, che li producono, e fra sì fatti rettangoli il maffimo fi è quello, che nafce dalla moltiplicazione dei lati eguali BH, HA; dunque il maffimo valore di S corrifponderà al punto medio H della corda AB.

Se il punto H coinciderà o coll' uno, o coll' altro punto eftremo B, A, onde o BH$=KL$, o HA$=L-KL$ s' eguagli a nulla, farà parimente nulla la faetta HD$=S$.

Perfiftano coftanti la lunghezza, la tenfione della corda AB, il punto H, in cui fi ftimola al moto, e troveremo le faette proporzionali alle forze.

Paragonate infieme parecchie corde, fe i punti H, a cui s' applicano le penne, faranno analoghi, dimodochè BH$=KL$ fia fempre una fimile porzione della lunghezza AB$=L$, la fpecie K avrà un valore coftante. Data K, farà parimente data la quantità $K-K^2$, e perciò le faette S fi fcopriranno come $\frac{FL}{P}$. Incitate adunque al tremito due corde in fiti analoghi, le faette ftanno in ragione compofta, diretta delle forze F, con cui fi ftimolano, e delle lunghezze L, ed inverfa delle forze tendenti P.

Che

Che se in oltre si assumerà costante la forza F, si troverà S proporzionale ad $\frac{L}{P}$, cioè a dire le saette direttamente come le lunghezze, e reciprocamente come le forze tendenti.

XXI. Sino a tanto che la resistenza della corda è minore della rigidità della penna, seguita questa a vie più ripiegarla. Giunte tali forze alla egualità, o per meglio dire superando la resistenza della corda per una quantità minima la rigidità della penna, si mette subito la corda in oscillazione. Perciò la resistenza della corda ADB si eguaglia alla forza $DC = F$. Segno $DI = DC = F$ perpendicolare a DH, e condotta la diagonale HI, da qualunque punto O medio fra D, ed H, descrivo ON parallela a DI. Avendo provato, che, sendo il resto pari, le saette serbano la ragione delle forze, chiaramente si scopre che per piegare la nostra corda sino alla saetta HO, si richiede la forza ON: ma, siccome ho testè fatta la riflessione, la resistenza della corda nella positura AOB pareggia la forza ON; dunque il triangolo HDI è la scala delle resistenze della corda, ed all' aja d' esso triangolo s' eguaglia la reazione esercitata dalla corda, mentr' è passata dalla linea retta AHB alla situazione ADB. Quantunque la corda messa in libertà non mantenga la figura triangolare ADB, AOB, nulladimeno ritornata che sia alla linea retta AHB ha effettuata una somma di azioni eguale alla predetta reazione, o sia all' aja HDI, a cui per conseguenza si eguaglia la forza viva acquistata. E giacchè l' aja HDI è proporzionale al prodotto $ID.DH = FS$, ne segue, che la nominata forza viva serba la ragione di FS. In cambio di S si sostituisca il valore sopra determinato $\frac{F.KL.\overline{L-KL}}{LP}$, e si troverà essere la forza viva dell' corda AHB ritornata in linea retta come $\frac{F^2.KL.\overline{L-KL}}{LP}$.

Abbiasi un'altra corda ab, rispettivamente a cui sia $ab = l$, $bh = kl$, $ah = l - kl$, $dc = f$, la forza tendente $= p$, e la sua forza viva nell' istante che ha fatto ritorno alla linea retta ahb sarà proporzionale ad $\frac{f^2.kl.\overline{l-kl}}{lp}$.

XXII.

XXII. Acciocchè le due corde rendano ſuoni egualmente forti, fa d' uopo, che uguagliandoſi le loro forze vive, ſi verifichi l' equazione $\frac{F^2 . KL . \overline{L-KL}}{LP} = \frac{f^2 . kl . \overline{l-kl}}{lp}$.

Adoprata in riguardo ad ambo le corde la ſteſſa forza, cioè a dire ſendo $F = f$, vale la formola $\frac{KL . \overline{L-KL}}{LP} = \frac{kl . \overline{l-kl}}{lp}$.

Finalmente ſtimolate le corde con pari forze in ſiti analoghi, onde ſia $K = k$, l' equazione prende il ſemplice aſpetto $\frac{L}{P} = \frac{l}{p}$, dal quale apprendiamo, che in tali circoſtanze le corde concepiranno eguali forze vive, e produrranno ſuoni egualmente forti, quando le forze tendenti P, p accettino la ragione delle lunghezze L, l. Si aggiunga la condizione, che le forze ſtiranti ſieno proporzionali alle groſſezze delle corde, e ne riſulterà il canone ſtabilito dal Signor Eulero, che le groſſezze delle corde debbano corriſponderſi nella ragione delle lunghezze. Per verità il lodato Autore ha ſuppoſto, ſenza conſultare la pratica, che in punti analoghi ſi faccian ſuonare le corde. Accoppiata queſta ipoteſi colle altre due comprovate almeno proſſimamente dall' uſo, che le forze incitanti al tremito ſieno eguali, e che le tenſioni ſieno come le groſſezze delle corde, ci guida neceſſariamente al canone mentovato, quando ſia noſtra mira, che le corde ugualmente vigoroſi rendano i ſuoni.

XXIII. Diſcendendo dalla teorica alla pratica, oſſervo, che le lunghezze delle corde AB $= L$, ab $= l$, le diſtanze BH $= KL$, bh $= kl$ fra l' appoggio, e la penna, che fa ſuonare, le diſtanze HA $=$ L $- KL$, ha $=$ l $- kl$ fra la penna, e l' altro appoggio ſi rendono eſattamente note con diligente miſura. La legge dei tempi delle vibrazioni delle corde eſpreſſa dall' analogia $\frac{LM}{P} : \frac{lm}{p} :: T^2 : t^2$ ſerve a ſcuoprire la proporzione fra le forze tendenti $P : p :: \frac{LM}{T^2} : \frac{lm}{t^2}$.

La ragione fra le maſſe delle corde ſi trova peſandole, e la relazione fra i tempi T, t ci è reſa paleſe dall' armonia, che producono le due corde ſuonando, la quale gioverà molto che

ſia

ſia una equiſonanza, cioè a dire un' ottava ſemplice, o multipla; perchè ſendo queſte perfettamente accordate nei gravicembali, ne ſappiamo la vera puntuale proporzione.

Le forze F, f, con cui ſi fanno ſuonare le corde, le determinaremo col calcolo, e dandocele adequatamente uguali, ſiccome l' uſo richiede, caveremo a buon conto la conſeguenza, che le dette corde acquiſtano oſcillando eguali forze vive, e che perciò producono ſuoni egualmente forti.

Le relazioni fra le groſſezze delle corde, fra le loro velocità, dalle quali dipendono i ſuoni del pari grati, le anderò opportunamente notando, ſecondochè mi ſi preſenterà l' occaſione.

XXIV. In un gravicembalo lavorato da Vito de' Traſuntini l' anno 1559 due corde ſuonavano il C ſol fa ut, e ſi corriſpondevano in tripla ottava, riſpettivamente a cui i tempi T, t delle vibrazioni delle due corde ſtanno come $8:1$, ed i loro quadrati $T^2 : t^2 :: 64 : 1$.

Trovai $L =$ once $33 - \frac{1}{6}$, $l =$ once $4 + \frac{1}{4}$, le quali miſure ſono eſpreſſe in once del piede Veneto. Moltiplicando, e dividendo il tutto per 12, ne riſulta $L = \frac{394}{12}$, $l = \frac{51}{12}$, cioè a dire tralaſciato il comun diviſore 12, $L:l :: 394:51$, proporzione fra le lunghezze delle corde ridotta a numeri interi. Noto che la ragione di $L:l :: 394:51 :: 7 + \frac{37}{51} : 1$ è più vicina di quella fra i tempi delle vibrazioni $8:1$.

Cinque piedi della corda grave peſavano grani 20, ed altrettanti piedi della corda acuta peſavano grani 6, e perciò le groſſezze delle corde ſi corriſpondevano nella proporzione di $10:3$, o ſia di $3\frac{1}{3} : 1$, la quale è media fra le due di limite ſopra determinate $L^0 : l^0$, $L:l$, e molto ſi accoſta alla ſeguente $L^{\frac{7}{12}} : l^{\frac{7}{12}}$, conforme coll' ajuto dei logaritmi ſi può accertare chi legge.

Stando le maſſe delle corde della ſteſſa materia in ragion compoſta del-

delle loro lunghezze e grossezze, scopriremo essere $M:m::3940:153::25\frac{115}{153}:1$.

Nell' analogia $P:p::\frac{LM}{T^2}:\frac{lm}{t^2}$ sostituisco in vece di $L,l;M,m;T,t$ i ritrovati proporzionali valori, e mi si presenta la ragione tra le forze tendenti $P:p::\frac{1552360}{64}:7803$, o sia $P:p::194045:62424::3+\frac{6773}{62424}:1$. La frazione $\frac{6773}{62424}$ decresce pochissimo da $\frac{1}{9}$, e quindi prossimamente $P:p::3+\frac{1}{9}:1$. Si osservi la forza $3+\frac{1}{9}$ stirante la corda grave alquanto minore di quello richiede la proporzione della sua base $3+\frac{1}{3}$, e si cavi la conseguenza, che le fibre della corda grave erano un po meno tese delle fibre della corda acuta.

M' insegnò in oltre la misura $KL=$ once $4=\frac{48}{12}$, $kl=$ once $1\frac{3}{4}=\frac{21}{12}$, e perciò ommesso, qualmente si è fatto anche rispettivamente alle totali lunghezze L, l, il comune divisore 12, $KL:kl::48:21$. Avverto essere $L-KL:l-kl::394-48=346:51-21=30$.

XXV. Nella formola $\frac{F^2.KL.\overline{L-KL}}{LP}=\frac{f^2.kl.\overline{l-kl}}{lp}$ pongasi $L=394$, $KL=48$, $L-KL=346$,
$l=51$, $kl=21$, $l-kl=30$,
$P=194045$, $p=62424$, ed adempiuti i necessarj computi, si troverà $\frac{F^2}{1337940275}=\frac{f^2}{1468711872}$, ed estratta la radice quadrata, $\frac{F}{36577}=\frac{f}{38323}$, cioè prossimamente $F:f::21:22$. Ecco adunque effettuata la condizione suggeritaci dal-

ci dalla ſperienza, che le forze F, f ſieno proſſimamente uguali. Reſta confermato per tanto, che le corde gravi, ed acute di un gravicembalo rendono ſuoni del pari forti, perchè nell' oſcillare di eguali forze vive fanno l' acquiſto. All' adempimento più, o meno eſatto d' una tal legge corriſponderà in riguardo all' egual vigore de' ſuoni la maggiore, o minore perfezione dello ſtromento. Se la groſſezza della corda grave ſi foſſe trovata $3\frac{2}{3}$ in cambio di $3\frac{1}{3}$, ne ſarebbe riſultata dal calcolo una perfetta eguaglianza delle forze F, f.

XXVI. Giacchè le noſtre corde di pari forze vive ſono fornite, le loro velocità ſtaranno inverſamente come le radici delle maſſe, onde s' abbia $V : u :: \frac{1}{M^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}$: ma le maſſe ſi riferiſcono nella ragione compoſta delle lunghezze e delle groſſezze di eſſe corde, e le groſſezze le abbiamo ſcoperte come $L^{\frac{7}{12}} : l^{\frac{7}{12}}$; dunque $M : m :: L^{\frac{19}{12}} : l^{\frac{19}{12}}$, e conſeguentemente $V : u :: \frac{1}{L^{\frac{19}{24}}} : \frac{1}{l^{\frac{19}{24}}}$: proporzione, che ſta quaſi eſattamente di mezzo fra quelle di limite ſopra ſtabilite $\frac{1}{L^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{l^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{L} : \frac{1}{l}$. Avendoci moſtrato il computo al numero XXIV. $M : m :: 25\frac{115}{153} : 1$, c' inſegna altresì eſſere $V : u :: \frac{1}{M^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}} :: \frac{1}{5\frac{115}{1530}} : 1$; cioè a dire le velocità di due corde, grave ed acuta, che ſi corriſpondono in tripla ottava, proſſimamente come $1 : 5$.

XXVII. Non vogliono traſcurarſi alcune rifleſſioni importanti. In tutti i gravicembali, e le ſpinette da me eſaminati, poſte al paragone le corde gravi colle acute, le ho trovate alquanto più corte di quello richiede la proporzione dei tempi delle loro vibrazioni. Da ciò ne deriva la conſeguenza, che le corde gravi riſpettivamente alle loro groſſezze ſono un po meno teſe delle corde acute. Io credo, che i pratici così ſi adoperino, perchè la trafila, per cui ſi fanno paſſare le corde, coſtipi e renda tenaci più le ſottili delle groſſe, dimodochè queſte non poſſano tollerare la tenſione di una forza alle loro groſſezze preciſamente proporzionale. Corrono in oltre pericolo le corde gravi di ſcavezzarſi, mentre ſi attorcigliano per attaccarle allo ſtromento, e ſi rivolgono intorno al perno, col mezzo del quale ſi ſtirano. Per altro sfuggiti i deſcritti riſchj, e ridotte alla dovuta tenſione, ſi conſervano molto tempo ſenza ſpezzarſi. Le corde acute all' oppoſto durano poco, e ſi rompono facilmente.

XXVIII. Uſandoſi per far ſuonare le corde forze a un di preſſo coſtanti, le corde gravi per lo ſtiramento dalla penna prodotto ſono meno proſſime a romperſi delle acute. Egli è noto, che due corde teſe con peſi proporzionali alle loro tenacità s' eſpongono a pari cimento di ſpezzarſi, quando gli allungamenti cagionati dalle forze F, f ſerbano la ragione delle lunghezze d' eſſe corde. Conſidero (*Fig.* 28.) le porzioni meno lunghe BH, bh delle corde AB, ab, perchè agendo contro d' eſſe una parte della forza DC, dc maggiore di quella, che ſi eſercita contro le porzioni più lunghe AH, ah, le prime ſi ſcavezzano più facilmente delle ſeconde. Fatto centro nei punti B, b, coi raggi BH, bh ſi deſcrivano gli archi HQ, hq, i quali determineranno le lineette DQ, dq eguali alle diſtenſioni ſofferte dalle corde BH, bh. Giacchè ſi vuole, che i mentovati allungamenti ſtiano come le lunghezze $BH = KL$, $bh = kl$, ſaranno parimente come le dette lunghezze le ſaette HD, hd, i di cui quadrati s' eguagliano ai riſpettivi rettangoli $\overline{2BQ+QD}.\overline{QD}$, $\overline{2bq+qd}.qd$. Prendo per mano le formole, che generalmente eſprimono i valori delle ſaette $S = \frac{F.KL.\overline{L-KL}}{LP}$, $s = \frac{f.kl.\overline{l-kl}}{lp}$, le quali c' inſegnano, che allora s' adempierà l' analogia $S:s::KL:kl$, quando ſia $\frac{F.\overline{L-KL}}{LP} = \frac{f.\overline{l-kl}}{lp}$. Soſtituiſco in cambio di $L-KL$, L, P; $l-kl$, l, p i convenienti valori ſopra determinati, ed effet-

effettuate le debite operazioni, (mi si presenta l' analogia $F:f::382268650:183588984$, che si approssima alla seguente $F:f::2\frac{1}{12}:1$.

Se adunque le forze F, f, che fanno suonare le due corde grave ed acuta, le quali nel mentovato stromento del Trasuntini si corrispondono in tripla ottava, fossero come $2\frac{1}{12}:1$, gli allungamenti QD, qd delle porzioni meno lunghe BH, bh di esse corde accetterebbero la ragione delle lunghezze BH, bh delle dette porzioni, che perciò correrebbero egual rischio di rompersi, purchè per altro le due corde, come io suppongo, fossero del pari allo spezzarsi proclivi, prima che le penne le stimolassero al tremito. Ma per incitare al suono le due corde si adoprano forze fisicamente uguali, e la corda grave è proporzionatamente meno tesa dell' acuta; dunque è molto rimoto il pericolo, che si scavezzi la corda grave nell' atto di porla in oscillazione.

XXIX. Non è arbitrario l' armare uno stromento con corde di qualunque grossezza, ed armato che sia l' usar forze a capriccio per far suonar esse corde. L' esperienza uniforme alla teorica ha insegnato ai pratici le convenienti grossezze delle corde gravi ed acute, le quali surrogando il prossimo all' esatto, ponno stare dentro certi discreti limiti. Applicate allo stromento due corde di congrua grossezza, resta l' altro mezzo della forza delle penne, per interamente pareggiare il vigore dei suoni. Toccando gli accordatori nello stesso tempo due corde, comprendono esattamente qual penna debba accrescersi, o scemarsi di forza, acciocchè i due suoni grave ed acuto facciano nell' orecchio eguale impressione.

Determinare le misure, che debbono assegnarsi alle canne d' organo, acciocchè rendano suoni del pari forti, e aggradevoli.

XXX. Colla scorta delle verità poste in chiaro rispettivamente alle corde si determinano agevolmente le misure, che debbono assegnarsi alle canne d' organo, acciocchè rendano suoni del pari forti, e aggradevoli. La steſſa analogia $T : t :: \sqrt{\frac{LM}{P}} : \sqrt{\frac{lm}{p}}$ dà legge ai tempi delle vibrazioni e delle corde ſonore, e delle canne d' organo. In riguardo a queſt' ultime ſignificano L, l le lunghezze delle corde d' aria rinchiuſe nelle canne, le quali corde mi giova per ora il ſupporle o rettilinee, o ſimilmente tortuoſe, onde le loro lunghezze o eguali ſieno, o proporzionali a quelle delle canne miſurate dalla bocca fino alla eſtremità ſuperiore. M, m, dinotano le maſſe delle mentovate corde, e P, p i peſi delle colonne d' aria ſopraſtanti alle canne, i quali colle loro preſſioni rendono elaſtiche le noſtre corde. Nella medeſima ſtagione, e coſtituzione d' aria i peſi P, p ſtanno come le groſſezze, o baſi delle corde aeree contenute nelle canne, e le dette baſi come $\frac{M}{L} : \frac{m}{l}$. Soſtituiti per tanto nella ſopraſcritta analogia sì fatti valori proporzionali in cambio di P, p, troveremo $T : t :: L : l$, cioè a dire nelle addotte circoſtanze i tempi delle vibrazioni di due canne d' organo come le lunghezze L, l delle corde aeree da eſſe canne compreſe.

XXXI. I numeri delle funicelle aeree di pari groſſezza, che dentro le canne ſi pongono in oſcillazione, ſeguono la ragione delle baſi $\frac{M}{L}$, $\frac{m}{l}$ delle corde d' aria circondate dalle pareti delle canne, e la ſteſſa analogia parimente accettano i numeri de' raggi ſonori, che ſi diffondono sfericamente intorno le canne, i quali raggi altro non ſono, che una continuazione delle cordicelle or or nominate. Le quantità dei raggi ſonori, che pervengono all' udito egualmente dalle due canne diſtante, ſono proporzionali ai numeri totali d' eſſi raggi, e per conſeguenza ſtanno come $\frac{M}{L} : \frac{m}{l}$.

XXXII. Per le coſe dimoſtrate al numero V. le maſſe di due raggi ſonori ſpettanti a due canne, che urtano nell' orecchio, ſi riferiſcono nella ragione di $T : t$, o ſia nel noſtro caſo di $L : l$. Moltiplicando adunque le maſſe come $L : l$ di ciaſcun raggio, che colpiſce il ſenſorio, pel numero de' raggi come $\frac{M}{L} : \frac{m}{l}$, che nello ſteſſo fanno impreſſione, ne riſulta la re-

lazio-

lazione $M:m$ fra le intere maſſe, che contro l' organo dell' udito ſi muovono, le quali ſono proporzionali alle maſſe delle corde aeree contenute dentro le canne.

XXXIII. I ſuoni rieſcono egualmente forti, allora quando l' aria urta nell' orecchio con forze vive in ragione di $T:t$, che in riguardo alle canne d' organo ſi eguaglia a quella di $L:l$; imperciocchè moltiplicandoſi gl' impulſi ſecondo i numeri delle vibrazioni fatte in tempo pari, i quali ſtanno come $\frac{1}{T}:\frac{1}{t}$, ne riſultano nel ſenſorio eguali impreſſioni. Si chiamino U, u le velocità in ſiti analoghi, e per eſempio le maſſime, che prima dentro alle canne, ed indi al di fuori acquiſtano oſcillando le particole aeree, e giuſta quanto ſi è provato, l' aria colpirà il ſenſorio con forze vive proporzionali ad Mu^2, mu^2: ma queſte forze deggiono abbracciare la relazione $L:l$, dunque $MV^2 : mu^2 :: L:l$, e conſeguentemente $\sqrt{\frac{M}{L}} : \sqrt{\frac{m}{l}} :: \frac{1}{V} : \frac{1}{u}$. Le quantità $\frac{M}{L}$, $\frac{m}{l}$ dinotano le groſſezze, o baſi delle corde d' aria contenute dentro le canne, e le loro radici ſi riferiſcono nella ragione dei diametri d' eſſe corde, o pure delle canne, ch' io nomino D, d. Avremo per tanto $D:d :: \frac{1}{V} : \frac{1}{u}$, e ne ricaveremo, che i diametri delle canne d' organo debbono corriſponderſi nella proporzione reciproca delle velocità V, u, colle quali l' aria ſi vibra agitata dal fiato, che fa ſuonare le canne.

XXXIV. Se le forze del fiato ſi eſprimano per F, f, comprimeranno l' aria nelle canne rinchiuſa per iſpazj come $\frac{FL}{D^2} : \frac{fl}{d^2}$. Le azioni di tali forze proporzionali alle forze vive MV^2, mu^2 accetteranno la relazione $\frac{F^2L}{D^2} : \frac{f^2l}{d^2}$; e giacchè $Mu^2 : mu^2 :: L:l$, ſarà parimente $\frac{F^2L}{D^2} : \frac{f^2l}{d^2} :: L:l$; analogia,

da

da cui ſi deduce $F:f::D:d$, cioè a dire, che le forze del fiato hanno da riferirſi nella ragione dei diametri delle canne.

XXXV. Ricavaſi dalla ſperienza contenuta nei numeri XXIV. e XXV. che ſi conforma colla teorica, e dai diſcorſi eſpreſſi nei numeri precedenti, che le corde d' un gravicembalo del Tratuntini, i cui ſuoni riuſcivano egualmente grati, ſpingeano contro l' orecchio maſſe d' aria proporzionali a $T^{\frac{31}{12}}$, $t^{\frac{31}{12}}$ con velocità in ragione di $\frac{1}{T^{\frac{19}{24}}} : \frac{1}{t^{\frac{19}{24}}}$. Queſto canone o eſattamente, o proſſimamente dee valere in tutti gli ſtromenti perfetti, nei quali le circoſtanze particolari non aſtringono gli arteſici ad operare diverſamente. Si rifletta, che i ſuoni vengono ſempre portati all' orecchio dall' aere, e che non c' è motivo, per cui quella tal proporzione fra la maſſa aerea, che colpiſce il ſenſorio, e la velocità, con cui lo colpiſce, piaccia in un caſo, e nell' altro no. Avendo dimoſtrato eſſere le maſſe dell' aria, che agitate dalle canne d' organo urtano nell' orecchio, come $M:m$, o ſia come $LD^2:ld^2$, e di più $T:t::L:l$, $V:u::\frac{1}{D}:\frac{1}{d}$, ne dedurremo le analogie $M:m::LD^2:ld^2::TD^2:td^2::T^{\frac{31}{12}}:t^{\frac{31}{12}}$, $V:u::\frac{1}{D}:\frac{1}{d}::\frac{1}{T^{\frac{19}{24}}}:\frac{1}{t^{\frac{19}{24}}}$; amendue le quali determinano la ragione fra i diametri delle canne $D:d::T^{\frac{19}{24}}:t^{\frac{19}{24}}$, e fra le loro baſi proporzionali ai quadrati dei diametri $D^2:d^2::T^{\frac{19}{12}}:t^{\frac{19}{12}}$.

XXXVI. Non traſcuro di notare la proprietà, che ſe le velocità dell' aria ſoggiacciano alla ſteſſa legge, le baſi delle canne d' organo, e le maſſe delle corde di un gravicembalo della ſteſſa materia, e teſe da peſi in ragione delle loro groſſezze accettano la ſteſſa ragione $T^{\frac{19}{12}}:t^{\frac{19}{12}}$. E vaglia il vero, nei gravicembali abbiabiamo trovato $M:m::L^{\frac{19}{12}}:l^{\frac{19}{12}}$, e ſoſtituendo in vece di L, l le quantità proporzionali T, t, $M:m::T^{\frac{19}{12}}:t^{\frac{19}{12}}$.

XXXVII. Miſurai diligentiſſimamente coll' ajuto del Signor Liberale Marcuzzi valoroſo organiſta di queſta Cattedrale le circonferenze proporzionali ai diametri di due canne, che ſuonavano il F fa ut, e ſi corriſpondevano in tripla ottava. L' organo della nominata Chieſa è un opera aſſai perfetta lavorata da Urbano da Venezia l' anno 1420. Stando $T:t::8:1$, ſe queſt' organo va d' accordo col gravicembalo del Traſuntini, ſi dee trovare $D:d::8^{\frac{19}{24}}:1$. La grandezza $8^{\frac{19}{24}}$ ſi determina agevolmente o col mezzo dei logaritmi, o col ſeguente ſempliciſſimo artificio. Conſtando tre ottave di 36 ſemituoni, ſi moltiplichi 36 per 19, ed il prodotto dividaſi per 24, onde ne riſulti il quoziente $28\frac{1}{2}$, numero di ſemituoni, dei quali è formata quell' armonia, la cui proporzione ſi adegua ad $8^{\frac{19}{24}}:1$. Avverto che queſti ſono ſemituoni medj, ciaſcun de' quali ſi eguaglia alla duodecima parte dell' ottava, ed abbraccia proſſimamente la ragione $18:17$. Compongono 28 ſemituoni una terza maggiore creſcente a un di preſſo $\frac{2}{3}$ di comma ſopra la doppia ottava. La terza maggiore giuſta ſopra l' ottava raddoppiata ſi eſpone per la proporzione $5:1$, o ſia per $120:24$; e venendo $\frac{2}{3}$ di comma dinotati dalla ragione $121:120$, ne ſegue che $121:24$ indica la terza maggiore aumentata $\frac{2}{3}$ di comma ſopra la doppia ottava. La metà d' un ſemituono medio ſi eſprime per $36:35$. Si moltiplichino inſieme le due ragioni $121:24$, $36:35$, e ne proverrà la relazione $363:70$, ovvero $5+\frac{13}{70}:1$. Avremo per tanto $8^{\frac{19}{24}}:1::5+\frac{13}{70}:1$,

pro-

proporzione, in cui per conformarsi allo stromento del Trasuntini, si dovrebbero corrispondere i diametri delle due canne.

Trovai la circonferenza della canna grave linee del piede Veneto 140, quella della canna acuta linee 29; e quindi stava $D:d :: 140:29::5-\frac{5}{29}:1$. Una tal proporzione è praticamente assai vicina alla $8^{\frac{19}{24}}:1$, bastando calare la circonferenza 29 per due linee, ed il corrispondente diametro per due terzi di linea, acciocchè fra i diametri D, d ci passi l' esatta fisica proporzione $8^{\frac{19}{24}}:1$.

XXXVIII. Egli è per altro vero, che la ragione $140:29$ si accosta con molto maggior precisione alla seguente $8^{\frac{18}{24}}=8^{\frac{3}{4}}:1$. Moltiplicando 36 per $\frac{3}{4}$, ne proviene il numero di 27 semituoni mezzani, che determina la relazione $8^{\frac{3}{4}}:1$. Ci danno 27 semituoni medj una terza minore calante $\frac{2}{3}$ di comma in circa sopra la doppia ottava. L' analogia $24:5$, o sia $576:120$ esprime la terza minore sopra l' ottava duplicata, e detraendo $\frac{2}{3}$ di comma indicati dalla ragione $121:120$, rimane la proporzione $576:121$ propria della terza minore scema $\frac{2}{3}$ di comma sopra la doppia ottava. Facciasi $576:121::140:29+\frac{59}{144}$, ed il quarto termine dell' analogia c' istruisce, che accresciuta la circonferenza della canna acuta meno d' una mezza linea, i due diametri D, d si ridurrebbero alla precisa fisica proporzione $8^{\frac{3}{4}}:1$.

XXXIX. Per verificare con maggiore sicurezza la corrispondenza fra il noſtro ſtromento, e la legge $D:d::T^{\frac{3}{4}}:t^{\frac{3}{4}}$, preſi la miſura di un' altra canna media fra le due mentovate, che alla più grave corriſpondeva in ottava. Giacchè $T:t::2:1$, dovrà ſtare nel caſo preſente $D:d::2^{\frac{3}{4}}:1$. Un' ottava è formata da 12 ſemituoni medj, numero che moltiplicato per $\frac{3}{4}$ mi ſomminiſtra il prodotto 9. La ſeſta maggiore creſcente $\frac{2}{3}$ di comma dinotata dalla ragione $121:72$ viene compoſta da 9 ſemituoni medj, e perciò dee adempierſi l' analogia $D:d::2^{\frac{3}{4}}:1::121:72$. La circonferenza della canna ultimamente miſurata fu linee 84 un pò âbbondanti. Si faccia $121:72::140:83+\frac{37}{121}$, e dal quarto termine impareremo la molta eſattezza, colla quale anche queſta canna ſi adatta al canone $D:d::T^{\frac{3}{4}}:t^{\frac{3}{4}}$.

XXXX. Al numero XXXIII. ho determinato eſſere $V:u::\frac{1}{D}:\frac{1}{d}$: ma $D:d::T^{\frac{3}{4}}:t^{\frac{3}{4}}$; dunque $V:u::\frac{1}{T^{\frac{3}{4}}}:\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$. Nei numeri X. ed XI. ſi ſono per me ſtabiliti i limiti delle velocità delle vibrazioni gravi ed acute $V:u::\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}:\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$, $V:u::\frac{1}{T}:\frac{1}{t}$. Noti chi legge, che il canone accettato dall' organo di Urbano ſi tiene perfettamente di mezzo, eſſendo la relazione $\frac{1}{T^{\frac{3}{4}}}:\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$ media geometrica fra le due $\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}:\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{T}:\frac{1}{t}$. In-organi differenti ſi troveranno proporzioni diverſe ; ma quando tali ſtromenti ſien lavorati da bravi maeſtri, le velocità delle oſcillazioni abbraccieranno una legge congruamente media fra le due eſtreme.

XXXXI. Si richiami a memoria aver io provato al numero XXXIV. che le forze F, f del fiato, che fa ſuonare le canne, debbono corriſponderſi nella ragione dei diametri D, d di eſſe canne. Suppoſto, che i ventilabri concedano l' ingreſſo libero all' aere dentro la parte inferiore delle canne, la forza del fiato ſerberà la proporzione delle quantità d' aria, che paſſano per quella ſtretta apertura, cui ſi dà nome di bocca. Queſte feſſure ſi fanno egualmente larghe, e variamente lunghe in proporzione dei diametri delle canne, ed uſcendo per eſſe quantità d' aria in ragione dei diametri ſteſſi, chiaramente ſi ſcopre, che le forze del fiato ſtanno come i diametri mentovati.

SCHE-

SCHEDIASMA VII.

Delle due cagioni determinanti il tuono negli ſtromenti naturali, o artificiali da fiato.

I. IL tuono, o il tempo d' una vibrazione ſonora negli ſtromenti naturali, o artificiali da fiato viene determinato da due cagioni, cioè o da quell' ingegno, col quale ſi genera il ſuono, che riſpettivamente ad alcuni ſtromenti io chiamerò imboccatura, o dalla lunghezza della corda d' aria contenuta dentro il corpo d' eſſi ſtromenti. Obbediſce il tuono ad una ſola di queſte cagioni, quando all' altra molto prevale: e ſe non ſi dà un tale predominio, naſce ſempre un ſuono diſaggradevole, allora che le due cagioni non vanno perfettamente d' accordo, tentando entrambe di produrre un ſuono diverſo. Parlerò in primo luogo di quegli ſtromenti, in cui il tuono è determinato dal modo, col quale il ſuono ſi forma. Farò poſcia tranſito a quegli altri, ne' quali il tuono dipende dalla lunghezza della corda d' aria nelle loro canne rinchiuſa. Finalmente dirò qualche coſa dei ſuoni falſi traenti l' origine dal contraſto delle due cagioni determinatrici del tuono.

II. Qualora un corpo ſonoro ſi vibra, urta violentemente nell' aria, le particole della quale coſtipandoſi prima, indi reſtituendoſi, e poi dilatandoſi, e tornando nuovamente a reſtituirſi, oſcillano iſocrone allo ſteſſo corpo ſonoro. Nella Diſſertazione I. dello Schediaſma VIII. faccio vedere, che nel tempo di una mezza vibrazione del corpo mentovato le particole aeree l' una dopo l' altra ſi comprimono, che in pari tempo ſi riducono al primiero ſtato, che reciprocando il corpo ſonoro ſpendono il tempo di mezza vibrazione nel dilatarſi, ed altrettanto nel ritornare alla priſtina denſità equilibrata col peſo dell' atmoſfera. Con quanto maggiore, o minore velocità in ſiti analoghi il corpo ſonoro ſcorre lo ſpazio, che ſuppongo dato, per cui ſi vibra, e per conſeguenza quanto minore, o maggior tempo c' impiega a ſcorrerlo, altrettanto cala, o creſce il tempo delle compreſſioni, o delle dilatazioni, e delle reſtituzioni dell' aria.

III. Concioſſiachè ſucceda il medeſimo effetto nel noſtro fluido, o venga queſto urtato dal corpo ſonoro, o pure al contrario sia spinto con pari velocità contro il corpo suddetto; ne segue, che urtando l' aria in un corpo, si costipa, ed indi si restituisce, e concependo palpitazione produce suono. Adiviene lo stesso anche quando l' aria in moto colpisce nell' aria quieta, o che cammina avanti più lentamente; imperciocchè in questa circostanza altresì l' aria si condensa, e si mette in oscillazione. In si fatta maniera, e non altrimenti le particole aeree collocate in una linea, lungo alla quale si propaga il suono d' un corpo, successivamente si vibrano, e ci portano il detto suono all' orecchio. Ad ogni moto violento d' aria sempre qualche suono ci corrisponde. Cotale suono poi si sente grave, e debole, ovvero acuto, e forte conforme a che l' aere cammina con minore o con maggiore velocità. Tutto giorno sperimentiamo, che il suono cresce e di tuono e di forza all' incalzare del vento, e poscia torna a calare, quando il vento diviene meno impetuoso.

IV. Che se l' aria spinta violentemente sia costretta a passare per un' angusta fessura, non solo urta nelle pareti della fessura stessa, ma affollandosi per trovare l' uscita, vie più si costipa, e concepisce un suono spiritoso e robusto. Dipende il tuono dalla celerità, colla quale l' aria passa per la fessura, da cui con una qualche ragione inversa prendono norma i tempi delle condensazioni dell' aria stessa. La detta velocità può alterarsi per due motivi; o perchè il movimento dell' aria cali, o cresca prima di entrare nella fessura, che si suppone invariata; o perchè conservandosi costante il nominato movimento dell' aria, lo spiraglio si ristringa, o si allarghi; essendo verità nota che in tal circostanza l' aria camminerà dentro le picciole aperture con velocità in proporzione inversa dell' aja delle aperture suddette. Ma posto che il moto dell' aria prima d' introdursi nella fessura, e l' aja della stessa si corrispondessero in data ragione; l' aria viaggerebbe per la fessura in ognuno degli accennati casi colla medesima velocità, ed i suoni non riuscirebbero diversi, salvo nel piano e nel forte, secondochè per l' apertura più o meno ristretta facesse transito una quantità d' aria minore o maggiore.

V. Rischiaro le cose dette coll' esempio del fischio. Per fischiare s' increspano, e si ristringono le labbra, di maniera che alla metà di esse resta un angusto pertugio, per cui spinto velocemente il fiato, si genera il fischio. Dipende il suo tuono dalla velocità, colla quale l' aria passa per l' apertura, e nella de-

determinazione di tale velocità c' entrano due elementi, cioè a dire il vario empito, con cui il fiato è cacciato dai polmoni, e delle labbra il vario ristringimento. Se quanto cresce, o cala l' aja della fessura, altrettanto crescerà altresì, o calerà il moto, col quale il fiato esce dal petto, l'aria farà transito per il pertugio con celerità invariata, e rimanendo costante il tuono del fischio, se ne altererà soltanto la forza, e si udirà esso o piano o forte, secondochè per l' adito più o meno angusto passa una quantità d' aria minore o maggiore. Chi si diletta di fischiare, ed è fornito di buon gusto, e di orecchia perfetta, sa far uso a dovere dei due descritti elementi, producendo le voci di vario tuono, e modificandone ad arbitrio il vigore.

VI. Alla classe, di cui parliamo, appertengono i suoni, che si sentono, quando il vento s' introduce per una carta socchiusa, e mezzo aperta, che in luogo di vetri ripari gli sportellini d' una fenestra, il quale stromento (se pure merita un tal nome) M. Dodart (a) chiama per brevità impannata susurrante. Crescendo la velocità del vento, crescono i suoni e di tuono, e di forza; perchè quì non ha luogo l' artificio di ristringere l' apertura nei suoni acuti, onde non riescano più vigorosi dei gravi, e quindi s' odono snervati, i suoni gravi, e crudi gli acuti. Anche le pivette dei fagotti, degli oboè, e certi registri dell' organo con piva meritano d' essere collocati sotto la stessa spezie. Le corde d' aria contenute nelle loro canne sono talmente corte, che non ponno fare contrasto colla violenza della imboccatura, dalla quale principalmente viene il tuono determinato. Nel registro dei tromboncini di un organo, opera assai pregevole del Signor D. Pietro Nachini, la canna più grave lunga in circa un piede ed un sesto corrisponde all' unisono colla canna lunga otto piedi del registro, che chiamasi principale. In oltre le lunghezze di due tromboncini accordati in ottava non si riferiscono nella ragione 2 : 1 necessaria, acciocchè le canne corrispondenti del registro principale formino la detta consonanza, ma bensì a un di presso nella ragione 3 : 2. Quindi ella è cosa chiara, che il tuono dei tromboncini non è come nella canna del registro principale dalle lunghezze delle corde d' aria determinato. Dalla imboccatura per tanto il tuono dei tromboncini prima-

(a) *Memorie dell' Accademia di Parigi dell' anno* 1700.

mariamente dipende: ed in fatti esso cresce o cala, secondochè abbassando o alzando la molla di ottone, che comprime la linguella, si accorcia o si allunga quella porzione della linguella che oscilla, e conseguentemente si ristrigne o si allarga la fessura, per cui l' aria entra dentro la canna. Nel mentovato registro la canna fa la stessa figura come nel gravicembalo, e nel violino il corpo dello stromento, ed è principalmente destinata a rendere più sonora la voce. E siccome il corpo della violetta è maggiore di quello del violino, ed il corpo del violoncello eccede quello della violetta, così ai suoni più gravi del nostro registro si adattano canne più lunghe, e più larghe, onde alla gravità della voce corrisponda il corpo dello stromento. Nel violino esempigrazia egli è necessario, che lo stesso corpo serva a più suoni; ma nel registro, di cui parliamo, si può con maggior perfezione assegnare a ciascun suono la canna, che più gli conviene.

VII. Se ciò, che ha stabilito il celebre M. Dodart intorno le cagioni della voce dell' uomo, e de' suoi differenti tuoni nelle Memorie della Reale Accademia di Parigi degli anni 1700, 1706, 1707, si accordasse interamente colla verità, il tuono della voce umana, ed ancora di altri animali derivarebbe unicamente (supposta costante la velocità dell' aria nel canale della trachea) dalle varie aperture di quella fessura, cui si dà il nome di glottide. Ammette questo dotto Autore la varia tensione, ed i fremiti delle labbra della glottide, ma soltanto come necessarj alla formazione della voce, e non già come determinanti il tuono della medesima. Io per altro ho dimostrato al numero III. che ancora indipendentemente dalla palpitazione di un corpo solido, l' aria può render suono; ed in confermazione di ciò basta riflettere allo strepitoso fragore dei tuoni. Oltre di che qual mai sensibile tremito possono concepire le fibre del legno, che circondano la fessura, per cui l' aria ha l' ingresso dentro la canna di un flauto?

Frattanto il rinomato M. Ferrein (*b*) ha scoperto, che le due labbra della glottide, da lui chiamate corde vocali, son quelle, che incitate all' oscillazione dal fregamento dell' aria, la quale passa violentemente fra loro, e tese più, o meno secondo

(b) *Memorie dell' Accademia di Parigi 1741.*

do il bisogno, producono i diversi suoni della voce. Non potendo l' ingegnoso Autore tentare le sue sperienze sopra uomini vivi, s' immaginò di restituire la voce ai morti. Adattato un picciol mantice ad alcune trachee fresche fresche, l' aria, che con gran forza fece passare per la glottide, secondochè le cordicelle di questa furono più o meno stirate, portò differenti tuoni all' orecchio, i quali dalle diverse aperture della glottide non ricevevano alterazione. Le varie voci, che si ottengono col mezzo di questa esperienza, cangiano poco di natura, ed ancora si riconosce il mugito di un toro, il grido d' un cane che si lamenta, quantunque manchino il palato, i denti, le labbra, e la laringe medesima staccata dalla gorga dell' animale fosse ordinariamente assai mutilata, e qualche fiata altresì si fosse staccata l' epiglottide, e tutti i pezzi di cartilagine, che cingono o coprono la glottide, e le corde vocali, a cagione di rendere visibili le loro vibrazioni. E concioffiachè potesse sembrare impossibile, che due corde, la cui lunghezza non eccede un' oncia, rendessero un suono maschio e vigoroso nei tuoni gravi, non ha mancato M. Ferrein (c) di allegare la ragione dimostrativa di questo effetto maraviglioso.

VIII. Abbenchè gli esperimenti del commendato Scrittore non ci lascino dubitare, che dalla varia tensione delle labbra della glottide nascano principalmente i cangiamenti di tuono; nulladimeno essendo parimente certo, che quanto più si stendono le corde vocali, tanto maggiormente l' una all' altra si accostano, e che questo solo elemento della diversa apertura, quando i polmoni spingano l' aria con forza uniforme, produce la diversità dei tuoni nel zufolo; io congnietturo, che in una voce perfetta amendue le cagioni si uniscano nella determinazione del medesimo tuono.

Posto ciò rimane il pregio loro alle belle riflessioni di M. Dodart intorno alle minutissime alterazioni dell' apertura della glottide uguale al più ad una linea, mentre si fa transito per picciolissimi gradi dal tuono più grave al più acuto, e mentre non cangiando tuono, si passa con menomissimi incrementi, o decrementi dal piano al forte, o al contrario. Non cessa egli, e con ragione, d' ammirare l' infinita Sapienza del Creatore, il qua-

(c) *Memorie dell' Accademia di Parigi* 1743.

il quale ha dato all' uomo la facoltà di far uſo di un organo con tanta perfezione, e prontezza, ſenza conoſcerne la ſtruttura, e gli ſtupendi artificj.

IX. Alla qualità della voce umana molto giova la perfezione di ciaſcuna corda vocale, la loro ſquiſita uniformità nella teſſitura, nella denſità, nella tenſione, nella rigidità, e nelle lunghezze, ed altresì l' eſatto accordo fra le due cauſe determinatrici del tuono. Qualunque conſiderabile difetto, o alterazione di queſta puntuale corriſpondenza può far divenire falſa la voce. Se non che rivolgendo la conſiderazione al regiſtro dell' organo, che ſi nomina voce umana, perchè di molto l' imita, ogni ſuono del quale fornito di un' aggradevole pulſazione è formato da due ſuoni, che diſcordano a un di preſſo per un dieſis' enarmonico, ſi potrebbe ſoſpettare, che nella voce dell' uomo l' effetto analogo da una cagione ſimile procedeſſe.

La doppia concavità della bocca, e delle narici chiamata dal Fabriccio canal eſteriore, per diſtinguerla dal canale interiore, cioè dalla trachea, fa l' ufficio di corpo dello ſtromento in riguardo alla voce; e per quanto, atteſa la diſuguaglianza, e la mollezza delle parti, onde queſto canale è compoſto, poſſa ſembrare poco capace di riſonanza, non può metterſene in dubbio l' ottimo effetto almeno mediante il palato, e le narici. Rende ciò manifeſto l' alterazione del ſuono della voce nei raffreddati di teſta, e quando ſuccede per qualſiſia cagione, che l' aria non valichi liberalmente pel naſo. Giudica M. Dodart falſa la fraſe popolare parlare, o cantare nel naſo, e tutto al contrario ſtabiliſce, che ſe cantaſi colla ſola bocca, il naſo eſſendo chiuſo, e per conſeguenza ſenza ch' eſſo abbia alcuna parte nel ſuono della voce, allora la voce, che ne riſulta, raſſomiglia quella dell' anitra, il che propriamente intendeſi di eſprimere, quando ſi dice parlare, o cantare nel naſo. Ricorrendo agli eſperimenti, ho trovato, che cantando e col naſo, e colla bocca, ed anche ò col ſolo naſo, o colla ſola bocca, la voce riuſcirà grata, purchè l' aria non paſſi pel canale delle narici o poco, o molto impedito. Che ſe non ſi oſſerverà queſta precauzione, ſi canterà nel naſo con diſguſto di chi ſta ad aſcoltare.

La dimenſione del corpo dello ſtromento riſpettivamente alla voce non è coſtante. La glottide aſcende, allora che ſi producono le voci acute, ed al contrario diſcende, quando ſi

fanno

fanno sentire le voci gravi, e se queste saranno delle più profonde, si sporge la bocca in fuori quanto si può; e quindi corrisponde alle voci acute un canale alquanto più corto, ed alquanto più lungo alle voci gravi. Si capirà la massima perfezione della voce umana, riflettendo ch' essa sola equivale ad un registro di tromboncini nell' organo di moltissime canne formato, che andassero per minimi gradi crescendo di tuono. Ma conciossiachè con un tale registro non si potrebbe eseguire il piano, ed il forte; chiaramente si scopre quanto esso alla voce umana cederebbe di perfezione.

X. M' innoltro a parlare degli stromenti da fiato, nei quali il tuono è determinato dalla lunghezza della corda d' aria contenuta nelle loro canne. Sotto questo genere vanno collocate le canne d' organo, il flauto, il flauto traverso, l' oboè, il fagotto, la tromba, il corno da caccia, &c. che non possono rendere altri suoni, salvo quelli, che sono proprj delle corde d' aria più o meno lunghe, che si mettono in tremito. Ho detto più o meno lunghe per due motivi; perchè sono atte ad oscillare la corda d' aria contenuta nel corpo dello stromento, o le sue metà, o le sue terze parti, &c. o perchè la canna dello stromento sia in più luoghi artificiosamente forata, conforme si pratica nel flauto, nel flauto traverso, nell' oboè, nel fagotto. Serrati tutti i fori, la corda d' aria termina a un di presso all' estremità della canna; ed aprendoli gradatamente, la corda stessa si va proporzionatamente scorciando.

XI. Ma quantunque nei mentovati stromenti l' imboccatura serva alla corda d' aria, egli è d' uopo adattarla a quei suoni, che si vogliono generare. Mi sovviene, che avendo otturata colla palma della mano una canna d' organo, è stato necessario darle un tenuissimo fiato, acciocchè producesse il suono all' ottava grave di quello della canna aperta: accrescendo un poco la forza del fiato, il suono saliva all' ottava acuta. S' io voglio, che suoni la corda intera dalla canna circondata, bisogna che regoli talmente la velocità del fiato, ch' entrando nella bocca della canna, e comunicando colla corda d' aria, possa concepire un tremito unisono alla corda suddetta. Incitando maggiormente il fiato, onde divenga unisono alla metà della corda, suonano le due metà, e così di mano in mano si pongono in oscillazione le terze, le quarte parti, &c. per opera di fiati unisoni ad esse parti. Chi applicasse al fagotto la pivetta dell' oboè, in vece di far oscillare la corda intera, ne metterebbe in tremito le metà, o le terze parti; dimodochè si udirebbero suoni, che ai consueti del fagotto corrisponderebbero in ottava, o in duodecima. Rottasi lateralmente una pivetta d' oboè, un principiante tagliò via la parte rotta, e rese la pivetta più ristretta notabilmente: ed avendola poi adattata allo stromento, i suoni tutti montavano all' ottava alta. Richiami a memoria il Lettore, essersi da me dimostrato nello Schediasma IV. al numero XXII. che non si comunicano sensibilmente altri tremiti che gli unisoni o esattamente, o prossimamente; e perciò se la palpitazione, che concepisce il fiato mediante l' imboccatura, non si riferisce punto all' unisono colla corda aerea contenuta nel corpo dello stromento, o colle parti aliquote della sua lunghezza, non nasce in essa corda sicuramente alcun suono.

XII. Sino ad un certo segno la maggiore, o minore velocità del fiato cagiona nel suono il forte, o il piano. Non può per altro negarsi, che in quegli stromenti, la struttura dei quali non permette, che acconciamente si allarghi, o si restringa l' angusta apertura, per cui l' aria passa, il forte ed il piano non vadano accompagnati da qualche picciolo accrescimento, o decremento di tuono; segnandosi per conseguenza una corda d' aria alquanto più corta, o alquanto più lunga. Non succede così nell' oboè, e nel fagotto, nei quali comprimendo la piva con forza minore, o maggiore, ed accrescendo, o scemando a dovere la velocità del fiato, si fa sentire il forte od il piano senz' alterazione del tuono.

Nella tromba, e nel corno da caccia i limiti del forte, e del piano sono molto ristretti, di maniera che passati questi limiti, il fiato cangia di tuono, ed essendo divenuto unisono ad una parte aliquanta della corda d' aria nello stromento rinchiusa, non può ad essa il tremito sonoro partecipare. Al contrario nelle canne d' organo, nei flauti, negli oboè, &c. i detti confini sono talmente vasti, che ridotto per esempio il suono 1 della corda intera alla massima forza, di cui è capace, basta ch' io aumenti per un minimo la velocità del fiato, acciocchè questo divenga unisono alle due metà della corda, e produca il suono 2.

XIII.

XIII. Per confermare vie più la verità, che negli ſtromenti da fiato l' imboccatura, e la corda d'aria determinano il tuono, il quale obbediſce per dir così a quello dei due elementi, ch' ha maggior forza, feci il ſeguente raziocinio. La pivetta d' oboè ſeparata dallo ſtromento racchiude nella picciola canna una corda d' aria così corta, che l' elemento predominante nella determinazione del tuono dee riputarſi l' imboccatura. Col variar dunque queſta, un perito ſonatore potrà cavar parecchi tuoni dalla pivetta, i quali facciano oſcillare corde d'aria o più lunghe, o più corte della canna, la cui lunghezza alla violenza della imboccatura non ha vigor di reſiſtere. Applicata la pivetta al corpo dell' oboè, e laſciato aperto ogni foro, la corda d' aria è di lunghezza conſiderabile, e conſeguentemente la diverſità dell' imboccatura potrà ottenere minore effetto. Finalmente otturati i fori tutti dello ſtromento, la corda d' aria diviene talmente lunga, che dalla varia imboccatura verrà cagionata molto picciola mutazione di tuono.

Pregai col mezzo del P. Franceſcantonio Vallotti inſigne Maeſtro di cappella nella Baſilica di S. Antonio di Padova il Signor Matteo Lucca famoſo ſonatore di oboè a tentare gli eſperimenti mentovati, i quali a maraviglia corriſpoſero ai miei penſamenti. Colla pivetta ſeparata dall' oboè fece un intero eſacordo di voci giuſte, diſtinte, ed articolate; affermando che ſarebbe arrivato anche all' ottava, ſe aveſſe avuto in pronto una pivetta buona, e perfetta; giacchè il vero indizio della perfezione d'una pivetta ſi è il render eſſa le voci tutte d' un intera ottava. Notò il P. Vallotti, che per cavare il tuono più grave dalla pivetta, l' apriva colle dita prima di applicarſela alle labbra, colle quali poi comprimendola acconciamente, e rinforzando anche il fiato giuſta il biſogno, produceva i tuoni a grado a grado più acuti. Adattata poſcia la pivetta allo ſtromento, laſciando i fori tutti aperti, non ha potuto variar la voce, ſalvo che per un tetracordo, ma con intonazione meno perfetta che nel primo eſperimento. Chiuſi all' ultimo tutti i fori, non gli è riuſcito di far mutazione ſe non di un tuono a un di preſſo; ma con intonazione affatto falſa, ed aſſai diſguſtoſa.

XIV. Naſce il ſuono falſo dal meſcolamento di più ſuoni, che in ragioni ineleganti fra loro ſi riferiſcono. Nella terza eſperienza l'aere ſpinto dentro la pivetta concepiſce sforzatamente un ſuono più grave, o più acuto di quello della corda d' aria contenuta nello ſtromento, il quale ſuono non pertanto agiſce nella detta corda a cagione dell' uniſono proſſimo, di maniera che ſi ſentono nel tempo ſteſſo il ſuono generato dalla pivetta, ed il ſuono della corda aerea rinchiuſa nella canna dell' oboè. Quindi manifeſtamente ſi comprova quello, che ho detto di ſopra al numero XI. doverſi l' imboccatura talmente regolare, che il fiato poſſa acquiſtare palpitazioni uniſone alle corde d' aria, di cui ſi vuol far ſentire il ſuono. In fatti procedendo i ſonatori d' oboè per eſempio dal grave all' acuto, premono ſempre più la pivetta colle labbra, onde la ſua apertura ſi vada gradatamente ſtringendo, e ſe in alcuni caſi il riſtringimento non è ſufficiente, ſuppliſcono coll' accreſcimento della velocità del fiato, il che ne' ſuoni più acuti ſuol renderſi neceſſario.

SCHE-

SCHEDIASMA VIII.

Della propagazione de' tremiti sonori nell' aria.

DISSERTAZIONE I.

Della propagazione del suono per linee, o raggi, che partono dal corpo sonoro quasi da centro, supponendo, che tutti i punti aerei contenuti nel medesimo raggio si vibrino per eguali spazj.

I. PEr procedere rettamente nella trattazione dell' argomento difficilissimo, che mi propongo, stimo necessario l' appoggiarmi ad alcuni fenomeni manifestati dalla esperienza.

E primieramente oscillando un corpo sonoro, io sento in diverse distanze lo stesso suono in riguardo al grave e all' acuto, e l' udirei ancora egualmente forte, prescindendo dalle resistenze, se in cambio di dilatarsi sfericamente intorno il centro sonoro, fosse obbligato a propagarsi lungo un canale cilindrico per tante linee rette parallele ai lati del detto canale. Per ora suppongo, e mi riservo di provarlo nelle Dissertazioni seconda, e terza, che il suono diffondasi non per settori sferici, ma per innumerabili linee, o raggi, che partono dal corpo sonoro quasi da centro; e che tutti i punti aerei si vibrino per eguali spazj con pari velocità in siti analoghi.

In secondo luogo essendo l' aria valevole di portarci all' orecchio più suoni, che differiscono nel piano, e nel forte, ne segue necessariamente, che le sue particole debbono vibrarsi a guisa di pendoli a cicloide, e che per conseguenza gli spazj scorsi dalla stessa particola, cominciando dalla quiete, stanno come i seni versi degli angoli esprimenti i tempi, nei quali i detti spazj si scorrono.

Finalmente il suono viaggia equabilmente, cioè a dire le distanze, alle quali si propaga, sono proporzionali ai tempi, che nella mentovata propagazione s' impiegano. Da un tal fenomeno si ricava, che segnati in una linea retta aerea varj punti l' uno dall' altro egualmente distanti, se fra il principio del moto del primo e del secondo ci passa il tempo uno, fra il principio del moto del primo e del terzo ci passerà il tempo due, e così

di

di mano in mano. Quindi i varj punti d' aria fanno vibrazioni isocrone, che principiano tanto più tardi, quanto essi punti sono più rimoti dal centro sonoro.

II. Dai tre premessi fenomeni deriva il quarto, che metto sotto la considerazione di chi legge, col mezzo del seguente teorema.

Al cessare delle oscillazioni del corpo sonoro, cessano altresì le agitazioni nell' aere.

Sia A a (*Fig.* 29.) una minima particola, o fibra d' aria, ed i suoi punti estremi A, a si vibrino per le saette uguali A G, a g. Sopra i diametri A G, a g si descrivano i circoli dimostrati dalla figura, e tirate prima per li centri D, d le linee 3 D 9, 4 d 10 normali ad A g, onde ogni circolo resti diviso in quattro quadranti, ciascun quadrante s' intenda distribuito in pari numero infinito di parti eguali. Nella figura per evitare la confusione ho diviso ogni quadrante in tre sole porzioni: Per li punti delle divisioni si conducano come nella figura le ordinate ai diametri A G, a g.

Vibrandosi il punto A non altrimenti che un pendolo a cicloide, gli archi A 1, A 2, A 3, &c. rappresenteranno i tempi, nei quali si scorrono gli spazj corrispondenti A B, A C, A D, &c. i quali staranno come i seni versi degli angoli A D 1, A D 2, A D 3, &c. che ai detti archi A 1, A 2, A 3, &c. sono proporzionali. Le stesse riflessioni si adattino alle oscillazioni del punto a.

La nostra fibra A a sia di tale lunghezza, che fra il principio del moto dei punti estremi A, a ci passi il tempo proporzionale all' arco A 1. Ciò posto, scorso dal punto A lo spazio A B, in tale istante si comincierà a movere il punto a, e la particola A a si farà costipata per lo spazio A B. Nel secondo tempicello 1, 2 il punto A viaggerà per lo spazio B C, ed il punto a per lo spazio a b = A B, ed essendo B C > a b, crescerà la costipazione della fibra, che si troverà eguale a B C. Con tal metodo procedendo, osserveremo che si aumenta il ristringimento della fibra A a, fino a tanto che il punto A giunge al punto D dividente per metà lo spazio totale A G. In sì fatta circostanza la costipazione giunta al colmo s' eguaglia a

C D,

CD, e la particola Aa è fornita della maſſima velocità. E vaglia il vero, mentre il punto A paſſa lo ſpazio DE, dal punto a ſi ſcorre lo ſpazio eguale cd, i quali ſpazj ſono i maſſimi, che ſi paſſino in uno de' noſtri tempicelli rappreſentati dalle parti aliquote ſimili, in cui ſi ſono diſtribuiti i due circoli, e conſeguentemente ſi paſſano colla maſſima velocità. Oſſervi chi legge, che per uno de' mentovati tempicelli la coſtipazione nè creſce, nè cala, viaggiando, come abbiamo notato, i punti A, a per eguali ſpazj DE, cd.

Nel tempo minimo, che ſegue immediatamente, il punto A ſi avanza per lo ſpazio EF, ch' è più picciolo dello ſpazio de corſo dal punto a, e quindi la fibra comincia a dilatarſi. Nei tempicelli che ſuccedono eſſendo i paſſi del punto A minori di quelli del punto a, va continuamente ſcemando la coſtipazione, la quale finalmenre ſi riduce a nulla, quando la fibra compiuta una vibrazione ſi ritrova in quiete nel ſito Gg. Quivi eſſendoſi la particola reſtituita alla priſtina dimenſione, ſtando equilibrata col peſo dell' atmosfera, e trovandoſi in ripoſo, non farà certamente più moto, ſe a ciò non le dà nuovamente motivo la reciprocazione del corpo ſonoro.

III. In fatti reciprocando il corpo ſonoro, ſi rompe l' equilibrio dalla parte di A, e mentre il punto a continua il ſuo cammino per lo ſpazietto fg, e compie una vibrazione, il punto A retrocede per un pari ſpazio GF, e la noſtra fibra ſi dilata per tale quantità oltre la ſua naturale miſura. Nel tempicello ſeguente ritornano indietro il punto A per lo ſpazio maggiore FE, ed il punto a per lo ſpazio minore gf, e la dilatazione ſi aumenta. Acquiſta eſſa il maſſimo valore, quando pervenuti i punti A, a nei ſiti D, d, la particola d' aria è fornita della maſſima velocità.

Calando poſcia la velocità, cala altresì la rarefazione con tal legge, che divengono l' una e l' altra eguali a nulla, mentre la fibra ſi reſtituiſce alla primitiva poſitura Aa. Rifletto di bel nuovo, che accoppiandoſi nella particola d' aria la quiete con quella lunghezza, che richiede l' equilibrio col peſo dell' atmosfera, egli è impoſſibile, che ſenza la cagione eſtrinſeca d' una iterata vibrazione del corpo ſonoro ſeguiti ad oſcillare.

Quello che ſi è detto d' una particola, s' applichi a tutte, e conchiudaſi che al ceſſare delle vibrazioni del corpo ſonoro, ceſſano parimente le agitazioni dell' aria.

IV.

IV. I premeſſi raziocinj ci hanno fatto ſcoprire varie curioſe proprietà, che le particole d' aria ſono oltre il conſueto compreſſe nelle oſcillazioni, dilatate nelle reciprocazioni; che le maſſime compreſſioni, e dilatazioni vanno congiunte colle maſſime velocità acquiſtate dalle particole oſcillando, e reciprocando; che nell' atto di ridurſi alla quiete ricuperano le particole la loro ordinaria compreſſione. Se chi legge eſaminerà gli Autori più celebri, ſi accorgerà, che in tale propoſito hanno traveduto. Intanto ſtimo bene notare la differenza, che paſſa fra una fibra d' aria, ed una corda ſolida, che oſcilla traverſalmente a due ſcannelli appoggiata. Continuerebbe queſta a vibrarſi per un tempo infinito, ſe non ci foſſero reſiſtenze; perchè quando è in quiete, ſi trova fuori di equilibrio, e quando ſi trova in equilibrio, cioè a dire in linea retta, non è in quiete. All' oppoſto la fibra aerea, rimoſſa la cagione eſterna, ceſſa di vibrarſi; perchè in eſſa ſi uniſcono e l' equilibrio, e la quiete.

V. Dilucidato un tal punto, ch' era dianzi da molta oſcurità circondato, proſeguiſco l' intrapreſo cammino, e mi faccio a ſciogliere il ſeguente problema.

Il primo punto A (*Fig.* 30) *della linea aerea* A B *facendo una mezza oſcillazione per la direzione* A B, *ſcorra uno ſpazio eguale alla linea* A D *normale ad* A B, *ed intanto il tremito ſonoro ſi ſia propagato da* A *ſino in* B. *Nell' iſtante, in cui il punto* A *giunge al termine del detto ſpazio, un altro qualunque punto* G *abbia paſſato lo ſpazio eguale alla linea* G H *parallela ad* A D. *Congiunti i punti* D, H, *ed altri ſimilmente determinati con una curva, che paſſerà pel punto* B, *perchè quando* A *ha compiuta una ſemivibrazione, il punto* B *non s' è ancor cominciato a movere; ſi dimanda la natura della curva medeſima.*

Segnata B C uguale, e parallela ad A D, e condotta per li punti D, C la linea D C F, ſi faccia centro in C, e col raggio C B deſcrivaſi il quadrante B K F. Si meni poſcia pel punto H la retta H I K parallela ad A B.

Viaggiando il ſuono equabilmente, ſe nel tempo A B ſi propaga da A ſino in B, nel tempo G B ſi propagherà da G ſino in B, e la linea A G eſprimerà il tempo, per cui il punto G ſi comincia a movere dopo del punto A: ma i punti A, G giungono al termine degli ſpazj eguali alle linee A D, G H

nel

nel medeſimo iſtante, ed il punto A a ſcorrere lo ſpazio eguale ad AD c' impiega il tempo AB; dunque il punto G nel paſſare lo ſpazio GH ci ſpenderà il tempo GB, cioè a dire quel tempo ſteſſo, nel quale il ſuono cammina da G fino in B. Ho notato al numero primo che i tempi, in cui ſi ſcorrono gli ſpazj eguali alle linee AD, GH, ſtanno come gli archi BF, BK, dei quali le dette linee ſono i ſeni verſi. Quindi ci ſi preſenta l' analogia AB:GB::BF:BK, da cui naſce l' altra AB:AG::BF:KF, che ſomminiſtra l' equazione $AG = \frac{AB.KF}{BF}$. Si chiami $AB = DC = \frac{1}{2}L$, $AD = BC = CF = c$, il quadrante $BKF = b$, l' arco $KF = z$, $AG = DE = x$, $HE = y$, e conſeguentemente $GH = c - y$. Egli è noto che l' arco $KF = z$ ſi eſprime per $S\frac{cdy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$. Soſtituiti nella premeſſa formola in cambio delle linee i valori analitici, troveremo $x = \frac{L}{2b}.S\frac{cdy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \frac{Lz}{2b}$; equazione appartenente alla curva cercata DHB. La ſteſſa curva ſi è quella, in cui ſi ripiega la metà $DC = \frac{1}{2}L$ della corda L ſolida, e teſa, mentre ſi vibra appoggiata a due ſcannelli, uno de' quali è D, ed il punto medio C ſcorre la ſaetta $CB = c$. Queſta verità è ſtata da me dimoſtrata nello Schediaſma IV. e ciò prima aveano fatto i Signori Brook Taylor nel ſuo Metodo degl' incrementi diretto, ed inverſo, e Giovanni Bernoulli nel Tomo III. dei Comentarj dell' Accademia di Pietroburgo. Non diſſimulo parimente, che della ſcoperta, che la curva ultimamente nominata ſia la ſteſſa con quella del preſente problema, ſiamo debitori al Signor Giovanni Bernoulli il giovane. Veggaſi la ſua eccellente Diſſertazione ſopra la propagazione del lume, che l' anno 1736. ha ottenuto il premio dall' Accademia di Parigi.

VI. La curva DHB, a cui ſi adatta la ſemicorda ſolida DC, ſi riferiſce all' aſſe DC, e BC, HE, ſono gli ſpazj, che in pari tempo ſi ſcorrono, mentre eſſa corda paſſa dalla poſitura DHB alla linea retta DEC. Che ſe la curva DHB si considera come servente al nostro problema, va riferita all' asse AB, e gli spazj per la direzione AB, al fine dei quali i punti aerei A, G giungono nello stesso istante, s' eguagliano alle linee AD, GH. Si avverta che i punti A, G pervengono nel medesimo momento al termine dei competenti spazj; perchè uniti in una somma il tempo BK, che dal punto G s' impiega a passare lo spazio eguale a GH, ed il tempo KF, per cui il punto G comincia a moversi dopo del punto A, ne risulta il quadrante BKF dinotante il tempo speso dal punto A nello vibrarsi per uno spazio eguale ad AD.

Determinare la forza acceleratrice d' un qualunque punto G, *dopo che ha camminato lo spazio eguale a* GH $= c - y$, *e mentre gli resta da scorrere lo spazio* HE $= y$.

VII. Presa nuovamente per mano l' equazione della curva DHB $x = \frac{L}{2b}. S \frac{c\,dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$, faccio GH $= q$, onde sia HE $= y = c - q$, e conseguentemente $dy = -dq$, e $c^2 - y^2 = 2cq - q^2$. Adempiute le sostituzioni, trovo $x = \frac{L}{2b}.S\frac{-c\,dq}{\sqrt{2cq - q^2}}$, e differenziando, $dx = \frac{Lc}{2b}.\frac{-dq}{\sqrt{2cq-q^2}}$ (1). Passo alle seconde differenze presa dx come costante, ed adempiute le convenienti operazioni, scopro $ddq = \frac{\overline{c-q}.dq^2}{2cq - q^2}$ (2).

Segno le due flussioni GL, LM ciascuna eguale alla costante dx, e condotte le ordinate LO, MQ, per li punti H, O tiro le linee HN, OP parallele ad AB, e con ciò determino NO $= dq$, PQ $= dq + ddq$.

Rappresentino ML, LG le pari lunghezze di due particole d' aria tali e quali le richiede l' equilibrio col peso dell' atmosfera: e giacchè i punti M, L, G si sono mossi per gli spazj eguali alle linee MQ, LO, GH, egli è chiaro che la particola ML si è ridotta alla lunghezza ML $-$ PQ $= dx - dq - ddq$, che la particola LG si è ridotta alla lunghezza LG $-$ NO $= dx - dq$.

Ora

Ora avendo dimostrato nello Schediasma II. che le densità dell' aria sono proporzionali alle forze comprimenti, e per conseguenza alle corrispondenti elasticità, che alle suddette forze comprimenti si eguagliano, e stando le densità delle fibre $dx, dx - dq - ddq, dx - dq$ reciprocamente come le loro dimensioni; nella stessa ragione inversa si riferiranno altresì le forze elastiche di esse fibre. Si chiami P il peso dell' atmosfera, a cui si eguaglia la forza elastica della fibra dx, e facendo

$$\frac{1}{dx} : \frac{1}{dx - dq - ddq} :: P : \frac{P\,dx}{dx - dq - ddq},$$

$$\frac{1}{dx} : \frac{1}{dx - dq} :: P : \frac{P\,dx}{dx - dq},$$

impareremo che la forza elastica della particola ML s' eguaglia a $\frac{P\,dx}{dx - dq - ddq}$, che la forza elastica della particola LG s' eguaglia a $\frac{P\,dx}{dx - dq}$. Ella è la differenza di queste elasticità, che sollecita la particola LG da L verso B, e quindi scopriremo il valore della forza sollecitante la fibra LG uguale a $\frac{P\,dx}{dx - dq - ddq} - \frac{P\,dx}{dx - dq} = \frac{P\,ddq}{dx}$. In vece di ddq pongo la pari grandezza somministratami dalla equazione (2), onde s' abbia la detta forza sollecitante $= \frac{P.\overline{c - q}.dq^2}{dx.\overline{2cq - q^2}^2}$: ma l' equazione (1) m' insegna essere $\frac{dq^2}{\overline{2cq - q^2}^2} = \frac{4b^2 dx^2}{L^2 c^2}$, ed in oltre $c - q = y =$ HE; dunque effettuate tali sostituzioni troveremo la nostra forza $= \frac{4b^2 P y\,dx}{c^2 L^2}$. Sia m la massa della linea, o corda d' aria 2 AB, la cui lunghezza L. Di questa massa alla particola LG, che prima di ricevere la nuova costipazione s' eguagliava in lunghezza a dx, ne tocca la porzione $\frac{m\,dx}{L}$. Dividendo per tanto la forza follecitante la fibra LG per la maffa della fteffa fibra, ne rifulta la forza accelerante tutta la particola LG, e per confeguenza anche il punto $G = \frac{4b^2 Py}{c^2 Lm}$, quando ad effo punto refta da fcorrere lo fpazio $HE = y$.

VIII. Attefo che tutti i punti aerei per cagion d' una ofcillazione del corpo fonoro fanno fucceffivamente vibrazioni fincrone, ed uguali; ne fegue, che un qualunque punto A, mentre gli rimane da paffare lo fpazio $= HE = y$, farà fornito della forza acceleratrice $\frac{4b^2 Py}{c^2 Lm}$.

L' aver trovato le forze acceleratrici proporzionali agli fpazj da percorrerfi, moftra poffibile nell' aria il moto, che appoggiandoci ai fenomeni, abbiamo fuppofto fimile a quello d' un pendolo a cicloide. Ho detto poffibile, perchè l' aria è capace di ricevere in fe fteffa delle vibrazioni, che non fono dotate della mentovata regolarità. Una corda folida DHB fi allontani foverchiamente dalla linea retta DEC, dimodochè s' alteri fenfibilmente la fua confueta tenfione. Nelle prime ofcillazioni di quefta corda, e confeguentemente anche in quelle, che fi communicano all' aere, non fi verifica la proprietà, che le forze acceleranti ferbino la ragione degli fpazj da paffarfi.

Determinare la velocità, colla quale fi propaga il fuono.

IX. Suppongafi la femicorda folida DC, che per quello riguarda la lunghezza $\frac{1}{2}L$, la maffa $\frac{1}{2}m$, l' elafticità P fi conformi interamente alla femicorda aerea AB. Suppongafi inoltre che la corda DC fi fia ripiegata nella curva DHB, di maniera che la faetta BC s' eguagli a quello fpazio $= AD = c$, che facendo una mezza ofcillazione fcorre prima il punto A, ed indi gli altri componenti la corda d' aria AB. Nello Schediafma IV. dove ho trattato della figura, a cui s' adatta una corda tefa, che fi vibra, mi è riufcito di provare che la forza acceleratrice di qualunque punto di tali corde, e per efempio della la corda DHB, al qual punto resta da scorrere lo spazio y per ritornare alla linea retta DC, s' eguaglia a $\frac{4b^2 Py}{c^2 Lm}$, ch' è quella forza appunto, la quale accelera i punti aerei nella corda AB, quando loro rimane da passare lo spazio y. Paragonatì insieme i due punti, B della corda solida, A della corda fluida, e fatta la riflessione che vibrandosi per eguali spazj, vengono in siti analoghi animati da pari forze acceleratrici, conchiuderemo, che nelle loro oscillazioni s' impiegano pari tempo: ma il punto B, e tutta la semicorda DHB sono isocroni, e di più in tempo che il punto A si vibra per lo spazio $=$ AD $= c$, il suono si propaga da A fino in B; dunque nel tempo che la corda 2DC fa una mezza oscillazione, il suono scorre la metà della sua lunghezza, e per conseguenza nell' istante che la corda stessa ha compiuta una intera vibrazione, il suono ha viaggiato per lo spazio eguale alla lunghezza della medesima corda.

Ho fatto vedere nel citato Schediasma al numero XV che chiamata b la lunghezza d' un pendolo a secondi, e t il tempo d' una vibrazione della corda intera 2DC espresso parimente in secondi, si verifica la formola $t = \frac{c}{2b} \sqrt{\frac{Lm}{Pb}}$, la quale giusto a quanto si è per me dimostrato, serve altresì a determinare la velocità del suono, o sia la distanza L, a cui si propaga nel tempo t. Nomino a l' altezza, alla quale si sostenta nel barometro il mercurio, G la sua gravità specifica o densità, g la densità dell' aria, e sarà l' elastiticità dell' aria $P = aG$, e la sua massa $m = Lg$. Surrogati nella premessa equazione in cambio di P, e di m i ritrovati valori, ed effettuati i necessarj calcoli, avremo $\frac{2b}{c} \sqrt{\frac{aGb}{g}} = \frac{L}{t}$ velocità del suono, che sendo equabile si eguaglia allo spazio diviso pel tempo, in cui si percorre.

X. Il celebre Signor Eulero è stato il primo, che nella sua Opera *Tentamen novæ Theoriæ Musicæ* abbia osservato, che la corda d' aria rinchiusa in una canna d' organo fa le sue vibrazioni colle medesime leggi d' una corda solida tesa. Quindi la corda d' aria nella canna contenuta, e quella corda solida, che

ab-

abbiamo ſuppoſta totalmente conforme ad una corda d' aria nella elaſticità, nella maſſa, e nella lunghezza, ſarebbero uniſone: ma nel tempo, in cui la mentovata corda ſolida fa una vibrazione, il ſuono viaggia per uno ſpazio eguale alla lunghezza di eſſa corda; dunque anche nel tempo d' una vibrazione d' una canna d' organo il ſuono ſi propaga ad una diſtanza eguale alla lunghezza della corda d' aria dalla canna compreſa. Ho piuttoſto nominato la lunghezza della corda d' aria che la lunghezza della canna; perchè ſiccome abbiamo veduto nello Schediaſma V. al numero XVI. quella è un poco più grande di queſta.

XI. Il ſuono forte, o debole dipende dalla grandezza maggiore, o minore della ſpezie c, che dinota lo ſpazio ſcorſo dalle particole aeree, mentre fanno mezza oſcillazione. Ora eſſendo b il quadrante di circolo deſcritto col raggio c, ne ſegue, che qualunque grandezza ſi aſſegni a c, è ſempre coſtante il valore della frazione $\frac{2b}{c}$, da cui s' eſprime la proporzione del ſemicircolo al raggio, o pure del circolo al diametro. Queſta rifleſſione ci addita la conſeguenza, che i ſuoni forti, e deboli camminano con pari velocità.

Lo ſteſſo ſi verifica dei ſuoni gravi, ed acuti: ed in fatti la velocità del ſuono $\frac{L}{t}$ s' eguaglia alla quantità $\frac{2b}{c} \sqrt[1]{\frac{aGb}{g}}$, in cui non c' entra alcun elemento dipendente dalla gravità, e dalla acutezza del ſuono.

XII. Eſſendo coſtante la quantità $\frac{2b}{c}$, ed altresì nella medeſima regione la lunghezza b del pendolo a ſecondi, ne ſegue che conforme a quanto ha dimoſtrato il Cavalier Nevvton nella propoſizione XLVIII. del libro ſecondo dei ſuoi Principj matematici, la velocità del ſuono $\frac{2b}{c} \sqrt[1]{\frac{aGb}{g}}$ ſta in ragione compoſta, diretta ſudduplicata della forza elaſtica dell' aria, o ſia del peſo premente aG, ed inverſa parimente ſudduplicata della denſità g dell' aria medeſima. In una data ſtagione, purchè non ſi alteri gran fatto il grado del calore, le denſità dell' aria ſerbano la proporzione dei peſi prementi almeno proſſimamente te; e quindi o cresca, o cali il peso dell' atmosfera, non si turba la velocità del suono. Variata stagione, si muta la relazione fra il peso comprimente, e la densità dell' aria, e questa mutazione diviene notabile nelle stagioni opposte di estate, e d' inverno, nelle quali il suono viaggia con velocità sensibilmente diverse. Ha osservato il dottissimo Sig. Lodovico Bianconi Accademico Bolognese scorrere il suono la distanza dalla Osservanza a Forteurbano, l' estate in secondi 76, l' inverno in secondi presso chè 79. Perciò il suono è alquanto più veloce in quella stagione che in questa nella ragione una mica minore di 79 : 76, o sia prossimamente come 27 : 26, ch' è la inversa dei tempi a percorrere lo stesso spazio impiegati. In riguardo alle densità g dell' aria corrispondenti nelle contrarie stagioni allo stesso peso comprimente aG stanno esse in proporzione inversa dei quadrati delle velocità dei suoni $\frac{L^2}{t^2}$, come chiaramente deducesi dalla formola $\frac{2b}{c} \sqrt{\frac{aGb}{g}} = \frac{L}{t}$, in cui posta costante la quantità $\frac{2b}{c} \sqrt{aGb}$, si trova sempre $\frac{1}{g}$ come $\frac{L^2}{t^2}$. La densità dunque dell' aria d' inverno crescerà sopra quella dell' aria d' estate come $\overline{27}^2 : \overline{26}^2$, o sia adequatamente come 14 : 13.

XIII. Per ridurre a computo la velocità del suono, cioè a dire lo spazio scorso in un dato tempo, e per esempio in un secondo, egli è d' uopo assegnare alle spezie analitiche componenti la nostra formola i loro valori. Facciasi $t = 1$, la frazione $\frac{2b}{c}$ dinotante la relazione fra la circonferenza circolare e il suo diametro $= \frac{355}{113}$, la lunghezza b del pendolo a secondi $= 36\frac{17}{24}$ once del piede real di Parigi, l' altezza media, a cui si sostenta il mercurio nel barometro, espressa per $a = 28$ once. Resta da determinarsi la quantità $\frac{G}{g}$, o sia la proporzione fra le densità del mercurio, e dell' aria. In due maniere può conteggiarsi la

den-

densità dell' aria, o comprendendo con essa, o pure dalla stessa escludendo l' esalazioni terrestri. Nel primo modo stando la gravità specifica del mercurio a quella dell' acqua come 13593: 1000, e la gravità specifica dell' acqua a quella dell' aria mista coll' esalazioni terrestri come 870: 1, troveremo la proporzione fra le densità del mercurio, e dell' aria sopraddetta come 1182591: 100, e per conseguenza la quantità $\frac{G}{g} = \frac{1182591}{100}$. Sostituiti nella formola $\frac{2b}{c} \sqrt{\frac{aGh}{g}} = \frac{L}{t}$ gli stabiliti valori, ed adempiute le necessarie operazioni scopriremo che il suono in un minuto secondo dovrebbe scorrere lo spazio $L = 10948$ once $= 912$ piedi parigini, mentre di fatto scorre 12456 once $=$ 1038 piedi.

Ha ottimamente avvertito il Cavalier Nevvton ritrovarsi nell' aria delle particole eterogenee, acquee, terree, saline &c. le quali essendo poco elastiche, e men costipabili, non sono atte a concepire le vibrazioni sonore. Stando adunque queste particole in quiete, il moto sonoro si propagherà per la sola aria vera più celeremente in sudduplicata ragione della minore materia. Leggesi nel secondo tomo del Saggio delle Transazioni Anglicane compendiate dal Signor Levvthorp, che il Signor Derahm ha con accuratissime sperienze trovato camminare il suono con pari velocità, o sia l' aere sereno, o sia offuscato da folta nebbia, nel qual caso è impregnatissimo d' acqua. Conferma ciò a maraviglia l' avvertenza del Signor Nevvton, e ci fa toccare con mano, che quell' accrescimento di densità, che le particole eterogenee producono nell' aria, non va computato, quando si tratti di scoprire la densità dell' aria pura per cui sola, escluse le materie di diverso genere con essa mescolate, si propagano i suoni.

La premessa formola può tornar comoda per istabilire la densità dell' aria sonora, prendendo siccome data la velocità del suono giusta le diligenti esperienze fatte l' anno 1738 dai Signori Cassini di Toury, Abbate della Caille, e Maraldi, le quali c' insegnano, ch' esso viaggia 1038 piedi parigini $=$ 12456 once in un minuto secondo. Effettuati i calcoli in conformità di una tale idea, ci si presenterà $\frac{G}{g} = \frac{15294}{1}$, espresſione, da cui ſi deduce, che quando nelle ſtagioni medie di ſprimavera, e d' autunno il ſuono cammina 1038 piedi in un minuto ſecondo, la denſità del mercurio ſi riferiſce a quella dell' aria pura nella proporzione di 15294 : 1.

XIV. Col mezzo della proprietà dimoſtrata nel numero IX. che nel tempo, in cui una canna d' organo fa una vibrazione, il ſuono ſi propaga per lo ſpazio eguale alla lunghezza della corda d' aria contenuta dentro la canna, ſi determinerebbe la celerità del ſuono, purchè foſſe nota l' eſatta proporzione fra le lunghezze di una determinata canna d' organo, e della corda nella canna rinchiuſa. Le lunghezze di una canna d' once 60, e della corda aerea da eſſa circondata ſi corriſpondano nella ragione $60 : 61\frac{1}{17}$: e poichè conforme i replicatiſſimi eſperimenti dell' accuratiſſimo M. Sauveur la corda, che oſcilla dentro la nominata canna, fa in un minuto ſecondo giuſta il ſuo metodo di computare vibrazioni 102 composte di un' andata, e di un ritorno, equivalenti a 204 numerate all' uſo comune; impiegherà in una vibrazione la parte di ſecondo $\frac{1}{204}$, ed in queſto tempo il ſuono ſcorrerà lo ſpazio $61\frac{1}{17}$ eguale alla lunghezza della noſtra corda. Ora eſſendo gli ſpazj paſſati dal ſuono, che ſi muove equabilmente, proporzionali ai tempi, avremo $\frac{1}{204} : 1 :: 61\frac{1}{17} : 12456$, ed il quarto termine dell' analogia ci manifeſterà, che il ſuono in un minuto ſecondo ſi diffonde alla diſtanza d' once 12456 equivalenti a piedi 1038.

XV. Il dottiſſimo Sig. Luigi de la Grange nelle ſue *Ricerche ſopra la natura, e la propagazione del ſuono* contenute nel Tomo primo della Regia Società di Turino condanna il metodo da me ſeguito, col quale l' incomparabile Cavalier Nevvton la velocità del ſuono determina, affermando, che queſto metodo è fondato ſopra due condizioni, che diſtruggono intieramente quelle, che dipendono dall' azione mutua eſercitata dalle particole aeree in virtù delle loro forze repulſive. Le due condizioni ſono: prima, che i movimenti di tutte le particole ſieno eſpreſſi dal medeſimo luogo geometrico: ſeconda, che queſte particole ſi comunichino il moto in tempi uguali, dimodochè paſſino tutte ſucceſſivamente per i medeſimi gradi di velocità. Prima d' ogni altra coſa avverto, eſſere l' idea, che le particole d' aria ſi fuggano con forze in ragione inverſa delle diſtanze, anzi matematica, che fiſica. Ha veduto il Lettore, qualmente nello Schediaſma II. ho ſtabilita la legge, che le denſità dell' aria ſono proporzionali alle forze comprimenti, e per conſeguenza anche alle elaſticità dello ſteſſo fluido, che colle forze comprimenti fanno equilibrio.

XVI. Chiedo permiſſione a queſto illuſtre Scrittore di adattare alla propagazione del ſuono un diſcorſo ſimile a quello, che ho fatto in riguardo alle corde vibranti nei numeri XLVI. e XLVII. dello Schediaſma IV. Le ordinate AD, GH (*Fig.* 30) della curva DHB ſi eguaglino agli ſpazj ſcorſi per la direzione AB dai punti aerei A, G, quando il ſuono ſi è propagato da A fino in B. Dallo ſpazio AD allo ſpazio nullo paſſati dai punti A, B ſi dee far tranſito gradatamente con qualche legge, che richiedendo d' eſſer fornita del neceſſario requiſito della continuità, ha da poterſi rappreſentare con una curva. Ritenute la preparazione, e le denominazioni del numero VII. ho quivi dimoſtrato, che la particola LG è ſpinta dalla forza ſollecitante $\frac{Pddq}{dx}$ proporzionale alla ſeconda differenza della ordinata $GH = q$. Per la ſteſſa ragione la particola ML verrà ſtimolata dalla forza $\frac{P.\,ddq + d^3q}{dx}$ proporzionale alla ſeconda differenza della ordinata $LO = q + dq$. Il punto G nel tempo dt ſcorra lo ſpazio $NO = dq$: dimando quale ſpazio nello ſteſſo tempo paſſerà il punto L, ſuppoſto che le forze mentovate imprimano moto ſoltanto nelle riſpettive particole. Chiamo $LO = q + dq = \overset{\text{I}}{q}$, e per conſeguenza $PQ = dq + ddq = d\overset{\text{I}}{q}$, e $ddq + d^3q = dd\overset{\text{I}}{q}$, e nomino altresì u la velocità della particola LG, ed $\overset{\text{I}}{u}$ quella della particola uguale ML. Sia inoltre come nel numero IX. a l' altezza, a cui ſi ſoſtiene il mercurio nel barometro, G la ſua gravità ſpecifica o denſità, g la denſità dell' aria, onde s' abbia l' elaſticità della ſteſſa $P = aG$, e la maſſa di ciaſcuna particola LG, ML uguale a gdx. Avrevremo per tanto per le note formole $\frac{aGddq}{dx}.dt=gdx.du$, $\frac{aGddq^{1}}{dx}.dt=gdx.du^{1}$; dunque $ddq:du::ddq^{1}:du^{1}$: ma $du=\frac{ddq}{dt}$; dunque $du^{1}=\frac{ddq^{1}}{dt}$, e quindi se il punto G cammina nel tempo dt lo spazio $NO=dq$, dal punto L si viaggerà nel tempo stesso per lo spazio $PQ=dq^{1}$, posto che ciascuna forza acceleri solamente la sua particola: condizione necessaria, acciocchè si possano usare le formole sovrapposte.

XVII. Si osservi, che passando il punto G lo spazio NO, ed il punto L lo spazio PQ, &c., la curva DHB si trasferisce per lo spazio $LG=dx$ da A verso B, ed il suono nel tempo dt ha avanzato cammino per l' elemento dx. Si osservi di più, che il punto G passa lo spazio NO un tempicello avanti scorso dal punto L, ed il punto L lo spazio PQ un tempicello avanti scorso dal punto M, e così di mano in mano; laonde tutti i punti fanno transito per gli stessi gradi di movimento regolati sempre dallo stesso luogo geometrico, ed il moto si comunicano in tempi eguali. Queste conseguenze nascono necessariamente dalle formole del Signor Luigi ridotte al giusto, le quali ci guidano alle medesime condizioni Nevvtoniane, che ha giudicato ripugnanti alla natura dell' aria.

Nelle formole $\frac{aGddqdt}{dx}=gdxdu$, $\frac{aGddq^{1}dt}{dx}=gdxdu^{1}$, &c. relative alle particole LG, ML, &c. si sostituiscano in cambio di du, du^{1} i determinati valori $\frac{ddq}{dt}$, $\frac{ddq^{1}}{dt}$, &c., e trovando $\frac{aGddqdt}{dx}=\frac{gdxddq}{dt}$, $\frac{aGddq^{1}dt}{dx}=\frac{gdxddq^{1}}{dt}$, &c., ci accorgeremo, che ciascuna ci dà $aGdt^{2}=gdx^{2}$, o sia $\sqrt{\frac{aG}{g}}.dt=\pm dx$, ed integrando senza l' aggiunta della costante, perchè si suppone, che nel punto A cominci la propagazione del ſuono, $\sqrt{\frac{aG}{g}}.\ t = \pm x$. Volendo eſprimere il tempo per ſecondi, e dinotando $\frac{2b}{c}$ la relazione fra la circonferenza del circolo ed il ſuo diametro, ed b la lunghezza d' un pendolo a ſecondi, la formola prenderà l' aſpetto ſeguente $\frac{2b}{c}\sqrt{\frac{aGb}{g}} = \pm\frac{x}{t}$, e ci manifeſterà che la velocità del ſuono non dipende nè dalla curva DHB, nè dallo ſpazio minore o maggiore, per cui rendendo un ſuono piano o forte ſi movono le particole aeree, nè dal tempo più breve o più lungo impiegato a percorrerlo, nel quale l' acutezza o la gravità del ſuono conſiſte, ma ſoltanto dalla quantità $\sqrt{\frac{aGb}{g}}$; ch' eſſa velocità è equabile, ſtando coſtantemente lo ſpazio ſcorſo come il tempo ſpeſo a paſſarlo; e che finalmente il ſuono ugualmente ſi diffonde e da A verſo B, e per la direzione contraria.

Ha creduto il noſtro celebre Autore, che ad ogni particola LG, ML corriſpondeſſe una formola diverſa, e che integrando tutte queſte equazioni, e raccogliendo i valori per ciaſcuna incognita $q, \overset{\mathrm{I}}{q}, \overset{\mathrm{II}}{q}$, &c. eſpreſſi per la ſteſſa variabile, t, ſi poteſſero determinare i movimenti di tutte le particole, per le quali il ſuono propagaſi. Ma ſendoſi da me dimoſtrata l' identità delle mentovate formole, chiaramente ſi ſcopre, che i predetti valori trovar non ſi poſſono, e che dai movimenti delle particole aeree la velocità del ſuono non ha dipendenza.

XVIII. Benchè non rieſca di ſcoprire la curva DHB, ſi ſtabiliſcono nulladimeno alcune proprietà, delle quali eſſer dee fornita. E primieramente dee toccare nel punto B l' aſſe AB, ed eſſer quivi combaciata da una parabola Apolloniana. In fatti ſuppoſta BG infiniteſima, la forza acceleratrice, che nel principio del moto ſtimola tutte le particole, fa ſcorrere alla particola B uno ſpazietto GH proporzionale al quadrato del tempo impiegato a percorrerlo: ma queſto tempo ſta in ragione dello ſpazio GB in eſſo tempo camminato dal ſuono, dunque GH come $\overline{GB}^2$, e per conſeguenza la curva HB è combaciata da una pa-

parabola Apolloniana. Intanto non si trascuri d' inferire, che nel principio del movimento le particole aeree si accelerano colla legge di un grave cadente.

In secondo luogo rispettivamente a quelle particole, che si accelerano, la curva DHB volta il convesso verso l' asse AB, ed in riguardo a quelle, che si ritardano, volge il concavo: condizioni necessarie, acciocchè in un caso le forze spingano da A verso B, e nell' altro da B verso A.

Finalmente se le forze acceleratrici serbino la ragione di una funzione della distanza HE $=$ IC dal punto medio E della vibrazione, la qual funzione sia $=o$, quando la distanza è nulla; il tempo speso a scorrere lo spazio GH seguirà la proporzione dell' arco corrispondente BK di una specie di ellisse, di cui BKF è un quadrante. Conciossiachè in questa ipotesi la particola LG in pari distanze HE dal punto E una positiva, e l' altra negativa è dotata della stessa velocità, passerà in ambo i casi lo spazio $=$ NO nel tempo dt; e se la curva DHB determina gli spazj passati dalle particole aeree nell' istante, in cui il punto A ha compiuta una mezza vibrazione, la curva, le cui ordinate pareggiano gli spazj scorsi dalle dette particole nell' istante, in cui dal punto A si è terminata una vibrazione, si formerà replicando il ramo DHB, e collocando il secondo ramo in riguardo al primo come nella figura 16. il ramo S2F rispettivamente al ramo SF.

XIX. Sembra un paradosso al Signor de la Grange, che qualunque sia la legge, colla quale si vibrano le particole aeree, resti sempre costante la velocità del suono. Ma se non si turba la detta velocità, quando le particole d' aria scorrono maggiori, o minori spazj nello stesso tempo, o anche in tempi diversi; e perchè non può rimanere invariata, qualora si muta la legge del moto nelle mentovate particole? Dice il nostro profondo Analista, che siccome una corda solida sollecitata in qualunque modo produce sempre le vibrazioni adattate alla sua natura; così parimente dee avvenire di una corda fluida. Io gli accorderò questo punto: ma nello stesso tempo gli dimanderò, in che consista la vibrazione della corda fluida. Ora io sostengo, che l' essenziale vibrazione di essa corda consiste nella comunicazione del suono dall' una all' altra estremità; la quale si farà sempre nello stesso tempo, in qualsivoglia guisa si vibrino le particelle dell' aria. Il mio argomento acquisterà maggior forza col-

colla rifleffione, che ancora nelle corde folide fi cangia la legge dei movimenti delle particole, e nulladimeno rimane intatto il tempo delle loro vibrazioni. Si adatti la corda ad una delle innumerabili figure nafcenti dalla miftura di varj fuoni, e benchè i moti componenti feguitino la legge dei pendoli a cicloide in riguardo alle diftanze dai punti medj delle rifpettive vibrazioni; i moti compofti, o affoluti cambiano regola, fenza che fi alteri il tempo fpefo in una vibrazione, o fia nel paffare da uno ftato all' altro di quiete.

XX. Si è dato a credere il celebre Sig. Cramer di chiaramente fcoprire l' imperfezione del metodo Nevvtoniano, provando che ammeffo un tal metodo, l' aria fi potrebbe movere colla legge di un grave cadente. Egli è d' uopo quì diftinguere due circoftanze, cioè o che gli fpazj corfi dalle particole aeree fieno minimi fificamente, ovvero di affai maggiore grandezza. Nel primo cafo tanto non è affurdo, che le particole d' aria fi accelerino colla mentovata legge, quanto che ho di fopra moftrato al numero XVIII. che qualunque fia la natura delle loro vibrazioni, nel cominciamento del moto ad effa legge fi adattano.

Che fe fi pretendeffe, che doveffe continuare un tal moto per uno fpazio non minimo; dico che il metodo del Cav. Nevvton è fondato fopra l' ipotefi, che fieno (*Fig.* 30.) NO, PQ minime rifpettivamente ad LG, ML, nè da effa dobbiamo partirci. La legge di moto, di cui fi parla, richiede, che la curva BHD fia una parabola Apolloniana, in riguardo alla quale, comunque fia grande il parametro, fi può fempre determinare una tale affiffa BG, che le linee HN, NO fi corrifpondano in proporzione finita. Ora il fupporre che le particole aeree profeguendo il movimento paffino fpazj $=$ GH maggiori di quello comporta la loro minima compreffione, egli è un totalmente fovvertire il metodo Nevvtoniano. Efige un tal metodo, che le particole aeree fcorrendo fpazj minimi, prima accelerandofi, e pofcia ritardandofi, paffino dalla quiete al moto, ed indi dal moto alla quiete, onde le coftipazioni non formontino mai gli ftabiliti confini.

XXI. Torno allo ftimatiffimo Signor de la Grange, e noto, che le confeguenze dedotte dalla fua foluzione ci fanno toccar con mano, che dalla verità fi allontana. Stabilifce egli adunque che in ciafcuna particola d' aria i movimenti fono iftantantanei, e si comunicano sempre colla medesima velocità costante, qualunque sia l' impulso, che la prima particola abbia ricevuto, dal quale dipende la forza o debolezza del suono. Io non giungo bene ad intendere questi moti istantanei, e non pertanto sensibili, i quali, se pure non prendo errore, non si danno in Natura. La sperienza m' insegna, che al cessare delle vibrazioni sonore, cessa il moto delle particole aeree; e quindi acciocchè una particola si torni a movere, c' è bisogno d' una nuova vibrazione del corpo sonoro. Dunque, dico io, dee prima questa particola accelerarsi, ed indi ritardarsi, ed impiegarci nell' accelerazione, e ritardamento un tempo finito eguale a quello, che spende in una vibrazione il corpo sonoro, che sempre stimola l' aria, ed è la cagione de' suoi movimenti.

Dico di più, che la legge di accelerazione, e di ritardamento ha da dipendere da quella, con cui si vibra il corpo sonoro. Fingasi un corpo, che si vibri con tal legge, che le forze stiano come i quadrati delle distanze dal punto medio della oscillazione, e sia lo stesso unisono ad uno de' nostri corpi sonori, e produca anche un suono ugualmente forte. Sembrami fuori di dubbio, che l' orecchio dovrebbe sentire questi suoni d' indole varia, e pure secondo il nostro Autore non avrebbe da trovarvi differenza veruna.

Egli è noto, che fatta suonare una corda, si pone altresì in tremito una corda vicina corrispondente all' unisono. Se i movimenti dell' aria sono analoghi a quelli della corda agente nelle oscillazioni, e nelle reciprocazioni, chiaramente si vede, che si comunicheranno alla corda unisona, siccome quelli che perfettamente seconderanno le sue vibrazioni.

XXII. Pone il Sig. de la Grange per necessaria conseguenza della sua soluzione la diversità fra i suoni gravi, ed acuti nel numero dei colpi istantanei, che in pari tempo riceve l' orecchio; ed io sostengo, che ciò non basta. Si diano due corde unisone, che si vibrino colla condizione, che mentre la prima corda ha fatta mezza vibrazione, la corda seconda dia alla vibrazione principio. Ricevendo l' orecchio da queste corde lo stesso numero di colpi, che riceve da una corda sola, che colle predette formi ottava acuta, dovrebbe sentire giusta il Signor de la Grange in ambo le circostanze lo stesso suono, il che alla sperienza ripugna. Al numero dei colpi adunque bisogna aggiungere la durazione

dei

dei colpi medesimi accompagnata dal loro regolare aumento, e decremento.

XXIII. Debbo per altro render giustizia al nostro quanto dotto, altrettanto ingenuo Filosofo, il quale cangiata opinione nelle *Novelle Ricerche sopra la natura e la propagazione del suono*, che si leggono nel secondo Tomo della Regia Società di Turino, afferma alla pag. 50. che l' agitazione di ciascuna particola dura precisamente quel tempo, che l' onda ci mette a percorrere tutta la sua larghezza, e che tutte le particole soggiacciono alla medesima agitazione dipendente dalla natura di tutto l' impulso primitivo.

XXIV. Il Cavalier Nevvton nel determinare la velocità del suono ha seguito il metodo ricordato dall' incomparabile Galileo, di appoggiarsi ai fenomeni, e di dedurne dimostrativamente le conseguenze. Gl' insegnavano gli esperimenti, che il suono propagasi equabilmente per l' aria, e che questa ci porta all' orecchio fra gli altri suoni anche quelli, che sendo costanti di tuono, differiscono solamente nel piano e nel forte. Da una tal proprietà egli dedusse, che siccome un corpo sonoro, il quale facendo le sue vibrazioni più ristrette, o più dilatate non cangia tuono, dee necessariamente vibrarsi colla legge di un pendolo a cicloide; lo stesso ha parimente da succedere nelle particole d' aria poste in agitazione dal detto corpo. Restava da vedersi, se le particole collocate nella stessa linea, o raggio, che ha per centro un punto del corpo sonoro, si vibrino per eguali spazj, o pure se questi spazj vadano scemando, secondochè le particole aeree sono più lontane dal corpo, che suona. Tentò adunque cosa accadeva supponendo eguali gli spazj mentovati, e vedendo che nell' aria, le cui forze elastiche sono proporzionali alle densità, ne nascevano tali costipazioni, che determinavano le forze acceleranti ciascuna particola in ragione delle distanze dal punto medio della oscillazione giusta la legge dei pendoli cicloidali; si rese certo, che si vibrano per eguali spazj le particelle dell' aria collocate nello stesso raggio sonoro. Stabiliti questi dati, gli riuscì facile di ritrovare la velocità, colla quale il suono propagasi. Una tale strada, che penso abbia guidato alla meta il Cavalier Nevvton, mi sono adoperato di porla in chiaro nella presente Dissertazione I. Continuerò l' intrapreso cammino nelle Dissertazioni seconda, e terza, sperando di maggiormente dilucidare la materia, che abbiam per le mani. DIS-

DISSERTAZIONE II.

Della propagazione del ſuono per linee o raggi, ſupponendo, che al creſcere della diſtanza dal corpo ſonoro, le particole aeree ſi vibrino per iſpazj, che vadano decreſcendo.

I. NElla precedente Diſſertazione ho ſuppoſto, che il ſuono ſi propaghi per innumerabili raggi, che tutti partono dal centro ſonoro, e che lungo queſti raggi ciaſcuna particola aerea ſi vibri per eguali ſpazj colle leggi d' un pendolo a cicloide. Dalle compreſſioni poi, che un tal moto genera nell' aria, le cui denſità ſono proporzionali alle forze comprimenti, ho dimoſtrativamente dedotto, che le forze acceleranti le particelle dell' aria ſtanno come le diſtanze dal punto medio della oſcillazione; proporzione neceſſaria, acciocchè il noſtro fluido poſſa colla ſuppoſta legge oſcillare. Ora ritenuta l' ipoteſi che il ſuono ſi diffonda per raggi, m' avanzo a provare che le particole aeree non ponno vibrarſi a guiſa d' un pendolo a cicloide, quando gli ſpazj delle loro oſcillazioni ſieno ineguali, e vadano ſcemando, ſecondochè le particole ſono più rimote dal centro ſonoro; imperciocchè in tal circoſtanza le forze acceleratrici non abbracciano la dovuta ragione delle lontananze dal punto medio delle vibrazioni.

II. Quindi deducaſi eſſere ſtato a torto accuſato di petizion di principio l' incomparabile Signor Newton, quando ſupponendo, che le particole ſi vibrino non altrimenti che un pendolo a cicloide, dalle coſtipazioni cagionate nell' aria ha ricavato le forze acceleratrici convenienti al movimento ſuppoſto. Se il raziocinio del grande Ingleſe foſſe al mentovato vizio ſoggetto, ſi dovrebbero trovare le forze acceleratrici proporzionali alle diſtanze dal punto di mezzo delle oſcillazioni anche quando le particole dell' aria non ſi vibrano per eguali ſpazj, ma in tal caſo, come vedremo, le dette forze ſono regolate da una legge totalmente diverſa; dunque il Cavalier Newton non è caduto in petizione di principio.

Maraviglioſa coſa ſi è quanti Uomini ſommi, e di prima sfera abbiano trovato che ridire nel metodo del Sig. Newton. L' oppoſizioni del Sig. Luigi de la Grange le ho già riferite. Il Signor Eulero nella Diſſertazione della natura del fuoco §. 28.

ebbe per sospetta la Newtoniana dimostrazione, affermandoli appoggiata a deboli fondamenti. Vuole il Signor Alembert nel Trattato de' fluidi lib. 2 cap. 4. §. 219. che non v' abbia nell' Opera del Newton luogo più difficile, e più oscuro di questo. Nella stessa guisa si esprime il Signor Giovanni Bernoulli nella Dissertazione della propagazione del lume §. 70. Nasconderfi ui non so che di surrettizio nel detto luogo il Sig. Cramer deduce da ciò, che con egual successo la dimostrazione Newtoniana si può applicare ad una conclusione totalmente diversa, e anche falsa. Gli stessi Comentatori del Newton Le Seur, e Jacquier aderirono all' opinione del Cramer, e la confermarono con un esempio. Finalmente il dottissimo P. D. Paolo Frisi nelle Novelle letterarie pubblicate dal celebre Signor Ab. Lami il mese di Febbrajo nell' anno 1755. condanna di manifesta petizione di principio la Newtoniana dimostrazione.

Io dovrei cedere certamente, se vivessimo in un secolo, in cui dall' autorità si lasciasse vincere la ragione; ma la riflessione fatta poco innanzi libera infallibilmente il Signor Newton dalla nota di petizion di principio. Gravissima a prima vista sembra l' opposizione del Signor Cramer, che col metodo Newtoniano si possono attribuire all' aere infinite leggi tutte fra loro diverse di oscillazioni, e sarebbe insuperabile, quando si avverasse, che l' aria non può vibrarsi, salvo che a guisa di un pendolo a cicloide. Questo fluido frattanto è capace d' innumerabili movimenti regolati da leggi sommamente varie, all' uno o all' altro de' quali dalla diversità delle cagioni estrinseche resta determinato. Se la penna d' un salterello nel gravicembalo sia troppo rigida, stirerà soverchiamente la corda, e conforme ho parimente avvertito nella Dissertazione I. le sue prime vibrazioni non soggiaceranno alla legge di quelle d' un pendolo a cicloide. Di simile natura altresì saranno le vibrazioni da principio comunicate all' aria, la quale porterà all' orecchio un suono falso, ed ingrato. Si dice con verità che nella propagazione del suono l' aria si vibra non altrimenti che un pendolo a cicloide; perchè da un tal canone vengono regolate le oscillazioni d'un corpo qualunque sonoro atto a produrre un suono costante in riguardo al grave, e all'acuto, e perchè le mentovate oscillazioni passano dal corpo sonoro all' aria, la quale siccome ha dimostrato il Cavalier Newton può in se ricevere questo moto.

III.

III. Ma eſſendo ormai tempo di accingerſi alla trattazione del propoſto argomento, ſia ab (*Fig.* 31.) la metà della lunghezza di un onda o corda aerea, ed il punto a facendo mezza oſcillazione per la direzione ab, paſſi uno ſpazio eguale alla linea ad normale ad ab. Supponendo deſcritta la curva dec, la cui ordinata qualunque ge eſprima lo ſpazio, che ſcorre il punto g effettuando mezza vibrazione, mi faccio a ſciogliere il ſeguente problema.

Determinare la curva dhb, *in cui qualſivoglia ordinata* gh *ſi eguagli allo ſpazio paſſato dal punto* g *nel momento, che il punto* a *compiuta mezza vibrazione ha ſcorſo lo ſpazio* ad.

Colle leggi delle oſcillazioni d' un pendolo a cicloide, ed in pari tempo viaggiano i punti G, g (*Fig.* 30. e 31.) per iſpazj uguali alle linee GH, gh; GE, ge nell' una e nell' altra ipoteſi, che lo ſpazio paſſato dalle particole aeree dopo una mezza vibrazione ſia coſtante o variabile. Quindi nominate GE $=$ AD $=$ ad $= c$, ge $= s$, GH $= Q$, gh $= q$, ſi deduce l' analogia GE : ge :: GH : gh, che mi ſuggeriſce l' equazione $\frac{GE.gh}{ge} =$ GH, ovvero uſando i ſimboli analitici $\frac{cq}{s} = Q$, e preſe le differenze, $\frac{csdq - cqds}{s^2} = dQ$. Nella Diſſertazione precedente (ponendo AB $=$ ab $= \frac{1}{2}L$, AG $=$ ag $= x$, BKF $= b$) abbiamo ſcoperto $x = \frac{L}{2b} S \frac{-cdQ}{\sqrt{2cQ - Q^2}}$. Soſtituiti in vece di Q, e di dQ i ritrovati valori, ed adempiuti i neceſſarj calcoli, ci ſi preſenterà $x = \frac{Lc}{2b} S \frac{-sdq + qds}{s\sqrt{2sq - q^2}}$ (1), equazione alla curva cercata dhb.

Poſta s coſtante, ed uguale a c, diviene $ds = 0$, e ſi torna a trovare l' equazione $x = \frac{L}{2b} S \frac{-c\,dq}{\sqrt{2cq - q^2}}$ adattata alla ipotesi della premessa Differtazione.

Determinare la forza acceleratrice di qualunque punto g (*Fig.* 31) *dopo che ha camminato lo spazio* $=$ gh $= q$, *e mentre gli resta da passare lo spazio* he $= s - q$.

IV. Collo stesso discorso usato nella Differtazione I. si prova, che la particola d'aria lg viene sollecitata dalla forza $\frac{P\,ddq}{dx}$ (dinota P l' elasticità della fibra lg $= dx$ prima d' essere nuovamente compressa) la qual forza divisa per la massa $\frac{m\,dx}{L}$ d'essa fibra o particola si tramuta in acceleratrice $= \frac{LP\,ddq}{m\,dx^2}$ (2). Prendo le differenze nella equazione (1.), onde s' abbia $\frac{2b\,dx}{Lc} = \frac{-dq}{\sqrt{2sq - q^2}} + \frac{q\,ds}{s\sqrt{2sq - q^2}}$ (3), e di nuovo differenziando considerata dx come costante, $ddq = \frac{\overline{s - q}\cdot dq^2}{2sq - q^2} - \frac{q\,ds^2 + q\,dq\,ds}{2s^2 - sq} + \frac{qs\,dds + s\,ds\,dq - q\,ds^2}{s^2}$ (4). Dalla equazione (3.) si raccoglie $dq = \frac{q\,ds}{s} - \frac{2b\,dx}{Lc}\sqrt{2sq - q^2}$, e

$$dq^2 = \frac{4b^2dx^2}{L^2c^2}\cdot\overline{2sq - q^2} - \frac{4bq\,dx\,ds\sqrt{2sq - q^2}}{Lcs} + \frac{q^2ds^2}{s^2}.$$

Fatta la sostituzione di questi valori nella formola (4) ci si presenterà, effettuati prima i necessarj calcoli

$$ddq = \frac{4b^2 dx^2}{L^2 c^2} \cdot \overline{s-q} - \frac{4bdxds\sqrt{2sq-q^2}}{Lcs} + \frac{qdds}{s},$$

e dividendo per mdx^2 e moltiplicando per LP,

$$\frac{LPddq}{mdx^2} = \frac{4Pb^2}{Lmc^2} \cdot \overline{s-q} - \frac{4Pbds\sqrt{2sq-q^2}}{mcsdx} + \frac{LPqdds}{msdx^2} \quad (5):$$

ma $\frac{LPddq}{mdx^2}$ si eguaglia alla forza acceleratrice della particola d' aria lg, o sia del punto g, dopo che ha viaggiato per lo spazio $gh = q$, e mentre gli resta da passare lo spazio $he = s - q$; dunque anche l' omogeneo di comparazione esprime la detta forza.

V. La forza acceleratrice da me determinata sarebbe proporzionale alla distanza $s - q$ dal punto medio della vibrazione, conforme richiede la legge del moto, che si suppone, se la sua espressione non contenesse salvo che il solo termine $\frac{4Pb^2}{Lmc^2} \cdot \overline{s-q}$. Nella Dissertazione I. ho trovato la forza acceleratrice $= \frac{4Pb^2}{Lmc^2} \cdot \overline{c-Q}$. Il coefficiente comune dimostra che in ambo le ipotesi di s costante, e di s variabile le particole aeree oscillerebbero nel tempo stesso, cioè in quel tempo, che impiega in una vibrazione il corpo sonoro. Questa riflessione ci fa toccare con mano, che se le mentovate particole si hanno da vibrare non altrimenti che un pendolo a cicloide, ed isocrone al corpo sonoro, la somma degli altri termini, cioè a dire $-\frac{4Pbds\sqrt{2sq-q^2}}{mcsdx} + \frac{LPqdds}{msdx^2}$ deve uguagliarsi al nulla.

Ciò chiaramente succede nella supposizione di $s = c$, in cui ds, e dds svaniscono: vediamo se il medesimo possa avverarsi in qualche particolar circostanza di s variabile.

VI.

VI. Facciasi adunque $-\frac{4Pbds\sqrt{2sq-q^2}}{mcsdx}+\frac{LPqdds}{msdx^2}=0$, e dividendo per la quantità $\frac{P}{msdx}$, che non può mai essere generalmente uguale a nulla, avremo $-\frac{4bds\sqrt{2sq-q^2}}{c}+\frac{Lqdds}{dx}=0$ (6). Pongo in vece di dx il suo valore somministratomi dalla equazione (3.), e trovo $-\frac{4bds\sqrt{2sq-q^2}}{c}+\frac{2bqsdds\sqrt{2sq-q^2}}{c.\overline{-sdq+qds}}=0$, e fatte le debite riduzioni, $2qds.\frac{-sdq+qds}{q^2}=sdds$ (7). Anche qui noto non potere generalmente pareggiare il nulla la grandezza $\frac{2b}{c}\sqrt{2sq-q^2}$, per cui la nostra formola si è divisa.

Metto $\frac{s}{q}=z$ (8.), e per conseguenza $-\frac{sdq+qds}{q^2}=dz$, $s=qz$, $ds=qdz+zdq$, $dds=D.\overline{qdz+zdq}$. Effettuate le sostituzioni scopriremo $2q.\overline{qdz+zdq}.dz=qzD.\overline{qdz+zdq}$, o sia $\frac{2dz}{z}=\frac{D.\overline{qdz+zdq}}{qdz+zdq}$, ed integrando, $2\log.z+\log.Adx=\log.\overline{qdz+zdq}$, e passando dai logaritmi ai numeri loro corrispondenti, $Az^2dx=qdz+zdq$ (9). Conciossiachè per la formola (3) $dx=\frac{Lc}{2b}.-\frac{sdq+qds}{s\sqrt{2sq-q^2}}$, avremo sostituendo qz in cambio di s, e $qdz+zdq$ in cambio di ds, $dx=\frac{Lc}{2b}.\frac{dz}{z\sqrt{2z-1}}$. Pongasi un tal valore nella

equa-

equazione (9.), e ne risulterà $\frac{Lc}{2b} \cdot \frac{Azdz}{\sqrt{2z-1}} = qdz + zdq$,
ed integrando, $\frac{ALc}{6b} \cdot \overline{z+1}\sqrt{2z-1} = qz + B$ (10).

VII. A cagione di determinare la costante B, prendo per mano la formola (8) $\frac{s}{q} = z$, e noto che quando $x=o$, è $s=q=c$, e perciò $z=\frac{s}{q}=1$. Surrogati questi valori nella formola (10), ne risulterà $B=\frac{ALc}{3b}-c$. Avremo per tanto $\frac{ALc}{6b} \cdot \overline{z+1}\sqrt{2z-1} = qz+\frac{ALc}{3b}-c$, e ponendo in luogo di z il suo valore $\frac{s}{q}$, e trasportando da una parte all' altra due termini, $\frac{ALc}{6b} \cdot \left| \frac{s+q}{q}\sqrt{\frac{2s-q}{q}} - 2 \right| + c = s$ (11).

VIII. Resta da stabilirsi la grandezza della costante A. La nostra equazione dee verificarsi anche quando posta $x=\frac{1}{2}L=ab$, è $q=o$, nel qual caso s non ha da essere certamente più grande di c; potendosi ben concepire, che le particole aeree, secondochè sono più rimote dal centro sonoro, si vibrino per ispazj sempre minori, ma non mai per ispazj, che vadano continuamente crescendo. Per togliere di mezzo qualsisia equivoco, immaginiamoci l' assissa x talmente prossima al valore $\frac{1}{2}L$, che sia $q=\frac{s}{N}$, esprimendo N un numero infinito. In sì fatta ipotesi avremo $\frac{ALc}{6b} \cdot \left| \overline{N+1}\sqrt{2N-1} - 2 \right| + c = s$, e cancellati i termini incomparabili, $\frac{ALc}{6b} \cdot N^{\frac{3}{2}}\sqrt{2} + c = s$. Essendo $N^{\frac{3}{2}}$ quantità infinita, per ottenere che s non superi c, e corrisponda ad esso in ragione finita, egli è d' uopo porre A proporziona-

le a

le a $\frac{-c}{N^{\frac{3}{2}}}$ Fingasi l' ordinata q ancora più picciola, onde abbiasi

$q = \frac{s}{N^2}$, e l' equazione (11.) prenda la seguente forma

$\frac{ALc}{6b} \cdot N^3 \sqrt{2}^1 + c = s$, e per salvare le notate condizioni, dovrà determinarsi A proporzionale a $\frac{-c}{N^3}$, valore infinitamente minor di quello alla prima ipotesi conveniente.

Conchiudasi, che per soddisfare a tutte le menome grandezze di q, è necessario mettere $A = o$, dimodochè ne risulti $s = c$:

e quindi la quantità $-\frac{4Pbds\sqrt{2sq-q^2}}{mcsdx} + \frac{LPqdds}{msdx^2}$ non

può salve le circostanze del problema uguagliarsi a nulla, se non nella supposizione di $s = c$, cioè a dire che tutte le particole aeree situate in un raggio sonoro si vibrino per eguali spazj.

IX. Illustreremo vie più la verità ora dimostrata, supponendo, che la curva dec sia una delle infinite iperbole fra gli assintoti espresse dalla equazione $\frac{ec^n}{s^n} = e + x$ (12.), in cui giusta

la condizione del problema posta $x = o$, si trova $s = c$, e determinando il valore o dell' esponente n, o della costante e, che

sa svanire la quantità $-\frac{4Pbds\sqrt{2sq-q^2}}{mcsdx} + \frac{LPqdds}{msdx^2}$. Differenzio la formola (12.), e mi si presenta $-\frac{nec^n ds}{s^{n+1}} = dx$,

e nuovamente differenziando, $\frac{\overline{n+1} \cdot ds^2}{s} = dds$. Sostituisco questi valori, e dopo le convenienti operazioni mi si presenta

la

la grandezza, che deve uguagliarsi al nulla

$$\frac{4Pbs^n\sqrt{2sq-q^2}}{mnec^{n+1}}+\frac{\overline{n+1}\,.\,LPqs^{2n}}{mn^2e^2c^{2n}}=o\ (13).$$ Ora una tal equazione non può avverarsi relativamente a qualunque coppia di valori corrispondenti di s, e di q, salvo che nella supposizione di e, o di n infiniti. E vaglia il vero, dovendo essere s, e q sempre minori di c, fuorchè nel punto a, la quantità $\frac{s^n\sqrt{2sq-q^2}}{c^{n+1}}$ è più picciola della unità, e quindi il primo termine discende all' infinitesimo, allora che e, ovvero n ascendono all' infinito. Nel secondo termine abbiamo $\frac{s^{2n}}{c^{2n}}=1$ rispettivamente al punto a, ed in riguardo a tutti gli altri punti minore della unità, e perciò anche questo secondo termine diviene minimo, se e, o n sono infiniti. Presa per mano la formola (12.) $\frac{ec^n}{s^n}=e+x$, e fingendo $e=\infty$, cancellata la grandezza x nulla in rispetto di e, troveremo $ec^n=es^n$, e conseguentemente $s=c$. Vogliasi $n=\infty$, ed estraendo nella formola (12.) la radice n, avremo $e^{\frac{1}{n}}\,.\,c=\overline{e+x}^{\frac{1}{n}}\,.\,s$, o adequatamente $e^0\,.\,c=\overline{e+x}^0\,.\,s$: ma $e^0=\overline{e+x}^0=1$; dunque altresì in tale ipotesi $s=c$.

X. Ho asserito che l' equazione (13.) non può generalmente verificarsi, se non se nella circostanza di e, o di n infiniti. La formola, ch' esprime la relazione fra s, e q, ci viene suggerita dalle equazioni (1.), e (12.), ed è la seguente

$$\frac{Lc}{2b}\,S\frac{-sdq+qds}{s\sqrt{2sq-q^2}}=\frac{ec^n}{s^n}-e,\text{ o sia }\frac{L}{2b}\,S\frac{c.\overline{-sdq+qds}}{s\sqrt{2sq-q^2}}+e$$

A a —

$-\frac{ec^n}{s^n}=o$. Nel numero III. l'espressione S $\frac{c.\overline{-sdq+qds}}{s\sqrt{2sq-q^2}}$ l'ho dedotta dall' altra S $\frac{-cdQ}{\sqrt{2cQ-Q^2}}$ mettendo $Q=\frac{cq}{s}$: ma l'ultima sommatoria è uguale all' arco di cerchio descritto col raggio c, il cui seno $c-Q=c-\frac{cq}{s}=c.\frac{s-q}{s}$; dunque

$$\text{S}\,\frac{c.\overline{-sdq+qds}}{s\sqrt{2sq-q^2}}=\text{Arco Raggio } c \text{ Seno } c.\frac{s-q}{s},$$ e perciò

$$\frac{L}{2b}.\ \text{Arco Raggio } c \text{ Seno } c.\frac{s-q}{s}+e-\frac{ec^n}{s^n}=o\ (14.).$$

Conciossiachè questa formola è costantemente uguale a nulla, assegnata ad s, q qualsivoglia coppia di valori relativi; se ciò si adempiesse anche nella formola (13.), dovrebbe darsi identità fra le due formole, conseguenza patentemente falsa, quando e, ed n stieno dentro i limiti del finito. Che se e, od n si suppongono infiniti, l'equazione (13.) si trova sempre uguale a nulla, non perchè così richiedano i valori corrispondenti di s, e di q, ma per cagione soltanto della divisione per una grandezza infinita.

XI. Dopo aver letta, e ponderata la dimostrazione, che supposto propagarsi il suono per innumerabili raggi, le particole aeree in rigor matematico deggiono vibrarsi per ispazj uguali, se come richiedono le oscillazioni colla legge dei pendoli a cicloide, le forze acceleratrici hanno da corrispondersi in ragione delle distanze dal punto medio della vibrazione; qualcuno forse mi domanderà, se veramente io sia persuaso, che gli spazj, per cui si vibrano le particole d'aria anche più rimote dal corpo sonoro, non si diminuiscano punto. Rispondo ch' io credo, che i detti spazj vadano calando, e ch' estinguendosi in molta distanza l' oscillazione, si riducano al nulla: ma che penso nel tempo stesso, che decrescano a lentissimo passo; dimodochè sia fisicamente vero che oscillino per uguali spazj le particole situate

nel

nel medeſimo raggio poco fra loro diſtanti. Se n, od e ſi fingono infiniti nella formola (12), le forze acceleratrici abbracciano geometricamente la proporzione delle lontananze dal punto medio della vibrazione, e lo ſteſſo fiſicamente adiviene qualvolta n, ovvero e ſieno aſſai grandi. Nel primo caſo gli ſpazj s ſcemano infinitamente poco, ed il decremento loro geometricamente traſcuraſi: nel ſecondo caſo ſcemano molto poco, ed il loro calo ſi può traſandare fiſicamenre. Non altrimenti nelle corde ſonore, quantunque ad ottenere un matematico iſocroniſmo le vibrazioni maggiori, e minori abbiano ad eſſere infiniteſime, eſſo iſocroniſmo fiſicamente perſevera anche nelle minime oſcillazioni. Ella è maſſima incontraſtabile, che paſſando dalla geometria alla fiſica, alle quantità infinitamente picciole le minime finite ſempremai corriſpondono.

XII. Se mi veniſſe obbiettato ſupporſi da me, e non provarſi nella preſente Diſſertazione, che o ſi vibrino ſuceſſivamente le particole aeree per eguali, o per ineguali ſpazj, il ſuono ſi diffonda alla medeſima lontananza nel tempo d' una oſcillazione del corpo ſonoro; ſoggiungerei che queſto è un fatto, e non un' ipoteſi. E per verità ſcorrendo il ſuono un determinato ſpazio nel tempo di una vibrazione del corpo ſonoro, mi ſono poſto a cercare, ſe movendoſi le particelle dell' aria una dopo dell' altra o per eguali, o per ineguali ſpazj colla legge d' un pendolo a cicloide, ne riſultino forze proporzionali alle diſtanze dal punto medio della oſcillazione, e trovando ciò avverarſi ſoltanto nella prima circoſtanza, ho conchiuſo, che le particole aeree per eguali ſpazj fanno le loro ſucceſſive vibrazioni uniſone a quelle del corpo ſonoro.

Per togliere nulladimeno queſto ſcrupolo, benchè inſuſſiſtente, dimoſtro doverſi ſtabilire, che nel tempo di una vibrazione del corpo ſonoro il ſuono ſi propaghi alla ſteſſa diſtanza, o ſi vibrino le particole aeree per eguali ſpazj, o pure ſi finga che queſti ſpazj ſieno ineguali. Ritenute l' altre denominazioni (*Fig.* 30. e 31.) pongo ab $= \frac{1}{2} L^{\mathrm{I}}$, ag $= x^{\mathrm{I}}$, ml $=$ lg $= dx^{\mathrm{I}}$, e la maſſa del filo aereo, la cui lunghezza L^{I}, $= m^{\mathrm{I}}$. Avremo GE : ge :: GH : gh, e per conſeguenza $Q = \frac{cq}{s}$, quando $c : s :: Q : q$

ſia AB : ab :: AG : ag, dalla quale analogia ne naſce l' equazione

$L : L^{I} :: x : x^{I}$

$x = \frac{L x^{I}}{L^{I}}$. Nella formola $x = \frac{L}{2b} S \frac{c\,dQ}{\sqrt{2cQ - Q^{2}}}$ ſomminiſtratami dalla Diſſertazione I. ſoſtituiſco in cambio di x, Q, dQ i convenienti valori, e ſcopro $x^{I} = \frac{L^{I} c}{2b} S \frac{-s\,dq + q\,ds}{s\sqrt{2sq - q^{2}}}$ (15).

Lo ſteſſo diſcorſo poſto in uſo nella Diſſertazione I. al numero VII. mi guida a rinvenire la forza acceleratrice della fibra $lg = \frac{L^{I} P\,ddq}{m^{I} dx^{I} dx^{I}}$. Col mezzo della formola (15.) ſi faccia ſvanire prima ddq, ed indi dq, conforme mi ſono adoperato nel numero IV. e ci ſi preſenterà la detta forza

$$\frac{L^{I} P\,ddq}{m^{I} dx^{I} dx^{I}} = \frac{4Pb^{2}}{L^{I} m^{I} c^{2}} . \overline{s - q} - \frac{4Pb\,ds\sqrt{2sq - q^{2}}}{m^{I} c\,s\,dx^{I}} + \frac{L^{I} P q\,dds}{m^{I} s\,dx^{I} dx^{I}},$$

la quale nel punto b, dove $q = o$, ſi uguaglia a $\frac{4Pb^{2}s}{L^{I} m^{I} c^{2}}$. Nella ſuppoſizione, che tutte le particole aeree ſi vibrino per lo ſpazio c ho trovata la forza acceleratrice $= \frac{4Pb^{2}.\overline{c - Q}}{Lmc^{2}}$, e queſta nel punto B pareggia la quantità $\frac{4Pb^{2}c}{Lmc^{2}}$. Ora vibrandoſi in tempi eguali i punti b, B, le forze acceleratrici deggiono eſſere proporzionali alle diſtanze bc $= s$, BC $= c$ dai punti medj c, C delle oſcillazioni; e perciò $\frac{4Pb^{2}}{L^{I} m^{I} c^{2}} = \frac{4Pb^{2}}{Lmc^{2}}$, e conſe-

guen-

guentemente $L^{I} m^{I} = Lm$: ma chiamata g la denſità dell' aria, $m^{I} = L^{I} g$, $m = Lg$; dunque $L^{I} L^{I} g = LLg$, e finalmente $L^{I} = L$, come ſi dovea dimoſtrare.

DISSERTAZIONE III.

Della propagazione del ſuono per ſettori sferici.

I. MI propongo in queſta terza Diſſertazione da eſaminare, ſe l' aria poſſa vibrarſi colla legge dei pendoli a cicloide nella ſuppoſizione che il ſuono per ſettori sferici ſi propaghi. Se il ſuono ſi diffonde per raggi, le particole aeree ſituate fra due raggi vicini non fanno moto: ma poſto che ſi propaghi per ſettori sferici, l' oſcillazione ſi comunica da uno ſtrato all' altro del ſettore, nè in qualunque ſtrato c' è particola alcuna, che non ſi vibri. Nella prima ſuppoſizione per opera d' una vibrazione del corpo ſonoro ſi muove in ogn' iſtante una data maſſa; imperciocchè ſe nel fine dell' onda una particola d' aria comincia ad oſcillare, nel principio dell' onda un' eguale particola ſi pone in quiete. Non così ſuccede nella ſeconda ſuppoſizione, diventando ſempre maggiore la maſſa, che ſi vibra, ſecondochè l' onda ſi va più allontanando dal centro ſonoro; perchè lo ſtrato ultimo, che comincia a vibrarſi, è più grande del primo, in cui ceſſa l' oſcillazione: e ſolamente l' onda contiene una maſſa coſtante, quando è dal detto centro infinitamente rimota.

Determinare la curva, in cui qualſivoglia ordinata ſi eguagli allo ſpazio paſſato da un corriſpondente ſtrato dell' onda aerea nell' iſtante, che il primo ſtrato compiuta una mezza vibrazione ha ſcorſo uno ſpazio dato.

II. SIa r b z f (*Fig.* 32.) il ſettore sferico (la cui baſe b z f ſuppongo minima, e quadrata) pel quale ſi diffonde il ſuono, e ſia di più a il principio, e b la metà dell' onda. Tagliato il noſtro ſettore con due ſezioni a z i, g z s parallele a b z f, che paſſino per li punti a dato, e g ſcelto ad arbitrio, ſi cerca

(*Fig.*

(*Fig.*31, e 32) lo ſpazio g h paſſato dalle particole aeree contenute nella ſezione g 2 s nell' iſtante, in cui le particole a 2 i compiuta mezza vibrazione hanno ſcorſo lo ſpazio a d, e ciò nella ipoteſi che la curva d e c determini lo ſpazio g e, per cui facendo la metà d' una oſcillazione viaggiano le particole g 2 s. Alla ſoluzione del preſente problema ci conduce il medeſimo raziocinio adoprato nel numero III. della ſeconda Diſſertazione; e quindi nominate come nel luogo citato a d $= c$, a b $= \frac{1}{2}L$, a g $= x$, g e $= s$, g h $= q$, ſcopriremo $x = \frac{Lc}{2b} S \frac{\overline{-sdq + qds}}{s\sqrt{2sq - q^2}}$ (1).

Determinare la forza acceleratrice delle particole d' aria contenute nella ſezione qualunque g 2 s (*Fig.* 31. *e* 32.) *dopo che hanno camminato per lo ſpazio* g h $= q$, *e mentre rimane loro da paſſare lo ſpazio* h e $= s - q$.

III. Segno g l $=$ l m $= dx$, e tirate nella Fig. 31. le ordinate l o, m q, delineo h n, o p parrallele ad a b, che taglino n o $= dq$, p q $= dq + ddq$. Nella Fig. 32. per li punti l, m faccio paſſare le ſezioni l 2 t, m 2 u parallele a b 2 f. Stabilita r a $= e$, a 2 a $= \frac{e}{N}$, e conſeguentemente la ſezione quadrata a 2 i $= \frac{e^2}{N^2}$, ſcopriremo le ſezioni g 2 s $= \frac{\overline{e + x}^2}{N^2}$, l 2 t $= \frac{\overline{e + x - dx}^2}{N^2}$ m 2 n $= \frac{\overline{e + x - 2dx}^2}{N^2}$. Eſſendo lo ſtrato l 2 s $=$ g 2 s . g l, ſe ne determina facilmente il valore, onde s' abbia l 2 s $= \frac{\overline{e + x}^2 . dx}{N^2}$. Per una ſimile ragione ci ſi preſenterà m 2 t $= \frac{\overline{e + x - dx}^2 . dx}{N^2}$.

Ora

Ora egli è d' uopo ſupporre (*Fig.* 31, e 32), che i punti g, l, m, e con eſſi anche le ſezioni g 2 s, l 2 t, m 2 u ſi ſieno moſſi da a verſo b per gli ſpazj gh $= q$, lo $= q + dq$, mq $= q + 2dq + ddq$. Acciocchè non ci reſti vano fra il noſtro ſettore e i contigui, biſogna che quando le ſezioni g 2 s, l 2 t, m 2 u hanno viaggiato per gli ſpazj q, $q + dq$, $q + 2dq + ddq$, ſieno creſciute quanto richiede il ſettore medeſimo, dimodochè ſieno divenute uguali alle tre ſuperficie $\frac{\overline{e+x+q}^2}{N^2}$,

$$\frac{\overline{e+x-dx+q+dq}^2}{N^2}, \quad \frac{\overline{e+x-2dx+q+2dq+ddq}^2}{N^2}.$$

In queſto ſteſſo incontro ſi ſcopre gl $= dx - dq$, lm $= dx - dq - ddq$. Troveremo adunque, allora che ſia ſeguito il nominato movimento, l 2 s $= \frac{\overline{e+x+q}^2 . \overline{dx-dq}}{N^2}$,

$$\text{m 2 t} = \frac{\overline{e+x+q-dx+dq}^2 . \overline{dx-dq-ddq}}{N^2}.$$

L' elaſticità degli ſtrati l 2 s, m 2 t avanti di moverſi, e dopo di aver fatto moto ſtanno inverſamente come i loro volumi nella prima, e nella ſeconda circoſtanza. Equilibrandoſi la forza elaſtica dei nominati ſtrati, mentre ſono in quiete, col peſo dell' atmosfera, o ſia con una colonna di mercurio, la cui altezza moltiplicata nella denſità dello ſteſſo ſi uguagli a P, ſi faccia

$$\overline{e+x+q}^2 . \overline{dx-dq} : \overline{e+x}^2 . dx :: P : \frac{P . \overline{e+x}^2 . dx}{\overline{e+x+q}^2 . \overline{dx-dq}},$$

$$\overline{e+x+q-dx+dq}^2 . \overline{dx-dq-ddq} : \overline{e+x-dx}^2 . dx ::$$

$P : \frac{P . \overline{e+x-dx}^2 . dx}{\overline{e+x+q-dx+dq}^2 . \overline{dx-dq-ddq}}$, e gli ultimi termi-

ni

ni delle analogie dinoteranno le altezze del mercurio moltiplicate nella densità d' esso corpo, che fanno equilibrio colle elasticità degli strati l 2 s, m 2 t, posciachè le sezioni g 2 s, l 2 t, m 2 u hanno scorso gli spazj g h $= q$, l o $= q + dq$, m q $= q + 2\,dq + ddq$.

La sezione l 2 t, che separa i due strati l 2 s, m 2 t, è stimolata da l verso b dalla differenza delle ritrovate quantità moltiplicata nella detta sezione. Prendendo la indicata differenza, sarà essa $= \dfrac{P.\overline{e+x-dx}^{2}.dx}{\overline{e+x+q-dx-dq}^{2}.\overline{dx-dq-ddq}} -$

$$\frac{P.\overline{e+x}^{2}.dx}{\overline{e+x+q}^{2}.\overline{dx-dq}} - \frac{P.\overline{e+x-dx}^{2}.\overline{e+x+q}^{2}.\overline{dx-dq}}{\overline{e+x}^{2}.dx}$$

$$-\frac{P.\overline{e+x}^{2}.\overline{e+x+q-dx+dq}^{2}.\overline{dx-dq-ddq}}{\overline{e+x}^{4}.dx}$$, ed

adempiuti i necessarj calcoli, trascurando le grandezze relativamente nulle, la determineremo $= \dfrac{Pddq}{dx} - \dfrac{2Pdq}{e+x} - \dfrac{2Pqdx}{\overline{e+x}^{2}}$.

Posta infinita la distanza r a $= e$ del centro sonoro dal principio dell' onda, svaniscono i due ultimi termini, e resta $\dfrac{Pddq}{dx}$ grandezza, che s' eguaglia alla forza sollecitante l' elemento dx del raggio sonoro fornito di grossezza costante, conforme ho determinato nelle dissertazioni prima, e seconda. In fatti nella mentovata ipotesi il suono si propaga per linee adequatamente parallele, e contenendo l' onda aerea una massa costante, egli è lo stesso, come se il tremito sonoro si diffondesse per raggi.

Dalle cose poco davanti dette raccogliesi, che lo strato l 2 s verrà sollecitato dalla forza $= \overline{\dfrac{Pddq}{dx} - \dfrac{2Pdq}{e+x} - \dfrac{2Pqdx}{\overline{e+x}^{2}}}.\dfrac{\overline{e+x}^{2}}{N^{2}}$.

IV. Per far transito dalla forza sollecitante all' accelerante, te, egli è d' uopo dividere la prima per la maſſa dello ſtrato l 2 s da eſſa poſto in moto. Alla lunghezza L dell' onda intera corriſponde quella del ſettore $=e+L$, la baſe dello ſteſſo $=\frac{\overline{e+L}^2}{N^2}$, ed il ſuo volume $=\frac{\overline{e+L}^3}{3N^2}$. Sottratto da queſto il volume r a 2 i $=\frac{e^3}{3N^2}$, reſta il volume dell' onda $=$ $\frac{3e^2L+3eL^2+L^3}{3N^2}$. Il volume dello ſtrato l 2 s ſi adegua ad $\frac{\overline{e+x}^2 . dx}{N^2}$. Si chiami M la maſſa dell' onda, e la ſeguente analogia $\frac{3e^2L+3eL^2+L^3}{3} : \overline{e+x}^2 . dx ::$ $M : \frac{\overline{e+x}^2 . 3Mdx}{3e^2L+3eL^2+L^3}$ ci ſomminiſtrerà il valore della maſſa contenuta nello ſtrato minimo l 2 s. Dividaſi adunque la forza ſollecitante ſopra ſcoperta per queſta maſſa, e ci ſi preſenterà la cercata forza acceleratrice $=\frac{3e^2L+3eL^2+L^3}{3MN^2} . \frac{Pddq}{dx^2}$ $-\frac{2Pdq}{\overline{e+x}.dx}-\frac{2Pq}{\overline{e+x}^2}$ (2).

Avverto, che fingendo r a $=e=\infty$, cancellati i termini incomparabili, la formola ſi riduce così $\frac{e^2LPddq}{N^2Mdx^2}$, ed a prima viſta non ſi accorda con quella delle due precedenti Diſſertazioni. Si rifletta frattanto, che quivi ho eſpreſſa la maſſa m per la lunghezza L dell' onda moltiplicata per la denſità g dell' aria, onde s' abbia $m = Lg$. Ma nella preſente Diſſertazione il giro del raziocinio richiede $M = \frac{3e^2L + 3eL^2 + L^3}{3N^2}.g$, e ſupponendo $e = \infty$, $M = \frac{e^2Lg}{N^2}$. Perciò nella detta ipoteſi ſcopriremo $M = \frac{m.e^2}{N^2}$ (3). Soſtituito queſto valore in cambio di M nella formola $\frac{e^2LPddq}{N^2Mdx^2}$, ne riſulterà come nelle citate Diſſertazioni la forza acceleratrice $= \frac{LPddq}{mdx^2}$.

Dalla formola (1) ho dedotto nella ſeconda Diſſertazione il valore di $dq = \frac{qds}{s} - \frac{2bdx}{Lc}\sqrt{2sq - q^2}$, di

$$ddq = \frac{4b^2dx^2}{L^2c^2}.\overline{s-q} - \frac{4bdxds\sqrt{2sq-q^2}}{Lcs} + \frac{qdds}{s}.$$

Faccio la ſoſtituzione di queſti valori nella equazione (2), e trovo la forza acceleratrice nel ſito g $= \frac{3e^2LP + 3eL^2P + L^3P}{3MN^2}$.

$$\frac{4b^2}{L^2c^2}.\overline{s-q} - \frac{4bds\sqrt{2sq-q^2}}{Lcsdx} + \frac{qdds}{sdx^2} -$$

$$= \frac{2qds}{\overline{e+x}.sdx} + \frac{4b\sqrt{2sq-q^2}}{Lc.\overline{e+x}} - \frac{2q}{\overline{e+x}^2} \quad (4).$$

V. E qui fa di meſtieri determinare la relazione fra s, ed x. Sembrami evidente, che comunicandoſi il tremito ſonoro da ſtrato a ſtrato, da onda ad onda, e poichè l' aria è un fluido elaſtico nulla perdendoſi in contuſione, due ſtrati diverſi, dopo che

che hanno compiuta la metà d' una vibrazione, ſieno forniti di pari forze vive. Così allora che l' onda ſi ſia infinitamente allontanata dal centro ſonoro, onde ra $= e = \infty$, e conſervando eſſa la ſua maſſa coſtante, ſegua lo ſteſſo effetto, come ſe il ſuono ſi foſſe propagato per raggi; accaderà che le particole contenute in diverſe ſezioni a2i, g2s ſcorrano ſpazj uguali: condizione, come ho dimoſtrato, neceſſaria in tale circoſtanza, acciocchè poſſa l' aria oſcillare colla legge d' un pendolo a cicloide.

Segno ak $= dx$, e pel punto k faccio paſſare la ſezione k2y parallela all' a2i. Le maſſe dei due ſtrati a2y, l2s ſerbano la ragione dei loro volumi prima, che ſucceda alcun moto, cioè a dire di $\frac{e^2 dx}{N^2} : \frac{\overline{e+x}^2 . dx}{N^2}$. Facendo i detti ſtrati una ſemivibrazione ſcorrono, quello lo ſpazio ad $= c$, e queſto lo ſpazio gh $= s$, e proporzionali ad eſſi ſpazj ſono le velocità acquiſtate nel punto della metà della oſcillazione: ma per le coſe dette debbono eguagliarſi le loro forze vive; dunque ridotto il calcolo troveremo $e^2 c^2 = \overline{e+x}^2 . s^2$, e per conſeguenza $\frac{ec}{s} = e+x$ (5). Prendo le prime, ed indi le ſeconde differenze, poſta dx coſtante, e mi ſi preſenta $-\frac{ecds}{s^2} = dx$, $dds = \frac{2ds^2}{s}$. Soſtituiſco nella equazione (4) in cambio di $e+x$, di dx, e di dds gli ſcoperti valori, ed ho eſpreſſa con quantità finite la forza acceleratrice nel ſito g, effettuate le neceſſarie operazioni, $= \frac{3e^2LP + 3eL^2P + L^3P}{3MN^2}$.

$$\frac{4b^2}{L^2c^2} . \overline{s-q} + \frac{8bs\sqrt{2sq - q^2}}{Lc^2e} + \frac{2qs^2}{c^2e^2},$$ quando ſi ammetta l' ipoteſi, che il ſuono per ſettori sferici ſi propaghi.

VI. Non può sussistere negli strati componenti l' onda il moto vibratorio, che abbiamo supposto colle leggi di un pendolo a cicloide; perchè le forze acceleratrici non accettano la ragione delle distanze $s-q$ dal punto medio della vibrazione. Ed in fatti dal numero X. della Dissertazione II. raccogliesi

$x=\frac{L}{2b}$. Arco Raggio c Seno $\frac{c.\overline{s-q}}{s}$, e dalla formola (5)

$x=\frac{ec}{s}-e=\frac{e.\overline{c-s}}{s}$, dunque $\frac{L}{2b}$. Arco Raggio c Seno

$\frac{c.\overline{s-q}}{s}=\frac{e.\overline{c-s}}{s}$, equazione totalmente diversa da quella,

che risulterebbe dal porre $\frac{8bs\sqrt{2sq-q^2}}{Lc^2e}+\frac{cqs^2}{c^2e^2}$ uguale a nulla, ovvero proporzionale ad $s-q$, acciocchè le forze acceleratrici si corrispondessero nella ragione, che richiede l' oscillazione supposta.

Perciò mi sia lecito di ripetere, che contro giustizia il Cavalier Newton viene accagionato di petizion di principio, quando tratta delle vibrazioni dell' aria nella diffusione del suono. Se il suo progresso fosse vizioso, si dovrebbero trovare le forze acceleranti proporzionali alle lontananze dalla metà della oscillazione anche nell' ipotesi, che il suono per settori sferici si propaghi: ma in tale incontro le forze acceleranti non abbracciano la detta legge; dunque il Signor Newton non pecca di petizion di principio.

Fingasi infinita la distanza $ra=e$ dell' onda dal centro sonoro, e cancellati i termini incomparabili, troveremo la forza acceleratrice dello strato $l2s=\frac{4e^2Pb^2}{MN^2Lc^2}.\overline{s-q}$: e conciossiachè nella supposizione di $e=\infty$ abbiasi per la formola (3)

$M=\frac{me^2}{N^2}$, ovvero $MN^2=me^2$, e per la formola (5) $s=c$;

surrogati questi valori, ci si presenterà la mentovata forza

=

$= \frac{4Pb^2 . \overline{c-q}}{mLc^2}$ come nella prima Diſſertazione; mantenendoſi in tal caſo adequatamente coſtante la maſſa dell' onde, e comunicandoſi il moto non altrimenti, che per raggi ſonori.

VII. Dai premeſſi diſcorſi ſi deduce una importantiſſima avvertenza, ed è che quando ſi dice diffonderſi il ſuono sfericamente all' intorno del corpo ſonoro; la propoſizione è ſoggetta ad equivoco, ed abbiſogna di ſpiegazione. Poſto che s' intenda propagarſi il ſuono per infiniti ſettori sferici, l' aſſerzione è falſa; perchè ammeſſa una sì fatta dilatazione, le forze acceleratrici non ſerberebbero la ragione delle diſtanze dal punto medio della vibrazione, e le particole aeree non potrebbero oſcillare a guiſa di un pendolo a cicloide, il che ripugna ai fenomeni. Che ſe ſi afferma, propagarſi il ſuono per tanti raggi, o linee aeree, che partono dal centro ſonoro per tutte le direzioni, la propoſizione è vera, e tutte le conſeguenze, ch' indi ſi deducono, vanno perfettamente d' accordo colla eſperienza.

Queſti raggi ſonori ſono talmente ſpeſſi, che in que' ſiti, dove il ſuono giunge a farſi ſentire, non c' è minimo ſpazio, che non ne contenga moltiſſimi. Il numero loro per altro atto a colpire una data ſuperficie decreſce in ragione reciproca duplicata delle diſtanze dal centro ſonoro; e perciò finalmente ſi giunge a tali lontananze, ch' entrando pochiſſimi raggi nell' orecchio, non cagionano in eſſo impreſſione ſenſibile. Si aggiunga, che il moto loro ha, benchè lentamente, da calare, e finalmente da eſtinguerſi; conforme ho notato nel numero XI. della ſeconda Diſſertazione, e quindi il vigore del ſuono ſcema in una proporzione alquanto maggiore della inverſa dei quadrati delle diſtanze. Le verità ſpiegate intorno al ſuono ſi adattano interamente alla luce, purchè, ſiccome io giudico, dalle vibrazioni del corpo lucido, che ſi propagano per l' etere, venga prodotta.

DISSERTAZIONE IV.

Esame della formola dal Signor Leonardo Eulero abbracciata nella dissertazione sopra la natura del fuoco, la quale determina la velocità della propagazione del suono nell' aria.

I. IL rinomatissimo Signor Leonardo Eulero nella dissertazione sopra la natura del fuoco determina la velocità del suono con una formola, che discorda dalla Newtoniana, a cui parimente dai miei raziocinj sono stato guidato. Introducendo nella formola del Signor Eulero la densità dell' aria mista colle particole eterogenee, che si raccoglie dalle osservazioni, ci dà essa la velocità del suono maggiore della vera; imperciocchè dovrebbe viaggiare piedi Parigini 1162 in un minuto secondo, nel quale effettivamente non ne scorre salvo che 1038. Ora se la velocità riesce soverchia, quantunque la densità dell' aria si supponga più grande del giusto, che succederebbe poi, se si mettesse a computo la densità molto minore dell' aria pura, la quale sola, conforme ha notato il Cavalier Newton, è atta a ricevere, ed a tramandare le vibrazioni sonore? Benchè questa sola avvertenza faccia toccar con mano la falsità della formola del Signor Eulero, nulladimeno ho presa risoluzione di farne un diligente esame, e se pure non prendo errore, mi è riuscito di dedurre dalla stessa un fisico asurdo, che al giudicio di chi legge sottopongo presentemente.

Chiamato P il peso dell' atmosfera, dx la minima costante lunghezza d' una particola aerea, y la distanza dal punto medio della vibrazione, ed L la lontananza, a cui si propaga il suono, mentre il corpo sonoro fa una vibrazione, e posto che la forza sollecitante la particola dx, quando le resta da scorrere lo spazio y per giugnere alla metà della oscillazione, si eguagli a $\frac{16Pydx}{L^2}$, si domanda la velocità, colla quale si propaga il suono, o sia lo spazio da esso scorso in un tempo dato.

II. Sia m la massa della linea aerea L, ed instituita l' ana-

na-

nalogia $L : m :: dx : \frac{m\,dx}{L}$, c' inſegnerà queſta il valore $\frac{m\,dx}{L}$ della maſſa della particola dx. Diviſa la forza ſollecitante $\frac{16Py\,dx}{L^2}$ per la maſſa $\frac{m\,dx}{L}$ della mentovata particola, ne riſulta la forza acceleratrice $\frac{16Py}{Lm}$. Si nomini u la velocità della fibra dx, e per le note formole avremo $\frac{16P}{Lm}\cdot - y\,dy = u\,du$, ed integrando, $\frac{16P}{Lm}\cdot\overline{c^2 - y^2} = u^2$. Aggiungo la coſtante c^2 quadrato di quello ſpazio c, che ſcorre la particola dx facendo una ſemivibrazione. Così nel principio della oſcillazione, quando $y = c$, ſi trova come è dovere $u = o$. Eſtraendo la radice, e riflettendo eſſere $u = -\frac{dy}{dt}$ (la ſpecie t dinota il tempo, in cui ſi paſſa lo ſpazio $c - y$) ci ſi preſenterà $4\sqrt{\frac{P}{Lm}\cdot\overline{c^2 - y^2}} = u = -\frac{dy}{dt}$, e conſeguentemente $4\sqrt{\frac{P}{Lm}}\cdot dt = \frac{-dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$, ed integrando, $4\sqrt{\frac{P}{Lm}}\cdot t = S\frac{-dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$. Non ſi aggiunge coſtante, perchè ſenza tale adizione ritrovaſi $t = o$, quando $y = c$. Si denomini b il quadrante del raggio c, ed allora che, dopo compiuta una vibrazione, lo ſpazio paſſato s' eguaglia a $2c$, ed $y = -c$, avremo $S\frac{-dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \frac{2b}{c}$. Quindi ſarà $4\sqrt{\frac{P}{Lm}}\cdot t = \frac{2b}{c}$, e perciò $t = \frac{2b}{c}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{Lm}{P}}$.

Sia b la lunghezza d' un pendolo a ſecondi, il tempo d' una vibrazione del quale ſi eſpone per $\frac{2b}{c}\sqrt{b}$. Se vorremo eſprimere per ſecondi il tempo t, in cui la particola dx fa una vibra-

bra-

brazione, ed il ſuono ſi propaga alla diſtanza L, otteremo l'intento col mezzo della ſeguente analogia $1 : \frac{2b}{c}\sqrt{b} :: t : \frac{2b}{c} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{Lm}{P}}$, da cui ſi deduce $t = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{Lm}{Pb}}$. Nomino a l' altezza, a cui ſi ſoſtenta il mercurio nel barometro, G la ſua gravità ſpecifica, g la gravità ſpecifica dell' aria, e ne proverrà $P = aG$, $m = Lg$. Avremo per tanto $t = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{L^2 g}{aGb}}$, e conſeguentemente $\frac{L}{t} = 4\sqrt{\frac{aGb}{g}}$, formola adottata dal Signor Eulero, che dinota la velocità $\frac{L}{t}$, con cui ſi propaga il ſuono, o ſia lo ſpazio L, ch' eſſo ſcorre nel tempo dato t eſpreſſo in ſecondi.

Il primo punto A *(Fig. 33.) della linea aerea* A B *facendo mezza oſcillazione per la direzione* A B *ſcorra lo ſpazio eguale alla linea* A D *normale ad* A B, *ed intanto il tremito ſonoro ſi ſia propagato da* A *ſino in* B. *Nell' iſtante, in cui il punto* A *giunge al termine del detto ſpazio, un altro qualſivoglia punto* G *abbia paſſato lo ſpazio eguale alla linea* G H *parallela ad* A D. *Si congiungano i punti* D, H, *ed altri ſimilmente determinati colla curva* D H B, *che paſſerà per il punto* B; *perchè quando* A *ha compiuta una ſemivibrazione, il punto* B *non ſi è ancor cominciato a movere. Si dimanda la natura d' eſſa curva* D H B, *ſupponendo data come nel numero II. l' eſpreſſione della forza ſollecitante il punto* G.

III. Si chiami $AB = DC = \frac{1}{2}L$, $AD = BC = c$, $AG = DE = x$, $GH = q$, $HE = c - q = y$, e ſia P il peſo dell' atmosfera, e $\frac{16Pydx}{L^2}$ la forza ſollecitante il punto G.

Ho

Ho dimoſtrato nel numero VII. della prima Diſſertazione, che qualunque ſiaſi la curva DHB, il punto G viene ſollecitato dalla forza $\frac{Pddq}{dx}$. Ci ſi preſenterà dunque l' equazione $\frac{Pddq}{dx} = \frac{16Pydx}{L^2}$, da cui ſi deduce $L^2 ddq = 16ydx^2$. Eſſendo $c - q = y$, troveremo $dq = -dy$, e $ddq = -ddy$. Fatta la ſurrogazione ſcopriremo $-L^2 ddy = 16ydx^2$. Pongo $pdx = dy$, e differenziando, preſa al ſolito per coſtante dx, $dpdx = ddy$, e ſoſtituendo, $-L^2 dpdx = 16ydx^2$, o ſia $-L^2 dp = 16ydx$: ma $dx = \frac{dy}{p}$; dunque $-L^2 dp = \frac{16ydy}{p}$ ovvero $-L^2 pdp = 16ydy$, ed integrando, $16A^2 - L^2p^2 = 16y^2$, e dopo fatte le debite operazioni $4\sqrt{A^2-y^2} = Lp$. Ora $p = \frac{dy}{dx}$, e perciò $4\sqrt{A^2-y^2} = \frac{Ldy}{dx}$, e conſeguentemente $\frac{4dx}{L} = \frac{dy}{\sqrt{A^2-y^2}}$, e moltiplicando per A, $\frac{4Adx}{L} = \frac{Ady}{\sqrt{A^2-y^2}}$. Paſſo all' integrazione ſenza aggiungere coſtante, che in queſto caſo va ommeſſa, e ſcopro primieramente $\frac{Ax}{\frac{1}{4}L} = S\frac{Ady}{\sqrt{A^2-y^2}}$, ed indi l' analogia $A : \frac{1}{4}L :: S\frac{Ady}{\sqrt{A^2-y^2}} : x$.

IV. Si determini il raggio $CR = A$ fornito di tal condizione, che deſcritto il ſemicircolo ZXRSV, e prolungata la linea AB fin che lo tagli nel punto S, ſia l'arco ZXRS doppio del raggio $CR = A$. Segno ad arbitrio $CI = y$, e pel punto I meno IN parallela a CD, che interſechi il noſtro ſemicircolo nel punto T. Egli è noto essere l'arco $ZT = S \frac{Ady}{\sqrt{A^2 - y^2}}$. Facciasi

$$CR : \frac{1}{2} DC :: \quad ZT \quad : DE,$$

$$A : \frac{1}{4} L \; :: S \frac{Ady}{\sqrt{A^2 - y^2}} : x$$

e condotta EG normale a DC, e parallela a CR, taglierà essa la linea IN nel punto H, il quale apparterrà alla curva DHB.

Quando $y = CB = DA = c$, ad x competono due valori D2E = A2H, DC = AB determinati dalle analogie

$$CR : \frac{1}{2} DC :: \quad ZTX : D2E = A2H,$$

$$CR : \frac{1}{2} DC :: ZTXRS : DC = AB.$$

Questa ultima analogia dimostra, che rettamente ho stabilito il valore della costante $A = CR$; imperciocchè siccome DC è doppia di $\frac{1}{2}$ DC, così l'arco ZTXRS e doppio del raggio CR.

Presa un' assissa x maggiore di D2E, e minore di DC, si trova y maggiore di $CB = DA = c$; e quindi il pezzo di curva 2H3HB giace al di sotto della linea AB. Se si dividerà la linea 2EC per metà nel punto 3E, corrisponderà ad esso la massima ordinata $3E3H = y = CR = A$.

V. Ciò che merita distinta riflessione si è, che mentre il punto A facendo mezza vibrazione ha scorso per la direzione AB lo spazio eguale ad AD; un qualunque punto medio fra A, e 2H, per esempio G, avrebbe passato per la medesima direzione lo spazio GH; i due punti 2H, B sarebbero rimasi in quiete; ed ogni punto fra 2H, e B, esempigrazia 3G, si sarebbe mosso con direzione contraria per lo spazio eguale a 3G3H. Non potendosi capire, come a cagion della vibrazione del punto A da A verso B, le particole medie fra i punti quieti 2H, e B possano acquistare un movimento contrario, questa unica considerazione apertamente dimostra, che la formola $\frac{L}{t} = 4\sqrt{\frac{a\,i\,b}{g}}$ non è atta ad esprimere la velocità, con cui si propaga il suono.

DIS-

DISSERTAZIONE V.

Esame della ipotesi proposta dal dottissimo P. D. Paolo Frisi, che sebbene tutte le particole d' aria componenti l' onda nello stesso istante finiscono di moversi, non cominciano però le loro vibrazioni nell' istante medesimo, di modo che successivamente si propaga il tremito da una all' altra.

I. AVendo comunicata la precedente quarta Dissertazione al celebre P. D. Paolo Frisi, mi propose egli di ricercare, se si potesse salvare la formola dell' acutissimo Signor Eulero, supponendo, che tutte le particole d' aria componenti l' onda, avvegnachè nello stesso momento finiscano di moversi, non principjno però nell' istante medesimo, di maniera che da una all' altra successivamente il tremito si propaghi. Or ecco ciò ch' è risultato dalle mie indagazioni.

Esaminando la formola dal Sig. Eulero abbracciata, colla quale nella dissertazione sopra la natura del fuoco determina la velocità della propagazione del suono, ho provato che chiamato P il peso dell' atmosfera, y la distanza d' una particola d' aria dal punto medio della vibrazione, L la lontananza, a cui si propaga il suono, mentre il corpo sonoro fa una oscillazione, nella quale c' impieghi il tempo t, m la massa dell' onda, la cui lunghezza L, b la lunghezza d' un pendolo a secondi, a l'altezza, a cui si sostenta nel barometro il mercurio, G la sua gravità specifica, e finalmente g la gravità specifica dell' aria, si verificherà la formola $\frac{L}{t} = 4\sqrt{\frac{aGb}{g}}$, colla quale il lodato Geometra esprime la velocità equabile, con cui si diffonde il suono, quando le particole tutte, ch' io supponeva vibrarsi isocrone, e per eguali spazj, sieno stimolate dalla forza acceleratrice $\frac{16Py}{Lm}$. La nuova ipotesi del P. Frisi richiede la soluzione del seguente problema.

Posto che tutte le particelle d' aria componenti l' onda comincino successivamente le loro oscillazioni, e le finiscano nello stesso istante, si cerca la forza acceleratrice d' esse particole.

II. Ella è cosa notissima, che se le particole aeree si vibrassero per ineguali spazj in tempi eguali, le forze acceleranti serberebbero la ragione delle distanze dai punti medj delle oscillazioni. Ma se le mentovate particole oscillassero per eguali spazj in tempi ineguali, starebbero le forze acceleratrici inversamente come i quadrati dei tempi stessi, mentre le particelle suddette si trovassero in pari lontananza dal punto di mezzo delle loro vibrazioni. E vaglia il vero, sia c lo spazio scorso dalle particole, quando sono giunte alla metà della vibrazione, y la distanza dal punto medio della oscillazione medesima, t il tempo, in cui si passa lo spazio $c-y$, ky la forza accelerante. Avverto che il coefficiente k è costante in riguardo ad una data particola, e vario relativamente a particole diverse; e che poste due particole ad eguale lontananza y dalla metà della vibrazione, le loro forze acceleratrici si corrispondono nella ragione dei coefficienti k. Dalle formole delle forze continuamente applicate si deduce $S\frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}}=t\sqrt{k}$: ma se due particole ugualmente distano dal punto medio della oscillazione, la $S\frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ ha rispettivamente ad entrambe lo stesso valore; dunque ciò si verifica parimente della quantità $t\sqrt{k}$, o sia del suo quadrato t^2k. Quindi nelle addotte circostanze sarà k come $\frac{1}{t^2}$, cioè a dire i coefficienti k accetteranno la ragione inversa duplicata dei tempi t impiegati a scorrere gli spazj eguali $c-y$. Fra cotali tempi si comprendono altresì quelli, che si spendono nelle intere vibrazioni quando $c-y=2c$, e per conseguenza i coefficienti k stanno inversamente come i quadrati dei tempi delle oscillazioni: ma conforme ho testè avvertito, in

pari

pari diſtanza y dal punto medio delle vibrazioni le forze acceleratrici ſi corriſpondono nella proporzione dei coefficienti k; dunque in sì fatti incontri le dette forze abbracciano la ragione reciproca duplicata dei tempi delle oſcillazioni.

Dai due premeſſi canoni ſi ricava il terzo adattato al caſo, che due particole aeree ſi vibrino per ineguali ſpazj in tempi ineguali. Le forze acceleratrici ſi riferiſcono nella ragione compoſta $\frac{y}{t^2}$, diretta delle diſtanze y dalle metà delle vibrazioni, ed inverſa duplicata dei tempi t nelle oſcillazioni impiegati.

III. Sia A B (*Fig.* 34.) la lunghezza dell' onda, cioè a dire ſi propaghi il ſuono per lo ſpazio A B, mentre il primo punto A dell' onda fa una vibrazione, e ſe il ſuono ſi ha da diffondere colla velocità $\frac{L}{t} = 4\sqrt{\frac{aGb}{g}}$, egli è neceſſario nell' ipoteſi dal lodato P. Friſi propoſtami da eſaminare, che la prima particola d' aria A ſia ſtimolata dalla ſteſſa forza acceleratrice $\frac{16Py}{Lm}$, che l' animerebbe, ſe tutte l' altre particole dell' onda A B ſi moveſſero iſocrone, e per eguali ſpazj. Così in ambo le ſuppoſizioni il primo punto A vibraſi in pari tempo, e conſeguentemente in pari tempo il ſuono ſcorre lo ſpazio $AB = L$.

Se il punto B principia a moverſi dopo il punto A per un tempo proporzionale alla diſtanza A B, il punto G (poichè il ſuono viaggia equabilmente) darà cominciamento alla ſua vibrazione paſſato il tempo parimente proporzionale alla lontananza A G: ma giuſto la ſuppoſizione meſſa il campo dal P. Friſi i punti A, G terminano le loro oſcillazioni nello ſteſſo iſtante, ed il punto A in una oſcillazione, ci ſpende il tempo proporzionale ad A B; dunque il tempo conſumato dal punto G in una vibrazione ſi ſcoprirà proporzionale a G B.

Compiuta una oſcillazione, abbia il punto A ſcorſo per la direzione A B lo ſpazio $AD = 2c$, ed il punto G lo ſpazio $GH = 2y$, e ponendo $AG = x$, e conſeguentemente $GB = L - x$, il canone terzo ci ſomminiſtra la ſeguente analogia

$$\frac{c}{L^2} : \frac{y}{L^2 - 2Lx + x^2} :: -\frac{16Pc}{Lm} : \frac{-16PLy}{m.L^2 - 2Lx + x^2}$$, la quale

le c' insegna, che sendo in tale circostanza la forza acceleratrice del punto $A = -\frac{16Pe}{Lm}$, quella del punto qualunque G preso ad arbitrio si eguaglia a $\frac{-16PLy}{m \,.\, \overline{L^2 - 2Lx + x^2}}$. Ho anteposto alle dette forze il segno negativo; perchè queste spingono per la direzione BA, contraria all' AB, per la quale si suppone che i punti A, G abbiano fatta una vibrazione.

Determinare, ed indi maneggiare l' equazione della curva DHB *(Fig. 34.), le cui ordinate* AD, GH *si eguaglino agli spazj scorsi dalle particole aeree* A, G, *quando hanno compiuta una oscillazione.*

IV. Dal numero VII. della Dissertazione I. raccogliesi, che qualunque sia la natura della curva DHB, la particola d' aria G è stimolata dalla forza sollecitante $= \frac{2Pddy}{dx}$. Si divida questa per la massa della mentovata particola, la cui lunghezza $= dx$, la qual massa si trova eguale ad $\frac{mdx}{L}$, e ne risulterà la forza acceleratrice $= \frac{2PLddy}{mdx^2}$: ma una tal forza nell' antecedente problema l' ho scoperta $= \frac{-16PLy}{m \,.\, \overline{L^2 - 2Lx + x^2}}$; dunque siamo pervenuti alla equazione $\frac{-16PLy}{m \,.\, \overline{L^2 - 2Lx + x^2}} = \frac{2PLddy}{mdx^2}$, e dividendo per $\frac{2PL}{m}$, e cangiando i segni $\frac{8y}{L^2 - 2Lx + x^2} = \frac{-ddy}{dx^2}$, e per conseguenza $\frac{8dx^2}{L^2 - 2Lx + x^2} = -\frac{ddy}{y}$ (1).

Faccio $L - x = r$ (2), dalla qual formola differenziando ne nasce $-dx = dr$, e surrogati questi valori nella equazione (1), (1), ritrovo $\frac{8dr^2}{r^2} = -\frac{ddy}{y}$ (3). Pongasi $\frac{dr}{r} = dq$ (4), e adempiuta la sostituzione si avrà $8dq^2 = -\frac{ddy}{y}$ (5).

V. Affinchè si faccia transito dalle seconde alle prime differenze, stabilisco $-dy = z\,dq$ (6), e differenziando, $-ddy = z\,ddq + dz\,dq$ (7). Supponendosi costante dx, sarà parimente tale $dr = -dx$. Giacchè per la formola (4) $\frac{dr}{r} = dq$, prese le differenze, ed assunta dr come costante, avremo $-\frac{dr^2}{r^2} = ddq$: ma $\frac{dr^2}{r^2} = dq^2$; dunque $ddq = -dq^2$. Sostituisco questo valore nella equazione (7.), e scoperta $-ddy = -z\,dq^2 + dz\,dq$, faccio uso di tale grandezza nella formola (5.), e mi si presenta $8dq^2 = -\frac{z\,dq^2 + dz\,dq}{y}$. Finalmente pongo in vece di dq il suo valore $-\frac{dy}{z}$ suggeritomi dalla equazione (6.), ed effettuati i dovuti calcoli scopro $-8y\,dy = z\,dy + z\,dz$ (8.), espressione, la quale non contiene, salvo che le sole prime differenze.

VI. Si separano in essa le variabili col metodo del Signor Gabbriello Manfredi, facendo $z = yp$ (9.), onde dopo le convenienti operazioni si trovi $\frac{p\,dp}{p^2 + p + 8} = -\frac{dy}{y}$, ovvero

$\frac{p\,dp}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4}} = \frac{-dy}{y}$ (10). Sia $p + \frac{1}{2} = s$ (11.), e per conseguenza $p = s - \frac{1}{2}$, $dp = ds$, ed adempiute le soſtituzioni, e ponendo $\frac{31}{4} = g^2$ (12.), ſcopriremo $\frac{s\,ds}{g^2+s^2} - \frac{\frac{1}{2}\,ds}{g^2+s^2} = -\frac{dy}{y}$, o pure $\frac{g^2.2s\,ds}{g^2+s^2} - \frac{g^2\,ds}{g^2+s^2} = -2g^2.\frac{dy}{y}$.

Sanno gli analiſti eſſere S $\frac{g^2\,ds}{g^2+s^2}$ eguale ad un arco di cerchio, il cui raggio g, e la tangente s. Queſta ſommatoria io la ſegnerò così S$\frac{g^2\,ds}{g^2+s^2} = A.^o R.^o g T.^e s$. Integrando adunque ritroveremo $g^2 \log.\overline{g^2+s^2} - A.^o R.^o g T.^e s = 2g^2 \log. A - 2g^2 \log. y$ (13). La coſtante aggiunta A m' ingegnerò di determinarla nel numero VIII.

VII. Abbiamo per la formola (6) $-dy = z\,dq$, e per la (9) $z = yp$; dunque $-\frac{dy}{y} = p\,dq$. In oltre l' equazione (10) m' inſegna eſſere $\frac{p\,dp}{\overline{p+\frac{1}{2}}^2+g^2} = \frac{-dy}{y}$, e quindi ſi trova, fatta la diviſione per p, $\frac{dp}{g^2+\overline{p+\frac{1}{2}}^2} = dq$, o ſia ponendo in cambio di dp, e di $p+\frac{1}{2}$ i loro valori ds, s; $\frac{ds}{g^2+s^2} = dq$. E giacchè $dq = \frac{dr}{r}$ (4), adempiuta la ſoſtituzione, ci ſi preſenterà $\frac{ds}{g^2+s^2} = \frac{dr}{r}$, e integrando, $\frac{A^o.R^o.g T^e.s}{g^2} = \log. r$ (14). Non aggiungo coſtante perchè è ſuperflua.

VIII. Dall' ultima formola ſi deduce $A^o.R^o.g T^e.s = g^2 \log.$

log. r. Sostituisco un tal valore nella equazione (13), ed ho $g^2 \log. \overline{g^2+s^2} - g^2 \log. r = 2g^2 \log. A - 2g^2 \log. y$, e dividendo per g^2, $\log. \overline{g^2+s^2} = 2 \log. A + \log. r - 2 \log. y$. Se fosse $L = 1$, e $\log. 1 = o$, ne risulterebbe $\log. \overline{g^2+s^2} = \log. \left(\frac{A^2 r}{y^2}\right)$, e per conseguenza $g^2 + s^2 = \frac{A^2 r}{y^2}$ (15). Presa nuovamente per mano l' equazione (14). $\frac{A^0 . R^0 . gT^e . s}{g^2} = \log. r$, e posta $r = L = 1$, ed essendo $\log. 1 = o$, sarà parimente in tal caso $A^0 . R^0 . gT^e . s = o$, e perciò $s = o$, eguagliandosi a nulla la tangente di un arco $= o$; e quindi ad $r = L = 1$ ci corrisponde $s = o$. Osservo, che quando (*Fig.* 34.) $r = L - x =$ BA $= L = 1$, l' ordinata AD $= 2y$ si trova eguale a $2c$; laonde in detta circostanza $y = c$. Nella formola (15) si faccia $s = o$, $r = 1$, $y = c$, e scoprirassi $g^2 = \frac{A^2}{c^2}$, e conseguentemente $A = cg$. Per la qual cosa l' equazione (13) prenderà il seguente aspetto $g^2 \log. \overline{g^2 + s^2} - A^0 . R^0 . gT^e . s = 2g^2 \log. cg - 2g^2 \log. y$, o sia $2 . \frac{1}{2} \log. \overline{g^2 + s^2} + \log. y - \log. cg = \frac{A^0 . R^0 . gT^e . s}{g^2}$, o pure $2 \log. \left(\frac{y\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right) = \frac{A^0 . R^0 . gT^e . s}{g^2}$.

Cangiata ipotesi, e volendo che sia $\log. L = o$, assegnato ad L qualunque valore, avremo $2 \log. \left(\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right) = \frac{A^0 . R^0 . gT^e . s}{g^2}$ (16), nella quale espressione posto l' omogeneo di comparazione $=o$, e perciò $s=o$, $y=c$, si troverà, come in fatti dee stare, $\log. L=o$.

Costruire la curva dell' antecedente problema.

IX. La costruzione della nostra curva si ottiene col mezzo delle formole (14) (16). Avverto essere $\frac{\overset{o}{A}.\overset{o}{R}.g\overset{e}{T}.s}{\overline{g^2}}=\overset{o}{A}.\overset{o}{R}.\frac{1}{g}\overset{e}{T}.\frac{s}{\overline{g^2}}$, la cui secante s' eguaglia ad $\frac{1}{g^2}\sqrt{g^2+s^2}$. L'equazioni adunque (14) (16) si possono esprimer così:

$$\log. r=\overset{o}{A}.\overset{o}{R}.\frac{1}{g}\overset{e}{T}.\frac{s}{\overline{g^2}}\ (14).$$

$$2\log.\left(\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right)=\overset{o}{A}.\overset{o}{R}.\frac{1}{g}\overset{e}{T}.\frac{s}{\overline{g^2}}\ (16).$$

All' assintoto T5R (*Fig.* 35) si delinei colla sottotocante $=1$ la logistica S5S, a cui si accomodi l'ordinata $RS=L$. Si segni ad arbitrio l' ordinata $BG=r$ uguale all' assissa BG della Fig. 34, e sarà $RB=\log. r$. Combinando insieme le formole (14), (16), ne risulta $\log. r=2\log.\left(\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right)$ (17). Quindi divisa per metà nel punto P la linea RB $=2\log.\left(\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right)$, avremo $RP=\log.\left[\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right]$, e per conseguenza l' ordinata $PQ=\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}$. Taglio RT $=2c$, e condotta la diagonale ST, tiro ad essa parallela la linea QM. Essendo simili i triangoli SRT, QPM, si verifica l' analogia

RS : RT :: PQ : PM, o analiticamente

$$L : 2c :: \frac{Ly\sqrt{g^2 - s^2}}{cg} : \frac{2y\sqrt{g^2 + s^2}}{g},$$

la quale determina $PM = \frac{2y\sqrt{g^2 + s^2}}{g}$.

X. Col raggio $GR = \frac{1}{g} = \frac{2}{\sqrt{3}\,1}$ (12) (*Fig.* 36.) descrivasi il circolo RIKLR, ed al punto R si meni la tangente indefinita FE. Facciasi l' arco RB uguale all' assissa RB $= \log.r$ della Fig. 35, e per li punti G, B si conduca la retta bE, che interfecherà la tangente FE nel punto E. Si segni $GM = Gm$ uguale alla linea $PM = \frac{2y\sqrt{g^2 + s^2}}{g}$ della Fig. 35, e dai punti M, m si calino le normali MH, mh al diametro RK. Giacchè per la costruzione l' arco $RB = \log.r$, e per la formola (14.) $\log.r = A^0.R^0.\frac{1}{g}\,T^e.\frac{s}{g^2}$, ne segue essere $RB = A^0.R^0.\frac{1}{g}\,T^e.\frac{s}{g^2}$: ma in fatti il raggio $GR = \frac{1}{g}$; dunque la tangente $RE = \frac{s}{g^2}$, e la secante GE si eguaglia a $\frac{1}{g^2}\sqrt{g^2 + s^2}$. La similitudine dei triangoli GER, GMH mi somministra l' analogia

$$\begin{array}{ccccccc} GE & : & GR & :: & GM & : & GH \\ \frac{1}{g^2}\sqrt{g^2 + s^2} & : & \frac{1}{g} & :: & \frac{2y\sqrt{g^2 + s^2}}{g} & : & 2y, \end{array}$$

da cui impariamo essere $GH = 2y$. Passando perfetta egualità fra i triangoli GHM, Ghm, si scuopre $Gh = GH$. La direzione opposta frattanto delle mentovate linee ci addita, che a Gh si dee assegnare il valore negativo $= -2y$. Presa per mano l'equazione (17.) $\log. r = 2 \log. \left[\frac{Ly\sqrt{g^2+s^2}}{cg}\right]$, e paſſando dai logaritmi ai numeri, abbiamo $r = \frac{Ly^2 \cdot \overline{g^2+s^2}}{c^2 g^2}$ (18), equazione, da cui ſi deduce che a un dato valore di r corriſpondono due grandezze uguali d' y, una poſitiva, e l' altra negativa.

Al punto G (*Fig.* 34.) conduco le ordinate GH, Gh eguali alle linee GH, Gh della Fig. 36., ed i punti H, h, ed altri infiniti in ſimil guiſa determinati apparterranno alla curva, che abbiamo preſa a coſtruire.

XI. Stimo coſa opportuna il fare alcune riflesſioni intorno l' andamento, e le proprietà della noſtra curva. Conſidererò i ſoli valori GH $= 2y$ (*Fig.* 36.); imperciocchè tutto quello, che d' esſi dirò, ſi può applicare alle uguali grandezze Gh colla ſola differenza, che queſte vanno ſegnate dalla parte oppoſta.

Se l' arco RB $= A^0 . R^0 . \frac{1}{g} T^e . \frac{s}{g^2} = o$, ricaviamo dalla equazione (14) $\log. r = o$, e per conſeguenza $r = L$, eſſendoſi al numero VIII. ſuppoſto $\log. L = o$. Quando RB $= o$, è parimente nulla la toccante RE $= \frac{s}{g^2}$, e perciò $s = o$. Nella formola (18) ſi faccia $r = L$, $s = o$, e ſi ſcoprirà $y = \pm c$. Quindi in tal caſo GM $=$ GH $= 2y = 2c$, al qual valore ſi eguaglia nella Fig. 34. l' ordinata AD corriſpondente all' asſiſſa BA $= r = L$.

XII. Mentre gli archi RB (*Fig.* 36.) creſcono aritmeticamente, le linee r calano in ragione geometrica. Ciò dipende dall' indole della logiſtica (*Fig.* 35.), in riguardo a cui i predetti archi formano le asſiſſe RB, e le r le ordinate BG. Chiamo e il quadrante RBI (*Fig.* 36.) e tagliate nella Fig. 35. le asſiſſe R2R $= e$, R3R $= 2e$, R4R $= 3e$, R5R $= 4e$, &c. le ordinate RS, 2R2S, 3R3S, 4R4S, 5R5S, &c. comporranno una ſerie geometrica. Abbiamo già fatta la linea RS ugua-

uguale a $BA = L$ della Fig. 34 Si ſtabiliſcano in oltre alle ordinate della Fig. 35. $2R2S$, $3R3S$, $4R4S$, $5R5S$, &c. eguali le aſſiſſe BC, $B2A$, $B2C$, $B3A$, &c. della Fig. 34. Stando in progreſſione geometrica le mentovate aſſiſſe, coſtituiranno parimente una ſimile ſerie le loro differenze AC, $C2A$, $2A2C$, $2C3A$, &c.. Si riferiranno altresì in ſerie continue geometriche le BA, $B2A$, $B3A$, &c.; le differenze loro $A2A$, $2A3A$, &c.; le BC, $B2C$, $B3C$, &c.; le differenze loro $C2C$, $2C3C$, &c.

XIII. Paſſi gradatamente (*Fig.* 36.) l' arco RB dal nulla al quadrante, ed accaderà, che la linea $GH = 2y$ ſcemi per doppio titolo, e perchè cala l'angolo GMH, coſa per ſe ſteſſa patente, e che non abbiſogna di prova; e perchè cala la linea $GM = \frac{2y\sqrt{g^2 + s^2}}{g}$, la quale ſi è fatta eguale alla PM della Fig. 35. Eſſendoſi tagliata per mezzo la linea RB nel punto P, l'ordinata PQ è media proporzionale fra le due $RS = L$, $BG = r$, e quindi $PQ = \sqrt{Lr}$. ripetuta l' analogia uſata al numero IX. $RS : RT :: PQ : PM$,

$$L : 2c :: \sqrt{Lr} : \frac{2c\sqrt{r}}{\sqrt{L}}$$

ſcopriremo PM, o ſia nella Fig. 36. $GM = \frac{2c\sqrt{r}}{\sqrt{L}}$, formola, la quale c' inſegna, che al calare di r la linea GM decreſce: ma all' aumentarſi degli archi RB ſcemano le r; dunque creſcendo i detti archi, cala la linea GM. Dalle coſe dette deducaſi, che quando l' arco RB s' eguaglia al quadrante RI, le due linee GM, HM coincidono, e la $GH = 2y$ diviene uguale a nulla. All' arco RB uguale al quadrante RI corriſponde nella Fig. 34. $r = BC$, e perciò la curva DHC paſſerà pel punto C, e procedendo da A verſo C, la ordinata anderà continuamente ſcemando, e diverrà nulla nel punto C.

XIV. Nel punto nominato la noſtra curva ha un fleſſo contrario, per cagione del quale il ramo $C2d2C$, che come vedremo diſcende al di ſotto dell' aſſe AB, volta allo ſteſſo il concavo, come altresì lo volta il ramo DHC. Richiedono i

fleſſi

flessi contrarj, che sia o $ddy=0$, o $ddy=\infty$. Dalla equazione (3) deducesi la seguente $\pm\frac{8ydr^2}{r^2}=\mp ddy$, da cui apprendiamo, che posta $\mp y=o$, è parimente $\mp ddy=o$, e che per conseguenza ad $y=o$ corrisponde il flesso contrario.

XV. La Fig. 36. patentemente dimostra, che mentre l'arco RB diviene maggiore del quadrante RI, purchè il punto B cada nel semicircolo IKL, la linea GH $=2y$ comparisce in figura di negativa, passando il punto H nel semidiametro GK. Se l'arco RB si eguaglia al triplo quadrante RIKL, in tal caso $r=$ B2C (*Fig.* 34.). Quindi per tutto il tratto C2C le ordinate $2y$ saranno negative, e la curva C2d2C starà al di sotto dell'asse AB. Noto, che nel sito 2C è nuovamente $2y=o$; perchè il raggio GB (*Fig.* 36.) cade sopra il raggio GL, ed il punto H torna a coincidere col punto G, laonde GH $=2y=o$.

Nel mentovato sito 2C (*Fig.* 34.) la curva ha un flesso contrario per le ragioni poco fa allegate.

XVI. Ora mi faccio ad investigare il massimo valore della ordinata $-2y$ in riguardo al pezzo di curva C2d2C. L'equazione (18) si trasforma così $\frac{c^2g^2}{L}\cdot\frac{r}{g^2+s^2}=y^2$. Se aumentando per una minima flussione l'arco RB (*Fig.* 36.), le due quantità r, g^2+s^2 decrescono proporzionatamente, non si altera il valore del quadrato y^2, e conseguentemente nè pur quello del lato $\pm y$, per la qual cosa la differenza $\pm dy=o$. Questa circostanza ci da indizio, che l'ordinata $\pm 2y$ è giunta alla massima sua grandezza. Essendo dr la differenza di r, e $2sds$ quella di g^2+s^2, avremo $\frac{dr}{r}=\frac{2sds}{g^2+s^2}$: ma per la formola (14) $\frac{dr}{r}=\frac{ds}{g^2+s^2}$; dunque $2s=1$, o sia $\frac{s}{g^2}=\frac{1}{2g^2}=\frac{2}{31}$, ponendo in cambio di g^2 il suo valore $\frac{81}{4}$. Si faccia la tangente Re $=\frac{s}{g^2}=\frac{2}{31}$, e condotta per li due punti e, G la li-

linea eGN, determinerà essa l' arco RIN, a cui devesi tagliare uguale l' assissa RN (*Fig.* 35.) della logistica S5S. S' alzi l' ordinata $NO = r$, e fatta a questa eguale la linea BE (*Fig.* 34.), al punto E corrisponderà la massima ordinata Ef, il valor della quale si stabilisce effettuando le operazioni dalla costruzione prescritte.

XVII. Continuando a crescere l' arco RB (*Fig.* 36.), e divenendo maggiore di tre quadranti RIKL, la linea $GH = 2y$ torna positiva, dimodochè si genera nella Fig. 34. il ramo 2C3D3C. Anche un tal ramo ha le condizioni dell' altro già descritto C2d2C; imperciocchè succede in 3C un flesso contrario, e l' ordinata 2E2F è fornita del massimo valore. Si trova il punto 2E facendo l' assissa P2N della logaritmica (*Fig.* 35.) eguale all' arco RIKLn (*Fig.* 36.), e tagliando B2E nella Fig. 34. eguale all' ordinata 2N2O della Fig. 35.

XVIII. In sì fatta guisa proseguirà la curva (*Fig.* 34.) DC2d2G3D3C &c., la quale è una specie di anguinea, che taglia l' asse AB in punti infiniti C, 2C, 3C, &c., in riguardo ai quali si verifica la proprietà notata al numero XII. che le distanze BC, B2C, B3C, &c. dal punto estremo B dell' onda formano una serie continua geometrica decrescente. La nostra curva ha un altro ramo dC2D2C3d3C &c. affatto simile, ed uguale al mentovato, se non che va collocato a rovescio.

XIX. Se più archi RB (*Fig.* 36.) differiscono per un semicircolo, il che si avvera degli archi in serie o, RIK, RIKLR, &c., allora i triangoli GHM riescono simili, e le $GH = 2y$ serbano la proporzione delle $GM = \frac{2c\sqrt{r}}{\sqrt{L}}$. Perciò in tale incontro le ordinate della curva espressa nella Fig. 34. stanno come le radici delle assisse. Le assisse corrispondenti alla serie degli archi recata in esempio sono BA, B2A, B3A, &c., e quindi le ordinate AD, 2A2D, 3A3D, &c., o pure le rispettivamente uguali Ad, 2A2d, 3A3d, &c. si riguarderanno nella ragione di $\sqrt{BA} : \sqrt{B2A} : \sqrt{B3A}$, &c.: ma BA, B2A, B3A, &c. compongono una serie geometrica, conforme ho avvertito al numero XII., dunque sarà parimente geometrica la serie $\sqrt{BA} : \sqrt{B2A}$, $\sqrt{B3A}$, &c., e per conseguenſeguenza le ordinate A D, 2 A 2 D, 3 A 3 D, &c. procederanno in geometrica progreſſione. Le maſſime ordinate E F, 2 E 2 F, &c., ovvero E f, 2 E 2 f, &c. godono della medeſima prerogativa.

XX. Tutta la curva delineata non ſerve all' ipoteſi propoſta dall' acutiſſimo P. Friſi. Si debbono ſcegliere quelle porzioni, nelle quali ſecondo l' equazione (3) $\frac{8ydr^2}{r^2} = -ddy$, o pure $-\frac{8ydr^2}{r^2} = ddy$ alle ordinate $2y$ poſitive corriſpondono le ſeconde fluſſioni ddy negative, o tutto al contrario alle ordinate $2y$ negative corriſpondono le ſeconde fluſſioni ddy poſitive. Si verifica ciò nei rami parte ſuperiori, e parte inferiori all' aſſe A B, che nella Fig. 37. ſi veggon deſcritti. Nei rami ſuperiori D C, F 2 C, 2 F 3 C, &c. ogni ordinata $GH = 2y$, che ſi conſidera come poſitiva, eſprime quello ſpazio, che il punto G dopo compiuta una vibrazione ha ſcorſo per la direzione A B, per la quale ſi ſuppone, che parimente abbia fatta una oſcillazione il corpo ſonoro. Nei detti rami, che voltano il concavo verſo l' aſſe A B, creſcendo le aſſiſſe $BG = r$, creſcono altresì le ordinate $GH = 2y$, ma con tal legge che i loro elementi $2dy$, o le metà dy vanno ſempre diventando più piccioli, ſecondochè ſi aumentano le B G. Sono negative adunque le ſeconde differenze ddy, mentre le ordinate G H ſon poſitive.

Segno a deſtra, ed a ſiniſtra del punto G le due particole d' aria G I, G K, la cui pari lunghezza s' eguagli all' elemento coſtante dr. Alzate dai punti I, G, K le ordinate I L, G H, K M, tiro L O, H N parallele all' aſſe B A. Dopochè finita una vibrazione i punti I, G, K hanno paſſato gli ſpazj I L, G H, K M per la direzione A B, e ſono ridotti in quiete, la particola G I ſi è coſtipata per la fluſſione maggiore O H, e la particola G K per la fluſſione minore N M. Quindi il punto aereo G è ſpinto da G verſo A, e queſta forza lo ſtimola a tornar indietro, e a dar principio alla reciprocazione.

XXI. Qualunque ordinata $QT = -2y$ dei rami inferiori C f, 2 C 2 f, &c. fa figura di negativa, dinotando lo ſpazio, per

cui

cui si è mosso da B verso A il punto Q, dopo di aver terminata una oscillazione con direzione contraria a quella del corpo sonoro. Conciossiachè i nostri rami volgono il concavo all' asse A B, e crescendo le assisse B Q, calano le ordinate Q T, ma con differenze sempre maggiori; interviene che alle dette ordinate negative corrispondono le ddy positive.

Taglio come sopra $QR = QP = dr$, descrivo le ordinate R V, Q T, P S, e tiro poscia S Z, T X parallele all' asse A B. Abbiano i punti P, Q, R scorsi gli spazj P S, Q T, R V per la direzione B A, e compiuta una vibrazione, la particella P Q si troverà più compressa della Q R, essendo la flussione Z T, per cui si ristrigne la prima particola, maggiore della flussione X V, per cui ristrignesi la seconda. Perciò il punto Q verrà stimolato a reciprocare da Q verso B.

XXII. Applicando gli addotti discorsi (*Fig.* 34) ai rami inferiori d C, f 2 C, 2 f 3 C, &c., ed altresì ai superiori C F, 2 C 2 F, &c., agevolmente si scoprirebbe non poter essi servire alla ipotesi del lodato P. Frisi; imperciocchè si verificherebbe l' assurdo, che le particole aeree dopo terminata una oscillazione verrebbero ancora sollecitate a seconda della oscillazione medesima; laonde dovrebbero continuare il moto, mentre la supposizione richiede, che abbiano da tornare indietro.

XXIII. Rivolgo dunque nuovamente gli occhi alla Fig. 37., ed osservo, che per un altro motivo coi rami superiori D C, F 2 C, &c. si debbono accoppiare gl' inferiori C f, 2 C 2 f, &c. Dall' uno, e dall' altro lato di un punto immobile, e per esempio di C, si tagli $Cd = Ca = dr$, e si menino le ordinate d g, a b. Essendo nel sito C $ddy = o$, come ho avvertito al numero XIV., passerà una squisita eguaglianza fra le ordinate d g, a b, ciascuna delle quali s' eguaglia a $2dy$. Finita una vibrazione dal punto a per la direzione A B, e dal punto d per la direzione contraria B A, le particole C a, C d restano del pari costipate per gli elementi eguali a b, d g, ed essendo il punto C tolto in mezzo da forze eguali, ed opposte, rimane immobile, conforme la costruzione richiede. A chi s' immaginasse di sostituire al ramo inferiore C f il superiore C F (*Fig.* 34), si potrebbe suggerire la riflessione, che mentre la particola C a (*Fig.* 37.) si ristrigne per la lineetta a b, l' altra particola C d si dilaterebbe altrettanto, e venendo spinto il punto C da C verso B, sarebbe impossibile, che conservasse la quiete.

Resta per tanto fermamente stabilito, che i soli rami nella Fig. 37. delineati alla suposizione del dottissimo P. Frisi si adattano.

XXIV. Ora egli è d' uopo considerare, se quei movimenti, che secondo l' ipotesi, di cui si tratta, dovrebbero animare le particole aeree, possano loro realmente e fisicamente competere. Nella vibrazione del corpo sonoro scopro la ragione, per cui tutt' i punti contenuti nella porzione d' onda A C s' abbiano da movere per la stessa direzione da A verso B. Rimanendo frattanto immobile il punto C, io non giungo a capire da qual meccanismo possa procedere, che tutt' i punti fra C ed E oscillino al contrario per la direzione B A. Di più l' aria E 2 C in cambio di secondare il moto dell' aria E C, tutto a rovescio si vibrerebbe da A verso B, incontrandosi il fisico assurdo, che due particelle d' aria situate in E, l' una all' altra vicine prima della oscillazione, si troverebbero separate finita la vibrazione per la distanza f F. Chi mi sa insegnar quella molla, che nei mentovati due punti aerei, massimamente dopochè sono disuniti, genera il movimento? Gli stessi inconvenienti notati nella porzione C 2 C dell' onda A B, si rinovellano nelle parti dell' onda medesima 2 C 3 C, 3 C 4 C, &c. infinite di numero, ed in progressione geometrica decrescenti.

XXV. Si vuole in oltre osservare, che le particole d' aria contenute nell' onda A B ricevono dal corpo sonoro la forza viva acquistata nell' oscillare. Ora non sarebb' egli un patentissimo assurdo, se mi riuscisse di provare che la forza viva delle nominate particole, e delle altre tutte poste in movimento supera quella del corpo sonoro? Una minima porzioncella d' una corda di metallo, che si vibra, generi moto in innumerabili raggi sonori, che hanno per centro la detta particola, fra i quali si conti l' onda A B. La particella d' aria A tocchi la corda, e secondi squisitamente il suo movimento, dimodochè l' una, e l' altra oscillino con pari celerità. Vibrandosi le particole aeree A, G colle leggi dei pendoli a cicloide, le loro velocità in punti analoghi, per esempio alla metà delle oscillazioni, stanno in ragione composta, diretta degli spazj A D, G H, che scorrono oscillando, ed inversa dei tempi, che impiegano in una vibrazione, i quali tempi serbano la ragione di

B A:

BA: BG, conforme al numero III. ho provato. Il punto G cada in uno de' siti (*Fig.* 34.) 2 A, 3 A, &c., e pel numero XVIIII. sarà AD: GH:: $\sqrt{BA}$: $\sqrt{BG}$. Le velocità dunque delle particole A, G abbraccieranno la proporzione $\frac{\sqrt{BA}}{BA}$: $\frac{\sqrt{BG}}{BG}$, o sia l' equivalente $\frac{1}{\sqrt{BA}}$: $\frac{1}{\sqrt{BG}}$, e perciò i loro quadrati staranno inversamente come BA: BG. La particola della corda si divida in tanto numero N di parti eguali, quanti sono i raggi sonori dal movimento d' essa particola cagionati nell' aere, e facendo che BA: BG abbia o eguale, o maggior ragione di quella, che passa fra la parte $\frac{1}{N}$ della massa della particola di metallo, e la massa della particola d' aria G; si determinerà il sito G contenente una particella d' aria, la cui forza viva è uguale, o maggiore di quella della porzione $\frac{1}{N}$ della menzionata particola della corda. Alla forza viva della particola G si aggiungano tutte le forze vive, di cui nello stesso istante sono fornite tutte l' altre particole contenute nell' onda AB, e ne risulterà un aggregato di forze vive, che moltissimo supererà quella della parte $\frac{1}{N}$ della particola di metallo. Finalmente le forze vive di tutti i raggi sonori, il cui numero N, destati nell' aria dal tante volte nominato elemento della corda si uniscano in una somma, e si scoprirà essere questa assaissimo più grande della forza viva del predetto elemento. Quello, che si è detto d' una particola della corda, s' applichi a tutte l' altre, e si conchiuda che nella ipotesi da me esaminata l' effetto supererebbe di gran lunga la propria cagione.

Avverto, che la supposizione non si potrebbe ammettere, nè pur quando richiedesse, che la forza viva trasfusa nell' aria da una vibrazione della corda pareggiasse quella della corda medesima. Insegnandoci l'esperienza, che una corda sonora fa numerosissime oscillazioni prima di ridursi alla quiete, dobbiamo conchiudere che per cagione d' una sola vibrazione passa nell' aria pochissima forza viva.

XXVI. Un faciliſſimo eſperimento c' illumina, che l' onde aeree non ponno vibrarſi conforme la ſuppoſizione dal celebre P. Friſi propoſtami da eſaminare. Ammeſſa queſta ſiccome vera, la particola G (*Fig.* 37.) ſpenderebbe in vibrarſi un tempo tanto più picciolo, quanto foſſe più vicina al punto eſtremo B dell' onda A B. Quindi ogni particola renderebbe un ſuono diverſo, il quale ſi udirebbe ſempre più acuto, ſecondochè l' orecchio s' accoſtaſſe al fine dell' onda: ma in qualunque ſito G ſcelto ad arbitrio io ſento lo ſteſſo ſuono uniſono a quello del corpo ſonoro; dunque le oſcillazioni dell' onda A B non ſi conformano all' ipoteſi del P. Friſi.

XXVII. Conchiudo il preſente eſame colla rifleſſione, che il moto non potrebbe paſſare da un' onda all' altra, ma nella ſola onda prima A B ſarebbe coſtretto a fermarſi. Con qual legge di continuità ſi può far tranſito dalla quiete del punto B al movimento per lo ſpazio eguale ad A D del punto immediatamente vicino, col quale principia l' onda ſeguente: dal tempo nullo, che il punto B ſpende a vibrarſi, al tempo finito, che c' impiega il punto contiguo?

Il notato aggregato d' inconvenienti cancella, ſiccome io penſo, l' ipoteſi per me eſaminata dal libro della Natura.

APPEN-

APPENDICE
ALLO
SCHEDIASMA IV.

I. NEll' ultimo numero dello Schediaſma IV. ho affermato, che ſe la corda vibrandoſi un ſolo ſuono produce, dee prendere una delle figure da me determinate: ma ſe, come realmente ſuccede, col ſuono principale 1 della corda intera ſono miſti i ſuoni 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. delle ſue parti aliquote; ſi compongono inſieme i moti proprj delle figure 15, 16, 17, &c., ed innumerabili nuove figure ne naſcono. Eſſendomi ſtata richieſta una diſtinta dichiarazione di queſta compoſizione di figure, e di moti, ho preſa riſoluzione di effettuar ciò nella preſente Appendice: tanto più che il chiariſſimo Signor Luigi de la Grange ingenuamente confeſſa (*a*) di non eſſere ancora giunto a poter ſpiegare la moltiplicità dei ſuoni armonici, che ſi fanno ſentire battendo una ſola corda.

II. Concioſſiachè le noſtre figure ſieno infinite, mi riſtrignerò a moſtrare la coſtruzione delle due più ſemplici; riuſcendo poi facile il paſſare alle più compoſte. E primieramente ſi uniſcano inſieme nella figura 38. le due curve BDF2DA, BGC2GA delle figure 15, 16, a cui ſi adatta la corda AB, quando trema intera, o diviſa in due parti eguali. L' ordinata HD corriſpondente al punto H preſo ad arbitrio ſi continui verſo E quanto baſta, e tagliata DE=HG, pel punto E, e per altri infiniti ſimilmente determinati ſi faccia paſſare la curva BEF2EA, che ſarà quella, a cui ſi conforma la corda nel primo de' ſuoi ſtati di quiete.

Paſſata la quarta parte del tempo impiegato dalla corda, che oſcilla intera, in una vibrazione; la ſteſſa corda, che ſi vibra come diviſa in due parti eguali, ha compiuta una mezza oſcil-

(a) *Miſcellanea Philoſophico-Mathematica Societatis privatæ Taurinenſis* Tom. I. *pag.* 109.

oscillazione, ed in questo istante si accomoda ad una figura analoga alla BDF2DA. Dopo mezza vibrazione della corda intera, ed una vibrazione della corda bipartita, prende essa la figura BGC2GA ma collocata negativamente. Torna poscia a coincidere con una figura analoga alla Bdf2dA, posciachè sono scorse tre quarte parti del tempo d' una vibrazione della corda intera, e la corda divisa in due ha fatte tre mezze vibrazioni. Finalmente terminata una vibrazione della corda intera, e due vibrazioni della corda distribuita in due parti eguali, ond' essa corda sia pervenuta al secondo stato di quiete, sarà la stessa fornita della figura Bef2eA nascente dallo stabilire de=HG, o pure dal girare la curva BEF2EA prima intorno l' asse CF, indi attorno l' asse BA.

Questa proprietà, che nei due stati di riposo le curve si alternino, di modo che sia BEF2EA=A2efeB, è comune a tutti que' casi, nei quali col suono 1 della corda intera s' accoppia uno, o più suoni espressi dai numeri pari 2, 4, 6, 8, &c. Avvertasi in oltre, che nella stessa supposizione i punti della corda non giungono alla linea retta BCA nel medesimo istante; imperciocchè quando il punto F è pervenuto in C, il punto E è trascorso oltre il punto H per uno spazio = HG, ed al contrario al punto 2E per giugnere fino in 2H resta da passare uno spazio = 2H2G.

III. M' innoltro alla costruzione delle curve, alle quali nel primo istante della oscillazione dee accomodarsi la corda, quando congiuntamente produce i suoni 1, 3, che le competono, secondochè si vibra intera, o divisa in tre parti eguali. Colla curva (*Fig.* 39, 40) BDF2DA della figura 15 si unisca la curva BGS2G2S3GA della figura 17, che può avere due differenti positure, come nelle citate figure 39, e 40, e pel punto qualunque H tirata l' ordinata HD, che si continui se fa bisogno, si tagli DE=HG, ed il punto E, ed altri infiniti similmente determinati apparterranno alla curva BEN2E2N3EA; di cui ci siamo proposta la costruzione.

Dopo il tempo d' una semivibrazione delle tre parti eguali della corda, si sarà essa conformata ad una figura analoga alla BDF2DA. Compiuta mezza vibrazione della corda intera, e tre mezze vibrazioni delle sue terze parti, si troverà nella linea retta BCA; e perciò tutti i suoi punti nello stesso istante

alla

alla mentovata linea pervengono: il che generalmente addiviene, qualora col suono 1 della corda totale sono misti i suoni 3, 5, 7, &c. della medesima corda divisa in uno, o più numeri impari di parti eguali. Assume poscia nuovamente la figura analoga alla B d f 2 d A, passato che sia il tempo di $\frac{5}{2}$ vibrazioni della corda compartita in tre porzioni eguali, e per ultimo dopo una vibrazione della corda intera, e tre delle sue terze parti, giunge essa corda al secondo stato di quiete, avendo presa la figura B e n 2 e 2 n 3 e A uguale alla B E N 2 E 2 N 3 E A: circostanza, che sempre si avvera, ogni volta che col suono 1 sono incorporati i suoni espressi dai numeri impari.

IV. Siccome colle due curve delle figure 15, 16 si compongono le curve (*Fig.* 38.) B E F 2 E A, B e f 2 e A atte a rendere la mistura di suoni 1, 2; così colle due curve ultimamente nominate, e colla curva della figura 17 si formeranno le curve, poste le quali si sentirà l' aggregato di suoni 1, 2, 3. Col mezzo di queste curve, e di quelle, a cui si adatta la corda divisa in quattro parti eguali, si determineranno le curve, alle quali dee conformarsi la corda, se ha da produrre unitamente i suoni 1, 2, 3, 4. In sì fatta guisa si può far transito alla descrizione delle curve sempre più composte, che un maggior numero di suoni mescoleranno con quello della corda totale.

V. Finora ho sempre unito col suono della corda intera quelli delle sue parti aliquote: vediamo presentemente cosa succeda, quando si congiungono insieme i suoni di due, o più parti aliquote.

Si accoppjno nella figura 41 le curve B D C 2 D A, B G S 2 E 2 S 3 G A delle figure 16, e 17, e fatta D E = H G, si descriva col solito metodo la curva B E N 2 E 2 N 3 E A, a cui conformata la corda, si vibrerà bipartita, e tripartita, e produrrà i suoni 2, 3. Nell' istante, in cui la corda divisa per metà ha fatto una vibrazione, la stessa corda partita in tre membri eguali ne ha compiuta una e mezzo, e si trova fornita della figura B D C 2 D A capovolta intorno all' asse A B. Ora questo non è uno stato di quiete; perchè la corda in tre porzioni distribuita si muove, essendo alla metà d' una sua vibrazione. Acciocchè ritorni allo stato di quiete, egli è d' uopo, che la corda si sia vibrata due volte come divisa in due parti, e tre

vol-

volte come ſcompartita in tre membri, impiegandoci in queſto ritorno il tempo d' una vibrazione della corda intera, ch' io eſprimo per l' unità. In tale incontro è fornita eſſa corda della figura 42, B e n 2 e 2 n 3 e A, che ſeparo dalla 41 per evitare la confuſione.

VI. Il paſſare frattanto da uno ſtato all' altro di quiete, è lo ſteſso, che il fare una vibrazione, e rendere il ſuono corriſpondente al tempo ſpeſo nel detto paſsaggio: ma al tempo 1 è relativo il ſuono 1 conveniente alla corda intera; dunque l' unione dei due ſuoni 2, 3 proprj della corda bipartita, e tripartita genera il ſuono 1 competente alla corda intera. Lo ſteſso effetto producono i ſuoni di tutte quelle due, o più parti aliquote, che ſono dinotati da numeri fra loro primi; perchè in tutte queſte circoſtanze ſi richiede il tempo 1, acciocchè la corda ritorni allo ſtato di quiete.

Che ſe ſi congiungeſsero due, o più ſuoni di tali parti aliquote, che foſsero indicati da numeri non fra loro primi; ne naſcerebbe il ſuono uguale alla maſſima loro comune miſura; a cagione che nel tempo d' una vibrazione di queſto ſuono la corda paſsa da uno ſtato all' altro di quiete. Tremi la corda diviſa in 4, 6, 8 parti eguali, e renda i ſuoni 4, 6, 8, ed accadendo, che ricuperi lo ſtato di quiete dopo due vibrazioni delle parti $\frac{1}{4}$ A B, tre delle parti $\frac{1}{6}$ A B, e quattro delle parti $\frac{1}{8}$ A B, cioè a dire nel tempo $\frac{1}{2}$ corriſpondente alle vibrazioni delle parti $\frac{1}{2}$ A B, ne riſulterà il ſuono 2 maſſima comune miſura dei ſuoni 4, 6, 8.

Si avverta per altro, che ſe la maſſima comune miſura foſſe uguale al ſuono più grave, non naſcerebbe nuovo ſuono; imperciocchè la corda ritornerebbe allo ſtato di ripoſo nel tempo d' una vibrazione della parte aliquota maggiore, che rende il detto ſuono più grave. Suppoſto che per eſempio ſi uniſcano nella medeſima corda A B i ſuoni 2, 4, 6, convenienti alle parti aliquote $\frac{1}{2}$ A B, $\frac{1}{4}$ A B, $\frac{1}{6}$ A B, la maſſima comune miſura dei quali pareggia il ſuono più grave 2, riacquiſterà eſsa corda lo ſtato di quiete nel tempo d' una vibrazione delle parti aliquo-

te

te $\frac{1}{2}$ A B, e non si genererà nuovo suono.

Sembrami, che la riflessione del ritorno della corda da uno stato all' altro di quiete rischiari vie più la mia spiegazione fisica della sperienza dell' altre volte lodato Sig. Giuseppe Tartini contenuta nei numeri XXV, XXVI, e XXVII. dello Schediasma IV; intendendosi per tal mezzo con maggior evidenza qualmente i suoni espressi da numeri fra loro primi di due parti aliquote producano il suono della corda totale.

VII. Opporrà qualcuno, che la spiegazione del terzo suono sarebbe chiarissima, se le corde aeree, che portano i suoni all' orecchio, si vibrassero come le solide: ma essendo le oscillazioni loro d' indole affatto diversa, non si sa capire in qual modo ad esse la spiegazione si adatti. Nelle corde solide tutte le particole principiano, e finiscono nello stesso istante le vibrazioni, che si fanno per la direzione normale alla loro lunghezza; e quindi ogni volta che le corde suddette si ritrovano in uno stato di quiete, questa proprietà è comune a tutte le particole, onde sono composte. I punti estremi rimangono immobili, e ciò succede ancora in alcuni punti di mezzo, quando tremano divise in parti eguali, ed il riposo di essi punti non è turbato dall' accoppiamento di qualche altra maniera di oscillazione. Al contrario le particole delle corde fluide danno tanto più tardi cominciamento e fine alle loro vibrazioni per la direzione della lunghezza, quanto sono più rimote dal corpo sonoro, nè, se questo continua a vibrarsi, si effettua in esse corde il transito da uno stato all' altro di quiete, da cui nelle corde solide dipende l' origine del terzo suono. In oltre non contengono punto alcuno, che prima o dopo non muovasi; e per conseguenza dalla quiete dei punti estremi (*Fig.* 41.) A, B, e dal moto di qualunque punto medio non si può dedurre, come nel numero XXVI. dello schediasma IV., il moto della corda totale A B, ed il suono ad essa conveniente.

Per ben intendere qualmente la mia spiegazione all' aria si accomodi, egli è d' uopo riflettere, che le particole aeree ugualmente lontane dal centro sonoro principiano e finiscono nel medesimo istante le oscillazioni. Fra sì fatte particole io considero quelle, che nel sensorio fanno impressione. Per opera dei suoni *n*, *N* espressi da numeri fra loro primi abbiano esse congiuntamente concepito le vibrazioni appropriate ai detti ſuoni, ed accadendo, che il loro aggregato, non altrimenti che nelle corde ſolide, ci ſpenda il tempo 1 nel far tranſito da uno ſtato all' altro di quiete, ſi ſveglierà il ſuono 1 nell' orecchio.

Merita per tanto qualche moderazione quello, che ho ſcritto nel citato numero XXVI. dello Schediaſma IV. Una corda d' aria fa una vibrazione nel tempo ſteſſo, in cui il ſuono ſi propaga da una eſtremità all' altra della ſua lunghezza, ſopra di che veggaſi lo Schediaſma V. al numero III. Le due corde (*Fig.* 22.) E, F del violino producenti i ſuoni dinotati dai numeri n, N fra loro primi pongano in oſcillazione le particole aeree contenute nel raggio ſonoro BD, onde conforme ho dichiarato concepiſcano anche la vibrazione propria del ſuono 1. Se nel tempo $\frac{1}{n}$ d' una vibrazione della corda E il ſuono ſcorre lo ſpazio $BS = \frac{L}{n}$, nel tempo $\frac{1}{N}$ d' una vibrazione della corda F paſſerà lo ſpazio $BI = \frac{L}{N}$, e nel tempo 1 lo ſpazio $AB = L$. Perciò le corde d' aria BS, BI, BA ſono atte a rendere i ſuoni n, N, 1, ed io poſſo concepire, che la corda indefinita BD tremi diviſa nelle tre ſpecie di porzioni eguali a BS, BI, BA, e ne porti i ſuoni all' orecchio.

Non deggio tralaſciar di notare, che fra gl' innumerabili raggi ſonori, che partono dai punti per eſempio E, F delle due corde del violino, quelli ſoli generano il terzo ſuono, che s' incontrano in un qualche punto B, il che (ſendo uguale la velocità, con cui ſi propagano le voci gravi ed acute) ſegue ſempre a pari lontananze EB, FB dai mentovati punti E, F. In tal guiſa la particola B comincia nello ſteſſo momento a vibrarſi in doppia forma, e c' impiega il tempo 1 a paſſare al ſuſſeguente ſtato di quiete. Diffondendoſi la vibrazione ſonora per la direzione BD media fra le due EB, FB, ſe in eſſa direzione ſi trova l' orecchio, ſente mediante il raggio BD oltre i ſuoni n, N anche il terzo, che ſi eſprime per l' unità. Concioſſiachè fra i raggi, che dalle corde E, F vengono al ſenſorio, ſi contino riſpettivamente pochi quelli, che ſieno forniti della nominata condizione, il terzo ſuono ha da riuſcire aſſai più fiacco dei due del violino, come di fatto l' eſperienza ci manifeſta.

VIII.

VIII. Ora egli è d' uopo provare, che i punti della corda conformata ad una delle curve, di cui ho data la coſtruzione, ſono ſpinti dalle forze acceleratrici neceſſarie, acciocchè ne naſca la data meſcolanza di ſuoni, e che la corda ſteſſa nello vibrarſi ſi adatta ſempre mai ad una curva di ſimile natura, che componendoſi di curve ſemplici analoghe alle primitive, ſi determina col mezzo della mia coſtruzione. Mi riſtrignerò a conſiderare l' unione di due ſoli ſuoni, potendoſi collo ſteſſo metodo progredire ai caſi più compoſti.

La curva (*Fig.* 41) BEN2E2N3EA naſca dalla compoſizione conforme il mio metodo delle due BDC2DA, BGS2E2S3GA, alle quali conformandoſi la corda AB, rende i ſuoni n, N: ſi cerca la forza acceleratrice del punto E riferita alla diſtanza dall' aſſe AB. Sia come nello Schediaſma IV. $AB = L$, la maſſa della corda $= M$, il peſo o forza, che la tende $= P$, $BH = x$, $HD = y$, e ſi ponga $HG = DE = q$ Al numero X. dello Schediaſma IV. ho dimoſtrato, che qualunque ſia la curva BEN2E2N3EA, la forza accelerante il punto E s' eguaglia alla quantità $\frac{LP}{Mdx^2}$ moltiplicata nella ſeconda differenza della minima ordinata $HE = y + q$: ma nel noſtro caſo la predetta ſeconda differenza $= -ddy - ddq$: dunque la forza acceleratrice del punto E

$$= -\frac{LPddy}{Mdx^2} - \frac{LPddq}{Mdx^2}.$$ Dinotata la proporzione fra il raggio, ed il quadrante circolare per $\frac{C}{B}$, c' inſegna il numero IV. del citato Schediaſma, che alle curve BDC2DA, BGS2E2S3GA competono l' equazioni $\frac{CL}{2nB} \cdot \frac{dy}{\sqrt{C^2 - y^2}} = dx$, $\frac{CL}{2NB} \cdot \frac{dq}{\sqrt{G^2 - q^2}} = dx$, nelle quali C, G ſignificano le maſſime loro ſaette. Preſe le differenze nella ſuppoſizione conſueta di dx coſtante, troveremo $-ddy = \frac{ydy^2}{C^2 - y^2}$, $-ddq$ =

$= \frac{q\,dq^2}{G^2 - q^2}$; e giacchè $C^2 - y^2 = \frac{C^2L^2dy^2}{4n^2B^2dx^2}$, $G^2 - q^2 = \frac{C^2L^2dq^2}{4N^2B^2dx^2}$, effettuate le ſoſtituzioni, ci ſi preſenterà

$$-\frac{LPddy}{Mdx^2} = \frac{4n^2B^2Py}{C^2LM},\quad -\frac{LPddq}{Mdx^2} = \frac{4N^2B^2Pq}{C^2LM};$$ e quindi

$$-\frac{LPddy}{Mdx^2} - \frac{LPddq}{Mdx^2} = \frac{4n^2B^2Py}{C^2LM} + \frac{4N^2B^2Pq}{C^2LM}$$ ſarà la forza acceleratrice del punto E, la quale pareggia le due forze $\frac{4n^2B^2Py}{C^2LM} = F$, $\frac{4N^2B^2Pq}{C^2LM} = f$, che pel numero VII. dello Schediaſma IV. accelerano i due punti corriſpondenti D, G delle curve BDC2DA, BGS2E2S3GA, alle quali accomodandoſi la corda, rende i ſuoni ſolitarj n, N.

IX. M' immagino tre corde totalmente pari nella materia, lunghezza, groſſezza, e tenſione, e ſuppongo, che ſiano accomodate (*Fig.* 41) alle curve BDC2DA, BGS2E2S3GA, BEN2E2N3EA; di modo che nel primo momento del moto alla ſteſſa aſſiſſa BH corriſpondano $HD = c$, $HG = g$, $HE = HD + DE = c + g$. Poichè la forza del punto E s' eguaglia all' aggregato delle forze F, f dei punti D, G; ne ſegue che nel primo tempicello dt il punto E acquiſta una velocità V eguale alla ſomma delle velocità u, v dei punti D, G, e ſcorre uno ſpazio uguale alla ſomma degli ſpazj paſſati dai detti punti; e perciò facendoſi eguali ſottrazioni da quantità uguali, s' eguaglieranno i reſidui, ed anche nel cominciamento del ſecondo tempicello ſarà, come richiede la mia coſtruzione, $HE = HD + HG$, e pel numero antecedente la forza del punto E pareggerà le forze F, f dei punti D, G. S' applichi il diſcorſo ai ſuſſeguenti minimi tempi, e ſi conchiuda, che dopo il tempo t ſarà $V = u + v$, $HE = HD + HG$ conforme la mia coſtruzione addimanda, e la forza del punto E s' eguaglierà all'

aggre-

aggregato delle forze dei punti D, G. Quindi se nel tempo inassegnabile dt i punti D, G camminano gli spazj $-dy$, $-dq$ proporzionali alle velocità u, v; dal punto E si passerà lo spazio $-dy-dq$ relativo alla velocità $V=u+v$. In oltre essendo pel numero XIV. del mentovato Schediasma

$$u=\pm\frac{2nB}{C}\frac{\sqrt{P.\overline{c^2-y^2}}}{\sqrt{LM}},\ v=\pm\frac{2NB}{C}\frac{\sqrt{P.\overline{g^2-q^2}}}{\sqrt{LM}},$$ scopriremo $$V=u+v=\pm\frac{2nB}{C}\frac{\sqrt{P.\overline{c^2-y^2}}}{\sqrt{LM}}\pm\frac{2NB}{C}\frac{\sqrt{P.\overline{g^2-q^2}}}{\sqrt{LM}};$$

Non si trascuri la conseguenza, che adattandosi costantemente pel numero IX. dello Schediasma IV. le due prime corde a curve di simil natura; questa proprietà si accomuna anche alla terza corda, la cui figura in qualunque istante si compone con quelle delle corde prima, e seconda.

X. Della velocità $V=u+v$ del punto E si può altresì stabilirne il valore col mezzo del metodo delle azioni, ch' è il vero metodo della Natura. Giacchè al numero VIII. ho trovato la forza acceleratrice del detto punto $=\frac{4n^2B^2Py}{C^2LM}+\frac{4N^2B^2Pq}{C^2LM}$, e che questa s' applica allo spazio elementare $-dy-dq$, avremo $$\frac{4n^2B^2Py+4N^2B^2Pq}{C^2LM}.\overline{-dy-dq}=$$

$$\frac{4B^2P}{C^2LM}.\overline{-n^2ydy-n^2ydq-N^2qdy-N^2qdq}=VdV\ (*);$$

Abbiamo imparato nel numero antecedente, che i punti D, G scorrono nel medesimo tempo dt colla velocità u, v gli spazietti $-dy$, $-dq$, ed essendo pel numero XIV. dello Schediasma IV. $dt=\frac{C}{2B}\sqrt{\frac{LM}{P}}.\frac{-dy}{n\sqrt{c^2-y^2}}$, $dt=\frac{C}{2B}\sqrt{\frac{LM}{P}}.$

$-dq$

$\frac{-dq}{N\sqrt{g^2-q^2}}$, ne risulta $\frac{-dy}{n\sqrt{c^2-y^2}}=\frac{-dq}{N\sqrt{g^2-q^2}}$; formola, da cui nascono le due seguenti $\frac{-nNydy\sqrt{g^2-q^2}}{\sqrt{c^2-y^2}}=-n^2ydq$, $\frac{-nNqdq\sqrt{c^2-y^2}}{\sqrt{g^2-q^2}}=-N^2qdy$. Sostituisco nella equazione (*) in vece di $-n^2ydq$, $-N^2qdy$ gli scoperti valori, e mi si presenta $\frac{4B^2P}{C^2LM}$.

$$-n^2ydy-\frac{nNydy}{\sqrt{c^2-y^2}}\sqrt{g^2-q^2}-\frac{nNqdq}{\sqrt{g^2-q^2}}\sqrt{c^2-y^2}-N^2qdq$$

$=VdV$, ed integrando coll' aggiunta delle necessarie costanti, acciocchè quando $V=o$, sia $y=c$, $q=g$,

$$\frac{4B^2P}{C^2LM}.\overline{n^2.c^2-y^2+2nN\sqrt{c^2-y^2}.\sqrt{g^2-q^2}+N^2.g^2-q^2}=V^2,$$

ed estraendo la radice,

$$\frac{2B}{\epsilon}\sqrt{\frac{P}{LM}}.\overline{\pm n\sqrt{c^2-y^2}\pm N\sqrt{g^2-q^2}}=u+v=V,$$

ch' è quello stesso valore, che ho ritrovato di sopra al numero IX.

Avverto che i segni amendue affermativi s' adattano al caso, che l' una, e l' altra velocità componente u, v sia positiva, cioè a dire diretta da E verso H. Se tutte e due le dette velocità tendono da H verso E, servono i segni negativi. Ma se u ha la direzione EH, ed v l' HE, cadono in concio i segni positivo, e negativo, e se il contrario succede, vagliono i segni negativo, e positivo. I due ultimi casi, nei quali le velocità u, v, che compongono la V, sono contrarie, richiedono

dono le formole differenziali

$$\frac{4n^2B^2Py - 4N^2B^2Pq}{C^2LM} \cdot \overline{-dy+dq} = VdV,$$

$$-4n^2B^2Py + 4N^2B^2Pq \cdot + \overline{dy-dq} = VdV.$$

XI. Componendosi la velocità V del punto E delle due u, v dei punti D, G, i quali vibrandosi producono i suoni n, N; accade, che il detto punto concepisca congiuntamente due specie di oscillazioni, che i suoni n, N nell' orecchio risvegliano. Ella è cosa maravigliosa, ch' esistendo nel punto E la velocità composta, e non già le componenti; nulladimeno il sensorio ne formi un' idea talmente chiara, ch' oda i suoni distinti n, N. Un simile effetto accade talvolta nell' occhio. S' io rimiro dal lido un uomo, che cammina lungo una barca, la quale spinta dal vento si muove parallela al predetto lido, nettamente discerno nell' uomo la velocità propria, e quella, ch' ha colla barca comune. Valendomi anche in riguardo al punto E della teorica del moto traslato, posso concepire, che allo stesso punto s' imprima la velocità u dalla forza $F = \frac{4n^2B^2Py}{C^2LM}$, che lo spinga per gli spazj elementari $-dy$, e la velocità v dalla forza $f = \frac{4N^2B^2Pq}{C^2LM}$, che lo spinga per gli spazj elementari $-dq$, e che con quella velocità il suono n, e con questa il suono N si generi.

Nel presente numero, e nei tre precedenti ho sempre adattato i discorsi alla figura 41, e supposto cospiranti le forze F, f, e le velocità u, v. Egli è frattanto agevole l' applicarli agli altri casi. Se come nella figura 42, le mentovate forze, e velocità fossero contrarie, ne risulterebbe la forza del punto e da e verso H $= F - f$, He $=$ Hd $-$ ed, $V = u - v$.

XII. Le velocità componenti

$$u = \pm \frac{2nB}{C} \sqrt{\frac{P}{LM} \cdot \overline{c^2 - y^2}}, \quad v = \pm \frac{2NB}{C} \sqrt{\frac{P}{LM} \cdot \overline{g^2 - q^2}}$$

fo-ſono generalmente nulle, quando $y = \pm c$, $q = \pm g$, e ciò può accadere, o nel medeſimo iſtante, o in diverſi. Saranno nulle nello ſteſſo iſtante, qualora la corda ſi trova in uno de' ſuoi ſtati di quiete, ed in tal caſo avremo $V = o$. Negli altri incontri ſe ſarà nulla la velocità u, non ſarà tale la v, o al contrario. In oltre la velocità u ſarà nulla in riguardo ai nodi, per eſempio C, (*Fig.* 41.) che ſeparano una parte $\frac{L}{n}$ dall'altra, e lo ſteſſo dicaſi della velocità v in riguardo ai nodi N, 2 N; e perciò riſpettivamente al punto C ſarà $V = v$, e riſpettivamente ai punti N, 2 N, $V = u$. Finalmente la velocità V ſi annullerà, poſto che ſi avveri la circoſtanza, che le due velocità componenti ſiano eguali, e contrarie, onde s' abbia $n\sqrt{c^2 - y^2} = N\sqrt{g^2 - q^2}$. Sopra di ciò terrò quanto prima nuovamente diſcorſo. Ed intanto avverto, che formando l' orecchio una idea diſtinta delle velocità componenti u, v, non concepiſce come ſtato di quiete del punto E quello, in cui le dette velocità ſono eguali e contrarie, e la velocità aſſoluta $V = o$; ma riſerba un tale giudicio alla circoſtanza, nella quale s' annullano tutte e tre le velocità mentovate, ed il ripoſo è comune alla corda intera.

XIII. Concioſſiachè pel numero X. $\frac{-dy}{n\sqrt{c^2 - y^2}} = \frac{-dq}{N\sqrt{g^2 - q^2}}$, avremo integrando $\frac{1}{n} S \cdot \frac{-dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \frac{1}{N} S \frac{-dq}{\sqrt{g^2 - q^2}}$, e per conſeguenza $n : N :: S\frac{-dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} : S\frac{-dq}{\sqrt{g^2 - q^2}}$. Rifletto eſſere $S\frac{-dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$ un arco di circolo diviſo pel ſuo raggio, il cui coſeno $= \pm y$, il qual arco ſi eguaglia ad un arco ſimile deſcritto col raggio $= 1$. Lo ſteſſo diſcorſo s' applichi a $S\frac{-dq}{\sqrt{g^2 - q^2}}$.

Coi

Coi raggi (*Fig.* 43.) $IK=g$, $IL=c$, $IM=1$ ſi deſcrivano i tre circoli ſegnati nella figura, e tagliato ad arbitrio l' arco MR, ſi tiri il raggio IR, e pel punto Q, nel quale interſeca il circolo LQl, ſi delinei QP normale ad Mm. Dallo ſtato di quiete della corda (*Fig.* 41, 43) BEN 2E2N3EA ſino ad un dato iſtante ſia paſſato il tempo rappreſentato dall' arco MR, ed il punto E in riguardo alla velocità u, e per opera della forza $F=\frac{4n^2B^2Py}{C^2LM}$ avrà ſcorſo lo ſpazio LP. Se come nella detta figura 41, anche la forza $f=\frac{4N^2B^2Pq}{C^2LM}$ non altrimenti che la compagna ſpinge da principio il punto E per la direzione EH, ſi determini l' arco MRS, che ſtia all' arco MR come $n:N$, e condotto il raggio IS, che taglierà il circolo KOk nel punto O, ſi meni per eſſo la retta ON normale ad Mm, ed accaderà che nel tempo MR il punto E abbia viaggiato colla velocità v, ed a cagione della forza $f=\frac{4N^2B^2Pq}{C^2LM}$ per lo ſpazio KN. Quindi il totale ſpazio, per cui ſi ſarà moſſo da E verſo H il punto E, pareggerà LP+KN.

Che ſe come nella figura 42 la forza $f=\frac{4N^2B^2Pq}{C^2LM}$ nel cominciamento del moto è contraria all' altra $F=\frac{4n^3B^2Py}{C^2LM}$, e ſtimola il punto e da H verſo d, ſi ſegni ms = Ms, e tirate come ſopra sI, on, ſarà kn lo ſpazio corſo dal punto e colla velocità negativa v; e perciò ne riſulterà lo ſpazio aſſoluto per la direzione dH eguale ad LP — kn.

In sì fatta guiſa determineremo in ogn' iſtante il ſito del punto E (*Fig.* 41), ovvero e (*Fig.* 42), e di qualunque altro, e potremo delineare la figura, a cui nel detto iſtante ſi adatta la corda.

XIV. Le ſeguenti avvertenze metteranno la coſa ancora più in chiaro. Gli ſpazj LP, KN, ovvero kn creſcono fino alla loro maſſima miſura $Ll = 2c$, $Kk = kK = 2g$, indi calano ſinatantochè divengono nulli, e poſcia tornano a creſcere: e quante volte andando, e ritornando ſi percorrono gli ſpazj $2c$, $2g$, tante vibrazioni fa la corda come producente i ſuoni n, N.

Negli ſtati di quiete 1, 3, 5, &c. amendue gli ſpazj LP, KN, o pure kn eguagliano il nulla: ma negli ſtati di quiete 2, 4, 6, &c. ſaranno o tutti due maſſimi, ſe n, N ſono numeri impari; o $LP = o$, e KN, ovvero $kn = 2g$, ſe n è pari, ed N impari; o $LP = 2c$, e KN, ovvero $kn = o$, ſe n è impari, ed N pari. Poſto che i due numeri n, N ſieno ambo pari, ſi dividano per la maſſima loro comune miſura μ, e ſecondochè $\frac{n}{\mu}$, $\frac{N}{\mu}$ ſaranno ambo impari, o il primo pari, e il ſecondo impari, o a roveſcio, ſuccederà quello, che ho teſtè ſtabilito, negli ſtati di quiete 2, 4, 6, &c.

La dimoſtrazione delle verità ennunciate dipende da ciò, che gli ſpazj LP, KN, o kn ſi annullano, quando la corda come diviſa nel numero di parti n, N ha compiuto un numero pari di vibrazioni: ed al contrario pareggiano i maſſimi valori $2c$, $2g$, quando la corda ſteſſa ha effettuato un numero impari di vibrazioni come diviſa nei detti numeri di parti. Sia μ la maſſima comune miſura dei numeri N, n, la quale s' eguaglia all' unità, s' eſſi numeri ſiano fra loro primi. Negli ſtati di quiete 1, 3, 5, &c. la corda ha fatto vibrazioni dell' una, e dell' altra ſpecie o; $2\frac{n}{\mu}$, $2\frac{N}{\mu}$; $4\frac{n}{\mu}$, $4\frac{N}{\mu}$; &c.: e poichè $\frac{n}{\mu}$, $\frac{N}{\mu}$ ſono numeri interi, ſaranno ſempre $2\frac{n}{\mu}$, $2\frac{N}{\mu}$; $4\frac{n}{\mu}$, $4\frac{N}{\mu}$; &c. numeri pari, qualunque valore o pari, o impari ſi attribuiſca ai numeri n, N; e per conſeguenza ſi eguaglieranno a nulla gli ſpazj LP, KN, ovvero kn. Ma negli ſtati di quiete 2, 4, 6, &c. avendo la corda terminato vibrazioni delle due ſpecie $\frac{n}{\mu}$, $\frac{N}{\mu}$; $3\frac{n}{\mu}$, $3\frac{N}{\mu}$; $5\frac{n}{\mu}$, $5\frac{N}{\mu}$; &c., ſi ſuppongano in primo luogo i numeri n, N ambo impari, e dovendo eſſere parimente impari la maſſima loro comune miſura μ; ne ſegue neceſſariamente, che ſi annoverano fra gl' impari i numeri interi $\frac{n}{\mu}$, $\frac{N}{\mu}$, ed altresì $3\frac{n}{\mu}$, $3\frac{N}{\mu}$; $5\frac{n}{\mu}$, $5\frac{N}{\mu}$; &c. laonde per la regola data LP $=2c$, KN, ovvero kn $=2g$. Che se n è pari, ed N impari, o al contrario, ha da contarsi fra i numeri dispari la massima loro comune misura μ, e seguitando $\frac{n}{\mu}$, $\frac{N}{\mu}$; $3\frac{n}{\mu}$, $3\frac{N}{\mu}$; $5\frac{n}{\mu}$, $5\frac{N}{\mu}$; &c. la natura dei numeri n, N in riguardo all' esser pari, o dispari; si conchiuda essere LP $=o$, e KN, ovvero kn $=2g$ posto n pari, ed N impari; ed a rovescio LP $=2c$, e KN, ovvero kn $=o$ posto n impari, ed N pari. Resta che si consideri la circostanza, che n, ed N siano ambo numeri pari, nella quale la comune massima misura μ esser dee pari. Ora dividendo due numeri pari n, N per la massima comune misura μ altresì pari, ne possono risultare i quozienti $\frac{n}{\mu}$, $\frac{N}{\mu}$ ambo impari, o quello pari e questo dispari, o all'opposto, e della stessa indole saranno $3\frac{n}{\mu}$, $3\frac{N}{\mu}$; $5\frac{n}{\mu}$, $5\frac{N}{\mu}$; &c. Quindi nel primo caso LP $=2c$, KN, ovvero kn $=2g$, nel secondo LP $=o$, KN, ovvero kn $=2g$, e nel terzo LP $=2c$, KN, ovvero kn $=o$.

S' inferisca, che negli stati di quiete 1, 3, 5, &c. la corda è sempre fornita della medesima figura, e collocata nel medesimo sito. Lo stesso si affermi degli stati di quiete 2, 4, 6, &c.

XV. Aggiungo, ch' egli è sufficiente il determinare la figura della corda negl' istanti di mezzo fra il primo, ed il secondo stato di quiete; imperciocchè quando essa fa transito dal secondo stato di quiete al terzo, dal terzo al quarto, &c., ripiglia costantemente in qualunque dato sito la primiera figura. E vaglia il vero, (*Fig.* 41, 43) gli spazj LP, KN, ovvero kn passati dal punto E preso ad arbitrio hanno gli stessi valori, e mentre dal principio del moto è scorso il tempo MR, e mentre ci manca alla corda un egual tempo per giugnere agli stati di quiete 3, 5, 7, &c. Fra gli stati di quiete 1 e 3, 3 e 5, 5 e 7, &c. corre l' intervallo di tempo MRS2sm. $2\frac{n}{\mu}$, e sottraendo il tempo MR, abbiamo l' avanzo $MRS2sm.2\frac{n}{\mu}-MR$, paſſato il quale, reſta ancora il tempo MR per arrivare ad uno degli ſtati di quiete in ſecondo luogo nominati. Fatto $M2R=MR$, l' iſtante ultimo del tempo $MRS2sm.2\frac{n}{\mu}-MR$ caderà in 2R, poichè $MRS2sm.2\frac{n}{\mu}$ è un numero pari di ſemicircoli, ed all' arco M2R non altrimenti che all' eguale MR corriſponderà lo ſteſſo ſpazio LP. Ora dee ſtabilirſi il ſito del punto 2S, ovvero 2s relativo al 2R. Si otterrà ciò pel numero XIII. col mezzo dell' analogia $n:N::MRS2sm.2\frac{n}{\mu}-MR:$ $MRS2sm.2\frac{N}{\mu}-MR.\frac{N}{n}$: e riflettendo eſſere $MRS2sm.2\frac{N}{\mu}$ un numero pari di ſemicircoli, ed $MR.\frac{N}{n}=$ $MS=ms$ pel numero XIII., ſi tagli $M2S=MS$, ovvero $m2s=ms$, e chiaramente ſi ſcoprirà, che ad entrambe le dette coppie d' archi uguali ſi riferiſcono gli ſteſſi ſpazj KN, ovvero kn, e che qualſivoglia punto E della corda AB dopo i mentovati tempi MR, $MRS2sm.2\frac{n}{\mu}-MR$ ſi troverà nel medeſimo ſito diſtante da quello occupato nel primo ſtato di quiete per $LP+KN$, ovvero $LP-kn$. Quindi o paſſi la corda dal primo al ſecondo ſtato di quiete, o pure ſi mova dal ſecondo al terzo, dal quarto al quinto, &c., accetterà ſempre mai nel modo ſpiegato la medeſima ſerie di figure.

Che poi nel tranſito dal primo al ſecondo ſtato di quiete, dal terzo al quarto, dal quinto al ſeſto, &c. la corda prenda la ſteſſa progreſſione di figure, ella è coſa evidente; mercecchè accomodandoſi alla medeſima figura negli ſtati di quiete 1, 3, 5, &c., non v' ha ragione, per cui (preſcindendo dalle reſiſtenze) una ſerie debba differire dall' altra.

XVI. Si adatterà la corda alla figura confacente al ſuono ſolitario *n*, quando avendo compiute ſemivibrazioni 1, 3, 5, &c. proprie del ſuono *N*, (*Fig.* 41, 42, 43) ſarà $KN=KI=g$, ovvero $kn=kI=g$; e conſeguentemente $IN=DE=o$, ovvero $In=de=o$. L' ordinata HD ſarà poſitiva, o negativa, ſecon-

secondochè L P calerà, o crescerà posto al paragone con $LI = c$.

Negl' istanti, ne' quali avrà essa corda terminate semivibrazioni 1, 3, 5, &c. convenienti al suono n, si troverà conformata alla figura richiesta dal suono unico N, ed in tal circostanza sarà $LP = LI = c$; e perciò $PN = DH = o$. Anche qui l' essere D E positiva, o negativa, de negativa, o positiva dipende dalla grandezza in quel tal momento di K N, che sia minore, o maggiore di $KI = g$, e similmente di kn minore, o maggiore di $kI = g$.

Ma se n, N fossero numeri impari, nello stesso istante avrebbe la corda effettuate semivibrazioni $\frac{n}{\mu}$, $\frac{N}{\mu}$; $3\frac{n}{\mu}$, $3\frac{N}{\mu}$; $5\frac{n}{\mu}$, $5\frac{N}{\mu}$; &c., e tutti i suoi punti sarebbero collocati nella linea retta A C B.

Eccettuati i casi notati, ne' quali le saette della corda, che oscilla divisa nei numeri di parti n, N, sono o quelle di una sola specie, o quelle di ambedue uguali a nulla; la figura della corda stessa si compone sempre delle due richieste dai suoni solitarj n, N; ed il valore positivo, o negativo di H D, D E, negativo, o positivo di de trae l' origine da quello delle linee relative L P, K N, ovvero L P, kn, conforme ho testè avvertito. Nel primo stato di quiete, o sia nell' istante M sieno date le curve componenti B D C 2 D A, B G S 2 E 2 S 3 G A, e conseguentemente ancora la curva composta B E N 2 E 2 N 3 E A, in cui all' assissa B H corrispondono $HD = LI = c$, $DE = KI = g$. La nostra costruzione c' insegna, che nel momento R sarà $DH = PI$, $ED = NI$. Ora verificandosi la condizione, che le ordinate delle curve del suono n corrispondenti alla stessa assissa negl' istanti M, R si riguardino nella proporzione $LI : PI$, e quelle del suono N nella proporzione $KI : NI$: egli è facile, essendo date le curve componenti, e la composta nell' istante M, il determinare nell' istante R tutte intere le curve predette. Quest' avvertenza vale anche per la descrizione della figura della nostra corda, quando negl' incontri sopra stabiliti E D, ovvero D H si eguaglia al nulla, e la corda si adatta all' una, o all' altra delle figure componenti.

Non tralascio di notare, che i nodi per esempio 2 E della corda divisa nel numero n di parti si muovono, come se la

cor-

corda rendesse l' unico suono N; e similmente i nodi per esempio N, 2 N della corda divisa nel numero N di parti si vibrano, come se dalla corda l' unico suono n venisse prodotto; laonde quelli sono sempre collocati in una curva propria del suono N, e questi in una curva propria del suono n.

XVII. Ho detto al numero XII., che la velocità assoluta V del punto E si annullerà, qualora le due velocità componenti u, v sieno uguali, e contrarie, onde s' abbia $n\sqrt{c^2-y^2} = N\sqrt{g^2-q^2}$. Per ottener ciò, egli è d' uopo primieramente, che se il punto R cade nel semicircolo M R S 2 s m, il punto S cada nel semicircolo m s 2 S 2 R M per esempio in s, o a rovescio; dimodochè sieno contrarie le velocità u, v, e se la direzione d' una è da L verso I, quella dell' altra sia da k verso I. In secondo luogo egli è necessario, che le ordinate $PQ = \sqrt{c^2-y^2}$, $no = -\sqrt{g^2-q^2}$ stiano fra loro come $\frac{1}{n} : \frac{1}{N}$, o sia in ragione inversa dei suoni n, N proprj delle vibrazioni per gli spazj $LI = 2c$, $kK = 2g$. La perdita totale di moto nel punto E, della quale si parla, diversa dall' altra comune a tutta la corda negli stati di quiete, dee succedere infallibilmente, quando nell' intervallo di tempo fra uno stato e l' altro di quiete della corda il punto E ha necessariamente da mutar direzione. Negli altri casi la detta perdita può avvenire, e non avvenire, secondo la varia proporzione di $LI = c$, $KI = g$.

XVIII. Ricorro ad un esempio per illustrar quanto basta la mia asserzione. Oscilli la corda congiuntamente divisa in parti eguali 2, e 3, conforme dimostra la figura 41, onde sia $n = 2$, $N = 3$. Fa transito essa corda da uno stato all' altro di riposo dopo due vibrazioni della corda bipartita, e tre della tripartita, ed in questo mezzo il punto E è costretto a mutar direzione. In fatti passati $\frac{2}{3}$ del tempo d' una vibrazione del suono n, eguali all' intero tempo d' una vibrazione del suono N, il punto E ha scorso per la direzione EH, o sia LI lo spazio

LI

$LI + \frac{1}{2} Il + Kk = \frac{3}{2} c + 2g$, e finite due vibrazioni del suono N, il detto spazio si ristringe alla misura $Kk = 2g$. Il punto E pertanto cangiata direzione è ritornato indietro, ed è passato per la quiete dal moto positivo al negativo, qualunque sia la proporzione fra c, e g.

Se MR pareggia due terze parti del semicircolo, ne risulta MRS uguale al semicircolo, ed il punto S coincide col punto m. Ma posto che MR s' eguagli al semicircolo, l' arco MRS diviene di tre quadranti, ed il punto S è collocato nel mezzo cerchio ms2S2RM. Acciocchè dunque il punto R sia nel semicircolo MRS2sm, ed il punto S nel semicircolo ms2S2RM, si rende necessario, che la grandezza dell' arco MR stia di mezzo fra due terzi di semicircolo, ed il semicircolo intero. Quindi il punto E ha da pervenire alla quiete in un tempo maggiore di due terze parti del tempo d' una vibrazione del suono n, e minore del tempo d' una vibrazione intiera.

La determinazione del detto tempo dipende dalla proporzione fra c, e g. Giunga per esempio il punto E alla quiete, quando sia (*Fig.* 41., e 44.) MR uguale a $\frac{4}{5}$ di semicircolo, MRmS uguale a $\frac{6}{5}$. Essendo in tale incontro $mR = mS$, ne risulta $PQ : NO :: IQ = c : IO = g$; e perciò posta $PQ = \frac{c}{\mu}$, sarà $NO = \frac{g}{\mu}$. E giacchè esser dee $2PQ = 3NO$, avremo $2c = 3g$, o sia $c : g :: 3 : 2$; e quindi se c, e g si riguarderanno nella detta ragione, il punto E resterà privo di moto dopo $\frac{4}{5}$ del tempo d' una vibrazione del suono n. Si faccia l' osservazione, che cangiandosi la proporzione fra HD, DE = HG al crescere, o al calare dell' affissa BH, i varj punti della corda in tempi diversi pervengono al riposo, e per conseguenza la quiete del punto E nella presente circostanza non è comune nello stesso istante agli altri punti, e la corda non si trova in istato di quiete.

XIX. Il punto E può nuovamente rimaner senza moto, prima che la corda pervenga al secondo stato di quiete, ed acquiquisti la figura 42. Se ciò ha da poter succedere, il punto R dee ritrovarsi nel semicircolo mSM, esempigrazia in r, ed il punto S nel semicircolo MRm, esempigrazia in s, onde non sieno ancora compiute due vibrazioni del suono *n*, e tre del suono *N*. Fingasi che l' arco MRmSr superi d' un minimo $\frac{4}{3}$ di semicircolo, l' arco MRmSrMs supererà altresì due semicircoli per una minima quantità, a cui Ms si eguaglierà. Avremo dunque in tal caso $pq = \frac{1}{2}c\sqrt{3}$, $no = \frac{g}{\infty}$; ed acciocchè succeda la quiete del punto E nell' istante r, dovrà avverarsi l' equazione $c\sqrt{3} = \frac{3g}{\infty}$, che determina *g* infinito in riguardo a *c*, o pure *c* nullo in riguardo a *g*.

Sia MRmSr uguale a tre mezzi semicircoli, e conseguentemente MRmSrMs uguale a due semicircoli ed un quarto, onde ne risulti rM uguale ad un quadrante, ed Ms uguale a mezzo quadrante. Scopriremo $pq = c$, $no = \frac{g}{\sqrt{2}}$, e nell' istante r il punto E avrà fatto perdita di tutto il suo moto, purchè si adempia l' equazione $2c = \frac{3g}{\sqrt{2}}$, che si muta nell' analogia $c : g :: 3 : 2\sqrt{2}$, o prossimamente come $\frac{35}{33} : 1$.

Ma ponendo $MRmSr = \frac{8}{5}$ di semicircolo, ed $MRmSrMs = \frac{12}{5}$, è facile da vedersi essere $rM = Ms = \frac{2}{5}$, e che se $pq = \frac{c}{\mu}$, avremo $no = \frac{g}{\mu}$. Caderà la quiete del punto E nell' istante r, quando si verifichi la formola $\frac{2c}{\mu} = \frac{3g}{\mu}$, e perciò sia $c : g :: 3 : 2 :: \frac{3}{2} : 1$.

Dato che l' arco MRmSr sia $= \frac{5}{3}$ di semicircolo, l' arco $MRmSrMs = \frac{5}{2}$, e per conseguenza $Mr = \frac{1}{3}$,

Ms

$Ms=\frac{1}{2}$, troveremo $pq=\frac{c\sqrt{3}}{2}$, $no=g$. Vogliasi che nel momento r il punto E si fermi, e dovrà essere $c\sqrt{3}=3g$, ovvero $c:g::\sqrt{3}:1$, o prossimamente $\frac{26}{15}:1$.

Finalmente sia minimo l'arco $Mr=2dz$, onde si determini $mRs=3\,dz$; ed essendo $pq=2cdz$, $no=3gdz$, avremo la quiete del punto E nell' istante r, che in questo incontro coincide coll' istante M, qualora si avveri l' equazione $4cdz=9gdz$, che ci somministra l' analogia $c:g::9:4::\frac{9}{4}:1$. Avverto essere in questo caso $c:g::\frac{1}{n^2}:\frac{1}{N^2}$, ed aggiungo, che generalmente il momento di riposo del punto E, che può immediatamente precedere il secondo stato di quiete, caderà nel detto stato, quando l' analogia premessa si adempia.

Pongo sotto gli occhi di chi legge la seguente tavoletta

Tempi, che principiano dal primo stato di quiete, e sono espressi per la durata d'una vibrazione del suono n, finiti i quali il punto E si ferma.	Proporzioni fra c, e g necessarie per ottenere nell' ultimo istante dei tempi qui accanto descritti la quiete del punto E.
$1+\frac{1}{3}$	$0:1$
$1+\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2\sqrt{2}}:1$ prossimamente $\frac{35}{33}:1$
$1+\frac{3}{5}$	$\frac{3}{2}:1$
$1+\frac{2}{3}$	$\sqrt{3}:1$ prossimamente $\frac{26}{15}:1$
2	$\frac{9}{4}:1$.

Da questa tavola si raccoglie, che se in un istante delle ultime due terze parti del tempo della seconda vibrazione del suono n il punto E ha da rimaner senza moto, egli è d'uopo, che la proporzione di $c:g$ sia minore di $9:4$. Ponendo la detta ragione maggiore di $9:4$, non si dà verun istante nel mentovato intervallo di tempo, in cui il punto E si fermi, il quale resta privo di velocità dopo due vibrazioni del suono n nell' istante M del secondo stato di quiete, non perchè le velocità u, v sieno eguali, e contrarie, ma perchè amendue pareggiano il nulla. Se il punto E dentro l' assegnato spazio di tempo si riduce in riposo in un dato istante, si trova collocato (*Fig.* 42.) da e verso d, e prima accelerandosi, e poscia ritardandosi ritorna in e ad esser privo di velocità, la qual privazione è comune a tutta la corda, che in tal momento è giunta al secondo stato di quiete.

Ricorriamo anche qui ad un esempio. Si stabilisca $c : g :: 3 : 2\sqrt{2}$, di modo che s' abbia $\frac{3g}{2\sqrt{2}} = c$, e per le cose dette in questo numero essendo $pq = c$, $no = \frac{g}{\sqrt{2}}$, scopriremo $Lp = c$, $Kn = g - \frac{g}{\sqrt{2}}$. Quindi nell' istante r, in cui il punto E si riduce in quiete, si trova esso lontano dal punto H (*Fig.* 41, 44) per $HD + DE - Lp - Kn$, cioè a dire per $c + g - c - g + \frac{g}{\sqrt{2}} = \frac{g}{\sqrt{2}}$: ma nel secondo stato di quiete (*Fig.* 42) si discosta dallo stesso punto H per $Hd - de = c - g$; dunque la differenza di queste distanze sarà $\frac{g}{\sqrt{2}} - c + g = \frac{g}{\sqrt{2}} - \frac{3g}{2\sqrt{2}} + g = g - \frac{g}{2\sqrt{2}}$, sostituendo in cambio di c il suo valore, il quale prossimamente equivale a $\frac{64}{99}g$; e quindi evidentemente comprendesi, che nell' istante r il punto E è più rimoto dal punto H di quello sia il punto e per lo spazio mentovato.

XX. Ora è facile l' indagare i momenti di riposo del pun-

to

to E, mentre la corda si trasferisce dal secondo al terzo stato di quiete, in cui ricupera la figura 41. Se nel transito dal primo stato di quiete al secondo il punto E ha perduto il moto totale negl' istanti (*Fig* 44.) R, r, e posciachè dal principio del moto sono passati i tempi MsR, MsRmSr; succederà una simile perdita, qualora per arrivare al terzo stato di quiete, restano tempi eguali ai predetti. In fatti giusto a quanto ho dimostrato al numero XV. in ambo queste coppie d' incontri avremo gli stessi spazj LP, KN; Lp, Kn, ai quali corrispondono, mutate soltanto le direzioni, le stesse ordinate PQ, NO; pq, no, e per conseguenza le stesse velocità u, v proporzionali nella prima coppia di casi ad n.PQ, N.NO, e nella seconda ad n.pq, N.no. Se dunque scorso il tempo MsR, ovvero MsRmSr dopo il primo stato di quiete, le velocità u, v sono eguali, e contrarie; lo stesso addiverrà, quando per giugnere al terzo stato di quiete ci manca un tempo eguale ad MsR, ovvero ad MsRmSr.

Sia nel solito esempio dei suoni $n=2$, $N=3$ MSR $=\frac{4}{5}$ del tempo di una vibrazione del suono n, MsRmSr $=\frac{8}{5}$, e seguirà pe' numeri XVIII., e XIX. il riposo del punto E nei momenti R, r, quando sia LI $=c$: KI $=g$: : 3 : 2. Dal tempo di quattro vibrazioni del suono $n=2$, o sia della corda bipartita impiegato nel passaggio dal primo al terzo stato di quiete, il qual tempo si esprima per $4t=\frac{20}{5}t$, si sottrino le quantità $\frac{8}{5}t$, $\frac{4}{5}t$, e ne risulteranno i tempi $\frac{12}{5}t=2t+\frac{2}{5}t$, $\frac{16}{5}t=3t+\frac{1}{5}t$ dopo il primo stato di quiete, e conseguentemente i tempi $\frac{2}{5}t$, $t+\frac{1}{5}t$ dopo il secondo stato di quiete, terminati i quali il punto E si riduce in riposo.

XXI. Ho sempre supposto, che la forza $F+f$ non imprima moto, salvochè alla particola E (*Fig*. 41.) della corda AB, ed ora è tempo di dimostrarlo. Quantunque la detta forza $F+f=\frac{4B^2P}{C^2LM}.n^2y+\frac{4B^2P}{C^2LM}.N^2q$ non serbi la proporzione dell' ordinata $HE=y+q$, nulladimeno è composta di due forze F, f, che stanno come le distanze $HD=y$, $DE=q$ dai punti medj H, D delle relative vibrazioni proprie della corda divisa nei numeri di parti n, N. Ora mentre la forza F sollecita l' elemento E per lo spazio $-dy$, non comunica moto all' altre particole, conforme ho provato al numero XII. dello Schediasma IV., e lo stesso succede, mentre la forza f stimola il detto elemento per lo spazio $-dq$; dunque la forza $F+f$ uguale all' aggregato delle due mentovate accelera soltanto il punto E.

XXII. Le cose dette della unione di due suoni si possono estendere agevolmente all' aggregato di suoni 3, 4, 5, 6, &c. La forza, che spinge il punto E, verrà composta da tante forze F, f, &c. quanto è il numero di suoni n, N, &c., o in quanti diversi numeri n, N, &c. di parti eguali divisa si vibra congiuntamente la corda. La forma delle nominate forze sarà

$\frac{4B^2P}{C^2LM} \cdot n^2y$; e quindi una forza particolare si eguaglierà alla costante $\frac{4B^2P}{C^2LM}$ moltiplicata nel prodotto del quadrato del suono, che le corrisponde, e della rispettiva distanza dal punto medio della vibrazione.

La velocità V nascerà dalla somma delle velocità u, v, &c. le quali si accomoderanno alla forma seguente $\frac{2B}{C}\sqrt{\frac{P}{LM}} \cdot \pm n\sqrt{c^2-y^2}$, in cui $\frac{2B}{C}\sqrt{\frac{P}{LM}}$ è grandezza costante, n è il suono, o il numero di eguali porzioni, nel quale è partita la corda, c la distanza dal punto medio della vibrazione, quando $u=o$, ed y la lontananza dal detto punto in un dato istante.

Determineremo la figura della corda in qualsivoglia momento, valendoci di tanti circoli concentrici, i cui raggi (*Fig.* 43.) $IL=c$, $IK=g$, &c. quanti sono i suoni n, N, &c., ed usando l' artificio spiegato al numero XIII. non trascurate le avvertenze contenute nei numeri XIV. XV. e XVI. Ricordo nuovamente, che i simboli c, g, &c. dinotano le distanze

della

della particola E (*Fig.* 41.) dai punti medj delle riſpettive vibrazioni, qualora le velocità u, v, &c. ſi eguagliano a nulla.

XXIII. Acciocchè ſi poſſa adoprare la formola $\overline{F+f+\&c.}\,dt = dV = du + dv + \&c.$, come ho fatto nel numero IX., o pure l'equivalente $\overline{F+f+\&c.}\,.\,dt^2 = -ddy - ddq - \&c.$, ovvero, come nel numero X., $\overline{F+f+\&c.}\,.\,\overline{-dy-dq-\&c.} = VdV$, egli è d' uopo, che qualunque forza, per eſempio F, ſtia in qualſivoglia iſtante come la diſtanza y dal punto medio della competente vibrazione; onde non ſi dia comunicazione di moto fra un elemento, e l'altro della corda. E giacchè una corda non può oſcillare, ſalvo che intera, o diviſa in parti eguali; ſi rende neceſſario, che due forze ſcelte ad arbitrio, eſempigrazia F, f, ſi corriſpondano come $n^2 y : N^2 q$, cioè a dire in ragione compoſta dei quadrati dei numeri delle parti eguali, nelle quali è diviſa la corda, e delle riſpettive lontananze dai punti medj delle vibrazioni; e quindi n^2, N^2 hanno da eſſere numeri quadrati preſi dalla ſerie 1, 4, 9, 16, 25, &c. Queſte rifleſſioni pongono in chiaro, che le predette formole ſomminiſtrano ſoltanto le curve da me determinate, le quali ſono equilibrate, e permanenti, conſervando ſempre la ſteſſa natura, ſiccome quelle, che o ſi numerano fra le curve ſemplici, alle quali ſi accomoda la corda, quando rende un ſuono ſolo, o naſcono dalla loro compoſizione, la quale per quanto ſi vibri la corda, ſempre ſuſſiſte, e fa sì che in ſiti analoghi torni eſſa corda a ricuperare la primiera figura, preſcindendo dalle reſiſtenze.

Che ſe la corda ſi obbliga a prendere una figura diverſa dalle ſtabilite, non avendo queſta gli elementi equilibrati, ſi comunicano eſſi il moto, e la detta figura talmente ſi varia, che più non ritorna la corda a ripigliarla; e perciò merita il nome di sbilanciata, e di paſſaggiera. Mi ſerva d' eſempio una corda coſtretta dalla penna d' un ſalterello a ripiegarſi in un angolo rettilineo. Laſciata in libertà toſtamente s' incurva, nè alla priſtina figura mai più s' adatta.

L' indagar poi in uno di queſti caſi il tempo impiegato dalla corda nel paſſare dal primo al ſecondo ſtato di quiete, e la figura della ſteſſa in qualunque iſtante frappoſto, lo giudico un problema difficiliſſimo: ne a tale impreſa mi accingo, quanto ar-

dua,

dua, altrettanto inutile alle musiche vibrazioni. Io sono persuaso, che la corda prestissimo si accomodi ad una figura equilibrata, e che l' irregolarità della prima vibrazione non riesca all' orecchio sensibile. Applicato un ostacolo leggiero al punto estremo S (*Fig.* 17) della terza parte BS della corda AB, ed eccitata coll' unghia al tremito la detta parte, il suono 3 proprio della corda divisa in tre parti eguali, che tosto si sente, fa toccare con mano, che col mezzo d' una prontissima comunicazione di moto si adatta essa corda alla figura 17. permanente, ed equilibrata, la quale per altro si unisce con altre figure, quando col suono predominante delle terze parti si accoppiano quelli delle loro parti aliquote, conforme di fatto succede.

IL FINE.

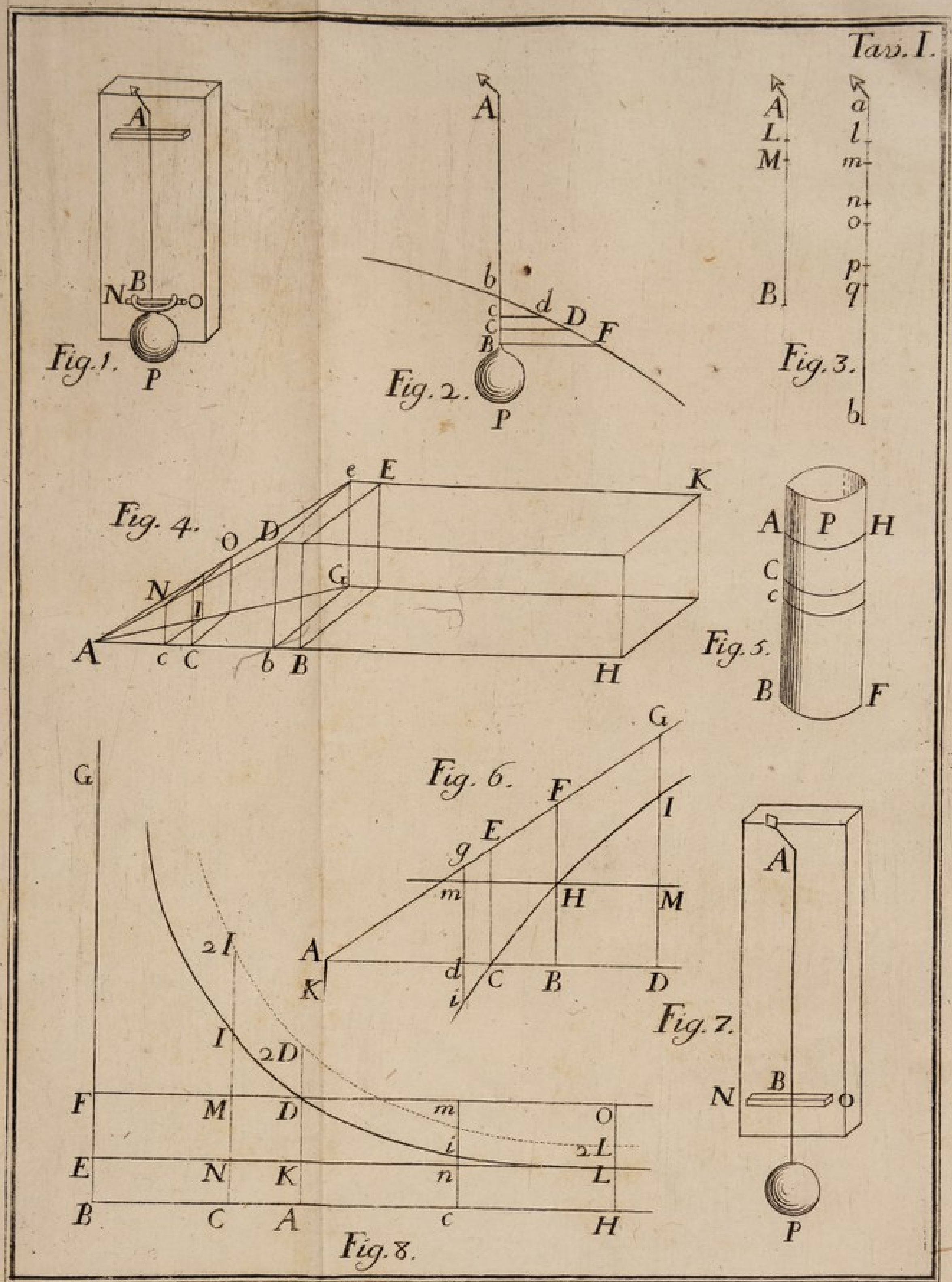
Vidit

Vidit D. Joannes Maria Vidarius Clericus Regularis S. Paulli, & in Ecclesia Metropolitana Bononiæ Pœnitentiarius, pro Eminentiss. & Reverendiss. Domino D. Vincentio Card. Malvetio Archiepiscopo Bononiæ, & S. R. I. Principe.

Die 2. *Aprilis* 1767.

IMPRIMATUR.

F. Joseph Maria Pettoni Vic. Gen. S. Off. Bononiæ.


Tav. I.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

Tav. II.

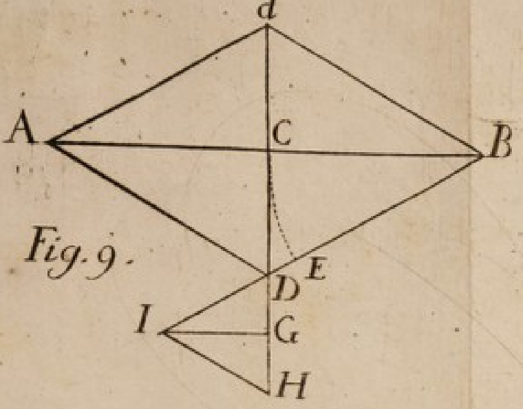


Fig. 9.

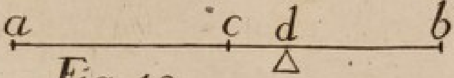


Fig. 10.

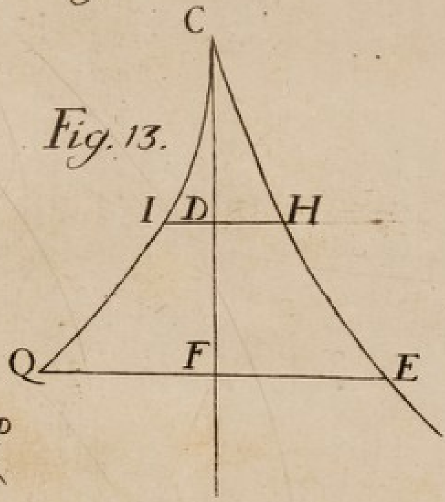


Fig. 13.

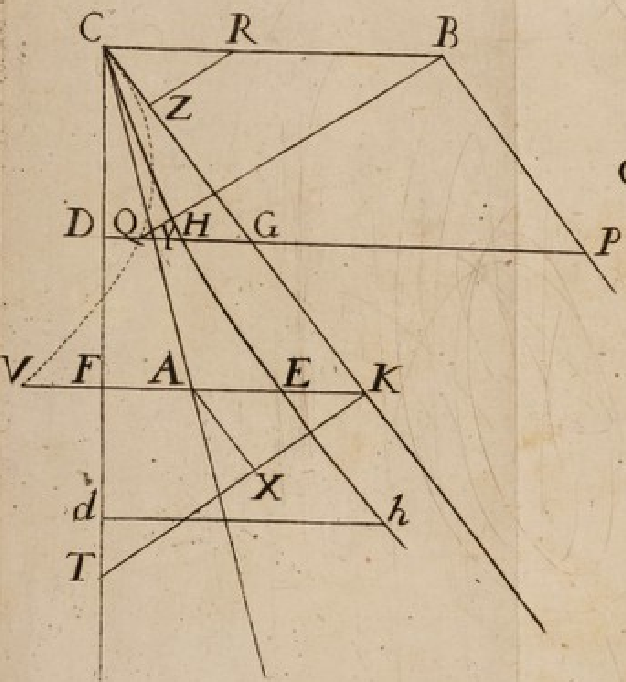


Fig. 11.

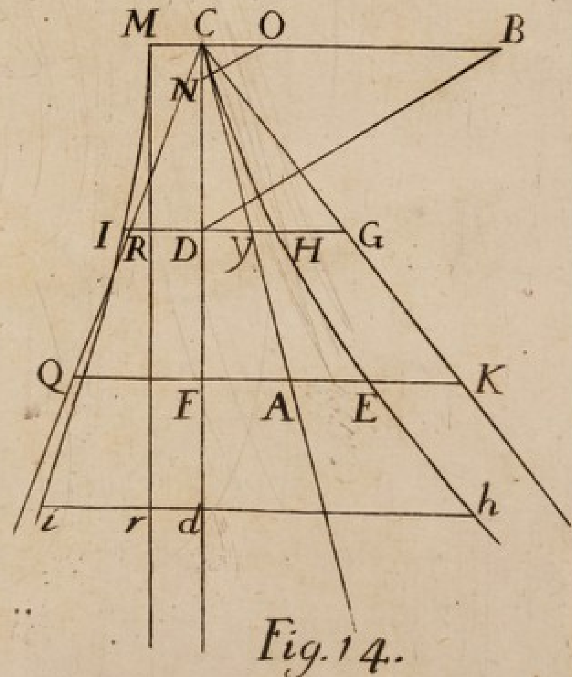


Fig. 14.

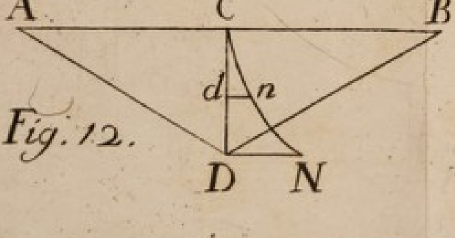
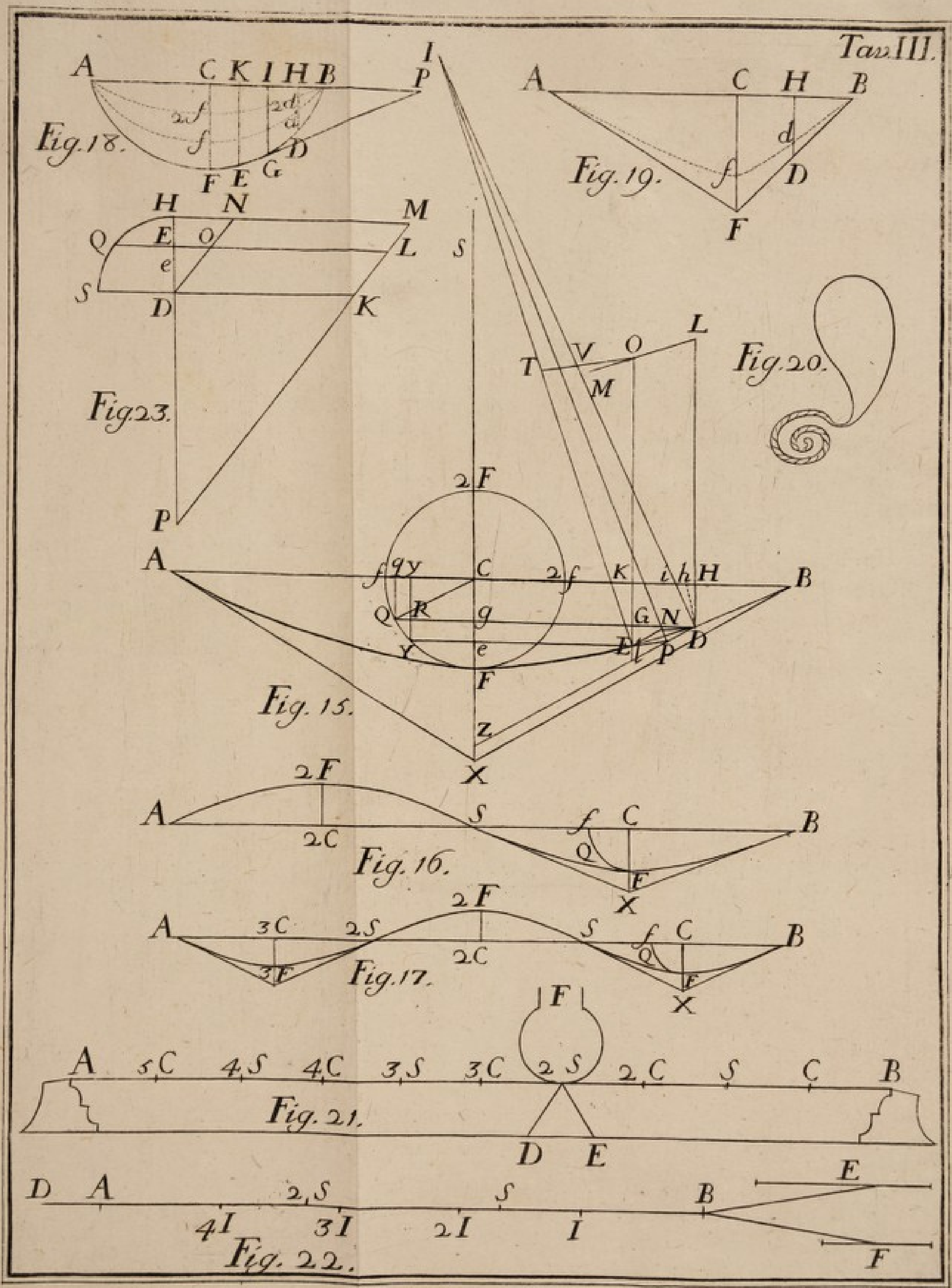


Fig. 12.


Tav. III.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 23.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 21.
Fig. 22.

Tav. IV.

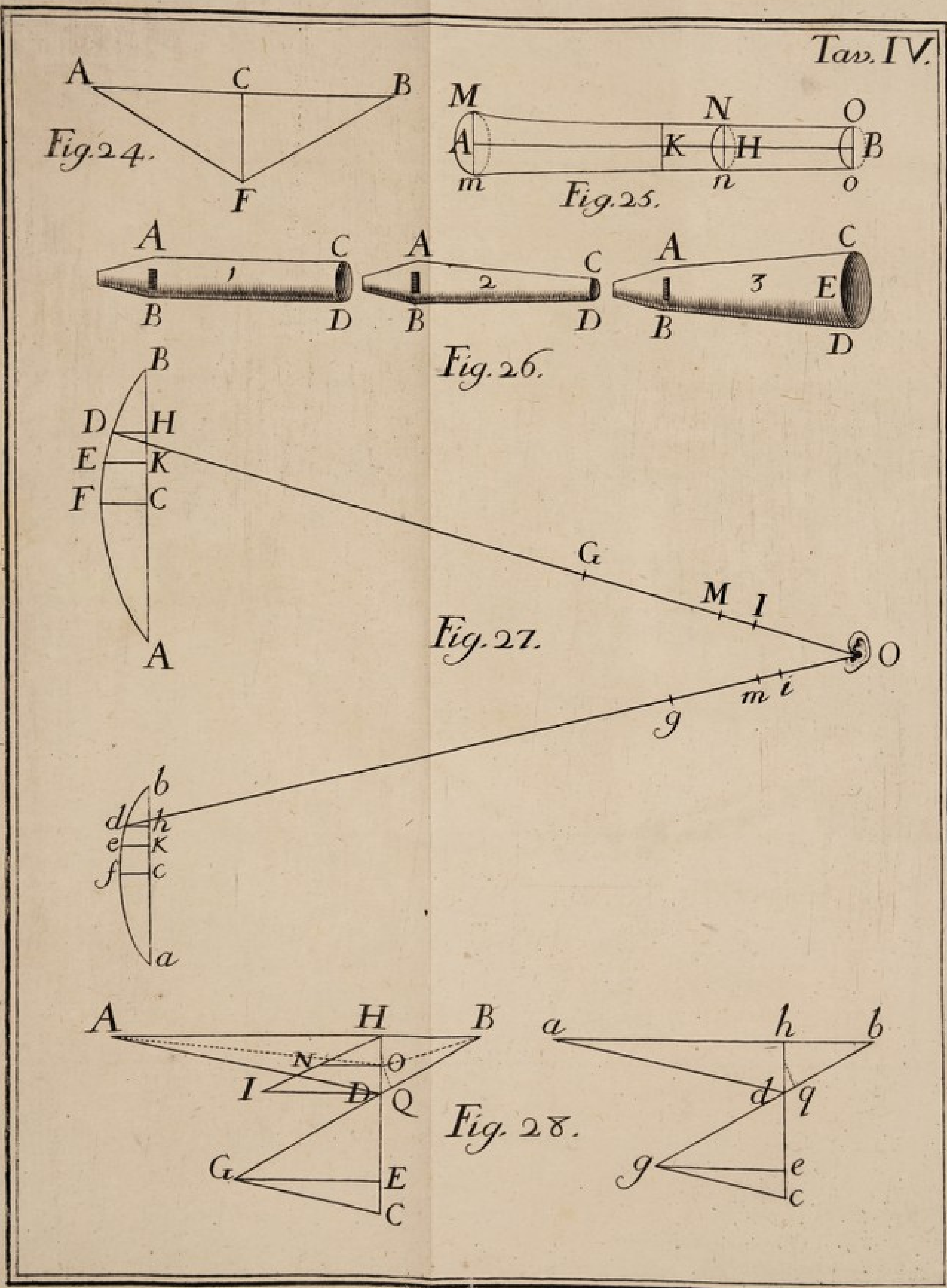


Fig. 24.

Fig. 25.

Fig. 26.

Fig. 27.

Fig. 28.

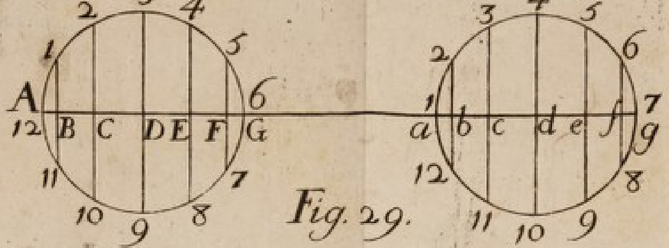


Fig. 29.

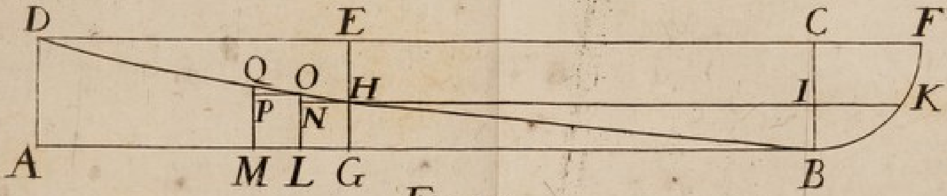


Fig. 30.

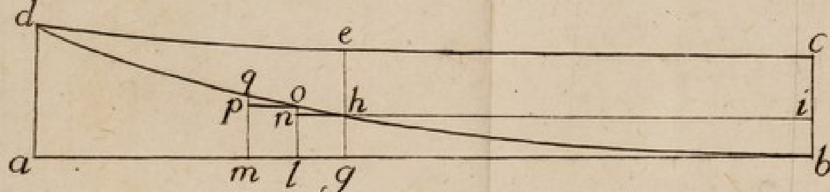


Fig. 31.

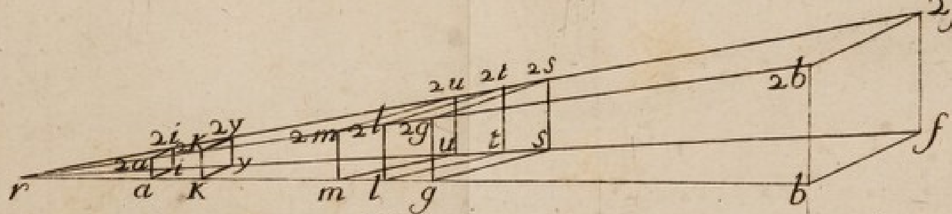


Fig. 32.

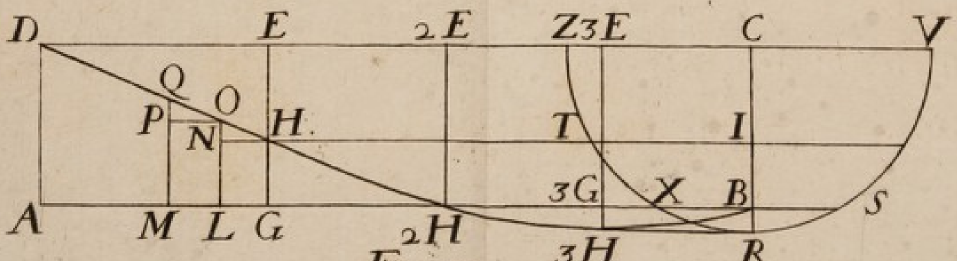


Fig. 33.

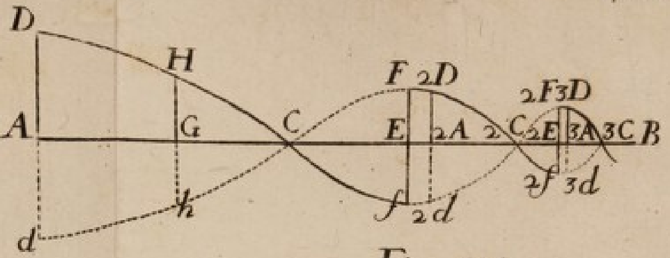


Fig. 34.

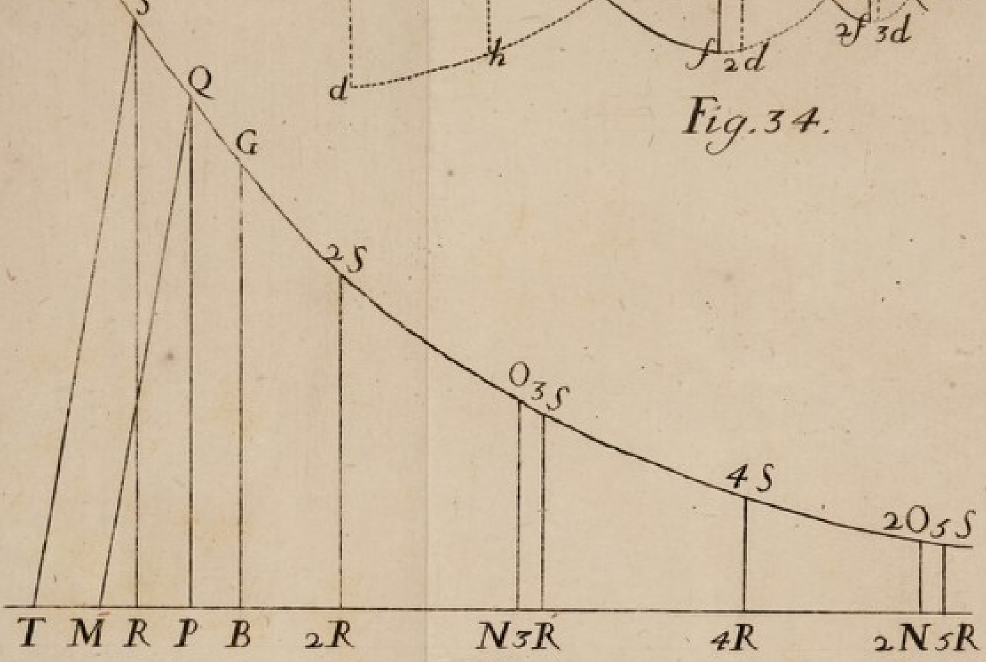


Fig. 35.

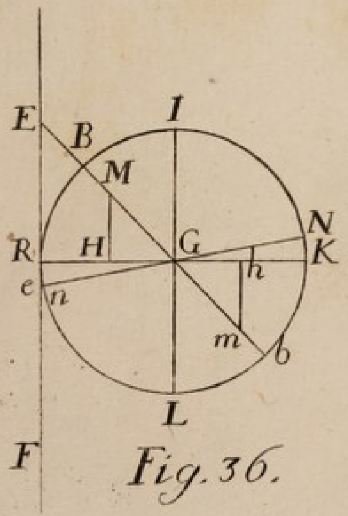


Fig. 36.

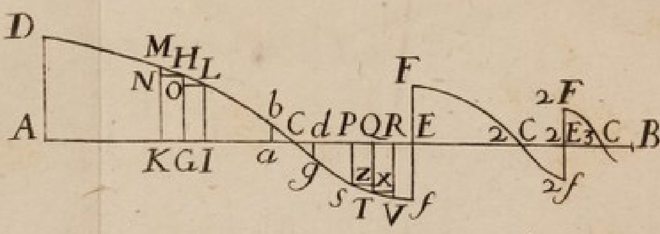


Fig. 37.

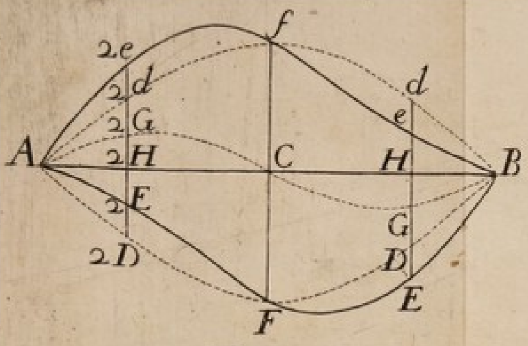


Fig. 38.

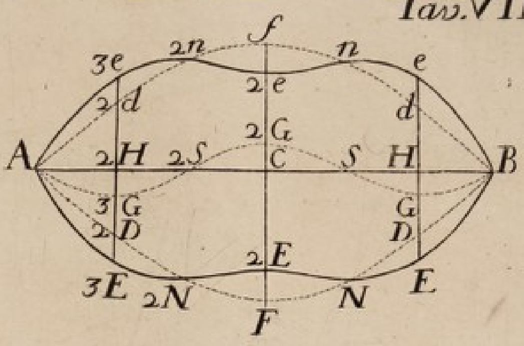


Fig. 39.

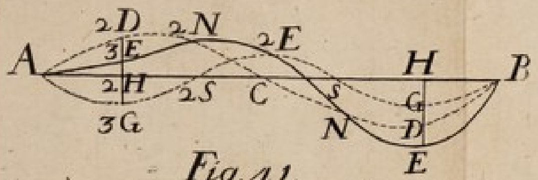


Fig. 41.

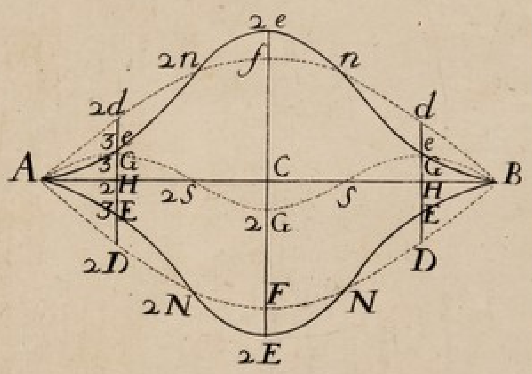


Fig. 40.

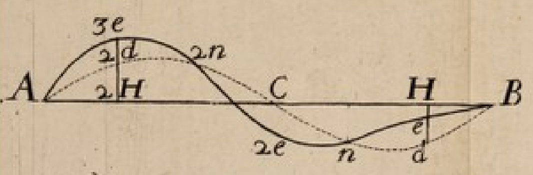


Fig. 42.

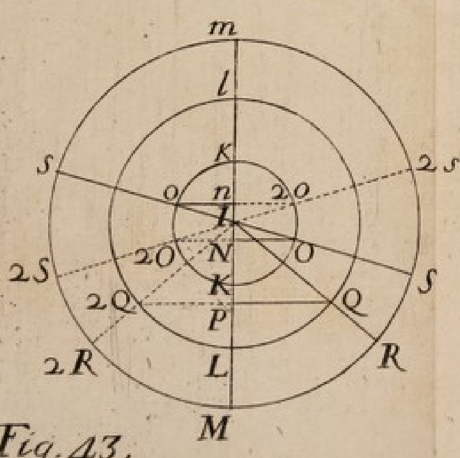


Fig. 43.

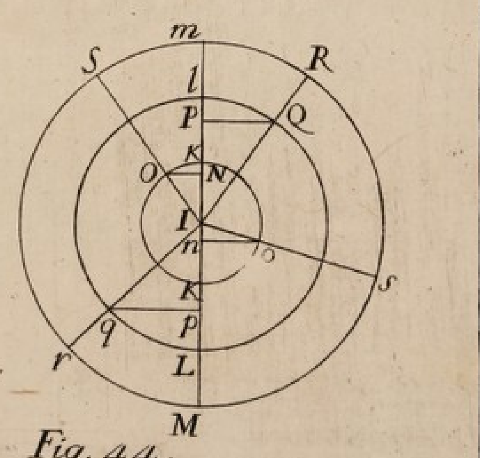


Fig. 44.

M. Xmi
Cim