

Nuovi istromenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne; et di molte altre, che servir possono alla speculazione de' geometri, ed all'uso de'pratici. Col progetto di due nuove macchine per la nautica ed una per la meccanica, e con alcune osservazioni sopra de' poligioni rettilinei regolari / Del conte Giambatista Suardi.

Contributors

Suardi, Giambatista, 1711-1767.

Publication/Creation

In Brescia : Dalle stampe de G.-M. Rizzardi, 1752.

Persistent URL

<https://wellcomecollection.org/works/dhpgeu4a>

License and attribution

This work has been identified as being free of known restrictions under copyright law, including all related and neighbouring rights and is being made available under the Creative Commons, Public Domain Mark.

You can copy, modify, distribute and perform the work, even for commercial purposes, without asking permission.


**wellcome
collection**

Wellcome Collection
183 Euston Road
London NW1 2BE UK
T +44 (0)20 7611 8722
E library@wellcomecollection.org
<https://wellcomecollection.org>

50180/C



NUOVI ISTROMENTI
PER LA
DESCRIZIONE DI DIVERSE CURVE
ANTICHE E MODERNE.



Digitized by the Internet Archive
in 2018 with funding from
Wellcome Library

<https://archive.org/details/b30408441>

86398

**NUOVI ISTROMENTI
PER LA
DESCRIZIONE DI DIVERSE CURVE
ANTICHE E MODERNE**

E di molte altre, che servir possono alla speculazione
de' Geometri, ed all' uso de' Pratici.

**COL PROGETTO
DI DUE NUOVE MACCHINE PER LA NAUTICA
ED UNA PER LA MECCANICA,**

E con alcune Osservazioni sopra de' Poligoni rettilinei regolari

**DEL CONTE GIAMBATISTA SUARDI
BRESCIANO.**



IN BRESCIA. MDCCLII.
Dalle Stampe di **GIAN-MARIA RIZZARDI.**
CON LICENZA DE SUPERIORI.

THE...

...

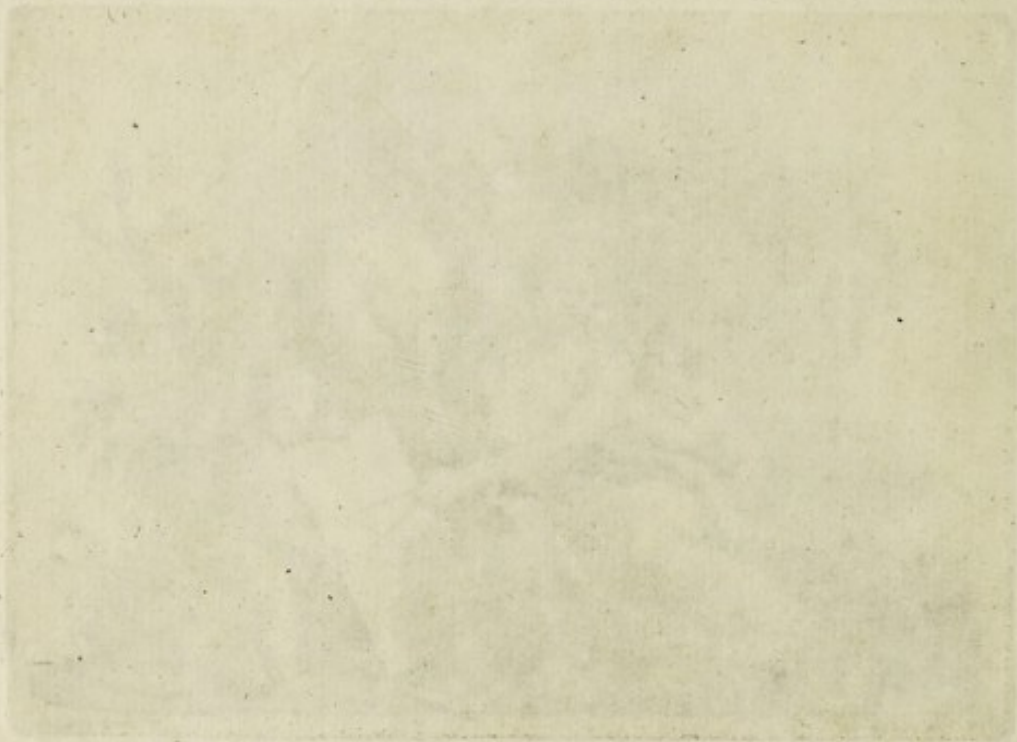
...

...

...

...

...



...

...

...





AL SERENISSIMO PRINCIPE
FRANCESCO
LOREDANO
DOGE DI VENEZIA

GIAMBATISTA SUARDI.



*Li Scrittori di quante na-
zioni ebbero in pregio le
lettere e le scienze si ten-
nero in ogni tempo tanto
più fortunati e gloriosi,
quanto più loro occorse di poter dedicare*

le opere loro a Personaggi più illustri, o per la fama degli Antenati, o per proprio merito chiari e ragguardevoli. Perciò, SERENISSIMO PRINCIPE, allorchè, emulando anch' io l' altrui lodevole costume, ardi di umilmente presentarvi questi primi frutti del mio tenue ingegno, e che con somma degnazione vi compiaceste d' accettarli, se si considera la grandezza di V. SERENITÀ, a cui furono consacrati, tornò in mia grandissima riputazione ed onore. Ma per dir vero non tanto m' indusse a fare scelta di Voi l' onorata immortale memoria de' Vostri Avoli, che cotanto in pace e in guerra fiorirono, come un Francesco, un Giovanni, un Antonio, un Pietro, un Lionardo, e cent' altri celebri nell' Istorie d' Italia, quanto la Sovrana Virtù propria di V. SERENITÀ. Questa parve che da que' Vostri Maggiori, ne' quali erasi amplamente

mente diffusa e sparsa, si fosse poi tutta
tornata a riunire in Voi solo, per chiu-
dere con quanto v'ha di sublime, di ma-
gnanimo, e d'ottimo l'eletta schiera di tante
generose Anime trapassate. Imperocchè sic-
come Virtù tanto singolare altamente si di-
stinse ne' più ardui affari di cotesta Repub-
blica per divino favore da tanti secoli do-
minante, e nella cospicua dignità di Gene-
rale in Palma, e nel vasto carico di Sa-
vio-grande in Patria, così non meno lu-
minosa comparve in quella non mai ab-
bastanza ammirata magnificenza e splen-
didezza a signorile cortesia e affabilità mi-
rabilmente congiunta. Per il che da co-
testo santissimo e augusto Senato fu poi
anche segnalata e distinta, non solo quan-
do foste eletto Ambasciadore alle Maestà
degli Imperadori Carlo VII. e Francesco I.,
ma molto più allora, che con universale aspet-
tazione, e fra le acclamazioni di tutti i
buoni

buoni foste dal Serenissimo Maggior Concilio al supremo grado della Repubblica elevato. Novella, **SERENISSIMO PRINCIPE**, che fu bensì con infinito aggradimento ricevuta anche da tutti i Monarchi d'Europa, ma che però non giunse loro improvvisa; perchè eglino nell'egregia indole e saggia mente di un tale amplissimo e ornatissimo Senatore renduto famoso per innumerabili gesta, e valorose azioni, avevano già chiaramente letto il felice presagio, che da gran tempo vi destinava al trono, come modello di ottimo e perfetto Principe. Ma che vo io rivolgendomi in mente l'eccelse vostre qualità, che quanto più grande vi conosco, tanto meno adeguate grazie render vi posso per l'onore, a cui crebbero i miei scritti ornati dall'eterno Vostro Nome? In fatti quand'anche per alcun loro difetto non potessero tener gran posto
tra

tra i fasti di questo eruditissimo secolo,
avverrà se non altro, che gli Scrittori
delle più colte Nazioni m'abbiano in-
vidia di un sì gran Mecenate come è
VOSTRA SERENITÀ, a cui per
fine prego dal Cielo con tutto lo spiri-
to ogni più desiderata felicità, e colla
maggior riverenza mi raccomando.

. *neque te ut miretur turba labores*
Contentus paucis lectoribus.

Horat. lib. I. Sat. 107.

TAVOLA

Delle materie contenute in questo Volume.

B Arca , come probabilmente possa andare da se contro alla corrente di un Fiume.	pag. 185
Calcolo delle linee provenienti dal moto composto di due circoli.	p. 101
Calcolo delle linee generate per il moto composto di un numero di circoli qualunque dato.	p. 131
Cicloide di base retta , e sue proprietà.	p. 38
Cicloide suddetta fatta nascere dalle sue proprietà.	p. 39
Cicloide suddetta descritta con un Istromento relativo alle sue proprietà.	p. 41
Cicloide di base circolare , sua origine , e descrizione organica.	p. 123
Circolo proveniente dal moto composto di due mobili.	p. 112
Circolo suddetto nato dal moto composto di tre mobili.	p. 134
Circolo suddetto generato dal moto composto di un numero di mobili qualunque dato.	p. 135
Cissoide descritta per punti , e meccanicamente.	p. 11
Concoide di base retta descritta per punti , e meccanicamente.	p. 2
Concoide della Contessa Agnesi , sua origine , e descrizione organica.	p. 5
Concoide di base circolare descritta per punti.	p. 5
Concoide suddetta descritta meccanicamente.	p. 7
Concoide sud. quando rassomigli ad una sezione di un uovo.	p. 7
Concoide detta <i>Limaçon de M.^r Pascual</i> descritta con un filo.	p. 61
Curva di M. ^r Carré descritta coll' Istromento della Cissoide.	p. 13
Curve provenienti dal moto composto di due circoli.	p. 120
Curve provenienti dal moto composto di tre circoli.	p. 142
Curve Planetarie del Signor di Varignon generate per il moto composto di tre circoli.	p. 145
Elisse generata dal moto composto di due mobili , ed anche dal moto semplice di un epiciclo.	p. 106
Elissi rappresentanti ciascun' orbita de' Pianeti , descritte organicamente.	p. 110
Elisse generata dal moto composto di tre mobili.	p. 132
Elisse nata dal moto composto di tre mobili in altra maniera.	p. 136
Elisse generata dal moto composto di un numero di mobili qualunque dato.	p. 138

*

Figure

Figure regolari quasi rettilinee nate dal moto composto di due mobili.	p. 118
Figure suddette possono venir anche dal moto composto di un numero di mobili qualunque dato.	p. 145
Fiori geometrici generati dal moto composto di due mobili.	p. 113
Fiori suddetti descritti organicamente con la medesima macchina, che si descrive la Linea retta, il Circolo, l'Elisse, le Cicloidi di base circolare &c.	p. 85
Istromento applicato a misurare il corso di un Bastimento.	p. 160
Istromento suddetto applicabile a misurare le velocità rispettive delle acque correnti.	p. 161
Istromento suddetto applicabile a rilevare anche la specifica gravità de' liquori.	p. 162
Linea retta proveniente dal moto composto di due mobili.	p. 103
Linea retta nasce anche dal moto semplice di un solo Epiciclo.	p. 105
Linea retta, perchè sia una Cicloide di base circolare, ed un' Elisse priva dell' asse minore.	p. 109
Linea retta generata dal moto composto di tre mobili.	p. 132
Linea retta generata dal moto composto di tre mobili in altra maniera.	p. 136
Linea retta risultante dal moto composto di un numero di mobili qualunque dato pari.	p. 138
Logaritmica descritta per punti, e meccanicamente.	p. 27
Loxodromia descritta in piano, e su la superficie d'un globo meccanicamente.	p. 150
Ovali applicate dal Cartesio alle Refrazioni descritte con un filo.	p. 59
Ovali suddette somministrano belle sezioni di un uovo.	p. 60
Ovali d'altra specie descritte parimenti con un filo.	p. 79
Poligoni regolari descritti meccanicamente.	p. 123
Poligoni suddetti meccanicamente descritti in altra maniera.	p. 154
Poligoni suddetti descritti meccanicamente in altra maniera.	p. 280
Particolari osservazioni sopra detti Poligoni: sopra il Triangolo.	p. 201
Quadrato.	p. 205
Pentagono.	p. 209
Esagono.	p. 222
Ettagono.	p. 224
Ottogono.	p. 234
Enneagono.	p. 243
Decagono.	p. 248
Endecagono.	p. 255
Dodecagono.	p. 259
Osservazioni sopra detti Poligoni in generale.	p. 264
Quadra-	

Quadratrice, sua origine, e descrizione per punti.	p. 18
Quadratrice suddetta descritta meccanicamente.	p. 19
Quadratrice a quanti casi si estenda.	p. 22
Sezioni coniche descritte con un Istroimento detto <i>d'imitazione</i> .	p. 25
Spirali, sua origine, e descrizione per punti.	p. 127
Spirali suddette descritte meccanicamente.	p. 128
Spirale d'Archimede, sua origine, e descrizione per punti.	p. 128
Spirale d'Archimede descritta meccanicamente.	p. 130
Trattoria di Perralto descritta per <i>approssimazione</i> .	p. 30
Trattoria suddetta descritta meccanicamente.	p. 34
Trattoria di base circolare descritta per <i>approssimazione</i> .	p. 35
Trattoria di base circolare descritta meccanicamente.	p. 36
Vite analoga a quella d'Archimede, composta però molto diversamente.	p. 191
Vite simile a quella d'Archimede, messa in pratica con l'asse verticale all'Orizzonte.	p. 193

Errori più notabili da correggersi.

		ERRORI	CORREZIONI
Pag. 12.	Lin. 28.	è	e
Pag. 17.	Lin. 4.	nel Commento	
		<i>Fig. 3.</i>	<i>Fig. 4.</i>
Pag. 21.	Lin. 12.	NDFQ	MDFQ
	Lin. 31.	CG	CH
Pag. 23.	Lin. 2.	Cb	CD
Pag. 26.	Lin. 19.	avvegnachè forse, se	avvegnachè, se
Pag. 69.	Lin. 26.	Che si	Che se
Pag. 79.	Lin. 23.	recarvele	recarvela
Pag. 80.	Lin. 10.	della Tavola	delle Tavole
Pag. 89.	Lin. 4.	raggio r s	raggio r S
Pag. 97.	Lin. 20.	vengono	vengano
Pag. 105.	Lin. 7.	retna	retta
Pag. 133.	Lin. 5.	ng; che	ng, che
Pag. 155.	Lin. 2.	qd	Qd
Pag. 168.	Lin. 21.	l' affile D	l' affile Da
Pag. 172.	Lin. 19.	nel Commento	
		<i>infra nullum</i>	<i>infra lineam</i>
Pag. 182.	Lin. 25.	dell' Equatore	dall' Equatore
Pag. 188.	Lin. 30.	in tal caso tanto men	in tal caso andrà tanto men
Pag. 245.	Lin. 3.	qnQ	qNQ
Pag. 265.	Lin. 27.	all' angolo, alla periferia	all' angolo alla periferia
Pag. 273.	Lin. 27.	bd, a &c.	bda &c.

NUOVI
ISTROMENTI
PER LA DESCRIZIONE
DI
DIVERSE CURVE
ANTICHE E MODERNE,

E di molt' altre, che servir possono alla speculazione
de' Geometri, e all' uso de' Pratici.

PREFAZIONE.

LA campagna, che per ordinario riesce altrui di sollievo e di ricreazione, a me già porse motivo di più serio trattamento, quando accadendomi di osservarla con più attento animo nelle sue produzioni, ed ammirando specialmente i fiori, e le foglie m'avviddi, che per lo più portavano vagamente impressa la forma di una qualche Curva. Questo riflesso traendomi d'una in altra cosa m'indusse a voler tentare, se si potesse richiamare alle leggi di Meccanica la forma di alcune di quelle, e delineare con qualche ingegno le Curve, che ne caratterizzano le diverse specie. Per quanto strano mi paresse da principio questo pensiero, tuttavia dappoi tanto mi vi addomesticai, che d'indi passando a metter mano all'opera, mi venne fatto finalmente di descrivere con alcuni stromenti, oltre diverse Curve note a Matematici antichi e moderni, altre non poche somiglianti a un di presso a quelle, che osservate ne' campi erano state l'occasione, ed il soggetto delle prime mie meditazioni.

La costruzione adunque, e l'uso di cotali stromenti è appunto ciò che mi son ora determinato di dare alla luce; non per altra cagione, che più possa dar credito al mio consiglio, se non perchè mi son lusingato, che tal cosa potesse vantare qualche pregio di novità; la quale quanto suole piacere al pubblico, altrettanto rende scusabile un autore, che si lascia egli pure trasportare da quella passione, che si ha di piacere ad altrui nel fargli un presente benchè tenue de' suoi ritrovamenti.

In fatti io posso asserire costantemente di non aver mai saputo, che altri abbiano prima scoperto cosa pubblicata ora da me come di mia invenzione. E benchè non essendome forse assicurato con tutte le possibili diligenze, potrebbe alcuna cosa da me creduta mia essere già stata ritrovata da altri; nonostante mi parrebbe assai difficile, che o nella specie delle descritte Curve, o nel modo del descriverle, se per avventura fossero già state descritte, andassi io così sempre ad appor-
mi,

mi, e fatalmente urtare nello altrui, che in tutto questo trattato non avesse ancora a restarvi qualche cosa del mio.

Tuttavia non può negarsi, che ad un' Opera, cui non si contenda il titolo di novità, non si richieggano ancora delle altre prerogative, acciocchè venga generalmente ricevuta come degna delle stampe; quali forse sarebbero la dignità della materia, la rettitudine del discorso, e la purità dello stile, le quali da taluno o tutte od in parte si potriano in questi miei scritti desiderare. Ma che che siasi sperarei di poter agevolmente comportare, che altri mi accusasse di qualche mancamento, e si ponesse eziandio a contraddirmi liberamente; giacchè poi quanto al primo nulla più mi accaderebbe, che trovarmi avvolto nella folla di molti, che soggiacquero ad egual sorte, per esser tale la condizione delle umane imprese, che niuna veramente va esente da difetto. E quanto al secondo professandomi io d'apprezzare sopra tutto la verità, avrei anzi per bene, che conforme all' antica consuetudine di Socrate si procurasse di dargli un più bel giorno per mezzo della contraddizione. Questa però come che sogliasi spesso adoperare a capriccio, e rivolgere del pari contra le vili, e le pregevoli cose, non permette, al dir di Cicerone, altro modo più sicuro di sottrarsi al suo rigore, che rimanersi del tutto dallo scrivere. Il che se finora fosse accaduto, siccome non avrebbe il mondo letterato a dolersi di molte inutili e stucchevoli inezie, così per contrario deplorerebbe la privazione di non poche stupende, e vantaggiosissime scoperte. Nè è già che io quindi presuma di porre le mie piccole cose in paragon di queste ultime, ma d'inferire solamente, che per timore della contraddizione non doveva ritenermi dal pubblicarle; perchè quantunque non sia così insensibile di non risentirne diletto, quando almeno vengano accolte con benigno compatimento, però nemmeno sono per reputare ad ingiuria, quando vengano criticate o riprese, mentre per altissimo favore mi ritrovo in tale disposizione di animo, che più amo il merito che la lode, e sono egualmente preparato a soffrire un biasimo che mi faccia accorto de' miei falli, che a ricevere un' approvazione, che a torto ricompensi le mie fatiche.

ISTROMENTO I^I

PER LA DESCRIZIONE ORGANICA DELLE CONCOIDI.

SEBBENE Nicomede, Diocle, Dinostrato, Archimede nell'investigare la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo, o la quadratura del circolo furono men fortunati d'Ippocrate da Chio, cui per lo meno avvenne di quadrare geometricamente alcune porzioni o segmenti di quello, non perciò si conserva di tutti loro meno onorata memoria, sicchè delle quattro curve a tal fine inventate da essi, come d'ingegnose produzioni della rispettabile antichità, non si faccia tuttavia grandissima stima. Ma perchè, non potendosi esse delineare geometricamente, riuscivano affatto inutili a quel fine appunto cui erano destinate; perciò ho creduto, che per avventura fosse lodevol cosa descriverle almeno con qualche artificio meccanico, e prima

ARTICOLO PRIMO.

Origine della Concoide di Nicomede.

NON è già ch'io intenda di riferire l'origine di questa curva (inventata (1) dal suo Autore per la duplicazione del cubo) o di qualunque altra, perchè pensi, A che

(1) Serve questa curva per determinare (Milliet De-Chales *Geom. Pract.* lib. III. prop. 31.) rispetto a' due dati estremi la posizione d'una retta eguale ad una data, e menata da un dato punto; per mezzo della quale si viene poi al conseguimento di due medie continue proporzionali. Ma come parmi,

che l'applicazione, che si fa della Cissoide a questo medesimo effetto, sia molto più breve, e l'operazione meno implicata; così quando occorresse la duplicazione del cubo, meglio sia attenersi a questa, la quale ricordammo a suo luogo, come si metta in pratica.

che essa sia meno altrui nota, ma perchè ciò è troppo per venirmi in acconcio, quando passerò a provare la struttura degl' Istromenti annessi.

Sia però (*Fig. 1. Tav. 1.*) perpendicolare alla *direttrice* indeterminata DR la retta PC *costante* data, dal cui estremo punto P, che dicesi *polo*, sono tirate molte parimente indeterminate Pt, Pt ec. secanti detta *direttrice*. Di queste col compasso si recidano altrettante quantità, che *intercette* appellansi, eguali ad una data, o al di sopra della *direttrice*, quali sono pt, pt, ec., o al di sotto, come tn, tn ec., ovvero tr, tr ec. to, to, ec. Allora la linea LTZ condotta per i punti p, p ec. farà una Concoide *esteriore*, e Concoide *interiori* le tre linee GMH, BPE, KPQPS, la prima delle quali unisce i punti n, n ec., la seconda passa per i punti r, r ec., la terza per i punti o, o ec., corrispondenti appunto per ordine ai tre casi della Concoide *interiore*: primo, quando la *intercetta*, come tn, è minore della *costante* CP. Secondo, quando è eguale, come tr. Terzo, quando è maggiore, come to.

A R T I C O L O S E C O N D O .

Descrizione scenografica dell' istromento per la Concoide.

Oltre che io mi recai a noja lo spiegare in disegno il piano orizzontale, e verticale di questa macchinetta, parvemi ancora che la sua perfetta costruzione si potesse raccogliere assai bene dalla sola elevazione in prospettiva. Di che per convincersi figuriamoci, che alla tavoletta orizzontale BEFK (*Fig. 2.*) sia fermato con due viti NN un telaro DMQR composto di un pezzo DR, nelle due estremità del quale sono eretti due stanti DM, RQ, che sostengono un altro pezzo MQ. Il pezzo DR è un parallelepipedo di legno o di metallo, solcato per il lungo da una scannellatura

tura di tal forma, che nell'interiore sua cavità ricever possa il prisma pt della *Fig. 3.*, e combaciare al di dentro con l'esteriore superficie di detto prisma. Laonde questo prisma pt fornito di un pivolo t al di sopra, già figuriamolo inserito e mobile per essa scannellatura nella direzione DR; cosicchè il pivolo t annesso tracci una linea retta, che rappresenti la *direttrice* DR della *Fig. 1.*; ma per ora via si tolga (*Fig. 3.*) il raggio tK , che quanto prima ad altre curve sia d'uopo.

Nelle due estremità del parallelepipedo DR sono, come già dissi, eretti due stanti RQ, DM, ai quali pure sta in alto afferrato un altro parallelepipedo MQ, il di cui piano verticale apparente in figura perpendicolarmente sovrasta alla linea detta di sopra, che per il lungo della scannellatura DR si concepisce esser tracciata dallo scorrente pivolo t . Nel mezzo di questo parallelepipedo avvi per di sotto un incastro di quella forma, che è l'asta PH in esso introdotta ad angoli retti, e che si ferma in qual punto più si vuole con una vite superiore C. Dall'estremo punto P di quest'asta discende perpendicolarmente un palicello d'acciajo PZ quale, come meglio osserveremo in sezione, poichè è entrato nella scannellatura del regolo AG, dilatandosi in cerchio, riempie il largo di quella cavità. La distanza poi PC presa in detta asta da P fino all'incontro del piano verticale MQ, secondo che più o meno si caccia innanzi, sostiene le veci d'ogni *costante* data, ed il palicello PZ sta in luogo di *polo*.

Il regolo AG circa la metà di sua lunghezza ha un forame verticale, in cui per di sotto (interposta prima una laminetta rotonda perforata, come nella *Fig. 5.*, e grossa quanto il raggio tK della *Fig. 3.*) entra il pivolo t , e quindi parte una scannellatura verso A, in cui s'introduce, come si è detto, il palicello d'acciajo PZ. E' poi circondato da due anelli rettangoli forniti ciaschedu-

no di uno stilo S , onde la curva si descrive; ma l'anello a sinistra presso n in luogo d'abbracciare perfettamente detto regolo, come prima va a baciare il margine della scannellatura rimane interrotto, e lascia passaggio libero al palicello PZ : lo che, dissi, assai più chiaramente si dà a vedere in fezione (*Fig. 4.*) dove il parallelogrammo An per ombra distinto rappresenta l'anello An della *Fig. 2.* coll' annesso grafio S , e con la vite d , onde si fermi in quel punto, che più piace; il seguente parallelogrammo da quello circoscritto, e che tiene tuttavia la bianchezza della carta, rappresenta un taglio del regolo AG fatto per traverso; e finalmente l'intimo PZ da questo bianco racchiuso significa il palicello PZ della *Fig. 2.* che si dilata e riempie detta bianca cavità.

Lo spazio tA preso su detto regolo AG , a qualunque data *intercetta* si può eguagliare, sospingendo li anelli, e fermandoli in data distanza con le opportune viti. Avvertendo per fine, che tanto siano lunghi li stili e palicello PZ , quanto fa di mestieri, acciò i *piani orizzontali* dei parallelepiedi, asta, e regolo siano tra di loro ed all'orizzonte paralleli.

Ciò fatto qualora sia data qualunque *interiore* o *esteriore* Concoide da descriversi, preparata prima, come si è detto, la macchinetta, niente più importa, che con la destra dar moto al regolo AG , acciocchè movendosi in t nella direzione DR , e strisciando nello stesso tempo d'intorno al palicello PZ , dalli stili S ovvero f vengano descritte le proposte curve, vale a dire, dallo stilo f la Concoide *esteriore*, e dallo stilo S l'*interiore*.

ARTICOLO TERZO.

*Origine e descrizione organica della Concoide
della Contessa Agnesi.*

NON è da tralasciare, che la Concoide KPQPS (*Fig. 1.*) che la celebre Contessa Maria Gaetani Agnesi (1) produsse nelle sue *Instituzioni Analitiche*, non è stata, che si sappia, prima da altri conosciuta. Essa si avvolge in nodo, e nel polo P si interseca e risulta, come già dissi, dall'essere le intercette to , to ec. più lunghe della data costante CP, della quantità PQ. Onde per descriverla si dovrà far di modo, che la distanza tA (*Fig. 2.*) sia maggiore della CP, come appunto si ritrova a caso nella presente figura.

ARTICOLO QUARTO.

Origine delle Concoide di base circolare.

CERTA cosa è presso tutti i Matematici, che la linea retta aver si può come porzione della periferia di un circolo infinito; onde ne segue, che le Concoide di Nicomede, che hanno per base o sia *direttrice* una retta, han per base o *direttrice* una porzione della periferia di un circolo infinito; e sono caso particolare, e dipendente da un generale, nel quale le Concoide nascono da base, che sia un circolo finito. Dopo aver dunque detto di quelle ormai vecchie nella memoria degli uomini passeremo ad esporre l'origine e descrizione organica di queste, che, se mal non penso, non furono note per lo innanzi.

Pertanto se per i punti (*Fig. 1. Tav. 2.*) della perife-
ria

(1) *Instit. Analit.* Lib. I. cap. 5. probl. 4.

ria $TT\ tt$ ec. e per il *polo* R si tirino molte rette indeterminate $PTNRN, PTNRN$ ec. ed in queste col compasso siano definite le *intercette* eguali ad una data, o al di sopra della *direttrice*, come sono TP, TP, tp, tp ec., o al di sotto come TN, TN, tn, tn ec. la linea scorrente per i punti $PP\ pp$ ec. farà una Concoide *esteriore* ed *interiori* quelle, che uniranno i punti $NN\ nn, NN\ nn$, le quali tutte è da notare, che avranno l'asse eguale al diametro del *circolo generatore*, o sia *periferia direttrice*.

Due cagioni poi concorrono a modificare la forma apparente delle Concoide di questo genere. Prima, perchè le *intercette* TP, TP, tp, tp ec. o sia TN, TN, tn, tn ec., ovvero (*Fig. 2.*) TO, TO, to, to ec. sono pareggiabili ad ogni data; onde le Concoide *interiori* ora accadono tra il *polo*, e la *periferia direttrice* dentro l'angolo tRt ; ora al di qua del *polo* comprese nell'angolo al vertice opposto a R a; talora sono eguali e dal *polo* egualmente distanti, come $NN\ nn$ ec., $NN\ nn$ ec., ma sempre per il vertice opposte; e talora parte di una medesima Concoide, come OO ec. (*Fig. 2.*) sta situata di qua, e parte oo di là dal *polo*, cosicchè precisamente nel punto polare R se stessa interseca, formando due seni, che esser possono eguali, o l'uno dell'altro maggiore, o minore; e in questo caso la Concoide OOR, oo ec. è analoga a quella della Contessa Agnesi celebrata di sopra; perchè parte delle *intercette*, come TO, TO metton capo tra il *polo* R , e la *periferia direttrice* sotto l'angolo tRt , e parte come to, to cadono nell'apertura dell'angolo opposto oRo . In secondo luogo variano dette Concoide, perchè la distanza, che è dal *polo* R al *centro* C della *periferia direttrice*, può parimenti eguagliarsi ad una *costante* data, quale se si supponga infinita, e però nell'infinito andato anche il *polo*, le indeterminate dovendosi in tal caso considerare a se stesse parallele, le *intercette* poi non potrebbero altra curva fornire, che una *periferia*

riferia eguale affatto alla periferia *direttrice*. Ma se il *polo* è situato di qua dall' infinito (prescindendo per ora dalla lunghezza delle *intercette*) più o meno acuto risulta il vertice della curva, secondo che più o meno essendo distante il *polo* della periferia *direttrice*, risulta l'angolo al *polo* di maggiore o minore apertura. Onde è qui da notare ciò che aggradiranno per avventura i Meccanici, ed è, che se la *costante* CR sarà eguale a otto diametri incirca del circolo generatore, e le *intercette* a tre, ovvero $13 \frac{1}{2}$ incirca, ne verrà una curva (*Fig. 3.*) o tra il *polo*, e la periferia per il primo caso, cioè se le *intercette* faranno eguali a tre diametri del circolo generatore; o di qua dal *polo* per il secondo caso, cioè se dette *intercette* faranno eguali a $13 \frac{1}{2}$ diametri di detto circolo, la quale gentilmente rappresenterà una sezione di uovo, di cui spesso può occorrerne l'uso, per fare di una simil forma o quadri di pittura, o cornici, o che altro fo io.

A R T I C O L O Q U I N T O .

Descrizione organica delle Concoidi di base circolare.

LA descrizione organica di questo genere di Concoidi si riduce felicemente alla macchinetta di sopra esposta. Primieramente sol basta condurre il prisma *pt* (che già s'intende essere dentro la scannellatura dal parallelepipedo DR) nella giusta metà di essa, cosicchè il pivolo *t* soggiaccia verticalmente a quel punto del piano verticale MQ, in cui va a urtare la linea PC. Si fermi poi in detto punto il prisma con la vite *q* situata nel fianco del parallelepipedo, giacchè resta per queste Concoidi inutile affatto la scannellatura DR. Indi levata dal pivolo *t* la laminetta espressa nella

Fig.

Fig. 5., bisogna mettervi in suo luogo il raggio tK della *Fig. 3.*, e far entrare (*Fig. 2.*) nel forame t del regolo AG non già il pivolo t , ma la estremità K uncinata di detto raggio tK . Per altro tanto le *intercette* TP, TN, TO della *Fig. 1. e 2. Tav. 2.*, quanto la *costante* CR a qualunque data si eguagliano, prendendo rispettivamente quelle nel regolo AG (*Fig. 2. Tav. 1.*) e facendo ta , ovvero tA eguale a dette *intercette*, e questa nell'asta PH, facendo CP eguale alla data *costante* CR della *Tav. 2.*, non altrimenti che se si trattasse di preparare la macchinetta alla descrizione delle Concoide di Nicomede, cosicchè il pivolo t vaglia per il centro C della *Fig. 1. e 2. Tav. 2.*, ed il palicello PZ per il polo R di dette figure. E per ciò che riguarda il moto di detta macchinetta, dove per le Concoide di Nicomede il forame t del regolo AG era mosso nella direzione DR, ora per questa farà con la mano spinto per un cerchio, il di cui raggio sia tK della *Fig. 3. Tav. 1.* Notando che qualunque detto raggio tK sia sempre il medesimo, perchè però si può modificare ad arbitrio l'asta PH, che fa, come dissi, per la data *costante* CR, si ponno nondimeno conseguire infinite Concoide di questo genere di base circolare.

Qui però io non voglio dissimulare una difficoltà, che da' Meccanici potrebbe venir fatta in proposito della descrizione da me loro promessa della sezione di un uovo; perchè intorno a piccole sezioni, qual'è quella della *Fig. 3. Tav. 2.*, non v'è che ridire, ma se ad un quadro o cornice si dovesse dare la forma di una tal curva, di cui l'asse maggiore ab fusse (che poi non sarebbe gran fatto) lungo cinque soli piedi di Parigi, ne seguirebbe che sebbene accadesse la descrizione tra il polo e la periferia *direttrice* (supponendo le *intercette* eguali a' tre diametri di detta periferia) nonostante, essendo stata supposta la *costante* CR eguale ad otto diametri della periferia medesima, la porzione PC dell'asta PH della *Fig. 2. Tav. 1.* verrebbe per lo meno ad essere

essere lunga 40. piedi di Parigi. Perchè essendo l'asse dato di piedi cinque, di cinque piedi parimenti sarebbe il diametro del circolo generatore, che, come abbiám detto, all'asse della curva si eguaglia; ma la data *costante* CR, ovvero CP, cui si suppone eguale, si suppone dover essere eguale a otto diametri incirca del circolo generatore; e perciò moltiplicato 8 per 5, la lunghezza della data CR, ovvero CP ascenderebbe certamente fino a 40. piedi di Parigi. Onde chi non vede essere la bottega di un Artefice angusta troppo per una macchina tanto enorme? Pure io son per farmi incontro a questa obbiezione, non già con animo di risolverla, ma col tentare di procacciar loro questa comodità per altra via. E però oltre che assai bene riesca una simil curva dall'accozzamento di un semicircolo *mbn* con un semielisse *man* (*Fig. 3. Tav. 2.*) di cui l'asse minore *mn* sia eguale, e coincida col diametro di quello, spiegarò inoltre a suo luogo (1) come conseguir anche si possa con l'uso di un semplice filo; metodo, per vero dire, di cui nell'opinione degli Artefici non v'ha il più utile, nè il più facile. Ma per ora basti della descrizione ed uso di questo primo Istromento.

(a) Istrom. VI. Art. III. e IV.

ISTROMENTO II.

PER LA CISSOIDE DI DIOCLE,

E PER LA CURVA DI M.^R CARRE.

Cospirarono ad un medesimo fine le invenzioni di Nicomede, e di Diocle, poichè quello la Concoide, e questo la Cissoide inventarono per la duplicazione geometrica del cubo (1); ma essendo che per questa non che gli antichi Filosofi indarno travagliarono, ma ancora i moderni vanamente v'impiegarono le forze del loro ingegno, noi contenti di più umili ricerche, dappoi- chè abbiain detto della Concoide, passeremo soltanto a spie- gare l'origine e descrizione organica della Cissoide.

ARTICOLO PRIMO.

Dell' origine della Cissoide.

Sia dunque (*Fig. 1. Tav. 3.*) la retta QO tangente il se- micircolo generatore, e posta ad angoli retti del dia- metro

(1) Voglio dire per trovare due medie proporzionali. Conciossiacchè quan- do fosse proposto di trovar due medie continue proporzionali x, z tra due dati estremi A, B si segni, (*Fig. 1. Tav. 3.*) sul diametro QP la $QI =$ alla data A ; e da I si meni la perpendicolare $Iu =$ alla data B . Poi dal punto Q per u occorra nella già descritta curva PZ la retta QZ ; e si faccia A ad x , come QL ad Lm ; e come mL ad LP , così x a z , perchè le rette x, z che ne ver- ranno, faranno le due medie cercate.

Il P. Milliet (*Geom. Prat. Lib. III. Prop. 28.*) facilmente dimostra, che ti- rato per qualunque punto z della Cif-

soide la mL perpendicolare al diame- tro PQ risulta $\therefore QL . Lm . LP . LZ$. Ma QI sta ad Iu , come QL ad LZ ; ed è QL ad LZ in ragion triplicata di QL ad Lm , cioè in ragion triplicata di A ad x ; così pure QI ad Iu in ragion tri- plicata della medesima A ad x , ed anche di x a Z . Dunque le rette xZ sono me- die continue proporzionali tra QI ed Iu , cioè tra A e B . Ciò che era a dimostrarfi.

Quando perciò di questi quattro ter- mini $\therefore A . x . z . B$ si supponesse che A fosse doppio di B , il cubo eretto sulla Z farebbe (come già si fa) doppio del cu- bo eretto sulla B ; ed il gran Problema risolto.

metro QP , e siano dal punto estremo P alla tangente condotte molte rette Pb, Pd, Pf ec. delle quali le porzioni ab, cd, ef ec. comprese tra la periferia del semicircolo, e la tangente siano col compasso trasferite dall'altra parte sulle medesime linee rispettivamente; cosicchè facendo sempre capo in P , siano $Pt = ab, Pr = cd, Pz = ef$ ec. Allora la linea scorrente per i punti P, t, r, z, y sarà la proposta Cissoide.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica della Cissoide.

L' Istromento preparato (*Fig. 2.*) alla descrizione organica di questa curva nella semplicità e geometrica eleganza va, se non erro, del pari con quelli che per le sezioni coniche, o altre curve si inventarono. Egli consiste primieramente in una tavoletta LNP , il di cui margine LCP sostiene le veci del diametro del circolo generatore PQ , quale appunto s'intende essere ad esso margine eguale, e messo per dritto con tutto il rimanente della *Fig. 1.* quivi posta a lato. Ad angoli retti poi di detto margine, o sia diametro LCP sta afferrato alla tavoletta un regolo PG , ch'è invece della tangente QO , e ad essa parallelo incavato per il lungo di una scannellatura, non altrimenti che il parallelepipedo DR della *Fig. 2. Tav. 1.*, ed in esso altresì scorre un prisma fornito al di sopra di un pivolo D . Due altri pivoli P ed L stanno pure fissi nei due estremi del margine, o sia diametro LCP . Un altro pivolo ancora è posto in C , intorno a cui si muove l'asta CR , che sta per raggio del semicircolo PRL al generatore eguale, e che incurvandosi nella estremità R , s'introduce ed abbraccia i lati fessi di due norme indeterminate ADB, FPE , la prima delle quali gira d'intorno al pivolo fisso nel prisma D , e riceve nel fesso lato AD il pivolo L , oltre il detto raggio

uncinato CR. L'altra poi è mobile d'intorno al pivolo P, ed un lato PF, come dissi, si attiene parimenti all'introdotta uncinato raggio CR, e nell'altro PE ha un anello scorrente fatto come in sezione α fornito di uno stilo, che s'insinua nella fessura del lato della prima norma ADB, e quindi perpendicolarmente discende sul piano della carta. Ora fermata al detto piano con la sinistra la tavoletta LNP, e situate prima le parti in guisa tale, che CR coincida per quanto sia possibile con CP, DL con PL, PF con PG, PE con PQ, ed i punti RDS siano uniti tutti nel punto P; traendo poi con la destra il pivolo D con lo scorrente prisma verso G, dallo stilo S del lato BD della norma ADB sospinto, verrà descritta la proposta curva. Della quale alcuni soli punti mancaranno in P, perchè ivi non può darsi in pratica un preciso concorso dell'uncino R, pivolo D, e stilo S; difetto che farebbe considerabile, se anche ad altre macchinette inventate da' più celebri uomini (1) non fosse comune. E molto più se (ciò che non è) rendesse inutile la curva in quell'ufficio, cui è stata destinata.

Per verificare poi la prefata costruzione per rapporto all'origine della curva, dimostrerò essere Pe costantemente eguale ad SH. Imperciocchè dovendo in qualunque posizione l'angolo LRP esser retto, retto del pari sia l'angolo PRD, e così essendo gli angoli ai punti P, D per supposizione retti, retto pure sarà l'angolo PSD, e quindi sarà PRDS un parallelogrammo, e però il lato PR parallelo è eguale al lato SD, ed il lato RD costantemente parallelo ed eguale al lato PS. Ma essendo LP posto in diretto con PQ, la retta QL cadendo sopra le parallele ESP, DRL, fa l'angolo esterno EPQ eguale all'interno PLD, e quindi gli archi Qe , PR, dalla metà de' quali vengono
mi-

(1) Le macchinette di Francesco Schooten composte col filo per le sezioni coniche soggiacciono al medesimo difetto.

furati, appartenendo a' cerchj eguali, faranno parimente tra loro eguali.

Inoltre perchè ne' due triangoli PLD, QPH gli angoli PLD, QPM sono stati mostrati eguali, e gli angoli in P, Q sono per supposizione retti, e per supposizione pure il lato LP è eguale al lato PQ, farà anche il lato PD al lato QH eguale.

Quindi ne' due triangoli misti RPD, eQH i lati PR, PD dell'uno faranno eguali ai lati corrispondenti Qe, QH dell'altro, ed essendo gli angoli RPD, eQH da essi compresi eguali, per esser angoli che fanno le tangenti PD, QH cogli archi rispettivi PR, Qe di cerchj eguali, farà anche la base RD d'un triangolo misto eguale alla base eH dell'altro; ma RD si è mostrato eguale a PS; farà dunque PS sempre eguale ad eH. E togliendo ad ambedue la porzione comune eS, restarà Pe = SH. Ciò che era da provarsi.

ARTICOLO TERZO.

Descrizione organica della Curva di M.^r Carrè.

SE poi tolte via dall'Istromento le parti inutili, si ponga la norma ERF in quella situazione, che dimostra la Fig. 3. e che con la vite α si fermi l'anello con l'anello stilo, qualora RS sia eguale a PL, movendo il raggio CR, e ritenendo ferma con la mano la tavoletta LNP, risulterà la descrizione della Curva di M.^r Carrè (1) celebra-

(1) *Memoires de l'Academie. An. 1705. pag. 56.* Ivi il testo Francese dà a veder chiaro, che la curva descritta dall'Istromento è appunto quella di M.^r Carrè. Perchè (mutate le sole lettere del testo in quelle della mia figura) si esprime così: *Soit décrit le demicercle PRL; si l'on suppose que son diamètre PL se meu-*

ve sur le point L, tandis que l'extrémité P parcourt la demi-circonférence PRL, il est visible que l'autre extrémité de ce diamètre décrira dans ce mouvement une courbe LSD, qui a pour axe la ligne LD = PL. E però anche l'equazione viene ad essere la medesima, che ivi se gli assegna: cioè che $Sn = RL - Ln$.

brata nelle memorie dell' Accademia, e la di cui origine non espongo, come quella che dal necessario moto dell'Istromento si mostra chiaramente.

Di più, se levato via il raggio CR (*Fig. 2.*) e la norma FPE, e nelle braccia dell'altra norma ADB fusse introdotto, e fermato in qualunque sito m , ovvero x l'anello con lo stilo S, mentre il pivolo D fusse condotto da P verso G lungo il regolo PG, il punto m descriverebbe una Concoide *interiore*, ed il punto x una *esteriore*; delle quali farebbero LP la data *costante*, L il *polo*, PG la *direttrice*, Dm, Dx le *intercette*; potendosi generalmente prendere in considerazione un qualunque altro punto del circolo $gxmq$, di cui il diametro gm prodotto sempre passi per il *polo* L, mentre il centro D sia guidato per la base PG: perchè qualunque sito D acquisti il centro D partito da P verso G, primo le intercette Dx (giacchè sull'intercetta Dm non cade quistione, essendo il caso semplicissimo della Concoide *interiore* di Nicomede) tra la Curva, e la *direttrice*, benchè costituenti con l'indeterminata LD un angolo dato LDx, restano anche in questo caso tuttavia eguali. Secondo, è da concepire che in principio di moto, quando D era in P, qDx era posto in diretto con GP prodotto; ed mDg con LPQ coincideva. Onde sospinto poi D verso G, la differenza dell'angolo d'inclinazione, che le intercette per esempio Dx, Dg fanno di mano in mano con la *direttrice* PG, è sempre la medesima quantità oDg passata di sotto della *direttrice*; e ciò così rispetto al punto g , che prima in P faceva un angolo retto con detta *direttrice*, come rispetto al punto x , che con essa *direttrice* formava due angoli parimente retti, e rispetto a qualunque altro punto, che fosse preso su detta circonferenza g, x, m, q . E quindi si può dedurre una proprietà molto semplice e comune a qualunque punto preso su detta periferia g, x, m, q , qual è, che il rettangolo della porzione di base PD moltiplicata nell'intercetta, farà sempre eguale al rettangolo della porzione

ne dell' indeterminata LD moltiplicata in oq , seno della differenza oDq di detto angolo d'inclinazione qualunque dato. Perchè (tirate le perpendicolari gr, qo prodotta in y) i triangoli gDr, LDP sono simili; ma sono pur simili gDr, yDo ; e per esser Do perpendicolare ad yq , e l'angolo gDq retto, sono simili anche i triangoli yDo, Dqo , e quindi simili gDr, Dqo ; e per conseguenza simili LDP, Dqo . Onde $DL \cdot DP :: Dq \cdot qo$. Dunque per fine $PD \times Dq = LD \times oq$. Ciò che era a dimostrare.

Io avrei potuto di leggiero, modificando la mia prima macchinetta, renderla atta a descrivere anche tutte queste *Concoide*, se non tanto l'inutilità e facilità del progetto, quanto la difficoltà di poterla dare poi ad intendere in disegno con eguale nettezza, non me ne avesse distolto.

ARTICOLO QUARTO.

Quali Curve si convenga descrivere con un medesimo Istromento.

PRegiando io al sommo il giudizio di un Uomo preclaro tra i più illustri di questa nostra età, ho motivo non piccolo di dubitare, che donando egli forse, quando che sia, qualche riflesso alla costruzione del predetto Istromento, trovi che opporvi, massimamente avendo altra volta dimostrato in questa parte l'animo suo dicendo: (1) *Instrumenta non alia facile recipienda esse præterquam illa, quorum unumquodlibet lineas infinitas generis ejusdem describere queat*. Ma appunto quello giudizio di lui quanto più da me venerato, altrettanto mi conforta a produrre il mio parere. Sembrami dunque, che, rettamente esaminando, abbiassi a distinguere, se le Curve, che intraprendiamo a descrivere, siano di tal genere, che non v'abbia altra differenza tra l'una e l'altra, che di maggiore o minor

(1) Poleni in Epist. ad Jacobum Hermannum.

nor grandezza, come la *Cissoide*, il *Circolo*, la *Cicloide*, che sono mutabili soltanto secondo il più ed il meno, immutabile restando la loro simmetria; o siano pur di tal sorta, che non solo siano alterabili secondo il più ed il meno, ma in varie e nuove guise spiegandosi, e flessi e regressi variando, all'occhio d'esse più non appajano, quantunque lo sieno, e per tali vengano dall'equazione acculate. Il che avviene delle *Concoidi*, mentre per la forma apparente le *esteriori* alle *interiori* non s'assomigliano nè le prime, nè le seconde a quella della Contessa Agnesi. E però dico, che si debbano descrivere con un solo Istromento infinite Curve d'un istesso genere di quest'ultima razza, perchè così veggasi la Curva trasformarsi, e passare per tutti li stati suoi quasi per gradi. Intorno poi a quelle di tal genere, che altra alterazione non patiscono, che di maggiore o minor estensione, distinguo di nuovo: O elleno tornano frequentemente in uso agli uomini, come il *circolo*, l'*elisse*; o sono per questo capo tuttavia inutili, come la *catenaria*, e simili. Nel primo caso parmi, che costruendo l'istromento si debba aver riguardo ad infinite grandezze di un medesimo o *circolo*, o *elisse*, o altre tali, intendendo però il termine d'infinito per il suo dritto. Nel secondo della *catenaria*, e simili, stimo certamente soverchio, che un prudente inventore indirizzi a tale scopo le sue meditazioni; sì perchè manca una certa utilità, che lo persuada, sì anche perchè questi tali Istromenti non ad altro occupano i tavolini de' Geometri, che per tosto fornir loro una curva, qualora per avventura solleciti di una bella figura, che dovesse incidersi in rame, o usare in qualche dimostrazione, vogliono sottrarsi al tedio di un più lungo metodo. Per altro era facile a me il render capaci di modificazione le distanze CR, CP, CL (*Fig. 2. Tav. 3.*) per conseguire *Cissoidi* infinite, le une maggiori dell'altre, quando avessi giudicato, che altri non avessero saputo farlo da se, siccome mi son ingegnato di fare per la descrizione organi-

ca della *Cicloide*, conformandomi appunto al piacere del sopra celebrato Autore per le ragioni addotte. Ma sia per ora fatto fine a questo ragionamento.

ISTROMENTO III.

PER LA LINEA QUADRATRICE.

E' Sempre stato, e credo che mai sempre farà un arcano profondissimo della Geometria l'arte di dividere colla sola riga, e compasso un angolo qualunque in tante date parti, e specialmente in tre; così pure la maniera di quadrare l'area di un circolo dato. Perciò fin da più alti secoli si è investigata la ragione, che passa tra il raggio e la periferia, come quella che avrebbe potuto condurci allo scoprimento dell'uno e dell'altro mistero. Dimostrato fissando l'animo a questo doppio scopo inventò la sua linea *Quadratrice*, la quale se si potesse descrivere geometricamente, manifestando la suddetta ragione, sciorirebbe li due (1) celebri problemi; ma

C non

(1) Per mostrare come questa curva soddisfi alla prima intenzione dell'Autore, che è la trisezione dell'angolo, supponiamo per esempio (*Fig. 3. Tav. 2.*), che sia proposto l'angolo *MCD* da dividere in tre parti date. Onde dal punto *S*, in cui il raggio *CD* s'interseca con la curva *MSBH* (che già si vuol supporre descritta) sia condotta una *SP* perpendicolare al lato *MC*. Di poi si divida geometricamente, come far si può, la retta *MP* nelle tre date parti, dalle quali tirate altrettante parallele a *PS*, per li punti, dove queste tagliano la curva, si menino tre raggi dal centro *C*, li quali divideranno l'angolo *MCD* nelle tre parti date.

Circa poi al secondo progetto, che è la quadratura del circolo, quando geometricamente si desse, come in ve-

ro non si dà, la precisa situazione del punto estremo *H*; e che *CH* base, come si dice della *Quadratrice*, fosse rigorosamente data, mostrando Apollonio, ed il P. Milliet (*Lib. 2. De Indivisi. pro. 4. de Quadratrice linea*) che $\frac{1}{2} CH \cdot CQ \cdot QM$ circonferenza del quadrante, dati i primi termini *CH*, *CQ*, si conseguirebbe anche il terzo *QM*. Onde poichè si fa, che l'area d'un circolo è eguale ad un triangolo, di cui sia base la circonferenza, ed altezza il raggio; ovvero eguale ad un rettangolo, del quale un lato sia detta circonferenza, e l'altro lato la metà del raggio, l'area di un quadrato eretto sopra una retta media proporzionale tra la circonferenza data per mezzo della *Quadratrice*, ed il raggio, farebbe eguale all'intera area del circolo dato.

non potendosi ciò così conseguire, tenteremo almeno di delinearla per mezzo d'un Istromento.

ARTICOLO PRIMO.

Origine della Quadratrice, e sua descrizione per punti.

PER dare ad intendere l'origine di questa curva, descritto prima il quadrante MCQ (*Fig. 4. Tav. 2.*) figuriamci che il semidiametro MZ conservandosi sempre ad angoli retti del lato MC si porti con un moto equabile verso il lato CQ , ed ivi giunga a coincidere nello stesso tempo, che vi perviene, anche il raggio CM , il quale ruotando equabilmente intorno al centro C , scorre tutti i punti DFQ di detto quadrante. Imperocchè allora tutti i punti d'intersezione del lato MZ col ruotante raggio CM presi insieme forniranno una curva $MSBH$, che è la *Quadratrice* di Dinostrato, ma in rigore mancante dell'ultimo punto H , il quale, ivi non seguendo più intersezione, si perde.

Si manifesta questa tale origine anche dalla descrizione per punti della medesima curva. Imperocchè diviso prima il lato CM in quante più si può parti eguali MP, PG, GC ec., e l'arco $MDFQ$ in altrettante, conducendo poi ad angoli retti del lato CM le ordinate MZ, PS, GB ec. ed alla circonferenza li raggi CM, CD, CF , li punti d'intersezione MSB ec. faranno elementi della *Quadratrice*, che intraprendo ora a descrivere col seguente Istromento.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica della Quadratrice.

IL P. Milliet (1) si lusinga, che la descrizione organica di questa curva sia facile, ma la prova mi fa accorto del contrario. Non ostante qualunque siasi, propongo la presente, e m'immagino che KAEN sia (*Fig. 5. Tav. 2.*) un telaro, di cui nel lato NE scorra la guida ZO connessa ad angoli retti col fesso regolo oP. D'intorno poi ad un pivolo C fisso nel lato AK movasi un quadrante Cax , di cui il raggio x C prolungato sia verso D, e fesso esso pure in una parte di sua lunghezza, e corredato di una guida S fermata ad uno stilo, il quale passando per le fessure del raggio x C prolungato, e del regolo oP, discenda sul piano a descrivere la curva.

Sia inoltre alla guida ZO attaccato un filo o catenella, la quale piegandosi indi d'intorno alla carrucola E vada per fine a congiungersi col quadrante suddetto nel punto x . Si rilevi poi la circonferenza del quadrante ax col farlo girare da Q verso Z, come per descrivere un quarto di *Cicloide*; e si rimova il punto O da Q verso Z uno spazio QZ eguale alla suddetta circonferenza ax . Cosicchè in principio di moto PO coincida con MZ; il lato x CD del quadrante con CM; ed il lato ca con CQ; e la catenella sia in questa prima situazione tangente in x . Perchè poi con la mano posta nella sommità D fatto volgere da M il regolo CD a destra fino in Q, avverrà che giungendo CD a coincidere con CQ, pervenga Ca nella direzione CM, e la catenella diventi tangente a detto quadrante in a . Essendosi tanta quantità di essa avvolta sulla circonferenza del quadrante, quanta si è ritirata da Z fino a Q; giacchè per la costruzione $QZ = ax$; e però anche il regolo Po verrà tirato nel medesimo tem-

C 2

po,

(1). Lib. II. *De indivisib. prop. 1. Descriptio lineæ Quadratricis.*

po, mantenendosi sempre verticale ad MC fino in CQ; e lo stilo S dalli due regoli CD, o P determinato alla descrizione della suddetta curva.

Questo Meccanismo (accresciuto di una correzione omessa a bella posta, ma necessaria per non perdere (*Fig. 4.*) i primi punti della curva in M, nè gli ultimi in C di un'altra curva MrC) regge sicuramente per conseguire una sola *Quadratrice*, di cui il lato ZQ, cioè MC sia eguale (*Fig. 5.*) ad ax circonferenza costante del quadrante. Ma per soddisfare intieramente al Problema, e molto più perchè questa curva entrerebbe nel numero delle curve utili, sarebbe stato mestieri, che, potendo modificare a piacere la circonferenza del quadrante ax , l'Istrumento descrivesse una *Quadratrice* di un lato MC qualunque dato; il che non è così facile, come pare al P. Milliet. Tuttavia se si supponesse che il quadrante Cax fusse la base di un quarto di cono, di cui il vertice andasse perpendicolarmente a cadere nel centro C, si potrebbero sulla sua superficie prendere anche quadranti di diverse grandezze; ordinando poi le parti dell'Istrumento in modo, che la carrucola E, ed il punto d'attacco o si potessero portare a livello delle differenti altezze de' quadranti presi d'intorno alla superficie del cono eretto su detta base Cax .

Un' opposizione ancora potrebbesi fare a questa macchinetta, ed è, che si prende la ZQ eguale al perimetro ax del quadrante, che si mette in uso; dunque nella costruzione di questo Istrumento si suppone quel che si cerca col beneficio della curva da descriversi. A che risponderei, che si cerca nell'atto di costruire l'Istrumento, come nell'atto di fabbricare un compasso di proporzione si cercano le sue divisioni; ma quando si vuole adoperarlo, senza altro tentare non si ha che portare il punto o nel Z già determinato.

A dir vero però io era per questa opposizione in procinto di rigettare l'Istrumento, come non soddisfacente al Proble-

ma in modo perfetto. Ma nonostante dappoi un nuovo animo mi suggerì di pubblicarlo, avvisando cosa onde si scemi in parte l'opposizione suddetta, e porgasi al lettore di che pascere l'avida sua mente con nuova scoperta. Trovo adunque (*Fig. 4. e 5.*) che la ragione di ZQ comparato ad ax si riduce a tre casi: cioè ZQ eguale ad ax ; ZQ maggiore di ax ; ZQ minore di ax . Quando $ZQ = ax$, il raggio percorrere la periferia di tutto il quadrante $MDFQ$, mentre l'ordinata scorre per tutti i punti del lato MC , e nasce la *MSBH Quadratrice* di Dinostrato, che ha per base CH . Quando $ZQ > ax$, mentre il raggio CM percorrerebbe tutto il quadrante $NDFQ$, l'ordinata compisce per esempio $\frac{2}{3}$ soli del lato MC , e nasce la curva MmF , la quale non può mai giungere a toccare il lato CQ , appunto perchè, non compiendo l'ordinata tutti tre i terzi del lato MC , non arriva nemmeno essa a coincidere con CQ ; ma più che farà maggiore lo spazio percorso da detta ordinata su detto lato MC , la piegatura della curva in F si farà maggiore e più vicina al punto H , dove così a poco a poco disponendosi, anderà a cadere, quando detta ordinata percorra tutto il detto lato MC , e la curva si trasformerà nella *Quadratrice* $MSBH$, mentre svanisce una parte di se confondendosi con la porzione HQ del lato CQ . Quando $ZQ < ax$, allora mentre il raggio CM percorre per esempio $\frac{2}{3}$ soli del quadrante $MDFQ$, l'ordinata compie intanto tutto lo spazio MC , e giunge a coincidere con CQ , e quindi deriva la curva MrC , la quale sempre tiene un'estremità nel centro C , e con una piegatura tanto più vicina al punto H , quant'è maggiore l'angolo MCF , si dispone a rimanere finalmente in H , trasformandosi essa pure nella *Quadratrice* suddetta $MSBH$, mentre svanisce una parte di se, perchè si combina, e si confonde colla porzione CG del medesimo lato CQ .

Ora

Ora questi due ultimi casi soggetti alla macchinetta sono casi particolari di un altro, che comprende anche quello della *Quadratrice* di Dinostrato, ed altri nove ancora, come qui appresso osserveremo, e che potrebbe in termini generali esser esposto così: Descrivere una curva formata dai punti d'intersezione del raggio CM moventesi equabilmente in un quadrante $MDFQ$ intorno al centro C , e dell'ordinata MZ pure moventesi nel medesimo quadrante equabilmente, e sempre verticale ad alcuno dei quattro lati di esso quadrante. Quindi nel caso che tanto l'ordinata MZ , quanto il raggio CM si avvanzino verso la medesima metà CQ , si ponno immaginare, secondo la ragione delli spazj rispettivi percorsi equabilmente, moltissime curve; tutte però simili ad una delle tre $MSBH$, MmF , MrC , per mezzo delle quali si potrà sempre dividere in parti date un angolo dato, che non sia però maggior di quello, a cui sono opposte. La curva per esempio $MSBH$ è opposta all'angolo retto MCH , e perciò vale a dividere in parti date qualunque angolo, che non sia maggiore di un retto. La Curva MmF ed anche la curva MrC essendo per supposizione opposte al medesimo angolo MCF vagliono a poter dividere in parti date un angolo, che non sia maggior del detto angolo MCF . In fatti supponiamo che sia proposto l'angolo MCF da dividere in due date parti per mezzo di cialcheduna delle tre curve suddette. Onde volendo primieramente adoprare la curva $MSBH$, si conduca dal punto B d'intersezione di detta curva, e del raggio CBF , che determina l'angolo MCF , si conduca, dissi, BG ad angoli retti del lato CM , indi dalla metà di GM si meni la perpendicolare PS , che il raggio CD condotto per S dividerà l'angolo MCF nelle due date parti. Secondo, così volendo far uso della curva MmF , tirata Fb perpendicolare al lato MC , e dalla metà di bM condotta la verticale dm , avverrà che il medesimo raggio CD condotto per m dividerà l'angolo MCF in due date parti. Terzo, presa pure
alle

alle mani la curva MrC , e dalla metà del lato CM condotta la perpendicolare yr , ancor qui l'istesso raggio Cb , che passa per r , dividerà l'angolo proposto MCF in due parti date. Onde tutti i punti d'intersezione S, m, r dell'ordinate PS, dm, yr col perimetro delle curve corrispondenti $MSBH, MmF, MrC$ cadono nel medesimo raggio CD , e il dato angolo MCF viene diviso nelle due date parti per mezzo di qualunque delle tre curve proposte.

Non so veramente se queste due ultime curve abbiano una proprietà simile a quella, che tanto brilla nella *Quadratrice* di Dinostrato, cioè se, siccome in detta *Quadratrice* è $\div :: CH. CQ. QM$, così in quelle si possano fissare tre termini continui proporzionali, l'ultimo de' quali sia una porzione della periferia di un circolo; ma io credo di no, perchè nella *Quadratrice* un termine della proporzione è la base CH , e abbiamo già osservato, che la curva MmF non ha base, perchè non giunge mai a toccare il lato CQ , così MrC non ha base, perchè va sempre a restringersi nel centro C . Nonostante io concludo in favore del mio Istromento, che quand'anche le curve nate dal non essere QZ eguale ad ax non servissero a rilevare la circonferenza del quadrante $MDFQ$ per quindi definire la quadratura del circolo, almeno però soddisfano alla trisezione dell'angolo, che fu uno dei progetti, cui Dinostrato pretese di applicar la sua celebre *Quadratrice*.

Finora, supposto il raggio CM ruotante da CM verso CQ , mentre l'ordinata MZ si avvanza verso la medesima metà CQ , abbiám distinti tre casi; ma tre simili casi si ponno immaginare nel caso che (sempre ruotando il raggio CM da CM verso CQ) l'ordinata andasse da CQ verso MZ ; tre altri quando detta ordinata progredisse da CM verso QZ ; tre casi pure quando detta ordinata partisse da QZ verso CM ; onde dodici curve risultano corrispondenti a questi dodici casi tutti compresi nel caso generale sovra enunciato.

Di

Di tutte queste curve almeno sei sono descritte per mezzo della mia macchinetta. Imperocchè primieramente si è visto come si faccia uso di essa nel caso che ruotando il raggio CD (che fa per tutti i raggi) da CM verso CQ, l'ordinata poi (cioè il regolo Po, che fa per tutte le ordinate) proceda da MZ verso CQ. Ma quando detto regolo dovesse moverfi da CQ verso MZ, la catenella passata su la carrucola E facciasi passare anche sopra un'altra carrucola N prima di fermarla a detto regolo Po; perchè allora mentre il raggio CD da CM girerà verso CQ, il regolo Po da CQ procederà verso MZ. Se poi la guida oZ col regolo Po annesso si trasporti nel lato del telaio KN, e la catenella passi sopra le due carrucole E, N; allora esso regolo movendo il raggio CD da CM verso CQ, si avanzerà da CM verso QZ. Se finalmente la catenella passerà sopra tutte tre le carrucole E, N, K, prima di essere attaccata al regolo PO, che si suppone ora scorrente nel lato KN, dico che procedendo il raggio CD tuttavia da CM verso CQ, il regolo si moverà da QZ verso CM.

Pare che queste curve, essendo ambedue i mobili generatori affetti di moto equabile, siano per avere fra esse un qualche comune rapporto, e ben sarebbe stato l'indagare le proprietà di ciascuna. Ma io lascio per ora da parte tali ricerche aliene in certo modo dal mio soggetto, acciocchè se gli aggrada, ne vadino in traccia quelli, che sono in materia d'ozio e in valore d'ingegno più di me felici.

Sarebbe qui il luogo ove riporre l'accennata *Spirale* d'Archimede, come quella che è nel numero delle curve antiche; ma si trova (1) altrove esposta per essere compresa negli usi di un altro Istromento.

I S T R O -

(1) Istromento IX. P. II. Artic. X.

ISTROMENTO IV.

PER LE SEZIONI CONICHE.

ARTICOLO UNICO.

COnobbero gli Antichi l'origine di queste mirabili curve nascenti dalla diversa sezione di un cono, e li Moderni le recarono a profitto, e non prima furono applicate alla *Catottrica*, *Diottrica*, *Prospettiva*, e in una parola all' *Ottica* tutta, non men che alla *Gnomonica*, e *Meccanica*, che divennero le delizie de' Geometri più insigni; e però altri (1) dappoi trattarono della loro *descrizione per punti*, altri (2) della *Organica*. Ma tacendo della prima, che non entra se non per accidente nel mio istituto, circa alla seconda dico, che parecchi Istromenti furono inventati, e per quanto sia arrivato a mio lume, tre avvenne per la *Parabola*, sei per l'*Iperbola*, dieci o dodici per l'*Elisse*, e per la medesima altri ancora, ma di minor pregio; perchè in molte arti occorrendo spesso la *descrizione organica* dell' *Elisse*, molti più chiari ingegni intorno a questa, che a verun' altra curva si occuparono. Ma per dire il vero quasi tutti questi Istromenti, quantunque affatto geometrici, in pratica però soggiacciono a molte incomodità e difetti, ai quali non si può facilmente trovare rimedio. Quindi è, che l'Istromento chiamato d'*Immitazione*, quantunque, anzichè parer geometrico, sia in vero troppo rozzo e volgare, perchè però per opinione anche d'altri (3) torna meglio di qualunque altro all' uso di un Professore,

D

io

(1) Midorgio ha trattato diffusamente della *descrizione per punti* delle *Sezioni Coniche*.

(2) Francesco da Schooten della *descrizione Organica*. Ed altri ancora.

(3) Il P. Castel *Traité LVI. Descrip. General des Courbes*, dice: *Une methode organique, que je crois la meilleure des toutes pour décrire assez exactement toutes sortes de courbes, c'est celle de l'imitation. Prenez une lame ec.*

io sopra tutti lo pregio. Laonde non farà forse altrui disca-
ro, che io qui ne rechi un simile per la descrizione delle
tre curve suddette, quanto men considerabile da una parte,
altrettanto più spedito dall'altra, più semplice e sicuro. Sia
dunque preparata una polita lamina d'argento, o altro metal-
lo, in cui (*Fig. 1. Tav. 5.*) col metodo per punti si descriva
diligentemente un' *Iperbola* HIL, una *Parabola* PRO, ed un'
Elisse ABMN. Dipoi con finissima lima si tolga via tutto il
superfluo, cosicchè non rimanga se non quanto appare in
figura. Ora con la mano guidato uno stilo o penna stret-
tamente d'intorno ai margini della restante lamina, quella
sezione verrà, che piuttosto volevasi delineare. Tale è l'Istro-
mento, che per tali descrizioni tengo ancor io per mio uso.

ISTROMENTO V.

PER LA LOGARITMICA E TRATTORIA.

NON senza grande riputazione del nome loro Nepero
trovò la *Logaritmica*, Claudio Perralto la *Trattoria*,
ed il Sig. Marchese Poleni dell'una e dell'altra la
Descrizione Organica. Ma avvegnacchè forse, se mal non
m'avviso, riducendo la macchinetta del prefato Sig. Mar-
chese a più poche parti, potrebbe forse la composizione
della medesima riuscire più facile ed intelligibile, ho pen-
sato, che così fosse bene descriverla come sta in figura, la-
sciando nel piacere del discreto artefice l'aggiungervi da se
altre parti, quando in pratica le trovasse necessarie, e con-
ferenti alla natura dell'Istromento. E però vediam prima
come si generi la *Logaritmica*, che poi passeremo alla sua
descrizione.

ARTICOLO PRIMO.

Origine della Logaritmica.

PER dar chiaramente a conoscere l'origine di tal curva (*Fig. 1. Tav. 4.*) dai punti *abcd* ec. egualmente distanti, e presi nella linea *Af*, che farà la *direttrice* della curva, siano perpendicolarmente erette le linee *A16, b8, c4* ec. che faranno le ordinate decrescenti in data ragione geometrica. La linea *16, 8, 4, ec.* che detti punti unisce, sia la *Logaritmica* proposta, della quale l'essenziale proprietà è l'essere la di lei *sottangente* eguale ad una costante data. Proprietà appunto su cui l'insigne Autore fondò l'ingegnoso suo Istromento, quale per me, come dissi, non si muta, ma si ristringe, per così dire, in poco, acciocchè più agevolmente la sua costruzione si concepisca.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica della Logaritmica.

ECCO pertanto di nuovo (*Fig. 2.*) un parallelepipedo *EP* simile a quello della *Fig. 2. Tav. 1.* scavato per il lungo di una scannellatura, in cui scorre un lungo prisma *dA* di simil forma, di cui parte sta incassato nella cavità di quello, e parte sovrasta al di fuori, abbracciato circa l'estremità *d* da una lamina trasversale *Tcd*, nel sito *cd* similmente per di sotto incavata, e che ad angoli retti a detto prisma con una vite *c* si può in qualunque punto di quello fermare, come più chiaramente si mostra in sezione (*Fig. 3.*) dove *DcR* rappresenta la lamina trasversale *Tcd* della *Fig. 2.*; *EP* dimostra un taglio fatto per traverso del parallelepipedo *PE*, e la parte *T* nel mezzo con puntini ombreggiata è

la fezione del detto prisma dA , che quivi si vede, come per la sua forma colla vite superiore c si possa stringere con la lamina trasversale DR . Parte di questo prisma (*Fig. 2.*) è anche il pivolo g , che sulla cima in spira si avvolge, e si accoppia con la madre vite y , di modo che, fermato comunque il parallelepipedo PE al piano della carta, se messa mano al manichetto M , si tira il prisma dA verso E , seco esso porta anche il pivolo g , e la lamina trasversale Tcd , perchè tutti tre insieme, quasi che formano un medesimo solido.

Semplice e intelligibile del pari risulta anche la costruzione della seguente asta oD e per la *Fig. 2.*, e per un tronco di detta asta trasportato più in grande nella *Fig. 4.* Essa quindi (introdotta il pivolo g nella fessura, ond'è per il lungo aperta e larga quasi così come quello è grosso) giace sul prisma dA , e quindi presso D è sostenuta da una ruota R verticale all'orizzonte, alla quale un'altra ruota K sovrasta a quella eguale, ma all'orizzonte parallela e mobile d'intorno al pivolo m , situata di modo che una linea condotta dal centro di questa ruota al punto, in cui la ruota verticale R tocca il piano della carta, passar debba precisamente pel centro di detta ruota verticale R . Questa ruota R dovendo segnare la curva sulla carta, termina la sua circonferenza in acuti e minutissimi denti, l'altra ruota all'opposto in un margine liscio, eguale, e polito, acciocchè volgendosi sulla lamina trasversale, non si scomponga, e turbi il moto dell'altra ruota R ; avvertendo che se detta ruota R fosse troppo leggiera per imprimere la curva sulla carta, si potrebbe render più grave, caricando di una sferetta V il pivolo m prodotto al di sopra della ruota orizzontale K . Si vuole inoltre (*Fig. 2.*) che i due maggiori piani dell'asta oD siano costantemente paralleli all'orizzonte, al che cospira e la grandezza della ruota verticale R , e la madre vite y , che a quest'uopo nel fondo è assai larga, ed intorno al pivolo g

fer-

ferrandosi, frena e ritiene la instabil asta oD , cosicchè non vacilli nè declini dal detto parallelismo, ma pure liberamente muovasi. La lamina poi trasversale Tcd nel sito cd in grossezza tanto si estende, che la distanza cd dal piano verticale cT apparente in *Fig. 2.* al piano verticale d di detta lamina sia eguale al raggio della ruota orizzontale K .

Ma ormai si concepisca, la *direttrice* della curva essere una linea, che pel lungo tagliando per metà il parallelepipedo PE , si arresti nel piano, e stia invece della *direttrice* Af della *Fig. 1.*; ond'io dico ora, che la linea tirata dal punto R (ove la ruota verticale tocca il piano della carta) al punto, che perpendicolarmente nella linea dell'asse, o sia *direttrice* EP soggiace al punto d , farà un'ordinata alla curva; la linea tirata dal medesimo punto di contatto R al punto, che nella linea dell'asse soggiace al punto g , sia la tangente; e la *sottangente* farà la linea presa nell'asse e definita dai punti perpendicolarmente cadenti nel detto asse dai punti d , e g . Onde si vede, che per modificar detta *sottangente*, non si ha che rimuovere, o accostare al pivolo g la lamina trasversale Tcd , e poi in detta distanza fermarla con la vite c al prisma dA .

Tutte queste cose poste, tirando col manichetto M il prisma dA verso E , e conseguentemente la lamina trasversale Tcd , gireranno tutte e due le ruote, ed il punto di contatto R si moverà per una linea, di cui la *sottangente* dg sarà costante, e quindi descriverà la *Logaritmica*. r.

ARTICOLO TERZO.

Della Trattoria di Perralto, sua origine e descrizione per approssimazione.

Essendo che i prudenti e dotti uomini talvolta negli oziosi tempi degnarono della loro attenzione alcune cose, che da prima parevano dispregevoli, ma poi da quelle a grandi scoperte si trovarono impensatamente condotti; così Perralto un dì osservando attentamente il movimento del suo orivolo portatile tirato per un capo della catenella annessa lungo una riga, s'accorse di una curva tracciata dall'orivolo sul piano della tavola. Onde (1) fattone consapevole il Leibnitzio, e poi venutane notizia a Cristiano (2) Hugenio, e da essi richiamata a sottil esame la natura sua, si ebbe presto trovato, che era ben degno oggetto di que' due insigni Geometri quella curva, che prima sol fu trattenimento di un saggio Osservatore; perchè e per essa si quadrerebbe l'*Iperbola*, e somministra i punti della *Catenaria*, e della *Logaritmica*, e di altri teoremi belli e leggiadri è feconda, esposti ampiamente e divinamente dal Sig. Marchese Poleni nella sovracitata epistola. Ma fra le eccellenti sue proprietà una principale, e che per ora fa al mio proposito, è, che di tutte le *tangenti* alla curva le porzioni intercette fra essa e la sua *direttrice* siano eguali; e però da questa si potrebbe dedurre la seguente descrizione per *approssimazione*.

Laonde presa (*Fig. 5.*) col compasso una data *costante* aB , e fatto centro in un punto m qualunque di detta *costante*, ma più vicino ad a che sia possibile, si segni il punto

(1) Negli *Atti di Lipsia* mese di Settembre 1693.

(2) Nel *Giornale de' Letterati Oltramontani* mese di febbrajo 1693.

to C nella linea BK, che farà la *direttrice*, a cui da *m* sia condotta la retta *mC*; poi fatto centro in *n* tanto da *m* distante, quanto *m* da *a*, e con la medesima apertura tagliata BK in D, sia condotta la retta *nD*; e così via via fatto centro in *o*, secata BK in E, sia tirata *oE* ec. La linea scorrente per i punti *a, m, n, o* ec. farà la proposta *Trattoria*. Imperciocchè e le linee *Ba, Cm, Dn* ec. sono per la costruzione eguali, e sono anche *tangenti*; mentre dacchè la intercetta *Fd* qualunque costitui una parte di se *bd* per elemento della curva, ancorchè poi venga prodotta in *z*, non però entra mai più nell'interno di quella; perchè quinci la porzione *bF* col prossimo elemento *bc* forma l'angolo esteriore *FbG*; e quindi nella parte opposta la prodotta *bZ* con l'elemento *bo* l'angolo parimenti esteriore *Zdo*; cosicchè per la costruzione tutte le intercette l'una nell'altra incontrando sempre alla parte interiore con un angolo d'inclinazione qualunque (angolo però, il di cui lato opposto è costantemente una qualche parte della *direttrice* BK) ne segue, che dopo l'intersezione, l'angolo al vertice opposto sempre occorra del pari alla parte esteriore, e però le intercette *Ba, Cm, Dn* ec. siano *tangenti*, e la curva descritta una *Trattoria*.

Ma qui m'occorre d'avvertire, che la suddetta descrizione è dalla descrizione dell'altre curve diversa in questo, che in quelle (come nella *Logaritmica Fig. 1.*) almeno alcuni pochi punti 16, 8, 4 ec. sono realmente punti della descritta curva, benchè poi gli altri posti fra il 16. e 8., fra 8 e 4 ec. non siam sicuri che se le appartenghino. Ma nel mio caso (*Fig. 5.*) niun punto si potrebbe veramente dire, che fosse punto di *Trattoria*; perchè se fosse altrimenti, converrebbe, che su le *tangenti* fossero state prese le particelle *am, mn* ec. infinitamente piccole, ma col compasso non si potevano prendere se non di finita grandezza; onde ne segue che la proposta descrizione della *Trattoria* per
appros-

per *approssimazione* (1) vera in astratto, sia impossibile in pratica. Tuttavia parmi che il metodo usato in detta Fig. 5. quan-

(1) Dalla considerazione di questa curva pare che si possa dedurre una nuova foggia di armare un trave (Fig. 7.) BK, che alcun grave peso dovesse sostenere, componendo per di sotto a quello alcuni vetti Cm, Dn ec. in guisa di *tangenti* ad una *Trattoria*; perchè a prima vista si vuol credere, che di tutto il peso del trave BK parte debba gravitare contro il fianco della muraglia mB, e parte della sua forza premente venire convertita in se stessa. Imperciocchè supposto che il vette mC quinci poggi al muro nel punto m, e quindi nel punto C sostenga il trave BK, parmi (perchè il vette è applicato obliquamente nel punto C) che la sua forza rispetto all'inclinazione della potenza a cui resiste, si possa considerare come risolubile nelle due mB, mx, le quali resistono al trave in C: la prima da C verso b, che si oppone alla sua gravità, l'altra da C verso K; perchè è evidente, che, se il trave non fosse ben ferrato nel muro, la gravità sua, e la obliquità del vette conspirerebbero a farnelo uscir fuori.

Ora per trattenimento vorrei dimostrare, che se v'aggiungo un altro vette Dn, la gravità del trave nel punto D, che per mezzo del vette Dn va ad agire nel punto n del vette mC, accrescerà la forza del vette mC, che resiste nella direzione Cb, e diminuirà quella ordinata nella direzione CK. Doppio vantaggio onde il trave sia più validamente sostenuto, e ritenuto nel muro nel suo luogo B. E ciò perchè la forza mC, che prima era di semplice resistenza, viene ora per l'urto del secondo vette Dn accresciuta di una forza attiva risolubile in due, una delle quali, come farò vedere, agisce in conse-

guenza della direzione Cb, scaricando così il muro di una parte di pressione, e l'altra opera da C verso B, cioè in verso contrario della direzione CK.

Risolta la forza del secondo vette Dn (Fig. 8.) nelle due gn, en, certo è che sulla forza gn non cade quistione, perchè questa agendo nella medesima direzione del vette cm, sicuramente si adopera contro la muraglia in m; ma la forza en agisce nel punto n ad angoli retti del vette mc; onde qui si troviam nel caso di una leva del terzo genere, in cui la potenza si esercita in n contro due resistenze, l'una in c, l'altra in m. Dunque l'azione della forza en farà in c ed m in ragion reciproca delle distanze nc, nm. Si divida perciò la forza ne in i in ragion di dette distanze, cioè cn: nm::ni:ie. E poi alla estremità della parte minore nm si faccia a detto vette mc una perpendicolare mz eguale alla maggior porzione ni, ed alla estremità c della parte maggiore nc si tiri la perpendicolare cd eguale alla minor porzione ei. Ora la retta mz rappresenta l'azione della forza en del vette Dn esercitata parimenti nella muraglia; la retta poi cd rappresenta la quantità dell'azione, che detta forza en adopera contro il trave BK.

Finalmente anche questa forza cd si risolva nelle due cq, cb; e si vedrà che cb opera in conseguenza della forza supposta nella Fig. 7. resistente nella direzione Cb; e perciò aumenta detta forza di una forza viva eguale a cb a scarico della muraglia. La forza poi cq, perchè opera in verso contrario alla forza ivi supposta ordinata nella direzione cK, diminuirà detta forza diretta per cK di una forza viva eguale

quantunque rigorosamente falso, nonostante in pratica si potrebbe ammettere, perchè se non altro, prendendo dette particelle am , mn ec. più piccole che si può, tanto detta descrizione fisicamente si accosta al vero parametro della curva, che si può dire quasi esser dessa; e spicca del pari quella proprietà principale detta di sopra, su cui si fonda anche la seguente descrizione organica.

E AR.

le a cq ; onde il trave BK farà meno sforzato ad uscir fuori della muraglia. Ciò che era da dimostrarfi.

Un tale raziocinio stando per tutti gli altri vetti (*Fig. 7.*) o E ec. le forze contranitenti al trave dovrebbero poi intendere come sottratte da quel peso assoluto, con cui in altra guisa nel muro gravitato avrebbe. Mentre benchè a fortificar detto trave potrebbero immaginarsi altre disposizioni di vetti, come se tutti dai punti C, D, E andassero ad unirsi nel punto m ; nonostante e allora graviterebbe il trave contro il muro con tutta la sua forza assoluta, e l'area $Emno$, che nel mio caso si reca a guadagno, n' andrebbe per quelli impedimenti perduta.

Che se il trave BK (replicando a destra le *Figg. 7. e 8.* rovesciate) stasse con ambidue le estremità riposto per esempio su due muraglie per servire di volta, o sulle sponde di un fiume navigabile in luogo di ponte; in tal caso (oltrecchè l'area $Emno$ raddoppiata sarebbe molto opportuna acciocchè la volta riuscisse più aperta, o i Navigi trovassero più spazioso e libero il passaggio) sembrerebbe poi anche, che la proposizione dovesse essere più probabile; perchè lasciando andare le forze cq ec. a sinistra distrutte dalle simi-

li contrarie a destra (nelle quali a mio parere versava la maggior difficoltà) nulladimeno tutte le forze simili alla cb resterebbero, le quali contrappo- nendosi alla gravità del trave, alleggerirebbero le muraglie, o le sponde di una parte del suo peso assoluto; anzi viene in via di corollario, che quando il trave si caricasse di più, le forze contranitenti dovessero risultare maggiori.

Forse, avendo riguardo alla flessibilità del legno, e volendo che il peso ne' punti C, D, E sia maggiore, più che si ritrova distante da B verso K, potrebbe questo mio discorso riuscire anche più retto; ma io non vommene dichiarare in verun modo garante, e quand' anche andasse per avventura tutto ad urtare in qualche paralogismo, come pure ho qualche ragion di dubitarne, e che il trave, nonostante tale combinazione di vetti, caricasse tuttavia la muraglia con tutto il suo peso assoluto; contuttociò ho voluto questo mio sospetto semplicemente produrre per animare altrui a tentare con più efficace industria di recare la *Trattoria* a qualche uso, come il celebre Nepero fece della sua *Logaritmica*, proponendo sull' idea di questa curva il suo sistema de' *Logaritmi*.

ARTICOLO QUARTO.

Descrizione organica della Trattoria di Perralto.

Siccome Leibnitzio, che descriveva questa curva con un peso attaccato ad un filo, ed Ugenio con una rigida verga fornita alle due estremità di una punta, non erano contenti di questi loro Istromenti, perchè involgevano il Problema, ed erano lo stesso che tirar per la tavola l'orivolo di Perralto, in quella guisa appunto che sarebbe apposto a biasimo, se per descrivere le sezioni coniche, altri recasse prestamente innanzi tre pezzi di un cono, intorno a quali una penna si avesse a guidare; così per la stessa ragione il Sig. Marchese Poleni non avrebbe di che esser molto lieto dell'Istromento suo, se non si potesse considerare come ad altra curva inventato, e quasi per un di più applicato anche alla *Trattoria*; e se di quello del Leibnitzio, e di Ugenio non fosse senza alcun dubbio migliore, e l'inventarne un ottimo sulle presenti equazioni impresa quasi che disperata non fosse.

Perlocchè ripigliando l'Istromento suddetto, dico che per descrivere la *Trattoria* basta (*Fig. 2.*) estrarre fuori del prisma *Ad* la lamina trasversale *dcT*, e porla da canto come inutile, e nel forame *o* dell'asta *oD* far entrare il pivolo *g*, e usar poi l'Istromento, come si è detto, che così detta asta farà la *tangente*.

Ma acciocchè la *tangente* si possa far eguale ad una costante data, in vece d'introdurre il pivolo *g* nel predetto forame, si faccia che entri nel forame di un anello, di cui (*Fig. 6.*) *ab* sia il piano orizzontale, ed il piano verticale sia *bd*, quale nei voti di mezzo riceva detta asta, espressa qui per il tronco *GH*, e che si possa a qualunque punto di quella fermare con la vite laterale *b*; avvertendo, che
l'anel-

l'anello non circonda affatto detta asta, ma si arresti come prima tocca il margine del piano inferiore orizzontale di quella; acciò detta asta nel sito g non sia per la grossezza dell'anello più alta in questo caso della *Trattoria*, che non fu in quello della *Logaritmica*.

ARTICOLO QUINTO.

Trattoria di base circolare, sua origine, e descrizione per approssimazione.

POtendo noi non che le *Trattorie* pensate (1) dal Bernuglio, e dal Leibnitzio (2), ma infinite altre immaginare per lo variare infinito delle lor direttrici, dovrebbero restar in tanta dovizia le nostre brame spente, e di una già esposta contente. Pure non vo' mancare di accennare almen quella di base circolare, e per essere gentil cosa, e per essere un caso generale, che per le ragioni altrove addotte, comprende anche la *Trattoria* di Perralto.

Se dunque si concepisca (*Fig. 2. Tav. 5.*) un filo ab eguale per esempio al raggio del circolo bcd ec. di cui ad un' estremità a alcun pelo sia attaccato, e l'altra b sia condotta per la periferia bcd ec. il pelo a descriverà una *Trattoria* a, e, f, g ec. di cui ab sia la *tangente* eguale ad una costante data, e la base, o sia *direttrice* farà la periferia bcd ec.

Questa curva si descrive altresì per *approssimazione*, come quella di Perralto; imperciocchè presa col compasso la data costante ab , che non ecceda il raggio del detto circolo bcd , e fatto centro in e punto vicino ad a più che sia possibile, si segni il punto c nella periferia direttrice bcd ec. cui da e sia condotta ec ; poi fatto centro in f tanto da e distante, quanto e da a , e tagliata con la medesima aper-
tura

E 2

(1) Bernuglio negli *Atti di Lipsia* mese di Giugno 1693.

(2) Leibnitzio negli *Atti di Lipsia* mese di Settembre 1693.

tura la periferia in d , sia condotta fd ; e così procedendo fatto centro in g tagliata la periferia in h si tiri la retta gh ec. Allora la linea $ae f$ ec. rappresenta una *Trattoria* di base circolare; in cui, come in quella di Perralto, il peso a sempre più s'accosta alla base BK senza arrivare mai a una minima distanza, cioè a toccarla; così in questo caso della base bcd sempre più s'allontana, senza mai pervenire ad una distanza massima, cioè senza mai andar nel centro c , dove inclinando per una spirale $efgm$ ec. sempre più s'avvicina, e non vi arriva giammai. Inoltre come (*Fig. 5. Tav. 4.*) nel caso di Perralto, scorrendo nella *direttrice* BK il raggio Gv insieme col *quadrante conjugato* $LbuG$, ovunque in b taglia detta *Trattoria*, la taglia ad angoli retti; così anche in questo caso (*Fig. 2. Tav. 5.*) scorrendo il centro di un quadrante per la periferia bcd ec., e un sito u qualunque acquistando, dovunque ad un medesimo verso le spire della *Trattoria* da quello si tagliano in m ed n , si tagliano appunto ad angoli retti. Ma voglio lasciare nell'altrui piacere di rincontrare con più lungo confronto le restanti proprietà di queste due curve, giacchè ciò non appartiene al mio argomento.

A R T I C O L O S E S T O .

Descrizione organica della Trattoria di base circolare.

PEr non fabbricare appostatamente un Istromento per questa sola curva, basterà per ora levare da quello della *Fig. 2. Tav. 4.* l'asta oD , e messo un pivolo nel forame o di detta asta, o in quello dell'anello ab (*Fig. 6.*) che la circonda, condurre poi detto pivolo per la periferia di un circolo già prima segnato con lapis sul piano della carta. E qui voglio che la materia delle *Trattorie* sia spedita e al suo fine condotta.

ISTROMENTO VI.

PER LA CICLOIDE.

IN quella guisa che le *Concoidi*, e le *Trattorie*, e tant' altre curve variano per lo infinito variare delle loro *direttrici*, così le *Cicloidi*, che generalmente nascono dalla rivoluzione di un cerchio sopra una linea qualunque data, per lo infinito variar di detta linea, infinitamente variano. Ma per non entrare in questa interminabile varietà, a quelle sole conviene attenersi, che o per il volger di un cerchio sopra una retta, o sulla periferia di un altro cerchio risultano; giacchè, come fu altre volte notato, l'un caso l'altro contiene, perchè si reputa la linea retta essere una periferia di un circolo infinito. Laonde riservando per un altro luogo (1) le *Cicloidi* della seconda classe, si comincerà da quelle della prima, cioè di base retta; le quali avvegnachè siano di tal genere che non ripigliano nuove forme, ma ricevono soltanto alterazione di grandezza o estensione; nonostante nella costruzione del presente Istromento voglio riguardare anche a questa sorta di cangiamento; sì perchè questa curva negli orivoli a pendolo utilmente si potrebbe forse adoperare, sì anche perchè l'Autore altre volte da me (2) lodato in proposito della *Cicloide* espressamente dice: *Rotulam, cujus rotationis ope delinearetur Cyclois, inter germana organa haudquaquam ponerem, cum rotula una ad unam tantum Cycloidem delineandam usui esse possit.*

AR-

(1) Istromento IX. Artic. IX.

(2) Il Sig. Marchese Gio: Poleni nel luogo sopracitato.

ARTICOLO PRIMO.

Dell' origine e proprietà della Cicloide.

SE adunque suppongasi (*Fig. 3. Tav. 5.*) un dato *circolo generatore* VRD ruotare sulla *retta base*, o sia *direttrice* DK dal punto V preso nella *periferia* di detto *circolo*, verrà descritta una *curva* VSK, che farà una *Cicloide*, e le *proprietà* sue *inservienti* alla seguente *costruzione* saranno:

I. Che la *tangente* RT del *circolo generatore*, determinata dalla *tangente* ST della *Cicloide* nel punto d' *intersezione* T, eguaglia la *porzione* RS dell' *ordinata* OS compresa fra la *curva* VSK, e la *periferia generatrice* VRD.

II. La *porzione* RS è eguale all' *arco* VR; ma la *tangente* RT è eguale a RS: dunque RT eguale all' *arco* VR; e perciò la *tangente* RT si chiama anche *devoluta* dell' *arco* VR.

III. La *Cicloide* VSK, di cui sta il *vertice* nel punto V, due volte presa è eguale a quattro *diametri* VD.

IV. Se finalmente si produca la *sottensa* DR, finchè occorra nella *tangente* ST della *Cicloide*, dico che la *prodotta* DR nel punto N divide per metà, e ad *angoli retti* la *porzione* di detta *tangente* definita dai *punti estremi* dell' *ordinata* OS, e della *tangente*, o sia *devoluta* RT. Conciossiacchè essendo eguali gli *angoli* ERD, DRF, perchè misurati dalla metà d' *archi* eguali FD, DR, saranno eguali gli *angoli* al *vertice* opposti TRN, NRS; ma sono eguali parimenti gli *angoli* TSR, STR, perchè opposti a *lati* per la *costruzione* eguali TR, RS; e perciò il *triangolo* STR è *isoscele*. Dunque la *prodotta* DR dal *vertice* dell' *isoscele* R condotta nella *base* ST, giacchè divide per metà l' *angolo* TRS al *vertice* R, taglierà parimenti per metà, e ad *angoli retti* la *base* ST a quello opposta.

Tutte queste cose si vogliono aver dette in qualunque punto

to della periferia VRD occorra il punto R di comune intersezione delle linee ET, DN, OS, e raggio CR. Onde mi piace di seguire questo punto d'intersezione R per tutto il corso della *periferia direttrice* VRD, ed esaminare i moti particolari di dette linee intersecanti, che per rapporto alle suddette proprietà devono risultare.

ARTICOLO SECONDO.

Nuova origine della Cicloide risultante dalle sue proprietà.

Quel *circolo generatore* VRD, che nel precedente Articolo fu detto, che generava la *Cicloide* ruotando sopra la *direttrice* BK, ora intendo, che immobile stia, e che la curva derivi da tali movimenti relativi alle sue proprietà.

Laonde acciocchè primieramente la porzione RT della *devoluta*, o sia *tangente* ET (in qualunque punto R tocchi la periferia direttrice) sia eguale alla porzione VR di detta periferia, fa di mestieri, che prima coincida con la retta VB, e l'estremo suo punto T si trovi precisamente nel vertice V, e che poi a poco a poco da detta periferia discostandosi dalla parte VRT, ed accostandovisi dalla parte DRE, finalmente vada a finire nella retta DK, e l'estremo suo punto T nell'estremo punto della curva K coincida.

La *norma* poi (che così mi giova chiamar le due linee DN, TS congiunte insieme in N ad angoli retti) perchè deve esser toccata e repulsa dalla *devoluta* RT in T, e non declinare però mai nè dal punto D, nè dal punto R di comune intersezione, avrà tal movimento, che il punto N farà prima stato precisamente in V, ma poi dalla *devoluta* RT quasi, dirò così, urtata e respinta, anche il punto N si farà sempre più allontanato dalla periferia, finchè nel punto K sia anch'esso concorso, ed il lato DN coincida con DK.

Segue l'*ordinata* OS, quale acciò costantemente formi l'angolo

golo FRD eguale a DRE, coinciderà precisamente con la retta VB, e s'andarà poi di modo allontanando da quella, ed accostando a DK, che a queste ad a se stessa fia costantemente parallela, e normale al diametro VD.

Quanto al raggio CR mobile intorno al centro C coinciderà prima con CV, e seguendo poi anch'egli di continuo il punto R di comune intersezione, finalmente terminerà in CD, e farà sempre normale alla tangente RT.

Ora per questi movimenti eccitati tutti in un tratto, come necessariamente dipendenti e inseparabili dalle sopr'accennate proprietà, avviene, che il punto d'intersezione S si debba costantemente in un punto della curva ritrovare. Anzi quantunque nel punto V, e nel punto K non sia per essere alcuna intersezione, perchè però ivi è per essere il principio ed il fine di quella, il punto V ed il punto K dovranno nonostante annoverarsi fra i punti della curva. Ma giova qui ricordare una cosa, che quanto prima occorrerà, cioè che in principio di moto il punto estremo T della devoluta RT, i due punti d'intersezione R ed S si troveranno ristretti nel punto N, e questo N in V, onde tutti si troveranno raccolti nel punto V; e che nel fine di detto moto, cioè quando il punto R sarà pervenuto in D, i punti T ed S faranno ridotti in N, ed N in K; e però T, N, S uniti tutti coincideranno in K.

Tutte queste cose poste, concludo che composta una macchinetta con tali e tante parti, che alle predette linee, cioè al *circolo generatore* VRD, al raggio CR, alla *devoluta* RT, alla *norma* DNTS, all'*ordinata* OS corrispondano; e ciascheduna movasi con movimenti ai moti di quelle rispettivamente conformi, questa potrà fornire la descrizione della *Cicloide* proposta. Ma per far prova di questo fatto, prestamente passerò alla descrizione di detta macchinetta, e dirò prima del suo *piano orizzontale*.

ARTICOLO TERZO.

Piano orizzontale dell' Istromento per la Cicloide.

DOvrebbe riuscir facilissimo a comprendersi il *piano orizzontale* di questa macchinetta, perchè le sue parti (*Fig. 1. Tav. 6.*) corrispondono appunto alle linee sopraddette della *Fig. 3. Tav. 5.*, e sono indicate colle medesime lettere, con i medesimi nomi, e non resta se non da mostrare, come siano anche capaci di quei medesimi movimenti, che furono a ciascuna attribuiti nell' antecedente Articolo.

E' dunque VRD il *circolo generatore*, qualunque dato preso nella superficie di un tronco d' un cono di legno, espresso nel *piano verticale* della *Fig. 2.* per il trapezio *p a b f*, qual circolo s' intende essere nella detta *Fig. 2.* la linea *e g*, e parallelo alla base *p a* di detta *Fig.* e stare sempre immobile. D' intorno al centro C di detto circolo (torniamo alla *Fig. 1.*) gira orizzontalmente in luogo di *raggio* l' asta CR (che porta un cilindro *n* ombreggiato mobile pure orizzontalmente) da R prodotta fino al forame *n*.

Tra questo cilindro (fatto come in sezione *b d Fig. 2.*) e la periferia del *circolo generatore* VRD è interposto un regolo di legno TE, che sta per la *tangente*, o sia *devoluta*, quale (mentre il *raggio* CR da V si muove verso D, e porta seco il cilindro *n*, che nell' istesso tempo volgesi orizzontalmente intorno al proprio asse) vien quasi per una sorta di *trafila* spremuto fuori delle due periferie del cilindro, e del *circolo generatore*; cosicchè detto regolo successivamente si muove, e si scosta dalla periferia VR dalla parte VRT, ed a quella vassi di mano in mano combaciando dalla parte DRE, finchè giunga a toccare la periferia nel punto D, dove fermandosi il *raggio* CR col cilindro annesso *n*, anch' esso cessa di più moverfi. Onde a buon conto qui si può osservare, che la *devoluta* risponde

a quelle leggi di moto, che le furono poco fa assegnate. Perchè ed è *tangente* al *circolo generatore* nel punto R, e normale al *raggio* CR, ed accade che la porzione RT sia eguale all' arco VR, nel supposto che in principio di moto la sua estremità T coincidesse in V.

Segue la *norma* di metallo DNTS fessa per mezzo per tutti i lati, regolata al dovuto suo moto da tre pivoli d'acciajo. Il primo dal punto estremo T del regolo, o sia *devoluta* RT, cui sta afferrato, cala giù nella fessura del lato NT, e movendosi insieme con detta *devoluta*, risospinge sempre più ed allontana dalla periferia VR la *norma*, che prima col punto N coincideva nel punto V, finchè si arresta, arrestandosi detta *devoluta* nel punto D. Il secondo fisso nel punto D dell'immobile periferia VRD s'introduce nella fessura del lato ND, e ritiene detto lato, acciocchè da detto punto D non si scosti. Il terzo ed ultimo pivolo, essendo per di sotto fisso nel punto R del rotante *raggio* CR, entra nella fessura del lato ND, e costantemente fa che non declini dal punto R di comune intersezione; onde tenendo detta *norma* ai due punti D ed R, ed essendo dall'estremità della *devoluta* T risospinta, come si è detto, viene appunto a quel moto determinata, che s'era già divisato.

Questo medesimo ultimo pivolo R portato dal *raggio* CR urta, e fa muovere una verga di metallo *tt* F 4 con puntini distinta, che porta le veci di *ordinata*, e che sebbene men si ravvisa in questo *piano orizzontale*, però assai bene si mostra nel *verticale* della *Fig. 2.* per le lettere *ga* K 3 4. Ella è (*Fig. 1.*) connessa e normale ad un prisma *tt* mobile nella scannellatura AQ, che è parallela al diametro VD. Si dirige detta *ordinata* da *tt* a sinistra verso F, e poi (vedi anche la *Fig. 2.*) ripiegandosi per di sotto a destra arriva sino a 4, e s'interseca col lato della *norma* Ny nel punto S, dove è uno stilo afferrato ad un
anel-

anello, o sia guida mobile per Ny , che questa intersezione continuamente seguendo, descrive intanto sul piano della carta la proposta *Cicloide*. Imperciocchè mentre detta *ordinata* è dal pivolo R urtata, l'annesso prisma tt cedendo scorre da A verso Q , e intanto l'*ordinata* ttF_4 si muove sempre a se stessa parallela, e normale al diametro VD , e s'accosta per di sotto al punto D , e s'interseca anch' essa nel punto di comune intersezione R , perchè non si muove, se non se essa è appunto dallo spingente pivolo R determinata a muoversi.

Dirò ora, per qual causa alcune parti di questa macchinetta siano in disegno ora espresse con linee vive, ora con morte. Onde egli è da sapere, che le parti dell'Istromento sono realmente collocate a diverse altezze, come meglio si potrà poi anche osservare nel *piano verticale* della *Fig. 2.* La *norma* $DTNS$ (che nel *piano verticale* della *Fig. 2.* è espressa per $x78y$) è nel più basso luogo di tutte le altre; sopra a quella segue l'*ordinata* ttF_4 (che in *Fig. 2.* si mostra per $qaK34$); d'indi più alta sta la *devoluta* ET (espressa *Fig. 2.* per eb) superata però da una porzione del cilindro n , e per fine nel più sublime posto avvi il *raggio* CRn (che in *Fig. 2.* compare per rpn), ed avvi pure una porzione dell'*ordinata* ttF (che in *Fig. 2.* è la porzione qaK). Quindi è che quella porzione di esse parti, che nel *piano orizzontale* viene ricoperta da quelle, che si trovano situate in maggior altezza, è con soli punti disegnata; e distinta poi con linee vive resta in vista quella porzione, che sotto a quelle perpendicolarmente non cade. Perciò ora si concepisca (*Fig. 1.*) come parte della *norma* $DTNS$ si mostra abbagliata, e coperta sotto dell'*ordinata* ttF_4 ; questa coperta dalla *devoluta* ET , benchè in figura veramente non appare; la *devoluta* dal cilindro n ; il cilindro dal *raggio* CRn . Ma facciamsi ormai appostatamente da capo al *piano verticale*, di cui soltanto di passaggio alcuna cosa si è detta.

ARTICOLO QUARTO.

Piano verticale dell' Istromento per la Cicloide.

Molte cose appariranno in questo *piano*, che in quello *orizzontale* o per evitar la confusione non si son poste, o se poste anche vi sono, non si potevano però abbastanza concepire; perchè per la intelligenza di qualunque costruzione organica un piano reciprocamente l'altro ajuta, riuscendo per lo più in un piano men distinte quelle parti, che aperte e chiare risultano nell'altro.

Si concepisca dunque (*Fig. 2.*) che sia con una vite *N* fermato ed eretto sopra una tavoletta orizzontale *RS* un forte piedestallo d'acciajo *RLC* forato in *C* ed *L*, ed indi si supponga un chiodo *mrA*, che trapassi per l'asse del cono *fbap*, poi per un bucco *r* circolare della verga *rpn*, e quindi per detti due forami quadrangolari *C* ed *L*; finchè per ultimo nella sommità *A* con una vite si stringa, e ritenga il cono al predetto piedestallo sospeso, di modo che e questo, e quello, e la tavoletta orizzontale formino un corpo costantemente immobile; acciocchè quindi per primo capo nella superficie di questo cono dare e prender si possano infiniti *circoli generatori*.

L'asta poi *rpn* mobile orizzontalmente intorno al punto *r*, cioè d'intorno all'asse del cono, o sia chiodo *mrA* sta per il raggio *Cn* della *Fig. 1.*, nel di cui forame *n* s'introduce il palicello *ion* d'acciajo talmente ripiegato, che la porzione *nb* divenga parallela al lato del cono *pf*, e dopo due piegature, una verticale, l'altra parallela all'orizzonte seguiti la porzione *oi* parallela all'asse *mrA*, e verticale in un con detto asse all'orizzonte. Questa porzione *oi* (perchè per linea retta mira nell'estremo punto *R* del raggio *CR* della *Fig. 1.*, ed insieme col raggio *rn* della 2. volgesi

gesi d'intorno nel punto r) descriverà un cerchio eguale al dato *circolo generatore* VRD della *Fig. 1.*, ovvero eg della *2.*, e la modificazione di detto circolo niente più importerà, che spingere su, o giù nel forame n il palicello *ion* fermandolo poi con la vite laterale, qualora la porzione *io* miri nel punto e del circolo ge qualunque dato.

Segue ora il *tangente* regolo, o sia *devoluta* ET , che nel *piano orizzontale* della *Fig. 1.* è situata, di maniera che nel *verticale* della *2.* esprimer non si può se non per la sezione eb con puntini ombreggiata. Nulladimeno si scorge, come (essendo interposta fra il lato del cono pf , e del cilindro bd mobile d'intorno ad una porzione del palicello *ion*) per lo volger di detto cilindro dal *raggio* rp portato, possa anch'essa girare d'intorno al cono dalla superficie di questo, e da quella del cilindro spremuta fuori quasi, come già dissi, per una sorta di trafila. Ma non si può del tutto rilevare, come dal punto estremo e di detta *devoluta* cali giù perpendicolarmente un altro palicello pur d'acciajo, parallelo anch'esso all'asse mrA , essendo situato, e coperto di dietro alla porzione oi , perchè tanto il punto e , che corrisponde al punto T della *Fig. 1.*, quanto detta porzione oi , che risponde al punto R , occorrono in disegno nella medesima retta $eiTR$.

Ma giacchè abbiain detto di due palicelli, che fanno per i supposti pivoli T ed R moderatori della *norma*, ed *ordinata* della *Fig. 1.*, parliam qui anche di un altro palicello, che risponda al terzo pivolo D in detta prima figura supposto. Però il trapezio, o sia figura piana $pabf$ rappresentando in verità la superficie di un solido, cioè di un tronco cono (ciò che è da imprimersi bene nella mente) segue che la linea rm condotta sulla superficie del cono della linea pa alla linea fb , si debba concepire non solo eguale al lato pf , ma ancora all'asse del cono egualmente inclinata, e quindi la parte pure rt egualmente inclinata, ed eguale
alla

alla parte $p e$. Ciò posto, s'intenda esser fatta nel lato $r m$ una tale scannellatura, qual dimostra la *Fig. 1.* nel punto D , in cui si muova, e con una vite si fermi in qualunque punto t un prisma di simil forma $l z$ congiunto ad un palicello $z \mathcal{C}$, che nel punto z costituisca con detto prisma un angolo $l z \mathcal{C}$ eguale all'angolo formato dal lato del cono col suo asse; onde avverrà, che il palicello $z \mathcal{C}$ (cioè il palicello $t V$, che ormai si vuole intender lo stesso) sia parallelo all'asse del cono, ed al rotante palicello $o i$, e si ritrovi nella circonferenza del medesimo circolo da detto palicello $o i$ descritto; perchè il punto e , in cui si dirige la porzione io , ed il punto t , in cui si è fissato il palicello $t V$, sono dai punti p ed r rispettivamente equidistanti. Questo palicello $t V$, fisso che sia con la vite al cono, starà insieme con detto cono costantemente immobile; e tutti questi tre palicelli introdotti nella fessura della *norma* determineranno ai detti moti non solo la *norma* (di cui in questo *piano verticale* non si mostra se non la costa $x 7 8 y$ sostenuta da nodi sotto fermati con picciole viti contro i detti tre palicelli) ma anche la seguente *ordinata*, perchè verrà urtata dal prodotto palicello $o i$, che come rispondente al punto R della *Fig. 1.*, regola anche la comune intersezione delle dovute parti.

La verga dunque $q a K 3 4$, che già poc' anzi fu accennato essere la *ordinata*, quando viene urtata dal palicello $o i$, scorre per la scannellatura superiore q corrispondente a quella orizzontale $A Q$ della *Fig. 1.*, e segue di essa (quantunque in questo *piano verticale* non possa apparire) una intersezione col lato della *norma* $8 y$ dichiarato per $N y$ della *Fig. 1.*, e condotto con la mano dietro a questo punto d'intersezione uno stilo $M S$ connesso, e normale ad una guida mobile in detto lato $8 y$, dalla punta del detto stilo S vien descritta la curva sul piano della carta.

Ora per passare ad un esempio, nella superficie del tron-

co cono dato sia per *generatore* della proposta *Cicloide*, invece del supposto *circolo eg*, il *circolo EG*, che risponde nella *Fig. 1.* al *circolo u*. Onde prestamente calato giù il palicello *noi*, e fermato con la vite *n*, quando *io* mirerà in *E*, spontaneamente discenderà anche la *devoluta eb* in un col cilindro *bd*, che la sostiene ed abbraccia. Così il palicello *tV* sia giù cacciato fino al punto *T*, e con la vite fermato. Di più essendo stato detto (1) che in principio di moto (*Fig. 1.*) i pivoli *T* ed *R*, e lo stilo *S* debbano ridursi in *N*, ed *N* coincidere col vertice *V*, tanto dovrà ora seguire (*Fig. 2.*) del palicello della *devoluta be*, del palicello *oi*, e dello stilo *MS*, che quei pivoli e stilo rappresentano. Onde (questi ristretti prima nel punto 8 della *norma*, cioè *N* della *Fig. 1.*, e questo 8 condotto insieme con l'*ordinata* nel vertice *u*, che qui è coperto dall'anteposto punto *T*, ma è visibile nel *piano orizzontale*) si move poi con la sinistra il raggio *rpn* verso chi legge d'intorno al punto *r*, e con la destra messa in *M* sia lo stilo *MS* guidato appresso al punto, dove la *norma* s'interseca con la *ordinata*, che si consegnerà la descrizione proposta.

Notate per fine, che sebbene quanto si è detto sembra difficile a comprendersi, ed esiga per dir vero non poca forza di fantasia, nonostante se tornate bene a mente le leggi di Prospettiva, si farà diligente riflessione alle sole linee parallele morte condotte dal *piano orizzontale* al *verticale*, molto meno ardua riuscirà la intelligenza di questa costruzione; e molto meno ancora, quando per un momento si avran messi gli occhi sulla seguente tavola, che la elevazione scenografica rappresenta.

AR-

(1) Artic. II. di questo Istromento:

ARTICOLO QUINTO.

Scenografia dell' Istromento per la Cicloide.

Questa Fig. 1. Tav. 7. è tanto per se stessa chiara, che non avrebbe forse mestieri di altra esposizione, ma pure volendo qui recar in poche le molte parole dette nei piani antecedenti, sappiate che le parti dell' Istromento messe qui in prospettiva portano rispettivamente le medesime lettere delle medesime parti descritte nell' antecedente *piano verticale*; perchè RCL è il piedestallo (fermato ad una tavoletta orizzontale con la vite N) a cui per mezzo del chiodo *mrA* (qui non si vede *m*) sta in alto il tronco cono sospeso ed immobile. Intorno a detto chiodo in *r* gira verso *q* il raggio *rn*, che seco porta il palicello *noi*, intorno a cui movefi il cilindro *d*; e tra la superficie di questo, e del predetto cono lo interposto regolo *tangente*, o sia *devoluta be* si spreme, e sempre più s' allunga dalla parte di *e*, dove un palicello cala giù dritto ad introdursi nella norma $x \ 7 \ y$, nella quale s' introduce pure l'immobile palicello TV, ed il palicello *noi*. Questo palicello *noi* urta nel medesimo tempo contro la *ordinata qK₃4*, onde ella scorre nella scannellatura superiore da Z verso *q*; ed intanto lo stilo S connesso alla sua guida M, scorrendo per il lato della *norma 8 y* dietro al punto d' intersezione della *norma* coll' *ordinata*, segna sul piano della carta RS la proposta *Cicloide*. Avvertendo che il lato *y 7* della *norma* farà sempre tangente alla curva; ed inoltre che sta nel piacere altrui il fare che o l' *ordinata* urti nel palicello *oi*, o che piuttosto il palicello urti nell' *ordinata*, come in figura. Così è arbitraria la situazione della scorrente guida coll' annesso stilo MS; perchè in figura è messa nel lato *8 y* della *norma*, ma tanto si poteva anche introdurre nel-

nella *ordinata*, facendo però, che lo stilo passasse per la fessura di detta *norma* prima di discender nel piano. Ma perchè tante parti adoprandò in questa macchinetta, e troppi moti seguendone, si potrebbe dubitare della felice sua riuscita, voglio almeno nel seguente Articolo farmi incontro a quelle obbiezioni, che mi potrebbero venir mosse dagli altri.

ARTICOLO SESTO.

Obbiezioni alla costruzione predetta, e sue risposte.

NON volendo io, come altri fanno, dissimulare accuratamente i difetti di questa mia macchinetta, io medesimo li produco, quali alla meglio correggendo, e quali così lasciando stare come stanno. Potrebbeasi dunque opporre

O B B I E Z I O N E I.

Che essendo due palicelli, ed uno stilo, che (*Fig. 1. Tav. 6.*) nel principio di moto hanno a concorrere nel punto N, lo stilo S per la grossezza loro non trovandosi precisamente in detto punto N, non potrà (*Fig. 3. Tav. 5.*) segnare i primi punti della Curva in V, e così nemmen gli ultimi in K; poichè la verga, che sta per l'*ordinata*, quando arriverà a toccare il palicello D, o sia *tV* della *fig. 2. Tav. 6.* la punta dello stilo farà lontana da K la metà della grossezza dello stilo, tutta la grossezza dell'*ordinata*, e la metà della grossezza del palicello *tV*; e però la curva rettificata non reggerà all'equazione, cioè (*Fig. 3. Tav. 5.*) la *femicicloide* VSK non farà eguale a due diametri VD, nè tutta a quattro, come dovrebbe.

RISOLUZIONE.

L'obbiezione non ha altra risposta, se non che questa imperfezione è, come già notai altrove (1), comune anche ad altri Istromenti inventati da altri singularissimi uomini.

OBBIEZIONE II.

Ancorchè non andassero dispersi alcuni punti della Curva in K ed V, pure non si ha, che una sola *femicicloide* VSK, restando delusi dell'altra metà a sinistra.

RISOLUZIONE.

Ma volendo pure conseguire anche l'altra metà, lasciando star fermo il tronco cono nella presente situazione, e soltanto portato a man destra il piedestallo RLC *Fig.2.Tav.6.* e messa la *ordinata qaK₃₄* nella scannellatura B, si potrebbe descrivere anche l'altra metà della *Cicloide* a sinistra; e ciò bastar dovrebbe, come basta per la perfezione d'altri simili Istromenti in questo genere, che non descrivono le Curve, per le quali sono inventati, se non ad una metà per volta. A questo s'aggiunga, che per li usi meccanici basterebbe il poter descrivere una mezza *Cicloide*, come per esempio nella fabbrica degli Orologi a pendolo.

OBBIEZIONE III.

Essendo piuttosto lunghi i palicelli, e lo stilo, e dovendo il palicello *oi*, e il palicello *e* (*Fig.1.Tav.7.*) urtare e respingere la *norma*, è da temere, che per l'elaterio intrinseco della materia metallica si pieghino i palicelli avanti di

po-

(1) Istromento II. Art. II.

poter muovere le rispettive parti, e però non duri in esse quella mutua azione, che ai movimenti già stabiliti si richiede.

RISOLUZIONE.

Onde anche questa infermità pare senza rimedio, perchè non può uom mortale togliere dalla natura l'elasticità. Si potrebbe però se non altro diminuirla, fabbricando l'Istumento di materia poco elastica e dura assai, e più grande che in figura non è.

OBBIEZIONE IV.

Il regolo *tangente*, o *devoluta eb* (*Fig. 2. Tav. 6.*) non è possibile che, volgendosi intorno alla superficie del cono, cammini esattamente col margine *e* nella periferia del detto *circolo eg*; perchè naturalmente inclina anzi per una spirale verso la base di detto cono *pa*.

L'esperienza può presto render paghi i curiosi di questa verità dipendente da una proposizione (1) già dimo-

G 2

strata,

(1) Questa medesima proposizione, benchè enunziata differentemente, è dimostrata dal P. Andrea Tacquet nella Dissertazione Fisico-Matematica: *De Circulorum revolutionibus Theor. VIII.* dalla quale derivano alcune conseguenze, che non mi pajono in vero così poco gentili, che si abbiano a tralasciare. Segue dunque:

1. Che, più che sarà lungo il cono, si moverà nell'area di un maggior circolo, perchè (*Fig. 7. Tav. 5.*) più acuto che è l'angolo al vertice C, più aperti sono alla base gli angoli CKS, CSK compresi tra il lato del cono, ed il diametro della sua base SK. Ma una spirale non è che una curva, che passa per

i punti di un cerchio ai punti di un altro cerchio maggiore. Dunque se nel medesimo tempo che il cono rotola il punto di concorso C dei convergenti lati KC, SC, passando in *x*, poi in *d*, *b* ec. s'allontanasse sempre più dalla base KS, il cono in tal caso moverebbesi sul piano per una spirale KSx; finchè andando detto punto C all'infinito, e (*Fig. 8.*) diventato il cono un cilindro In, moverebbesi in tal caso per un circolo infinito; cioè ivi in tal caso si moverebbe per una retta nm. Se poi i lati divenissero convergenti dalla parte opposta, il cilindro diventato di nuovo un cono, tornerebbe ai medesimi movimenti spirale e circolare. E tanto

strata, qual'è, che fatto rotolare sul piano dell'orizzonte un cono rovesciato KSC (*Fig. 4. Tav. 5.*) per un impulso che

si vuole aver detto anche rispetto ad un solo tronco di cono Kg, Se (*Fig. 4.*) Perchè non altrimenti che se fosse intero, non resta che i lati Kg, Se non siano tuttavia convergenti, e però muoverebbesi in un circolo, il di cui centro accada nel punto, dove detti lati Kg, Se prodotti verrebbero ad unirsi, cioè nel centro C. Oppure moverebbesi per una spirale per una retta; e poi di nuovo per una spirale, o per un circolo, secondo che entrassero in supposto o l'uno o l'altro dei predetti casi.

2. Immaginemoci (*Fig. 2. Tav. 7.*) che un pezzo anteriore ed un posteriore di un carrettino a quattro ruote, o pur anche di tre, sia colla vite D stretto e confitto l'un all'altro, cosicchè diventi immutabile l'angolo KDS, ed in conseguenza anche l'angolo KCS formato dai convergenti assili Kg, Se in C prodotti. Per l'analogia che questa macchina ha col tronco cono rotante della *Fig. 4. Tav. 5.* e per la medesima ragione addotta nel Testo, onde detto cono movesi in un circolo, si raccoglie che urtata comunque nel centro della sua gravità, debba muoversi anch'essa in un circolo, di cui C sia il centro. Di più se nel tempo che rotola, rallentata la vite D, l'angolo KDS si aprisse sempre più, e l'angolo KCS sempre più facendosi acuto, si andasse C accostando all'infinito, essa moverebbesi per una spirale, e poi giunto che fusse C all'infinito, per una retta ec. Perchè in somma ha qui luogo l'antecedente annotazione con tutte le sue parti.

Quindi bellamente si scorge, quant'è per esser d'uopo nell'idea di una carrozza, che dovesse andare non solo in

un perpetuo cerchio, artificio già fatto volgare, ma andare (ciò che fu visto sulla piazza di S. Marco in Venezia anni fa) e per dritto e per traverso, e volgersi per ogni parte da se, o per l'opera delle persone che dentro fossero. Conciossiacchè o per una validissima molla, che per mezzo di ruote dentate intermedie facesse volger li assili Kg, Se fermi alle sue ruote, o supplendo gli uomini all'azione della molla (secondo che questa azione fosse applicata o a sospingere, o a respingere) la carrozza o innanzi, o indietro moverebbesi. Ma acciò si movesse anche o per dritto, o a destra, o a sinistra, secondo che la tortuosità della strada il richiedesse, in quella guisa che l'accorto Nocchiero col timone guida la sua nave, così avrebbesi qui a preparare l'ingegno in modo che si potesse ad ogni occasione stringere prestamente, o allargare, ed annullare l'angolo KDS, e restituirlo anche, quando bisogno fosse, dalla parte opposta. Meccanismo che quanto in esecuzione riesce mirabile, altrettanto importa meno di sagacità nell'inventarlo. E' ben vero per altro, che quando si volesse applicare la carrozza al trasporto di enormi pesi, non potendosi superare le grandi resistenze, se non con grande discapito della velocità, perciò tal macchina non si potrebbe recare in pratica con gran vantaggio della società. Conciossiacchè lo sforzo di un cavallo, che seguitamente affatica in luogo di una potenza, può vincere al più una resistenza di 1250. lire; e lo sforzo di un uomo, una resistenza di lire 205., sforzi che sono come 6 a 1. Onde supposto che la carrozza tirata da quattro cavalli, e

che duri nel centro della sua gravità, deve egli muoversi in un circolo Syz , nel di cui centro C starà sempre il vertice di detto cono. Perchè essendo i lati KC, SC del cono convergenti ad una medesima parte C , e sempre egualmente convergenti, il cono si deve muovere per una curva, che non solo sia inclinata ad una medesima parte, ma sempre egualmente inclinata; e questa Curva non è altro che il circolo. Se per contrario si facesse muovere il piano Syz d'intorno al fermo cono, il piano si muoverebbe in un circolo, persistendo col punto C nel vertice C di esso cono; perchè o che si muova il cono sul fermo piano, o che si muova il piano sul fermo cono, niente però si mu-

ta

pesante insieme col carico 4920. lire (che è la somma delli sforzi di quattro cavalli) faccia il viaggio di una lega all'ora; se dovesse essere spinta innanzi da quattro uomini applicati per dentro a farla muovere per mezzo di ruote dentate, dovendo la forza dell'uomo essere accresciuta di sei con altrettanta necessaria diminuzione della velocità, essa non farebbe in tal caso più di una lega in ore sei. Tardità in vero fastidiosa, per non dire insopportabile.

3. Quindi dipende anche l'uso che si fa (Fig. 3. Tav. 7.) de' cilindri per trasportare, dove che sia, qualche grave peso; perchè se essi sono paralleli, il peso avanza per drittura (facendo astrazione dalla inegualità del piano, del peso, e de' cilindri) se convergenti, per circolo ec.

4. Nei molini costrutti per macinare il seme di lino si fa uso (Fig. 4. Tav. 7.) di una pietra LG della forma di un pezzo di cilindro in questo modo: sta verticale all'orizzonte eretta un'antenna AB mobile intorno a se stessa, per lo volger di una ruota trasportata dalla corrente di un rio. Da quest'antenna

si spicca un forte braccio verso G , ch'è introdotto nell'asse del cilindro, e in un coll'antenna movendosi, trae seco in giro il pesante macigno, quale girando intorno al braccio, ed insieme rotolando sul piano, frange così e pesta il sottoposto seme. Onde a me pare, che se detto macigno fosse piuttosto della forma di un tronco cono $KSge$ tornerebbe assai meglio. Perchè un cilindro rovesciato urtato nel centro della sua gravità naturalmente, come si disse, inclina per una retta; onde volendolo contro alla sua natura determinare ad un moto circolare, non solo bisogna molta più acqua, ma dovendo altresì il macigno, e le ruote adoperare maggior forza, la macchina assai più presto si logora. Che se in luogo del cilindro LG fosse posto in pratica un tronco cono $Kg'eS$ portato in cerchio sul piano orizzontale LS dal braccio AC , che si piega nel vertice C di detto cono, e per l'asse del medesimo trappassa (perchè il cono sospinto naturalmente movesi in circolo) incontrando perciò la macchina minor resistenza, le parti sue farebbero men tosto consonte, ed un minor volume d'acqua basterebbe.

ta la figura del cono, e del piano, la quale interviene a produrre un tale effetto. Secondariamente, non è altro il cono (*Fig. 6. Tav. 5.*) che un settore SCz (*Fig. 5.*) di un circolo, che è a tutta l'area $SCyz$, come (*Fig. 6.*) il raggio RS della base del cono al lato CS di detto cono. Imperciocchè si concepisca (*Fig. 5.*) il settore SCz ombreggiato essere una carta mancante dell'intera area di un circolo, la porzione Syz , onde approssimati, e fatti combaciare i due lati Cs , Cz in uno, venga formato (*Fig. 6.*) il cono SCR . Quindi tosto si scorge, che il raggio CS ovvero Cz (*Fig. 5.*) diventa il lato Cs del cono SCR della *Fig. 6.* Di più la porzione di periferia ombreggiata Sz (*Fig. 5.*) pareggia (*Fig. 6.*) tutta la periferia della base del cono. E però essendo le periferie come i diametri, farà (*Fig. 5.*) tutta la periferia Syz alla porzione Sz , come (*Fig. 6.*) CS ad SR . E perchè i settori di un medesimo circolo sono in ragione delle loro porzioni di periferia, tutta l'area del circolo (*Fig. 5.*) farà alla parte ombreggiata, come (*Fig. 6.*) CS ad SR .

Queste cose premesse, ingegniamoci ora di mostrare per qual causa un regolo messo a traverso, e ad angoli retti di un cono, se lo si fa muovere sopra la superficie di esso cono, anzi che persistere sopra quel circolo parallelo alla base, su cui fu posto, naturalmente per una spirale verso detta base inclini. Proposizione verissima (1), ma che per

(1) Dalla proposizione, e da quanto il Testo contiene in appresso si rileva

1. Che il regolo Im (*Fig. 4. Tav. 5.*) tracciarà sopra un cono o più di una spira, o meno di una spira, o una intera per lo appunto, secondo che il settore conico nCd farà più o meno prossimo ad un quadrante nCy , e secondo che il regolo Im farà situato più o meno vicino a Cy .

2. La spirale tracciata sul cono farà

sempre eguale alla retta Im , perchè è la medesima retta, dirò così, che sulla superficie del cono si avvolge.

3. Questa spirale conica impressa sulla superficie del cono rovesciato, rotolando esso descriverà vicendevolmente sul piano la retta Im .

4. Si potrebbe meccanicamente descriver questa spirale sulle superficie del cono, tagliando prima in carta il triangolo rettangolo CIm , di cui l'ipote-

per comprenderla, ben farebbe, che prima se ne facesse in fatti una prova meccanica sopra una piramide, e poi sopra

tenuta Cm fosse eguale al lato del dato cono, ed applicando il lato CI di detto triangolo al lato di detto cono in modo che l'angolo C stasse nel vertice; perchè piegando poi detta carta d'intorno alla superficie conica il lato Im indicerebbe la proposta spirale. Ma non essendo questa tale descrizione per essere molto utile ai Meccanici, ne proporrò un'altra; non già perchè creda che ella sia loro necessaria, sapendo benissimo, che già non mancano altri metodi, ma perchè questa è tale, che ha direttamente relazione a quanto si è detto, e può avere un amplissimo uso.

Sia dunque, per il modo che si accennarà nell' *Istromento IX. P. III. Art. X.* descritta (Fig. 5.) sul piano una spirale qualunque Sab ec. (che farà quella di Archimede nel caso, che si proponga no eguali li spazi tra una spira, e l'altra) e postovi sopra un cono rovesciato, che col vertice occorra nel centro C di essa, si faccia rotolare, che farà dalla *spirale del piano* tracciata sulla superficie del cono una spirale (conica da me detta) di un numero di spire eguale al numero delle spire della *spirale del piano*, moltiplicato per il numero delle volte, che il *settor conico* SCx entrerà nell' area di un circolo, di cui il raggio sia eguale al lato del dato cono. Onde nel caso della Figura, essendo 2 il numero delle spire della *spirale del piano*, e 3. il numero delle volte che il *settor conico* SCx entra nell' area del circolo; moltiplicato 2 per 3 verrà 6. numero delle spire della *spirale conica*. E la ragione è perchè quante sono le spire della *spirale del piano*, tante sono le porzioni di essa in ciaschedun *settor conico* impresse; e queste porzioni diventano spi-

re intiere nella superficie del cono:

Quindi dato un cono, di cui il *settor conico* sia parte aliquota dell' area di un circolo, ben si vede, che si potrà scolpire di qual spirale più piace, e di un numero di spire qualunque; perchè sta nel voler nostro descrivere sul piano quella spirale che più faccia mestiere, e poi applicare sul dato cono i settori di carta SCx , xCy , yCS , e le porzioni spirali di ciascheduno di mano in mano nella superficie di quello riportare e scolpire. Onde seguita che anche in questo caso la *spirale conica* farà eguale alla *spirale del piano*; e che o rotolando il cono sul fermo piano, o facendo volgere il piano sul fermo cono, traccierassi sulla superficie o dell' uno o dell' altro rispettivamente la già impressa spirale.

5. Già si è detto che un cilindro Iz (Fig. 8. Tav. 5.) rovesciato sul piano, ed urtato nel centro della sua gravità rotolando naturalmente movesi per una retta. Conciossiacchè abbiám visto, che un cono rovesciato sul piano ed urtato nel centro della sua gravità, rotolando naturalmente si muove nella periferia di un circolo. Onde supposto che il centro suo fosse andato all' infinito, si moverebbe nella periferia di un circolo infinito. Ma un cilindro non è altro che un cono, di cui appunto il vertice sia andato all' infinito, e la periferia di un circolo infinito non è più che una retta. Dunque un cilindro rovesciato sul piano rotolando movesi per una retta. Inoltre a similitudine del cono per ciascheduna rivoluzione spiega e distende la sua superficie sul piano in un settore, per così dire, infinito, cioè in un rettangolo (Fig. 8. Tav. 5.) supponiamo $nIAd$, che

pra un cono ; giacchè il cono non è altro, che una piramide d' infinite faccie . Nonostante immaginiamoci, che (*Fig. 4. Tav. 5.*) un cono rotolando sul piano , dopo un' intera conversione fatta d' intorno al proprio asse , abbia spiegata la superficie in un settore , supponiam per esempio nCd , (che sarà a tutta l' area del circolo Syz , come CS lato del cono al raggio Sn della sua base) indi dopo un' altra conversione in un altro egual settore dCb , poi in un altro ec. passando il lato del cono Cn , che tocca il pia-

che dovendo perciò pareggiare la superficie di esso , lo chiamo *rettangolo cilindrico* .

Siccome poi per incidere una spirale nella superficie di un cono con una retta Im (*Fig. 4.*) fu prima detta Im supposta verticale al lato di esso cono , che aveva i lati obliqui e convergenti . Ora perchè essendo il cilindro un cono prodotto all' infinito , ha i lati retti e paralleli , si adoprerà (*Fig. 8.*) qui pure la retta Im , non però verticale , ma anzi all' opposto messa obliqua al lato di esso , per la quale dico , che rotolando il cilindro verrà appunto tracciata una spirale sulla sua superficie . Perchè dopo la sua prima rivoluzione , ed il lato In passato in Ad , la retta Im toccherà il lato del cilindro in t punto vicino alla base d più che non è il punto I dopo la seconda rivoluzione detta retta Im toccherà il lato del cilindro In passato in Fb in b punto più vicino alla base anche più di t . Onde risulterà primieramente che quanto maggior sarà l' angolo nIm (pur che sia minor di un retto) molte più saranno le spine , che verranno sul rotolante cilindro tracciate dalla retta Im .
2. Il numero delle spine farà eguale al numero dei *rettangoli cilindrici* segnati dalla retta Im , come era anche nel caso dei *settori conici* della *Fig. 4.*
3. Essendo impossibile definire sul piano un *rettangolo cilindrico* $nIAd$, perchè

non si può giustamente rilevare la periferia della base del cilindro , si piegerà d' intorno ad esso una carta , che lo capisca , e circondi per l' appunto , quale distesa indi sul piano , supporremo ora che pareggi detto rettangolo $nIAd$; onde volendo poi segnare il cilindro di un numero di spine qualunque dato (in *Figura* sono 3) si ordinino per dritto altrettanti *rettangoli cilindrici* , e si tiri la retta Im , che detta spirale si conseguirà , o avvolgendo d' intorno al dato cilindro tutti i (3) *rettangoli cilindrici* , e le porzioni della retta Im di ciascheduno nella superficie di essi incidendo , o come comunemente si fa , piegandovi d' intorno un solo rettangolo , anzi i soli triangoli Iet , tob , bhm in esso riportati . Imperciocchè le rette It , tb , bm formeranno le tre spine , e tutte insieme la spirale . 4. Ancor qui risulta assai più leggiadramente che altrove , che scolpita in sulla superficie di un cilindro una spirale qualunque , ma che gli spazj tra una spira e l' altra siano eguali , rotolando il cilindro , sempre si spiegarà essa sul piano in una retta eguale anche in questo caso alla *spirale cilindrica* ; e quando essa spirale non si distenda in una retta , certo è che non sono eguali gli spazj tra l' una e l' altra spira ; e spiegarà sul piano rotolando una Curva .

piano nella prima stazione, passando, dico, da Cn in Cd poi ec. Ora se fosse supposto che prima di muoversi il cono, fosse ad angoli retti del lato Cn designato sul piano un regolo Im , qual Curva tracciarebbe detto regolo sulla superficie del cono rotante, toccandolo di mano in mano in diversi punti successivi? Una spirale certamente che verso la base del cono inclina, e gli spazj fra una spira e l'altra intercetti saranno eguali alle differenze, che sono da CI a Ct ; da ct a cb ; da cb a ec. Conciossiacchè il lato Cn passato in Cd è dal regolo Im toccato in t punto alla base tanto più vicino, che non è il punto I , quanto dt è minore di nI . Il che se non fosse, non solo dt sarebbe o eguale, o maggiore di nI , ma anche l'angolo dtm sarebbe o eguale, o maggiore dell'angolo nIm , che non può essere, perchè dC , nC sono per la costruzione convergenti sempre dalla medesima parte di C . Finita poi la seconda rivoluzione, ed il medesimo lato Cn (dopo esser stato in Cd) trasferito in Cb , sarà da detto regolo Im toccato in b , punto alla base vicino anche più di t ec. perchè non solo bb è minore di dt , ma anche l'angolo bbm deve esser minore dell'angolo dtm , e molto più minore di nIm . Onde in somma il regolo Im descriverà sulla superficie del cono rotante l'accennata spirale. Ma se in vece che il cono volgasi sul piano immobile Syz affetto del regolo Im , s'immaginasse, come pur ora dicevamo, che divenisse mobile il piano, e girasse d'intorno al fermo cono; tanto ancora ne seguirebbe, e nè più, nè meno avrebbe il regolo Im a tracciar sulla superficie di quello la data spirale. Se per fine, prescindendo poi col pensiero da tutta l'area del piano, come se non vi fosse, si figurassimo che non altro, che quella parte bianca, che forma il regolo Im , rotasse intorno al fermo cono; nulladimeno quella traccia, che sulla superficie di esso tiene la parte Im , quando vien mossa unita al suo tutto, è la medesima che terrebbe disgiunta. Con-

ciòfiacchè non perciò il cono resti di non un essere cono , ed il regolo un piano ; condizioni che , come si è detto , sole concorrono ad un tal fatto produrre . E quindi finalmente concludo , che la devoluta *eb* (*Fig. 2. Tav. 6.*) non insistendo esattamente col margine *e* nella periferia del dato circolo generatore *eg*, non è nè meno ordinato l'Istrumento a quei movimenti supposti necessarj alla descrizione della proposta Cicloide .

R I S O L U Z I O N E .

Ora per quanto sembri grave questa obbiezione, pure risolvendola di leggiero, forse avverrà che la presente costruzione acquisti maggior riputazione e chiarezza ; e perciò, oltre che la forma del cilindro *bd* trattiene sufficientemente il regolo *eb* della devoluta nel suo conveniente sito, e che quand' uopo fosse, nè meno mancherebbero altri ripieghi, è poi stato anche un opportuno avvedimento il far sì, che il detto regolo *eb* non toccasse la superficie del tronco cono, se non con un angolo *e*, il quale formando però per il lungo di esso regolo non già un piano, ma una linea, questo non fosse in fatti stato atto a creare l'accennata difficoltà, e rendere almen per questo capo imperfetto l'Istrumento. Alla dichiarazione del quale sia qui posto fine.

ISTROMENTO VII

PER LE OVALI DI CARTESIO APPLICATE
ALLE REFRAZIONI.

ARTICOLO PRIMO.

Descrizione organica di dette Ovali.

PAre in certo modo, che mal si convenga il nome d'Istromento ad un filo, che solo (1) adopera nella descrizione delle Curve proposte; ma io stimo all'opposto, che tanto più le stia bene, quanto n'è più spedito l'uso, e più elatto ne risulta l'effetto. Se dunque si concepisce, che (*Fig. 7. Tav. 8.*) appunto un filo sia con una estremità legato ad un pivolo P fitto nel piano, e quindi condotto verso un altro pivolo F pure fitto nel piano, vi s'avvolga d'intorno, e poi in M, ovvero *m* vada a finire, dove abbia connesso uno stilo mobile così, che mentre tenuto ben teso, e con la mano guidato urta nella porzione di detto filo PF, il filo sul pivolo F sdruciolando, tanto (*Fig. 1, 2, 3*) l'esteriore porzione PMF si aumenti, quanto scema l'interiore FM; lo stilo M tendendo verso B descriverà una Curva AMB di un tal genere, che principalmente abbraccia, oltre le *sezioni coniche*, ed altre Curve, anche le *Ovali Cartesiane*; e di cui al fine del seguente Articolo con due lettere scritte mi a questo proposito dal Chiarissimo P. Ruggiero Boscovich si darà una notizia minuta più, che non contiene il mio Testo. Per altro questa costruzione è tanto semplice, che si può ben credere, che io sia per averne fatte mille prove.

H 2

A R-

(1) Il mio metodo di descrivere codeste Ovali ha questo particolare vantaggio sopra quello del Cartesio, che per il mio basta un semplice filo, dove

che egli adopera nel suo un filo applicato ad un regolo, e però la costruzione risulta più composta.

ARTICOLO SECONDO.

*Per quai modi variando queste Curve diventino
le Ovali Cartesiane.*

ESfendo pertanto (*Fig. 1, 2, 3. Tav. 8.*) semplice il filo in PM, e raddoppiato in MF, la essenziale proprietà della Curva sarà, che condotte dai due fochi P, F a qualunque suo punto M due rette PM, FM, l'aggregato della prima insieme col doppio dell'altra sia eguale ad una lunghezza costante, cioè alla lunghezza del filo. E però presa col compasso detta lunghezza, e fatto centro in P (*Figure suddette*) si descriva il circolo DHC, cui in H occorra la prodotta PM. Ora sarà MH doppia della retta MF; sarà questo caso particolare di un altro più generale, in cui sia FM ad MH in qualunque data ragione; e la periferia CHD sarà la direttrice, sulla quale dal raggio PH vien condotto il punto H. Onde se fosse il circolo infinito, la periferia direttrice diventerebbe una retta, ed avrebbero quì luogo anche le *sezioni coniche*. Ma quantunque il filo non si possa comporre ad una direttrice retta: non ostante anche nel solo supposto della direttrice circolare possono variare queste Curve assaiissimo in due maniere.

Primieramente se, mantenendosi la ragione data da PM ad MF (cioè nel caso nostro di 1 a 2, perchè il filo in PM è semplice, e raddoppiato in MF) si muti la sola posizione del foco F rispetto al foco P, cosicchè accada, che la porzione del filo FM sia ora maggiore della distanza de' fochi PF, la quantità Pm (*Fig. 7. e 1. Tav. 8.*); ora minore la quantità PM (*Fig. 7. e 3.*); ora eguale (*Fig. 7. e 2.*); e nei due primi casi, principalmente quando sia piuttosto piccola la differenza (*Fig. 7.*) di FP ad Fm, ovvero M, verranno descritte bellissime sezioni di un Uovo da me già promesse nel
luo-

luogo delle Concoidi. Nel terzo caso poi, cioè quando (*Fig. 7.*) la porzione FM sia eguale alla porzione FP risulta appunto una *Concoide di base circolare* BMP (*Fig. 2. Tav. 9.*) di cui la base è PXZ; le intercette sono ZB, XM ec. al raggio BZ eguali, ed il polo P è situato nella periferia direttrice, e questa *Concoide* è dal Sig. di Roberual chiamata: *Le Limaçon di M^r Pascual*. Curva soggetta all'Istromento delle Concoidi.

Secondariamente, lasciando ferma la posizione dei fochi F, e P, variano queste curve per lo variar della ragione di PM ad MF; onde potendosi il filo ordinare a molte ragioni, che siano però di numero a numero, si estende la sua operazione anche alle *Ovali di Cartesio*, perchè, confrontando con queste le applicate da lui alla Diottrica e Catottrica, si intende, che, acciò i raggi partiti da un dato punto P vadono ad unirsi nel punto F, dopo la rifrazione nella superficie generata da una Curva che si cerca, non si hà che a raddoppiare tante volte il filo in MF, quanto esprime il numero del seno dato d'incidenza, ed in MP quanto esprime il numero del dato seno di rifrazione. Onde acciò i raggi per esempio dal luminoso punto P diffusi, e dall'aria in una superficie di vetro rifratti, si raccolgano nel punto dato F, la superficie di vetro dovrà esser generata da una Curva, la quale (perchè nel vetro dall'aria il seno d'incidenza al seno di rifrazione è come 3 a 2) allora si descriverà quando, come nella *Fig. 4. T. 8.*, il filo in FMi sarà triplicato, e duplicato in MiP.

Lettera 16. Marzo 1748. scrittami dal Chiariss. P. Ruggiero Boscovich della Compagnia di Gesù in proposito delle *Ovali Cartesiane*.

P R O B L E M A .

Due estremità di un filo (Fig. 1, 2, 3, Tav. 9.) sieno fissate una in P sul piano della carta, e l'altra sullo stilo mobile M, in modo che lo stesso filo più lungo si avvolga intorno allo stesso stilo M e passi fino a un pivoletto pur fissato nella carta in un punto F, intorno a cui si avvolga, tornando allo stilo M. Girato ora lo stilo M in modo, che sempre tenga teso il filo, si cerca la natura della Curva che descriverà.

Il filo in PM sarà semplice, ed in MF raddoppiato. Onde la proprietà essenziale della Curva sarà, che da due fochi P, F menate a qualunque suo punto M due rette, la somma della prima insieme col doppio della seconda sia eguale ad una lunghezza costante, cioè alla lunghezza del filo.

Fatto centro in P coll'apertura della lunghezza del filo sia il circolo DHC, che incontri in D, C la retta menata per PF, e prodotta la PM fino al medesimo circolo in H, dovrà essere MH il doppio di MF. Quindi si vede che questa Curva è un caso particolare di un altro assai più generale, in cui sia FM ad MH in data ragione. Si potrà questo caso generale esprimer anche così: Dato un punto F comunque, e un cerchio DHC qualunque trovar la natura di una Curva tale, che tirata da qualunque suo punto M una retta MF, al dato punto F, e un'altra MH perpendicolare alla periferia del dato circolo, sia la prima alla seconda in data ragione.

In quest'aria si vede subito la relazione, che queste Curve hanno colle sezioni Coniche. Nelle sezioni Coniche vi è una retta direttrice tale, che tirata da qualunque punto della Curva una retta a un fuoco, ed un'altra alla direttrice, sia la prima alla se-

seconda in data ragione, la quale se sia ragione di minore disegualianza si avrà l'Elisse, se di egualianza si avrà la Parabola, se di maggiore disegualianza si avrà l'Iperbola. Sicchè queste Curve differiscono dalle sezioni Coniche col avere per direttrice una periferia circolare in cambio di una retta. Se la direttrice di quelle si avvolge in un circolo, quelle si mutano in queste, e all'opposto se il circolo di queste diviene una retta, queste divengono sezioni Coniche. Anzi di più si vede, che le sezioni Coniche sono un caso particolare di queste Curve più generali. Basta in queste far, che il centro P vada all'infinito, e questo caso particolare dà subito le sezioni Coniche; ed è cosa graziosa il vedere come in questo modo anche l'Elisse è una di queste Curve, la quale buttandosi il circolo in una retta divien Parabola. Se la ragione data sia d'egualianza sarà FM eguale ad MH e però la somma di PM, MF eguale alla Costante PH e la Curva verrà Elisse. Se il circolo diviene una retta, va il centro P all'infinito, e l'Elisse si muta in Parabola. Onde l'Elisse si muta in Parabola, e la Parabola in Elisse anche col solo considerare, che la direttrice divenga retta dall'essere circolare, o si avvolga in circolo dall'esser retta.

Di qui si vede, che il trattare di queste Curve porta assai più che il trattare delle sezioni Coniche, essendovi dentro tutte quelle in un sol caso particolare, e infinite di più. E così ogni Curva è un argomento d'innumerabili ricerche, e si vede quanto è limitata la nostra mente, quanto povera e ceca la nostra Geometria. Cosa poi sarebbe, se per direttrice si pigliasse qualunque altra Curva? Quanto più crescerebbe il numero delle Curve, e quanto più fecondo sarebbe il caso? e se qualunque funzione di MF a qualunque di MH dovesse essere un qualunque rapporto esposto comunque, quanto più in là si andrebbe?

Io qui solo mi restringerò a darne la costruzione geometrica per punti, e a tirar le tangenti. Darò l'equazione

ne caverò alcuni Corollarj, distinguerò alcuni casi, e mostrerò, che in alcuni vengono alcune Curve particolari già cognite.

Si prenda PE a PC nella data ragione, e col centro P coll'apertura PE si faccia un circolo, che incontri la DC in G, E. Da qualunque punto H del circolo DHC pel centro P si tiri una retta indefinita, e un'altra pel punto F. Se questa seconda incontra il circolo GE in qualche punto I, i, si tirino le due rette PI, Pi; indi da F due parallele FM, Fm alle medesime, e se queste incontreranno la HP in M, m, saranno i due punti M, m alla Curva cercata. Imperocchè sarà FM ad MH, come IP a PH, cioè come PE a PC in ragione data, e la stessa è la dimostrazione per m.

E' chiaro, che rispetto al punto H non vi saranno altri punti, che i così determinati, perchè dovendo essere PE a PC, come FM ad MH, come IP a PH, ed essendo PH eguale a PC, sarà PI eguale a PE, e però I nel circolo descritto col raggio PE. Onde se si concepirà girare la PH intorno a P, descrivendo H tutta la circonferenza del circolo, e facendosi sempre la stessa costruzione; i punti M, m descriveranno tutta la Curva cercata senza lasciarne fuori alcun punto. Inoltre non potendo la retta HF incontrar il circolo in più di due punti; per conto del punto H non vi potranno essere più di due intercezioni della retta HP sulla curva. Ma come la stessa retta prodotta divien di nuovo perpendicolare al circolo dalla parte opposta; potranno esservi due altri punti, le perpendicolari de' quali si terminino a quest'altra estremità. Che se la retta HF sarà tangente del circolo GE concorrendo i due punti I, i in un solo; sarà ancora la HP tangente della Curva, la qual cosa potrà accadere quando il punto F non sia dentro al circolo GE, come nelle Figure 2. e 3., e se la retta HF non incontrerà il circolo GE, nella retta HP non vi sarà alcun punto alla Curva per conto del punto H.

Dall'essere i due semicircoli di qua e di là dalla DC affatto eguali e simili, si vede che essa dividerà la Curva

in due parti eguali e simili, e sarà un asse, il quale incontrerà la Curva ne' punti AB, ab dati. Mentre deve essere FB a BC, FA ad AD, Fb a bc, e Fa ad aC, come FE ad FC in ragione data.

Ora in due maniere principalmente si possono variare queste Curve: Prima, mantenendosi la ragion data di PE a PC, e variandosi la posizione del punto F rispetto al circolo GIE, ed essendo or dentro detto circolo, come nella Fig. 1., or nella periferia, come nella seconda, ora fuor del circolo, come nella terza. La seconda variandosi la ragion stessa.

Le prime variazioni sono delineate nelle 3. figure colla ragion di uno a due. Qualunque sia la ragione, nel primo caso sempre la retta HF incontrerà il circolo GIE in due punti. Onde sempre si troveranno due punti M, m. Anzi perchè i due punti I, i giaceranno di qua e di là da F, anche i due M, m giaceranno di qua e di là da P; e però uno de' due, come M verso H, e l'altro come m dalla parte opposta. Quindi la somma di PM e di MH, che alla MF sta in data ragione, sarà eguale alla costante PH, ma delle Pm, mH lo sarà solamente la differenza; o pur anche la somma, se la Pm, che va verso la parte opposta di PM, si consideri, come negativa; giacchè la somma di un negativo porta sottrazione. Quindi nel girare la PH, e il punto H, i punti M, m descrivono due perimetri di Curva, ciascun de' quali, dopo l'intero giro di H, torna a se stesso: ma il solo descritto da M sarà quello, che descriverà lo stilo nel caso proposto.

Solo nel caso che la ragion data sia ragione d'egualità, il punto i va in H, e diventando FM, HP parallele, il punto m va all'infinito, e non vi è più: onde nel caso che la Curva descritta dal punto M diventi Elisse Conica, il ramo compagno descritto dal punto m va in infinito e non vi è più: e nel caso in cui il punto F vada in P, rimane data tanto la ragione di PM ad MH, quanto la ragione di Pm ad mH, giacchè rimangono le EM, Fm eguali alle

PM, Pm. Quindi rimangono date le PM, Pm, e i due rami divengono due circoli: e simili trasformazioni varie vi sono ne' casi seguenti ancora.

Nel secondo caso in cui il punto F cade in E nella circonferenza del secondo circolo, tirate le HP, HF, la seconda incontrerà il circolo in F, e in I generalmente; onde uno dei punti della Curva anderà sempre in P, e vi sarà generalmente un altro M. Se per F si tiri VFu perpendicolare all'asse. Questa sarà tangente del circolo GIE, e però tanto VP, quanto uP saranno tangenti della Curva in P; talmente che girando H da C fino ad V, girerà I per il semicircolo GIE, e il punto M descriverà un mezzo nodo BMP, quindi andando H in h per l'arco VhD, anderà I in i per il semicircolo FIG, e il punto m descriverà l'arco bma, e seguitando h per Du prima, indi per uC, si descriverà il resto aPB, scorrendo l'I il circolo un'altra volta. Così verrà una Curva che segnerà se stessa in P, ed avrà un nodo, descrivendosi il nodo nel giro di H per uCV, e in un'intera rivoluzione di I pel circolo GIE, e il resto nel giro di h per VDu, e in un altro giro di i per lo stesso circolo.

Nel terzo caso tirate per F le due tangenti VZu, Nzn al circolo GIE; tutti i punti H₂ presi nell'arco Vn, che sta nello stesso angolo VF_n, in cui il circolo GIE, serviranno per trovare due punti per ciascuno al ramo A M₂ m₂ aA; tutti i punti presi nel NH i u serviranno per trovare due altri punti per uno al ramo B Mi mi b; giacchè le rette da essi tirate per F sempre urteranno in due punti del circolo GIE. Per l'opposta ragione è manifesto, che i punti degli archi NV, nu non serviranno. Le rette poi PN, Pu toccheranno in qualche luogo in X, e in x il ramo B Mi B, e le rette VP, nP toccheranno in qualche luogo S, s il ramo A M₂ aA; e coll'ajuto de' punti VN, un, e della soluzione generale si troveranno i contatti.

Per

Per trovare cosa accaderà a vertici degli assi AB, ab, basta vedere come i medesimi si determinino. Si trovano A, e B segando FD ed FC in ragione di AE ad AC, sicchè il punto B starà da F verso P, e verso la parte contraria, secondo che il punto F starà fuori del circolo DHC, o dentro, il quale secondo caso mostrano tutte trè le figure. Il punto A starà verso la parte contraria di F rispetto a P, o in P, o verso F, secondo che sarà il punto F dentro al circolo GIE, come nella fig. 1.; o nella sua circonferenza come nella fig. 2.; o fuori come nella fig. 3. Imperocchè essendo FA ad AD, come PE a PD, dovrà il punto A segare la FD in una ragione maggiore, eguale, o minore della ragione di FP a PD, secondo che sarà PE maggiore, eguale, o minore di PF, e però giacere di là da P, in P, o più vicino a F. Pigliandosi a fuori della FD in modo, che sia Fa ad aD in ragione di PE a PC, se sarà PE minore di PC giacerà rispetto ad F dalla parte opposta di P; se sarà PE eguale a PC, andrò a all'infinito; se maggiore, dovrà cadere nella FD prodotta dalla parte di D. Dovendosi pigliare b in modo che stia fuori della FC, e sia Fb a bc nella stessa ragione; il punto b giacerà da F verso P, anderà all'infinito, o caderà di là da C, verso dove ora nella figura cade l'a, secondo che sarà parimente la PE minore, eguale, o maggiore della PC; e nel primo caso espresso dalle figure caderà di là da P rispetto ad F, in P, o verso F, secondo che la ragione di Fb a bC sarà maggiore, eguale, o minore della ragione di FP a PC, cioè secondo che la PE, sarà maggiore di PF, come lo è nel primo caso della fig. 1.; o eguale come nel secondo nella fig. 2.; o minore come nel terzo nella fig. 3.

Quindi nella fig. 1. stando fermi i due circoli, e stando F in P, i due rami sono circoli anch'essi. Camminando F verso E, si muta la loro forma, e i punti bA, si accostano a P, e fra loro; e i punti B, a se ne scostano, e si scostano fra di se; ma B si accosta ad F, ed a se ne scosta. Nell'atto che

il punto F arriva in E si muta la figura prima nella seconda. I punti bA vanno in P; e i due rami formano una curva continua, che si sega, dove quei si attaccano; dovendo a tal fine nella fig. 1. in A crescere la curvità all' infinito prima dell' attacco, e in b rientrare la Curva in dentro con flesso contrario, giacchè amendue non potendo mutare la direzione per salto in A, e in b, devono fare da ambe le parti colla tangente lo stesso angolo, e aver la tangente comune, che essendo perpendicolare all' asse quando erano circoli, si deve esser mantenuta tale; onde in A, e in b deve sempre necessariamente essere la curva perpendicolare all' asse; ma per non finire per salto nella punta b, nel momento in cui già ivi l' arco di un ramo si continua coll' arco dell' altro, onde già fa l' angolo obliquo coll' altro arco suo, deve essere cresciuta la curvità nella fig. 1. nella punta A assotigliata verso b, e nella b assotigliata in dentro verso A per tutti i gradi fino all' attacco, e al rompimento e mutazione di continuazione, che si fa nell' arrivare il punto F in E.

Passando il punto F di là da E fuor del circolo, si stacca di nuovo l' un ramo dall' altro, e la fig. 2. va nella 3., ma il punto b già ha passato l' A, e non appartengono più i punti A, B al ramo istesso quantunque in A si segbi la FD, e in B la FC, come prima, in data ragione di PE a PC. Ma in quell' attacco della fig. 2. si sono cambiati i vertici, essendo passato b nel ramo di B, e A nel ramo di a; come appunto anche le due intersezioni M, m regolate dallo stesso punto H appartengono ambedue allo stesso ramo, dove nella fig. 1. appartenevano uno per ramo. Che se così camminando F arriva in C, si uniscono all' ora i punti FBC insieme, anzi annullandosi l' arco Nu, va in F in un punto tutto il ramo B M i m i b x B. Indi passando F più oltre, rimane ad ogni modo il B fra F, e C, e però F di là da B ancora passandolo, mentre passa C, ed entrando B nello spazio FP, all' opposto a C passa dove prima era B, e ogni punto M verso la parte con-

tra-

traria di prima, capovoltandosi tutto il ramo, nel quale in quel caso rimane ogni Mi , mi fuori del circolo, e le HMi , Hmi negative; onde la differenza di FM , MH viene allora eguale al filo, e non ha luogo la descrizione della Curva coi fili. Vanno di poi crescendo amendue i rami, e coll' andare F all' infinito si perdono anch' essi nell' infinito.

Tornando indietro F verso E nella fig. 3., i punti VN , un si vanno accostando impiccolendosi gli archi inutili VN , un; finchè all' arrivo di F in E si riducono le Vu , Nn alla sola VFu della fig. 2. e rientrando F nel suo circolo nella fig. 1. ogni tangente menata per P svanisce; onde 4. rette menate dal centro P toccano le Curve nel caso terzo, 2. nel caso secondo, e niuna nel primo.

Tenendo ora fermo il punto F vada mutandosi il solo punto E . Se esso nella fig. 3. si unisce a P , amendue i rami vanno in un punto solo in F , perchè annullandosi la ragione di Fm , a MN , e stringendosi l'angolo NFu , e nFV all' infinito, si annulla ogni FM_1 , FM_2 . Camminando E verso C crescono amendue i rami, finchè arrivando E in F si uniscono nella fig. 2. Passando oltre il punto E , si va nella fig. 1., dove accostandosi E verso C , e andando la ragion data verso l' egualità; vanno le rette PA , FB accostandosi all' eguaglianza, e la forma del ramo AMB alla forma di un' elisse. E intanto i punti ab , e tutto il secondo ramo si scostano alle infinito. All' arrivo di E in C , diviene il raggio interiore una vera elisse; svanisce l' esteriore, nè vi è più. Che se il punto E va fuori di là da C , e la ragion diviene di maggiore diseguaglianza, i vertici a , e b mutano le parti andando a di là da D , e b di qua da C , con un capovoltarsi molto ordinario nelle trasformazioni de' luoghi geometrici. Anzi allora ogni punto m va dalla parte di H nella PH prodotta. Andando innanzi E all' infinito, si scemano la MH , e la mH (che già si trova fuor del circolo dalla parte di H) all' infinito; e però amendue i rami si accostano all' infinito

al circolo, in cui vanno a terminare quando il raggio CE diviene infinito.

Ma se queste mutazioni della ragione si facciamo collo scemare il raggio PC, succede lo stesso, cioè nell'accostarfi C ad E va il ramo esteriore in ellipse nell'arrivo di C in E. Indi torna il ramo esteriore dall'infinito, ma capovoltato, e all'arrivo di C in F, va in F anche il B; e scemando sempre più il raggio PC, si scema il ramo AMB, e all'arrivo di C in P vanno in P i punti AB, e tutto il ramo tanto interiore, quanto esteriore; giacchè la ragione di FM ad MH, cioè in quel caso ad MP, e di FM ad mH, cioè ad mP dovrà essere infinita, e però le PM, Pm nulle.

Ora è tempo di dar un'occhiata a una elegantissima maniera di determinar le tangenti. Si faccia l'angolo MFR, o mFr verso H eguale ad FHM, e si tiri per M la retta SMT perpendicolare alla FR, che sarà la tangente, e allo stesso modo mts perpendicolare alla Fr.

Per dimostrar questo metodo, e non intrigar la figura si è cavata parte di essa fig. 1. a fianco a man dritta. Sieno MV due punti infinitamente vicini del perimetro della Curva, e co' centri FP sieno gli archetti VX, VY, che taglieranno la MY incremento della PM andata in PV, e decremento della MH andata in Vh, e la MX decremento della FM andata in FV; e per essere FV ad Vh, come FM ad MH, sarà anche levando proporzionali da proporzionali MX ad MY nella stessa ragione di FM ad MH. Ora gli archetti VX, VY scemando all'infinito, si potranno prendere per linee rette perpendicolari alle rette FM, PM; onde se inoltre si tiri FT perpendicolare alla retta MV prodotta, la quale incontri la PM in R, sarà il quadrilineo FXVT per gli angoli X, e T retti in un circolo, e il quadrilineo RYVT parimente in un circolo per gli angoli T, e Y retti. Quindi saranno i rettangoli FMX, RMY eguali ciascuno a TMV, e però anche fra loro; onde sarà MR ad MF, come MX ad MY, cioè
come

come FM ad MH; e però i triangoli RMF, FMH simili, e l'angolo RFM eguale all'angolo FHM, la qual cosa si verificherà accuratamente, quando i punti V ed M coincidano, e la MT divenga una tangente. La dimostrazione pel punto m è la stessa.

Quindi si vede, che anche non avendo il circolo DHC, ma la sola Curva, e quella ragion data; basta produrre PM in R in modo, che sia MR ad MF in quella ragion data, e tirata FR, menare una perpendicolare alla medesima, che sarà la tangente cercata.

Si vede inoltre, che in tutti que' vertici dell'asse, che non saranno in P, come lo è il vertice della attaccatura Ab della fig. 2.: sempre le tangenti saranno perpendicolari all'asse. Benchè sempre la MR caderà sull'asse; e però la FR coinciderà coll'asse, e converrà che la tangente sia perpendicolare all'asse medesimo. L'unico caso, in cui la dimostrazione generale non cammina è quando il punto M va in P, il che può accadere nella fig. 2.; perchè allora non andando il punto M fuori di P nell'asse, può la PH, e però la FR avere qualunque direzione, e conviene trovar quella, in cui PM svanisce andando M in P, il che accade quando l'H vada in V, o in u, dove anche con questo metodo si troverebbe la tangente, che già si è trovata di sopra essere la stessa PV, Pu; cosa che anche di qua facilmente si ricaverebbe.

Finalmente si noti che, se la ragion data fusse ragion di egualità, sarebbe il triangolo FMR isoscele, e la tangente segarebbe per mezzo l'angolo FMR, come accade nella elisse conica.

Quando la ragione di FM ad MH è di unità a numero, che sia n, come lo è nel caso de' fili; i punti M si trovano più facilmente così. Prese (Fig. 1. Tav. 9.) PC, PD eguali alla lunghezza del filo, divisa la FC, e la FD in parti $n + 1$, si pigliano FB, ed FA verso C, e D eguali ad una
di

di dette parti. Indi divise le stesse in parti $n - 1$, si pigliano Fb, Fa verso le parti opposte eguali a una di esse: così si troveranno i vertici; mentre sarà FB a BC, e FA ad AD, come pure Fb a bC, ed Fa ad aD, come i ad n. Poi presa FO eguale alla lunghezza del filo, e fatto centro in F con qualunque apertura, che stia in mezzo tra la FA, e la FB, si faccia un arco di cerchio verso M, indi la medesima apertura si trasporti da F verso O numero di volte n, finchè si arrivi a qualche punto Q; si prenda OQ, e col centro in P con detta apertura OQ si faccia l'intersezione coll' arco di prima in M, e così si troveranno sempre due punti M di qua, e di là dell'asse molto accuratamente. Lo stesso si farà per li punti m pigliando le aperture Fm medie fra Fb, Fa, e arrivando in q. La dimostrazione è tanto facile che si vede da se.

Passando ora a determinare l'equazione, il metodo è facile. Tirata ML (Fig. 1. Tav. 9.) perpendicolare all'asse si ponga PE = n, PC = m, PF = a, PL = x, LM = y, PM = $\sqrt{xx + yy} = z$. Sarà per la 13. del lib. II. di Euclide. FMq. = FPq + PMq - 2 FP × PL = aa + zz - 2ax. Onde facendo come n. m :: FM = $\sqrt{aa + zz - 2ax}$. MH = $\frac{m}{n} \sqrt{aa + zz - 2ax}$;

si avrà PM + MH = $z + \frac{m}{n} \sqrt{aa + zz - 2ax} = PH = m$. Quindi

di $m - z = \frac{m}{n} \sqrt{aa + zz - 2ax}$, e però $mm - 2mz + zz =$

$\frac{m^2aa}{nn} + \frac{m^2zz}{nn} - \frac{2m^2ax}{nn}$; cioè ripulita questa equazione

$(mm - nn)zz - 2m^2ax + 2n^2mz + mm^2aa - nn^2mm = 0$.

In questa sostituendo per zz il suo valore $xx + yy$, trasportando $2n^2mz$, indi quadrando, e risostituendo per zz il valor suo, viene l'equazione per x, e y, che verrà di quarto grado. Onde si vede, che queste sono Curve di terzo ordine.

Ma intanto giova prima contemplarla alquanto così con z .
 Se sia $m = n$, svanisce $(mm - nn)zz$, e resta il tutto
 divisibile per m , rimanendo solo $-2max + 2nnz + m$
 $(aa - nn) = 0$. D'onde si cava $2mnz = m(nn - aa)$
 $+ 2amx$, e di qui, quadrando viene l'equazione all'elisse,
 dopo di avere sostituito per zz il suo valore $xx + yy$.

Se sarà $a = n$, che è il caso della fig. 2., svanirà l'ul-
 timo termine $mmaa - mnmn$, e si avrà $(mm - nn)$
 $zz - 2mmax + nnmz = 0$. Ora di qui si cava, che que-
 sta Curva è la stessa, che la Concoide, in cui la base sia
 un circolo, e il polo nella circonferenza. Imperocchè sarà

$$(mm - nn)zz = 2mmax - 2nzmz. \text{ Onde } z = \frac{2mmn}{mm - nn}$$

$$\times \frac{x}{z} - \frac{2nmm}{mm - nn}. \text{ Posto questo si pigli } PZ = \frac{2mmn}{mm - nn}, \text{ e si}$$

faccia attorno a un tal diametro un circolo, che dalla PM
 venga incontrato in X . Sarà per l'angolo PXZ retto, PM
 $= z$. $PL = x :: PZ = \frac{2mmn}{mm - nn}$. $PX = \frac{2mmn}{mm - nn} \times \frac{x}{z}$. Onde

$$\text{essendo tutta } PX - XM = PM = z, \text{ sarà } XM = \frac{2nmm}{mm - nn}. \text{ Dun-}$$

que è dato il diametro AZ di un circolo, e da qualunque PX
 levata una XM costante, si trova il punto M , che sarà a una
 concoide circolare, che avrà per base un circolo, e per polo
 un punto nella sua circonferenza. La dimostrazione vale an-
 che per m chiamando $Pm = -z$. Che se essa si chiamasse

$$+z \text{ si avrebbe } mb + bh = z + m = \frac{m}{n} \sqrt{nn + zz - 2nx}, \text{ e}$$

$$\text{però rifacendo il calcolo si troverebbe } z = \frac{2mmn}{mm - nn} \times \frac{x}{z} +$$

$$\frac{2nmm}{mm - nn}; \text{ e posto lo stesso diametro } PZ = \frac{2mmn}{mm - nn}; \text{ si avreb-}$$

be la linea Xm presa in fuori eguale al valor medesimo

$$\frac{2nmm}{mm - nn}$$

K

Da

Da questa riflessione nasce un modo assai più facile per trovare questo nuovo circolo, e descriver la Curva. Trovato il punto B, ed a, come sopra, si segbi la Ba in mezzo in Z, e col diametro PZ si faccia un circolo; indi si giri una riga PMX attorno a P pigliando sempre il punto M da X verso P, e un altro in fuori coll' apertura BZ, e sarà fatto. Si noti solo, che essendo il diametro $PZ = \frac{2mn}{mm-nn}$, e la $ZB = \frac{2nn}{mm-nn}$ sarà anche $PZ.ZB :: m.n$. Inoltre essendo $PB = \frac{2mmn-2nmm}{mm-nn}$, $Pa = \frac{2mmn+2nmm}{mm-nn}$ sarà quella $= \frac{2mn}{m+n}$, e questa $= \frac{2mn}{m-n}$; onde saranno $AB.Aa :: m-n . m+n$, cosa che anche direttamente si mostra con facilità.

Se nella equazione generale $(mm-nn)zz - 2mmaz + 2nmmz + mmaa - mmnn = 0$ divenga $a = 0$, indi $a = m$, a infinito, o se m , o n si mutino dal zero all' infinito; si avranno tutte le vicende, e le trasformazioni vedute di sopra. Dall' equazione $(mm-nn)zz - 2mmaz + annmz + mmaa - mmnn = 0$ generale, si ricavano facilmente i vertici degli assi. Si ponga prima $x = z$, indi $x = -z$, e si avranno i casi ne' quali le AL, AM si eguagliano, cioè in cui il punto M va nell' asse. Si avranno due equazioni $(mm-nn)zz - 2mmaz + 2nmmz + mmaa - mmnn = 0$, ed $(mm-nn)zz + 2mmaz + 2nmmz + mmaa - mmnn = 0$, e dividendo per $mm-nn$ si avrà $zz + \frac{2nmm + 2mma}{mm-nn}z + \frac{mm}{mm-nn}(aa-nn) = 0$; dalle quali si possono ricavare i quattro valori cercati di z , che colla geometria semplice più facilmente si sono ricavati.

Prima di pulire l' equazione generale si avverta, che se si cerchi la curva, in cui dati due numeri hi qualunque interi o rotti, razionali o irrazionali sia $h \times PM + i \times MF$ eguale

le a una costante; dividendo per h si avrà $PM + \frac{i}{h} MF = \frac{e}{h}$. Onde fatto $\frac{i}{h} = \frac{m}{n}$, $\frac{e}{h} = m$, sarà $PM + \frac{m}{n} MF = m$; onde torna lo stesso caso.

Per pulire poi l'equazione dai z , si dica $mm - nn = rr$, $aa - nn = cc$, e in cambio di $(mm - nn)zz - 2mmxz + 2nnmz + mm(aa - nn) = 0$, si avrà $rrzz - 2mmxz + 2nnmz + mmcc = 0$, e trasponendo $2nnmz$, si avrà $rrzz - 2mmxz + mmcc = -2nnmz$, e però quadrando.

$r^4z^4 - 4r^2m^2axz^2 + 2m^2r^2c^2z^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4c^2ax + m^4c^4 = 4n^4m^2z^2$, e quindi trasponendo $r^4z^4 - 4r^2m^2axz^2 + (2m^2c^2r^2 - 4n^4m^2)z^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4c^2ax + m^4c^4 = 0$. Si faccia $2m^2c^2r^2 - 4n^4m^2 = t^6$, e verrà $r^4z^4 - 4r^2m^2axz^2 + t^6z^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4c^2ax + m^4c^4 = 0$. Sostituendo ora $x^2 + y^2$ per z^2 , si avrà $r^4x^4 + 2r^4x^2y^2 + r^4y^4 - 4m^2r^2ax^3 - 4m^2r^2axy^2 + t^6x^2 + t^6y^2 + 4m^4a^2x^2 - 4m^4a^2cx + m^4c^4 = 0$, e dividendo per r^4 verrà finalmente l'equazione pulita come segue: $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - \frac{4m^2a}{r^2}x^3 - \frac{4m^2a}{r^2}xy^2 + \frac{t^6}{r^4}x^2 + \frac{t^6}{r^4}y^2 + \frac{4m^4a^2}{r^4}x^2 - \frac{4m^4c^2a}{r^4}x + \frac{m^4c^4}{r^4} = 0$.

Da questa col fare $y = 0$ si troverebbero i vertici degli assi in un'equazione di quarto grado, che sarebbe divisibile in quattro di primo. Da questa le tangenti; cose che si sono trovate più facilmente colla Geometria. Da questa finalmente i flessi contrarj, e tutto quello che appartiene alla Curva. Ma basta sin qui di questa ricerca.

Aggiunta fulla molteplicità de' casi.

Se si cerca il numero di tutti i casi principali di queste Curve quando il PC non va all'infinito, essi sono 35, che si riducono propriamente a 29 per la totale coincidenza di 6

con altri tre; e per vedere queste variazioni, vi vorrebbero almeno 29 figure diverse.

Non considerato ancora il punto F, e stando fermo C, può il punto E stare primo in P; secondo tra P e C; terzo in C; quarto dopo C; quinto all'infinito. Intanto il punto F può stare primo in P; secondo tra P ed E; terzo tra E e C; quarto in E; quinto in C; sesto dopo C; settimo all'infinito. Questi sono sette casi per ogni caso delli primi cinque, onde sarebbero 35. Ma nel primo caso di E, i primi tre di F sono gl'istessi, trovandosi in esso sempre F in P. Nel terzo caso di E, il terzo, quarto, quinto di F sono gli stessi, trovandosi in essi F in C; nel quinto caso di E gli ultimi tre casi di F sono gl'istessi, trovandosi in essi F sempre all'infinito. Così rimangono 6 di meno, e però 29.

Se va all'infinito P, e non C, vi sono tutti i casi delle sezioni coniche. Se va all'infinito C, e non P, vi sono tre casi di E, che può essere in P, in una distanza finita, e all'infinito. Per questi tre casi, vi sono nel primo: tre di F in P, in una distanza finita, e all'infinito; nel secondo cinque, cioè in P, prima di E, in E, dopo E, all'infinito; nel terzo caso tre, cioè in P, in una distanza finita, all'infinito. E però altri 11.

Se C stia in P, vi sono altri tre casi di E, cioè in P, in una distanza finita, all'infinito. E per essi altri 11 di F.

Dunque tutti i casi insieme si riducono a $29 + 11 + 11 = 51$. Oltre a tutti quelli che appartengono alle sezioni coniche riportate alla direttrice.

Ognuno di questi casi ha qualche cosa di notevole, e in tutti vi sono delle suddivisioni d' innumerabili casi nati dai particolari rapporti delle tre linee PF, PE, PC, non contenendosi negli esposti, che il solo eccedersi, annullarsi, infinitarsi, senza considerare le infinite diverse ragioni nel caso degli eccessi finiti.

Altra Lettera 27. Aprile 1748. scrittami dal Medesimo
sullo stesso soggetto.

Giacchè quelle quattro bagatelle, che io le scrissi intorno alla Curva da Lei propostami considerata nella sua generalità, hanno avuto dell'incontro presso V. S. Ill^{ma} non voglio lasciare di avanzarle un'altra notizia intorno alle medesime. Benchè le mie occupazioni non mi permettono questa volta di diffondermi più in lungo, nè di far altro che accennarla. Quella contiene tutte le curve considerate dal Cartesio nella sua Geometria sul fine del lib. 2., per le refrazioni, e la costruzione delle quali il Newton generalmence abbraccia nella proposizione 97. del libro primo de' suoi principj, e delle quali parla nel Corollario primo. Anzi la costruzione generale del Newton coincide a dirittura colla nozion generale della Curva, che ho data, e si può facilmente ridurre a quella costruzione, che ho messa immediatamente avanti all'equazione.

Il Newton trova (Fig. 5. Tav. 8.) che acciò i raggi partiti dal punto A vadano ad unirsi nel punto B dopo la refrazione nella superficie generata da una Curva CDE, che si cerca, si può prendere il punto C ad arbitrio, indi presa pure CN verso B ad arbitrio, e CM, che deve essere incremento della AC a CN decremento della BC nella ragion data del seno d'incidenza al seno di refrazione, co' centri A e B, cogli intervalli AM, BN si determinerà il punto D, che sarà alla Curva cercata.

Ora se si prende CH verso B, e CB nella stessa ragion data, e col centro A coll'apertura AH si faccia un circolo HI, che incontri in D la AD prodotta, sarà ancora BD a DI in ragion data, cioè in quella di BC a BH, o del seno di refrazione al seno d'incidenza. Giacchè essendo BC a CH, e CN a CM in detta ragione, col togliere proporzionali resterà
anche

anche BN ad MH nella stessa ragione. Onde essendo BD eguale a BN, e per le AH, AI, ed AM, AD eguali, anche la DI eguale a MH. Sarà nella stessa ragion data anche BD a DI.

Sicchè Ella qui vede, che rimangon i punti A, C, B, D, H, I di questa figura gli stessi, che nella fig. 3. Tav. 9. delle trasmesse a Lei nella mia ultima lettera i punti P, b, F, mi, C, Hi. Vede inoltre che ogni volta che il seno d'incidenza al seno di refrazione starà come numero a numero, si potrà la Curva descriver co' fili. Così nel vetro dall'aria il seno d'incidenza al seno di refrazione, è come 3 a 2. Se una estremità del filo (1) si ferma in F (Fig. 4. T. 8.), indi si piega presso allo stilo Mi, e poi si avvolge d'intorno ad un pivolo P, quindi vada in V, e poi si avvolga d'intorno al pivolo F, e poi finalmente coll'altra estremità vada a metter capo in Mi, con lo stilo M si descriverà la Curva Mb cercata.

Perchè si vede chiaro, che posta $PMi = z$, $MiF = u$, tutto il filo $= a$, sarà $2z + 3u = a$; e però $2dz + 3du = 0$, onde $2dz = -3du$; e $dz. - du :: 3. 2$. Onde (Fig. 5.) essendo nata la CM da tutti i dz incrementi della AD (che è PM della fig. 4.), e CN da tutti i $- du$ decrementi della BD (che è MF fig. 4.) sarà ancora (Fig. 5.) $CM. CH :: 3. 2$, come il seno d'incidenza al seno dell'angolo rifratto.

Generalmente basterà fare, che il filo in MF sia radoppiato tante volte, quanto esprime il numero del seno d'incidenza, e in MP quanto esprime il numero del seno di refrazione, e sempre si avrà la Curva cercata.

Qui non si vede, che uso abbiano le altre Curve della costruzione generale, che le mandai; ma basterà accennare questo solo, che si avranno in esse tutti i casi, ne quali i raggi
porta-

(1) Si avverte, che questa tale disposizione di filo (Fig. 4. T. 8.) non è del P. Bosovich, ma è quella medesima, che propongo io nel mio testo, e

che non per altrò ho qui sostituita alla sua, se non perchè parmi, che il filo ordinato così riesca più agile, e libero a muoversi.

portati con direzioni, che passano per un punto, o sia che da quello partano, o che a quello vadano, urtando in una superficie generata dalla rivoluzione di una Curva intorno a un asse, e ivi o passando oltre, o tornando indietro, ma in modo che il seno dell'angolo d'incidenza al seno dell'angolo refratto, e dell'angolo di riflessione sia in data ragione, debbano avere direzioni che passano per un punto, o andando verso quello, o fuggendone. Ed ogni volta che la normale segnerà l'angolo, che le rette PM, MF delle Figure 1. 2. 3. T. 9. della mia ultima formano verso la PF, e che è l'interno del triangolo PMF, sempre si avrà il caso della riflessione; quando poi detto angolo sarà segato dalla tangente, si avrà il caso della refrazione. Benchè il caso di una riflessione fatta con quella legge non esiste in natura; essendo nella riflessione della luce il seno dell'incidenza eguale al seno di riflessione, e negli altri corpi non perfettamente elastici, le tangenti di detti angoli sono in data ragione, e non i seni.

ARTICOLO TERZO.

Altre Ovali descritte col filo in altra maniera.

Quanto più fuori delle menti degli uomini fu la descrizione organica di Curve, che rassomigliassero ad una fezione d'uovo, altrettanto crebbe in me la voglia di recarvele, suggerendo nuove vie, onde detta descrizione si conseguisca. Mettendo adunque soltanto (Fig. 8. Tav. 8.) un altro pivolo E per dirittura a quelli già messi in P, ed F, secondo la situazione che fortisce rispetto a quelli, nascono nuove Curve. E quando la distanza EF sia eguale ad una quinta parte incirca della distanza FP, ed il filo fisso in P movendosi, sdrucchioli d'intorno ai due pivoli F ed E, vengono dallo stilo M, ovvero *m* descritte altre Ovali, purchè la porzione FM non eguagli la porzione FP,

o la porzione FE due volte presa ; perchè nel primo caso la Curva fa un angolo curvilineo in P, e nel secondo in F. Per altro quante mai Curve risultino dalla situazione dei detti tre pivoli fitti nel piano l'uno per dritto all' altro , l'asse loro generalmente è (se la porzione FM è eguale, o minore di FP) è dico l'asse $= ME + \frac{ME + 2EF}{3}$, cioè (*Fig. 9.*) $= AE + EB$. Se poi la porzione Fm è maggiore della porzione FP (*Fig. 8.*) l'asse sarà $= \frac{mP}{3} + PE + \frac{mE + 2EF}{3}$.

Espressione, che per addattare la Curva alla data lunghezza della tavola, o cornici, a' Meccanici batterà, giacchè non farebbe poi facile definire senza calcolo anche la massima larghezza.

Ma se il pivolo E dall' uno o dall' altro pivolo F, o P recedendo, all' uno o all' altro si accostasse tanto, che venisse ad essere tutt' uno, questo caso tornarebbe lo stesso della *Fig. 1., 2., e 3.*

Se poi disposti i fochi per dritto, come nella 8., ed il filo composto come nella 6., e lo stile posto in M, si concepisce il pivolo E accostarsi, e coincidere nell' uno o nell' altro pivolo P, ovvero F; allora verrebbe certo il caso della *Fig. 1., 2., 3.*; ma la ragione di HM ad MF, che ivi era come 2 ad 1, seguirebbe qui (*Fig. 6.*) come 3 ad 1, e nientedimeno si avrebbero sezioni belle di vovo.

Ma se finalmente i pivoli non più si mettessero per dritto, ma tra essi un qualsiasi angolo costituissero, nessun altro più fecondo soggetto potrebbe immaginare in questa materia, ma non voglio più inoltrarmi in tali ricerche, che troppo longi mi condurrebbero. E basti per ora aver indicato di quanti preclarissimi usi sia capace un semplice filo.

ISTROMENTO VIII.

PER LA DESCRIZIONE DI UNA CURVA INCOGNITA.

Benchè essendo l'equazione (1) di questa Curva (inutile forse così come incognita) troppo alta e composta, avrei potuto dispensarmi di descriverla organicamente, l'ho nonostante descritta; sì perchè somministra Curve somiglianti a sezioni di frutta, o a foglie d'erbe, d'alberi, e fiori, le quali diedero occasione a questa mia bagatella, sì perchè l'immortale Nevvton a ciò fare m'induce con queste precise parole (2): *Æquationis simplicitas non est, sed descriptionis facilitas, quæ lineam ad constructiones problematum prius admittendam esse indicat; nam æquatio ad parabolam simplicior est, quam æquatio ad circulum, & tamen circulus ob simpliciozem descriptionem prius admittitur.* Laonde per esser facile la descrizione così per punti, che organica di questa Curva, vengono per lo meno avvertiti i Filosofi, ch'essa non è affatto indegna delle loro applicazioni. E però principiarò dalla sua descrizione per punti.

ARTICOLO PRIMO.

Descrizione di detta Curva per punti.

Condotti pertanto (Fig. 1. 2. 3. Tav. 10.) dal centro C alla periferia i raggi CV, C₁, C₂ ec. equidistanti; e
L poi

(1) Presi (Fig. 2. o piuttosto 8., Tav. 10.) due archi eguali VD, GB, si conduca il raggio CB; e la BP, DI normali ad MV. Poichè per la costruzione l'angolo VCD = all'angolo GCB; farà anche l'angolo DCG = BCM; e però CI seno dell'angolo DCG = BP seno dell'angolo BCM. Ciò posto sia

il raggio CV = a, ed abbassata dal punto Q della Curva la QH normale a CV, si chiami CH = x. HQ = y. E seguendo l'operazione risulterà questa equazione $y = \frac{+ \sqrt{x^3 - 2axx + aax}}{2a - x}$.

(2) *Arith. univers.* pag. 286.

poi dal vertice V altrettante rette VG, V_1, V_2 ec. che comprendano alla periferia archi eguali a quelli de' raggi, la linea, che scorrerà per i punti d'intersezione delle rette CV con VG ; C_1 con V_1 ; C_2 con V_2 ec. farà la incognita Curva proposta.

ARTICOLO SECONDO

Descrizione organica di detta Curva.

SI concepisca (*Fig. 4.*) stare fisso ed immobile al piano orizzontale per mezzo di due viti introdotte nei forami A, B un anello pur orizzontale ABD , nella di cui costa, o margine interiore abbiassi a muovere in cerchio un altro anello $Vndm$ diviso per diametro da una fessura nm , e nella solidità della sua circonferenza scolpito di una scanellatura circolare, in cui si muova il prisma della *fig. 6.* coll' annesso uncino d , qual prisma si fermi per di sotto con una vite in qualunque dato punto di detta circonferenza; cosicchè l'anello interiore, il prisma, l'uncino costituiscano, per dir così, un medesimo pezzo. Un regolo poi VD quindi riceva nella fessura, onde pel lungo è aperto, riceva, dico, l'uncino d connesso al prisma suddetto, e quindi in un buco V un altro uncino zV afferrato all'anello esteriore ABD . Dove poi le fessure nm, VD s'intersecano in S , trapassa giù, e giunge nel piano della carta uno stilo S congiunto ad una guida scorrente pel lungo del fesso regolo VD , onde si descrive la proposta Curva.

Perchè la sola fessura nm fa per tutti i raggi (*Fig. 1, 2, e 3.*) CV, C_1, C_2 , ec. e la fessura VD per tutte le rette VG, V_1, V_2 ec. E la *fig. 5.* rappresenta per la sezione eb la grossezza, e forma dell'anello esteriore ABD della *fig. 4.* fermato al piano con la vite N , che nella *fig. 4.* andrebbe posta nei forami A, B . Per ca s'indica la grossezza, e forma

forma dell'anello interiore $Vndm$; e per il bianco interposto s'intende il vuoto spazio, in cui deesi introdurre il prisma coll'uncino d della *fig. 6.* che per di sotto si ferma con l'opportuna vite C .

Ora per la piena intelligenza, e prova di questa costruzione, si concepisca l'Istromento essere per esempio ordinato alla *fig. 2.* nella quale è da considerare: Primo, che il raggio CV , e la retta VG sono le prime linee, le quali intersecantesi in V formano il principio, e vertice della Curva nel punto V , e rappresentano l'Istromento nella situazione dovutagli prima di esser mosso, cioè significano la situazione rispettiva della fessura nm (*Fig. 4.*) col regolo VD . Secondariamente, che il punto G è discosto una quarta di cerchio dal punto V , ed n alla prima coinciderà in V , e d in G . Terzo, quanto sarà per essere l'arco Vn percorso dal raggio Cn da V verso G , altrettanto dovrà esser l'arco Gd percorso dalla retta Vd da G verso M .

Alle quali cose riguardando si farà (*Fig. 4.*) primieramente che l'uncino d col prisma annesso sia fermato con la vite per di sotto, come prima sia condotto lontano da n una quarta di cerchio; onde avverrà che nella primiera situazione dell'Istromento la fessura Cn coinciderà con CV supposto immobile; il punto d col punto G ; il regolo Vd starà come corda dell'arco nd , e lo stilo S coinciderà ne' punti V , ed n pure coincidenti.

Dopo questa disposizione fatto muovere a destra l'anello interiore ndm intorno al centro C , perchè i punti n , e d sono fissi in un medesimo anello, quanto sarà recesso n dal punto V , altrettanto il punto d sarà rimosso dal punto G , e però l'arco Vn dal raggio cn percorso sarà eguale all'arco Gd percorso dal regolo Vd ; e trattanto dallo stilo S , che scorre insieme colla sua guida lungo detto regolo VD , verrà descritta sul piano della carta la Curva della *Fig. 2.* Onde si raccoglie, che tutte le Curve generate dal movi-

mento di questo Istromento mutano faccia, secondo che l'uncino d è situato più o meno lontano dal punto estremo n della fessura mn . E la simetria loro partecipa dell'una delle tre Curve, che le *figure* 1, 2, e 3 rappresentano. Cosicchè secondo che l'arco nd del circolo interiore sarà eguale all'arco VG della *fig.* 1, 2, 3, o qualunque altra; o la prima, o la seconda, o la terza, o qualunque altra ne verrà.

Si potrebbe ancora coll'uso di alcune molli, o ruote dentate, o altro argomento eccitare nello stilo S certi tremiti regolari, delle quali partecipando la Curva venisse a produrre un parametro rotto, o compartito in spesse, e ben ordinate punte, quali elegantemente spiccano nella *fig.* 7. e 9. Benchè è d'avvertire, che in ogni modo tutte queste Curve faranno per ragione inseparabile del meccanismo difettive sempre de' primi punti nel vertice V . Ma che vo io ricercando queste piccole cose, se più rara e bella materia nel seguente ragionamento mi si prepara innanzi?

ISTROMENTO IX.

PER LE CURVE GENERATE DAL MOTO
COMPOSTO DI DUE CIRCOLI.

C I O È

Per la LINEA RETTA, ELISSE, CIRCOLO, FIORI GEOMETRICI, CICLOIDI DI BASE CIRCOLARE, SPIRALI, e particolarmente la SPIRALE D'ARCHIMEDE.

PEr gli usi amplissimi, che porta in fronte questa macchinetta, ho giudicato non disconvenirle il nome di *Penna Geometrica*, e spero che chiunque prenderà in grado di leggere questo scritto, resterà facilmente persuaso, che se gli debba meritamente adattare un simil titolo. Ma affine di dare alla molta materia un certo ordine, l'ho divisa in quattro parti, e distinta ciascuna parte in articoli. La prima delle quali comprenderà la *descrizione per punti* delle proposte linee. La seconda, la *costruzione organica*. La terza, gl'usi dell'Istromento. La quarta, essendo che questo Istromento agisce per il moto composto di due cerchi, conterà gli usi di un Istromento simile nel supposto, che fosse stato concepito come adoperante con tre.

P A R T E P R I M A.

A R T I C O L O U N I C O.

Descrizione per punti delle predette Linee.

IN quella maniera, che per dare ad intendere le stazioni, direzioni, e regressi de' Pianeti Tolomeo s'immaginò, che questi fossero posti nella periferia di un mobile *Epicyclo*, il di cui centro fosse nel medesimo tempo

rapi-

rapito lungo la circonferenza di un altro *primo Mobile*, e quindi nelli spazj del Cielo venissero a tracciare una Curva simile per esempio alla *Fig. 5. Tav. 15.* Così figuriamfi ora, che (*Fig. 2. Tav. 15.*) di due dati cerchj (il primo *no p* ec. chiamato *primo Mobile*, ed un altro *a, 1, 2, 6* chiamato *Epiciclo*) il raggio *na* di detto *Epiciclo* volgasi d'intorno al proprio centro *n* nello stesso tempo, che questo centro *n* dal raggio *cn* del *primo Mobile* sia portato per tutti i punti *n, o, p, q* ec. della circonferenza di detto *primo Mobile*. Perchè quindi verranno dal punto *a* qualunque di detto *Epiciclo* generate delle Curve, che il Celebre P. Abate Guido Grandi, sotto il nome di *Rodonee* generalmente comprende, e specialmente descrive (1) col farle passare per infiniti rami tirati da un medesimo centro, ed eguali ai seni di angoli corrispondenti in data ragione, ad altri angoli formati da detti rami con una posizione costante data. Ma con un esempio, che servirà per tutt'altre Curve, che fossero proposte di questa schiera, produrrò quella *descrizione per punti*, che siccome diede animo all'invenzione del presente Istrumento, così a quello ha grandissimo rapporto. Prima però è da considerare, che tre cause cospirano alla modificazione, o sia generazione di queste tali Curve.

Prima, perchè la lunghezza de' raggi *cn*, ed *na* dei due *Mobili primo*, ed *Epiciclo*, può esser in data ragione diversa.

Seconda, perchè le velocità angolari de' *Mobili* possono parimenti essere in data diversa ragione, che riducesi a tre casi: Primo, perchè la velocità dell'*Epiciclo* può esser maggiore di quella del *primo Mobile*; secondo, perchè può esser minore; terzo, perchè può esser eguale. E qui notate, che sempre che si diran *velocità*, si vogliono intendere *angolari*.

Terza, perchè un *Mobile* può muoversi, o in conseguenza

(1) *Flores Geomet.* Par. I. Definit. 1.

za dell' altro, o in verso contrario. Ora dunque sia data la *descrizione per punti* di una di queste linee proveniente.

1. da due cerchj, de' quali siano i raggi qualunque dati.
2. mobili con velocità date eguali. 3. l'uno dell' altro moventesi in senso contrario.

Onde primo fatto centro in C coll' apertura Cn raggio dato del *primo Mobile* si descriva il circolo nop ec. di detto *primo Mobile*. Così fatto centro in n coll' apertura na raggio del dato *Epiciclo* si descriva detto *Epiciclo* $a, 1, 2, 6$, ed i raggi Cn, na posti siano per dritto in una medesima linea, figurandosi che così stessero prima che fossero posti in moto, e che la Curva abbia a principiare, e a descriversi dal punto a .

2. Le periferie di detti due Mobili si dividano in numero di parti, che sia in ragion data inverfa della velocità. Come se la velocità del *primo Mobile* fosse alla velocità dell' *Epiciclo* come 1 a 2, la periferia del *primo Mobile* si potrebbe comodamente dividere in parti 8, e quella dell' *Epiciclo* in 4. Ma essendo nel nostro caso le velocità date eguali, ciascuna periferia si divida in 8 parti, ed a quelle del *primo Mobile* dal centro c siano condotti i raggi co, cp ec., ed oltre a detta periferia anche prodotti. Poi fatto centro in o , in p ec. con l'apertura na si descrivano cerchj eguali all' *Epiciclo*.

3. Supponendo, che il raggio del *primo Mobile* della primiera situazione cn si muova a sinistra verso o, p ec. e seco porti l' *Epiciclo*, quando il raggio Cn volgendosi sarà pervenuto in co , il raggio na coinciderebbe con oV , se anch' egli non si fosse mosso o verso 3, se i moti fosser dati in conseguenza, o verso b , se i moti, come nel presente caso, dati fossero contrarj. Inoltre perchè, quando il raggio cn è giunto a coincidere con co ha già percorso uno spazio no , così presa col compasso una parte av della periferia dell' *Epiciclo*, da V verso b si segni; e se il
raggio

raggio Cn s'intenda già trascorso due spazj fino a cp ; pre-
 si parimente due spazj $a2$ nella periferia dell' *Epiciclo* da X
 si segnino verso d , e così andate dicendo. Onde i punti
 a, b, d saranno elementi della Curva, e di questa maniera
 si otterranno anche gli altri, e si legaranno poi con una
 linea, che farà la proposta, farà dico un *circolo*, come (1)
 a suo luogo si dimostrerà.

Qui per fine è generalmente da notare, che procedendo
 con questo metodo l'arco Vb dell' *Epiciclo* farà al corris-
 pondente arco no , che si suppone nel medesimo tempo
 percorso dal *primo Mobile* (o sia l'angolo Vob farà all'an-
 golo nCo) in ragion data della velocità; la quale, per es-
 ser qui stata data eguale, così gli angoli Vob, nCo sono
 eguali. Esposta pertanto la *descrizione per punti* si passerà
 all'*organica* nella seguente parte.

P A R T E S E C O N D A .

Della costruzione dell' Istromento.

A R T I C O L O P R I M O .

Piano orizzontale di detta costruzione.

Benchè altri s'immaginarono (2) delle Curve provenien-
 ti dal moto composto di due cerchj applicati l'uno
 all'altro, come sopra s'è detto, nissuno però le ridusse per
 anco alle leggi di meccanica. Laonde questa parte addos-
 sandomi io, si supponga che (*Fig. 1. Tav. 11.*) un *cilindro*
 TQZ stia fermo ed immobile nel centro di un *primo Mo-*
bile $2, 3, 4, 5, 6$, quantunque il raggio Qr (di cui fa le
 veci

(1) Part. 3. Art. 5.

(2) Il P. Castel *Traité 50.^{me} de Ma-*
thématique: Des Espèces des Courbes
Liv. premier des divers Ordres.

veci l'asta MN) di detto *primo Mobile* si volga d'intorno al centro Q, e si supponga un altro cilindro *mr d* stare nel centro *r* di un *Epiciclo* 2, 3, 4; cosicchè movendosi detto cilindro *mr d* in un si muova anche il raggio *rs* dell' *Epiciclo*, che con detto cilindro costituisce un medesimo pezzo.

Inoltre nel punto T della periferia del cilindro TQZ sia fissato un filo, che d'indi condotto al punto *m* della periferia del cilindro *mr d*, ed intorno ad esso prima più volte rivolto, pur finalmente vi si fissi. Dico ormai, che dal rotante raggio Qr del *primo Mobile* per i punti di detto *primo Mobile* 2, 3, 4, 5, 6 portato il centro *r* dell' *Epiciclo*, nel medesimo istante sarà costretto a girare il cilindro *mr d*, in un col raggio *rs* dell' *Epiciclo* d'intorno al proprio centro *r*. Perchè, stando fermi li due centri Q, ed *r* nella già determinata distanza, non può una parte qualunque del filo T*m* piegarfi sulla circonferenza del cilindro TQZ, che altrettanta parte non si spieghi giù dalla circonferenza del cilindro *mr d*; nè spiegar puossi, se il cilindro cedendo all'attrazione del filo, non si volge d'intorno al proprio centro *r*, ed intanto da uno stilo posto nel punto S non venga sul piano della carta delineata una Curva, a modificar la quale le tre suddette cagioni cospirano, che si dovranno da quì innanzi aver ben fissi nella memoria, e che nel seguente articolo si richiameranno alla presente costruzione.

ARTICOLO SECONDO.

Cagioni moderatrici delle Curve soggette a questo Istromento richiamate alla presente costruzione.

TRe sono le cagioni, come già dissi, onde queste Curve pigliar possono nuove sembianze, e talvolta nemmeno parer più desse. Alla prima delle quali si vedrà quanto prima nel piano verticale come l'Istromento si componga, e

M fi

fi determini la lunghezza de' raggi Qr , rS in data ragione.

Per la seconda cagione essendo tre i casi, come si è detto, delle velocità, a tutti tre per ordine si applicherà l'Istromento. Onde primo è da sapere che le velocità (dico sempre angolari) dei *mobili* sono in ragion inversa dei diametri de' cilindri. Il che per render chiaro con un esempio, supponiamo, che il diametro del cilindro $mr d$ sia al diametro del cilindro TQZ , come 1 a 3; e perchè sono le periferie come i diametri, faranno esse ancora nella stessa ragione di 1, a 3. Supponiamo inoltre essere stato il centro r dell'*Epicyclo* trasportato dal raggio Qr del *primo Mobile* sino al numero 3., cioè sino alla terza parte della periferia del *primo Mobile*. Onde il filo Tm avrà acquistata la situazione Z_3 , e nello stesso tempo, essendosi piegato d'intorno al cilindro TQZ , avrà occupata una terza parte di esso, o sia tutto l'arco TZ ; alla quale essendo per supposto eguale l'intiera periferia del cilindro $mr d$, segue indubitatamente, che il cilindro $mr d$ insieme col congiunto raggio rS abbia compita un'intiera revoluzione intorno al proprio centro r , e però due altre rimangono da farsi, mentre una sola ne compie d'intorno al proprio centro Q il raggio Qr , o sia QR del *primo Mobile*. Dunque la velocità dell'*Epicyclo* è alla velocità del *primo Mobile*, come 3 a 1. Dico in ragion inversa del diametro del cilindro $mr d$ al diametro del cilindro TQZ , che era, come 1 a 3. Quì pertanto non resta, che per le date velocità applicare all'Istromento cilindri, che siano in data ragione. Ma per non andare all'infinito l'ho provveduto di soli 12.; il primo de' quali sia di diametro eguale ad una delle parti eguali della figura seconda; il secondo a due; il terzo a tre ec. Cosicchè il diametro del minimo cilindro sarà eguale ad una parte, ed a tutte dodici il diametro del massimo.

Finora però abbiám supposto la velocità dell'*Epicyclo* maggiore di quella del *primo Mobile*; ma per il secondo caso

caso potrebbe darfi ancora minore, e quindi trasmutandofi la situazione dei termini della ragione delle velocità, doverfi trasmutare anche il luogo a' cilindri. I termini della ragione delle velocità furono nell'esempio adotto 3, e 1: vale a dire (poichè le velocità sono in ragione inversa del diametro de' cilindri) il cilindro *mr d*, ed il cilindro TQZ; però se si trasmutasse reciprocamente il luogo de' due cilindri, di maniera che il cilindro *mr d* fosse posto nel centro Q del *primo Mobile*; ed il cilindro TQZ nel centro *r* dell' *Epicyclo*, quindi all'opposto del primo caso, seguirebbe la velocità dell' *Epicyclo* minore di quella del *primo Mobile*.

Potrebbe darfi per fine il terzo caso, cioè la velocità de' *Mobili* eguale; onde bisogna aver presto un altro cilindro eguale ad uno di detti dodici, perchè messo uno nel centro del *primo Mobile*, ed un altro nel centro dell' *Epicyclo* vengono detti *Mobili* determinati appunto ad eguali velocità. Ricordando che in ciascun cilindro sia scolpito il numero delle parti eguali prese nella figura seconda, che esso contiene.

Per la terza ragione (nel supposto che il centro *r* dell' *Epicyclo* sia condotto dal raggio *Qr* del *primo Mobile* secondo l'ordine dei numeri 2, 3, 4, 5, 6.) se il filo toccherà i due cilindri alle parti alterne come *Tm*, chiaro è che l' *Epicyclo* si moverà in conseguenza di detto *primo Mobile*, cioè e l'un, e l'altro *Mobile* si moverà secondo l'ordine dei numeri 2, 3, 4 ec. 2, 3, 4 ec.; ma se il filo toccherà i due cilindri alle medesime parti, come *Td* (stando ancora il supposto predetto, che il raggio *Qr* del *primo Mobile*, si muova secondo l'ordine dei numeri 2, 3, 4, 5, 6) l' *Epicyclo* girerà contro l'ordine de' proprj numeri 4, 3, 2 ec., cioè i moti de' *Mobili*, in questo caso seguiranno l'un dell'altro inverso contrario. Onde si raccoglie, come questa costruzione regge fin' ora assai bene all'azione di tutte

tre le cause producenti le molte trasformazioni di queste illustri Curve, per poter senz' altro passare al *piano verticale* di detto Istrumento.

ARTICOLO TERZO.

Piano verticale del presente Istrumento.

FOrse altrui sembrerà, che confrontando il sopra esposto *piano orizzontale* con questo *verticale*, si abbiano in questo tralasciate troppo più parti, che non doveasi. Conciossiacchè di questo in quello non si riscontrino altro che il filo, i due cilindri, l'asta MN (che sta pel raggio del *primo Mobile*) ed il raggio *rS* dell' *Epiciclo*. Ma anzi io affermo, che operando altrimenti, e quindi diventando la figura troppo confusa e impedita, nè quanto si è spiegato così, spiegato si avrebbe, nè le parti perciò sarebbero state meglio indicate, come forse riusciranno in questo *piano verticale*.

In quella guisa pertanto, che gli Architetti dai fondamenti principiano gli edificj loro, comincerò io (*Fig. 3.*) dal piedestallo d'acciajo AEDX, che come quello, che il rimanente della macchina sostiene, è con due valide viti I, I fermato, e congiunto ad una tavola orizzontale immobile AX. Nel sito poi DE è trapassato per il mezzo da un buco quadrangolare, in cui entra il palicello QG pur d'acciajo indicato con puntini, e che prima passa in un forame rotondo dell' asta MN, indi in un cilindro ZT, ed appresso nel prefato buco DE del piedestallo, a cui stretto per fine da una vite G sta attaccato, ed insieme con detto piedestallo e cilindro ZT, e tavola orizzontale AX rimane affatto immobile; ancorchè d'intorno ad esso ruoti l'asta di metallo MN. Dal piano orizzontale di quest' asta si scorge come (*Fig. 1.*) essa deve avere un buco circolare in Q (che è

è coperto dal cilindro ZT), nel qual appunto riceve il palicello QG della *figura 3*. Poi si fende per il mezzo da Q verso N , e vien cinta da un anello o sia guida nn pur di metallo forata con un buco (che è pur coperto dal cilindri-
no r) rotondo, e verticale all'orizzonte in r , e di due bu-
chi quadrangolari aperta nel fianco nn (*Fig. 4.*), nei quali
introdotta detta asta MN , a quella in qual punto più si
vuole con la vite C si stringe, e ferma.

Il detto palicello (*Fig. 3.*) QG , (che d'ora in poi *Asse
del primo Mobile* chiamaremo) quadrangolare, e dilatato
alquanto è presso Q , acciò vaglia a ritenere sospesa in alto
la suddetta asta MN ; e rotondo seguita dove l'asta MN lo
circonda introdotto nel forame suo orizzontale; ed è qua-
drangolare di nuovo, e più sottile, dove per il cilindro
 ZT , e per DE , fino in G trapassa.

Un altro palicello RP (chiamato *Asse dell' Epiciclo*), en-
tra prima nel buco rotondo orizzontale della guida n (o
sia nn della *figura 1.*), d'indi nel cilindri-
no md , ed in
fine con una vite P si ferma così, che però volger si possa
dentro il buco di detta guida n . Questo parimenti è assai
dilatato presso R , e trapassato da un forame trasversale, in
cui s'introduce il raggio QS al suo stilo o penna S annesso,
e dovunque si vuole con una vite laterale si ferma. Inoltre
detto palicello RP è fornito di un piatello circolare pz
(indicato dalle perpendicolari morte cadenti da questo pia-
no verticale in quello orizzontale per l'area circolare om-
breggiata nn); e poi quadrangolare procede, finchè en-
tra nella guida n dove è rotondo; d'indi quadrangolare
tornato di nuovo per mezzo del cilindri-
no dm fino in P
perviene, ed ivi si stringe con la sua vite P . Due molli
poi dal perito Artefice applicate comunque nel sito (co-
me in *figura 1.*) nn , premano tanto il sottoposto piatello
 pz , che l'asse RP dell' *Epiciclo* a quello annesso non
così di leggieri volger si possa.

Que-

Questa costruzione spedita esser dovrebbe, avvisando che il cilindro TQZ del *primo Mobile* della *figura 1.* sia in questa 3. il cilindro ZT; per il cilindro *mr d* dell' *Epicyclo* in quella, in questa il cilindro *md*; per i centri Q del *primo Mobile*, ed *r* dell' *Epicyclo* in detta *figura 1.*, in questa 3. l'asse QG, e l'asse RP; e per il raggio qualunque Qr del *primo Mobile*, che in quella seco porta il centro *r* dell' *Epicyclo*, in un col cilindro *mr d*, in questa *figura 3.*, ed in quella prima supplisce l'asta MN, quale rotando intorno all'asse QG del *primo Mobile*, seco mena, e sostiene l'asse RP dell' *Epicyclo*, e l'annesso cilindro *md*, e per l'opportuno filo Tm, (che per il movimento di detta asta rotante intorno all'asse QG, altrettanto si avvolge d'intorno al cilindro ZT, quanto si svolge dal cilindro *md*) vien messo in moto anche il raggio QS, che sta per qualunque dato raggio *rS* dell' *Epicyclo* della *figura 1.*, perchè si può sospingere, e respingere pel buco presso R, e con la vite laterale fermare, quando si trova nella data lunghezza.

Ma per non mancare a detta asta MN de' necessarij ajuti, e stabilirla così, che sia costretta a rimanere sempre parallela all'orizzonte, e ad angoli retti degli assi dei *Mobili* QG, RP, con una vite N si connette a quella un forbice V, che si unisce per di sopra con un'altra vite ad un vette VE mobile pur insieme con detta asta MN d'intorno all'asse QG. Mi piacque in oltre metter sopra la tavola AX un altro piano di cartone FS fornito per di sotto di due molle *ee*, *ee* in modo arrendevoli, che nè del tutto resistano, nè cedano troppo alla pressione dello stilo S. Egli è appunto sopra questo piano di cartone FS, che haffi poi a distendere, e fermare la carta, su cui si pensa descrivere la Curva.

Finalmente per non lasciar cosa, che, ad intendere la fabbrica, ed i movimenti di questo Istrumento potesse contri-
bui-

buire, debbo avvertire, che le parti tratteggiate AXGDTZQ formano, dirò così, un sol pezzo, che deve concepirsi permanente in una costante quiete. Le parti Mⁿ NVE, che sono ombreggiate a puntini si vogliono supporre un altro pezzo, che sospinto con la mano muovasi d'intorno all'asse del primo Mobile QG; le altre restanti pur tratteggiate parti QSR *pzd* mP rappresentano parimenti un altro pezzo, che tutto insieme gira nel buco della guida *n* d'intorno alla insieme rotante asse dell'Epicyclo RP; mentre detto asse RP dal riferito pezzo ombreggiato a puntini viene portato per la circonferenza di un cerchio, che è il primo Mobile, e di cui il centro di rotazione è l'asse QG. Finalmente il piano di cartone FS, e le connesse molle *ee*, *ee*, formano un altro pezzo con puntini leggiermente distinto, e che si muove, come si disse, secondo che per alcuna inegualità di esso piano di cartone, accadesse in esso maggiore, o minore lo sfregamento dello stilo S.

ARTICOLO QUARTO.

Disegno Scenografico del presente Istromento.

LA tavola duodecima dimostra così al vivo la forma, e situazione delle parti di questo Istromento, che per essa sola avrebbesi forse potuto dimostrare l'artificio della sua costruzione. Nonostante soffrite, che almen di volo accenni con quale analogia le parti descritte nelli andati piani si riferiscano alle rispettive parti scenografiche di questa figura. La tavola dunque orizzontale AX della *Figura 3, Tav. 11.* è in questo disegno; la tavola *xyOT*; il piano di cartone FS di quella figura, in questa è il piano HCDK; gli assi QG, RP sono qui gli stessi QG, RP; così di quella le parti EV, NM sono le medesime in questa, e dell'altre andate via dicendo così, giacchè troverete che per non in-
gom-

gombrare la figura, si è tralasciato di riportar quì il solo piatello $p\zeta$, e le molle ad esso spettanti; mentre frattanto io preparo detto Istromento a' dati supposti.

Sia però proposto di descrivere una Curva, che provenga
 1. dall'eguaglianza de' raggi dei due *Mobili primo ed Epiciclo*; 2. dalla velocità del *primo Mobile* data a quella dell'*Epiciclo*, come 1 a 3; 3. dai moti de' *Mobili* in contrario verso.

Onde primieramente fermata con la vite laterale la guida n , fermo in appresso anche il raggio dell'*Epiciclo* FS (*Tav.* 12.) qualora la parte di detto raggio presa sul piano da S fino all'incontro della prodotta PR in 2. è eguale alla distanza presa da 2. fino all'incontro della prodotta GQ in 3.; cioè qualora $S, 2 = 2, 3$; ovvero (*Fig. 1. Tav. 11.*) qualora Qr è fatto eguale ad rS . Secondo, allentate le viti G , e P , e fuori tirati gli assi GQ , PR sostituisco ai quai si sieno presenti cilindri il cilindro segnato 3. per l'asse QG del *primo Mobile*, ed il cilindro segnato 1. per l'asse PR dell'*Epiciclo*, e ritorno poi l'Istromento nel primiero suo stato. Terzo avvolto il filo sul cilindro dell'*Epiciclo*, e messa la mano in V muovo l'asta MN all'opposto di chi legge, avvertendo di abbassar con l'altra mano il piano di cartone $HCDK$, finchè del tutto sia teso il filo, e tangente la periferia d'amendue i cilindri alle medesime parti, che rilasciato poi detto piano di cartone, e seguitando a muover l'asta in giro si consegnerà la Curva proposta, quale sarà la 11. della *Tav.* 16. Quando però due ostacoli non s'incontrino, che si accusaranno in questo prossimo Articolo.

ARTICOLO QUINTO.

Risoluzioni delle seguenti obbiezioni.

Avvegnacchè non abbia fatta pruova di questa costruzione, parmi tuttavia, che sia soggetta a due gravissime difficoltà. La prima delle quali è, che forse il filo non si mantenga sempre egualmente teso, ma si raccorci o si stenda non solo per la causa intrinseca della sua incostante flessibilità; ma molto più perchè talvolta (*Fig. 3. Tav. 11.*) per qualche inegualità o contranitenza del piano di cartone FS, dovendo lo stilo S vincere una maggiore o minore resistenza, il filo patisca una diversa tensione. Secondariamente perchè nel supposto dell' Istromento mosso come sopra, quando la punta dello stilo S accaderà che sia, dove in figura appunto è, si combinaranno così ad un medesimo verso la resistenza del piano, e l'azione dello traente filo, che potrà per avventura, muovendosi nella sua guida l'asse RP per la sola resistenza del piano, l'azione del filo ridursi a zero; e perciò molta più parte di filo svolgersi dal cilindro *md*, che non si avvolgerà d'intorno al cilindro ZT.

La seconda difficoltà è, che si possano costruire cilindri tanto esatti, che tutti vengono in ragion data per lo appunto; principalmente perchè a me pare, che il diametro loro debba mancare dalla data ragione di tutta la grossezza del filo: cioè, che volendo per esempio fare, che il diametro di un cilindro sia eguale a cinque parti eguali della *Fig. 2.* non abbia veramente ad esserlo, ma il diametro del cilindro più la grossezza del filo debba esser eguale alle dette cinque parti.

Ora in quanto alla prima obbiezione, per correggere lo specifico rilassamento, e reccorcamento del filo, basta in

fuo luogo sostituire una catenella d'acciajo, o un grosso filo d'ottone simile a quelli, che s'adoprono ne' clavicembali. Ma per ciò che riguarda alla causa estrinseca, cioè per fare, che in qualunque situazione dello stilo *S* mai la resistenza del piano riduca a zero l'azione del filo, si avrà cura, che le molle prementi il piatello *pz* siano assai più valide, che non sono le molle *ee*, *ee* del piano di cartone; conciossiacchè la resistenza (trattane qualche inconsiderabile inegualità del piano) sia cagionata dalla sola forza di dette molle *ee*, *ee*.

Per la seconda obbiezione si osservi nella *Fig. 2.*, che per ciascuna parte eguale è segnata una particola, che significa la grossezza del filo. Onde qualunque volta si prenderanno quante si vogliono di dette parti per riportarle sul diametro de' cilindri da costruirsi, si resterà indietro dal giusto numero una di quelle particole. Ma se a questa necessaria precisione qualunque, la perizia degli Artisti non potesse arrivare, ai cilindri, al filo, o catenella, sostituirò le ruote dentate nel seguente Articolo.

ARTICOLO SESTO.

Ruote dentate sostituite al filo, e cilindri.

Volendo dunque, per agevolare l'esecuzione di questo Istumento in luogo del filo e cilindri, far uso delle ruote dentate, se ne avranno a preparare dodici, il numero dei denti delle quali sia in quella proporzione, che prima furono determinate le periferie, o sia diametri de' cilindri. Onde siccome la serie di quelli era disposta in progression aritmetica; perchè il primo era eguale (*Fig. 2. Tav. 11.*) ad una delle parti eguali di detta *Fig. 2.*; il secondo eguale a due di dette parti; il terzo a tre ec. così la prima ruota, supposto che sia di otto denti, la seconda

da farà di 16., la terza di 24. ec., fino all'ultima, che farà di 96.; oltre un'altra ruota di sopra più, eguale ad una di dette dodici, per servire alle velocità date eguali.

Inoltre, per rapporto anche alla situazione delle ruote, deve esser lo stesso, che se fossero cilindri; perchè la ruota, che farà posta nell'asse QG del *primo Mobile* in luogo del cilindro TZ (*Tav. 13.*) starà quasi afferrata a detto asse, come detto cilindro costantemente immobile; e quella che si metterà nell'asse RP dell' *Epiciclo* in luogo del cilindro md agirà parimenti come se fosse detto cilindro md . E se nell'asse GQ del *primo Mobile* venisse messa una ruota di 24. denti, ed un'altra di 8. nell'asse PR dell' *Epiciclo*, e (fermata la guida v , che porta l'asse RP dell' *Epiciclo* predetto, subito che accostandola all'asse del *primo Mobile*, una ruota giunge ad ingranar con l'altra) si facesse poi muover l'Istrumento, le velocità dei mobili seguirebbero pur anche, come nel caso che fu (1) già addotto de' cilindri: cioè l' *Epiciclo* farebbe tre rivoluzioni, mentre il *primo Mobile* ne compisce una sola; perchè anche nel caso delle ruote le velocità sono in ragione inversa dei numeri dei denti, o vogliam dire delle periferie.

Una cosa sola è però da riflettere nel caso presente delle ruote dentate, che (*Tav. 13.*) quando la ruota dm dell' *Epiciclo* sia immediatamente intralciata colla ruota ZT del *primo Mobile*, i moti dei due mobili seguiranno sempre ad un medesimo verso; e che per causare i moti dei mobili in verso contrario, farà d'uopo frammettere alle due ruote suddette un'altra ruota, numero di denti qualunque, e ferma ad un suo asse a mobile nella sua guida x .

Questo Istrumento delle ruote sta presso di me, e per lo sperimento più volte fatto nella presenza di Personaggi in questa materia, e nelle matematiche versatissimi posso afferire, che riesce a maraviglia, principalmente quando si

mettono in opera due sole ruote, acciò i mobili l'un muovasi in conseguenza dell'altro. Che se si hanno a volgere in senso contrario, e però uso si faccia anche della 3. ruota interposta a quelle, quantunque le Curve, che ne risultano siano leggiadrissime, declinano però tanto o quanto dalla dovuta traccia. Perchè una volta per ciascuna rivoluzione dell'*Epiciclo* ha luogo anche quì la prima obbiezione accennata nell' antecedente Articolo. Conciossiacchè aguzzato l'ingegno e adoprando qualche penetrazione si trova, che quando la resistenza dello stilo incontrata sul piano si accoppia coll'azione delle ruote, lo stilo in vece di obbedire alle ruote, cede al piano resistente, e con esso le ruote pur cedendo, tornano indietro quel minimo spazio, che resta vuoto tra il dente di una ruota, ed il dente di un'altra. E perchè questo spazio è un solo nel caso di due ruote, non produce alcun sensibile divario; ma nel caso di tre, perchè sono due i punti ove si toccano le circonferenze di esse ruote, raddoppiandosi detto spazio, tanto o quanto si dà, come dissi, a conoscere. Pure io credo, che a questo difetto si possa occorrere, o investigando alcuna sorta di denti meglio addattati, o piuttosto applicando sotto alla ruota *a* di mezzo una molla, la quale per ciascun dente che di essa ruota *a* passa, cada in un incastrino di quei tanti, che scolpiti fossero nel piano superiore della guida x , quanti sono i denti di essa ruota *a*; e che perciò non potesse più tornar indietro. Oltre di che si scema questo difetto anche da se più che le ruote sono grandi; perchè così tanto più si diminuisce quel picciolo spazio vuoto, e quindi le Curve molto più si approssimano al vero loro parametro; il numero, e qualità delle quali esamineremo nella seguente Parte.

P A R T E T E R Z A

Degl' usi dell' Istromento,

C I O È

Quante, e quali Linee ad esso appartengono.

A R T I C O L O P R I M O.

Quante siano dette Linee.

NON è mai stato, nè credo sia per essere un Istromento di Linee all'occhio tutte diverse così fecondo, come è questa mia PENNA GEOMETRICA. Perchè (lasciando andare, che con poche parti aggiunte, o detratte potrebbesi adattare a tutte le Concoide, che han per direttrice una retta, un *elisse*, un *circolo*, o qualunque altre Curve da essa descritte; e non meno alle inventate del (1) Sig. di Reaumur, eccettuate quelle che han per base l'*Iperbola*, o *Parabola*; e non contando nè meno le spirali, che realmente ad essa appartengono) quelle sole che produce detta *Penna*, stante nella sua essenziale semplicità montano ad un numero prodigioso di ben quasi 1273.

Ed acciò non paja che si voglia altrui imporre, o spacciare a ventura le cose mal intraprese; veniamo al calcolo; nell'istituzione del quale s'introduranno quelle tre cause moderatrici, che furono enunciate nel (2) principio di questo ragionamento.

Cominciando adunque dalla prima, cioè dalla lunghezza de' raggi dei *Mobili*, che può essere in data ragione, la *Tav.* 16. mostra sei figure, quasi dirò di tre lati, la simetria delle quali non varia appunto per altro, se non perchè (le altre cose stando le medesime) la sola ragione de'

(1) *Memoires de l'Academie.*
An. 1708. p. 197.

(2) Part. I. Artic. Unico.

de' raggi sia mutata. E stante che questa varietà proveniente dalla sola mutazione de' raggi, quasi che in tutte l'altre figure sempre avviene, perciò il numero 6. comincia ad aver luogo nel calcolo.

Ora avuto riguardo alla seconda causa, che era la ragione data delle velocità ridotte a tre casi; perchè per ciascuna Curva adoprano due ruote, o cilindri, che stanno per i termini della data ragione, e da 12. che essi sono, 66. binarj risultano; rigettatine però 21., che come osserveremo (1) nella tavola delle combinazioni, si trovano nella medesima proporzione, restano 45. d'adoperarsi per eccitare la velocità dell' *Epicyclo* maggiore di quella del *primo Mobile*; ai quali altri 45. si hanno da aggiungere per il secondo caso della velocità dell' *Epicyclo* minore di quella del *primo Mobile*, ciò che risulta, come già si disse dalla sola trasmutazione del sito dei termini dei detti binarj; ed un altro binario di eguaglianza si deve aggiungere per il terzo caso delle velocità date eguali; onde sommati rilevano tutti insieme 91. binarj, o siano combinazioni, altro numero per detto calcolo.

Finalmente per la terza causa, che i moti ponno seguire, o in conseguenza, o in senso opposto, entra nel calcolo anche il numero 2.

Moltiplicato pertanto il 6. per 91. viene 546., che altresì moltiplicato per 2. risulta 1092.; che sommato poi con 181. *Cicloidi* di base circolare derivanti, come poi (2) si dirà, dalle combinazioni predette rileva 1273., numero cercato delle Curve spettanti a questo Istrumento, il quale nei seguenti Articoli si comporrà a tenore di quelle leggi di moto, cui dette Curve soggiacciono.

ARTI-

(1) Figura 1. Tav. 18.

(2) Part. III. Artic. 9.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica della Linea retta.

LA prima Linea, che fra gli usi di questo Istromento promisi già fin da principio, fu la *Retta*; e però dico, che (*Fig. 1. Tav. 14.*) se: primo il raggio *cn* del primo Mobile *onQ*, ed il raggio *nd* dell' *Epicyclo rcd* faranno eguali; secondo la velocità di quello a quella di questo, come 1 a 2; terzo i moti in verso contrario; l'ultimo punto *d* del raggio dell' *Epicyclo nd* descriverà la *retta DR*.

Si concepisca perciò, che i due raggi *cn*, *nd* prima di esser messi in moto coincidessero con *co* perpendicolare a *DCR*; e che d'indi il raggio *cn* del primo Mobile si sia mosso d'intorno al proprio centro *c* da *o* verso *n* nel medesimo tempo, che il raggio *nd* dell' *Epicyclo* a quello annesso in *n* abbia girato d'intorno al proprio centro *n* da *c* verso *d*, cioè in verso contrario; cosicchè però l'ultimo punto *d* del raggio *nd* siasi sempre trovato in alcun punto della *retta CR*. L'angolo *cnd* farà sempre stato doppio dell'angolo *ocn*, o sia, che viene lo stesso, la velocità angolare dell' *Epicyclo*, farà doppia di quella del primo Mobile.

Calata però da *n* la *retta ne* perpendicolare a *DR*, e parallela alla *retta oc* perchè insistente alla medesima *retta DR*. Gli angoli alterni *ocn*, *cne* saranno eguali. Ma l'angolo *cnd* è doppio dell'angolo *cne*; perchè essendo per la costruzione i lati *cn*, *nd* eguali, la perpendicolare *ne* divide per metà l'angolo *cnd*. Dunque l'angolo *cnd* è doppio dell'angolo *ocn*. Il che è vero in qualunque punto della *retta DR* si ritrovi il punto *d*. Si può dunque vincendevolmente inferire: se l'angolo *cnd* farà doppio dell'angolo *ocn*, il punto *d*

to d sempre persisterà nella *retta* DR. Ciò che era da dimostrare.

Non altrimenti si dimostrerebbe il punto r dall'altra parte permanere nella *retta* ab , e tutti i punti della periferia dell'*Epiciclo* in *rette* eguali fra se, ed alla somma de' diametri di amendue i *Mobili* primo, ed *Epiciclo*; perchè quando d coincide col punto R, i due raggi cn , nd sono distesi, e s'eguagliano alla *retta* CR, e così dall'altra parte distesi s'eguagliano a CD.

Quindi viene come si abbia a componere l'Istrumento alla descrizione della *Linea retta*; perchè primo si caccierà innanzi, o indietro il raggio dell'*Epiciclo*, e si fermerà poi con la vite, quando (*Fig. 1. Tav. 11.*) farà $Qr = rS$; secondo perchè le circonferenze de' cilindri sono in ragione inversa delle velocità, si collocherà il cilindro segnato 2. nel centro del *primo Mobile*, e l'altro cilindro 1. nel centro dell'*Epiciclo*; terzo prima di muover l'Istrumento si farà, che il filo, o catenella tocchi i due cilindri alle medesime parti, acciò i moti dei mobili ne seguano contrarj.

Se poi l'Istrumento fosse colle ruote dentate; primo come nel caso de' cilindri farà fatto $Qr = rS$; secondo la ruota di 16. denti segnata 2. farà messa nel centro del *primo Mobile*, e la ruota di denti 8. segnata 1. nel centro dell'*Epiciclo*; terzo acciò i moti risultino in parti opposte si metterà tramezzo a dette ruote (*Tav. 13.*) la ruota portata dall'*asse a* nella sua guida α . Onde per l'uno, e l'altro caso nella prima rivoluzione dell'*Epiciclo* (*Fig. 1. Tav. 14.*) lo stilo posto supponiamo in r descriverà la *retta* ab , e nella seconda rivoluzione, non declinando punto dalla primiera traccia, tornerà indietro da b ad a .

ARTICOLO TERZO.

Linea retta proveniente dal moto di un Epiciclo rotante nella concava periferia di un altro cerchio immobile.

UNA leggiadra cosa, e degna in vero che altrui venga a notizia, nasce da quanto si è detto nel precedente Articolo, qual è, che dato il diametro ac (*Fig. 2.*) dell' *Epiciclo* adc sudduplo del diametro ab di un altro cerchio massimo $aDbR$ ruotando detto *Epiciclo* nella concava circonferenza di detto cerchio massimo, come se per descriver una Cicloide ruotasse sopra una *retta*. Un punto qualunque a della periferia di detto *Epiciclo* descrive la *retta* ab , il punto C la *retta* DR ec.

Conciossiacchè, primo il centro n del rotante *Epiciclo* descriverà un circolo no , che fingo essere il *primo Mobile* eguale appunto per la costruzione a detto *Epiciclo*, come nel caso della *Fig. 1.*; secondo poichè essendo le periferie come i diametri, la periferia dell' *Epiciclo* viene ad essere alla periferia del cerchio massimo come 1. a 2.; farà la periferia dell' *Epiciclo* eguale all' arco, o semi-periferia aRb di detto cerchio massimo; onde l' *Epiciclo* partito dal punto a volgendosi in detto cerchio massimo, a detto punto a non arriva, se non dopo aver compite due rivoluzioni, una sopra la semi-periferia concava aRb , e l'altra sopra la restante semi-periferia bDa ; mentre il proprio centro n una sola ne ha finita intorno a c , centro comune del cerchio massimo, ed insieme del finto *primo Mobile* noc . E però la velocità di questo *primo Mobile* immaginario è alla velocità dell' *Epiciclo*, come 1. a 2.: val a dire nella ragion prescritta per la descrizione della *Linea retta* nella *Fig. 1.*; terzo se ben si riflette il moto del supposto *primo Mobile* noc descritto; come dissi, dal centro n del rotante *Epiciclo*,

clo, ed il moto del medesimo *Epicyclo* occorrono inverso contrario. Dunque giacchè quanto era d'uopo alla generazione della *retta* nella *Fig. 1.* in questa seconda *riscontra* per lo appunto, seguita necessariamente che il punto *a* qualunque di detto *Epicyclo* descriva la *retta ab*, ed il punto *C* la *retta DR* ec. Il che era da dimostrarsi.

ARTICOLO QUARTO.

Elisse generata così dal moto composto di due circoli, che dal moto semplice di un Epicyclo rotante nella concava periferia di un altro cerchio immobile.

POichè abbiamo facilmente dimostrato da quai principj riconosca il suo essere la *Linea retta*, mostreremo ora come dai medesimi dipenda anche l'*Elisse*, e che però la descrizione di ciascheduna appartiene egualmente a questa macchinetta. Imperciocchè trasportata parte della *Figura 1.* nella *2.*, e *3.* si dimostra facilmente, che (*Fig. 2. e 3.*) qualunque punto *b*, ovvero *H*, preso dentro o fuori dell'area del rotante *Epicyclo*, descrive un' *Elisse*.

Sia però dal centro *n* dell' *Epicyclo* condotta una *retta nd* che passi per il punto *b*, ovvero *H* preso dentro, o fuori dell' *Epicyclo*, ed un' altra *retta GP* che passi per il centro *C* del primo *Mobile*, e per il punto *d*. Ora io non credo, che sia di bisogno di dimostrare, che il punto *d* descriva la *retta PG*, giacchè quel medesimo argomento, che già valse nella *Fig. 1.*, supplisce qui tanto per il punto *d*, quanto per il punto *a* che descrive la *retta ab*; perchè il punto *d* era costituito come *a*, quando prima coincideva col punto *P*. Ordinati dunque i raggi de' mobili *Cn*, *nd* nella *Fig. 4.*, e *5.* come stanno nella *2.*, e *3.*, dico che detto punto *b*, ovvero *H*, descrive un' *Elisse*, di cui
l'asse

l'asse minore è eguale al doppio della *retta* bd , e l'asse maggiore è eguale al doppio di una *retta* composta di Cn , ed nb , ovvero H .

Descritti pertanto i circoli ApB , IGP per i punti p , ed I da n così distanti, come il punto b , ovvero H , si conduca alla *retta* GP una perpendicolare ACB , che farà l'asse minore, perchè eguale al doppio di bd , e l'asse maggiore farà GP eguale al doppio della *retta* CI composta di Cn , ed $nb = nI$.

Ora per provare, che il punto b , ovvero H si ritrovi nella circonferenza di un *Elisse* (prima dai punti p , ed I tirate alla *retta* GP due altre perpendicolari po , ed Im , che passano per il punto b , ovvero H) dimostrerò una semplicissima, ma essenziale proprietà di detta *Elisse*: cioè che sia $GP : AB :: PC : AC :: Im : bm$.

Imperciocchè essendo simili i triangoli Cpo , $CI m$, farà $IC : Im :: pC : po$. Permutando $IC : pC :: Im : po$; cioè bm , perchè eguale a po . Ma IC eguale a PC , e $pC = AC$; dunque $PC : AC :: Im : bm$. E però la doppia IC , che è GP alla doppia pC , che è $AB :: Im : bm$. Il che era da dimostrarsi. Ma acciocchè niuna parte di questa dimostrazione possa rinvocarsi in dubbio, proverò anche che la *retta* Im sia perpendicolare alla *retta* GP , quantunque passi per il punto b , ovvero H . Perchè l'angolo esterno Cnd è eguale ai due interni insieme nIb , nbl , i quali essendo eguali per essere per la costruzione opposti ad eguali lati nI , nb ; l'angolo Cnd viene ad esser doppio dell'angolo nbl . Ora calata giù la perpendicolare ne , questa dividerà per metà l'angolo Cnd , perchè per la costruzione $Cn = nd$. E però gli angoli alterni enb , nbl saranno eguali. Dunque en , bl parallele, se dunque per la costruzione ne è perpendicolare a GP , alla stessa del pari farà perpendicolare la *retta* Ibm parallela ad ne .

Conseguenze dedotte dai tre precedenti Articoli.

1. Tutti i punti della circonferenza dell' *Epicyclo* (*Fig. 1. 2. 3.*) descrivano delle *rette* eguali, ciascuna fra loro, al diametro del cerchio massimo $aDbR$, ed alla somma dei diametri de' *Mobili primo*, ed *Epicyclo*.

2. Dagl' infiniti punti della periferia del ruotante *Epicyclo* viene in un tratto delineata tutta l' area del cerchio massimo $aDbR$, ed essendo i *Mobili primo*, ed *Epicyclo* eguali le *rette* descritte da detti infiniti punti, tutte s'intersecano nel centro C del cerchio massimo, tagliando l'una l'altra se stesse per metà, e diventando ogni metà raggio di detto cerchio massimo, come nella *Fig. 6.*

3. Queste *rette* dividono il circolo massimo in due volte tanti suddupli archi, quanti sono gli archi dell' *Epicyclo* intercetti fra i punti presi della sua periferia. Perchè (*Fig. 2.*, e *3.*) quando il punto a dell' *Epicyclo* descrive la linea ab , il cerchio massimo vien diviso in due archi eguali aDb , aRb ; quando il punto C di detto *Epicyclo* descrive la linea DR , di nuovo il circolo massimo si divide in due altri eguali archi DaR , DbR . E però ecco l' *Epicyclo* diviso in due archi, ed il massimo in due volte tanti: cioè quattro, e ciò avviene perchè la periferia del circolo massimo è doppio di quello dell' *Epicyclo*. Di più per la medesima ragione l' arco aPR del cerchio massimo contiene la metà del numero de' gradi contenuti nell' arco adC dell' *Epicyclo*, quantunque l' arco aPR sia di grandezza eguale all' arco adC ; e così l' arco aP contiene la metà del numero de' gradi contenuti nell' arco ad , quantunque detti archi siano di grandezza eguali.

4. Tutti i punti presi dentro, o fuori dell' area dell' *Epicyclo*, eccettuato il punto n , centro di detto *Epicyclo*, descrivano delle *Elissi*, che parimenti l'una l'altra s'interseca-

ecano, come nella *Fig. 7.*, ma non mai nel centro *C* comune al *primo Mobile*, ed al cerchio massimo; perchè allora sono *Elissi* trasformate in *linee rette*, e soggette alla seconda Conseguenza.

Ma gli *assi* delle *Elissi*, che chiamo *Esteriori*, perchè descritte dal punto *H* preso fuori dell'area dell'*Epiciclo*, quindi ponno andare all'infinito rimuovendo il punto *H* sempre più da *n*; e quindi terminano in una *retta*, quando detto punto *H* sempre più accostandosi a detto punto *n* (*Fig. 2.*, e *3.*), vada in passando a cadere nel punto *d*. Gli *assi* delle *Elissi Interiori* descritte dal punto *b* preso dentro l'area dell'*Epiciclo* hanno alternativamente i suoi termini, cioè quindi il cerchio, e quindi una *retta*. Perchè quando *b* giunge a coincidere con *d*, la *retta GP* è l'*asse maggiore* massimo possibile, e l'*asse minore* è il minimo possibile, perchè ridotto a zero; quando poi *b* va a cadere nel centro *n* l'*asse maggiore* è il minimo possibile, perchè diventa zero; e l'*asse minore* è il massimo possibile, perchè eguale a tutto il raggio *nd*, ovvero *cn* due volte preso.

ANNO TAZIONE I.

Si può dire che la *retta ab* sia un vero Proteo geometrico; perchè ora è diametro del cerchio massimo, ora mezza Cicloide eguale al diametro due volte preso del suo cerchio generatore, ora un *Elisse* senz' *asse minore*, cosicchè (se mi è permesso scherzare in questa parte) si potrebbe ancor prendere per l'orbita di una Cometa. Imperciocchè quantunque *ab* sia un *Elisse*, di cui l'*asse maggiore ab* non è qualsicchè infinitamente grande, come si suppongono esser quelli dell'orbite delle Comete; l'*asse minore* però è infinitamente piccolo, cioè eguale a zero; e però l'*asse maggiore ab* paragonato almeno al suo minore, cioè a zero, può considerarsi come infinito.

ANNOTAZIONE II.

Seguita ancor che per applicare l'Istrumento alla descrizione dell'*Elisse*, basta comporlo come si è fatto per la *linea retta*, avvertendo solamente, che i raggi dei mobili non siano eguali.

ANNOTAZIONE III.

Si possono descrivere anche delle *Elissi*, di cui gli *assi* siano dati, e quindi secondo la loro distanza relativa descriver tutte le orbite de' Pianeti, o Comete, data che sia la ragione de' loro *assi*. Conciossiacchè (*Fig. 4. Tav. 15.*) dati essendo gli *assi* maggiore *ab*, e minore *ed*; dove s'intersecano nel punto C fatto centro con l'apertura *Ce* si descriva il circolo *edf*; indi divisa per metà la differenza *fa* dei due *semi-assi* in *n*; *Cn* farà il raggio del *primo Mobile noz*; *na* il raggio dell'*Epiciclo aqf*; a tenore dei quai raggi si avrà a regolare l'Istrumento. Ma perchè potrebbe avvenire che i diametri delle ruote, o cilindri impedissero di poter precisamente aggiustar detto Istrumento al raggio *Cn* del *primo Mobile*; se non altro si potrà conseguir un'*Elisse*, se non precisamente quella *abed*, almeno una simile, cioè nella medesima proporzione dei detti dati *assi*: Come *Cn* ad *na*:: così l'altro raggio del *primo Mobile* determinato dei diametri dalle ruote, o cilindri; al quarto termine che si cerca, e che farà il raggio dell'*Epiciclo*. Onde ordinando l'Istrumento a questi due ultimi termini, verrà un'*Elisse* a quella della *Fig. 4.* simile, o proporzionale.

ANNOTAZIONE IV.

Dalla passata Teoria facilmente si prova ancora la costru-

struzione di un altro Istromento assai noto sotto il nome di *Compasso ellittico*, e si scorge che manca di tutte le *Elissi interne* comprese tra i due ultimi confini *circolo*, e *linea retta*. Questo per altro gentilissimo Istromento consiste (*Fig. 8. Tav. 14.*) in una lamina circolare *aDbR* scavata ad angoli retti di due canalini *ab*, *DR*, che ai lati più si allargano più che s'affondano; nei quali scorrono due prismi di simil forma, costrutti ciascuno con un pivolo *d*, ed *r*, quali pivoli entrano nei buchi di un'asta *ZQ* fornita di una guida annessa ad uno stilo *H*. Messa però quest'asta in moto, dal pivolo *r* viene determinata nella direzione *ab*, e nel medesimo tempo dal pivolo *d* nella direzione *DR*. E intanto avviene, che per questo moto implicato lo stilo *H* descriva sul piano della carta un' *Elisse*.

Imperciocchè diviso per metà lo spazio *rd* in *n*, ed in detto *n* fatto centro coll'apertura *nr*, si descriva il circolo *rCd*, che stia per un supposto *Epiciclo*, quale in qualunque posizione dell'asta *ZQ* passerà per il punto *C* d'intersezione dei due canalini; perchè per la costruzione l'ipotenusa *rd* non può mutarsi, e l'angolo *rCd* alla periferia è sempre retto. Ora fatto centro ancora in *C*, colla medesima apertura di sopra, si descriva un altro cerchio, che rappresenti il *primo Mobile*. Ormai qui spicca la *Fig. 1.* per appunto, quale, senza che io entri in molte più parole, somministra la dimostrazione da se. Ma perchè (*Fig. 8.*) tutta l'area dell'*Epiciclo rCd* cade dentro il margine della lamina orizzontale *aDbR*; perciò lo stilo *H* impedito da detta lamina, non può esser condotto fin nell'area di detto *Epiciclo*. E per questo l'Istromento può descriver le sole *Elissi esterne*, ma non già l'*interne*, come la mia *Penna geometrica* e l'une, e l'altre descrive.

ARTICOLO QUINTO.

Descrizione organica del Circolo.

ENnunciando io fra gli usi di questo Istromento la descrizione del *circolo*, ciascuno che sia provveduto non che di un eletto, ma del più vil compasso non potrà federe le rifa, e acchettarsi, se prima non sa che io intendo di un *circolo* risultante dal moto composto di due circoli. Laonde se (*Fig. 2. Tav. 15.*) saran dati: primo i raggi *Cn* del *primo Mobile*, ed *na* dell' *Epiciclo* in qualunque ragione; secondo mobili con eguali velocità; terzo in verso contrario. Dico che il punto *a* descrivera un *circolo* eguale al *primo Mobile*.

Ma ritorniamoci prima in memoria quanto si è detto di questa *Fig. 2.*, quando nella prima parte di questo ragionamento servi per esempio della descrizione organica. Cioè che i raggi *Cn*, *na* posti fossero per dritto, immaginando che così stassero prima di esser mossi, e che mossi poi il raggio *Cn* a sinistra, e a destra il raggio *na* accadeva, che per le velocità date eguali, l'arco *Vb* percorso dal raggio *ob* dell' *Epiciclo* era simile all'arco *no* percorso nel medesimo tempo dal raggio *Co* del *primo Mobile* *no p* ec. Cioè l'angolo *Vob* era eguale all'angolo *oCn*. Onde seguita che il raggio *ob* dell' *Epiciclo*, in qualunque punto *o* della periferia *no p* del *primo Mobile* si ritrovi, sia alla retta *Cn*, ed anche a se stesso *na* mai sempre parallelo. Perchè *bo*, *anC* formano un angolo eguale alla medesima retta *CoV*. Ciò posto, farà *ob*, *qe*; *na*, *Kf*; *tm*, *rg*; *pd*, *Sb* sempre a se stesso eguale. Perchè poi è anche a se stesso parallelo farà *bo + oe = oe + eq*; *an + nf = nf + fK*; *mt + tg = tg + gr*, e finalmente perchè *pd*, *Sb* sono parallele, ed eguali farà anche *pS = db*. Voglio dire
che

che le ordinate al *primo Mobile nop* ec. sono egualmente distanti, ed eguali a quelle della Curva descritta, la quale farà un *circolo*, giacchè anche il *primo Mobile* è un *circolo*. Quindi i punti *abd* ec. si ritrovaranno, dissi, nella periferia di un *circolo* eguale al *primo Mobile nop* ec. E perchè vale questa dimostrazione, qualunque sia la ragione di *Cn* ad *na*, la proposizione si verifica in tutte le sue parti.

Ora quantunque abbia per fermo, che si sappia ormai applicare l'Istromento non solo alla descrizione del presente *circolo*, ma eziandio di qualunque altra Curva, di cui siano note le tre cause moderatrici; non ostante anche per questa volta pigliando io questa parte, dico che primo li raggi *Qr*, *rS* (*Fig. 1. Tav. 11.*) ponno essere in qualunque ragione; secondo i due cilindri, o ruote dentate debbono essere eguali; terzo nel caso dell'Istromento col filo, il filo toccherà i cilindri alle medesime parti; nel caso delle ruote, si dovranno separare le due ruote dei *mobili* con la roticella intermedia. E tanto basti di questo, perchè i *Fiori Geometrici* porgano più bella occasione di ragionare nel seguente

ARTICOLO SESTO.

Descrizione organica dei Fiori Geometrici.

IO stimarei che la *Penna* delineatrice di questi *Fiori* dovesse star solamente nelle mani di preclare, e dotte Donne; come quelle che non si curano de' frali, e caduchi, ma vogliono essere *ben d'altro ornate, che di perle, ed ostro*. Ne ha per vero dire, questo secolo d'uopo, onde per tali prodigj di quel sesso, porti invidia alli andati tempi, mentre fra i molti, onde abbonda, vanti una Laura Maria Cattarina Bassi, una Contessa Maria Agnesi, una Mar-

chessa (1) del Castelletto, quali e per le Matematiche, e per ogni sorta di Letteraria disciplina, sono ben altro, che non erano le tredici Liriche Donne, o altre celebrate dalle passate età.

Ma acciocchè facendo più a lungo menzione di questi nomi illustri, non sembri che io voglia quindi significare, che la mia *Penna Geometrica* meriti di entrare in considerazione di così fatte Donne, ripigliando un poco più a dietro il mio istituto, ben vi ricorda che il nostro Istrumento fu accompagnato da dodici cilindri, o ruote dentate, i diametri delle quali crescevano di mano in mano, come 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; e che per eccitare per qualunque data descrizione le occorrenti velocità, sempre adoperavano due di detti cilindri, o ruote dentate. Come però la varietà, e leggiadria de' *Fiori Geometrici* appunto viene per causa delle cangiate velocità; così mi è parso bene

(1) Su la morte di questa Donna valorosa il Sig. di Voltaire fece questi leggiadri versi:

*L'Univers a perdu la sublime Emilie:
Elle aimoit les plaisirs, les arts, la verité
Les Dieux en lui donnant leur esprit, leur genie,
Ils ne garderoient pour eux, que l'immortalité.*

Versione elegantissima del Sig. Conte Durante Durante.

*Lasciato ha Emilia questo carcer frate,
Le grazie, le bell'arti, e il ver le piacque;
Per virtude, ed ingegno a Dei fu eguale,
Dissimil solo che immortal non nacque.*

Altra Versione del Medesimo.

*Tristes Emilia has sedes, noctemque reliquit,
Quæ verum atque artes, & Charites coluit.
Par genio superis, animo, virtute, decore;
Impar quod mortem vincere non potuit.*

bene produrre in questo luogo (*Fig. 1. Tav. 18.*) tutti i binarj, o siano combinazioni a due a due, che risultano da 12. numeri, cioè dai dodici cilindri, o ruote dentate predette. E prendendo in detta *Fig. 1.* per esempio il binario $\frac{1}{7}$, vuol dire, che posto nel centro di un *mobile* il cilindro, o ruota 1, e nel centro dell' altro *mobile* il cilindro, o ruota 7, la velocità dei *mobili* farà come 1 a 7. Onde per essere le velocità in ragion inversa del diametro de' cilindri, se sarà posto (*Fig. 5. Tav. 15.*) nel centro C del *primo Mobile nm* il cilindro, o ruota 7, e nel centro dell' *Epiciclo*, il cilindro, o ruota 1, mentre il *primo Mobile* percorrerà una sola settima parte della sua periferia, cioè l'arco *nm*, l' *Epiciclo* compirà un' intiera rivoluzione, e descriverà non pertanto una sola settima parte *aed* di tutta la Curva, che farà un *Ettafoglio*.

A dilucidare maggiormente questa materia, fa molto a proposito il ricordare un piccol problema aritmetico, di cui con molto spirito, e acume d'ingegno è stato già (1) fatto uso nella fabbrica di un anello (*Fig. 9. Tav. 14.*) consistente in un filo di metallo ripiegato in sedici ben compartite spire, e disposte in forma di un cerchio. Questo lavoro, che devesi concepire non già piano, come in figura appare, ma tale che co' suoi giri un solido rappresenti, riusciva invero prestigioso, e mirabile, perchè il filo pareva stare da se equilibrato, e sospeso. L'artificio tutto consisteva nel suddetto problema, qual è: unire con sole linee rette successive, o una sola linea curva, e che ritornino in se stesse al primo punto di partenza, un numero qualunque di punti dati nella periferia di un circolo.

Il che in due modi si risolve: o (*Fig. 2. Tav. 18.*) conducendo la linea dal primo punto *a* sempre al più prossimo *b*, poi *Q* ec., che chiamo *modo comune* per essere as-

P 2

fai

(1) Cardano citato dal Weckero nel
Lib. 27. de Secretis.

fai più tritto, e volgare, e per cui detta linea non fa più di un giro d'intorno al centro C ; o tirando detta linea (e chiamo questo *modo elegante*) dal punto a (*Fig. 3.*) ad un altro d distante da a un tal numero di spazj, che non sia parte aliquota del numero dato; come il 3 numero de' spazj trapassati, che non è parte aliquota del numero dato 8. Perchè chi non vede che adoperando il 2 aliquota dell' 8, cioè tralasciando due spazj, in vece di un ottogono che si cerca, farebbe venuto un quadrato? Conciossiacchè dividendo 8 per 2 il quoto sia 4? Nel caso dunque che si tralascino tre spazj, la linea gira intorno al centro, o punto C tre volte, avanti di ritornare al punto a d'onde ebbe principio.

Ma per lo più nella serie naturale de' numeri, il numero che prossimamente seguita o precede il numero dato, per esempio 8, dà nelle proprie aliquote il numero dei spazj, che hanfi a tralasciare. Così nell' addotto esempio il 9, che prossimamente seguita 8, ha l'aliquota 3, che non essendo aliquota del numero dato 8., accenna il numero di detti spazj. Così pure quando per la costruzione dell' anello prestigioso (*Fig. 9. Tav. 14.*) furono dati 16 punti da unire, il precedente numero 15 somministrò nelle proprie aliquote 3, 5 il numero dei spazj da ommetterfi; e in detta *Fig. 9.* fu scielto il 3, giacchè si vede che ciascuna spira di mano in mano tre spazj abbraccia. Coll' uso dell' aliquota 5, cioè con ommettere cinque spazj, l'anello sarebbe riuscito anche più bello, ed assai più intrecciato; e perchè nel primo caso il filo gira d'intorno al centro C tre volte, e cinque nel secondo caso, prima di riunirsi ad un punto qualunque a , d'onde incomincia; così non solo all'occhio, ma anche all'immaginazione, sfuggendo questo primo punto qualunque, e non apparendo in detto filo nè principio, nè fine, pare più tosto, che da se solo in alto stia sospeso.

Le aliquote de' numeri, vietano anche che per stabilire le velocità de' *mobili*, si possa far uso di tutti i binarj, o combinazioni; perchè il numero che ha un' aliquota inchiude sempre quattro termini proporzionali. Il primo de' quali è il numero dato (per esempio 10), cioè il numero da dividersi. Il secondo l' aliquota, o sia divisore (sia 2). Il terzo il quoto (sarà 5), perchè un numero che ha un divisore non può mancar di quoto. Il quarto l' unità (dico 1), che è misura di tutti i numeri. Perciò, se uso si faccia del binario composto del dividendo, e divisore (cioè $\frac{10}{2}$), inutile diventa

il binario composto del quoto, ed unità (dico $\frac{5}{1}$; essendo il dividendo al divisore, come il quoto all' unità; essendo dico 10. 2. :: 5. 1. Laonde nell' istituzione del calcolo, e tavola delle combinazioni (*Fig. 1. Tav. 18.*) da ciascun di questi ordini

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{6}{12}$; $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{12}$; $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{12}$; $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{10}$; $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{12}$;
 $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{8}{12}$; $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{10}$; $\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{9}{12}$; $\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{10}$; $\frac{4}{5} \cdot \frac{8}{10}$; $\frac{5}{6} \cdot \frac{10}{12}$; con-

servato un binario, ho cancellato gli altri, che si trovavano nella medesima proporzione. Perchè egli è evidente, che, trattandosi della descrizione di un *Trifoglio*, si potrebbe far uso di due cilindri, o ruote segnate con li numeri 1, e 3 del primo binario $\frac{1}{3}$; 2, e 6 del secondo $\frac{2}{6}$; 3, e 9 del terzo $\frac{3}{9}$ ec., e nulladimeno, il resto pari, non verrebbe mai più che un *Trifoglio*, essendo sempre per essere eccitata nei *mobili* la medesima ragione di velocità, come 1 a 3.

Per altro tutti i *Fiori*, eccettuato il *Trifoglio*, *Quadrifoglio*, e l' *Esafoglio*, che con linee rette non permettono d'esser descritti, che pel solo modo *comune*, sono capaci della descrizione *comune ed elegante*; ma meglio avviene a quelli, de' quali il numero denominatore è privo di parti aliquote, come l' *Endecafoglio*,

cafoglio, il di cui denominatore 11, essendo numero primo, prodigiosamente varia, potendosi in cinque modi descrivere con una linea retta, e in dieci con una curva; cioè nel primo caso adoperando ciascuna delle cinque aliquote 1, 2, 3, 4, 5 dei due prossimi numeri 12 e 10, restando soverchia l'aliquote 6 del 12, come complimento all' 11 della già usata aliquote 5; e l'aliquote 2 del 10, come comune anche al numero 12. Nel secondo caso si fa uso poi non solo delle suddette aliquote; ma ancora di tutti i complimenti all' 11, che sono il 10, 9, 8, 7, 6; facendo però, che il raggio dell' *Epicyclo* sia nel caso delle aliquote minore del raggio del *primo Mobile*; e nel caso de' complimenti, maggiore. Non altrimenti il *Decatrifoglio* per la medesima ragione può de-linearfi in sei modi con linea retta, e con linea curva in dodici ec.

A R T I C O L O S E T T I M O .

Descrizione organica di Poligoni quasi rettilinei.

IN tanto per alleviare il fastidio, che mi reca l'impossibilità di descrivere *Poligoni rettilinei* simili a quelli della *Fig. 2. e 3. (Tav. 18.)* e quali sono dagli empj Negromanti abusati nei stolti loro riti, voglio far vedere, che tre punti per lo meno *e, G, b* si può fare che vengano situati per dritto in una medesima linea; e che gli altri punti declinino talvolta quasi insensibilmente; essendo la via della retta così poco distante dalla via della curva, ch' egli è poco men che non coincidano, come dimostra la *Fig. 8. Tav. 16.*

Sia dunque dal centro *C (Fig. 4. e 5. Tav. 18.)* condotta *Ca* perpendicolare ad *eGb*, corda di un arco qualunque *bae*, e l' assisa *Ga* sia divisa per metà in *m*. E dipoi sia primo il raggio *Cn* del *primo Mobile* eguale a *Cm*, ed il raggio *nd* dell' *Epicyclo* eguale ad *ma*, ovvero *mG*. Secondo, la velocità

locità del raggio Cn del primo Mobile sia alla velocità del raggio nd dell' *Epiciclo*, come l'arco bae a tutta una periferia. Terzo, i moti in verso contrario. Dico ora, che la Curva descritta dall' ultimo punto d del raggio nd dell' *Epiciclo* avrà per lo meno tre punti eGb situati in una medesima retta eGb .

Laonde si supponga, che, prima che i mobili fossero messi in moto, Cn coincidesse con Cu ; ed nd con ue , ed nz . Cioè amendue costituissero una medesima retta Ce . Indi partiti da questa prima posizione, ed in quella giunti, che la figura mostra, figuriamoci che il raggio Cn , avendo percorso tutto l'angolo nCn , abbia fatta una quarta parte del suo viaggio: val a dire, una quarta parte di tutto l'angolo ecb ; onde anche il raggio nd avrà fatta una quarta parte del suo, che è un quarto di circolo znd . Allora il punto d , quantunque parer possa di trovarsi nella retta eGb , pure non vi farà; ma quando Cn giunto a coincidere con Cm avrà fatto la metà del suo corso, cioè la metà dell'angolo eCb , anche il raggio nd avrà percorso la metà di un circolo, ed il punto d si troverà in G , perchè per la costruzione $nd = mG$; si troverà, dico, lontano da z , ovvero a , in cui ora s'intende che z coincida, due angoli retti. E così quando Cn , arrivando per fine a coincidere con Cf , avrà compito tutto il suo viaggio, che è tutto l'angolo eCb ; anche nd farà venuto a fin del suo, cioè avrà compita un'intera rivoluzione, e d coinciderà con b . E perchè finalmente questi tre punti eGb sono dati per la costruzione in una retta, in quella appunto faranno dal punto d descritti. Ciò che era da dimostrarsi.

ARTICOLO OTTAVO.

Dettaglio delle cause moderatrici di ciascuna Curva posta per esemplare delle molte spettanti a questo Istromento.

Sarebbe forse stato non ingiocondo spettacolo mostrare , oltre altre Curve, una serie seguita di tutti i *Fiori*, che descrive l'Istromento, principiando dall'*Unifoglio*, fino al *Dodecafoglio*; se non fosse, che io ho giudicato, che da que' pochi messi qui per esemplare dei molti che mancano, si avesse facilmente potuto prender idea anche degli altri; e che se non altro per mezzo della *descrizione per punti* suggerita nella prima parte di questo discorso, ciascun potesse farne nascere da se quanti vuole; avvisando per altro, che nè per l'ardente Sole dell'Estate, nè per le nevi, e ghiacci dello squallido Verno siano mai per diventare riarfi, o smonti.

Mi restringerò dunque a suggerire le cause moderatrici di questi pochi *Fiori*, e Curve, e prima

Figura 1. Tav. 15. Unifoglio.

1. Raggio del I. *Mobile* sta al raggio dell' *Epicyclo*, come 10 a 5 in circa.

2. Velocità del I. *Mobile* = a quella dell' *Epicyclo*.

3. Moto del I. *Mobile* in conseguenza del moto dell' *Epicyclo*.

* La punta *m* della Curva è moltiplice; onde se il raggio dell' *Epicyclo* fosse stato più lungo, detta punta si farebbe aperta in un ceno, o nodo simile a quelli della *Fig. 5*. Questa nota vale per le punte di altre Curve soggette a questo Istromento, come la 3, 9 ec.

Figura 2. Unifoglio, o Circolo.

1. Raggio qualunque.

2. Velocità eguali.

3. Moti l'un dell'altro in verso contrario.

Fig. 3.

Figura 3. Bifoglio.

1. Raggio del I. *Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 10.
- 3 $\frac{1}{2}$ in circa.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 2.
3. Moti in confeguenza.

Figura 4. Bifoglio, Elisse, o Linea retta.

1. Raggi qualunque, purchè non siano eguali, perchè in tal caso diventa una *retta*.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 2.
3. Moti contrarj.

Figura 5. Ettafoglio.

1. Raggio del I. *Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 7. 2. in circa.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 7.
3. Moti in confeguenza.

Figura 6. Ettafoglio.

1. Raggio del I. *Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 2. 3. in circa.
2. Velocità del I. *Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 4. 7.
3. Moti in verso contrario.

Figura 7, 8, 9, 10, 11, 12, Trifoglio.

1. Sono queste quelle 6. figure citate nel calcolo delle Curve, le quali variano per il solo cangiamento della proporzione de' raggi, le altre cose rimanendo le stesse. Perchè il raggio del I. *Mobile*, che era maggiore di quello dell' *Epiciclo* nella *figura 7*, a poco a poco si è diminuito sempre più nella *figura 8, 9, 10*; finchè nella *figura 11* detto raggio del I. *Mobile* è eguale a quello dell' *Epiciclo*;

Q

anzi

anzi nella *fig. 12.* il raggio dell' *Epiciclo* è diventato maggiore del raggio del *I. Mobile*; e quindi per questo solo la *Curva* si trasforma nelle sei figure contenute nella *Tavola 16.*

2. Velocità del *I. Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 1. 3.
3. Moti contrarj.

Figura 13. Ottofoglio.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del *I. Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 5. 8.
3. Moti in conseguenza. Se contrarj, nasce la *figura 14.*

Figura 15. Decafoglio.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del *I. Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 3. 10.
3. Moti contrarj.

* Sino a questa *figura 15.* la velocità dell' *Epiciclo* è stata maggiore della velocità del *I. Mobile*. Le figure poi che seguono 16, 17, 18 sono tre esempj di *Curve* provenienti dalla velocità di quello minore di quella di questo.

Figura 16.

1. Raggio del *I. Mobile*. Raggio dell' *Epiciclo* :: 2. 1.
2. Velocità del *I. Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 3. 2.
3. Moti in conseguenza.

Figura 17.

1. Raggio del *I. Mobile* minore alquanto del diametro dell' *Epiciclo*.
2. Velocità del *I. Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 3. 1.
3. Moti contrarj.

Figura 18.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del *I. Mobile*. Velocità dell' *Epiciclo* :: 3. 1.
3. Moti in conseguenza.

Supponendo io ora che ciascuno che sia arrivato fin qui sia capace di comporre da se l'istromento alle date cause moderatrici, mi basterà chiuder quest' Articolo coll' accennare, che per questo si divide il circolo in tante date parti, ma che non siano più di 12; primieramente usando per lo meglio binarj, che abbiano per un termine l'unità; come per esempio, volendolo dividere in sette parti, di questi binarj $\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{7}$, che si potrebbero adoperare, usan-

do, dissi, piuttosto il binario $\frac{1}{7}$. Secondo, pongasi attenzione, che il raggio dell' *Epicyclo* sia piuttosto corto rispetto a quello del I. *Mobile*. Terzo, che i moti siano eccitati in verso contrario, onde veranno figure simili alle *Fig. 7, 8, 9* della *Tav. 16.*; e per le punte di dette figure, e più precisamente delle simili alla 9, verrà diviso un circolo di diametro eguale al diametro del I. *Mobile*, più il diametro dell' *Epicyclo*, secondo l' addotto esempio, in parti sette. Cosicchè unendo poi dette punte con altrettante rette avrebbsi la descrizione finita di un *ettagono* rettilineo. Il che sia detto di qualunque altro *poligono*, mutando solo i binarj a tenore delle date velocità.

A R T I C O L O N O N O.

Descrizione organica delle Cicloidi di base circolare.

PEr dimostrare come appartengono a questa *Penna* le *Cicloidi* nascenti per lo volger di un cerchio su la periferia *convessa*, o *concava* di un altro cerchio, considereremo prima attentamente in qual disposizione di circostanze si ritrovi (*Fig. 6. Tav. 18.*) l' *Epicyclo* *afd*, che per descrivere una *Cicloide* cammina sulla immobile periferia *convessa* *doK*.

Primieramente offervo, che nel medesimo tempo che l'*Epicyclo* percorre tutta l'immobile periferia, anche il punto di contatto d compiendo sulla medesima il suo giro ritorna al punto d d'onde era partito; e perchè tanto avviene nel medesimo tempo, anche del centro b di detto *Epicyclo*, che al punto b , d'onde partì per la periferia bgb , ritorna (conciossiacchè il centro b si ritrovi (1) mai sempre nella direzione del raggio Cdb , che congiunge il punto di contatto d col centro C del cerchio immobile dOK); perciò in tempi eguali il punto d , ed il punto b amendue formano eguali angoli al centro comune C . Onde io ne tiro questa conseguenza, che si potrebbe prendere il circolo bgb per *primo Mobile*, il di cui raggio Cb farà eguale al raggio Cd del cerchio immobile più il raggio bd dell'*Epicyclo*.

2. Tante rivoluzioni fa l'*Epicyclo* sopra l'immobile *convessa* periferia dOK , mentre il punto di contatto d al punto d d'onde partì ritorna, quante volte la periferia dOK contiene la periferia dell'*Epicyclo*. Cioè a dire (giacchè le periferie sono in ragion de' diametri), quante volte il diametro dK contiene il diametro ad . E quindi sta il numero delle rivoluzioni dell'*Epicyclo* ad una rivoluzione del punto di contatto d , come il diametro dK del cerchio immobile dOK al diametro ad dell'*Epicyclo*. Ma ho già detto che il punto di contatto d , ed il centro b dell'*Epicyclo* formano sempre eguali angoli al comune centro C . Dunque io concludo che la velocità angolare dell'*Epicyclo* è alla velocità angolare del suo centro b (cioè del *primo Mobile* bgb), come il diametro dK del cerchio immobile al diametro ad dell'*Epicyclo*.

3. A quel medesimo verso, che procede il punto di contatto d , non che il centro b dell'*Epicyclo*, per esempio a sinistra verso o , ed b , procede ancora qualunque punto a della

(1) Eucl. lib. III. prop. 14.

della periferia dell' *Epicyclo* a sinistra verso f . (1)

Poichè abbiám esaminato cosa accada, quando l' *Epicyclo* ruota sopra la periferia *convessa* di un altro cerchio immobile, vediam cosa succeda quando gira in una *conca-va*, cioè quando l' *Epicyclo* dmx ruoti nella *conca-va* periferia del cerchio immobile dOK .

1. In primo luogo avviene, che il raggio Ce del circolo enp (che sarà il *primo Mobile*) formato dal centro e del ruotante *Epicyclo* dmx è eguale al raggio Cd del cerchio immobile, meno il raggio de dell' *Epicyclo*.

2. Le velocità angolari del centro e dell' *Epicyclo*, e del punto di contatto d sono le medesime, perchè il centro e dell' *Epicyclo* *interiore* si ritrova puntualmente in quella medesima direzione, in cui già abbiám detto, che si ritrova il centro b dell' *Epicyclo* *esteriore*, cioè (1) nella direzione del raggio Cd , che unisce il centro C col punto di contatto d .

3. In vece che i moti seguano come sopra in conseguenza, qui riflettendo attentamente si osserva, che occorrono in verso contrario.

Ora dato il raggio così dell' *Epicyclo*, come del cerchio immobile, su cui hassi a volger l' *Epicyclo*; dato di più le rivoluzioni di detto *Epicyclo* abbiám ad essere in una periferia *convessa*, o *conca-va*, chiaramente risulta, come ad una tal *Cicloide* debbasi componere l' Istromento. Supponiamo dunque che e l' uno, e l' altro sia dato. Sia dato Cd raggio del cerchio immobile, al raggio db dell' *Epicyclo*, come 3, e 1; e s'intenda l' *Epicyclo* dover ruotare sopra la periferia *convessa* dOK .

1. Primieramente dovendo essere il raggio Cb del *primo Mobile* al raggio ba dell' *Epicyclo*, come la somma de' raggi del cerchio immobile, e dell' *Epicyclo*, al raggio dell' *Epicyclo*. sarà $Cb, ba :: 4. 1$. Dove se nel determinare così nell' Istromento la lunghezza de' raggi s'incontrasse la dif-
ficol-

(1) Eucl. lib. III. prop. 13.

ficoltà (1) avvertita in proposito degli *assi* dati per la descrizione di un' *Elisse*, si opererà come ivi si disse.

2. Dovendo essere la velocità del *primo Mobile* bbg alla velocità dell' *Epiciclo* afd in ragione inversa de' diametri Cd , db ; la velocità di quello farà alla velocità di questo, come 1 a 3.

3. Il *primo Mobile*, ed *Epiciclo* si hanno a volgere al medesimo verso. E però ordinato l'Istrumento a queste leggi, o cause moderatrici, il punto a della periferia dell' *Epiciclo* descriverà la *Semi-Cicloide* ao , ovvero l'intera proposta zao ; l'istessa appunto, che verrebbe descritta nel supposto dell' *Epiciclo* afd ruotante sulla periferia *convessa* doK .

Ma se stante ancora la medesima ragione di Cd ad ed diametri de' cerchj dati, come 3. 1., l' *Epiciclo* non più sopra una periferia *convessa*, ma in una *concava* doK si volgesse.

1. Primieramente dovendo essere il raggio ce del *primo Mobile* al raggio ed dell' *Epiciclo*, come il raggio cd del cerchio immobile, meno il raggio ed dell' *Epiciclo* al raggio dell' *Epiciclo*; farà $Ce . ed :: 2. 1.$

2. La velocità del *primo Mobile* a quella dell' *Epiciclo* farà ancora la medesima: voglio dire, come 1. 3.

3. In questo caso i moti dovranno seguire in verso contrario. A tenore di queste leggi regolato l'Istrumento, dal punto x della periferia dell' *Epiciclo* xmd verrà descritta la *Semi-Cicloide* xo , ovvero l'intera zxo .

Per questi esempj si potranno richiamare all'Istrumento tutte quelle *Cicloidi*, le quali siano generate da' *mobili* commensurabili, anzi de' quali le velocità siano comprese in quelle, che per la combinazione de' 12. cilindri, o ruote dentate risultano, che sono 181. per lo appunto; cioè 45. per il caso di un *Epiciclo* volgentesi sulla periferia *convessa*
di

(1) Part. III. Artic. IV. Annot. 7.

di un maggior cerchio immobile. Altre 45 per il caso, che l'*Epicyclo* si volga nella periferia *concaua* di un maggior cerchio; sono pure 45 dove un *Epicyclo* cammina sulla periferia *convessa* di un minor cerchio immobile; indi altre 45 per il caso nel quale una periferia *concaua* *doK* può camminare sopra la periferia *convessa* di un minor cerchio supposto immobile *dmx*; e finalmente una per il caso di un *Epicyclo* rotante sulla periferia *convessa* di un egual cerchio, restando due soli casi impossibili per questo genere di *Cicloid*i; cioè che un cerchio camminar possa nella periferia *concaua* di un minor cerchio, o di un cerchio eguale.

ARTICOLO DECIMO.

Descrizione organica delle Spirali.

NOi ci troviam finalmente arrivati a quel genere di Curve, che furono le ultime nominate fra gli usi di questo Istromento, ma che per l'eccellenza loro furono in considerazione degli antichi, e lo sono ancora de' moderni Filosofi; perchè da quelli furono applicate alla quadratura del cerchio, e da questi ad altri usi. Ed in quanto alla loro generazione, per essere dipendente dal moto composto di retto, e circolare, se faranno (*Fig. 7. Tav. 18.*) descritti molti circoli concentrici, e dal loro comune centro *C* condotti molti raggi equidistanti, ed intersecantesi con le periferie di detti circoli, la linea condotta dal primo punto *a* d'intersezione al prossimo *g*, indi al vicino *b*, e così via via alli restanti punti *KmnozC*, farà una *Spirale*, che io chiamo *Circolare*; ma se in luogo dei circoli fossero date (*Fig. 8.*) tante *Elissi* parallele, e concentriche, sarebbero riuscite *Spirali* da me dette *Elittiche*. Tutte però nascenti da un punto *a* qualunque per la retta *aC* tendente al centro *C*, mentre detta *aC* si volge in giro. Il moto di questa

sta retta aC si suppone qui circolare; ed il moto del punto a per detta aC può essere equabile, ed inequabile; e sempre gli spazj am , mC fra una spira $agbKm$, e l'altra prossima $mnozC$ si trova in ragion composta della velocità del punto a per detta aC , e della velocità della medesima retta intorno al centro C . E quando la velocità della retta aC intorno a C sia equabile, e costante, li spazj am , mC saranno in ragione della velocità del punto a per detta retta aC . Qui pertanto si suppone che la *Fig. 7.* mostri una *Spirale* nata dal moto del punto a composto di due movimenti uniformi, uno circolare d'intorno a C , e l'altro retto per la retta aC ; cosicchè mentre per causa del primo la retta aC compie d'intorno a C una parte qualunque di un'intiera revoluzione, il punto a lungo detta retta aC proporzionalmente percorra una simil parte; e però questa è la *Spirale di Archimede*. La *Fig. 8.* poi è composta dal moto retto, ed ellittico.

Si dovrebbero aspettare simili, e proporzionati effetti, secondo che il moto del punto a per la retta aC fosse accelerato equabilmente; o pure accelerato, o ritardato con qualunque variazione di velocità; dovendosi perciò la spira restringere, o allargare secondo la maggiore, o minore velocità, che sia in data ragione; si potranno immaginare *Spirali* innumerabili.

Ora per preparar l'Istrumento (quello però de' fili) a queste Curve niente v'è di più facile. Perchè prima (*Figura 3. Tav. 11.*) condotta la punta S del raggio QS tra i due assi QG , RP , e fatto per modo che detto raggio soggiaccia per il lungo esattamente all'asta MN , si restringa poi validamente la vite P , onde tutto il corpo ombreggiato $QR S dm P$ resti fermo, ed immobile nella sua guida n ; ma la vite laterale n affatto si rallenti, acciò essa guida n diventi labile, e scorrente per il lungo della rotante asta MN verso M , portando seco tutto il corpo ombreg-

breggiato. Siano indi preparati quattro pezzi (*Fig. 5. Tav. 11.*) per la forma loro nominati il primo cilindro circolare, il secondo cilindro ellittico, il terzo cono circolare, il quarto cono ellittico; perchè messo nell'asse QG il primo di detti pezzi in vece del cilindro ZT (*Fig. 3.*), e facendo poi girare l'asta MN si avvolgerà su detto pezzo il filo, che perciò tira tutto l'asse PR , in un con lo stilo S , verso all'asse QG ; e dallo stilo S verrà descritta sul piano della carta la *Spirale* della *Fig. 7. Tav. 18.*; che se fosse stato adoperato il secondo pezzo avrebbesi conseguita la *Spirale* della *Fig. 8.*; se il terzo, la *Spirale* assomiglierebbe alla settima, se il quarto all'ottava. Ma in questi due ultimi casi, li spazj fra una spira, e l'altra andrebbero decrescendo, o crescendo verso il centro, secondochè il filo cominciassè ad avvolgersi su detti pezzi terzo, e quarto dalla parte del vertice m , o della base o .

Qui poi è d'avvertire che il numero delle spire di queste curve, sarà sempre eguale al numero delle rivoluzioni dell'asta MN ; secondo, che gli spazj am , mC (*Fig. 7. Tav. 18.*) fra una spira, e l'altra intercetti saranno eguali alle porzioni del filo, che si avvolgeranno d'intorno a detti pezzi per ciascuna rivoluzione relativa a detti spazj. E queste porzioni di filo sono eguali alle spire, che il filo avvolgendosi forma sulla superficie dei sopraddetti pezzi. Ma si è detto che gli spazj am , mC sono in ragione della velocità del punto a per la retta aC ; dunque le spire sulla superficie dei pezzi formate dal filo sono in ragione di detta velocità. Onde segue, che per ottenere qualunque *Spirale* sarebbe necessario sapere la ragione di detti spazj per incidere (*Fig. 5. Tav. 11.*) sulla superficie dei solidi terzo, e quarto un incastro a spira in detta ragione, in cui vada il filo come ad innicchiarsi; perchè poi svillupandosi si generasse la *Spirale* proposta. Ben è vero però, che così farebbe lo stesso che far nascere una *Spirale* da un'altra.

Per conseguire la soprariferita *Spirale d'Archimede* concepita da esso per (1) la quadratura del circolo, si caricino i due assi (*Fig. 3. Tav. 11.*) QG, RP di due cilindri eguali, e si faccia che il filo sia ben teso, e tangente detti cilindri alla medesima parte, perchè indi mosso l'Istrumento verrà descritta la *Spirale* suddetta.

Suggerisco inoltre, che con il medesimo Istrumento dette *Spirali*, quasi per rappresentare la forza centripeta, cominciando lungi dal centro ponno procedere verso il centro; e per contrario volendo fingere la forza centrifuga, possono esser descritte cominciando dal centro, come ha fatto il Sig. Abate (2) Nollet nelle sue sperienze.

Ma finalmente essendo esposti anche gli usi di questa *Penna Geometrica*, e spedito quant'era d'uopo nel supposto di un Istrumento consistente in due mobili cerchj, parmi che dover sia passare alla seguente ultima Parte, per esaminare a quali usi sarebbe atto un Istrumento simile, ma che di tre, o più di detti cerchj mobili fosse composto.

P A R T E Q U A R T A.

Degli usi d'un Istrumento simile alla suddetta Penna Geometrica. Ma composto di un numero di Mobili qualunque dato.

Avvegnachè la maggior parte degli Uomini curi, ed ambisca quelle cose, che possono condurre a più alto stato di fortuna, o tal'altra cosa fornire, che più piaccia a questo nostro, cheche siasi, incomprendibile umano composto; pure quella parte di noi, che mente, e spirito si appella, tal-

(1) Archimede dimostra nella prop. 18. delle *Spirali*, che (*Fig. 7. Tav. 18.*) dal punto *m*, termine della prima rivoluzione, menata nella Prodotta *Cb* una tangente alla *Spirale*; lo spazio

preso su detta retta *Cb* da *C* fino all'incontro della tangente è eguale alla circonferenza del circolo che passa per *m*.

(2) Lezion. V. esper. 6.

volta schiva, o fatolla di queste comuni cupidità, sollevasi a più nobili occupazioni, e gusta anche tali cose, che non possono a vil guadagno, nè a volgar diletto tornare. Così ora a me avviene, e molto più avverrà ad alcun altro, che sia per le geometriche verità di ben disposta mente. Perchè l'animo nella considerazione delle cose, che si trattano in questa Parte, benchè fossero anche per essere inutili, si estolle, e ricrea; e intanto per un tale trattenimento si dimentica delle ingiurie de' tempi, nè bada alle pur troppo spesse noje, e fastidj che ci stanno d'intorno.

Acciocchè dunque non si tardi ad entrar meco a parte di questo vero piacere, comincerò in questo primo Articolo a favellare della quantità delle linee provenienti dal moto di un Istromento, che a similitudine della *Penna Geometrica* fosse composto di un numero di *Mobili* qualunque dato. Negli altri Articoli poi la qualità di esse linee si dimostrerà; ma per non andare all'infinito si restringeremo alla *linea retta*, al *circolo*, alla *elisse*, ed alle *curve planetarie*.

A R T I C O L O P R I M O.

Numero delle Curve provenienti da un Istromento composto di un numero de' Mobili qualunque dato.

Questa numero si determina assai prestamente, dopo che in altro (1) luogo fu trovato il numero conveniente nel supposto dell' Istromento composto di due mobili; perchè allora il *secondo Mobile*, o sia *Epiciclo* relativamente al *primo*, che perpetuamente descriveva un circolo, descrisse 1273 Curve. Ma poichè quelle tre cause moderatrici, che ivi valsero nel *secondo Mobile* rispetto al *primo* a produr tanta varietà, si suppone che qui vagliano le medesime nel *terzo* rispetto al *secondo*, perchè questo Istro-

R 2

men-

(1) Part. III. Artic. I.

mento deve esser simile a quello. Perciò il *terzo Mobile* per ciascuna Curva descritta dal *secondo* descriverà parimenti 1273 Curve. Dunque moltiplicato in se stesso il numero 1273 risulterà 1616529 numero delle Curve spettanti al *terzo Mobile*. Un simil discorso prova, che per determinare il numero delle Curve per il *quarto Mobile*, non si ha che moltiplicar in se stesso questo ultimo numero, e così per il 5, 6 ec. Onde se il primo numero 1273 derivante dal numero dei mobili dato 2 si chiama a , secondo che i mobili dell' Istromento faranno 2, 3, 4, 5 ec. il numero delle Curve verrà $a \cdot a^2 \cdot a^4 \cdot a^8 \cdot a^{16}$ ec.

ARTICOLO SECONDO.

Linea retta, ed Elisse, che nascono dal moto composto di tre cerchj.

IL primo Problema, che in questa quarta Parte ci viene innanzi, parmi nel vero assai grazioso, ed è la descrizione di una *retta* per il moto composto di tre cerchj, per risolvere il quale, ricorrendo alle tre cause moderatrici, suppongasi (*Fig. 1. Tav. 19.*)

1. Che i raggi dn del *primo Mobile*, ng del *secondo*, gb del *terzo* siano eguali.

2. Che siano mobili con eguali velocità: Il primo dn d'intorno all'immobile centro d fisso nel piano: Il secondo ng intorno al proprio centro n fisso nella periferia del *primo Mobile*: Il terzo gb mobile intorno al suo centro g fisso nella mobile periferia del 2. *Mobile*.

3. Finalmente il raggio ng del 2. *Mobile*, ed il raggio gb del 3. si muovano in verso contrario del raggio dn del *primo Mobile*, che certamente il punto b descriverà la retta ae .

Laonde supponiamo che nella primiera situazione de' mobili, prima che fossero al dovuto lor moto eccitati, il raggio.

gio dn del primo Mobile coincidesse con dc ; il raggio ng del 2. Mobile con cb ; ed il raggio gb del 3. Mobile con ba ; cosicchè tutti costituissèro una medesima retta. Indi mossi con le prefate leggi, dn , che coincideva con dc , da dc s'intenda receduto tutto l'arco cn ; ng ; che se anch'egli non si fosse mosso intorno al proprio centro n coinciderebbe con nf , perchè ha corso inverso contrario un egual spazio, si trova da nf lontano tutto l'arco fg ; e così gb , che se non avesse girato intorno al proprio centro g , coinciderebbe con gm , lungi da questo è andato tutto l'arco mb . E però questi tre archi cn , fg , mb faranno eguali, perchè le velocità sono date eguali.

Richiamando ora alla memoria ciò che si è detto (1) per la descrizione del circolo, si troverà che qui concorrono tutte le cause moderatrici ivi addotte, perchè nel caso di due soli mobili, il raggio ng del secondo Mobile, mantenendosi sempre a se stesso parallelo, descriva il circolo $bgn d$. Onde si potrebbe fingere, che detto circolo fosse piuttosto descritto dal raggio cg , come rotante intorno al centro c ; e prescindere per ora dai raggi dn , ng , come se non vi fossero, e come se non si trattasse d'altro, che dei due raggi cg , gb . Nel qual caso dico, che rispetto a questi due mobili si riscontrano qui tutte le cose, che (2) furon d'uopo, acciò il punto b descrivesse una retta ae ; perchè per la costruzione i raggi cg , gb sono eguali; i moti accadono in verso contrario, mentre nel supposto che cg muovasi a sinistra verso n , gb per la costruzione volgesi a destra da m verso b . Resta ora da provare, che la velocità di gb , che sta ora per un Epiciclo immaginario, sia alla velocità di cg , che sta per un supposto primo Mobile, come 2 a 1. Ora quando dn con dc , ng con cb , gb con ba coincidevano; cg coincideva con cb , gb con ba . Ma poichè cg ha percorso l'arco bbg ;
 gb

(1) Part. III. Artic. V.

(2) Part. II. Artic. III. (1)

gb avrebbe dovuto coincidere con gz ; ma per le stabilite velocità si trova ben lungi tutto l'angolo zgb , il quale essendo esteriore è doppio dell'angolo interiore gcb , e però risulta la velocità angolare del raggio gb rispetto alla velocità del raggio cg , come 2 a 1. Dunque il punto b descriverà la *retta* ae . Anzi per fortificar questa conclusione con un di più, prodotto cg in z , dico che l'angolo zgb è doppio dell'angolo mgb percorso dal raggio gb nel solo supposto della figura. Imperciocchè gli angoli al vertice mgz , ngc sono eguali; così gli angoli alterni ngc , gcb sono parimenti eguali. Dunque $mgz = gcb$; e perciò zgb , essendo doppio di gcb , farà anche doppio di zgm . Dunque $mgz = mgb$; e però zgb doppio anche di mgb . Il che era da dimostrarsi. Ora senza frammettere alcun indugio all'altra Parte di questo Articolo, conchiudo, che il punto b , ovvero H , preso dentro o fuori dell'area del terzo Mobile gb , descriverà un' *Elisse*. Conseguenza, che ritenendo ancora il supposto de' due mobili cg , gb chiaramente risulta per la dimostrazione dell' *Elisse* addotta a suo luogo (1). Anzi quasi tutti i corollarj colà spettanti alla *linea retta*, ed *Elisse*, qui possono egualmente aver luogo.

ARTICOLO TERZO.

Circolo derivante dal moto composto di tre, o più cerchj.

SI è detto di sopra (*Fig. 1.*), che quando i due raggi de' mobili dn , ng muovendosi ebbero sortita la situazione, che la figura dimostra, il terzo raggio gb avrebbe coinciso con gm , se non si fosse mosso a destra da m verso b intorno al proprio centro g . Supponiamo pertanto (le altre cose tutte rimanendo), che piuttosto si sia mosso a sinistra da m verso z : val a dire in conseguenza del primo Mobile dn ,

(1) Part. III. Artic. IV.

dn , allora il punto b , cioè z (*Fig. 2.*) si ritroverà nella periferia di un *circolo*, il cui diametro farà la *retta a'e* descritta (*Fig. 1.*) dal punto b .

Essendo perciò ng (prodotto pur anche in m) sempre a se stesso parallelo, farà parallelo sempre anche a cb , con cui prima di muoversi coincideva. Onde in grazia della dimostrazione sostituito anche qui cg al raggio ng , gli angoli bcg , mgz faranno eguali per causa delle supposte velocità. Ma le parallele bc , mg non potrebbero costituire alla linea cgz detti angoli eguali, se non fosse una medesima *retta*. Dunque cgz è appunto una medesima *retta*, che perpetuamente rotando intorno a c descrive il *circolo aze*. Il diametro del quale farà eguale al raggio di un mobile quattro volte preso, perchè il semi-diametro cgz è eguale a due; ma la *retta ae* della *Fig. 1.* è parimenti eguale al raggio di un mobile quattro volte preso, imperciocchè nel massimo dilungamento o snodamento de' raggi $dn + ng + gb = da$, e nel massimo accorciamento di detti eguali raggi dn , ng , gb formano un sol raggio $= de$ residua porzione di detta *linea ae*; perchè per causa delle velocità si rannicchiano di modo, che g coincide con d ; b , ed n col punto e . Dunque il diametro del *circolo aze* si eguaglia alla *retta ae*; e perciò s'intende verificata l'una, e l'altra parte di questa proposizione.

Ma per non menare in lungo una dimostrazione, cui potrebbe supplire una sola nuova figura, ricorderò che da' eguali mobili in numero qualunque dato, affetti di eguali velocità, rotanti l'un dell'altro alternativamente in verso contrario, si descriveranno dei *circoli* di diametri crescenti a due a due; cosicchè i diametri dei *circoli*, che verranno dal *Mobile* 1. 2. 3. 4. 5. 6., ec. cresceranno come 1. 1. 2. 2. 3. 3. ec. Inoltre la periferia del 1. 3. 5., e degli altri tutti che siano nella serie naturale de' numeri impari, coincideranno nel punto e ; e le periferie del 2. 4. 6., e degli altri di numero pari in detta serie, coincideranno nel punto d .

io d . Si conturba questa legge, se i mobili sono dati ineguali, quantunque (ferme però che restino le altre cose) sempre risulti la descrizione di un *circolo*. E viene in via di corollario un'altra verità, che tutti i punti presi nella periferia, nell'area, e nel centro di tutti i *mobili* descrivono parimenti *circoli* concentrici rispettivamente al *circolo*, di quel tal *mobile* descrivente.

ARTICOLO QUARTO.

Linea retta, ed Elisse vengenti da tre mobili
in altra maniera.

PRimo, sia il raggio dn del *primo Mobile* (*Fig. 3.*) eguale al raggio ng del *secondo Mobile*, ed il raggio gb del *terzo Mobile* qualunque dato.

2. Siano le velocità del *primo*, *secondo*, *terzo* espresse dai numeri 1. 2. 1.

3. Il *primo Mobile*, ed il *terzo* si muovano in verso opposto del *secondo*. Dico che il punto b del *terzo Mobile* descriverà la *retta* aq .

Lo che per dimostrare suppongasi prima, come da me si suole, che dn con dc ; ng con cu ; gb con ua coincidessero. Quando in un tratto messi i *mobili* in moto il raggio dn del *primo Mobile* abbia già percorso l'arco da c ad n ; ng l'arco da f a g ; gb l'arco da H a b . Ora poichè l'angolo fng è doppio dell'angolo ndg (non solo per causa delle date velocità, ma anche perchè l'angolo fng al centro è doppio dell'angolo ndg alla periferia) farà anche doppio dell'angolo ngd , cui è eguale detto angolo ndg , perchè opposto per la costruzione ad un lato eguale; e doppio del pari farà dell'angolo bgH , perchè la velocità data del *secondo Mobile* è alla velocità del *terzo* come 2. a 1. Dunque l'angolo bgH deve essere all'angolo ngd eguale.

eguale. Essendo stato pertanto altre volte detto (1), che in simili circostanze dei due mobili dn, ng , il punto g si trovi costantemente nella *retta ue*; il raggio gb del *terzo Mobile*, recedendo dalla prodotta ng in H , verso gb , non può costituire l'angolo bgH eguale all'angolo al vertice opposto ngd , se non si mantiene sempre nella direzione gd coincidente con la detta ue ; ma pure detti angoli sono costituiti eguali per causa delle date velocità. Dunque gb si mantiene in detta direzione gd , ovvero ue . Anzi di tal maniera in detta *linea ue* persiste, che egli è sempre a se stesso parallelo, e coincidente. Onde il punto b ultimo di detto raggio gb descrive tutta la *retta aq* = all'aggregato dei diametri di tutt' i mobili $aK - Kq$ diametro del *terzo Mobile*; e così dite di tutti gli altri punti dell' area, o periferia di detto *terzo Mobile*, che descriveranno delle *rette* parallele fra loro, e parallele alla *retta aq* coincidente con la suddetta ue .

Ma se intanto (le altre cose restando come sopra) la sola velocità del *terzo Mobile*, invece di esser suddupla di quella del *secondo*, fosse a quella eguale, cioè invece di esser l'angolo bgH eguale alla metà dell'angolo fng , gb si trovasse a coincidere con gz , e l'angolo zgh fosse eguale all'angolo fng ; allora il punto b (dite z dove ora si suppone che stia il punto b), farebbe nella periferia di un' *Elisse*, di cui l'asse maggiore farebbe eguale all'aggregato de' diametri de' *mobili*; l'asse minore farebbe = $+ 2dn - 2ng + 2gb$; cioè che è lo stesso, = $+ 2dl - 2ld + 2dm = + 2dm$.

Perchè trovandosi il punto H per le prove addotte nel luogo sopraccitato (2) nella circonferenza di un' *Elisse*; se il raggio gb faccia un altro arco da b a z eguale all'arco già fatto da H a b nel primo supposto; cosicchè gli angoli fng, zgh siano fra essi eguali, e ciascuno doppio dell'angolo ndg , il punto z si troverà da una parte in
S
quella

(1) Part. III. Artic. III.

(2) Part. III. Artic. IV.

quella precisa situazione, che si trova H dall'altra. Onde benchè si trovi in parte a quella opposta, con tutto ciò farà nella circonferenza della medesima *Elisse*. Perchè poi i raggi de' *mobili* in due opposte parti *a*, e *K* si dilungano in una *retta ad + dK*, l'*asse* maggiore viene ad esser eguale alla somma dei detti raggi due volte presa, cioè alla somma dei diametri. E perchè in due altre parti opposte verso *l*, ed *o* detti raggi si rannicchiano tutti tre in uno, cosicchè *n* coincide con *l*, *g* con *d*, *b* con *m*, l'*asse* minore risulta = $+ 2 dn - 2 ng + 2 gb$, cioè eguale $+ 2 dl - 2 ld + 2 dm$; onde distrutte per li opposti segni le due eguali quantità $+ 2 dl - 2 ld$, resta di positivo solo $+ 2 dm$ eguale al diametro del *terzo Mobile*. Tuttavia quanto si è detto (*Fig. 3.*) in proposito della generazione di questa *Elisse*, e quanto è vero anche nel caso della *Fig. 4.* (nel caso dico, che le altre cose stanti come sopra, i raggi *dn* del *primo Mobile*, ed *ng* del *secondo* non siano eguali, ma siano tutti tre qualunque dati) è bene che si confermi con una dimostrazione generale, che è la seguente.

ARTICOLO QUINTO.

Linea retta, ed *Elisse* generate per il moto composto di un numero di cerchi qualunque dato.

PRimo, dunque siano dati quanti, e quali si siano raggi de' *mobili* (*Fig. 5.*) *Cn*, *nb*, *bb* ec., l'un all'altro insieme connessi.

2. La velocità del *primo Mobile* sia suddupla di quella di ciascun altro.

3. Tutti muovansi alternatamente l'uno dell'altro in verso contrario.

Dico che il punto *b* della periferia d'un qualunque ultimo dato *mobile*, si troverà nella circonferenza di un'

Elisse

Elisse, di cui l'*asse* maggiore pareggerà la somma dei diametri di tutti i *mobili* dati, e l'*asse* minore sarà = al raggio due volte preso Cn del *primo Mobile* — il due volte preso raggio nb del *secondo Mobile* + il due volte preso raggio bb del *terzo* — ec. (alternando sempre così la situazione de' segni opposti.

La linea GP eguale alla somma dei diametri dei *mobili* dati, sia tagliata per metà in C , e ad angoli retti dalla perpendicolare RC . Poi fatto centro in C si descriva il circolo PKG ; indi nella perpendicolare CR sia trasportata la quantità Ce eguale al raggio Cn del *primo Mobile*; ed appresso fatto centro in e , si segni la quantità ef eguale al raggio nb del *secondo Mobile*; poi fatto centro in f sia fA eguale al raggio bb del *terzo Mobile*; e così via via fin che siano stati trasportati tutti i raggi de' *mobili* dati. Perchè per ultimo fatto di nuovo centro in C , e descritto un altro circolo ApB coll' apertura CA . AB sarà l'*asse* minore = + $2Ce$ — $2ef$ + $2fA$ = $2CA$. E l'*asse* maggiore sarà GP = $2Cn$ + $2nb$ + $2bb$ = $2CP$.

Per provare ora che il punto b della periferia di un qualunque dato *mobile* sia nella circonferenza di un' *Elisse*. Sempre nella prodotta del raggio Cn del *primo Mobile* si trasportino tutti i raggi, che nella serie de' *mobili* dati sono ne' luoghi impari. Qui ven' ha un solo bb raggio del *terzo Mobile*, e però si faccia nu eguale a detto bb . Poi dal punto u , che verrà qualunque per il punto b si tiri uz che occorra nella prodotta GP . Ora per causa delle date velocità, si può prescindere da tutti i *mobili* Cn , nb , bb ec., come se non vi fossero, e come se la questione versasse sul solo raggio Cu di un *primo Mobile* immaginario, e sul raggio uz pure di un supposto *Epiciclo*. I quali primo, sono eguali perchè opposti ad angoli eguali per causa delle velocità; secondo, la velocità del *primo Mobile* immaginario Cu è suddupla di quella del supposto *Epi-*

ciclo uz , non solo a cagione delle date velocità, ma anche perchè l'angolo interno KCz , è sudduplo dell'esterno Kuz ; terzo, usando attenzione verremo fatti accorti, che i moti procedono in verso contrario. Onde per la dimostrazione veduta nel sopraccitato luogo (1) risulta, che il punto b del *terzo Mobile* bb , o sia anche S di un qualunque altro *quarto Mobile* bS a quello annesso, o qual altro punto che si trovi nell'area del supposto *Epiciclo* uz , sta certamente nella circonferenza di un' *Elisse*.

Ma se il *quarto Mobile* invece di esser eguale a bS fosse più tosto eguale a bz , il punto z come punto della periferia del supposto *Epiciclo* uz , si troverebbe assolutamente nella *retta* zPG . Simili esempj somministra anche la *Figura* 6., perchè dato che sia, per esempio, da dimostrare che il punto f sia nella circonferenza di un' *Elisse*, nella prodotta del raggio ab del *primo Mobile* si trasportino come sopra i raggi, che nella serie de' *mobili* dati sono in luogo impari, quali qui sono due Cd , ed ef . Si faccia dunque $bn = Cd$. $nl = ef$. Poi dal punto l che verrà si tiri per il dato f in g la *retta* lg , che farà eguale ad la ; e si fingano distrutti tutti i *mobili* dati, e non altri rimanere, che al raggio di un *primo Mobile* immaginario, ed lg raggio di un supposto *Epiciclo*. E poi si provi, come sopra, essere il punto f , come preso nell'area dell' *Epiciclo* lg , costituito nella circonferenza di un' *Elisse*. Inoltre se il punto dato fosse g , perchè questo g sta nella periferia di detto supposto *Epiciclo* lg , si troverà costantemente nella *retta* ao .

Quindi si può primieramente raccogliere, che tutte le *Elissi* descritte (*Fig.* 5.) o dal punto b , o dal punto b , o dal punto S (così *Fig.* 6. dal punto d , dal punto f ec.) siano tutte concentriche; e di più anche parallele, ovvero simili quelle che saranno descritte da' punti presi

(1) Part. III. Artic. IV.

fu d'un medesimo raggio di un *mobile* nella serie numero impari, come quelle che farebbero descritte dal punto b , e punto b ; perchè quantunque il punto b sia stato considerato come ultimo del raggio nb , non resta che insieme non sia anche primo del raggio bb ; onde le *Elissi* descritte da questi due punti, oltre l'essere concentriche, faranno anche parallele, perchè le loro periferie faranno continuamente distanti lo spazio bb , voglio dire, che faranno simili.

2. Che se i *mobili* sono eguali, le *Elissi* non possono venir descritte che dai *mobili*, che nella data serie sono ne' luoghi impari, come dal 3. *Fig. 6.* Se poi non sono eguali (*Fig. 5.*) ponno descriversi da un *mobile* qualunque nb , bb , bs ec. eccettuato il *primo Mobile* Cn , che descrive sempre un circolo. La *linea retta* poi non viene descritta, che dai *mobili* che nella data serie sono ne' luoghi pari, come dal *quarto Mobile* bz (*Fig. 5.*), e dal *secondo*, *quarto*, *sesto* (*Fig. 6.*).

3. Per sapere (*Fig. 5.*) se un *mobile* bz che nella data serie sia in luogo pari, descriverà una *retta* o no, si farà come poc' anzi si è fatto, per determinare l'*asse* minore dell'*Elisse* descritta dal punto b , e che qui giova ripetere. Tirata prima una *retta* GPz che stia per l'*asse* maggiore, e dal centro C del *primo Mobile* eretta una perpendicolare CR , si farà centro in C , e coll'apertura Cn raggio del *primo Mobile* si segnerà in detta CR la quantità Ce ; poi fatto centro in e coll'apertura nb si noterà ef . Indi fatto centro in f coll'apertura bb si noterà fA ; e per fine fatto centro in A coll'apertura bz , se z viene a coincidere nel centro C del *primo Mobile*, z si muoverà in una *retta*; se non coinciderà, il punto z non potrà fornire che un' *Elisse*.

ARTICOLO SESTO.

Cause moderatrici delle Linee messe per esemplari delle innumerabili derivanti dal moto composto di tre circoli.

Non si può abbastanza ridire quanto nitide e leggiadre Curve nascano dal moto composto di tre circoli, e benchè n'avesi già preparate di bellissime descritte col metodo per punti; non ostante sopprese le migliori, ho ritenute queste poche più semplici; perchè dalla maggior parte di esse prendo occasione di fare a luogo qualche necessaria osservazione. Sono dunque:

Figura 1. Tav. 19.

1. Raggi de' mobili eguali.
2. Velocità eguali.
3. Mobile 2.^o, e 3.^o contro al 1.^o

Figura 2.

Mobile 1.^o, e 3.^o contro il 2.^o: Il resto come sopra.

Figura 3.

1. Raggi del 1.^o Mobile, e 2.^o eguali. Raggio del 3.^o Mobile qualunque.
2. Velocità del 1.^o, 2.^o, 3.^o :: 1. 2. 2. * Siami per brevità permessa, sempre che occorra questa espressione, la quale significa che le velocità del 1.^o, 2.^o, 3.^o Mobile sono in proporzione ordinata, come li tre numeri 1. 2. 2.
3. Mobile 1.^o, 3.^o contro il 2.^o

Figura 4. e 5.

1. Raggi qualunque.
2. Velocità del 1.^o, 2.^o, 3.^o :: 1. 2. 2.
3. L'uno dell'altro alternatamente in verso contrario.

Fig. 6.

Figura 6.

1. Raggi sei eguali.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.°, 4.°, 5.°, 6.° :: 1. 2. 2. 2. 2. 2.
3. L'un dell'altro alternatamente in contraria parte.

Figura 7. Tav. 20.

1. Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 9.
2. Velocità del 1.°, 2.°, 3.° :: 1. 2. 4.
3. *Mobile* 2.°, e 3.° contro al primo.

Figura 8.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 5. Il resto come nella *figura 7.*

Figura 9.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 4. Il resto come nella *figura 7.*

Figura 10.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 3. Il resto come nella *figura 7.*

Figura 11.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 2. Il resto come nella *figura 7.*

Figura 12.

Raggi del 1.°, 2.°, 3.° :: 4. 2. 1. Il resto come nella *figura 7.*

* Qui è da notare come dal solo raccorciamento del raggio del 3.° *Mobile*, risulti quasi per gradi la trasformazione della *Fig. 7* in quella dell' 8, 9, 10, 11, 12, che sono 6; numero che però con ragione anche nel calcolo delle Curve provenienti dal moto composto di tre *mobili* si è adoperato, come pure si fece nel calcolo instituito per quelle generate per il moto composto di due soli *mobili*.

Secondariamente è d'avvertire che il 3.^o *Mobile* descrive le sei figure suddette, mentre il suo centro è portato per la circonferenza di un' *Elisse*.

Figura 13. Tav. 21.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del 1.^o, 2.^o, 3.^o :: 1. 2. 4.
3. L'un dell'altro in verso contrario.

Figura 14.

1. Raggi eguali.
2. Velocità del 1.^o, 2.^o, 3.^o :: 1. 2. 3.
3. L'un dell'altro in verso contrario.

Figura 15.

Il 2.^o, e 3.^o *Mobile* contro il 1.^o Il resto come nella *figura 13.*

Figura 16.

1. Raggi eguali.
2. Velocità eguali.
3. Tutti in conseguenza. Se fosse il 1.^o, e 2.^o contro il 3.^o, verrebbe la *Fig. 1. Tav. 15.*

Figura 17.

1. Raggi del 1.^o, 2.^o, 3.^o :: 4. 1. 1. Il resto come nella *figura 7.*

Figura 18.

Mobile 2.^o, e 3.^o contro il 1.^o Il resto come nella *fig. 14.*

Figura 19. Tav. 22.

1. Raggi del 1.^o, 2.^o, 3.^o :: 2. 2. 3.
2. Velocità 1.^o, 2.^o, 3.^o :: 1. 4. 4.
3. Il 2.^o, e 3.^o contro il 1.^o

* Notate, che nelle *figure 13., 14., 15., 18.*, mentre il 3.^o *Mobile* descrive la Curva, il suo centro è portato dal 2.^o *Mobile* per una *retta*. Li archi però percorsi dal raggio del 3.^o *Mobile* non sono nella medesima ragione delli spazj percorsi dal suo centro per detta *linea retta*. Ma ciò che è

mi-

mirabile, questa *linea retta* descritta dal 2.^o *Mobile* ritiene di maniera la natura di un' *Elisse*, che il resto pari, niente differiscono le Curve descritte da detto 3.^o *Mobile*, o il suo centro sia portato nella periferia di un' *Elisse*, o nella direzione di detta *linea retta*.

Notate per ultimo, cosa maravigliosa, che per il moto composto di tre, o più *mobili*, si possono conseguire anche quelle figure regolari delle quali i lati siano quasi retti, come la *Fig. 8. Tav. 16.* E ciò che è molto più osservabile si possono combinare le cause moderatrici in diverse maniere, e nulla di meno fare, che venghi a risultare la medesima Curva proposta.

ARTICOLO SETTIMO.

Curve Planetarie del Signor di Varignon comprese negli usi di un Istromento di tre cerchj simile alla Penna Geometrica.

LA Curva determinata dal Sig. di Varignon (1), e che s'immagina essere descritta in un piano dal centro di un Pianeta, viene dal moto composto del centro di detto Pianeta progrediente nell' elittica speciale sua orbita, mentre detta orbita è portata dalla linea degli Absidi intorno a un foco. Onde l' Istromento dovrebbe esser composto di 3. *mobili*: due destinati a generar l' orbita elittica, ed uno a far, in luogo della linea degli Absidi, girare detta orbita. Conciossiacchè (2) altrove si sia rimarcato, come (*Fig. 4. Tav. 15.*) agli assi *ab*, ed di un' *Elisse* si determinino i raggi *Cn*, *na* dei *mobili generatori*, muovendosi i quali con le dovute velocità, si conseguisca la proposta (sia per esempio di Mercurio ☿) orbita *aebd*. Ma qui si

T

pre-

(1) *Memoires de l'Academie*. An. 1703. p. 348.

(2) Part. III. Artic. IV. Annotaz. III.

pretende inoltre, che mentre detta orbita si descrive intorno al centro C , l'asse suo maggiore, o sia la linea degli Absidi ab volgasi d'intorno al foco F ; cioè (che torna lo stesso) sia il centro C di detta orbita dal raggio FC di un altro *mobile* CR portato per la periferia CR d'intorno all'*immobile* centro F .

Per lo che primo, sono necessarij tre *mobili*: Il *primo* CR , di cui è raggio FC ; il *secondo* ζno , di cui è raggio Cn ; il *terzo* $a qf$, del quale è raggio na .

2. La velocità del *primo Mobile* farà alla velocità del *secondo*, come il moto dell' Affelio del Pianeta dato \propto ad una intiera rivoluzione di detto Pianeta nella sua orbita; cioè a gradi 360. Imperciocchè mentre il *mobile* ζno compie una rivoluzione, il punto a del *Mobile* $a qf$ descrive l'intiera orbita $aebd$. La velocità poi del *secondo* a quella del *terzo* farà come detta intiera rivoluzione, cioè gradi 360. ad una rivoluzione raddoppiata, che è 720. Perchè acciocchè i *Mobili* $a qf$, ζno siano disposti ad un' *Elisse*, la velocità del *terzo Mobile* $a qf$ deve essere doppia di quella del *secondo* ζno .

3. I moti del *primo*, e del *terzo Mobile* faranno ad un medesimo verso, perchè così procede ad un medesimo verso tanto il moto dell' Affelio, come la direzione del Pianeta nella sua orbita: Voglio dire, che a quella medesima parte che l' Affelio avanza da C verso R , anche il Pianeta cammina sulla sua orbita da a verso e . Il moto poi del *secondo Mobile* ζno farà in verso contrario dell' uno, e dell' altro, cioè il raggio Cn si muoverà verso ζ . Conciosiacchè non si possa dal *terzo Mobile* descrivere un' orbita ellittica, se non cammina in verso contrario del *secondo Mobile*.

Per altro si vuole qui aver detto, come alla descrizione di queste Curve planetarie un Istromento compor si dovrebbe, ma non come si possa; anzi ella è per mio giudizio

dicio impossibile. Perchè essendo, secondo Keplero, il moto annuo dell' Affelio di Mercurio = 1. 45", e compiendo detto ☿ la sua rivoluzione in giorni 87., il moto angolare dell' Affelio di ☿ corrispondente a detti giorni 87. risulta in circa = 25". Perchè 365. (moto annuo dell' Affelio)

87. giorni (rivoluzione di detto ☿) :: 105". $\frac{9135!}{365} = 25 \frac{2}{73}$ "

Laonde lasciando il rotto $\frac{2}{73}$, li secondi 25 staranno per la velocità del *primo Mobile*, che rappresenta il circolo dell' Affelio. Li gradi 360. per la velocità del *secondo Mobile*, che sta per l'intera rivoluzione di ☿ intorno al Sole, ed una doppia rivoluzione, cioè gradi 720. per la velocità del *terzo Mobile* ordinato a causare un' *Elisse*. Dunque le velocità del *Mobile primo, secondo, terzo* saranno in proporzione ordinata, come li tre numeri :: 1. 51840. 103680.

Ma perchè per eccitare i *mobili* alle dovute velocità, uso da noi si fa de' cilindri, o ruote dentate che siano in data ragione; se il diametro di una ruota si determini di sole tre linee del piede di Parigi, il diametro dell'altra verrebbe piedi 12960., il diametro della 3. ruota piedi 25920. E quantunque io sappia, che si potrebbero diminuire i diametri di queste ruote coll'accrefcere il numero di esse; nulladimeno i moti poi ne verrebbero assai più implicati, e l'effetto di questi movimenti riuscirebbe sempre più difficile. Onde seguita che se si lusingasse taluno di comporre una Macchina precisamente ordinata al presente sistema del Mondo, andrebbe molto errato, come si accennerà anche nel seguente Articolo.

ARTICOLO OTTAVO.

Difficoltà annesse al progetto di una Macchina rigorosamente ordinata al presente sistema del Mondo.

Benchè non sia per anco nota agli Astronomi la distanza, e grandezza assoluta de' Pianeti, che si spera di poter determinare l'anno 1761. per il passaggio di Venere sotto il Disco Solare; nonostante ad ordinare una Macchina che rappresentasse il presente sistema del Mondo, certo è che bastano le distanze, e grandezze relative, su le quali, conforme il sistema di Copernico (1), non lasciarono altri di proporre una ingegnosissima, ed un'altra a spiegare i fenomeni de' corpi celesti, è stata, non a molto, inventata dal Chiarissimo Sig. Gasparo Charlton (2). Ma una trovarne nel supposto delle orbite ellittiche, e che regga anche al moto degli Affelj, parmi per ogni modo assai difficile. Conciossiacchè nella Macchina ordinata al sistema di Copernico, invece delle orbite ellittiche erano, per quanto ho inteso dire, circoli eccentrici, nei quali apparivano i Pianeti progredire con velocità proporzionate ai tempi. Così ivi non erano i moti degli Affelj, nè di vertigine (se non quello della Terra, e del Sole); ma due soli moti: un principale che traeva la Macchina, dirò così, dalla sua immobilità, ed un altro da quello dipendente, onde ciascun Pianeta camminava nella sua orbita. Ma nel caso nostro occorrebbe un principal movente, che nella data ragione promovesse i centri di ciascun Affelio. Da questi dipendono due altri *mobili* affetti per mezzo di molte ruote delle dovute velocità per formare le orbite ellittiche. Indi
i globi

(1) Una ven' ha a Firenze fra le macchine di S. M. Imper.; un'altra ven' è in Padova del Sig. Dott. Masi.

Intendò dire che una pur stupenda sia in Vienna, ed un'altra a Leiden.

(2) In Londra l'anno 1735.

i globi rappresentanti ciascun Pianeta , di cui sia noto il moto proprio di vertigine, dovrebbero con una certa legge volgersi d'intorno ai propri *assi*. Facendo questi col piano delle orbite rispettive quell'angolo, che fosse altresì noto. Poichè già si sa che peranche non si è dagli Astronomi rilevato nè il moto di vertigine di Mercurio, e Saturno, nè l'angolo che probabilmente anch'essi fanno con la loro orbita; perchè o il troppo splendore del Sole vicino, o la enorme lontananza vietò fin'ora, che gli osservatori del Cielo discernessero le macchie, onde giudicarono detto angolo, e moto di vertigine degli altri Pianeti. Se poi dovessero in questa Macchina aver luogo anche i Pianeti secondarj, la Luna, i satelliti di Giove, e di Saturno, ed il suo stupendo anello, la cosa andrebbe tanto innanzi, che ingegno umano non vi potrebbe per niente. Pure quando non si badasse al moto degli *Affelj*, che a se soli obbligano tante ruote, il progetto prenderebbe nel resto qualche probabilità; e si potrebbe forse sperare che in Città, dove si trovassero grandi Matematici, ed insigni Artefici si potesse in alcuni anni ben condurre una tal opera; costruendola appunto Pianeta per Pianeta a similitudine della mia *Penna Geometrica*.
Ma chi sa?

Forse un dì fia che la presaga Penna

Osi scriver di ciò, quel ch'or n'accenna.

ISTROMENTO X.

ARTICOLO PRIMO.

Per la descrizione organica della Loxodromia, e de' Poligoni rettilinei regolari.

DOvendosi nel genere de' circoli non senza ragione comprendere anche le spirali, e la linea retta, quelle come periferie di un circolo, che attualmente s'incammina all'infinito, questa come periferia di un circolo già arrivato all'infinito. Ben si scorge, che il compasso comune, come mancante di dette linee, è (ciò che nissuno avrebbe mai creduto) in un certo modo imperfetto. Al quale però per tal cagione, parmi che sia preferibile il seguente, il quale, mentre da me vien ordinato alla *Loxodromia*, non può non descrivere le tre suddette linee *circolo*, *spirali*, e *linea retta*. Imperciocchè supposto che la *Fig. 2.* (*Tav. 23.*) sia parte della superficie di un Globo terraqueo, quando viaggia un Bastimento sempre cammina o sopra un dato parallelo *QE*, *BA* ec., o sopra un dato meridiano *PQ*, *PG* ec., o sopra una linea curva *LE* detta *Loxodromia*, di cui una semplice proprietà è, che la sua tangente forma con tutti i meridiani un dato angolo *PLE*, *PCE*, *PHE* ec. sempre il medesimo. Però devesi aver cura, che la fabbrica del presente Istromento abbia rapporto a tutte queste differenti direzioni per descriverle, quando che sia, sopra il suddetto Globo.

Compasso Loxodromico adunque chiamo propriamente il proposto Istromento (*Fig. 1. Tav. 23.*) come quello che, quantunque da me s'impieghi a descrivere anche alcuni *Poligoni regolari*, specialmente però è stato concepito per la suddetta *Loxodromia*. Egli è nel vero un *compasso*, di cui l'un piede *MC* sempre sta fisso in un punto *C*, l'altro *MV* termina

mina in una ruota R mobile intorno ad un piccol ganghero, che occupa il suo centro, e che indi si piega, e con una cannetta V abbraccia, e poi con una viterella sta fermo a detto piede MV. Ma girando la cannetta V intorno a detto piede, prima di stringer la vite, si può fare, che il piano della ruota rappresentato per xz costituisca sul piano della carta col raggio RC, ovvero rc , un angolo crz , ovvero crx eguale ad un qualunque dato. La noce poi, o nodo M deve esser assai più labile, e presto che negli altri compassi non è.

Da questa semplicissima costruzione seguita: Primo, che se il piano della ruota xz faccia col raggio RC un angolo retto, risulti la descrizione di un *circolo*, il quale è maggiore, o minore, secondo che da prima il compasso aveva maggiore, o minore apertura; la quale apertura volgendo l'Istromento non può alterarsi, perchè non essendo la ruota inclinata più da una parte, che dall'altra, non può nemmeno mordere la carta o più in fuori, o più in dentro, onde si allarghi, o si stringa il compasso. Secondo, se il piano della ruota xz non fa verun angolo con detto raggio RC, aprendo sempre più l'Istromento, ma non già muovendolo in giro, si descrive una *retta*, da cui per la medesima ragione addotta, non può mai declinare. Terzo, se il piano suddetto forma con detto raggio un angolo qualunque che non sia retto, e muovasi poi in giro l'Istromento o dalla parte dell'angolo ottuso crx , o da quella dell'acuto crz , perchè e nell'uno, e nell'altro caso la ruota inclinata può mordere o più in fuori, o più in dentro la carta, o nel primo caso dilungarsi sempre più dal centro C, o nel secondo s'accosta, e seco trae il piede MR, e lo determina a formar con l'altro piede MC l'angolo RMC o sempre più, o sempre meno aperto; e quindi intanto dal margine dentato di essa ruota descrivesi sul piano della carta una *spirale*, la quale viene appunto
ad

ad essere la proposta *Loxodromia*, perchè il piano della ruota, cioè la sua tangente (giacchè il piano della ruota è sempre per la costruzione tangente alla curva) in qualunque posizione forma col raggio CR un angolo costante.

L'Istrumento da me perciò messo in prova somministra gentilmente queste tre linee, che sono un'immagine in piano delle curve, che un Bastimento descrive sulla superficie sferica del Mare. Perchè il centro C (*Fig. 1.*) si può prendere (*Fig. 2.*) per il Polo P; il raggio CR mobile intorno a C per un meridiano, che come rotante intorno a detto Polo P, serve per tutti gli altri meridiani PQ, PG ec. Il piano αz della ruota R, costituente con detto raggio rc un angolo qualunque, può tutti i rombi della rola nautica rappresentare. Onde quando di questo compasso l'un piede MC fosse posto nel Polo P (*Fig. 2.*) di un globo terrestre artefatto, l'altro, secondo che il piano della ruota diversamente inclinasse a detto raggio CR (*Fig. 1.*); ovvero PQ, PG ec. (*Fig. 2.*) descriverebbe sulla superficie di esso globo, o qualunque parallelo QE, BA ec., o un qualunque meridiano PQ, PG ec., o la *Loxodromia* LE conveniente ad un rombo, o sia angolo *Loxodromico* qualunque dato.

Ma quantunque io stia sicuro, che la prefata costruzione non possa mancare del divisato effetto, tuttavia mi parrebbe ben fatto (ciò che però non è precisamente possibile) che la ruota R (*Fig. 1.*), invece di cangiar quell'angolo d'inclinazione verticale, che fa col piano orizzontale, cioè l'angolo MRC, stasse piuttosto del tutto verticale a detto piano, qualunque fosse l'apertura RMC. Onde volendo che, per quanto meccanicamente è permesso, l'Istrumento supplisca anche a ciò, dovrà esser concepito di maniera che (sia sopra una superficie *piana*, sia sopra una *convessa*) la ruota sempre appunto si mantenga verticale a detta superficie.

Per

Per la *superficie piana* potrebbesi ideare l'Istromento come nella *Fig. 3.*, facendo che un regolo RH si unisse nel sito inferiore all'estremità R di una verghetta MR mobile d'intorno al punto M dell'asta CH ; e nel sito superiore ricevesse in una fessura l'estremità H di detta asta CH . Perchè per le dottrine altrove (1) esposte, quando MC , MH , MR faranno eguali, muovendo l'Istromento intorno al centro C , e qualunque apertura CMR acquistando sempre il punto H , caderà perpendicolarmente sul punto R ; e però il regolo RH farà sempre verticale al piano RC ; e conseguentemente anche la ruota, che per mezzo della cannetta, e vite V devesi connettere col suo pivolo parallelo a detto regolo RH , procurando che la sola ruota, e non già il regolo RH giunga a toccare il piano della carta.

Nel caso poi della *superficie sferica* RP (*Fig. 4.*) fermisi la ruota R con la vite ad un gambo Rd , che sia parte d'un parallelogrammo, snodato, e composto di quattro regoli, delli quali li Rd , RM , dq siano eguali al semidiametro del dato globo; e il regolo Pq eguale a tutto detto diametro PA . Imperciocchè avverà, che quando con il regolo qP fatto centro in P , e la mano posta in M si faccia muover in giro l'Istromento, qualunque sito R i denti della ruota acquistaranno rispetto al Polo P , nulladimeno il piano del gambo dR parallelo al piano di essa ruota, si conserverà sempre verticale a detto globo, e prodotto passerà per mezzo del suo centro. Il che è evidente, perchè dai punti P , ed R condotti al centro C i raggi RC , PC ; essendo CR , RM , MP , PC per la costruzione eguali, le rette CR , PM faranno parallele; ma PM è per la costruzione parallela anche a dR . Dunque giacchè ambidue dR , RC sono parallele ad una medesima retta MP , sono anche poste indiretto verso il centro C .

V

Val

(1) Istrom. IX. Part. III. Artic. II.

Val a dire che dR non inclinerà verso A , o verso P punti presi su quel medesimo meridiano, che passa per i due punti P ad R . Quindi quel diametro della ruota, che passa per il punto di contatto R , farà per ogni verso verticale alla superficie del detto globo, e per conseguenza prodotto passerà sempre per il suo centro C .

Per altro l'Istrumento della *Fig. 3.* può servire anche a quello della *4.* con l'aggiunta d'un solo regolo qd . Ma ciò che manca nell'una, e nell'altra costruzione è, che l'estremità R del regolo MR , e il margine della ruota non ponno, come dovrebbero, e come abbiamo detto pure in principio, giungere a toccare esattamente nel medesimo piano.

ARTICOLO SECONDO.

Descrizione organica de' Poligoni rettilinei regolari.

Quantunque la *Penna Geometrica* supplisca, siccome abbiain accennato, facilmente a quest'uopo, non ostante perchè questo Istrumento meno importa di spesa, ed è sì nell'uso, che nella costruzione più spedito, sembrami perciò preferibile a quella. E' dunque da considerare in questa organica descrizione de' Poligoni, che ella si potrebbe concepire in due differenti, ed egualmente facili maniere; cioè o supponendo costante un medesimo circolo che debba circoscriversi a' detti Poligoni, e modificando la lunghezza de' lati far sì, che un medesimo circolo venisse a circoscrivere diversi di detti Poligoni: o tenendo fermo, e costante un medesimo lato, modificando il circolo circoscrivente, far che un medesimo lato divenghi lato di diversi Poligoni. Un esempio del primo caso sarebbe, se fosse descritto un circolo per i punti a, c, d della *Fig. 2. Tav. 18.*, perchè detto medesimo circolo verrebbe circoscritto ad un Pentagono di cui sarebbe lato ad , ed insieme da un decagono di cui sarebbero ac, cd due lati.

La

La medesima figura somministra un esempio anche del secondo caso, in cui qd lato di un Pentagono descritto nel circolo abQ , farebbe anche lato di un decagono descritto in un circolo, di cui fosse a il centro, e raggio la retta ad . Queste cose sono evidenti, ed è superfluo il trattenervisi di più, e lasciando per ora di produrre un Istromento relativo al primo caso, applicarò solo al secondo il presente Istromento della *Loxodromia*.

Laonde suppongasi primieramente, che nell'area della ruota R (*Fig. 1. Tav. 23.*) sia dal centro verso alla periferia R scolpita una cavità, in cui, come in quella delle penne de' compassi, messovi dell'inchioostro, possa detta ruota lasciare per ogni sua rivoluzione segnato un punto sul piano della carta, secondo sia il compasso correduto di un quadrante NQ fisso al piede CM in Q , e labile nell'altro piede MR , se non si stringe con la vite, terzo si fermi con la vitarella V la cannetta, che porta la ruota R , qualora il piano di essa ruota sia ad angoli retti del raggio CR .

Ora poichè le periferie sono come i diametri, supponendo che il raggio della ruota R fosse al raggio CR , come 1 a 3 , la periferia della ruota farebbe alla periferia del circolo descritto sul raggio CR , come 1 a 3 . Sicchè (relativamente al già detto anche in proposito (1) delle Cicloidi di base circolare) farebbe la ruota R tre rivoluzioni, mentre una ne facesse il raggio CR intorno a C ; e quindi sulla periferia generata da detto raggio CR , verrebbero marcati tre punti, i quali fornirebbero un triangolo, quando fossero uniti con altrettante rette. Perciò quando il raggio della ruota è al raggio CR precisamente come 1 a 3 , facciasi sul piano laterale del quadrante NQ un segno, con insieme affisso il numero 3 ., nel punto in cui la gamba MR , stante tale apertura, traversa detto quadrante. Indi aprendo l'Istromento finchè il raggio della ruota sia al

V 2

raggio

(1) Istróm. IX. Part. III. Artic. IX.

raggio CR, come 1 a 4, s'incida poi su detto piano un altro segno con il numero 4 annesso ec., finchè per qualunque altra divisione si giunga a segnare su detto quadrante il segno corrispondente alla proporzione di 1 a 5, di 1 a 6, di 1 a 7, di 1 a 8, fin' a quella di 1 a 12, e più ancora se piacesse di portar l'affare anche più oltre.

Ora quando occorresse, per esempio, la descrizione organica del Ettagono, aprasi da prima l'Istrumento preparato così con la maggiore esattezza, finchè la gamba MR arrivi, traversando il quadrante, a collimare, e coincidere nel segno appunto che accompagna il 7 numero scolpito, come sopra, nel piano laterale del suddetto quadrante, ed ivi con la vite si arresti; perchè facendo indi muovere in giro l'Istrumento, la ruota R farà 7. rivoluzioni intanto che il compasso n'avrà compita una intorno al centro C; e quindi resteranno sul piano della carta segnati dalla ruota 7. punti distribuiti in eguali distanze sulla periferia del circolo descritto con il raggio CR intorno a detto centro C; i quali uniti poi con altrettante rette verranno a fornire l'Ettagono proposto.

E' superfluo l'avvertire: Primo, che se dato fosse qualunque altro Poligono da descriversi, avrebbesi ad aprire l'Istrumento fino al numero corrispondente a quel tal'altro Poligono dato. Secondo che volendo un dato Poligono, o più grande, o più piccolo, dopo segnati nel piano i punti del Poligono dato, e prima d'unirli con altrettante rette, basta condurre de' raggi indefiniti dal centro C a detti punti, e fatto centro nel medesimo C, tagliar detti raggi con un qual altro maggiore, o minore circolo che più piace; giacchè è evidente, che le rette congiungenti i nuovi punti d'intersezione farebbero tuttavia lati del medesimo proposto Poligono. Terzo si potrebbe pensare, e di leggiero riuscire nella fabbrica di una tal ruota R, la quale lasciasse segno sulla carta, quando di tutta la sua periferia, e quando di un sol punto, acciò la medesima potesse agevolmente, e comodamente servire tanto per la descrizione della *Loxodromia*, quanto per quella de' Poligoni.

QUADRANTE LOXODROMICO

O S I A

*Istromento per rilevare la quantità del viaggio
di un Bastimento.*

QUADRANTE
LOXODROMICO

O 2 1 4

Uffamente per trovare la quantità del viaggio
di un Baffante.

Il Quadrante Loxodromico è un Quadrante
che ha per linee i Meridiani e i Paralleli
e serve per trovare la quantità del viaggio
che si fa in un Baffante.

Per trovare la quantità del viaggio
che si fa in un Baffante, si deve
trovare la differenza di longitudine
tra il luogo di partenza e il luogo di arrivo.

La differenza di longitudine si trova
facilmente nel Quadrante Loxodromico.
Si deve prendere la differenza di longitudine
tra il luogo di partenza e il luogo di arrivo,
e questa differenza si moltiplica per il seno
della latitudine del luogo di partenza.

Il prodotto che si ottiene è la quantità
del viaggio che si fa in un Baffante.

P R E F A Z I O N E .

A Cciocchè la scienza del Mare salga all'ultimo grado di perfezione, niente più restando (trattone se sempre si potesse navigare per il Rombo esattamente), che poter determinare i gradi di Latitudine, e Longitudine del Luogo in cui si è, senza dover ricorrere alle osservazioni del Cielo, che spesso ci vien tolto di vista dall'importune nubi; e perciò essendo mestieri di attenersi alla Terra, altri già tentarono in varj modi questa comodità procacciarsi. Ma o che il Sommo Autore d'ogni bene voglia riservar questo vantaggio ad altri più fortunati tempi avvenire, o che pur anche non sia mai per concederlo, certo è che qualunque argomento finora adoperato, riuscì alla prova quasi che affatto inutile. E benchè forse tanto sia per essere anche di un Istromento proposto a tal uopo da me, pure non ho dubitato di produrlo, non per vaghezza di lode, o di premio, ma perchè parmi dovere che le nuove cose, qualunque sianse, si rendano pubbliche. Conciossiacchè spesso occorra, che per la debolezza dell'ingegno umano le invenzioni primitive non giungendo sino a quel fine cui erano indirizzate, le vi furono poi recate da altri, che calcarono quelle medesime vestigia.

Intende per tanto il mio Istromento a manifestare in un Quadrante la quantità del viaggio percorso da un Bastimento; data la quale insieme coll'Angolo Loxodromico, e la Latitudine del Luogo d'onde si sciolse, si rileva la Latitudine, e Longitudine del Luogo, in cui si è.

ARTICOLO PRIMO.

Descrizione d'una Macchina Drom-hydro-metra applicata a misurare il viaggio di un Bastimento,

Perduto il Cielo, parmi di ravvisare in Terra tre luoghi, nei quali siano per essere con commendabile industria collocati gl'Istromenti costrutti per l'effetto suddetto. Il primo nell'aria, applicandogli a misurare la forza de' venti, per quindi il viaggio dei Bastimenti rilevare; come pensarono il Chiarissimo P. Milliet, ed il Celebre Sig. Marchese Poleni, cui per ciò immortal gloria ne avvenne. Il secondo è sulla superficie del Mare, dove Vetruvio, e Mellio consigliarono che fosser poste delle ruote mobili per lo andare del Bastimento. Il terzo (stato finora, ch'io sappia, impensato da altri) è da me scelto sott'acqua. E avvegnacchè le ruote proposte da Vetruvio, e da Mellio soggiacciono ad alcuni (1) difetti; tuttavia per le difficoltà, che s'incontrano anche negli altri Istromenti, (presa l'idea da una ruota già fin dello scorso secolo inventata (2) per il moto perpetuo) ardisco richiamarle in pratica, come quelle che immerse a grande altezza d'acqua, pare (bene, o mal che mi apponga) che ci avrebbero a promettere miglior fortuna.

Si osservi dunque, che nella *Fig. 1. Tav. 24.* è delineato il piano di un Timpano di legno, o di metallo, vuoto nel mezzo, e che deve essere dentro, e fuori lavorato al torno perfettamente, e mobile d'intorno al proprio asse R, secondo l'ordine dei numeri 1, 2, 3, 4 ec., corredato di 8. ali di ferro distribuite in eguali distanze sulla sua peri-

(1) Ricordati da Claudio Perralto nelle sue osservazioni sopra Vetruvio, e del Sig. March. Poleni nella sua manie-

ra di misurare il corso di una Nave.
(2) Da Alessandro Capra nella sua Architettura civile, e militare.

periferia. Queste ali s'intendano snodate, e mobili su i rispettivi gangherini in modo, che se il centro della loro gravità cade dentro il piano di esso Timpano, rimanghino ferme, e distese sopra detta periferia; se cade fuori del piano a destra, cadano anch'esse, e per l'intoppo di un calcagnetto (lungo la 5. parte in circa della lunghezza di dette ali) rimanghino nella direzione de' raggi R 7, R 9, se per fine il centro della loro gravità cada oltre detto piano a sinistra, pendano giù liberamente, e solo restino ai piccoli gangheri sospese. Sarebbe fors'anche non inutile l'adattare, come in *Fig. 4.* di qua, e di là dall'ali un cuojo quinci affisso alle coste 9, p; 7, d dell'ali, e quindi all'orlo del Timpano 9, 7; 7, 5; in guisa che caduta l'ala si aprisse a destra una sorta di cassetta, o feno, che poi oltre 9 a sinistra tornasse a racchiudersi, servendo in tal caso il cuojo a ritener l'ali senza altro calcagnetto.

Un simil Timpano alato, come in *Fig. 1.*, ovvero 4. si può considerare mobile sott'acqua, quando la parte destra si opponga alla corrente di un fiume. Perchè supponendo, che tutta la massa d'acqua compresa tra le parallele *im*, *pd* vada da *m*, *o*, *n*, *d* ad avventarsi contro il Timpano R, egli è fuori di dubbio, che la massa *Im*, 9 *n* non farebbe volger il Timpano, quando si supponesse privo d'ali. Perchè la forza della porzione *os*, *n9*, che tenta muoverlo secondo l'ordine dei numeri, essendo eguale alla forza contranitente della porzione *os*, *mi*, che urta nel medesimo Timpano dalla parte opposta; il Timpano viene costretto a rimanere in equilibrio. Ma la massa intercetta tra le parallele *n9*, *dp*, che urta nell'ala 7, e nell'ala 9p, perchè non incontra dall'altra parte un'egual resistenza, trae esso Timpano d'intorno al suo centro. Onde si può esso Timpano ragionevolmente chiamare Dromhydro-metra, poichè si può meglio d'ogni altro usato

Istumento adattare anche alla misura dell' acque correnti, cioè per rilevare le loro velocità relative, che in un medesimo dato tempo debbono essere, come il numero delle rivoluzioni di detto Timpano.

Ma se in vece di supporre il centro del Timpano R immobile nel suo sito, e l'acqua in cui è immerso, corrente per la direzione oR , si supponga piuttosto che sia stagnante l'acqua (o qualunque altro liquore in cui fosse immerso l'Istumento), ed il centro R tirato per la retta Ro ; siegue nientedimeno il medesimo effetto. E di questa maniera sarebbe applicabile a rilevare la gravità specifica di diversi liquori. Sicchè ecco due singolarissimi vantaggi quali si ponno da una tal ruota riportare invece del moto perpetuo; chimera che ordinariamente innamora i soli stolti.

Il Sig. Torelli, che onora grandemente Verona sua Patria sempre stata feconda, ed ora molto più d'uomini rarissimi in ogni scienza, e arte, diede prima di me alla luce la sua Macchina Idraulica, simile alla mia inventata prima che egli avesse inventata la sua, benchè non sia stata prima d'ora pubblicata per essere annessa a tutti gli altri Istumenti contenuti in questo volume. Ma se è lecito un confronto, non già suscitato da uno spirito di odiosa contradizione, ma dalla uniformità delli studj comuni, parmi che questa tre vantaggi principali riporti sopra quella. Il primo è, che essendo la mia vuota nel mezzo, l'aria rinchiusa gli toglie nell'acqua una parte della sua specifica gravità, e quindi diventa al moto più pronta. Il secondo considerabilissimo è, che nel caso del Sig. Torelli, cioè dell'ali rette, va bene che siano segate in due parti eguali, acciò quando siano ripiegate l'una sopra l'altra, l'estremo loro punto C (lettera del Sig. Torelli) trovifi in una massimamente piccola distanza dal centro del moto. Ma per ottenere questa minima distanza,

lo spediente era di costruire, come io ho fatto, l'ali non già rette, ma con una tal curvatura, che fosse quella medesima della circonferenza della ruota; seguendo quindi un di più, che l'ali presentando la loro parte concava alla corrente, men presto sfuggano alla forza di quella; e per contrario opportunamente, presentano all'acqua la parte convessa, quando bene è che meno che sia possibile resistano a detta forza. In terzo luogo, raddoppiandosi i Timpani, come appresso vedremo, e diminuendo il numero dell'ali di ciascheduno, ho avuto comodità di formar l'ali più lunghe, acciò opponessero all'azione del fluido un maggior piano, ed acciò cadendo da un più alto luogo, maggior urto risentisse la ruota, per dover girare d'intorno al suo asse.

Per altro io credo che (ciò che in alcune macchine avviene, che riportandole dal piccolo in grande, non fanno quel medesimo effetto che facevano in piccolo) in questi Timpani, benchè il diametro loro si aumentasse fino ad uno, o due piedi di Parigi, tuttavia crescerebbe la loro mobilità; perchè tanto la grossezza dell'ali, quanto della superficie di essi Timpani resta quasi la medesima (supponiamo di una linea in circa di detto piede, o di quel del Reno), e cresce solo per apportar maggior leggerezza lo spazio vuoto nel mezzo in ragion triplicata, come pure cresce in ragion triplicata la massa del fluido resistente, che si oppone al piano di più grand'ali; e per conseguenza cresce in detta ragione la forza d'inerzia di esso fluido, unica causa motrice dei sopraddetti Timpani. Ma vediamo intanto, come rilevate in un quadrante tutte le conversioni di un tal Timpano attaccato altamente sott'acqua ad una Nave, sia poi per manifestarsi la quantità del suo viaggio.

ARTICOLO SECONDO.

*Conversioni dell' Istromento Drom-hydro-metra
riportate in un Quadrante.*

PER ridurre in un quadrante il numero delle conversioni della predetta Macchina, siano (*Fig. 2.*) afferrati ad un medesimo assile EF due Timpani alati A, e B; e si concepisca il primo A mirato di fronte, corrispondere al Timpano R visto di fianco della *Fig. 1.*, e l'ali sue aver congiunte nei siti corrispondenti per le linee morte ai numeri impari di detta *Fig. 1.*; e l'altro Timpano B, benchè per maggior chiarezza sia in disegno posto senz'ali, si concepisca però averle anch'esso connesse nei siti posti dirimpetto ai numeri pari; acciocchè tirato dalla Nave verso O, il telaro di legno che porta l'assile di essi Timpani, possa, caduta un'ala del Timpano A, caderne un'altra del Timpano B; e poi un'altra da quello, ed alternatamente un'altra da questo ec., come se invece di esser due Timpani con otto ali per ciascuno, fosse un sol Timpano con sedeci ali. Stia poi al medesimo assile EF affisso un Rochello C di 10. denti, che in un coi Timpani alati, e coll'assile costituiscano un medesimo solido, mobile nel telaro secondo l'ordine dei numeri 3, 5, 7, 9, ovvero 2, 4, 6, 8.

Coi denti di detto Rochello C s'ingrana appresso una serpentina D, ovvero una ruota fatta a caviglie (chiamata dai Francesi, la prima *roüe de rencontre*, l'altra *roüe de cband*) di 30. denti, il di cui asse per di sotto è sostenuto da un appoggio G, che è parte del Telaro. E per di sopra per detto telaro trappassa, e si annoda con una sorta d'anelli d'acciajo, o d'altra più leggiera materia, che comunicano fino ad un altro telaro della *Fig. 3.*, dove
l'ul-

l'ultimo anello D_3 porta un Rochello di 10. denti, quale insieme con detti anelli, e serpentina formano un altro corpo ombreggiato a puntini, che fa una sola rivoluzione, mentre l'altro solido tratteggiato composto dell'assile EF, Timpani alati B, A, e Rochello C fa tre rivoluzioni. E quindi avviene che l'anello D_3 per ciascuna sua rivoluzione, esprima rivoluzioni dei Timpani numero 3. Perchè come sta il numero dei denti del Rochello C, al numero dei denti della serpentina D; così starà il numero delle rivoluzioni espresso da quello, al numero delle rivoluzioni espresso da questa; cioè 10., 30. :: 1., 3.

Segue indi (Fig. 3.) l'assile E, che porta una ruota di 20. denti implicata col Rochello antecedente, e porta pure un Rochello di 10., che ingrana colla seguente ruota di 60.; ed una rivoluzione di questo assile E esprime per l'addotta ragione 6. rivoluzioni dei suddetti Timpani. E così di mano in mano andate dicendo; poichè la Fig. 3. dimostra così il numero dei denti delle ruote, e Rochelli, come il numero delle rivoluzioni espresse da tutti gli altri assili F, G, H ec. in una rivoluzione; finchè l'assile L coll'indice superiore giunge ad indicare in una sua rivoluzione 60000. rivoluzioni dei Timpani; e l'assile K esprime in una rivoluzione, rivoluzioni numero 720000. Ma mi piace, che quest'ultima conversione dell'assile K abbia un centro comune con la conversione antecedente, che si fa d'intorno all'assile L; onde (preparate due ruote eguali ciascuna di diametro alla distanza LK) una d si fermi nell'assile K, e l'altra a (connessa ad una cannetta, che passa di sopra del telaro, e porta un altro indice più corto) sia mobile d'intorno all'assile L; benchè detto assile L si muova del dovuto suo moto per l'impulso delle ruote antecedenti. Perchè quindi avverà, che preparato un *Quadrante* detto da me *Loxodromico*, nel di cui centro occorra l'assile L, e la cannetta della ruota a , e che
abbia

abbia due ordini di numeri, uno esteriore diviso in 60. parti eguali, e l'altro interiore compartito in 12., l'indice più lungo mostrerà in una conversione 60000. rivoluzioni dei Timpani, e l'altro più corto 720000.

Ora se una conversione dei Timpani fosse eguale ad un passo geometrico percorso dal Bastimento, l'indice più lungo mostrerebbe 60000. passi geometrici, cioè 60. miglia, o sia 60. minuti = Gradi uno; e l'altro più corto mostrerebbe in una rivoluzione 720. miglia = Gradi 12. Ma ciò non essendo così fortunatamente per essere, si dovrà coll' esperimento fatto in una nota distanza, rilevare nel *quadrante* della *Fig. 3.* il numero delle rivoluzioni dei Timpani, corrispondenti ad uno, o più gradi terrestri; e poi distribuire, e ordinare da bella prima le ruote, e numero dei denti in modo, che una perfetta rivoluzione dell' assile K, venga ad esprimere un numero qualunque, ma intero di gradi terrestri; e l'assile L 60. minuti. Poichè io ho messe le ruote così, perchè serva solo di metodo, onde saper poi contenersi meglio a tenore dello sperimento che si farà; non dubitando che quindi il numero de' gradi, o minuti mostrato dagli indici, non sia per essere proporzionale al viaggio della Nave, unica causa del moto de' Timpani. Dovendosi poi, per quanto a me pare, riputar per niente l'alterazione delle frizioni, che la nuova combinazione delle ruote, e numero dei denti dovrebbe produrre, essendo questa quasi zero rispetto alla potenza de' muoventi principali, che sono i Timpani alati; e molto più perchè si potrebbe far in maniera, che restasse il medesimo numero dei denti presi insieme di tutte le ruote, benchè poi per causare le opportune velocità fosse mutato il numero di quelli di ciascuna in particolare.

ARTICOLO TERZO.

Macchina antecedente adattata al Bastimento.

Due parti principali si distinguono nella descritta Macchina, che diversamente vanno adattate al Bastimento. Imperciocchè quella che per la sezione della *Fig. 3.* si rappresenta, e che comprende un telaro colle sue ruote, e *Quadrante Loxodromico* tutta insieme deve esser collocata dentro del Bastimento (detta perciò *Parte Interna*), o vicino al Piloto, se fosse possibile, acciocchè mentre governa il Timone abbia sotto gli occhj anche il *quadrante* suddetto, o in qualche altra parte che fosse, se non più comoda, almen più conferente al bisogno della presente costruzione. Quell'altra parte poi significata per la *Fig. 1.*, e *2.* perchè sta sempre fuori attaccata alla Nave, vien da qui innanzi assolutamente chiamata *Parte Esterna*; ed è quella, che non solo esige somma attenzione nel costruirla, ma molto più nell'adattarla al Bastimento, in modo che e per il *luogo* ove a quello si attacca, e per la *costruzione* sia ben ordinata a qualunque suo movimento.

Circa il *luogo* ove a quello si attacca, parendo a me che fuori del Bastimento *V* (*Tav. 25.*) il punto più basso di esso sia quello, che per le agitazioni del Mare muovasi meno che gli altri punti; così in quello vorrei sospendere la *Parte Esterna*, facendo che ivi fosse (o confitto nel Bastimento suddetto *V*, o connesso comunque a quattro catene fermate a quattro parti opposte) un pezzo di ferro *K*, in cui fosse orizzontalmente mobile un altro palo di ferro attaccato con un nodo α a detta parte. Alla quale nei nodi *M*, ed *N* fosse pur anche annesso un semicerchio di ferro, scorrente (secondo che il Bastimento, o il telaro diversamente inclinasse) per la fessura *d* del palo suddetto;

al qual effetto nella costruzione dovranno prendersi le distanze zd , zM , zN eguali. Ma detto pezzo di ferro K sia inoltre prolungato verso la Poppa P con un becco, in cui per qualunque inclinazione della Nave trovi sempre un intoppo il semicerchio MdN ; acciò detta *Parte Esterna* volgendosi d'intorno al punto dell'attacco z , non possa mai compire un giro perfetto, nè giungere ad urtar contro li anelli. Da questa qualunque situazione delle parti *Interna*, ed *Esterna*, segue che li anelli a , b , c che unitanno l'una all'altra parte avranno ad esser tanti, che giungano dall'uno, all'altro luogo; benchè meno che saranno, e più leggieri che sia possibile, sia meglio.

Circa poi alla *costruzione* della suddetta *Parte Esterna* avverto che per non entrare in una lunga serie di operazioni di prospettiva, o coprire le parti più essenziali, tanto il Piano verticale di essa espresso nella *Fig. 1.*, e *2. Tav. 24.*, quanto l'elevazione scenografica della *Tav. 25.* indicata colle medesime lettere, declina alcun poco dalla giusta idea dell'Inventore. Imperocchè dovendo il telaro esser atto a difender l'ali da qualunque urto che possa incontrare, ed a sostenere validamente non solo l'assile D della serpentina D , ma anche un Timoncello H connesso nella parte posteriore ad angoli retti del traverso MN , ed assile EF ; deve il cerchio Q stare afferrato ai cardini EM , FN vicino ai punti E , F più che la figura non dimostra. Le porzioni poi EM , FN dovrebbero esser tanto giù profonde nel Mare, che portassero l'assile EF , e li connessi Timpani fin sotto alle radici dell'onde più alte. Notate inoltre, che essendo la gravità specifica del legno minore, di quella dell'acqua marina, e la gravità specifica del metallo maggiore, io vorrei che la *Parte Esterna* composta dell'una, e dell'altra materia venisse, se è possibile, a risultare poco più grave della mole antagonista del fluido, e che il centro di gravità di detta *Parte Esterna* si trovasse nell'infima parte verso GQ .

Non

Non lascio per fin di ricordare , che ai Timpani alati si potrebbero sostituire , e far nel medesimo modo muovere sott'acqua ogn'altro Istromento, che fuori d'essa fosse mobile per la sola resistenza , o impeto dell'aria ; come quella ruota proposta (1) del P. Milliet , o più sicuramente due di quelle Girandole (supponiamo A , B *Fig. 5. Tav. 26.*) di quelle dico , che gli allegri fanciulli sogliono far muovere correndo ; ordinandone un pajo in guisa , che con una *chiocciola senza fine* lavorata d'intorno ai loro assi AE , BF facessero volgere orizzontalmente una ruota D , la quale stando in vece della serpentina D della *Figura 2. Tav. 24.* si unisce poi col suo asse Da alli anelli , che congiungono la *Parte Interna* colla *Esterna*. Avvertendo che acciocchè la ruota D sia dall'una , e dall'altra chiocciola determinata a muoversi da una medesima parte , o le due chiocciolate debbono aver le spire , o le due Girandole (come si è fatto in figura) , debbono aver l'ali ordinate in verso opposto. Onde se per esempio le Girandole A , B muovansi secondo l'ordine dei numeri posti in figura (supponendo le chiocciolate inclinate ad un medesimo verso) la ruota D in un con l'asse Da , girerà secondo l'ordine de' numeri suoi posti pure in figura . E perchè per ciascuna rivoluzione delle chiocciolate , e Girandole passa un sol dente della ruota D , ogni conversione di essa ruota esprimerà tante rivoluzioni delle Girandole (che starebbero invece dei Timpani alati) quanti sono i proprj denti .

Y

ARTI-

(1) Navig. Lib. V. Prop. 6.

ARTICOLO QUARTO.

Esame delle Obbiezioni che ponno impedire l'effetto della presente Costruzione.

OBBIEZIONE I.

Egli è in primo luogo evidente, che per rilevare la giusta quantità del viaggio percorso, la *Parte esterna* della proposta Macchina deve trovarsi sempre ad angoli retti del folco, che fa in Mare il Bastimento: cioè (*Tav. 25.*) supposto la linea Qo essere detto folco, l'assile EF deve esser ad angoli retti di detta linea; benchè col Bastimento o si proceda innanzi di fianco, o colla Prora, o che si prenda comunque una nuova direzione; e benchè la Prora, o la Poppa, o l'uno, o l'altro fianco inclinasse all'orizzonte più da una parte, che dall'altra.

RISPOSTA.

Ma essendo il palicello zd ordinato appunto alle variazioni, che sono tutte orizzontali, ed il semicerchio snodato MdN ordinato alle seconde che sono verticali, deve naturalmente seguire da se l'effetto proposto. Prima perchè quando il Bastimento acquista una nuova situazione qualunque, la *Parte esterna* incontra tosto nel Timoncello H , e nell'altre sue parti maggior resistenza da un lato, che dall'altro, e quindi si frange l'equilibrio delle resistenze, che non può restituirsi, se detta *Parte esterna* (che per il supposto è poco più grave della mole antagonista del fluido, e sostenuta dal palicello dz mobile per ogni verso) non si volge nel pezzo di ferro K , e insieme coll'assile EF non si dispone per una spezie di *trattoria* (poichè non può per salto) ad angoli retti della nuova direzione Qy , unico caso,

caso , dove le resistenze si trovino equilibrate . In quanto poi alle variazioni verticali , la mobilità del semicerchio nei nodi lascia la *Parte esterna* libera a poter decumbere verticalmente , benchè il pezzo di ferro *K* in un colla Nave , cui è afferrato , inclini o all' uno , o all' altro di due opposti versi ; e la sua mobilità nella fessura *d* serve per altri due versi , a quelli , e fra di loro opposti ; e però sono in tutti quattro , che a quest' uopo , se non erro , dovrebbero bastare .

OBIEZIONE II.

Prescindendo per ora dalla diversa inclinazione , con cui una Nave si presenta a ricevere il vento , posso supporre , che o contro detto vento procede , o a seconda . Nel primo caso pare (quando l' onda andasse in conseguenza del vento) che la quantità del moto dei due Timpani alati , sia per essere maggiore di quella che dovrebbe acquistare nell' acqua stagnante per il solo andare della Nave . Perchè (1) la resistenza , che soffre un solido muoventesi in un fluido , è come il quadrato della velocità , onde il corpo si muove ; e se si muova il fluido , ed il solido sia quieto , l' urto , che il solido soffre dal fluido , è come il quadrato della velocità del fluido . Quindi nel primo caso muovendosi il solido contra del fluido , ed il fluido contra del solido , la resistenza che il solido nel fluido trova , farà come la somma de' quadrati delle velocità del solido , e del fluido . E però la velocità dei Timpani eccederebbe della dovuta quantità tutto il quadrato della velocità del fluido .

Ma nel secondo caso pare che detti Timpani si avessero a volgere meno che non dovrebbero . Perchè se poi il solido muovasi in un fluido , che pure muovasi secondo la direzione del solido , ma con minore velocità ; allora il solido urta nel fluido , come se il fluido fosse quieto , ed

Y 2

il

(1) Gravesande . *Introd. ad Philos. Newtonianam* lib. 3. *De Motu Fluid.* cap. 15.

il solido si muovesse con il solo eccesso della sua velocità sopra la velocità del fluido; e quindi nel fluido troverà una resistenza, che farà come il quadrato della sua velocità sopra quella del fluido.

Maggior ostacolo per fine incontrerebbersi, se la velocità del solido a seconda si supponesse eguale a quella del fluido; perchè i Timpani resterebbero affatto immobili.

RISPOSTA.

Rispondendo pertanto in generale a questa seconda Obiezione, nel supposto che l'onda che deve alterare il vero movimento della *Parte esterna*, sia sempre per essere a seconda del vento, dico che nè dall'onde, nè dai venti può venir portato alcun turbamento, o disordine ai Timpani alati. Perchè essendo collocata la *Parte esterna* in ζ (*Fig. 1. Tav. 26.*), e i Timpani dovendo riuscire non solo sotto la superficie del Mar tranquillo MT, ma anche sotto le radici dell'onde massime RS, le quali al lido non essendo più alte di piedi 7 (1), (nè men forse in alto Mare, benchè pajan montagne, saranno molto maggiori), e potendosi profundare anche più, giudico certamente che fin là non possa giungere l'azione del vento, unica causa forse delle inquietudini superficiali. Perchè ivi tutte le parti fluide devono (2) trovarsi in equilibrio, non potendo essere il contrasto, e quei reciproci bilanciamenti, che tra le moli acquee, che sono al di sopra della retta RS, come quelle che

(1) Spectacle de la Nature 22.^{me} entretien. La Mer. Mais la même main (de Dieu) qui élève ses vagues comme des montagnes ver la haute Mer, lui a prescrit des loix, qui la reprime du cotè de la terre. Dans les plus grandes agitations, elle respecte les bornes jusqu'ou Dieu lui a permis de s'avancer du cotè des nos dameures. Tout l'orgueil de ses flots tombe devant la ligne que Dieu lui a trachée

sur le sable, & sept pies de distance font toute la difference du point, ou elle s'eleve dans son état ordinaire avec celui, ou sa rage vien mourir sur la côte dans le fort des plus violentes tempêtes.

(2) Gravesande cap. 11. dice: *In quo motu aqua infra nullum h. i.* (cioè sotto la retta RS) *sensibiliter non agitur.*

che sono uscite fuori dell'equilibrio, nella natura, costante.

Secondariamente supposto, che sulla superficie dell'acqua stagnante, che veramente è piana, e parallela all'orizzonte (*Fig. 7. Tav. 26.*), una causa qualunque produca una cavità *a*, tosto d'intorno a quella l'acqua si estolle verso *mm*, e per il proprio peso da *mm* in *pp* ricade, ma poi per l'acquistata velocità nel cadere ha forza di risalire, ed ammucchiarsi in *B*, e produce in *pp* cavità, che in un colla massa d'acqua sollevata, cioè *pBp* chiamasi *onda*. Questo moto propagandosi dunque dalla cavità *a* in fuori per ogni verso, seguita che il moto dell'onda altro non sia che: *motus circuli* (1) *se se expendentis*. Onde se la causa produttrice dell'onda si supponga agire in un sol luogo *a* (e che perciò mi giova chiamare *onda semplice*), può darfi che l'onda vada in conseguenza del vento *V* situato a sinistra, cioè nella direzione del raggio *aF* di detto cerchio. Perchè supponiamo che un vento da detto *V* giunga a far impeto nei lati dell'onde *Km*, *am*, le masse del fluido, che naturalmente farebbero discese per le perpendicolari *mp*, *mp*, dovendo ora in parte obbedire anche ad un'altra forza straniera, che è il vento, andranno a cadere lontano da *p,p*, in *e,e* forse per una linea curva, la quale sarebbe una Parabola, quando il vento spirasse eguabilmente, e che l'onda discendesse per la perpendicolare *mp*, secondo la legge comune degli altri gravi; e quindi un galeggiante *m* a poco a poco verrebbe dall'onde sospinto verso *F*. Ma nel mar da tempesta agitato forse operando detta causa in diversi luoghi, e però essendo molti cerchj che l'un l'altro s'incrociano, l'onda che nella incrociatura diventa *composta* di due che si vanno ad incontrare, deve salire, e discendere per una retta verticale all'orizzonte, quando sii eguale la forza delle due *onde semplici*. Imperciocchè supponiamo, che un' *onda semplice* si propaghi dal centro *a* verso *F*,
(pre.

(1) Gravesande cap. 11.

(prelcindo per ora dall'impulfo de' venti) ed un'altra *femplice* da un altro canto A fi dilati in cerchio verfo F, con forze eguali (che faranno come la loro velocità (1), che è come la radice quadrata delle loro latitudini *ad*, AD). Le due onde incontrandofi nel punto F vicendevolmente l'una l'altra fi aumentaranno, onde unite in una fola onda, che chiamo *compofa*, faliranno per una retta verticale al punto F più alto, che come *femplici* non falirebbero negli altri punti; poi perchè tutta quella congiunta massa non può far fuori dell'equilibrio, difcenderanno per una medefima verticale a detto punto F, finchè feperate l'una dall'altra fi faccia cavità nel punto F, e fi trovi ch'afcheduna reftituita, e ordinata in cerchio al proprio centro *a*, ed A. Molto più fi verifica quefto preciso falire, e fcendere dell'onda verticalmente, quando fia compofa di più *femplici*, che da diverfi centri *a* AHG nel punto F venghino ad incrociarfi. E molto più quando foftero determinate ad incontrarfi per lo fofter gagliardo di diverfi venti V, V fpiranti da diverfe, e molte oppofte parti. Il che per mio giudizio fuccedendo allora più, che fi dice efferè il Mar tempeftofo, ciafcun'onda fi può tener per *compofa*, e perciò il moto di un galeggiante che feconda il moto dell'onde, non altro farà, che un afcendere, e fcendere per una verticale all'orizzonte; onde io concluderei, che allora il moto dell'onde non poteffe alterare il vero muoimento dei Timpani, giacchè l'onde in quefto cafo non vanno in confequenza del vento.

Confeffo per altro che queft'obbiezione avrebbe tutta la fua forza, fe fofter applicata alle correnti che s'incontrano nel Mare; e confeffo che non avrebbe difefa, fe non nel cafo che la direzione della corrente fofter ad angoli retti della direzione del Vafcello. Perchè allora l'azione del fluido

(1) Ivi dice: *Celeritates undarum funt ut radices quadratæ Latitudinum.*

do si eserciterebbe nei fianchi dei Timpani, e nelle sottili coste dell'ali, quali resterebbero di fronte tuttavia libere a poter soffrire tutta la resistenza del fluido.

OBIEZIONE III.

Secondo che la Nave si avvanza con diversa velocità, la *Parte esterna* z (*Fig. 1. Tav. 26.*) seco tirata appresso, fa con la perpendicolare zq un angolo ora maggiore, ora minore; e se la velocità fosse data infinita, l'angolo s'eguaglierebbe ad un retto, perchè il peso tenta quanto può di mettersi nella direzione della forza traente. Onde seguita che si avesse a temere che nei Timpani alati ora si affrettasse, ora si ritardasse la caduta dell'ali.

RISPOSTA.

Ma si vede che quindi non è per essere alcun considerabile errore, perchè il telaro benchè farà colla perpendicolare zq un angolo ora maggiore, ora minore, non perciò può far volgere l'affile dei Timpani, onde venghino alterati i tempi delle cadute dell'ali.

OBIEZIONE IV.

Se il moto di un galeggiante full'onda (intendo *composta*, perchè se fosse *semplice* sarebbe (1) rigorosamente con-

(1) Posto un galeggiante m (*Fig. 7. Tav. 26.*) sulla superficie dell'acqua stagnante, e fatto impeto su detta superficie in a , il galeggiante a sinistra m , si porta lontano da a verso K . E la ragion parmi che sia, perchè quantunque, niun'aura spirando, l'onda in tal caso non faccia altro che salire, e scendere perpendicolarmente, tuttavia sdruciolando il galeggiante, come la fantasia ne sforza a credere, sul pendio dell'onda avviene che invece di

muoversi anch'esso, come detta onda perpendicolarmente, acquisti piuttosto nella direzione orizzontale un altro sito; il quale sia verso a quando il galeggiante sdruciolò sul pendio che riguarda a quella parte; e farà verso K se sdruciolerà sul pendio che appunto mira verso K . Ma perchè le onde più che sono lontane dalla sua origine a verso K , sono tanto più piccole, così i regressi del galeggiante muoventesi sul pendio che riguarda
ver-

tro l'esperienza) non altro sia che un moto di ascendere; e scendere alternatamente per una retta verticale all'orizzonte, certo è che la Nave per il moto solo dell'onda non farebbe altro che alzarfi, e sbassarfi per la retta, per esempio ab della figura suddetta, ma perchè viene in oltre spinta immediatamente dal vento, che nel suo corpo unita, per la linea orizzontale bc , trovasi ella messa in moto da due potenze espresse per ba , bc secondo la equabile, o accelerata velocità, e direzione delle quali la Nave deve senza alcun dubbio prendere una via media bs , che farà (qualunque sia la proporzione delle suddette potenze) sempre più lunga della bc , ovvero as . Ciò che dovendo massime avvenire quando per la furia dei venti il Mare è fatto tumido, e le acque messe in tumulto alternatamente si raccozzano, e si spianano, li Timpani alati quando più in alto tratti anch'essi, e quando più a basso sospinti, compiranno un numero di rivoluzioni maggiore assai più, che non importa lo andar dritto del Bastimento per la retta aS , ovvero MT parallela; e però nel *Quadrante Loxodromico* parrà che siasi fatto un molto più lungo viaggio, che veramente non è.

RISPOSTA.

A questa obbiezione rispondo primieramente, che benchè l'altezza ab dell'onde massime abbiassi in alto Mare, come già dissi, a stimare anche più di piedi 7., il Bastimento perciò non si alza, e abbassa altrettanto; non potendo per la sua gravità esser sostenuto sulla punta d'un'onda; cosicchè avverrà, che se nel sito R pescava, per esempio, 15. piedi di sotto di RS , molto più pescarà di sotto

to

verso a , sono minori dei progressi che fa sul pendio che riguarda verso K ; e quindi a poco a poco da a verso K procede. Il Mare dunque benchè tranquillo, butta sempre alla spiaggia

i corpi natanti; perchè essendo determinati a scostarsi sempre più dal luogo dove l'onda nasce, bisogna, giacchè il Mare non è infinito, che finalmente pervenghino al lido.

to di bc , trovandosi in b ; e quindi giudicarei che l'altezza, cui si vuole che dall'onda sia trasportato il Bastimento, non sia almen tanto differente da quella in cui trovasi nel tempo della calma, quanto se la rappresentano i Poeti (*aliud est enim Poetarum more verba fundere, aliud, ea quæ dicas, ratione & arte distinguere*); perchè allora senza mentire, l'obbiezione farebbe di grandissimo peso; onde anche la differenza che passa fra bS , ed aS non verrebbe forse ad esser tanta, che bastasse a poter alterare sensibilmente la vera quantità del viaggio.

Ma siano l'onde anche tali che tocchino alle nubi, o almeno almeno (ciò che non già nel nostro Mare, ma nell'oceano forse accade) dietro loro coprano tutto il corpo di un Bastimento. In qualunque gran caso; l'onda si potrebbe tenere per un Piano, che quasi per gradi sempre più s'inclinasse, finchè arrivato in b tornasse a declinare. Onde la equabile velocità, con cui la Nave da R farebbe percorsa nella direzione orizzontale verso a , prima si diminuirebbe all'incontro del piano Rb , e poi la rimanente si ritarderebbe salendo in modo, che (posto che l'altezza ab dell'onda sia, come a caso avviene in figura, eguale alla metà di Ra) la Nave su per il piano da R verso b , percorrerebbe sol tanto spazio, quanto è la retta ad , da a condotta normale ad Rb ; mentre (1) colla velocità che aveva

Z

va

(1) A questo proposito mi prendo una Dimostrazione del Chiariss. P. Feliberti la libertà di onorare i miei scritti con il nome di Federico Sanvitali, ed è la seguente:

D I M O S T R A Z I O N E.

Supponiamo (Fig. 2. Tav. 26.) che partito il corpo B da A per andare con equabile velocità verso C , incontri in B il piano inclinato BV ; e che si desideri sapere, quanto spazio avrà percorso ascendendo da B verso V , nel medesimo tempo che nella direzione orizzontale avrebbe percorso lo spazio BC .

va in R prima di urtar nel piano avrebbe percorso tutto lo spazio Ra.

Questa

BC. Dico che menata alla retta orizzontale BC una perpendicolare $bE = \frac{1}{2} BC$; e da E condotta a BV una normale Ed, questa Ed sarebbe eguale a detto spazio.

Onde primo, si prenda $Eb = \frac{1}{2} BC$ che sarà l'altezza, per cui B ascenderebbe con moto ritardato nel tempo, che con moto equabile percorrerebbe BC; cominciando ad ascendere colla velocità che ha per BC. Il tempo dell'ascesa per Eb è eguale al tempo della discesa per bE, in fine della quale B acquisterebbe la velocità, che ha per BC.

Secondo, si trovi su BC il punto E, da cui possa alzarsi la $Eb = \frac{1}{2} BC$, dicendo nel triangolo BEb sta: seno dell'ang. B. seno dell'ang. b :: Lato Eb. Lato BE cercato. Ora si tiri da E al piano inclinato la perpendicolare Ed; sarà db lo spazio per cui B ascenderebbe, cominciando a salire colla velocità acquistata nella discesa per bd, ovvero bO nel tempo che ascenderebbe per EB, o si muoverebbe equabilmente per BC.

Terzo, prendendo la velocità \sqrt{db} acquistata nella discesa per bd nel tempo della discesa per bE, o del moto uniforme per BC, e la velocità \sqrt{bB} acquistata nella discesa per bB, eguale alla velocità acquistata per bE, cioè alla velocità per BC, prendendo dico, queste velocità per equabili nel

dato tempo per BC, avremo $\sqrt{db} \cdot 2bd :: \sqrt{bB} \cdot \frac{2bd \times \sqrt{bB}}{\sqrt{bd}}$

E quindi la metà dello spazio trovato $\frac{bd \times \sqrt{bB}}{\sqrt{bd}}$ sarà lo spa-

Questa considerabilissima perdita di velocità, secondo il quadrato della quale i Timpani trovano nel fluido quella

Z 2

refi-

spazio percorso dalla data velocità \sqrt{bB} su pel piano inclinato nel tempo del moto uniforme per BC.

Ora $\frac{bd \times \sqrt{bB}}{\sqrt{bd}} = \sqrt{bd} \times \sqrt{bB}$ facendo attualmente la divisione, e perciò lo spazio cercato è media proporzionale tra bd, e bB. Imperciocchè $bd \cdot \sqrt{bd} \times \sqrt{bB} :: \sqrt{bd} \times \sqrt{bB} \cdot bB$. Ma bE è media proporzionale tra bd, e bB. Dunque lo spazio che B percorrerà su per lo piano inclinato nel dato tempo cominciando a salire colla data velocità sarà $= bE = \frac{1}{2} BC$.

Quarto, ora supponendo che la data velocità r per l'incontro del piano sia diventata u; oppure essendo questa a quella, come il seno BE del complimento della inclinazione B al seno totale Bb, e prendendo questa quantità per esprimere la velocità, e supponendo queste equabili avremo Bb velocità data. $2 bE = BC :: BE \cdot \frac{BC \times BE}{Bb}$, di cui la velocità

BE nello stesso tempo con moto ritardato percorrerà la metà $= \frac{1}{2} \frac{BC \times BE}{Bb} = \frac{bE \times BE}{bB}$ d'onde nasce questa proporzione

$bB \cdot bE :: BE \cdot \frac{bE \times BE}{bB}$. Ma per la somiglianza de' triangoli bBE. EBd abbiamo $bB \cdot bE :: BE \cdot Ed$. Dunque $\frac{bE \times BE}{bB} = Ed$. E quindi lo spazio, che B nel dato tempo

colla velocità proporzionata all'ingresso nel piano inclinato, percorre su lo stesso piano, è eguale alla perpendicolare Ed tirata sul piano del punto E della base, da cui sorge una perpendicolare Eb $= \frac{1}{2} BC$ data.

resistenza, che gli fa muovere d'intorno al loro asse, non è nè meno compensata da quella che, dappoichè il Bastimento è pervenuto in b , acquista indi scendendo giù dall'altra parte. Perchè in fine della discesa per bS la velocità in S dovrebbe essere eguale a quella, che dopo l'incontro del piano inclinato aveva in R per ascendere fino in b (supposto che per Rb si fosse distrutta tutta la velocità, che aveva in R). E quando fosse maggiore, perchè tutta non si fosse prima distrutta in b salendo, avrebbesi a conchiudere che molto più grande essendo stata la velocità in R avanti l'urto, molto più lungo spazio avrebbe percorso nella direzione orizzontale. Ciò che egualmente torna in favore della mia sentenza. Onde farei per dire (se non fosse follia stabilire una cosa, ad alterar la quale concorrono tante incerte cause d'onde, e di venti) che l'obbiezione proposta valesse piuttosto in senso contrario, cioè che salendo, e scendendo per RbS' , nel *Quadrante Loxodromico* fosse per risultare la quantità del viaggio minore, che non sarebbe forse camminando nella direzione orizzontale RaS .

OBIEZIONE. V.

Una sola difficoltà per ogni modo irrisolvibile, ed egualmente possibile resta d'accusare, cioè quando la Nave avanzasse con tanta lentezza, che la resistenza del fluido incontrata dai Timpani non bastasse a farli muovere. Tranquillità in vero al mio progetto più fatale d'ogni maggior borasca. Perchè queti i venti niun'altra causa (salvo se alcun ajuto non fosse recato dai remi) può fornire alla Nave la velocità necessaria per far muover la macchina.

Per altro non si può negare, che i suddetti Timpani diverrebbero più agili, e capaci a rimaner affetti di moto per una resistenza anche minore, se supposto il mar quieto, fossero stati messi a fior d'acqua in modo, che le circonferenze loro toccassero la superficie del mare, e volgendosi,

dosi, le sole ale giungessero ad immergervisi. Conciossiachè, oltre che si potrebbe collocare la *Parte interna* più vicino al Piloto, verrebbe diminuita anche la resistenza della massa compresa tra le parallele (*Fig. 1. Tav. 14.*) *im, gn*, quale, d'acqua che era, verrebbe ad esser aria, rimanendo la massa intercetta fra le parallele *gn, pd* tuttavia d'acqua. E però essendo la forza d'inerzia (che è come la gravità specifica) dell'acqua a quella dell'aria, come 1000 a 1; e l'acqua marina a quella di fiume prossimamente, come 6 a 5; risulta la specifica inerzia dell'acqua marina a quella dell'aria, come 1200 a 1. Onde per questo capo la resistenza da superare diminuita 1200 volte, i Timpani diventerebbero 1200 volte più atti a ricevere movimento, che non sono, quando stanno immersi affatto nell'acqua marina.

Ma poi nel mar commosso, benchè di buona voglia si recarebbe a gran vantaggio questa maggior mobilità dei Timpani, pure perchè e dall'onde, e dai venti verrebbe loro portato troppo scuotimento, e scompiglio, li ho dalla superficie altamente ritirati sott'acqua; avvisando che ivi, quasi in sicuro asilo si potessero meglio difendere, e ricoverare. Ma ciò che in qualunque modo sia per riuscire, e quali correzioni si dovriano a questa mia Macchina sapranlo quelli, che sono versati nelle cose di marina, e quelli molto più che di detta Macchina facessero prova. Perchè io (indegna cosa ad udire) non ho, che appena veduto dal Lido il Mare, e i Bastimenti nel Porto. È toltone, che per esperienza fatta tanto nell'acque stagnanti, quanto nelle correnti, io so di certo che la *Parte esterna* muovesi sott'acqua con una velocità proporzionale per quanto pare alla forza traente, non ho poi intrapreso alcun altro sperimento necessario a verificar l'effetto totale di questa costruzione.

Supponendola non per tanto conforme al gran Progetto, e che nel *Quadrante Loxodromico* apparisca la quantità del viaggio del Bastimento, applichiamo questo importantissi-

mo dato alla determinazione dei gradi di Latitudine, e Longitudine del luogo, in cui si è.

ARTICOLO QUINTO.

Latitudine, e Longitudine del luogo, in cui si è determinata per mezzo del Quadrante Loxodromico.

NON è già che io pensi d'introdurre qui tutta quella Teoria, onde data la quantità del viaggio di una Nave si perviene in cognizione della Latitudine, e Longitudine del luogo in cui si è; perchè non mancano Autori, che trattano questa parte, e ai quali mi rimetto, ma solo intendo farne un piccol cenno. Onde supponiamo primieramente, che la Navigazione sia *Circolare*, e che per esempio si sciolga (*Fig. 3. Tav. 26.*) dal luogo *a* per passare al luogo *d*, e che pervenuti nel sito *b*, si desidera sapere la Longitudine di detto luogo *b*, cioè l'angolo *aPb* al Polo *P*; e la Latitudine, cioè il complimento di *Pb* ad un quadrante. Poichè nel triangolo *aPb* è noto il lato *aP*, complimento della Latitudine del luogo *a*; e l'angolo *Loxodromico Pab*; ed il lato *ab* per mezzo della Macchina suddetta. Colla sola Trigonometria si avrà il lato *Pb* complimento della Latitudine ricercata; e l'angolo *aPb* differenza della Longitudine.

Se poi la Navigazione è *Loxodromia*, essendo (*Fig. 4.*) la lunghezza della *Loxodromia ab* alla mutata Latitudine *bG* dell' Equatore *EGQ*, come il seno totale al cosino dell'angolo *Loxodromico Pab*; si rileva detta Latitudine *bG* espressa in tante miglia. Quindi poi il lato mecodinamico, perchè è medio proporzionale tra la Latitudine *bG*, e l'aggregato della medesima Latitudine *bG*, più la *Loxodromia ab* data per mezzo della Macchina. E per fine la differenza di Longi-

gitudine EG, o sia l'angolo aPb per mezzo delle *Tavole Loxodromiche*.

Quando per fine camminasse il Bastimento da a verso E, o per contrario sul medesimo meridiano PaE , si rilevarà immediatamente la Latitudine solo col sottrarre, o aggiungere la quantità del viaggio alla già nota Latitudine del luogo d'onde si sciolse, restando la medesima Longitudine. E se procedesse sull'equatore EQ restando la medesima Latitudine, la quantità EG del viaggio sarebbe da sottrarsi, o di aggiungersi alla Longitudine del Luogo d'onde si sciolse, secondo che il Bastimento fosse diretto verso Oriente, o Occidente. Se per fine il viaggio seguisse sopra un parallelo mdn , si avrebbe (restando tuttavia la medesima Latitudine) la differenza di Longitudine, convertendo per mezzo delle Tavole in gradi d'Equatore i gradi di detto parallelo espressi dall'Istromento in tante miglia.

Ma resta d'avvertire, che la Nave (*Fig. 6.*) nel suo corso, per esempio da a in b fa, o può fare delle *deviazioni*, come sarebbero ac, cd, de, eb . Nel qual caso stando alle rivoluzioni solamente della Macchina apparirebbe la distanza da a in b assai maggiore della vera. Al che dovendosi aver giusto riguardo, sarà d'uopo tenere successivamente memoria del proprio viaggio, facendone un informe abbozzo sulla carta. Laonde su detta carta prima di sciogliere dal luogo a si tiri da un punto P, supposto essere il Polo, si tiri, dico, la retta Pa , che si vuol pur supporre essere il complimento della già nota Latitudine del luogo a . E però detta retta Pa sia segnata di detto complimento (che sia per esempio gradi 32). Tirata indi la linea ac qualunque, si noti il valore del noto angolo *Loxodromico* Pac (sia gradi 80). Partiti poi da a , e pervenuti in C, ove cominciando a deviare deve mutarsi l'angolo *Loxodromico* suddetto (uniti prima i punti P, e C con una retta, che sta per il complimento della Latitudine di

un altro luogo C) si segni tanto la quantità del viaggio fin allora fatto, apparente per mezzo della Macchina (per esempio miglia 200), quanto il valore del nuovo angolo Pcd indicato dalla calamita (che supporremo gradi 73) e così di mano in mano si prendano dalla Macchina le quantità delle seguenti distanze cd, de, eb ; e coll' uso della Bussola li altri angoli d , ed e di ciascun' altra deviazione. Pervenuti finalmente nel luogo b , di cui si voglia sapere la Latitudine, e Longitudine, si potrà colla Geometria dai dati angoli, e note distanze, e data Latitudine del Luogo a ricavare la lunghezza vera del viaggio ab ; per quindi secondo le regole determinare poi i gradi di detta Latitudine, e Longitudine, o determinar detti gradi a parte a parte come se in diversi tempi fossero state fatte tante Navigazioni, quanti Rombi, o agoli *Loxodromici* adoperati (che sono qui quattro $Pac, Pcd; Pde, Peb$) apparissero in disegno.

FINE DEL QUADRANTE LOXODROMICO.

BAR-

B A R C A

*Che va da se contro alla corrente
di un Fiume.*

ARTICOLO PRIMO.

Sua costruzione organica.

Parendomi, che fosse maravigliosa, e stupenda cosa a vedere una Barca, che da le camminasse contro alla corrente di un Fiume, senza scoprirsi a' riguardanti la cagione dello strano (1) effetto, mi è venuto in animo di proporre a quest' uopo un ingegno, valendomi anche qui dei Timpani alati descritti nella Macchina intitolata il *Quadrante Loxodromico*.

Si concepisca adunque (*Fig. 1. Tav. 27.*) una Barca GH che sia trapassata per fianco da un asse ritorto $Fz\alpha n m u x E$, che faccia (ciò che è ben da riflettere) un medesimo solido con due Timpani A, B, e per l' impulso della corrente muovasi in un con essi d'intorno alla linea mn nel forame, che trapassa dall' uno all' altro fianco della Barca. E sia pur detto asse corredato di quattro forcelle P, C, D, Q mobili d'intorno ad esso, e lunghe più che il Fiume non è alto, le quali calando giù al letto di detto Fiume, e poggiando contro esso, siano disposte, quando che sia, a contrastare in verso opposto alla Barca, che naturalmente andrebbe a seconda da H verso G.

Ora egli è evidente nel caso della *Fig.* che le due for-

A a

celle

(1) Il P. Milliet fece vedere sul Tamigi un simil spettacolo; ma era visibile l'artificio, nè per quel modo po-

teva riuscire in un Fiume tortuoso. *Trattato XVII. della Navigazione Prop.* 10.

celle C, D poggiando appunto sul fondo debbono star ferme, ed arrestare anche la Barca, sicchè non scenda a seconda della corrente da H verso G. Ma intanto se la velocità del Fiume è tale, che valga a far muovere i Timpani, e in un con essi il sopraddetto asse Fz on mu x E, che come ho detto, è un medesimo solido con detti Timpani, il centro del moto dell' asse, e dei Timpani, che prima si suppose essere la retta mn , ora sarà la linea $zoux$ determinata dalle superiori estremità zo della forcilla D, ed ux della forcilla C.

D' intorno a questa linea $zoux$ volgendosi l' asse suddetto, le altre due forcille Q, P verranno (strascinate lungo al fondo le loro estremità inferiori Q, P) verranno, dissi, la prima Q trasportata avanti un doppio spazio di Fz nel sito Fq , ed altrettanto la forcilla P dell' altra parte, benchè in *Fig.* si sia per minor confusione tralasciata; onde la Barca dalla prima situazione mn farà anch' essa, per causa dei ruotanti Timpani, sospinta innanzi contro la direzione del Fiume il doppio di no , ovvero mu , raggi, per dir così, della rivoluzione che si fa d' intorno alla linea $zoux$.

Dopo ciò trasportata, come si è detto, la forcilla Q nel sito fq , ed altrettanto la forcilla P dall' altra parte, ambedue dette forcille Q, P ivi staranno immobili, mentre frattanto s' iano strascinate innanzi le altre due C, D, che prima stavano quiete. E così di nuovo alternatamente staranno ferme queste, intanto che quelle procederanno più oltre. Onde seguita che per ciascuna rivoluzione dei Timpani alati, farà la Barca dalla prima situazione mn passata innanzi nella direzione contraria alla corrente uno spazio quadruplo di no , ovvero mu , supponendo che le curvature Fz , Ex s' iano, come debbono appunto essere, eguali fra loro, e doppie di no , ovvero mu parimenti eguali.

ARTICOLO SECONDO.

Risoluzione delle seguenti Obbiezioni.

OBBIEZIONE I.

UNA delle prime Obbiezioni, che può mettere in dubbio questo fatto è, che stando ferme per esempio le due forcelle C, D, non può girar d'intorno alla linea *zoux* l'asse sopraddetto Fzon ec. le e la Barca, e le altre parti mosse dal ruotante asse non si alzano, oppure non si abbassano tanto, quanto importa *no*, ovvero *mu*, che sono, come si disse, raggi di questa rivoluzione. Ciò che esige, che la forza motrice proporzionale alla velocità della corrente, debba essere assai grande, o per superare il peso di tutta quella parte di Macchina che galeggia, nel caso che debba alzarfi, o per vincere la resistenza della mole antagonista del fluido, nel caso che si debba abbassare; oltre che detta forza deve anche di tutti li sfregamenti andar vittoriosa, e vincere anche l'azione contraria, che la corrente esercita nel corpo della Barca per farla andare a seconda.

Per dare un maggior giorno a questo obbietto consideriamolo anche nel disegno scenografico della *Fig. 2.* In cui si concepisca l'asse *mn* della *Fig. 1.* rappresentarsi per il punto *n* della *2.* che sta nel centro del Timpano alato B; la porzione *no* dell'asse ritorto della *Fig. 1.* essere in questa lo stesso *no*; le forcelle sono le medesime indicate colle medesime lettere, prescindendo di quelle sole parti, che la Prospettiva fa che non possono essere in vista. Dico dunque, che se il punto *n* deve passare a destra di *o* verso H in verso opposto alla corrente, o deve detto punto *n* in un colla Barca, e Timpano alato alzarfi per un arco da *n*

verso B, supposto centro il punto o d'appoggio, ovvero deve il punto o abbassarsi per un altro arco, supposto il punto fermo D, estremità della forcilla D essere centro di detto arco; e quindi incontrare nell'uno, o nell'altro caso l'accennata difficoltà, cioè una troppo grande resistenza da dover superare.

RISPOSTA.

Al che rispondendo, concedo veramente, che la forza motrice debba essere non poca, e che la sola esperienza può in fatti dare a conoscere, se detta forza basterà a superare tutte le opposte resistenze. Pur tuttavia non mancarò di ricordare come si possa almeno aumentare detta forza motrice. E primo quantunque io non lodarei, che il diametro dei Timpani fosse maggiore di due piedi incirca di Parigi, e l'ali dovendo aver rapporto a tale grandezza, non si possano allungare ad arbitrio, per ricevere l'impulso d'un maggior volume d'acqua, si puonno però fare più larghi, perchè quindi riuscendo più larghe anche l'ali possano presentare un più gran piano all'azione della corrente. Secondo, perchè (*Fig. 1.*) la curvatura $no + ob$ distanza da o fino all'estremità dell'ali spiegate si può (essendo i Timpani un medesimo solido col braccio no dell'asse $Fzon$ ec.) si può, dico, considerare come una leva, dove la potenza sia applicata in b , la resistenza in n , il punto d'appoggio in o ; la potenza, o sia la forza motrice (le altre cose pari) sarà alla resistenza n in ragione reciproca di no ad ob ; onde più piccolo che sarà il braccio, o curvatura no rispetto alla distanza ob , tanto maggiore sarà la forza motrice. E' ben vero, che la Barca in tal caso tanto men veloce. Terzo, bisognarebbe, che i Timpani riuscissero immersi a quell'altezza incirca, dove fosse per essere maggiore la velocità della corrente. Quarto, si potrebbe applicare, quinci e quindi, non già due sole forcel-

celle, ma quattro o cinque, o per lo meno tre; onde essendo più frequenti i punti d'appoggio la Barca venisse continuamente a trovarsi poco men che alla medesima altezza. Quinto, la prora H sia rivolta contro alla corrente, e il forame per dove passa l'asse, sia dal centro di gravità della Barca situato piuttosto verso detta prora, la quale più che sarà scarna e fendente, sarà più confacente ad evitare parte dell'impeto, che il fluido fa nel corpo della suddetta Barca.

OBIEZIONE II. E SUA RISPOSTA.

Giacchè l'assile deve muoversi nel forame, che traversa la Barca, l'acqua che entrerebbe per detto forame farebbe affondare la Barca, se non fossero pronti molti spedienti applicabili ad un tanto inconveniente. Facendo o che l'assile entrasse per una sorta di stucchio, che giungesse dall'uno all'altro fianco; sicchè non lasciasse penetrar acqua di forte nel ventre della Barca; o che i Timpani girassero d'intorno a detto fermo asse ec.

OBIEZIONE III. E SUA RISPOSTA.

Pare, che solo nel caso che il letto del Fiume sia di minuta, e soda giara, ed eguale abbia luogo questo Meccanismo, non potendosi così di leggiero concepire, come in un fondo fangoso, o per grossi macigni ineguale, possano prender piede le forcelle, ed arrestare la Barca. Ma non sarebbe gran meraviglia, che siccome alcuni fiumi non sono navigabili per il modo comune, alcuni pure non lo fossero per questo modo, che è affatto straordinario.

OBBIEZIONE IV. E SUA RISPOSTA.

Essendo necessario, che quelli che navigano possano, se il Fiume è tortuoso, volgere il loro Naviglio secondo che sia d'uopo, basta da quella parte, dove si vuole che la Barca inclini, alzare le forcelle legate ad una fune (*Fig. 2.*) acciocchè non mordendo più esse il fondo, la Barca o da una, o dall' altra parte si lascj trasportar dalla corrente; ma lasciarle poi ricadere, e pigliar fondo, di nuovo come prima, pare che detta Barca sia indirizzata nella nuova direzione.

FINE DELLA DESCRIZIONE DELLA BARCA.

VITE D'ARCHIMEDE

*Applicata in un modo non conosciuto per anco
nè dagli antichi, nè da' moderni Meccanici.*

ARTICOLO PRIMO.

AVvegnachè ciascuno sappia qual sia la struttura, e l'uso della *Vite d'Archimede*, non però credo che ad alcuno antico, o moderno Meccanico cadesse mai in animo di ordinarla nel modo che dimostra la *Figura 3. Tav. 27.* Codesto mio semplicissimo ritrovato consiste in un cilindro mobile per lo girar di una manetta M su due perni D, B, d'intorno a cui si avvolge una fune, o catena, che qui supplisce per la spira concava della *Vite Archimede*, e che perciò infila una carrucola R, cui sta poi sospeso ad un uncino un qualunque corpo R. Facendosi pertanto girare detta manetta M, la fune da una parte della carrucola si raccorcia, ravvolgendosi su del cilindro, e dall'altra parte s'allunga, svolgendosi giù da detto cilindro. Quindi la carrucola essendo obbligata a sdrucciolare verso la parte, nella quale la fune s'allunga, porta seco il peso annesso, e l'obbliga a progredire o verso B, o verso D, secondo che la manetta si muove o per una parte, o per l'altra. Ciò che risponde anche in pratica egregiamente.

Ora è chiaro, che quanto la *Vite d'Archimede* è ingegnosa, e opportuna principalmente per far salire l'acqua a mediocri altezze, altrettanto è atta questa mia Macchina a trasportar dei solidi di qualunque figura per una direzione o inclinata, o parallela all'orizzonte. Benchè per altro non nego, che la incurvatura che il cilindro corre rischio d'acquistare, quanto più è lunga la distanza BD, ed il corpo

pe-

pesante, non sia per produr quel medesimo ostacolo, che patisce anche la *Vite d'Archimede* nelle grandi altezze. Tuttavia non dubiterei di mettere in pratica questa mia *Vite* in moltissimi casi; come farebbe per transitare dall' una all' altra riva di un Fiume non molto largo, massime quando (o per la straordinaria sua rapidità, o perchè l' alveo fosse impedito di troppi macigni sporgenti in fuori al di sopra del fondo, o pur anche della superficie dell' acqua, come tra' monti accade) si rendessero impossibili i Porti, che si sogliono fabbricare sulle Barche. Potrebbe detta *Vite* servire ancora per far passare nella Città a traverso del fosso la cassetta delle Lettere (che i Francesi chiamano *la cassette de la Coulisse*) benchè ciò non farebbe per altro nè più comodo, nè più utile delli spedienti, che già si praticano. Se poi la Macchina fosse disposta in alto, e corredata di argane attaccate come ad un punto fisso in R, una statua, o altro peso qualunque portato prima per mezzo di dette argane ad un' altezza un poco maggiore di quella del suo piedestallo, potrebbe poi, volgendo il cilindro, essere orizzontalmente sospinta anche fin sopra al piedestallo medesimo, per indi esser ivi riposta. Ardirei d'asserire (ma forse che io questa volta deliro) che si potesse applicare detta *Vite* anche a trasportar per molte Leghe delli enormi pesi, come Colonne, Obelischi, ec., facendo di maniera, che i due perni fossero insieme mobili in guisa di carro sopra le sue ruote *m, m*. Onde dopo che per lo volger della manetta M il corpo R fosse per esempio portato da B verso D fin che può, si sollevasse alcun poco detto corpo con qualche opportuno ingegno, tanto che si potesse poi farlo poggiare sopra un Letto messo per di sotto, intanto che si cacciasse innanzi verso Q il carro sgravato di tal peso; onde tolto indi via di nuovo il sostegno, e volgendo di nuovo la manetta, si tornasse progredendo innanzi a guadagnare verso Q un altro spazio; così alternatamente facendo ora
 star

star fermo il carro, mentre si fa muovere il corpo pesante; ed ora fermando un poco alto il corpo, mentre il carro si caccia innanzi. Avvertendo che nel medesimo tempo che il carro avanza, si muova seguitamente la manetta M in verso contrario; perchè altrimenti sarebbe necessario, per ogni volta che si facesse muovere il carro, distaccare il grave dalla fune. Ciò che sarebbe lungo e tedioso, principalmente quando, nel supposto di un corpo assai pesante, dovesse esser sospeso con molte più carrucole, che in *Figura* non è. Avvertendo inoltre che il carro dovrebbe essere concepito in tutt'altra maniera, benchè per maggior chiarezza si sia qui posto rozzamente così.

In somma a me basta aver prodotta questa Macchina nella sua semplicità, e di aver solo avventurate alcune conghietture, acciò gli esperti Ingegneri possano da se, secondo che richiederanno le differenti occasioni, recarla a quell'uso, di cui essa sia capace, e che essi sapranfi avvisare meglio di me.

ARTICOLO SECONDO.

Vite simile a quella d'Archimede messa in pratica con l'asse verticale all'orizzonte.

UNa *Vite* non già con le spire eguali, e dall'asse di rotazione CA egualmente distanti, come (*Fig. 1. Tav. 28.*) quella d'Archimede, ma con le spire (*Fig. 3.*) sempre maggiori ascendendo, potrebbe praticarsi, e forse in alcuni casi esser utile anche con detto asse AC non già inclinato, ma verticale all'orizzonte. E perciò sollevare i corpi in alto in una maniera affatto mirabile.

Il dottissimo Sig. Abate Nollet nella sua *Fisica Sperimentale* (1) mostra come per causa della Forza centrifuga mol-

B b ti

(1) Tom. II. Lez. V. Tav. 4.

ti liquori di diversa gravità specifica ascendano (*Fig. 4.*) in un Tubo retto inclinato all'orizzonte, quando il Tubo quasi raggio sia rapidamente mosso intorno ad un asse CA. Ora poichè non può riuscire a tal uopo il Tubo, se non è di una mediocre lunghezza, e quindi i liquori non si possono far salire se non a piccole altezze, immaginiamoci che detto Tubo sia avvolto in spira, come (*Fig. 3.*) *f, b, g, B* ec. d'intorno a un asse AC verticale all'orizzonte, e ruotante in un col Tubo velocissimamente d'intorno a se stesso; onde avverrà, se mal non erro, che il liquore per causa di detta Forza centrifuga salirà per questo Tubo, quasi per un piano inclinato, da *f* sino ad X.

Io veramente in vece del Tubo, e del liquore, ho fatto prova (ed èmmene avvenuto benissimo) di un filo d'acciajo (*Fig. 2. 3.*) avvolto in una sola spira *f, b, g* grosso tanto, che diventi inflessibile alla Forza cui debba resistere (nel mio caso era grosso 2. linee incirca del piede del Reno) e sostenuto almen per ogni quarto di cerchio d'intorno all'asse CA, con vetti simili a quelli, che in figura sono ombreggiati a puntini. Nel piano orizzontale (*Fig. 2.*) la distanza *cf* era eguale a polici $2 \frac{1}{2}$; *cg* = a polici $7 \frac{1}{2}$; sicchè *cf* era ad *fg*, come 1 a 2. Nel piano verticale (*Fig. 3.*) lo spazio *fg* tra il principio di una spira *f, b, g* al principio di un'altra prossima *gBP* era maggiore poco più di 3 polici. Così concepita la Macchina, ed appiccativi successivamente con un uncino (il quale se fosse corredato di una carrucola riescirebbe più agile) due differenti gravi χ , uno di legno, che pesava oncie 2, ed un altro di piombo pesante oncie 15. Questi salivano velocemente da *f* verso *b*, poi *g* ec. mentre volgendo la manetta M, l'asse AC ruotava con rapidità in senso opposto, cioè da *g* verso *b*, poi *f* ec.

Per render qualche ragione di ciò bisogna considerare, che il grave χ visto di profilo (*Fig. 3.*) mentre era in quiete

te decombeva verticale , e coperto sotto il punto d' attacco P ; ma poi ruotando la spirale supponiamo secondo l'ordine EDP , acquistò per causa della Forza centrifuga un più alto luogo , tentando disporfi quasi secante detta spirale nella direzione PC posto in diretto col raggio , che parte dal centro di ruotazione . Che ne avviene perciò ? Avviene che se detto grave α fosse con l'uncino attaccato alla periferia di un cerchio (*Fig. 1. e 2.*) ruotante intorno al suo centro C , secondo l'ordine per esempio Peab , starebbe nel punto P d' attacco immobile , perchè dovendosi per causa di detta Forza concepire il grave disposto nella direzione CPZ , direzione che non più da una parte inclina , che dall' altra , il grave non può sdrucchiolare nè da una parte verso e , nè dall' altra verso b ; onde seguita che se le spire *fbg, gBP, PEX* fossero state eguali , cosicchè nel piano orizzontale (*Fig. 1.*) rappresentassero un circolo , per la addotta ragione il grave non potrebbe salire . Ma se invece di un circolo Peab muoventesi orizzontalmente intorno al centro C , fosse piuttosto una spirale ruotante secondo l'ordine XEDP ec. (*Fig. 2.*) il grave α non trovando in P una sicura presa , perchè αP formerebbe allora un angolo misto acuto con PD , sdrucchiolerebbe , come in fatti avviene , in senso contrario da P verso D , poi E ec. obbedendo così quanto può a quella Forza , che tenta rimuoverlo sempre più lontano da detto centro ; giacchè D è lontano da C più di P ; E più di D ec.

Questo discorso vale a dimostrare , che il pezzo α debba scorrere lungo una spirale orizzontale mossa d' intorno al suo centro C , ma non già a convincere che debba salire su per una spirale elevata sopra l'orizzonte , come quella della *Fig. 3.* e rotante intorno al suo asse AC . Onde pare , che perciò il grave α debba per mezzo della Forza centrifuga diventare affetto di un' altra inclinazione particolare , la quale io ammetto volentieri , benchè per non aggiungere nuove figure , e per non parer troppo lungo , tralascio

scio di ricordarla. Volendo che ciò sia quanto piacquemmi per ora dire nel proposito della *Vite d'Archimede*.

Se poi qualcheduno dopo aver trovato vero in effetto, quanto io so di certo per esperienza, quindi si lusingasse che una simil *Vite* fosse applicabile al moto perpetuo (avvisando che o dell'acqua, o delle palle salite così a certa altezza acquistassero poi cadendo una tal quantità di moto, che se andassero ad urtar nelle penne di una ruota ordinata a far muover la *Vite*, la facessero di fatto muovere tanto, che riportasse o l'acqua, o le palle cadute alla primiera altezza) stia certo, che questa opinione, oltrechè dall'Autore da me lodato è (1) altamente schernita, farebbe poi anche riprovata dallo sperimento.

(1) Ceux (dice egli nella Lez. 3. Sez. 3. delle leggi del moto semplice Artic. 2.) qui s'en laissent imposer par l'inspection d'une Machine, ou par une pretendue demonstration geometrique, sur la quelle on s'appuye quelque fois pour établir la decouverte de mouvement perpetuel, sont les dupes de la mauvoise foi, ou d'un paralogisme qui ne

tiennent gueres contre de gens instruits. Le mouvement perpetuel est la pierre philosophale de la mechanique; ordinairement ceux qui s'y heurtent, ne sont pas fort initiés dans cette science, de même qu'une recherche obstinée de la quadrature du cercle, ou du grand oeuvre, n'annoncent a present, ni un Geometre sublime, ni un habile Chymiste.

FINE DELLA VITE SIMILE A QUELLA
D'ARCHIMEDE.

OSSERVAZIONI

S O P R A

ALCUNI POLIGONI RETTILINEI
REGOLARI.

OSSEYVAZIONI

FORN

ALCUNI POLIGONI RETTILINEI

REGOLARI

PREFAZIONE.

IO tengo fermissima opinione, che in ogni secolo valentissimi Matematici avranno trattata la materia de' Poligoni rettilinei regolari, e saranno in essa iti tant' oltre, che per quanto può la penetrazione degli uomini troppo angusta, e limitata avranno discoperte le loro proprietà e natura; sicchè a quelli, che sono successi dappoi, non altro più rimanga che fare in questa parte. Ma non ostante lusingandomi, che in affare geometrico queste figure non siano forse state per lo addietro costrutte così, come ora da me si fa; e che talvolta si possa se non per arte, almen per caso incontrare in qualche verità non ancora intesa, o avvertita d'ugli altri; quindi mi parve ben fatto di estendere queste poche Osservazioni, le quali abbenchè la maggior parte siano nuove per me, che non sono molto esperto in questa sorta di scienze, non intendo però di sostenere che lo siano per altri; massime ancora perchè, per chiunque siasi, l'asserir cosa nuova sarebbe troppo temeraria impresa; non potendosi ragionevolmente supporre, che un sol uomo sappia quanto siasi scritto per le innanzi, e molto meno quanto oggidì da tanti in tante parti si scriva.

Era poi a dir vero la mia prima intenzione di cominciare dal Pentagono, come quello, che è il primo, nel quale dopo zero principia coll' unita la serie delle differenze, che (num. 156.) passano tra l'angolo retto, e gli angoli al centro ed alla periferia di qualunque Poligono; ed è pure il primo, di cui mentre prodotti i lati s'incrociano, non può non presentarsi qualche proprietà da osservare. Ma il Triangolo, e il Quadrato mi trattennero intorno a certe bagatelle, che dopo le seguenti Definizioni tosto espongo.

DEFINIZIONI.

1. **C**hiamo primo *asse* di un Poligono (*Fig. 8. Tav. 29.*) la retta BQ, che coincide col diametro del circolo circoscritto ad esso Poligono.
2. Le *ordinate* sono le rette YZ, GM, PN, RT condotte normali all' *asse* suddetto.
Le GM, PN situate dentro all' area del Poligono si dicono *ordinate interiori*; ed *esteriori* sono le YZ, RT, perchè poste al di fuori di detta area.
3. Le porzioni del suddetto *asse* intercette tra un' *ordinata* e l'altra, e determinate comunque, le chiamo *assisse*, quali sono Qc, cn, nm, ed anche nB &c. Delle due *assisse* appartenenti ad un' *ordinata* Pn, chiamo Qn *assissa maggiore*, ed nB *minore*.
4. Io appello *suttenfa* una retta condotta da angolo ad angolo per l'area di un Poligono, quando la considero come opposta ad un qualche numero di lati di esso Poligono. Perciò PN farà una *suttenfa* a due lati; NG *suttenfa* a 3; GM a 4 &c. anzi qualche volta chiamo il medesimo lato *suttenfa* ad un lato, come impropriamente, ma con ragione mi sono espresso al n. 158. nel titolo di quella Proposizione.
5. *Poste in simili siti* chiamo alcune linee, o angoli, o piani, che sono nel medesimo modo ordinate, e disposte intorno al centro della Figura. Avvertendo, che ciò che in qualunque Poligono si asserisce rispetto ad una linea, angolo, o piano, tanto si deve intendere di qualunque altra linea, o angolo, o piano *posto in simili siti* della Figura. Tuttociò per esempio che (*Fig. 4. Tav. 29.*) si dirà della retta ZB, s'intende che sia vero dell' altre tutte BE, EH &c. *poste in simili siti*. Ciò che ivi si asserisce per esempio dell' angolo GZA farà pur vero dell' angolo AEM, MFQ &c.

ARTICOLO PRIMO.

Del Triangolo.

PROPOSIZIONE I.

Alla terza parte di ciascun lato del Triangolo equilatero nop (Fig. 1. Tav. 29.) guidati i lati di un Esagono bqe &c., e di un altro Triangolo eGb, saranno i due Triangoli presi insieme eguali a due Esagoni. Dico eGb + nop = 2 bqe &c.

2. E' dovere, che preceda il valore degli angoli di questo Poligono, non solo perchè serve alla proposta dimostrazione; ma anche per non interrompere l'ordine già prefisso negli altri. E però

$$\text{Ang. } bce = \text{Gr. } 120 = \frac{360}{3}$$

$$beG = \text{Gr. } 60 = \frac{360}{6}$$

$$\text{Onde } beG = \frac{bce}{2}.$$

Nei quali valori v'è d'osservabile, che l'angolo al centro di un Triangolo è eguale all'angolo alla periferia di un Esagono; e reciprocamente l'angolo al centro di un Esagono è eguale all'angolo alla periferia di un Triangolo. Quindi (costrutta la Figura come abbiamo proposto) nasce, che essendo il Triangolo $bqe = bce$, l'area di un Triangolo sta all'area di un Esagono inscritto nel medesimo circolo, come 1 a 2. L'area poi di un esagono sta all'aria di un triangolo circoscritto al medesimo circolo, come 2 a 3; ciò che spicca da se nella Figura, e si deduce anche

che dal primo Teorema pubblicato (1) dal Chiarissimo Francesco Maria Zanotti. Onde essendo l'Esagono bqe &c. inscritto nel medesimo circolo rispetto al Triangolo eGb , ed essendo anche circoscritto al medesimo circolo rispetto al triangolo nop , succede che il Triangolo eGb , l'Esagono bqe &c. il triangolo nop si ritrovano ordinati in progressione aritmetica, come li tre numeri 1. 2. 3; onde siccome $1 + 3 = 2 + 2$; così il Triangolo $eGb + \text{trian. } nop = 2$ Esagoni bqe &c. Come era da dimostrare.

PROPOSIZIONE II.

Il quadrato eretto sul diametro di un Circolo circoscritto ad un Triangolo è al quadrato eretto sul lato di esso

Triangolo, come $4 a 3$. Dico $\overline{qG} \cdot \overline{Ge} :: 4 \cdot 3$.

3. Benchè questa Proposizione sia già dimostrata dal P. Tacquet (2), non ostante in grazia delle conseguenze che ne deduco, sia lecito anche a me di dimostrarla così. Poichè dall'estremità del diametro Gq guidate qb, qe , che faranno lati di un Esagono, risultano bc, bq eguali tra di loro, ed alle due ec, eq , avviene che la be taglia in d per metà il raggio cq ; e quindi $Gd = 3dq$; $Gq = 4dq$; $cq = 2dq$.

Onde $\overline{bd} = \overline{bq} - \overline{dq} = \overline{cq} - \overline{dq} = 4dq - dq = 3dq$ e però essendo be doppia di bd , farà

$\overline{be} = 4\overline{bd} = 12dq$. Ma $\overline{Gq} = 16dq$. Sarà dunque

$\overline{Gq} \cdot \overline{be} :: 16dq \cdot 12dq :: 4 \cdot 3$. Ciò che era &c.

CON-

(1) Lettera del suddetto stampata in Firenze l'anno 1749.

(2) *Elem. Geom.* Lib. IV. Prop. 15. nello Scoglio.

C O N S E G U E N Z A I.

4. Poichè $Gq = 16dq$, $be = 12dq$, ed $eq = 4dq$,

li tre quadrati Gq , be , ovvero Ge , eq faranno come i tre numeri 16, 12, 4, o sia 12, 9, 3.

E perchè $me = \frac{1}{4} Ge = \frac{1}{4} be = 3dq$. e perciò

$bm = be - me = 12dq - 3dq = 9dq$; li tre quadra-

ti $be = 12dq$; $bm = 9dq$; $me = 3dq$ faranno essi pure, come i tre numeri 12. 9. 3.

C O N S E G U E N Z A II.

5. Poichè la somma de' quadrati formati sopra ciascun lato

dell' Esagono $= 2dq$ è $= 6 \times 4dq = 24dq$; ed i tre qua-

drati $be = 12dq$; $bm = 9dq$; $me = 3dq$ presi insieme

fanno $24dq$, ne siegue che la somma de' quadrati formati sopra ciascun lato di un Esagono è eguale alla somma

di detti tre quadrati be , bm , me .

C O N S E G U E N Z A III.

6. Perchè primieramente la superficie della sfera sta alla superficie curva del cilindro quadrato inscritto nella medesima

ma sfera (1) come 2 a 1, o come 24 a 12 e la sud-

detta somma de' quadrati $24dq$ sta a $be = 12dq$ pure come 24 a 12, ne siegue che la superficie della sfera sta alla superficie curva di detto cilindro, come la somma de' quadrati formati su i lati di un Esagono al quadrato del lato be del Triangolo regolare inscritto.

7. Secondo. Che se alla superficie curva di esso cilindro inscritto aggiungeremo la superficie delle due basi, allora la superficie della sfera sta a tutta la superficie del cilin-

dro (2) come 4 a 3; ma be a bm sta come 4 a 3. Dunque la superficie della sfera sta a tutta la superficie del

cilindro inscritto, come be a bm .

8. Terzo. Inoltre $Gg = 16dq$ sta ad $mb = 9dq$ come 16 a 9; ma la superficie o solidità della Sfera sta alla superficie o solidità di un Cono Equilatero inscritto nella medesima (3) come 16. a 9. Dunque la superficie o solidità della Sfera sta alla superficie o solidità di un Co-

no Equilatero inscritto nella medesima, come Gg ad mb .

9. Quarto. Abbiamo ancora $Gc = 4dq$, che sta a $Gd = 9dq$, come 4 a 9. Ma la superficie o solidità di un Cono Equilatero sta alla superficie o solidità della Sfera (4) inscritta nel medesimo Cono, come 4 a 9. Dunque

(1) Tacquet prop. 33. nell' aggiunta al Trattato della Sfera, e Cilindro d'Archimede.

(2) Tacquet prop. 34. nel luogo sopracitato.

(3) Tacquet prop. 39. nel luogo sopracitato.

(4) Tacquet prop. 40. nel luogo sopracitato.

que la superficie o solidità di detto Cono sta alla superficie o solidità di detta Sfera, come \overline{Gc}^2 a \overline{Gd}^2 .

10. Quinto. Finalmente \overline{cq} sta a \overline{dq} , come 4 a 1; e la superficie di un Cono equilatero circoscritto ad una Sfera è alla superficie di un Cono equilatero inscritto (1) come

4 a 1. Dunque la superficie &c. sta come \overline{cq}^2 a \overline{dq}^2 . Lo stesso si deve dire rispetto alla proporzione che è tra il Triangolo equilatero circoscritto, ed inscritto nel medesimo Circolo; e riguardo pure ad un Tetraedro circoscritto, ed inscritto nella medesima Sfera.

ARTICOLO SECONDO.

Del Quadrato.

PROPOSIZIONE I.

Tirate dagli angoli a, d di un quadrato (Fig. 2.) le aQ, dp suttense a tre lati di un ottagono inscritto nel medesimo Circolo. Poi dal punto d'intersezione f alla periferia condotta la fe normale al diametro bK, dico 1. Che \overline{fe}^2 è eguale all' eccesso dell' ottagono sopra il quadrato. 2. Che \overline{Ke}^2 è eguale all' area di detto ottagono.

11. Essendo aQ parallela a bd, e dp parallela ad ab, risulta l'angolo $\overline{afd} = \text{ang. } abd$, e li triangoli \overline{afd}, abd , che hanno comune la base ad, parimenti eguali. Guidata
D d poi

(1) Tacquet prop. 41. nel luogo sopracitato.

poi nm ai punti, dove le rette aQ, dp segano i lati ab, dg ; sono eguali anche i triangoli afd, dfm, mfn, nfa , perchè insistono sopra basi eguali af, fm , ed hanno la medesima altezza. Onde tutto il rettangolo $nadm$ eguale a detti quattro triangoli sarà pure eguale ai quattro triangoli bpa, abd &c. che sono tutti insieme la differenza, o l'eccesso dell'ottogono sopra il quadrato $adgb$.

12. Ora poichè (essendo i triangoli sopraddetti afd, abd simili, ed eguali) risulta $bo = of = fc$, e che $bo = uK$, farà $bo + uK = bf = oc = an$; e farà $bK - bf = fK = ba = ad$. Perciò il quadrato eretto sopra la media proporzionale tra bf , ed fK , cioè tra an , ed ad , farà eguale al suddetto rettangolo $nadm$, eguale, dissi, all'eccesso dell'ottogono sopra il quadrato $adgb$. Il che era in primo luogo da dimostrare.

13. Finalmente per essere $\overline{Ke} = \overline{fK} + \overline{fe}$, ed essendo \overline{fK} eguale al quadrato $adgb$, ed \overline{fe} eguale al sud-

detto eccesso, viene detto \overline{Ke} eguale al quadrato $adgb$ più il rettangolo $nadm$ eccesso predetto, e per conseguenza eguale a tutta l'area dell'ottogono $pabd$ &c. Ciò che restava da &c.

PROPOSIZIONE II.

Le diagonali ab, gK ; cb, Kf ; af, cg dividono il quadrato (Fig. 3.) $agbK$ in tre parti eguali; una marcata a puntini, tratteggiata l'altra, e bianca l'ultima.

14. Si guidi Qn per i punti d'intersezione Q ed m , onde essendo le rette cQ, Kn parallele ed eguali, risultano i
trian-

triangoli cQm , KQm eguali, perchè hanno la medesima altezza, e la medesima base Qm ; dai quali perciò se si leva la parte comune Qdm , resta la parte bianca Qcd eguale alla bianca dKm ; ma il triangolo QcK è pure eguale al triangolo QnK , dai quali togliendo via parti eguali: cioè Qcd dal triangolo QcK , e dKm dal triangolo QnK , il residuo cdK marcato a puntini risulta eguale al residuo tratteggiato $mKn + mdQ$.

15. Secondariamente perchè Qm, cK sono parallele comprese nel medesimo angolo cfK , e che per esser cf diviso per metà in Q , viene $fQ . fc :: 1 . 2$; perciò abbiamo ancora $Qm . cK :: 1 . 2$. Ora essendo, come dissi, Qm, cK parallele, risultano simili i triangoli Qdm, Kdc ; e quindi nasce ancora che $dm . mQ :: dc . cK$; ed invertendo $mQ . dm :: cK . dc$, ed alternando $mQ . cK :: dm . dc$. Ma $mQ . cK :: 1 . 2$. Dunque $dm . dc :: 1 . 2$. Pertanto i triangoli cdK, dKm , poichè hanno la medesima altezza, faranno fra essi come le basi dm, dc : cioè faranno come $1 . 2$. Onde il triangolo cdK farà doppio del triangolo dKm . Sarà dunque eguale alli due triangoli bianchi $Qcd + dKm$, che sono stati mostrati eguali. E perchè detto cdK è anche eguale ad $mKn + mdQ$ viene anche $Qcd + dKm = mKn + mdQ$. Dunque finalmente concludo, che cdK ; $Qcd + dKm$; $mKn + mdQ$ sono tre piani tra essi eguali, e tutti insieme eguali a $QcKn$ quarta parte del proposto quadrato $agbK$. Quindi moltiplicando per 4 ciascuna di dette parti tre, verrà il quadrato $agbK$ dalle sopraddette diagonali diviso in tre eguali parti. Ciò che era &c.

C O N S E G U E N Z A I.

16. E' rimarcabile che se fosse per d tirata una retta parallela ed eguale a cQ questa mostrerebbe le altezze dei triangoli mdQ, cdK , le quali farebbero come $1 . 2$; giac-

chè $md.cd :: 1.2$. E perchè i triangoli tra essi sono in ragion composta delle altezze e delle basi; essendo pure le basi $mQ.cK :: 1.2$; verrebbe il triangolo mdQ al triangolo cdK , come 1 a 4. Ma cdK è $\frac{1}{3}$ del quadrato $QcKn$. Dunque mdQ verrebbe ad essere $\frac{1}{4}$ di $\frac{1}{3}$, cioè $\frac{1}{12}$ parte di detto quadrato $QcKn$.

C O N S E G U E N Z A II.

17. Per la medesima ragione addotta il triangolo mdQ sta al triangolo Qcd , come 1 a 2; al triangolo mKn , come 1 a 3; ed abbiamo osservato che sta al triangolo cdK come 1 a 4. Dunque li triangoli $mdQ.Qcd.mKn.cdK$ sono ordinati in progressione aritmetica, come li quattro numeri 1. 2. 3. 4. Da quali ben si scorge, quali eguaglianze de' piani l'addizione produrrebbe. Che se dalla progressione aritmetica si levi via il terzo termine, cioè il triangolo mKn , che corrisponde al num. 3, in tal caso restano gli altri tre triangoli ordinati in progressione geometrica crescente in ragion dupla, come li tre numeri 1. 2. 4. E quindi risultano altre eguaglianze de' piani per la moltiplicazione.

Annotazione I.

18. Ciò che si è asserito in queste due Conseguenze relativamente alle parti del quadrato $QcKn$ è vero anche rispetto a tutto il quadrato $agbK$, quando si moltiplichino per 4 quelle di dette parti, che entrano in questione.

Annotazione II.

19. Questa Proposizione non è particolarmente vera nel solo Quadrato, ma generalmente si estende a qualunque parallelogrammo, o rettangolo dato.

ARTICOLO TERZO.

Del Pentagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geometrica dell' angolo al centro di detto Poligono.

20. Si prolunghino da prima i lati del proposto, o di qualunque altro Poligono (*Fig. 4.*) finchè arrivino a quell' ultimo punto d'intersezione, oltre al quale procedendo anche all' infinito, mai più indi s'incrociano. Ora essendo la somma di tutti gli angoli AGP, GPQ &c. alla periferia di qualunque figura rettilinea eguale a due volte tanti angoli retti, meno quattro (i quali pareggiano la somma di tutti gli angoli esterni HGP, BPQ &c.) quanti sono i lati della Figura, ed essendo pure gli angoli di un triangolo presi insieme eguali a Gr. 180, perciò quando aggiungendo, e quando sottraendo angoli gli uni dagli altri, quelli di questa Figura vengono a risultare, come siegue:

$$\text{Ang. GPQ} = \text{Gr. } 108$$

$$\text{QPB} = \text{Gr. } 72 = \frac{360}{5} = \text{MCQ ang. al centro del } 5\text{gono.}$$

$$\text{QBP} = \text{Gr. } 36 = \frac{360}{10} = \text{MGQ ang. al centro del } 10\text{gono.}$$

$$\text{Onde } \text{QBP} = \frac{\text{QPB}}{2} = \frac{\text{GPQ}}{3}.$$

Essendo vero pertanto, che sottraendo 36 da 60 angolo al centro di un esagono, il residuo 24 è eguale ad $\frac{1}{3}$ dell' angolo al centro di un 5gono, eguale dico a $\frac{72}{3}$. Perciò se fatto centro in B con qualunque apertura BQ descrivasi
(il

(il che geometricamente si può fare) un arco $QY = \text{gr. } 60$,
 l'angolo QBY farà $= \frac{McQ}{3}$, cioè $= \frac{72}{3} = 24$ angolo al
 centro di un 15gono.

Annotazione.

21. Se mai fosse utile anche la trisezione dell'angolo AGP
 alla periferia del proposto 5gono, è facile il conseguirla.
 Imperciocchè tirate le MG, QG , l'angolo per esempio AGM
 viene ad essere $\frac{1}{3}$ dell'angolo AGP . Perchè sottratto l'an-
 golo MAG da due retti, cioè $\text{gr. } 108$ da $\text{gr. } 180$, la
 metà 36 del residuo 72 è appunto il valore dell'angolo
 $AGM = AMG = QBP$; sicchè dalle due rette MG, QG
 detto angolo AGP viene diviso in tre eguali parti.

P R O P O S I Z I O N E II.

*Il lato di un 5gono sta alla maggior ordinata, come
 essa maggior ordinata a tutti due. Voglio dire che*
 $\therefore PQ \cdot GM \cdot PQ + GM$.

22. Opportuna a questo fatto trovasi nella Figura que-
 sta proporzione $BQ \cdot QP :: BQ + QM \cdot MG$; ovvero
 $QP \cdot BQ :: MG \cdot BQ + QM$; ma essendo stato provato
 (n. 21.) l'angolo AGM , ovvero $AMG = QBP = AZG$, fa-
 rà anche il lato GZ , ovvero BQ eguale al lato GM . Il lato
 poi MQ è eguale a PQ . Sostituendo dunque PQ a QM ,
 ed MG a BQ avremo $QP \cdot MG :: MG \cdot MG + QP$. Cioè
 $\therefore PQ \cdot GM \cdot PQ + GM$, che è lo stesso, ed è ciò che era
 da dimostrarsi.

C O N S E G U E N Z A I.

23. Perchè $PQ \cdot GM :: GM \cdot PQ + GM$, ne siegue che se si prenda una linea $PQ + GM$ composta del lato PQ del \triangle gono, e GM ordinata maggiore, PQ farà il segmento minore, GM il segmento maggiore; e che nel punto dove queste linee uniscono a formarne una sola, la retta resta divisa *media & extrema ratione*.

C O N S E G U E N Z A II.

24. Essendo ZE, PQ parallele, faranno gli angoli alla medesima parte QPB, EZG eguali; ma AGZ è per la costruzione eguale a QPB ; dunque eguale anche ad EZG ; e però $EZ = EG$. Ora $EG = GB$ posta in simile sito $= PQ + GM$. Dunque $EZ = PQ + GM$. Sicchè $\therefore PQ \cdot GM \cdot EZ$; ovvero anche le sole metà $\therefore nQ \cdot mM \cdot xE$.

C O N S E G U E N Z A III.

25. Per la similitudine de' triangoli PGQ, PZF succede, che $PG \cdot GQ :: PZ \cdot ZF$; ed essendo i primi tre termini continui proporzionali, il quarto termine ZF farà pure continuo proporzionale a quelli. Onde $\therefore PG \cdot GQ \cdot PZ \cdot ZF$; ma $GQ = BP$; $ZF = ZB$. Dunque facendo la sostituzione risulta anche $\therefore PG \cdot PB \cdot PZ \cdot ZB$.

Annotazione.

26. E' superfluo il ricordare, che $PQ \times EZ = \overline{GM}^2$; e così che $PG \times ZB = PB \times PZ$. Sono cose che vengono da se, e perciò saranno tralasciate anche in progresso.

P R O P O S I Z I O N E III.

La qual serve d'apparecchio alla seguente.

Dato un primo termine, trovarne un secondo, al quale così stia il primo, come il secondo a tutti due.

27. Si divida (*Fig. 5.*) *media & extrema ratione* la retta GP primo termine dato, su la quale prodotta si segni Pe eguale al segmento maggiore, ed eB posta in dirittura eguale a tutta la data GP. Dico che $\therefore GP . PB . GB$.

Però con una medesima apertura PG descrivansi due archi, uno col centro in P, l'altro col centro in e; ed al punto d'interfezione Q si guidino le rette PQ, eQ, che faranno ambedue eguali alla data GP, e si uniscano i punti Q, B con una retta. La eQ = GP sia come GP similmente divisa in r, cosicchè rQ sia il segmento maggiore; onde condotta Pr, risultino rQ, rP, Pe eguali. Ora per la decima d'Eucl. Lib. 4. li tre triangoli reP, ePQ, PQB verranno isosceli simili, e cò gli angoli alla base doppj ciascuno degli angoli al vertice; onde siccome per la costruzione $\therefore er . rQ . Qe$, così pure faranno le basi di detti tre triangoli $\therefore re . eP . PQ$.

28. Si produca ora QP per la quantità PH = PB, e si congiungono i punti B, H, dai quali siano condotte per G, e Q sino al punto di concorso E le rette BE, HE. Dico primieramente, che li triangoli PQB, QBH, HEB sono simili. Imperocchè l'angolo ePQ alla base del triangolo isoscele ePQ essendo doppio dell'angolo al vertice ePQ, viene = gr. 72, il qual valore sottratto da gr. 180, resta l'angolo BPH = gr. 108. Questo sottratto dal valor totale degli angoli del triangolo BPH, resta ancora per tutti due insieme gli angoli alla base gr. 72; metà de' quali, cioè gr. 36, sono il valore dell'angolo PBH, il qual'aggiunto all'angolo QBP pure

pure = gr. 36, risulta tutto l'angolo QBH = gr. 72. Nel medesimo modo provasi che è = gr. 72 anche l'angolo BQH, e non altrimenti l'angolo BHG. Onde li tre triangoli PQB, QBH, HEB sono simili.

29. Secondariamente dico, che detti tre simili triangoli sono ordinati nella medesima progressione; perchè siccome il lato eP del triangolo reP fu base del triangolo ePQ, ed il lato PQ di detto triangolo ePQ fu base del triangolo PQB; così ora il lato QB del triangolo PQB diventa base del triangolo QBH; il lato BH di detto triangolo QBH diventa base del triangolo HEB; onde per la ragione addotta di sopra (notando specialmente che il triangolo PQB è stato replicato, ed è stato l'ultimo delli tre triangoli reP, ePQ, PQB, e quì è il primo delli tre PQB, QBH, HEB) verranno le basi \div PQ. QB. BH. Ma PQ = GP; QB = PB; BH = GB. Sostituendo dunque questi valori avremo \div GP. PB. GB. Ciò che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE IV.

Descrizione geometrica del Pentagono.

30. Pongasi mente, che in qualunque Poligono, di cui il denominatore sia numero disparo, havvi sempre (*Fig. 4.*) un punto M, che perpendicolarmente sovrasta alla meta D di un lato opposto PG; e che continuando due lati fra essi massimamente distanti MQ, GP dalla parte a cui convergono, havvi un punto d'intersezione B, in cui le linee concorrenti MB, GB sono eguali; delle quali due linee, le parti QM, PG sono appunto due lati del proposto Poligono massimamente convergenti verso B, se si paragonino a due altri lati QP, GP convergenti verso P.

31. Ciò posto, volendo descrivere un Pentagono arbitrario, cioè di cui non sia determinato il lato, sia primiera-

E e

mente

mente una data BG divisa *media & extrema ratione* in P; e se non fosse arbitrario, ma che fosse dato e determinato il lato per esempio PG, si cerchi per mezzo della terza Proposizione il secondo termine PB, a cui stia il primo dato PG, come il secondo PB a tutti due GP + PB. Indi da G verso Z si produca la BG per una quantità GZ = PB parte maggiore; poi dalla metà PG parte minore sia eretta una perpendicolare DM. Finalmente col centro in B, e con l'apertura BG descritto un arco GM, dal punto B per M, dove l'arco s'interseca con la perpendicolare, si meni un'altra BE = BZ, e similmente divisa. Imperocchè replicando così la medesima operazione su detta retta BE, si menarà poi da E un'altra EH &c. fino al fine della proposta descrizione.

32. Nel supposto della retta BZ divisa in P, e G, come si disse, si potrebbe operare anche in altra maniera, cioè tirando da B al punto E d'intersezione di due archi descritti uno col centro in Z, l'altro col centro in G, e con una medesima apertura eguale a PZ, tirando, dissi, la retta BE; indi coi centri in Q, e B, e con l'apertura suddetta, menando EH al punto d'intersezione H &c. fino al fine. Perchè risultando così li triangoli EZG, HBQ, ovvero EZB, BHE sempre con gli angoli alla base doppj dell'angolo al vertice, la descrizione si dimostra cavata da quella affezione, che è propria ed essenziale di questo Poligono. Ma o nell'una o nell'altra maniera, che questa descrizione si pratici, benchè tragga l'origine da quella proprietà che è comune anche alla descrizione d'Euclide, o di Tolomeo, cioè dalla suddetta divisione di una linea *media & extrema ratione*, non però si può dire che sia d'essa. Ella è bensì egualmente geometrica, perchè precisamente conforme a quanto si è dimostrato nelle due Proposizioni antecedenti.

P R O P O S I Z I O N E V.

La più piccola ordinata sta alla maggior assissa posta a lati della ordinata maggiore, come l'assissa minore di detta ordinata maggiore, sta all' aggregato di tutte due le ordinate. Cioè voglio dimostrare, che $nQ. mr :: Am. mM + nQ.$

33. Laonde si rifletta, che dal numero 22. seguita che $nQ. mM. mM + nQ.$ Ma per la ottava d'Eucl. Lib. 6. si ha pure $Am. mM. mr.$ Dunque $nQ \times mM + nQ = Am \times mr.$ E però ricaviamo $nQ. Am :: mr. mM + nQ;$ ed alternando $nQ. mr :: Am. mM + nQ.$ Ciò che era &c.

P R O P O S I Z I O N E VI.

Il rettangolo formato su le due assisse spettanti alla minore ordinata sta al rettangolo formato su le due spettanti alla maggiore, come la minore ordinata a tutte due. Voglio dire, che $Anr. Amr :: nQ. nQ + mM.$

34. Poichè per la ottava d'Eucl. Lib. 6. $An. nQ. nr;$ ed anche che $Am. mM. mr;$ ed inoltre essendo i quadra-

ti in ragion duplicata de' loro lati sarà \overline{nQ}^2 ad \overline{mM}^2 in ragion duplicata di nQ ad $mM.$ Ma nella seconda Proposizione ab-

biam visto, che nQ sta ad $nQ + mM$ in ragion duplicata di nQ ad $mM.$ Dunque $\overline{nQ}^2. \overline{mM}^2 :: nQ. nQ + mM.$ Ora

perchè $\overline{nQ}^2 =$ rettang. $Anr;$ ed $\overline{mM}^2 =$ rettang. $Amr;$ perciò faranno parimenti li rettangoli $Anr. Amr :: nQ. nQ + mM.$ Ciò che era &c.

C O N S E G U E N Z A .

35. L'angolo QrP alla periferia di un ogono essendo $=$ gr. 144, la metà 72 farà il valore dell'angolo QrA ; ma questo è pur valore dell'angolo McA al centro di un pentagono. Dunque le rette Qr , Mc , perchè egualmente inclinate alla medesima retta rA , faranno parallele. Le rette poi Mm , Qn sono parallele per la costruzione; onde risultano simili i triangoli mMc , nQr . Sicchè $nQ \cdot mM :: rQ \cdot cM$; e perciò $Anr \cdot Amr :: rQ \cdot rQ + cm$. Val' a dire, che il primo rettangolo sta al secondo, come il lato di un ogono sta all'aggregato di esso lato più il raggio del circolo circoscritto al ogono e sgono ora proposto.

P R O P O S I Z I O N E VII.

Il rettangolo di tutto il diametro nella minor assissa appartenente alla maggior ordinata mM sta al rettangolo fatto su tutte due le assisse laterali a detta ordinata, come il lato del sgono sta alla somma di $\frac{1}{4}$ di esso lato, più $\frac{1}{2}$ dell'ordinata medesima.

In una parola $rAm \cdot rMA :: AM \frac{nQ + mM}{2}$.

36. Abbiamo esposto (n. 33.) che $\div nQ \cdot mM \cdot nQ + mM$. Ma per l'undecima del Tacquet in Archimede si ha ancora $\div nQ \times 2 \cdot mM \cdot \frac{nQ + mM}{2}$. Ora perchè il lato AM essendo doppio dell'ordinata nQ , risulta lo stesso, che se fosse detto nQ moltiplicato per 2; perciò sostituendo AM ad $nQ \times 2$ verrà $\div AM \cdot mM \cdot \frac{nQ + mM}{2}$. E perchè li quadrati sono in

ragion

ragion duplicata de' loro lati farà $\overline{AM} \cdot \overline{mM} :: \overline{AM} \cdot \frac{nQ + mM}{2}$.

Ma il rettangolo $rAm = \overline{AM}$; ed il rettangolo $rmA = \overline{mM}$.

Dunque $rAm \cdot rmA :: \overline{AM} \cdot \frac{nQ + mM}{2}$. Ciò che era &c.

PROPOSIZIONE VIII.

Il rettangolo fatto dalle assisse spettanti alla minore ordinata sta al rettangolo fatto di tutto il diametro nella minore assissa spettante alla maggiore ordinata, come 1 a 4. Stanno, dissi, così: Anr. rAm :: 1. 4.

37. Essendo, come tante volte si è detto, i quadrati in ragion duplicata de' loro lati, nQ farà ad \overline{AM} in ragion duplicata di nQ ad \overline{AM} ; ma nQ ad $\overline{AM} = PQ$ sta per la costruzione, come 1 a 2. Dunque faranno $nQ \cdot \overline{AM} :: 1 \cdot 4$; ma $nQ = Anr$; ed $\overline{AM} = rAm$. Dunque $Anr \cdot rAm :: 1 \cdot 4$. Ciò che era &c.

Annotazione.

38. Queste tre ultime Proposizioni sono state appostatamente esposte, perchè contengono certe eguaglianze superficiali, delle quali dobbiamo aver motivo di favellare (n. 146.) in altro luogo.

PROPOSIZIONE IX.

Il rettangolo della minor affissa, spettante alla minor ordinata, nell'intero diametro sta al rettangolo fatto delle due metà di esso diametro (cioè al quadrato del raggio) come la minore ordinata sta all'aggregato della maggiore, e minore. In breve. Arn. Acr :: nQ. nQ + mM.

39. Poichè dal n. 22. abbiamo $\therefore PQ \cdot GM \cdot PQ + GM$, faranno anche le metà $\therefore nQ \cdot mM \cdot nQ + mM$. Indi dal n. 35 rilevasi $nQ \cdot mM :: rQ \cdot cM$; e però siccome $\therefore nQ \cdot mM \cdot nQ + mM$; così è $\therefore rQ \cdot cM \cdot rQ + cM$; d'onde seguita, che $\overline{rQ} \cdot \overline{cM} :: rQ \cdot rQ + cM$. Ma $\overline{rQ} = Arn$; $\overline{cM} = Acr$; e giacchè $rQ \cdot rQ + cM :: nQ \cdot nQ + mM$. Dunque pure avviene che $Arn \cdot Acr :: nQ \cdot nQ + mM$. Ciò che era &c.

C O N S E G U E N Z A I.

40. Essendo $\overline{rQ} \cdot \overline{cM} :: rQ \cdot rQ + cM$. Dunque il quadrato del lato rQ di un 10gono sta al quadrato del raggio cM del circolo, in cui è inscritto, come esso lato alla somma del lato, e raggio suddetto.

C O N S E G U E N Z A II.

41. Giacchè (num. 33.) $nQ \cdot mM :: mM \cdot mM + nQ$, perciò il seno nQ dell'angolo Qcr al centro di un 10gono sta al seno mM dell'angolo AcM al centro di un 5gono, come detto seno mM alla somma di detti due seni, cioè come mM ad $mM + nQ$.

PROPOSIZIONE X.

Due raggi cQ, cG condotti dal centro c a due angoli Q, G massimamente distanti di un Poligono, comprendono l'angolo QcG, angolo alla periferia di un Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono dato.

42. Essendo il Poligono dato per esempio un 5gono, farà dico, QcG l'angolo alla periferia di un 10gono. Imperocchè l'angolo McQ al centro del 5gono è doppio dell'angolo del 10gono al medesimo centro; ma l'angolo McQ è doppio dell'angolo MGQ, perchè l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla periferia. Dunque facendo centro in G, l'angolo MGQ metà dell'angolo McQ al centro di un 5gono farà l'angolo di un 10gono al centro G di esso 10gono.

43. Ora quando dall'estremità del lato MQ al centro G di un Poligono si conducono due raggi MG, QG, la somma degli angoli eguali MQG, QMG è eguale all'angolo intiero alla periferia di detto Poligono; onde se di tutto il triangolo MQG, cioè da gr. 180 si sottrae l'angolo al centro MGQ, il residuo è il valore della suddetta somma. Ma gli angoli cGQ, cQG essendo eguali fra essi, e ciascuno eguale alla metà di MGQ, insieme uniti sono eguali all'angolo al centro MGQ. Dunque sottratti questi dal triangolo intiero GQc, cioè da gr. 180, rimane QcG = ang. GMQ + ang. MQG. Eguale, dico, all'angolo alla periferia di un 10gono, il di cui denominatore è doppio del denominat. del Poligono proposto.

Annotazione.

44. La dimostrazione è la stessa, e la proposizione è vera in qualunque Poligono, e perciò avrebbesi dovuto rimetterla ad altro luogo. Ma è stato necessario riporla qui in servizio della seguente

PRO-

PROPOSIZIONE XI.

Primo. Le rette FM, MG, GH sono tre lati di un 10gono ordinati in un circolo, che ha il centro in B, cioè nella periferia di un circolo circoscritto ad un 5gono Z, H, B &c. Secondo. Le rette poi BQ, QG, GH sono tre lati di un 5gono. Terzo. di un 5gono inscritto entro di un circolo, che passa pel centro c del 5gono dato A, G, P &c., e di cui il raggio sta al raggio del circolo circoscritto al 10gono suddetto F, M, G, H, come cM ad MG.

45. Primo. Le rette FM, MG, GH sono primieramente eguali, perchè (n. 22.) GZ , ovvero $BQ = MG$. Ma FM, GH ciascuna $= GZ$ ovvero BQ , giacchè sono poste in simili siti, dunque FM, MG, GH sono eguali. Secondo, gli angoli da esse rette compresi valgono gr. 144 angolo alla periferia di un 10gono; perchè essendo il triangolo FMQ simile al triangolo BMG, l'angolo $FMQ = QPB$ è eguale all'angolo BMG, e ciascuno (num. 20) $=$ gr. 72; gli angoli dunque $FMQ + BMG =$ gr. 144. In terzo luogo i raggi HB, GB, MB, FB sono pure eguali; perchè (n. 24) $EZ = EG (= BG = BM)$; ed $EZ = BH = BF$ poste in simile sito. De' quali raggi poi perchè il punto di concorso B cade nella periferia di un circolo circoscritto al Poligono Z, H, B &c. perciò il loro centro trovasi nella suddetta periferia. Dunque le rette FM, MG, GH sono tre lati &c. Ciò che era la prima parte da dimostrarfi.

46. Secondo. Le rette poi BQ, QG, GH sono primieramente eguali, per la ragion medesima addotta di sopra. Secondariamente gli angoli da esse formati valgono gr. 108 angolo alla periferia di un 5gono; imperocchè l'angolo $BQP = QPB$ è (n. 20) $=$ gr. 72. L'angolo $PQG =$ gr. 36; tutto l'angolo dunque BQG, che comprende detti angoli BQP, PQG sarà $= 72 + 36 = 108$. Le rette dunque BQ, QG, GH so-

no tre lati di un sgono . Ciò che era l'altra parte.

47. Terzo. Giacchè abbiamo trovato che QcG (n. 42) è l'angolo alla periferia di un ogono , quel circolo, che circoferisce il sgono , di cui è un lato QG , deve circoferire anche il ogono , di cui sono due lati Qc, cG . Onde passando per gli angoli di esso ogono , passa anche per un angolo c , che è centro del sgono A, G, P &c.

48. Da ciò poi che si è detto (n. 42) nel principio della medesima antecedente Proposizione seguita, che i raggi di due circoli circoferiti a due Poligoni di un medesimo lato, e l'uno di denominatore doppio del denominatore dell'altro, siano, come cM ad MG . Imperocchè essendo McQ angolo al centro di un sgono , risulta cM raggio di un circolo circoferito a detto sgono , di cui è lato MQ . E perchè MGQ è poi l'angolo al centro di un ogono , la retta MG viene ad esser raggio di un circolo circoferito a detto ogono , e di cui è lato il medesimo lato MQ . Ora non altrimenti questi due altri Poligoni BQ, QG, GH &c. ed FM, MG, GH &c. sono eretti su i lati eguali, e sono l'uno di denominatore doppio del denominatore dell'altro, dunque i raggi de' circoli ad essi circoferiti faranno parimenti come cM ad MG . Ciò che in ultimo luogo restava &c.

Annotazione.

49. Questa Proposizione ha luogo in tutti i Poligoni di denominatore disparo, e se non fosse, che si cangiano certe circostanze che hanno bisogno di nuova prova, farebbe soverchio il ripeterla, e molto più soverchio, perchè circa all'essenziale se ne darà altrove (n. 150) una dimostrazione generale.

ARTICOLO QUARTO.

Dell' Esagono .

PROPOSIZIONE.

Un Esagono inscritto entro un circolo sta all' Esagono circoscritto il medesimo circolo, come 3 a 4.

50. Dalla costruzione della Figura 6. ben si vede, che dhc è $\frac{1}{6}$ parte dell' Esagono inscritto dhn , &c. ; e che il trapezio $dmhc$ è $\frac{1}{6}$ parte dell' Esag. circoscritto $fm g$ &c. e rileviamo ancora, che il triangolo dmh è la loro differenza ; sicchè devesi provare, che dhc stia a $dmhc$, come 3 a 4.

Perciò essendo dh, fg parallele, avviene che $md . mf :: mq . me$; ma $md . mf :: 1 . 2$ per la costruzione ; dunque $mq . me :: 1 . 2$. Dunque $mq = qe$. Ora già (n. 2) si disse, che l'angolo dmh alla periferia di un Esagono è eguale all'angolo deh al centro di un triangolo equilatero dhc ; onde i triangoli dmh, deh saranno eguali, perchè hanno la base dh comune, ed opposta ad un medesimo angolo. Ma il triangolo dhc è eguale a tre triangoli deh , e perciò eguale a tre triangoli dmh . Il trapezio poi $dmhc$ quindi risulta eguale a $3 + 1 = 4dmh$. Dunque il triangolo dhc sta al trapezio $dmhc$, cioè la sesta parte dell' Esagono inscritto sta alla sesta parte dell' Esagono circoscritto, come 3 a 4. E perchè in tutti stanno come le loro parti simili ; dunque anche un Esagono inscritto &c. Ciò che era da dimostrare.

C O N S E G U E N Z A I.

51. Quindi poichè $dhc = 3dmh$, farà tutta l'area dell' Esagono inscritto, cioè $6dhc = 18dmh$. Così essendo $dmhc = 4dmh$, farà tutta l'area dell' Esagono circoscritto, cioè $6dmhc = 24dmh$. Possiamo inoltre considerare, che il triangolo $fm g$ è eguale a 4 triangoli dmh ; ed il triangolo fgP è eguale a 3 triangoli $fm g$. Dunque il triangolo fgP è eguale a 12 triangoli dmh ; e per una simil ragione è il triang. $cdh = dnh$, ed il triang. $dan = 3$ triang. dnh . Dunque il triangolo $dan = 3$ triangoli cdh ; ma il triangolo cdh è $= 3$ triangoli dmh . Dunque il triangolo $dan = 9dmh$. Sicchè il triangolo dan sta all' Esagono dhn &c. come il triangolo fgP all' Esagono $fm g$ &c. cioè stanno in questa proporzione geomet. $9 . 18 :: 12 . 24$.

C O N S E G U E N Z A II.

52. Li due triangoli presi insieme sono ai due esagoni presi insieme nella medesima ragione, che un triangolo sta all' esagono inscritto nel medesimo circolo, cioè come 1 a 2.

In fatti $9 + 12 = 21$. $18 + 24 = 42 :: 1 . 2$. Perchè poi tanto l' esagono, quanto il triangolo inscritto sta all' esagono ed al triangolo circoscritto, come 3 a 4. Starà anche l' esagono più il triangolo inscritto, all' esagono più il triangolo circoscritto, come 3 a 4; onde

$$9 + 18 = 27 . 12 + 24 = 36 :: 3 . 4 .$$

ARTICOLO QUINTO.

Dell' Ettagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geometrica dell' angolo al centro di detto Poligono.

53. Prolungati i lati dell' Ettagono (*Fig. 7.*) come si fece quelli del 5gono, il valore degli angoli di questa Figura risulta.

$$\text{Ang. } q p o = \text{Gr. } 128 \frac{4}{7}$$

$$o p D = \text{Gr. } 51 \frac{3}{7} = \frac{360}{7}$$

$$o D p = \text{Gr. } 77 \frac{1}{7}$$

$$o D E = \text{Gr. } 102 \frac{6}{7}$$

$$D E Z = \text{Gr. } 25 \frac{5}{7}$$

$$\text{Onde } D E Z = \frac{o p D}{2} = \frac{o D p}{3} = \frac{o D E}{4} = \frac{q p o}{5}$$

E però volendo tripartire l'angolo al centro dell' Ettagono si offervi, che l'angolo $o D p = \text{gr. } 77 \frac{1}{7}$. Col centro dunque in D, e con qualunque apertura Dp fatto un arco di gr. 60 (che geometricamente può farsi) e questo levato dall'angolo $o D p$, cioè da $\text{gr. } 77 \frac{1}{7}$, restano $\text{gr. } 17 \frac{1}{7} = \frac{51 \frac{3}{7}}{3}$, che viene ad essere l'angolo al centro di un 21gono.

Anno-

Annotazione.

54. Se per avventura fosse mestieri di dividere in tre parti eguali l'angolo alla periferia di questo Poligono, si noti che l'angolo DEZ è $\equiv 25 \frac{5}{7}$, e la sua metà eEZ $\equiv 12 \frac{6}{7}$, a cui se si aggiunge un angolo di gr. 30, che è pure geometricamente possibile, farà $30 + 12 \frac{6}{7} \equiv 42 \frac{6}{7}$ valore ricercato nella proposta trisezione.

P R O P O S I Z I O N E II.

Le tre ordinate, una esteriore ZD (che unisce i punti di concorso dei due lati bh, po; e delli due qp, ho prodotti) e due interiori hp. bq sono cont. geom. propor. Dico \therefore ZD. hp. bq.

55. Esaminata la disposizione della figura troviamo, che
 $Eb \cdot bp :: Eh \cdot hD$ ovvero $Eb \cdot Eh :: bp \cdot hD$
 $Qb \cdot bp :: QT \cdot To$ ovvero $Qb \cdot QT :: bp \cdot To$
 Ma $To \equiv hD$ posta in simile sito.

E però $\left. \begin{array}{l} Eb \cdot Eh \\ Qb \cdot QT \end{array} \right\} :: bp \cdot hD$. Dunque (giacchè passa una medesima ragione, tra quelle quantità, che hanno con un'altra un medesimo rapporto) faranno $Eb \cdot Eh :: Qb \cdot QT$; ma $Qb \equiv Eh$; $QT \equiv EZ$, perchè poste in simili siti. Dunque $Eb \cdot Eh :: Eh \cdot EZ$. E però $\therefore Eb \cdot Eh \cdot EZ$. Ovvero giovandomi piuttosto di disporre i termini. Così $\therefore EZ \cdot Eh \cdot Eb$. Dunque faranno anche $\therefore ZD \cdot hp \cdot bq$, perchè sono parallele, e comprese nel medesimo angolo KEH. Ciò che era da dimostrarsi.

C O N S E G U E N Z A I.

56. Le rette Dh, pb, qY condotta per d faranno pure tre contin. geom. propor. perchè e sono fra esse parallele, e comprese nel medesimo angolo KEH , e cominciano dai punti D, p, q estremi delle suddette cont. geom. propor. ZD, hp, bq .

C O N S E G U E N Z A II.

57. Si potrebbero conseguire infinite altre proporzionali continue alle suddette guidando delle altre rette intercette nel medesimo angolo KEH , e alternatamente parallele quando alla bp , e quando alla bq .

P R O P O S I Z I O N E III.

Tirata bx parallela ad ho , sino all' incontro della retta GE , le rette oZ, oh (ovvero xh), xb faranno contin. geom. propor., dico $\therefore oZ \cdot oh (= xh) \cdot xb$.

58. Per preambolo a questa Proposizione bisogna prima crederne un' altra, qual' è, che dati tre termini continui proporzionali, per esempio, EZ, Eh, Eb , il primo sta al secondo (ovvero il secondo al terzo), come la prima differenza tra il primo e secondo, sta alla seconda differenza tra il secondo e il terzo. Sta, dissi, $EZ \cdot Eh$ (ovvero $Eh \cdot Eb$) $:: Zh \cdot hb$. Il che parmi non solo per se stessa cosa vera, ma risulta anche dalla Figura; perchè essendo li triangoli hop, ZoD simili abbiamo $ZD \cdot hp :: oZ \cdot oh$; dunque perchè poi $EZ \cdot Eh :: ZD \cdot hp$. Seguita pure che $EZ \cdot Eh :: oZ \cdot oh$; ma $oZ = Zh$ posta in simile sito; e per la medesima ragione $oh = hb$. Dunque $EZ \cdot Eh$ (ovvero $Eh \cdot Eb$) $:: Zh \cdot hb$.

59. Sic-

59. Siccome però $ZD.hp :: oZ.oh$; così pure $hp.bq :: xh$ (parallela ad oZ). xb (parallela ad oh). E perchè poi $ZD.hp :: hp.bq$, faranno altresì $oZ.oh :: xh.xb$; onde essendo oh, xh per la costruzione eguali, perchè parallele alle px, po rispettivamente, faranno $\therefore oZ.oh$ (ovvero xh). xb . Ciò che era &c.

C O N S E G U E N Z A I.

60. Per la similitudine de' triangoli eZo, ohm (ovvero mhx), xbn , de' quali i lati omologhi oz, oh (ovvero xh), xb , ed anche eZ, mh, nb si ritrovano contin. geom. proporzionali, risultano tali anche le assisse, o sia le basi $\therefore eo.om$ (ovvero mz). xn .

C O N S E G U E N Z A II.

61. Dati tre termini continui proporzionali per esempio

2 6 18

$\therefore 1. 3. 9$. se si trova una quantità 18, che sia terza proporzionale alle due differenze 2, 6 di detti termini, l'aggregato di questa quantità 18 col terzo termine 9 farà un quarto termine proporzionale alli tre dati 1. 3. 9; perchè le differenze di una serie qualunque di termini contin. proporzionali sono pure continue proporzionali; e però siccome determinate le due prime differenze sappiamo qual debba risultare la terza, così determinati i primi tre termini conseguiamo il quarto, coll'aggiungere la terza differenza al terzo termine. Quindi nella Figura essendo delli tre termini $\therefore EZ.Eh.Eb$ le differenze Zh, hb , ovvero Zo, oh ; ed essendo pure per questa Proposizione $\therefore Zo.oh.xb$; perciò farà $\therefore EZ.Eh.Eb.Eb + xb$. Ma la retta condotta da q per d in Y essendo terza proporzionale delle due hD, bp , fissa pure nella retta HE una terza proporzionale EY alle due
ante-

antecedenti Eh, Eb ; onde $\therefore EZ.Eh.Eb.EY$; e quindi determina nel medesimo tempo la bY eguale ad xb .

C O N S E G U E N Z A III.

62. Perchè poi hD, hp sono eguali, perchè opposte ad angoli eguali del triangolo isoscele Dhp , perciò $Zh + hb$, cioè Zb , che per esser in simile sito è eguale ad hD , farà anche eguale ad hp ; come non altrimenti farà $hb + bY = bq$, cioè che di due ordinate condotte nell' area di un 7gono da angolo ad angolo, la minore è eguale all' aggregato della prima più la seconda differenza. La maggiore è eguale all' aggregato della seconda più la terza differenza delle quattro proporzionali suddette.

P R O P O S I Z I O N E IV.

Delle tre proporzionali EZ, Eh, Eb , la prima differenza sta alla seconda, come tutte due le differenze alla maggior ordinata. Stanno $Zh.hb::Zb.bq$.

63. Essendo le ho, bp parall. farà $zh.ho = hb::Zb.bp = bq$.

Annotazione.

64. E perchè $hb + bY$ (num. 62) $= bq$ seguita che la prima differenza sta alla seconda, come la somma della prima e seconda sta alla somma della seconda e terza, la qual somma è $hb + bY$.

PROPOSIZIONE V.

Le tre proporzionali EZ, Eh, Eb sono tali, che il primo termine è a tutte due le differenze, come tutte due dette differenze alla seconda differenza. Dico che \therefore EZ. Zb. hb. Secondo. Il primo termine è a tutte due le differenze, come la somma del secondo e terzo termine a detto terzo termine. Cioè EZ. Zb :: $\overline{Eb + Eh}$ (= EH). Eb.

65. Per disporsi a ricevere la presente Proposizione, bisogna prima provare, che una retta menata da T ad M sia eguale a TQ. Il che è certissimo; perchè sottratto l'angolo ToM (= gr. $128 \frac{4}{7}$) da gr. 180, valore totale degli angoli del triangolo ToM, restano gr. $51 \frac{3}{7}$, metà de' quali, cioè gr. $25 \frac{5}{7}$ è il valore dell'angolo TMO. Ma questo per la prima Proposizione è pur valore dell'angolo TQO, ovvero DEZ, che è lo stesso; dunque i lati MT, TQ del triangolo MTQ, perchè opposti ad angoli eguali, faranno parimenti eguali.

66. Ciò premesso ecco una nuova analogia oh. hp :: oT. TM; ma oh = hb; ed hp (n. 62) = Zb = oT, perchè poste in simili siti; come anche TM = EZ. Dunque sostituendo questi valori a quelli, risulta \therefore hb. Zb. EZ; ovvero \therefore EZ. Zb. hb. Ciò che era la prima parte da dimostrarsi.

Inoltre oT. TM :: oF. FV; e perchè oT = bZ; TM = ZE; Eb = oF; FV = EH, avviene che bZ. ZE :: Eb. EH. Ovvero EZ. Zb :: EH. Eb. E per essere EH = Eb + Eh risulta per fine EZ. Zb :: Eb + Eh. Eb. Ciò che era l'altra parte.

Annotazione.

67. Ben si scorge, che quando fosse possibile la precisa divisione geometrica di una data retta EH in b , ed h , come esige la figura, sarebbe risolto il problema della descrizione geometrica dell' 7gono; giacchè avremmo poi due differenti maniere di stabilire la giusta posizione della retta KE rispetto ad EH , per formare un triangolo isoscele qEb , ovvero KEH , del quale gli angoli alla base fossero ciascuno tripli dell' angolo al vertice, in che consiste appunto tutta la difficoltà di questa descrizione. Imperocchè data che fosse la EH divisa in b ed h , come si è detto, e (relativamente alle due differenti maniere, che si tennero (n. 31, 32) per la descrizione del 5gono) fosse dalla metà di bh tirata verso q una perpendicolare indeterminata; la retta poi condotta da E per il punto q , dove la perpendicolare s'intersecasse con un arco fatto col centro in E , ed apertura Eb , definirebbe il triangolo bEq , che sarebbe il proposto. O pure data la medesima retta EH divisa, come si disse, in b ed h , bastarebbe (per essere $bH = HK$, ed $Eb = bK$) tirare una retta da E al punto K d'intersezione di due archi: uno col centro in H , ed apertura Hb ; l'altro col centro in b , ed apertura bE ; perchè KEH sarebbe pur anche il proposto triangolo. Dunque se si potessero trovare geometricamente tre termini proporzionali tali $\propto EZ \cdot Eh \cdot Eb$, che parimenti risultasse $\propto EZ \cdot Zb \cdot hb$; ed anche $EZ \cdot Zb :: \overline{Eb + Eh}$ ($= EH$) $\cdot Eb$. E che perciò il problema ristretto da queste condizioni diventasse determinato, cioè che li tre termini proporzionali non potessero accadere in niun' altra ragione differente di quella che concerne alla figura, sarebbe data la divisione della retta EH in b ed h , come si richiede, e la descrizione dell' Ettagono risolta.

Ma questo è un affare, che non dobbiamo forse aspettarci, che sia così presto spedito, e che lusinga tuttavia alcuni, perchè non è ancora stato dimostrato impossibile. Ragione per vero dire, che prova abbastanza quanto a torto si biasimino anche quelli, che procurano la quadratura del circolo, o la trisezione dell'angolo, pur che lo facciano in modo, che non perdano troppo di vista le altre più accessibili speculazioni. In fatti avrebbesi mai in Geometria fatta la scoperta di due Teoremi così importanti, come quelli che in un tratto di penna ha dimostrato il Chiarissimo Francesco Zanotti (1) circa alle figure circoscritte al Circolo, ed alla Sfera, se sgomentato dalle difficoltà, onde parevano circonvallati, non ci avesse pensato? Da Archimede sino a noi un sol Geometra entrato in questo campo aveva messo la falce ad una spica, ma era al Zanotti riservato di mieterlo. Così sogliono andare le cose, e le belle si ritrovano di raro, non perchè siano rare, ma perchè per lo più si cercano per le vie difficili, quando di raro furono trovate belle, che non fossero anche facili. Un celebre Francese (2) egualmente dotto e faceto non dubita, che non s'abbiano un dì a veder gli uomini a volare per l'aria, come gli uccelli. Ciò che io siccome non arderei di affermarlo, così non farei tanto avverso a questo fatto, che condannassi colui, che tentasse di rendere alla società un così importante servizio; massime quando con felicissimo successo furono già visti come Cigni (3) a nuotare ne' siti più difficili del Danubio. Ma torniamo a proposito.

G g 2

PRO.

(1) Lettera stampata in Firenze l'anno 1729.

(2) M.^r de Fontanelle. *Entr. sur la pluralité des Mondes. Second. soire. On commence déjà a voler un peu; plusieurs personnes différentes ont trouvé le secret de s'ajuster des ailes, qui les soutiennent en l'air, de leur donner du mouvement, & de passer par dessus des rivieres, ou de voler d'un clocher a un autre. A la ve-*

rité ce n'a pas été un vol d'aigle, & il en a quelque fois coûté a ces nouveaux oysseaux un bras, ou une jambe; mais enfin cela ne represente encore, que les premières planches, que l'on a mises sur l'eau, & qui ont été le commencement de la navigation.... L'art de voler ne fait encore, que de naître, il se perfectionnera, & quelque jour on ira jusque a la Lune.

(3) Atti di Lipsia 1691. pag. 37.

PROPOSIZIONE VI.

Il rettangolo del lato del 7gono nella suttenfa a due lati è eguale al rettang. della suttenfa a tre moltiplicata in Zh, ovvero bS differenza del primo termine EZ al secondo Eh. Diciam breve $bhp = Sbq$.

68. Abbiamo già (n. 63) dimostrato, che $Zh.hb :: Zb.bq$. Ma $Zh = Sb$; $Zb = hp$; onde $Sb.hb :: hp.bq$. Dunque $bhp = Sbq$. Ciò che &c.

CONSEGUENZA.

69. Dunque anche le sole metà $bhm = Sbn$. Ora essendo $Gd.dt :: Gb.bn$, segue che $dt \times Gb = Gd \times bn$; ma $dt \times Gb = bhm$, perchè siccome nel rettangolo bhm tutto il lato bh è stato moltiplicato per la metà di hp ; così per contrario nel rettangolo $dt \times Gb$ è moltiplicato tutto $hp = hD = Gb$ per la metà del lato $bh = dt$. Una simil cosa dite del rettangolo $Gd \times bn$ rispetto al rettangolo Sbn . Sono dunque $dt \times Gb$, ovvero $Gd \times bn = bhm$, ovvero Sbn . Dunque tutto il rettangolo bhp , ovvero Sbq a quello eguale sta al rettangolo $dt \times Gb$, ovvero $Gd \times bn$ ad esso eguale, come 2 a 1.

PROPOSIZIONE VII.

Il rettang. delle assisse spettanti alla minima ordinata cd sta al rettang. della terza differenza nella prima differenza delle quattro proporzionali EZ, Eh, Eb, EY, come 1 a 4. Dirò più chiaro così: $ro.YbS :: 1.4$.

70. Essendo $ro.Yb.bh.hZ$; come pure $ro.oh (= bh).om$.
faran-

faranno $ro.Yb :: hZ.om$; e però il rettangolo $rom = YbS$, perchè $bS = hZ$. Ma il rettang. rto sta al rettang. rom ,

come \overline{td}^2 ad \overline{oh}^2 ; e \overline{td} sta ad \overline{oh} in ragion duplicata delle radici \overline{td} ad \overline{oh} ; ed inoltre $\overline{td}.oh :: 1.2$. Dunque

$\overline{td}^2.oh^2 :: 1.4$. Sicchè $rto.rom :: 1.4$; e sostituendo YbS ad rom risulta finalmente $rto.YbS :: 1.4$. Ciò che era &c.

C O N S E G U E N Z A.

71. Perchè (n. 61) $bx = bY$; $oZ = bS$; farà il rettangolo $bx \times oZ = YbS$. Dunque $rto.bx \times oZ :: 1.4$. Per la medesima ragione essendo anche $Yb \times hZ = YbS$ farà ancora $rto.Yb \times hZ :: 1.4$.

P R O P O S I Z I O N E VIII.

Primo. Le rette QT, TN, NV sono tre lati di un 14gono.

Secondo. Le rette QT, TM, MA sono tre lati di un 7gono.

Terzo. Ma di un 7gono inscritto entro un circolo, che passa &c. come si propose anche nel 5gono.

72. Le rette QT, TN, NV sono eguali, perchè si è già (n. 65) dimostrato, che $TM = TQ$. Onde anche TN posta in simile sito è eguale a TQ, ad NV &c. In secondo luogo essendo gli angoli di qualunque trapezio QTNV presi insieme eguali a quattro retti; ed essendo pure gli angoli TQV, NVQ eguali, come anche QTN eguale TNV; l'angolo QTN farà complemento dell'angolo TQV ad un semicircolo. Ma l'angolo TQV (= DEZ) è (n. 53) = $gr. 25 \frac{5}{7}$, quali però sottratti da gr. 180, restano $gr. 154 \frac{2}{7}$ valore dell'

dell' angolo QTN. Ma $\text{gr. } 154 \frac{2}{7}$ è appunto il valore dell' angolo alla periferia di un 14gono. Dunque QTN, ovvero TNV sono angoli alla periferia di un 14gono; e quindi le rette QT, TN, NV sono tre lati di esso Poligono. Ciò che era la prima parte &c.

73. II. Le rette poi QT, TM, MA primieramente sono, come già dissi, (n. 65) eguali. Secondariamente essendo il triangolo QTM, ovvero TMA isoscele coi lati QT, TM, ovvero TM, MA eguali, gli angoli a detti lati opposti faranno parimenti eguali. Sottratti dunque $\text{TQM} + \text{QMT}$ dalla somma di tutti gli angoli del triangolo QTM; cioè

sottratto $\text{gr. } 25 \frac{5}{7} + 25 \frac{5}{7} = \text{gr. } 51 \frac{3}{7}$ da $\text{gr. } 180$, il resi-

duo $\text{gr. } 128 \frac{4}{7}$ farà il valore dell' angolo QTM, ovvero TMA. Ma per la prima di questo Articolo questo è appunto il valore dell' angolo alla periferia di un 7gono. Dunque gli angoli QTM, TMA sono angoli alla periferia di un 7gono; e perciò le rette QT, TM, MA sono &c. Ciò che era la seconda parte da dimostrare.

74. III. La prova poi dell' ultima parte, siccome è la medesima, che fu addotta (n. 47.) per il 5gono, così a quella mi rimetto.

ARTICOLO SESTO.

Dell' Ottogono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geometrica dell' angolo al centro di detto Poligono.

75. Prodotti i lati dell' 8gono (Fig. 8.) fino all'intersezione

zione ultima possibile, gli angoli della Figura risultano, come siegue:

$$\begin{array}{l} \text{Ang. MNB} = \text{Gr. } 135 \\ \left. \begin{array}{l} \text{BNT} \\ \text{PEN} \end{array} \right\} = \text{Gr. } 45 = \frac{360}{8} \\ \left. \begin{array}{l} \text{BTN} \\ \text{BTE} \end{array} \right\} = \text{Gr. } 90 \end{array}$$

$$\text{Onde } \text{PEN} = \frac{\text{BNT}}{1} = \frac{\text{BTN}}{2} = \frac{\text{BTE}}{2} = \frac{\text{MNB}}{3}$$

Volendo perciò tripartire il 45 angolo al centro di detto Poligono si sottragga dell'angolo PEN = gr. 45 un angolo di gr. 30, possibile geometricamente, che il residuo gr. 15 farà l'angolo ricercato, angolo, che si otterrebbe anche per altra maniera, cioè dividendo detti gr. 30 per metà.

Annotazione I.

76. Brilla in un tratto la trisezione dell'angolo MNB, ovvero FGP alla periferia dell'8gono; perchè guidate le rette GN, GD, queste dividerebbero l'angolo FGP in tre parti ciascuna eguale a gr. 45 = $\frac{135}{3}$. Cioè gli angoli PGN, NGD, DGF sarebbero eguali ciascuno a gr. 45. Il che è manifesto, perchè sono tutti angoli, che avendo il vertice nel punto G della circonferenza, insistono su archi eguali PBN, NMD, DQE; ed essendo ciascuno di questi archi sotteso da due lati dell'8gono, ciascun arco è di gr. $45 + 45 = 90$; e quindi, poichè gli angoli al centro sono doppj degli angoli alla periferia, detti angoli alla periferia PGN, NGD, DGF sono ciascuno di gr. 45.

Annotazione II.

77. E' quì degno d'osservazione, che l'angolo al centro di questo Poligono è una terza parte dell'angolo alla sua periferia; e però l'angolo al centro di un 8gono è medio proporzionale tra un terzo di detto angolo al centro, e l'angolo intiero alla periferia. Cosicchè $15 \cdot 45 :: 45 \cdot 135$; ovvero $\div 15 \cdot 45 \cdot 135$.

P R O P O S I Z I O N E II.

Le tre ordinate, una esteriore RT (che unisce i punti di concorso dei due lati GP, NB; e delli due MN, PB prodotti), e due interiori PN, GM sono cont. geom. propor. Dico $\div RT \cdot PN \cdot GM$.

78. Menata la retta GN abbiamo $EG \cdot EP :: GN \cdot PT$; ma perchè (n. 76) si fece vedere, che l'angolo $PGN = \text{gr. } 45$, e però (n. 75) eguale all'angolo PEN , quindi anche i lati NE, GN a quelli opposti faranno eguali. Inoltre è $NE = PE$ posta in simile sito. Dunque anche $GN = PE$. Ora sostituendo questo PE ad NG risulta $EG \cdot EP :: EP \cdot PT$. Ma per quella medesima ragione che è $PE = NG$, è anche $PT = RE$. E perciò sostituendo RE a PT , viene poi $EG \cdot EP :: EP \cdot ER$, cioè $\div EG \cdot EP \cdot ER$. Ovvero convertendo $\div ER \cdot EP \cdot EG$.

79. Ma le ordinate RT, PN, GM , perchè cadono dai punti medesimi R, P, G delle proporzionali medesime; e sono chiuse nel medesimo angolo HEK faranno nella medesima propor. che sono anche quelle. Onde $\div RT \cdot PN \cdot GM$. Ciò che era da dimostrarsi; e che fatta la costruzione d'intorno a quattro lati, abbiamo similmente dimostrato nel 7gono.

CON-

farà anche \equiv FQ; ed il triangolo YFQ farà pure isoscele; di cui l'angolo YFQ farà per la costruzione composto di un retto YFA (\equiv gr. 90) \div AFQ (\equiv LFG al vertice opposto \equiv gr. 45) farà, dissi, \equiv gr. 90 \div 45 \equiv gr. 135; quali detratti da gr. 180, che è l'importare di tutti gli angoli del triangolo suddetto YFQ, farà gr. 22 $\frac{1}{2}$ metà del residuo 45, valore dell'angolo FYQ; quale aggiunto all'angolo GYF eguale, come si è detto, e gr. 45, risulterà l'angolo intiero GYQ \equiv 22 $\frac{1}{2}$ \div 45 \equiv 67 $\frac{1}{2}$ valore dell'angolo EGM. Siccome poi la YZ è menata dal punto Y, e che TP, NG, MY sono tre contin. geom. proporzionali; così essa YZ farà pure terza proporz. alle NP, MG; e farà quarta a tutte tre TR, NP, MG, giacchè sono anche comprese tutte nel medesimo angolo HEK. Onde \div TR.NP.MG.ZY.

C O N S E G U E N Z A I V.

83. Una retta *ga* menata per A parallela alla suddetta MG, e compresa nel medesimo angolo HEK farà un'altra contin. proporzionale alle suddette. Perchè essendo (n. 78) PT \equiv ER, indi perchè PT \equiv RG posta in simile sito, farà ER \equiv RG, e però ER. EG $::$ 1. 2; ed essendo pure ER. EG $::$ RT. GM; quindi RT. GM $::$ 1. 2. E però così farà anche EG. Ea $::$ 1. 2; imperocchè essendo per il supposto *aA* parallela ad MG, ed MA parallela a *Ga* per la costruzione, viene *Ga* \equiv MA \equiv GA; ma GA \equiv EG posta in simile sito. Onde siccome EG. EG \div GA $::$ 1. 2; così del pari farà EG. EG \div *Ga* $::$ 1. 2. Dunque anche GM. *ag* $::$ 1. 2; dunque \div RT. GM. *ag*. Laonde essendo PN media proporzionale tra RT, ed MG, ed essendo poi YZ quarta proporzionale alle tre TR, NP, MG, anche detta YZ farà media proporzionale tra GM, ed *ag*; e però \div TR. NP. MG. ZY. *ga*.

Anno-

Annotazione.

84. Benchè nella prova di questa seconda Proposizione non mi sia servito del metodo praticato nella dimostrazione della seconda Proposizione dell' Articolo antecedente, che è precisamente l' istessa, avrei nonostante potuto farlo rettamente, senza nè meno introdurre nella costruzione una linea di più. Di che ciascuno, come vuole, può farne da se l' esperimento.

P R O P O S I Z I O N E III.

La differenza, che passa tra il quadrato di una suttensa a due lati, e quello della suttensa a quattro (che è diametro del circolo circoscritto all' 8gono) è eguale a due quadrati del lato GP più due rettangoli GPR.

Dico $\overline{PN}^2 = \overline{GM}^2 - 2\overline{GP}^2 - 2GPR$. *Secondaria-*

mente dico, che $\overline{PN}^2 : \overline{GM}^2 :: 1 : 2$.

85. Essendo l'angolo PRN retto, troviamo per la 47.

d'Euclide Lib. I., che $\overline{PN}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{NR}^2$. Ed essendo, per

la quarta Lib. II., $\overline{NR}^2 = \overline{NB}^2 + \overline{BR}^2 + 2NBR$;

quindi $\overline{PN}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{NB}^2 + \overline{BR}^2 + 2NBR$.

E perchè $\overline{PR}^2 + \overline{BR}^2 = \overline{PB}^2 = \overline{GP}^2$; ed $\overline{NB} = \overline{GP}$;

ed $NBR = GPR$, perciò risulta * $\overline{PN}^2 = 2\overline{GP}^2 + 2GPR$.

86. Andiamo adesso in cerca del valore di \overline{GM}^2 . Laon-

de essendo l'angolo GNM retto per la costruzione, farà

$\overline{GM} = \overline{MN} + \overline{NG}$; ma perchè è parimenti retto l'angolo GNE, e che (n. 78) $\overline{GN} = \overline{NE}$, il prodotto di tutta la GE nella sua metà definita dalla perpendicolare NR, cioè, per la 2. lib. II. Eucl., il rettangolo GER risulta eguale ad

\overline{NG} . E perciò $\overline{GM} = \overline{MN} + \overline{GER}$. Secondariamente avviene

che $\overline{GER} = \overline{GR} + \overline{RE}$, cioè (perchè $\overline{GR} = \overline{RE}$) $\overline{GER} = 2\overline{GR}$.

E per questo $\overline{GM} = \overline{MN} + 2\overline{GR}$. Ora, per la 4. lib. II.

Eucl., $\overline{GR} = \overline{GP} + \overline{PR} + 2\overline{GPR}$. Dunque

$\overline{GM} = \overline{MN} + 2\overline{GP} + 2\overline{PR} + 4\overline{GPR}$. Ed essendo poi

$\overline{MN} = \overline{GP}$; ed anche $2\overline{PR} = \overline{GP}$ finalmente risulta

* $\overline{GM} = 4\overline{GP} + 4\overline{GPR}$; dal qual valore sottraendo ora

* $\overline{PN} = 2\overline{GP} + 2\overline{GPR}$ resta la differ. tra detti due quadrati

... $+ 2\overline{GP} + 2\overline{GPR}$. Onde concludo per ultimo, che

$\overline{PN} = \overline{GM} - 2\overline{GP} - 2\overline{GPR}$. Ciò che era da dimostrarsi nella prima parte, e che farebbe risultato in un tratto per altra via più spedita, se avessi aggiunto alla figura due rette, tralasciate per non confonderla.

87. Come che poi la seconda parte di questa Proposizione risulti dal solo valore de' quadrati suddetti, tuttavia la si può prestamente dimostrare anche così. Poichè (n. 83) $\overline{ER} . \overline{EG} :: 1 . 2$, abbiamo anche $\overline{RT} . \overline{GM} :: 1 . 2$; ma

$\overline{PN} . \overline{GM} :: \overline{RT} . \overline{GM}$. Dunque $\overline{PN} . \overline{GM} :: 1 . 2$. Che era l'altra parte.

CON-

C O N S E G U E N Z A .

88. Quindi seguita , che $RT \times GM . PN \times YZ :: 1 . 2$

Come parimenti $QnB (= Pn^2) . QcB (= Gc^2) :: 1 . 2 . \&c.$

P R O P O S I Z I O N E IV.

Il rettangolo della differenza YG nella suttensa a quattro lati GM è doppio del rettang. della differenza GP (lato del poligono) nella suttensa PN a due lati . Dico $YGM = 2GPN$.

89. Poichè (num. 80) $ER . EP :: EG . EY$ sono anche le differenze $RP . PG :: PG . GY$; e componendo abbiamo $RP . RP + PG :: PG . PG + GY$; cioè $RP . RG :: PG . PY$; ed essendo pure per il luogo citato $RP = LG . RG = PT ; PY = GN$; viene quest' altra analogia $LG . PT :: PG . GN$. E però il rettang. $GPT =$ rettang. LGN . Perchè poi PN, GM sono nella medesima ragione di PT ad NG ; sostituendo perciò da una parte dell' equazione PN in vece di PT , e dall' altra parte GM in vece di NG , farà pure $GPN = LGM$.

Essendo ora siccome $ER . EP . EG$; così le differenze $RP . PG . GY$. E perchè il terzo termine EG è per la costruzione doppio del primo termine ER , così la terza differenza GY è doppia della prima differenza RP , ovvero LG , cui è eguale. Sarà perciò rettang. $YGM = 2LGM$; e perchè $GPN = LGM$, farà per fine $YGM = 2GPN$. Ciò che era da dimostrarsi .

C O N S E G U E N Z A . I.

90, Perchè sono $ER . EP . EG . EY . Ea$. ordinate nella
me-

medesima proporzione, che \div RT. PN. GM. YZ. ag ; perciò siccome il rettang. YGM accade che sia eguale a due rettangoli GPN. Così farà $GPN = 2PRT$; $aYZ = 2YGM$. Onde in somma supposto il primo rettangolo $PRT = 1$, farà $GPN = 2$; $YGM = 4$; $aYZ = 8$ &c.

C O N S E G U E N Z A II.

91. Essendo per la costruzione divisa la HP per metà in L, siccome mostrammo (n. 83) che la EG posta in simile sito è divisa per metà in R, e risultando dal n. 75 che $LY = LG$, quindi anche $HY = GP$; e perciò tutta la

retta $EH = 3GP + 4PR$. Onde $HE = 17GP + 24GPR$. Questa espressione somministra il mezzo di comparare degli altri piani spettanti alla Figura.

P R O P O S I Z I O N E V.

Le rette HG, GN, NV sono tre lati di un 8gono ordinato in un circolo, di cui il raggio è $= \frac{cGH}{GP}$.

92. Le rette HG, GN, NV sono in primo luogo eguali per la costruzione, e per il n. 78. L'angolo poi HGN, ovvero GNV è eguale all'angolo HGF + FGN, cioè all'angolo PEN (= gr. 45) + BTN (= 90) in tutto = gr. 135 valore appunto dell'angolo alla periferia di un 8gono. Secondariamente siccome sta il lato GP al raggio cG, così sta il lato HG ad una quarta proporzionale, raggio del circolo circoscritto a detto 8gono HGNV &c. Onde detto raggio risulta, quale si propose $= \frac{cGH}{GP}$. Ciò che era il tutto, che dovevasi dimostrare.

ARTICOLO SETTIMO.

Dell' Enneagono.

PROPOSIZIONE I.

Valore degli angoli dell' Enneagono.

93. Il valore degli angoli (*Fig. 10. Tav. 30.*) formati dai lati di un 9gono , che prodotti s'intersecano reciprocamente risulta così:

$$\text{Ang. } D e o = \text{gr. } 140$$

$$q e o = \text{gr. } 40 = \frac{360}{9}$$

$$e q o = \text{gr. } 100$$

$$e q N = \text{gr. } 80$$

$$q N Q = \text{gr. } 60$$

$$q N E = \text{gr. } 120$$

$$N E A = \text{gr. } 20$$

$$\text{Onde } N E A = \frac{q e o}{2} = \frac{q N Q}{3} = \frac{e q N}{4} = \frac{e q o}{5} = \frac{q N E}{6} = \frac{D e o}{7}.$$

E quindi troviamo , che nei suddetti valori questo Poligono non ammette la trisezione geometrica dell' angolo , nè al centro , nè alla periferia .

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate una esteriore mQ (che unisce i punti di concorso di un lato nD, e di una suttensa a due lati Be; poi di un altro lato GB, ed un' altra suttensa a due lati Do), e due interiori BD, Gn sono contin. geom. proporzionali. Dico \therefore mQ. BD. Gn.

94. Costrutta la Figura come le antecedenti , rilevasi che
EG.

$EG \cdot GD :: EB \cdot BQ$ $EG \cdot EB :: GD \cdot BQ$
 $RG \cdot GD :: Rd \cdot de$ *ovvero* $RG \cdot Rd :: GD \cdot de$
 Ma essendo $BQ = de$ posta in simile sito, quindi
 $EG \cdot EB$ } $:: GD \cdot BQ$; e però $EG \cdot EB :: RG \cdot Rd$
 $RG \cdot Rd$ }

Ma $EB = RG$ per la costruzione; ed $Rd = Em$, supposto il punto m determinato da una retta menata per Do , siccome il punto d è determinato da una retta menata per eB posta in simile sito. Dunque sostituendo queste a quelle nasce $:: EG \cdot EB \cdot Em$. Dunque senz'altro $:: Gn \cdot BD \cdot mQ$. Ovvero $:: mQ \cdot BD \cdot GN$. perchè sono parallele, e comprese nel medesimo angolo. Ciò che era da dimostrarsi.

C O N S E G U E N Z A I.

95. Quindi sono continue geom. proporzionali anche le $:: QB \cdot DG \cdot ny$, ed anche le $:: mQ \cdot BD \cdot Gn \cdot yt$. Come altrove si è notato in simili circostanze.

C O N S E G U E N Z A II.

96. Se fosse condotta una retta da N ad I , in simil modo provarebbesi, che questa taglia la EV in un tal punto per esempio x , che $EA \cdot Ex :: Em \cdot EB$. ovvero $EB \cdot EG$. Onde calando da detto punto x una parallela alle sopradette ordinate $Gn \cdot BD$ &c. la qual fosse compresa nel medesimo angolo VEK , verrebbe parimenti $Gn \cdot BD ::$ detta parallela condotta per $x \cdot AN$.

P R O P O S I Z I O N E III.

GB sta ad AB , come GA ad AE , come EG ad EV ,
 cioè $GB \cdot AB :: GA \cdot AE :: EG \cdot EV$.

97. Anche questa Proposizione si deduce facilmente dalla
 costru-

costruzione della Figura , perchè primo $EG . Gn :: EV . VK$;
 ma $Gn = GD$ posta in simile sito , e questa $GD = GA$,
 perchè l'angolo GAD essendo eguale all'angolo $qnQ = gr. 60$,
 è esso pure $= gr. 60$, angolo alla periferia di un trian-
 golo equilatero . Onde essendo poi anche AG , AD eguali ,
 viene $GD = GA$, e però anche Gn eguale al medesimo GA .
 Così VK essendo eguale ad RE posta in simile sito , ed essen-
 do l'angolo $RAE = gr. 60$, sono i lati AR , RE , EA egua-
 li , onde è $VK = AE$; e perciò la suddetta proporzione
 si trasmuta in questa $EG . GA :: EV . EA$; ovvero
 * $GA . AE :: EG . EV$.

98. Secondariamente abbiamo $oB . Be :: oF . FZ$; ma
 $oB = GB$; $Be = BA$, perchè $BA = Ae$, e l'ang. $BAe = gr. 60$.
 Così $oF = GA$ posta in simile sito ; ed $FZ = AE$, impe-
 rocchè da $gr. 180$ somma di tutti gli angoli del triangolo
 FoZ tolto via l'angolo $FoZ = gr. 140$ angolo alla perife-
 ria di un 9gono , resta $gr. 40$, metà de' quali $gr. 20$ vie-
 ne ad essere il valore dell'angolo FZo ; ma questo è pur
 valore dell'angolo FTZ , ovvero AEN posto in simile sito ,
 e per la prima Proposizione $= gr. 20$. Essendo perciò in
 quest' altro triangolo FTZ gli angoli FTZ , TZF eguali , an-
 che i lati TF , FZ ad essi opposti saranno eguali . E per-
 chè AE è posto in simile sito di FT farà anche ad esso egua-
 le , farà dunque eguale anche ad FZ . Sostituendo dunque
 nella proporzione questi valori risulta * $GB . BA :: GA . AE$.
 Onde poichè avemmo poco fa * $GA . AE :: EG . EV$. Ora
 finalmente troviamo $GB . BA :: GA . AE :: EG . EV$. Ciò che
 era &c.

PROPOSIZIONE IV.

Così sta aG a GB, come aB a BD, come aA ad AE.

Cioè aG. GB :: aB. BD :: aA. AE.

99. A prima vista la Figura ci dà $qo.oe :: qB.BD :: qF.FH$. Ma incontriamo queste eguaglianze $qo = aG$; $oe = GB$; $qB = aB$; $qF = aA$; perchè poste ciascuna in simili siti della Figura; ed è pure $FH = AE$, perchè $FH = FZ$ posta in simile sito, e che per la ragione addotta nell' antecedente è eguale ad AE. Dunque presi in iscambio questi valori $aG. GB :: aB. BD :: aA. AE$. Ciò che era &c.

C O N S E G U E N Z A.

100. Menata una retta da A ad F, potrebbesi questa sostituire in vece del termine aA , perchè sono eguali. Sono poi eguali, perchè dal triangolo ABF sottratto l'angolo $ABF = Deo = (n. 93) \text{ gr. } 140$, la metà 20 del residuo 40 (giacchè FB, BA sono eguali) farà il valore dell'angolo AFB, a cui se si aggiunge l'angolo $BFa = QNg$ posto in simile sito, e per il num. suddetto = gr. 60, farà la somma di detti angoli $AFB + BFa$, cioè $Afa = 20 + 60 = 80$; ma $FaA = eqN$ posto in simile sito, e per il luogo sopraccitato = gr. 80. Dunque giacchè Afa, AaF sono eguali, anche i lati Aa, AF a detti angoli opposti faranno eguali, com'era proposto.

PROPOSIZIONE V.

Così sta SB ad SA, come BG ad AB.

101. Dalla costruzione della Figura si ricava, che guidata

data AN siano $qo. oe :: qA. AN$; ovvero $qo. qA :: oe. AN$.
 Ma $qo = SB$; $qA = SA$; $oe = BG$, per essere poste cia-
 scuna in siti simili; ed $AN = BA$, perchè essendo AN pa-
 rallela ad So, ed opposta al medesimo angolo ABN, sic-
 come So è per la costruzione eguale ad SB, così AN è egua-
 le ad AB. Fatta dunque la sostituzione di queste quantità
 a quelle, la suddetta proporz. si trasmuta così $SB.SA :: BG.BA$.
 Ciò che era &c.

PROPOSIZIONE VI.

Primo. Le rette TF, FH, HM sono tre lati di un 18gono.

Secondo. Le rette TF, FZ, ZY sono tre lati di un 9gono.

*inscritto entro un circolo, che passa pel centro c del
 9gono interiore oBG &c.*

Terzo. e tiene il proprio nella periferia dell'ester. T,R,E &c.

102. La prova della prima e seconda parte di questa
 Proposizione è la medesima che si usò negli Articoli ante-
 cedenti. Circa poi alla terza parte basta osservare, che i lati
 di quel 9gono TR, RE, EY &c. sono eguali ai lati TF, FZ, ZY
 di questo. Onde dobbiamo pure asserire, che risultino egua-
 li anche i raggi de' circoli circoscritti a detti 9goni; e quin-
 di siccome questo passa con la sua circonferenza pel cen-
 tro di quello, così quello reciprocamente deve con la sua
 passare pel centro di questo. E tanto basti per la intiera
 prova di quanto era proposto.

ARTICOLO OTTAVO.

Del Decagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geometrica dell' angolo al centro di esso Poligono.

103. Prodotti i lati di questo Poligono farebbero ancora un' intersezione, come (*Fig. 12. Tav. 30.*) la fanno i due lati AF, MB in S, e li due TA, BD in V, ma ne verrebbe poi un 10gono interrotto, e solo risultante da due differenti 5goni intrecciati insieme ad eguali distanze. Inoltre non farebbero nè men nuovi nella Figura gli angoli, che ne verrebbero di più; perchè uno LSX, ovvero LVI è = gr. 36 = DBQ, che già abbiamo anche lasciando la Figura così; l'altro aXS, ovvero mLV = gr. 108. è pure eguale all' angolo BQD, come or ora osserviamo.

$$\text{Ang. MBD} = \text{gr. } 144$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{DBQ} \\ \text{XSL} \end{array} \right\} = \text{gr. } 36 = \frac{360}{10}$$

$$\left. \begin{array}{l} aXS \\ \text{BQD} \end{array} \right\} = \text{gr. } 108$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{EQX} \\ \text{QXE} \end{array} \right\} = \text{gr. } 72$$

$$\text{Onde } \text{XSL} = \frac{\text{DBQ}}{1} = \frac{\text{EQX ; QXE}}{2} = \frac{\text{BQD ; aXS}}{3} = \frac{\text{MBD}}{4} \cdot$$

E perchè abbiamo già (n. 20) veduto, come si consegua geometricamente l'angolo = gr. 24, la sua metà 12 farà = $\frac{36}{3}$ eguale ad un terzo dell' angolo al centro del 10gono, cioè eguale all' angolo al centro di un 30gono.

Annotazione.

104. E' da notare che 48. il doppio del suddetto n.24. farà eguale a $\frac{144}{3}$, eguale perciò ad un terzo dell'angolo alla periferia del proposto Poligono.

P R O P O S I Z I O N E II.

Le tre ordinate, una esteriore xf (che unisce i punti di concorso di un lato AF , e di una suttensa a due lati BE ; poi di un altro lato MB , ed un'altra suttensa a due lati FD), e due interiori FB , AM sono contin. geom. propor. Dico $\therefore xf \cdot FB \cdot AM$.

105. Prodotta quinci e quindi in Y ed f la DF suttensa a due lati, e prodotta anche in x la BE pur suttensa a due lati; e menata poi la xf , FB , AB , AM abbiamo
 $SA \cdot AB :: SF \cdot Ff$ ovvero $SA \cdot SF :: AB \cdot Ff$
 $VA \cdot AB :: VY \cdot YD$ $VA \cdot VY' :: AB \cdot YD$
 ma $YD = Ff$ perchè posta in simile sito. Onde
 $SA \cdot SF$ } $:: AB \cdot Ff$; e però $SA \cdot SF :: VA \cdot VY$.
 $VA \cdot VY$ }
 Ma $VA = SF$ posta in simile sito; ed $VY = Sx$, supposto il punto x determinato da una retta guidata per BE , siccome il punto Y è determinato da una retta menata per DF posta in simile sito. Dunque sostituendo questi termini a quelli risulta $SA \cdot SF :: SF \cdot Sx$; ovvero $\therefore SA \cdot SF \cdot Sx$.
 E quindi $\therefore AM \cdot FB \cdot xf$, ovvero $\therefore xf \cdot FB \cdot AM$, perchè sono parallele, e comprese nel medesimo angolo MSA . Ciò che era da dimostrarsi, e che (supposta la costruzione d'intorno a cinque lati) è quanto si è pur dimostrato nella seconda del Poligono antecedente.

P R O P O S I Z I O N E III.

Primo. Le tre ordinate LX, FB, KN sono contin.
geom. propor. sono \therefore LX . FB . KN.

Secondo. LX + FB = KN; onde \therefore LX . FB . LX + FB.

106. Le ragioni che principalmente abbondano in questo Poligono sono le medesime che regnano nel 5gono. La maggior parte sono linee rette divise *media & extrema ratione*. Pertanto dobbiamo osservare anticipatamente che i lati LB, SL del triangolo SLB sono eguali, perchè opposti agli angoli DBQ XSL (n. 103) eguali; ed anche FB essendo per la medesima ragione eguale ad LB viene ad esser eguale a detto lato SL, che è eguale ad LA = FK, perchè per la simetria della figura LA, LB, FK sono eguali. Non altrimenti FN è eguale ad SF; ed NK (perchè per l'eguaglianza degli angoli opposti è eguale ad FN) risulta pure eguale ad SF; siccome per tale eguaglianza è anche LX = LF = FC &c.

107. Essendo pertanto SF . FB :: SK . KN ; ovvero FB . SF :: KN . SK ; ed essendosi trovato di sopra (n. 106.) FB = SL ; KN = SF ; perciò SL . SF :: SF . SK ; cioè \therefore SL . SF . SK . Quindi anche le ordinate cadenti dai punti L, F, K comprese nel medesimo angolo KSN faranno contin. geom. propor. cioè faranno \therefore LX . FB . KN . Ciò che era la prima parte da dimostrarsi.

108. Ma LX = LF , come sopra si disse ; KN = SF . Dunque avremo \therefore LF . SL . SF ; e la retta SF divisa *media & extrema ratione* in L, ed eguale ad LF + SL . Perciò non altrimenti farà LX + FB = KN . In fatti si dimostrerebbe anche per altra via, che essa retta è così divisa in P, che KP = LX ; PN = FB . Dunque per fine \therefore LX . FB . LX + FB . Ciò che era l'altra parte.

PRO-

PROPOSIZIONE IV.

L'ordinata FB taglia l'asse eq (cioè la EP sottensa a quattro lati del 10gono) così, che $\div en \cdot nc \cdot \overline{en + nc} = cq$.

109. Essendo primieramente gli angoli EQX, EXQ alla base del triangolo XEQ (n. 103) $=$ gr. 72., e l'angolo al vertice $QEX =$ gr. 36 risultano gli angoli alla base di detto triangolo XEQ doppj ciascuno dell'angolo al vertice. Ma perchè si scorge dalla Figura, che a questo è simile anche l'altro triangolo XGM , perchè hanno due lati XE, XG , ed anche XQ, XM coincidenti, ed i lati EQ, GM paralleli, quindi del pari ambidue avranno gli angoli alla base doppj dell'angolo al vertice.

110. Ora quando si meni una retta da X per D al centro C , perchè questa forma l'angolo XcM eguale agli angoli di detti due triangoli, cioè eguale a gr. 72. (giacchè XcM doppio dell'angolo DcB al centro di un 10gono è a gr. 72. eguale) perciò taglia (n. 27) il lato GM del triang. XGM *media & extrema ratione* in c . Taglierà dunque così anche il lato EQ in D del triang. XEQ . E quindi avremo ordinati in progression continua geometrica li triangoli XDQ, EQX, MXE , ovvero BLF ; e non altrimenti le basi $\div DQ. QX. LF$; ma $DQ = mF$ posto in simile sito; $QX = XD = DE$ per l'eguaglianza degli angoli opposti, ed anche eguale ad FA posto in simile sito. E per questa medesima ragione $LF = mA = AK$. Dunque $\div mF. FA. mA$, ovvero AK . Onde le ordinate tirate da detti punti nell'asse eq lo divideranno nella medesima proporzione, ed avremo $\div en \cdot nc \cdot \overline{en + nc} = cq$. Ciò che era &c.

C O N S E G U E N Z A I.

111. Essendo mK , DP per la costruzione parallele e chiuse tra le mD , KP parallele parimenti per la costruzione, le mK , DP risultano eguali. Onde calata giù un' ordinata da F , il diametro DP del circolo circoscritto al 10gono farà da essa legato così $\div D o . o c . \overline{D o + o c} = cP$.

C O N S E G U E N Z A II.

112. Conciossiacchè abbiamo avuto di sopra (n. 107) $\div SL (= LA) . SF (= LK) . SK$. e quivi (n. 110) abbiamo $\div mF . FA . AK$; ed anche $\div DQ . QX . LF$. alla qual progressione si potrebbe aggiungere il quarto termine LA , siccome nella progressione de' triangoli XDQ , EQX , MXE si potrebbe aggiungere il triangolo MXG , ovvero LAZ , che ha per base LA , onde verrebbero $\div DQ . QX . LF . LA$; quindi poi farebbero tutti li termini contin. propor. schierati su d'una medesima retta così $\div mF . FA (= QX) . LF . LA . LK . SK$.

C O N S E G U E N Z A III.

113. Essendo simili i triangoli aEe , aFn , aGc , ed inoltre (n. 110) $\div mF . FA . AK$, cioè $\div aE . EF . FG$. poste in simili siti, faranno ancora $\div ae . en . \overline{nc} = an$.

P R O P O S I Z I O N E V.

Il quadrato del raggio del circolo circoscritto ad un 10gono è eguale al rettang. del suo lato nella sustentenza a tre di essi lati. Dico $\overline{Ac} = AFB$.

114. Abbiamo trovato (n. 112) $\div AF . FL (= LX) . LA$; ma FL , ovvero $LX = Ac$, prima perchè LX , AC sono per

per la costruzione parallele, e poi sono anche intercette fra due altre LA, Xc parallele pure per la costruzione; onde debbono essere anche eguali. La retta poi LA è (n. 106) = FB. Sostituendo pertanto Ac ad FL, ovvero LX, ed FB ad LA, la proporzione si trasforma così

∴ AF. AC. FB. Onde viene $\overline{Ac} = AFB$. Ciò che &c.

C O N S E G U E N Z A.

115. Poichè Am, mD, Dc sono ciascuna eguale al raggio Ac, e che l'angolo AmD è eguale all'angolo AFB, po-

trebbesi al quadrato \overline{Ac} sostituire il rombo AmDc, ed al supposto rettangolo AFB il romboide AFB; onde verrebbe il rombo AmDc = AFB romboide; e levando a tutti due la parte comune AFoc resterebbe coB = FmDo.

116. Ora deriva dal n. 110, che FB è divisa *media & extrema ratione* in o; farà dunque per la 30. Lib. 6. Euclide co = oB; onde sia $cd \times oB = BoD + coB$. Ma $cd \times oB = AFoc$; indi $coB = FmDo$; fatta dunque la sostituzione risulta $AFoc = \overline{BoD + FmDo} = mFB = FB \times oD$. Quindi perchè $oc . oD :: uc . ne$ seguita gentilmente che $Ac \times cn = FB \times ne$; onde tutta $AM \times cn . FB \times ne :: 2 . 1$.

P R O P O S I Z I O N E VI.

Il rettangolo di una retta guidata dal centro c della Figura fino all'ultima intersezione S moltiplicata per BH suttensa a due lati del 10gono interiore è eguale al rettang. di una NG suttensa a 4. lati del 10gono esteriore moltiplicata per la retta condotta da detto c alla seconda intersezione a. Dico $CS \times BH = NG \times ca$.

117. Avvegnachè questa Proposizione porti in fronte una

K k

cert'

cert'aria recondita, non lascia di non essere semplicissima, per non dire ridicola. Bastava dire che $ca = BH$; e che $cS = NG$; d'onde veniva tosto $ca . cS :: BH . NG$, e quindi $cS \times BH = NG \times ca$.

Le rette ca , BH sono eguali, perchè sono due parallele intercette fra due altre parallele LZ , FN , come chiaro apparisce dalla sola simetria della Figura; dalla quale pure, e da quanto altrove (num. 106.) si disse risultando $SF = FN$; $FB = FK$; $SB = KN$; e non altrimenti $Fc = cB$; $FG = GK$; e tutte le Fc , cB , FG , GK eguali, siegue che cS ; GN siano pure eguali per essere diagonali di due trapezj $SFcB$, $NKGF$ simili ed eguali, perchè formati dalle suddette linee rispettivamente eguali.

PROPOSIZIONE VII.

Primo. Le rette KF , FB , BN sono tre lati ordinati nella periferia di un sgono .

Secondo. Le rette LF , Fc , cB , BX , XL sono cinque lati di un sgono perfetto.

Terzo. Il di cui centro è situato nel punto d'intersezione delle due suttense BE , DF .

118. I. Primieramente le rette KF , FB , BN sono (n. 106.) eguali. Secondariamente da gr. 360, somma di tutti gl'angoli del trapezio $FEDB$ sottratti li due alla periferia di un ogono FED , EDB , cioè gr. $\overline{144 + 144} = 288$, e diviso per metà il residuo 72, farà gr. 36 valore dell'angolo EFB , il quale sottratto da tutto l'angolo $EFK = \text{gr. } 144$, resta gr. 108. per l'angolo BFK . Ma questo è valore dell'angolo alla periferia (n. 20) di un sgono . Dunque per essere anche gli angoli KFB , FBN eguali, le rette KF , FB , BN sono tre lati &c. Ciò che era la prima parte.

119. II. Le rette poi LF , Fc , cB , BX , XL sono (n. 106.)
egua-

eguali, e facilmente si rileva, che gli angoli da esse compresi sono ciascuno eguali a gr. 108 valore dell'ang. alla periferia di un 5gono. Dunque le rette LF, Fc &c. che era l'altra parte da dimostrarfi.

120. III. Facilmente trovasi anche che il centro di questo pentagono sia collocato nel punto d'interfezione delle due rette BE, DF senza trattenerfi con disaggio in una positiva dimostrazione; onde suppongasi già soddisfatto anche a quest'ultima parte.

ARTICOLO NONO.

Del Endecagono.

PROPOSIZIONE I.

Trisezione geom. dell'angolo al centro dell'Endecagono.

121. Ecco preventivamente (*Fig. 13., Tav. 31.*) esposti i valori di questo Poligono.

$$\text{Ang. } hba = \text{gr. } 147 \frac{3}{11}$$

$$abQ = \text{gr. } 32 \frac{8}{11} = \frac{360}{11}$$

$$bQa = \text{gr. } 114 \frac{6}{11}$$

$$aQA = \text{gr. } 65 \frac{5}{11}$$

$$QAD = \text{gr. } 81 \frac{9}{11}$$

$$QAR = \text{gr. } 98 \frac{2}{11}$$

$$SRA = \text{gr. } 49 \frac{1}{11} = \frac{147 \frac{3}{11}}{3}$$

$$SRX = \text{gr. } 130 \frac{10}{11}$$

$$RXE = \text{gr. } 16 \frac{4}{11}$$

$$\begin{aligned} \text{Onde } RXE &= \frac{abQ}{2} = \frac{SRA}{3} = \frac{aQA}{4} = \frac{QAD}{5} = \frac{QAR}{6} \\ &= \frac{bQa}{7} = \frac{SRX}{8} = \frac{hba}{9}. \end{aligned}$$

Quindi basta sottrarre un angolo, come geometricamente si può, di gr. 120 dell'angolo $SRX = \text{gr. } 130 \frac{10}{11}$, che il residuo $\text{gr. } 32 \frac{8}{11}$ farà la terza parte dell'angolo al centro del 11gono, e farà l'angolo al centro di un 33gono.

Annotazione I.

122. La trifezione geometrica dell'angolo alla periferia di questo Poligono non può essere più felice, perchè l'angolo $SRA = \text{gr. } 49 \frac{1}{11}$ è appunto $= \frac{147 \frac{2}{11}}{3}$ cioè eguale ad un terzo dell'angolo hba alla periferia del 11gono.

Annotazione II.

123. Notate che il valore degli angoli RXE, SRA, hba è come 1. 3. 9. cioè in tripla proporzione geometrica. Così ancora gli angoli abQ, aQA, SRX sono come li tre numeri ordinati in proporzione dupla geometrica 2. 4. 8.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una esteriore rq (che unisce i punti di concorso di un lato ab , e di una suttensa a tre lati nh ; poi di un altro lato mn , e di un' altra suttensa a 3 lati be), e due interiori nb , ma sono contin. geom. propor. Sono dico $\therefore rq. nb. ma$.

124. Costrutta pertanto la figura, come già si suole, rileviamo che $Fm. mb :: Fn. nq$ ovvero $Fm. Fn :: mb. nq$
 $Bm. mb :: Bd. dh$ ovvero $Bm. Bd :: mb. dh$
 Ma $dh = nq$. posta in simile sito della figura. Dunque $Fm. Fn \} : mb. nq$; e però $Fm. Fn :: Bm. Bd$. Ma abbiamo $Bm = Fn$; $Bd = Fr$, supposto il punto r determinato da una retta condotta per be ; siccome il punto d fu determinato dalla retta hn prodotta e posta in simile sito. Sostituendo dunque questi termini a quelli, viene $Fm. Fn :: Fn. Fr$; ovvero $\therefore Fm. Fn. Fr$. D'onde per conseguenza risulta $\therefore ma. nb. rq$ perchè sono parallele, calate giù dai punti m, n, r comprese nel medesimo angolo mFa . Dunque poichè è lo stesso $\therefore rq. nb. ma$ ciò che era da dimostrarfi.

C O N S E G U E N Z A.

125. Per la medesima ragione $\therefore nq. mb. ya$; e calata da y la yt abbiamo pure $\therefore rq. nb. ma : yt$.

Annotazione I.

126. Non d'altra maniera provarei, che $Fc; FV$ ed un' altra compresa tra F ed un punto su la FV determinato per
 una

una retta condotta per fN , farebbero tre contin. geometriche proporz. siccome anche di leggiero si scorge che $Fm.Fn :: Fc.FV :: Fx$ (supposto il punto x determinato da una retta, che fosse guidata per gG). FT.

Annotazione II.

127. Le eguaglianze lineari che occorrono in questo Poligono sono $Tn = nb = nq$; $TK = KH$; $TB = TL$; $fc = pc$ condotta che fosse; $oP = PZ$; $NV = Vn$; e forse ve ne faranno dell'altre da me non avvertite, tutte risultanti dall'eguaglianza degli angoli ai quali rispettivamente sono opposte. Perciò può chi vuole sostituire queste ad altri termini, che sono nelle proporzioni regnanti in questo Poligono, il numero delle quali proferiremo a suo (n. 144) luogo, non avendo voglia presentemente d'inoltrarmi di più.

PROPOSIZIONE III.

Le rette ZM, MH, H& sono tre lati di un 22gono.

Le rette ZM, MR, RX sono tre lati di un 11gono descritto in un circolo &c. come fu enunziato altrove.

128. Abbiamo detto poco fa (n. 127.) che $TB = TL$; ed è $TB = ZM = H\&$ poste in simile sito; così pure $TL = MH = MR$ poste in simile sito. Dunque le rette $ZM, MH, H\&$, ed anche ZM, MR, RX sono eguali. Che poi gli angoli $ZMH, MH\&$ siano eguali, ed angoli alla periferia di un 22gono; e che gli angoli ZMR, MRX siano alla periferia di un 11gono, si rileva nella medesima maniera che si tenne ne' Poligoni antecedenti. E così nel medesimo modo si dimostra che questo Endecagono è inscritto entro un circolo, che passa &c.

AR-

ARTICOLO DECIMO.

Del Dodecagono.

PROPOSIZIONE I.

Valore degli angoli di questo Poligono.

139. Esaminato il valore degli angoli di questo Poligono (*Fig. 14., Tav. 32.*) lo troviamo quale segue

$$\text{Ang. } abd = \text{gr. } 150$$

$$\left. \begin{array}{l} bdq \\ HFD \end{array} \right\} = \text{gr. } 30 = \frac{360}{12}$$

$$\left. \begin{array}{l} bqd \\ BHF \end{array} \right\} = \text{gr. } 120$$

$$\left. \begin{array}{l} drB \\ BDG \end{array} \right\} = \text{gr. } 60$$

$$\left. \begin{array}{l} rGD \\ rBq \end{array} \right\} = \text{gr. } 90$$

$$\text{Onde } HFD = \frac{bdq}{1} = \frac{drB; BDG}{2} = \frac{rGD; rBq}{3} = \frac{bqd; BHF}{4} = \frac{abd}{5}$$

Se per questi valori fosse possibile la trisezione geometrica dell'angolo di gr. 30 al centro di questo Poligono; ovvero di gr. 150 alla periferia, farebbe data anche la descrizione geometrica del 9gono. Perchè aggiungendo gr. $\frac{30}{3}$

cioè gr. 10 al medesimo 30, verrebbero gr. 40 valore dell'angolo al centro di detto 9gono. Così pure sottratto da gr. 90 un terzo di gr. 150, cioè gr. 50, resterebbero pur anche gr. 40 per il suddetto angolo al centro di detto 9gono. Ma non abbiamo nè l'uno nè l'altro, perchè veramente queste

queste tali descrizioni dipendono da un' arte tuttavia incognita di dividere la periferia di un circolo in parti date.

PROPOSIZIONE II.

Le tre ordinate, una esteriore Xp (che unisce i punti di concorso di un lato la , e di una suttensa a tre lati ob ; poi di un altro lato go , e di un' altra suttensa a tre lati ae), e due interiori oa, gl sono cont. geom. propor. dico $\therefore Xp . oa . gl$.

130. Guidate le linee necessarie alla costruzione quali sono in figura abbiamo

$$Fg . ga :: Fo . op \quad \text{ovvero} \quad Fg . Fo :: ga . op .$$

$$Kg . ga :: KN . Nb \quad \text{Kg . KN} :: ga . Nb .$$

Ma $Nb = op$ posta in simile sito; onde

$$Fg . Fo \quad \left. \vphantom{Fg . Fo} \right\} :: ga . op; \text{ e per\o} \text{ viene } Fg . Fo :: Kg . KN .$$

Ma $Kg = Fo$ posta in simile sito della Figura . Siccome $KN = FX$, supposto il punto X determinato da una retta condotta per ae ; come il punto N \u00e8 definito da una retta menata per bo posta in simile sito . Onde fatta la sostituzione risulta $Fg . Fo :: Fo . FX$; ovvero $\therefore Fg . Fo . FX$; e quindi anche le parallele comprese nel medesimo angolo $\therefore Xp . oa . gl$. Ci\o che era da dimostrarsi, e che (supposta la costruzione applicata d'intorno a sei lati) abbiamo precisamente dimostrato anche nella seconda del 110no.

P R O P O S I Z I O N E III.

Sta Fg ad Fo, come Fm ad FG. Cioè Fg. Fo :: Fm. FG.

131. La Figura ci presenta tosto da osservare, che
 $Fg. ga :: Fm. mQ$ ovvero $Fg. Fm :: ga. mQ.$
 $Kg. ga :: Kn. nq$ ovvero $Kg. Kn :: ga. nq.$
 Ma $mQ = nq$ posta in simile sito; onde
 $Fg. Fm$
 $Kg. Kn$ } $:: ga. mQ$; e però $Fg. Fm :: Kg. Kn$;
 ma $Kg = Fo$ posta in simile sito; $Kn = FG$ per la stessa
 ragione. Dunque abbiamo $Fg. Fm :: Fo. FG$; ed alternan-
 do $Fg. Fo :: Fm. FG$. Ciò che era &c.

C O N S E G U E N Z A.

132. Sicchè qualunque parallele cadenti dai punti g, o, m, G
 comprese nel medesimo angolo aFg , faranno pure propor-
 zionali, come per esempio le gl, oa , una retta condotta
 da m a quelle parallela, GQ .

P R O P O S I Z I O N E IV.

*Determinato su la Fg il punto y per una retta
 condotta da Q per B. Dico che $:: Fm. FG. Fy.$*

133. Determinato su la Kg il punto x da una retta gui-
 data per BG, abbiamo
 $Fm. mQ :: FG. Gf$ ovvero $Fm. FG :: mQ. Gf.$
 $Kn. nq :: Kx. xB$ ovvero $Kn. Kx :: nq. xB.$
 Ma $nq = mQ$; $xB = Gf$ perchè poste in simili siti. Dunque

L l

Fm

$Fm . FG$
 $Kn . Kx$ } $mQ . Gf$; e però $Fm . FG :: Kn . Kx$.

Ma $Kn = FG$ posta in simile sito ; e $Kx = Fy$, determinato il punto y da una retta guidata per QB , siccome il punto x fu determinato da una retta guidata per BG , posta in simile sito. Dunque fatta la sostituzione $Fm . FG :: FG . Fy$. Ovvero $\therefore Fm . FG . Fy$. Ciò che era da dimostrarfi.

C O N S E G U E N Z A .

134. Qualunque parallele comprese nel medesimo angolo gF cadenti dai punti m, G, y faranno pure &c.

Annotazione I.

135. Essendo (n. 129.) l'angolo $gDa = BDG = \text{gr. } 60$; ed i lati Dg, Da eguali, il triangolo Dga è equilatero ; onde $ga = gD$. Ma $gD = DF$, perchè gli angoli DaF, DFa essendo per il num. suddetto eguali, anche i lati Da, DF a quelli opposti sono eguali. E quindi risulta Fg doppia di ga ; Fo doppia di op ; Fm doppia di mQ &c.

Anotazione II.

136. Le eguaglianze poi lineari, che s'incontrano in questa figura sono molte. Imperocchè essendo, come ho pur ora detto, il triangolo Dga equilatero, quindi ciascuna retta parallela ad uno de' suoi lati ga , e compresa nel medesimo angolo gDa , ha le sue eguali. Onde $ob = bD$; $mq = qD$; $GB = BD$ &c. Inoltre perchè gli angoli (n. 129.) rGD , ovvero rBD ; ed rBq sono retti, e la metà dell'angolo $GrB (= bqd = \text{gr. } 120)$; cioè l'angolo $DrB = \text{gr. } 60$, è eguale all'angolo drB pure $= \text{gr. } 60$, seguita che DB, Bb lati opposti ad angoli eguali siano eguali ; siccome pure per la medesima

fima ragione seguita, che sia $Dr = rb$; $De = eb$; $Do = ob$; $Dh = hb$; $DS = Sb$; $DT = Tb$; supponendo già descritte le linee che mancano in figura.

Si rileva pure, che il raggio ce del circolo circoscritto ad un 12gono sia eguale ad eb suttensa a due lati di detto 12gono, perchè essa diventa lato di un Esagono.

Si ritrova ancora nell' antecedente modo, che $Dt = tc$; $De = ec$; $Dm = mc$; $Dn = nc$ &c., così non altrimenti $KV = VD = DP$. Non deve parer nè men strano, che sia $BD = \frac{Do}{2}$; giacchè il triangolo oBD è simile al triangolo Fag ; onde siccome il lato di questo Fg l'abbiamo trovato doppio del lato ga , così il lato simile Do di quello viene ad esser doppio del simile lato BD .

137. Tutte queste eguaglianze diverse si sono annoverate, acciò, volendo, si possano sostituire in luogo d'altri termini compresi nelle proporzioni spettanti a questo Poligono, e delle quali si produrrà il numero (n. 145.) a suo luogo.

PROPOSIZIONE V.

Primo. Le rette FQ, QZ, ZR sono tre lati di un 12gono.

Secondo. Le rette FQ, QM, MV sono tre lati di un Esagono.

Terzo. Inscritto entro un circolo che passa &c.

138. La dimostrazione di questa Proposizione è a un di presso la medesima, che le altre cose pari, fu proposta negli Articoli antecedenti. Perchè dette rette sono eguali; e perciò che riguarda gli angoli fra esse intercetti, le prime comprendono un angolo di gr. 150 alla periferia di un 12gono; le altre di un angolo di gr. 120., angolo alla periferia di un 6gono &c.

ARTICOLO UNDECIMO.

Osservazioni sopra li Poligoni in generale.

Tratteniamoci ora alquanto d'intorno a certi rapporti, o convenienze, che occorrono ne' Poligoni in generale, e che occuparono già la mia attenzione, e non dovrebbero niente meno soddisfare la curiosità de' Filosofi. Come sarebbe o rispetto al valore degli angoli, o al numero delle intersezioni, che si generano producendo i loro lati, o pure rispetto al numero delle ordinate conducibili da angolo ad angolo; così al numero delle contin. geom. propor. e ad altre particolarità, che proporrò d'esaminare nelle seguenti Proposizioni. Onde

P R O P O S I Z I O N E I.

Gli angoli formati dai lati prodotti di un Poligono tanto più sono acuti, quanto più sono distanti dal centro della Figura.

139. La ragion di ciò spicca da se, nè può avvenirne altrimenti, perchè nel 12gono per esempio immaginando che il lato oe , rispetto al lato og supposto immobile, muti luogo, e passi in de , poi in bd , indi in ab &c. gli angoli compresi tra questi due lati prodotti eog , dmg , bGg , aDg &c. si devono fare più acuti, perchè secondo che detti lati occupano su la periferia un punto più l'uno dall'altro distante, il loro punto d'intersezione s'allontana, finchè pervenuti detti lati a due situazioni diametralmente opposte, e massimamente distanti, quali sono le due go , ul , s'vanisce il punto d'intersezione, e detti lati prodotti sono arrivati nell'infinito, e perciò diventati paralleli; dal qual stato
pro-

progredendo innanzi ritornano, e diventano anche convergenti dalla parte opposta, come n_3, og , che s'intersecano nel punto R.

C O N S E G U E N Z A .

140. Non v'ha dubbio perciò, che un lato, il quale come tangente muovasi per tutti i punti della periferia di un circolo, non formi, rispetto ad un altro lato prodotto ed immobile, tutti gli angoli appartenenti ad infiniti Poligoni.

Annotazione.

141. Per sapere poi con qual legge detti angoli scemino più che dal centro sono rimoti, notaremo principalmente che (trasportata per esempio parte della *Fig. 10.* del 9gono nella 11. *Tav. 30.*) ne' Poligoni di denominatore disparo l'angolo al centro (che è eguale all'angolo esterno QDe) sta all'angolo alla periferia eDn sempre come 2 al numero denominatore meno 2: nell'addotto esempio come 2 a 7 $= 9 - 2$. Ne' Poligoni di denominatore pari detto angolo al centro sempre sta all'angolo alla periferia, come 1 alla parte minore di due parti ineguali massime possibili del numero denominatore: nel 8gono per esempio come 1 a 3 ($= 8 - 5$) parte minore delle due parti ineguali massime possibili 3, e 5. Ciò che si rileva anche dalla prima Proposizione spettante a ciascun Poligono, e da una Tavola, che or ora (n. 156.) produrremo, che comprende la ragione appunto di detto angolo al centro, all'angolo, alla periferia.

142. In secondo luogo osservate ciò che è costante in tutti i Poligoni, cioè che li due angoli alla base di ciascun triangolo descritto in Figura BEN, oNQ, eQD pre-
si

si insieme, sono eguali all'angolo eDn alla periferia; onde $BEN + BNE = eDn$: cioè (segnati i numeri, che sono i minimi esponenti del valore rispettivo di ciascun differente angolo, che occorre in figura) $1 + 6 = 7$. Così ancora $ONQ + OQN = eDn$: cioè $3 + 4 = 7$. Resta $eQD + eDQ = eDn$: cioè $5 + 2 = 7$. Gli angoli poi di ciascun triangolo presi insieme sono eguali al numero denominatore, perchè essendo l'angolo esterno sempre eguale a 2, risulta $1 + 6 + 2 = 7 + 2 = 9$; e gli altri $3 + 4 + 2 = 7 + 2 = 9$; e $5 + 2 + 2 = 7 + 2 = 9$.

143. Finalmente per venire a quanto appartiene in particolare a questa Annotazione, si deve riflettere, che ne' Poligoni di denominatore disparo, gli angoli più che sono distanti dal centro della Figura decrescono dalla medesima parte a destra de' lati prodotti, e dalla medesima parte a sinistra crescono per il binario; cosicchè decrescono come 7. 5. 3. 1 a destra; ovvero crescono a sinistra come 2. 4. 6. Nei Poligoni poi di denominatore pari decrescono per la medesima parte a destra, e crescono a sinistra per unità.

P R O P O S I Z I O N E II.

Le diverse serie de' termini proporzionali, che troviamo nella figura di un Poligono costrutta come si è fatto, sono tante, quante sono le intersezioni diverse, che in essa occorrono sopra una medesima linea.

144. Questa Proposizione è evidentissima, perchè se per determinare il principio ad una serie di termini proporzionali si siamo in fatti prefissi di voler prendere un punto di stazione in ogni diversa intersezione che occorra su la medesima retta, il numero delle dette serie non può non essere

essere eguale al numero delle intersezioni. Quindi (*Fig. 7. Tav. 29.*) nell' Etagonno per esempio 3 essendo detti diversi punti d'intersezione E, Z, h, sono 3 anche le serie. La prima rispetto al punto E, cioè

$EZ. ZD :: Eh. hp :: Eb. bq :: ES. SN :: EH. HK.$

La seconda rispetto al punto Z, perchè

$Zh. ho :: Zb. bp :: ZS. SM :: ZH. HV :: ZQ. QE.$

La terza rispetto al punto h. Onde

$hb. bo :: hS. SD :: hH. HA :: hT. TZ :: hF. FE.$

145. Ma ciò che molto più importa d'osservare, è che vi ha un certo numero di termini (sono 10 nell' addotto esempio) per ciascuna serie, dai quali risultano diverse eguaglianze de' pieni prodotti da detti termini proporzionali moltiplicati insieme. Supponiamo che detti termini siano

$2. 1 :: 4. 2 :: 6 * 3 :: 8. 4 :: 10. 5.$

Onde avremo prima queste eguaglianze

$1 \times 4 = 2 \times 2; 2 \times 6 = 4 \times 3; 3 \times 8 = 6 \times 4; 4 \times 10 = 8 \times 5.$

E poi quest'altre $2 \times 5 = 1 \times 10; 4 \times 4 = 2 \times 8.$ E perciò nell' 7gono sono 6 eguaglianze per ciascuna serie, e sono 18 per tutte insieme. La Tavola annessa presenta in un tratto il numero delle intersezioni, e serie di ciascun Poligono; il numero de' termini di ciascuna serie; ed il numero delle eguaglianze prodotte dai predetti termini moltiplicati insieme.

TAVOLA

Del numero delle Intersezioni, e Serie, Termini, ed Eguaglianze de' piani compresi in questi Poligoni.

	3gono	1				
	4gono	1				
	5gono	2	6			$3 \times 2 = 6$
	6gono	2	6			$3 \times 2 = 6$
Nel	7gono	Interf. ⁿⁱ 2		Termini 10	Equal.	$6 \times 3 = 18$
	8gono	e Serie 3		10		$6 \times 3 = 18$
	9gono	fono 3	14			$9 \times 4 = 36$
	10gono	4	14			$9 \times 4 = 36$
	11gono	5	18			$12 \times 5 = 60$
	12gono	5	18			$12 \times 5 = 60$

240

Si vede dunque che il 10gono per esempio ha 4 intersezioni, e per conseguenza 4 serie di differenti proporzioni; ciascuna delle quali serie è composta di 14 termini; da quali si creano 9 eguaglianze diverse di differenti piani. Queste eguaglianze essendo 9 per ciascuna serie, moltiplicate perciò per il numero delle serie 4, risultano 36. La somma poi di tutte le eguaglianze di tutti i Poligoni compresi nella Tavola prese insieme ascende a 240. Delle quali negli Articoli antecedenti io non ne ho mostrate che pochissime, o perchè non mi parve che avessero una certa aria d'eleganza, o ancora perchè io era persuaso, che altri potesse di leggiero ripassarle sotto a' suoi occhj da se, sostituendo anche in esse que' termini, i quali fossero (come abbiamo avvertito alcuna volta) trovati in figura ad altri termini eguali.

R O P O S I Z I O N E III.

Le ordinate condotte dai angoli di un Poligono al diametro del circolo, in cui è inscritto, producono un numero di piani comparabili eguale alla somma di una progressione crescente per unità, meno l'ultimo termine, che sempre è eguale al numero delle ordinate moltiplicato per 3.

146. E' da osservare in primo luogo, che a qualunque ordinata, perchè fa nel diametro due assisse, hanno relazione tre quadrati, o 3 rettangoli, de' quali comparandoli insieme, si potrebbe indagarne il rapporto. Nel 5gono per esempio (Fig. 4. Tav. 29) all'ordinata Mm appartengono

3 quadrati AM , mM , Mr . ovvero li 3 rettangoli equivalenti rAm , $r mA$, Arm ; all'ordinata Qn si aspettano

li 3 quadrati rQ , nQ , AQ , oppure li 3 equivalenti rettangoli Arn , Anr , rAn . Ora nel pentagono, come ben si vede, le ordinate sono due Mm , Qn ; bisogna dunque moltiplicare questo numero 2 dell'ordinate per il 3 numero de' piani, che appartengono a ciascuna ordinata, e verrà 6, cioè 6 piani, o quantità superficiali, o termini che si vogliono comparare a due a due.

Supponiamo dunque che questi sei termini siano per esempio ed esaminiamo quanti binarj ne risultino. Ben si vede, che sono

a .	b .	c .	d .	e .	f .
ab .	bc .	cd .	de .	ef .	
ac .	bd .	ce .	df .		
ad .	be .	cf .			
ae .	bf .				
af .					

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 =$ alla somma di una progressione crescente per unità meno 6 ultimo

M m

ter-

termine eguale, come si è mostrato, al numero dell' ordinate moltiplicato per 3. Ciò che era quanto dovevasi dimostrare.

Annotazione I.

147. Lo scopo dunque di questa Proposizione è di mostrare primieramente quanti piani appartenghino per questo solo riguardo ad un Poligono dato. Secondo quanti casi di comparazione di essi piani contenga: cioè quanti binarj, giacchè non si potrebbe sapere il rapporto di essi piani, se non si paragonassero insieme a due a due.

Per altro non è bisogno di andare in cerca del sopraddetto numero 15 col formare tutta la piramide; ma basta operare secondo la regola per rilevare la somma di una progressione, di cui fosse l'ultimo termine per esempio il 5 numero disparo, e fosse pure 5 il numero de' termini, come nelle progressioni crescenti per unità accade. Onde supponendo l'ultimo termine = a ; il numero de' termini = b ; la somma de' termini = M ; verrebbe M (nel nostro ca-

so = 15) = $a + 1 \times \frac{b-1}{2} + \frac{a+1}{2}$. E se il numero de' piani invece di essere 6, fosse per esempio 9, cosicchè l'ultimo termine della progressione risultasse 8 numero pari, in tal caso farebbe M (= 36 numero cercato) = $a + 1 \times \frac{a}{2}$.

Anotazione II.

248. Non mi pare cosa superflua di produrre una Tavola, che contenga il numero delle Ordinate di ciascun Poligono; il numero delli Piani, che si devono comparare a due a due; ed il numero de' Binarj, che risulta da esso numero de' piani.

TAVOLA,

Che contiene il numero delle Ordinate; il numero de' Piani spettanti ad esse Ordinate; il numero de' Binarj, o sia de' casi di comparazione a due a due.

Nel	3gono	1	Piani	3	Binarj	3
	4gono	2		6		15
	5gono	2		6		15
	6gono	3		9		36
	7gono	3		9		36
	8gono	4		12		66
	9gono	4		12		66
	10gono	5		15		105
	11gono	5		15		105
	12gono	6		18		153
						584

Di tutti questi 584 Piani non ne ho esposti altri che tre nel 5gono ivi già (n. 38.) rimarcati, per non caricarmi di un esame senza fine, e perchè fors' anche sarebbe stato difficile o impossibile l'additare nella figura li esponenti del loro rapporto. Laonde basti per ora di aver conosciuto, quanto per questo riguardo, e per quanto si è mostrato nella Proposizione antecedente, quanto dissi, avrebbesi a fare in un solo Poligono qualunque, di cui venisse a taluno in animo di darne un minuto ragguaglio.

P R O P O S I Z I O N E IV.

Descrivendosi i Poligoni nella maniera da me insegnata, intorno allo stesso centro, intorno a cui si descrive un Poligono di dato denominatore d , se ne descrive tante volte un altro di dato denominatore a , quante volte d contiene a ; talmente che se $d = na$, il Poligono di denominatore a si descrive intorno al centro dell' altro Poligono di denominatore d numero di volte n .

149. Supponiamo $n = 2$; $a = 4$; quindi sarà il numero denominatore $d = n \times a = 2 \times 4 = 8$, e la Figura sarà un 8gono, il quale (*Fig. 8. Tav. 29.*) nell' esser descritto fa nascere appunto 2 quadrati $eTdh$, $LRbI$. Ma non potevamo già aspettarci altrimenti, imperocchè trovandosi di 4 lati PB , NM , DQ , FG , due PB , DQ , e poi due altri NM , FG alternatamente disposti l'uno dirimpetto all'altro e paralleli, prodotti poi anche che sono stati, perchè perciò non si guastò la loro situazione, non poterono che formare un quadrato $eTdh$. Così degli altri quattro lati ancora GP , BN , MD , QF , perchè due GP , MD , indi due altri BN , QF sono pure paralleli e ordinati faccia a faccia, prodotti che siano, formano un altro quadrato $LRbI$.

Nel 10gono (per addurre un altro esempio) si trovano i lati ED , BM , HR , PT , AF vicendevolmente inclinati con un angolo eguale all'angolo DQB di gr. 108 angolo alla periferia di un 5gono; e perciò prodotti che siano formano un 5gono mQg &c. Per la medesima ragione prodotti poi che siano i lati DB , MH , RP , TA , FE formano un altro 5gono apb &c. perchè appunto nel produ-

re essi lati non però si guasta la loro reciproca convergenza: discorso che, le altre cose pari, milita per qualunque altro Poligono.

PROPOSIZIONE V.

Descrivendo alla mia maniera un Poligono di denominatore disparo, si descrivono anche 3 lati di un altro di doppio denominatore, e 3 di un altro di denominatore eguale.

150. Nell'ultima Proposizione di tutti li antecedenti Poligoni di denominatore disparo abbiamo dimostrato, che la cosa si passa in fatti così, come abbiamo proposto. Ma non abbiamo addotto più precisamente il perchè così debba veramente succedere, e ciò è appunto quanto, producendo una dimostrazione non già particolare, ma generale, intendo ora di fare.

Traportata dunque per maggior chiarezza parte della Figura 7.^a per esempio nella 9.^a torno a ridire (*Fig. 7. e 9., Tav. 29.*)

Primo. Che le rette QT , TN , NV , indi QT , TM , MA sono eguali.

Secondo. Che l'angolo QTN ovvero TNV compreso dalle prime è angolo alla periferia di un Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono bda &c.

Terzo. Che l'angolo QTM , ovvero TMA compreso dalle seconde è angolo alla periferia di un Poligono simile al Poligono dato bda &c.

151. Però circa al primo capo essendo la linea TM parallela al lato da prodotto in V , le due TM , dV fanno alla medesima retta QV gli angoli TMQ , dVQ sempre eguali; ma l'angolo dVQ è eguale all'angolo MQT posto

sto in simile sito della Figura. Dunque farà l'angolo TMQ eguale all'ang. TQM . Dunque faranno pure eguali i lati TM , TQ , e per conseguenza tutte le altre rette poste in simile sito MA , TN , NV .

152. Circa al secondo capo è da sapere, che messa una retta TN opposta all'angolo TdN angolo alla periferia di un Poligono dato bda &c. in modo che il triangolo TNd sia isoscele, l'angolo esterno QTN farà sempre angolo alla periferia di un Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono dato bda &c. E ciò perchè (n. 20.) essendo l'angolo TdN alla periferia più l'angolo al centro di un Poligono eguale alla somma di tutti gli angoli del triangolo TNd , ed essendo poi l'angolo TdN eguale per il supposto all'angolo alla periferia, li due angoli dTN , TNd presi insieme faranno eguali all'angolo al centro, ed un solo dTN (cioè la metà di detto angolo al centro) farà l'intero angolo al centro di un Poligono di denominatore doppio del denominatore di quest' altro Poligono bda &c. Ora essendo l'angolo al centro più l'angolo alla periferia eguale a due retti, farà l'angolo QTN complemento a due retti dell'angolo dTN ; e però farà angolo alla periferia del suddetto Poligono di denominatore doppio del denominatore del Poligono dato bda &c.

153. Per il terzo capo basta avvertire, che per essere TM parallela ad ad , e però facendo ad una medesima retta Qd gli angoli QTM , Qda eguali, deve risultare il Poligono eretto su il lato QT , ovvero TM , simile al dato poligono bda &c. Dunque descrivendo un Poligono &c. Ciò che era in tutto da dimostrare.

PROPOSIZIONE VI.

Primo. L'angolo retto sta all'angolo al centro di qualunque Poligono, come il suo denominatore sta al 4 numero costante.

Secondo. L'angolo retto sta all'angolo alla periferia di qualunque Poligono, come il suo denominatore sta al denominatore, più la differenza di esso denominatore al 4 numero costante.

154. Questa Proposizione è comunemente ricevuta, ma non so che sia dimostrata. Quando perciò io ho detto, che l'angolo retto sta all'angolo al centro di un Poligono (sia per esempio un pentagono), come sta il suo denominatore al 4 numero costante, era lo stesso che dire, che $\frac{1}{4}$ di un

circolo sta ad $\frac{1}{5}$, come 5 a 4. Ma ciò è evidente per-

chè $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} :: \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{20} :: 5 \cdot 4$. E perchè poi qualunque sia il Poligono dato abbiamo sempre da una parte dell'analogia per primo termine di comparazione $\frac{1}{4}$, cioè un angolo retto, così dall'altra parte avremo sempre per ultimo termine un 4.

155. Per prova poi della seconda parte di questa Proposizione è da riflettere che (*Fig. 4., Tav. 29.*) l'angolo alla periferia GPQ più l'angolo esterno QPB (ovvero McQ al centro, cui è eguale) di qualunque Poligono essendo eguale a due retti, ed essendo pure un retto aggiunto a se stesso eguale a due retti, l'angolo retto si ritrova medio aritmetico tra l'angolo al centro, e l'angolo alla periferia; e quindi per la natura delle progressioni aritmetiche la differenza

renza tra l'angolo al centro, e l'angolo retto risulta la medesima che passa tra detto angolo retto, e l'angolo alla periferia.

Ciò premesso l'angolo retto, più la differenza di detto angolo all'angolo al centro, sarà eguale all'angolo alla periferia, cioè sarà $= 5 + 1$; giacchè nel medesimo esempio del 5gono abbiamo osservato, che l'angolo retto sta all'angolo al centro, come 5 a 4, onde la differenza risulta $= 1$. Ma il numero denominatore è 5. Dunque l'angolo retto ($= 5$) sta all'angolo alla periferia ($= 5 + 1$), come il denominatore 5 sta al medesimo denominatore 5 + la differenza 1 di esso denominatore 5 al 4 numero costante. Un tal discorso fu simile, le altre cose pari per qualunque altro Poligono; onde s'intende dimostrato, quanto era proposto.

Annotazione. I.

156. Una Tavola esibita (1) dal P. Andrea Tacquet mostra la ragione, che nei Poligoni passa tra l'angolo retto, e l'angolo alla periferia, acciò per essa si possa sopra un dato lato ergere un qualunque dato Poligono. Io qui inerendo a quanto contiene la presente Proposizione ne produrrò un'altra, la quale non solo rappresenti la suddetta ragione, ma anche quella del medesimo angolo retto all'angolo al centro. Perchè quindi in un circolo dato si possa descrivere un qualunque Poligono, non già tentando la divisione sopra tutta la periferia del dato circolo, ma sopra un solo quadrante. Avvertendo che i comuni divisori adoperati nel costruerla non sono sempre i massimi, acciò più chiaro apparisca quant' ho proposto.

TA-

(1) *Elem. Geom. Lib. 4.; Prop. 16.; Prob. 2.*

TAVOLA.

	Ang. al centro	Ang. retto	Ang. alla perif. ^a				Diff. ^a
Nel 4gono	90	90	90 ::	4	4	4	0
5gono	72	90	108 ::	4	5	6	1
6gono	60	90	120 ::	4	6	8	2
7gono	$51\frac{3}{7}$	90	$128\frac{4}{7}$::	4	7	10	3
8gono	45	90	135 ::	4	8	12	4
9gono	40	90	140 ::	4	9	14	5
10gono	$36\frac{8}{11}$	90	144 ::	4	10	16	6
11gono	$32\frac{3}{11}$	90	$147\frac{3}{11}$::	4	11	18	7
12gono	30	90	150 ::	4	12	20	8

Notate che questo segno :: significa, che li tre numeri anteposti al segno sono in proporzione ordinata, come li tre numeri posteriori. Onde trovando nel 7gono per esempio $90 \cdot 128\frac{4}{7} :: 7 \cdot 10 = 7 + 3$, vuol dire, che

l'angolo retto 90 sta a $128\frac{4}{7}$ angolo alla periferia di un ettagono, come il denominatore 7 sta al medesimo denominatore 7 + il 3 differenza di detto 7 al 4 numero costante: sta, dissi, come 7 a 10. Onde divisa la periferia di un quadrante in parti 7, ed aggiunto un arco di 3 altre di dette parti, farà tutto detto arco misura dell'angolo alla periferia del proposto 7gono. Se per il medesimo esempio si consideri, che nella Tavola v'è $51\frac{3}{7} \cdot 90 :: 4 \cdot 7$. significa che diviso un quadrante di un circolo dato in parti sette, l'arco eguale a 4 di esse parti farà misura dell'angolo al centro del medesimo 7gono.

Annotazione II.

157. Nella medesima Tavola si vede ancora, che l'angolo retto è medio aritmetico tra l'angolo al centro, e l'angolo alla periferia, siccome abbiamo asserito di sopra; perchè nell' 11 gono per esempio stando i numeri 4. 11. 18, come $32 \frac{8}{11} \cdot 90 \cdot 147 \frac{3}{11}$, dall'addizione de' piccoli esponenti $4 + 18 = 11 + 11$ si rileva molto più presto che anche $32 \frac{8}{11} + 147 \frac{3}{11} = 90 + 90$. Da questa Annotazione seguita poi, che noto l'angolo al centro si viene in cognizione dell'angolo alla periferia, e reciprocamente. Così nel 9gono per esempio noto l'angolo al centro 40, avremo $90 + 90 - 40 = 140$ angolo alla periferia. Siccome $90 + 90 - 140 = 40$ angolo al centro di detto 9gono.

P R O P O S I Z I O N E VII.

Qualunque numero (maggior del 3) di lati eguali ordinati nella periferia di un circolo dato (Tav. 33.) può fornire tre contin. geom. propor. mp, bq, dg; delle quali la prima mp unisce i punti di concorso di due lati prodotti db, gq, e di due qa, bn prodotte pure, e suttense ad 1 lato, se nella Figura i lati sono 4 (Fig. 15); a 2 lati, se i lati sono 5 (Fig. 16); a 3 lati, se i lati sono 6 (Fig. 17), &c. le altre due bq, dg uniscono le estremità di due lati nella Figura massimamente distanti.

158. Ora non vogliate già aspettare la prova di questa elegantissima Proposizione, perchè è la medesima generalissima adoperata nelle seconde degli Articoli antecedenti. Sappia-

piate piuttosto, che essa contiene in somma non solo quanto si enunciò nelle seconde Proposizioni suddette. Ma propone inoltre che dette seconde Proposizioni siano vere in qualunque altro Poligono superiore. Cioè che la seconda per esempio del 7gono sia vera non solo nell'8gono, come si dimostrò n. 78; ma in qualunque altro Poligono superiore 9gono, 10gono &c. quando si restringa la costruzione d'intorno a tanti soli lati, quanti si adoperarono in detto Ettagono, che furono 4, cioè bh , ho , op , pq compresi nel triangolo bEg . Onde qualunque Poligono sia, per esempio la Fig. 15, basta che in essa si restringa la costruzione d'intorno a 4 soli lati per ottenere 3 contin. geom. propor. mp , bq , dg nel medesimo modo, che si ottennero per mezzo dell'7gono. Così se tutte le Figure della Tavola 33 fossero sempre un 17gono, secondo che la costruzione versasse d'intorno a' lati 4, 5, 6 &c. di esso 17gono, le proporzionali mp , bq , dg risultarebbero bensì di ordine differente, ma sempre come nelle Figure 15, 16, 17 &c. contin. geometriche.

159. Di più se i lati della data Fig. 15 ovvero 16 &c. non fossero nè meno parti aliquote di un qualche Poligono, e qualunque fosse grande o piccola la periferia, su la quale sono ordinate (purchè non si dilatassero oltre la metà di essa se non di un mezzo lato, come occorre in tutte le seconde proposizioni de' Poligoni di denominatore disparo) la Proposizione mai perciò sarebbe meno sicura. Laonde trovandola io sì bella e sì estesa mi duole a dir vero assai, che non sorgendo essa che pur ora da una sola arida speculazione, le sovraggiunte mie occupazioni presenti non m'abbiano permesso di recarla a qualche solida utilità, o almeno di spingerla un poco più innanzi e dilatarla insieme con l'altre poche osservazioni, che sono anzi un aborto, che un parto dello scarso mio ingegno.

ARTICOLO DUODECIMO.

Descrizione organica di detti Poligoni.

160. Avvenga che io abbia già applicato a questa descrizione due altri Istromenti, uno chiamato PENNA GEOMETRICA, l'altro COMPASSO LOXODROMICO, e benchè pure altri si usino, e che potrei proporre anche degli altri forse in pratica migliori, nonostante m'induco a produrne uno, il quale, se non altro per una tal quale sua vaghezza, merita qualche considerazione. Egli è (*Fig. 21. Tav. 34.*) composto di 6 volte tanti regoli, e 3 volte tanti pivoli, quanti sono i lati della Figura. Cinque di essi regoli *ad, de, en, ag, gm* debbono essere eguali, e mobili d'intorno a pivoli, coi quali stanno insieme connessi, ed un altro regolo *am* deve concepirsi mobile d'intorno ad un pivoletto *e* comune a 4 di detti eguali regoli; e nelle due fessure una da *e* verso *m* si faccia, che riceva il pivolo *m*, che può dentro per il lungo sdrucciolare da *m* sino ad *e*, e che connette due regoli; e nell'altra fessura da *e* verso *a* riceva il pivolo *a*, che ne congiunge quattro, e che può scorrere liberamente da *e* sino ad *a*. I pivoli poi *a, m, n, d*, e tutti gli altri posti in simil luogo della Figura si dilatino un poco in cerchio dalla parte inferiore, e per di sopra siano costrutti a spira con la sua vite, acciò possano tenere i regoli insieme uniti. I pivoli *e, g, b*, e tutti quelli che stanno alla medesima distanza dal centro della Figura siano non solo fabbricati a quest'oggetto come quelli, ma per di sotto lunghetti più di quelli terminino in una punta, acciò toccando essi soli al piano, possano marcare un punto su la carta.

161. Da una tale costruzione parmi di dover aspettare un effetto, che è grande ardimento l'asserirlo senza averne anticipatamente fatta prova. Cioè che levando via i pivoli

m, e, a , ed aprendo l'ordigno in fuori, restino tuttavia i lati dh, hK, KL &c. sempre ordinati nella periferia di un maggior circolo, di cui i regoli dn, uh &c. ne rappresentino i raggi. Come per contrario tolta via una parte am, dn , ovvero due am, hu , e restringendolo, i lati che restano rimanghino disposti nella periferia di un circolo minore.

162. Ciò mi par vero, perchè non posso concepire mosso per esempio un regolo am , che nel medesimo istante anche tutti gli altri regoli non si muovano altrettanto per causa della vicendevole loro connessione; cosicchè parmi che non possa muoversi un regolo am , che gli angoli mad, nda alla periferia non rimanghino tuttavia eguali. Dunque dovendosi anche gli altri regoli muovere altrettanto, anche gli angoli circa essi alla periferia rimarranno parimenti eguali; e quindi i lati ad, dh &c. sempre costituiti nella circonferenza di un circolo unica curva che, come notammo anche altrove, sempre inclini, e sempre egualmente alla medesima parte.

163. Volendo pertanto descrivere un Poligono maggiore del 12gono rappresentato in figura, bisognerebbe aggiugnere all'istromento tante parti, quante per il nuovo Poligono occorressero. E volendo descriverne un minore avrebbesi a tagliar via le superflue; perchè poi e nell'uno, e nell'altro caso premendo alquanto i pivoli e, g, b &c. lasciassero sul piano della carta impressi tanti punti, quanti fossero i lati del proposto Poligono. Ma si avverte che detto istromento non potrebbe essere diminuito, se non di due sole parti, e però fornire un 10gono. Perchè i punti di connessione m, n, u e tutti gli altri simili si troverebbero in tal caso pervenuti fino al centro c , dove gli regoli pur ivi concorsi facendo a se stessi intoppo, non potrebbero passar più oltre. Tuttavia l'istromento ordinato al 12gono somministra anche la descrizione del triangolo,

golo, del 4to, dell' 6gono, lasciando andar vani dei segnati punti, 4 nel primo caso, 3 nel secondo, 2 nel terzo alternatamente. Ed occorrendo il pentagono si ordini l'istromento al 10, o al 15gono, o ad altro Poligono di denominatore multiplo del denominatore del proposto Poligono, lasciando poi alternatamente andar vano un punto sì e l'altro no nel primo caso; due sì ed uno no nel secondo &c. E così si proceda anche per l'7gono, ed il 9gono, aggiungendo all'istromento tante parti, quante abbisognarebbero per un Poligono di denominatore multiplo del denominatore del Poligono dato.

Annotazione.

164. Da quanto si espone in proposito del 10gono facilmente si deduce, che, ordinato l'istromento a detto Poligono, *madn* diventerebbe un triangolo, di cui i lati *am*, *dn* risultarebbero divisi *media & extrema ratione* in *g* ed *e* pivoli connettenti li regoli rispettivi.

I L F I N E.

NOI RIFORMATORI DELLO STUDIO DI PADOVA:

A Vendo veduto per la fede di revisione, ed approvazione del P. F. Giacinto Maria Marini Inquisitor Generale del S. Offizio di Venezia, nel Libro intitolato: *Nuovi Istrumenti per la descrizione di diverse Curve antiche e moderne &c. del Conte Giambatista Soardi Bresciano*. Ms. non v'esser cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per attestato del Segretario Nostro, niente contro Principi, e buoni costumi, concedemo licenza a Gian-Maria Rizzardi Stampatore in Brescia, che possi esser stampato, osservando gli ordini in materia di Stampe, e presentando le solite copie alle Pubbliche Librarie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 11. Maggio 1752.

[Z. Alvise Mocenigo 2°. Cav. Rif.

[Daniel Bragadin Cav. e Proc. Rif.

Registrato in Libro a carte 4. al num. 48.

Michiel Angelo Marini Segr.

Fig. 1

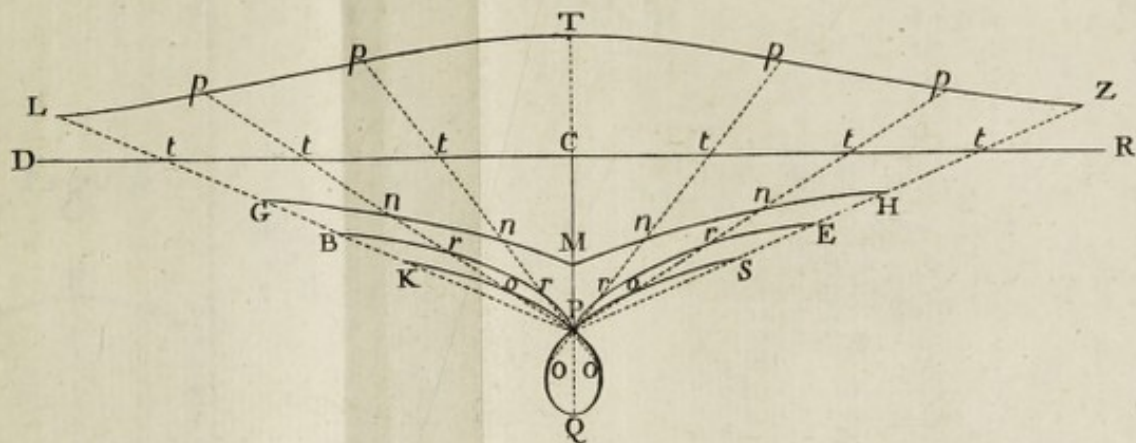


Fig. 2

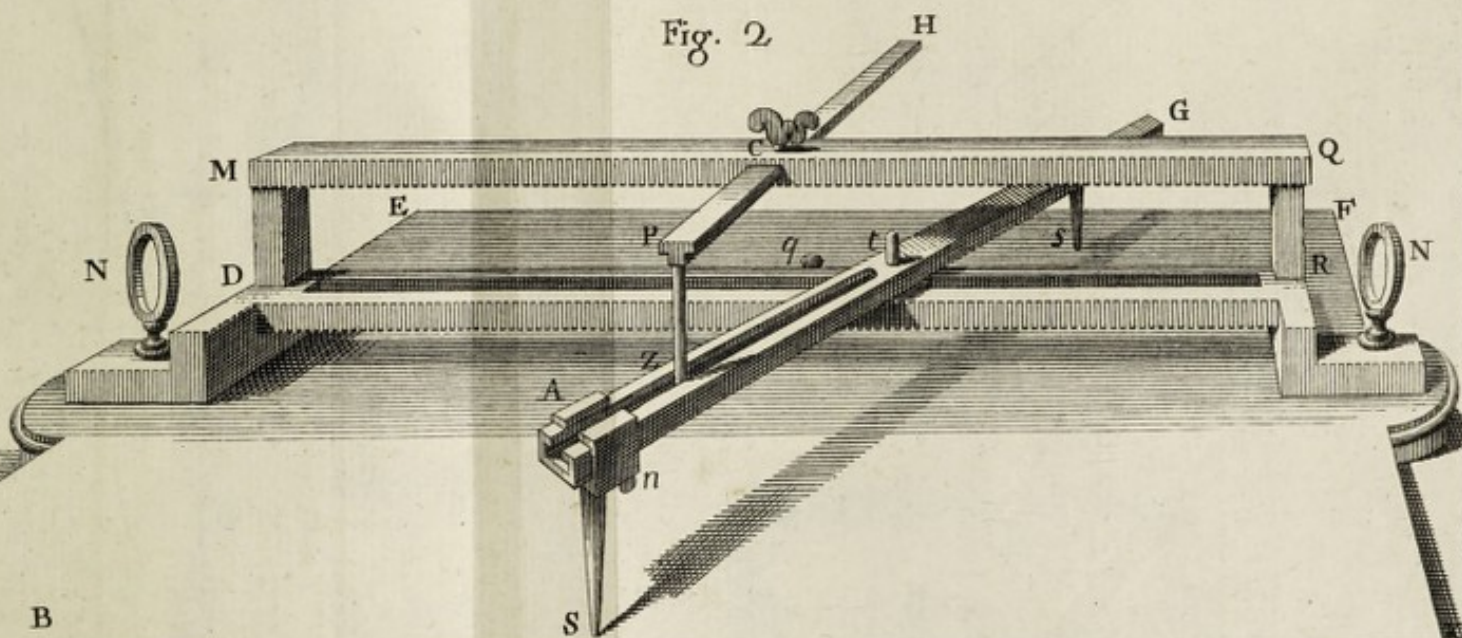


Fig. 3

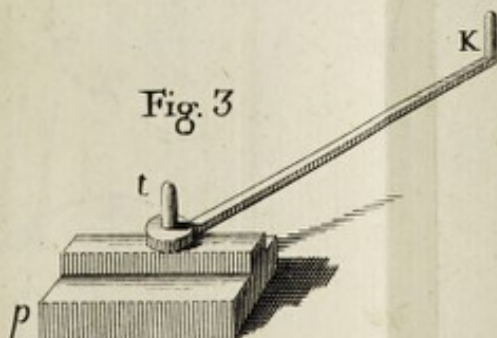
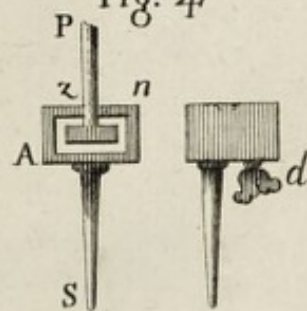


Fig. 5



Fig. 4



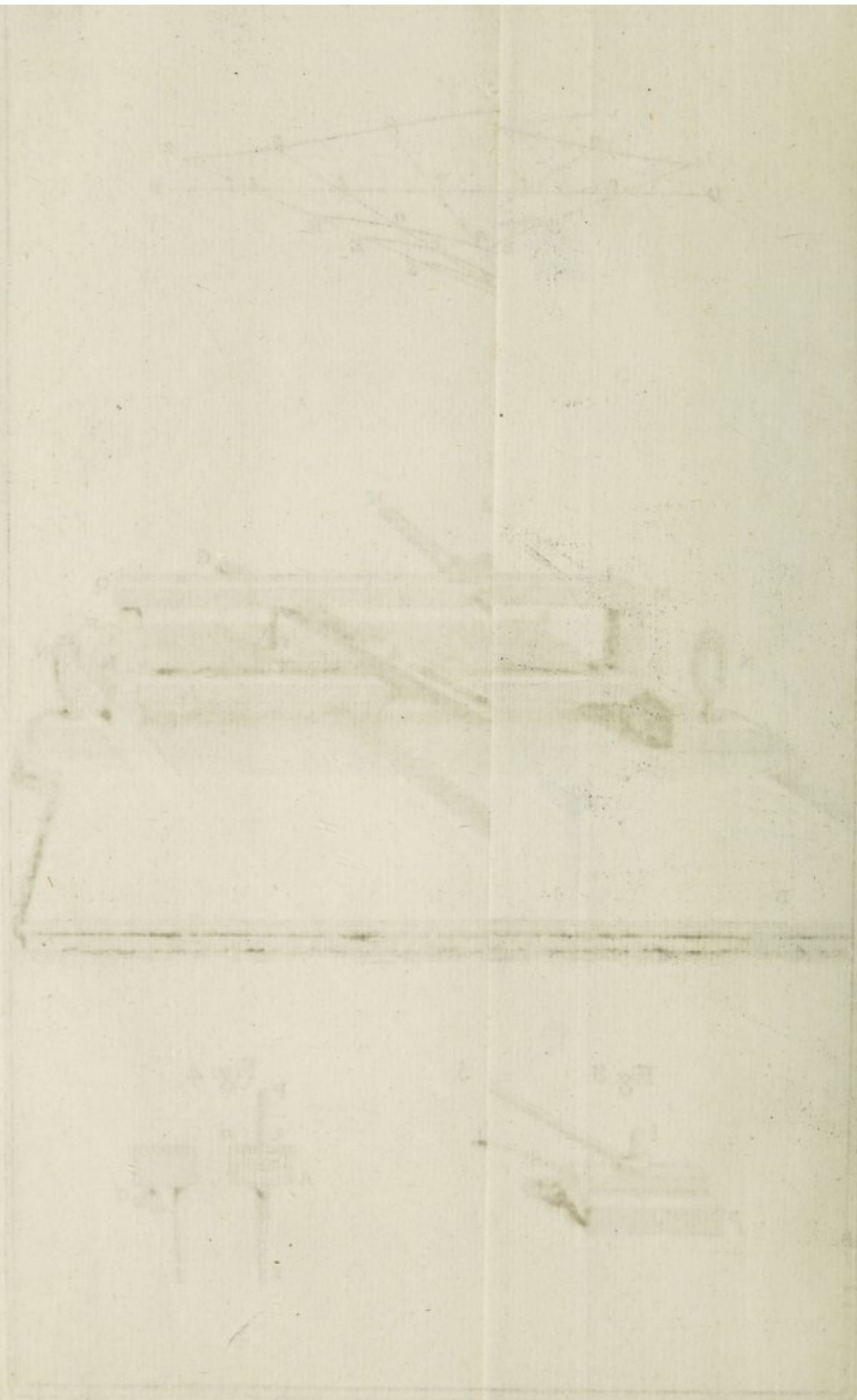


Fig. 2,



Fig. 3

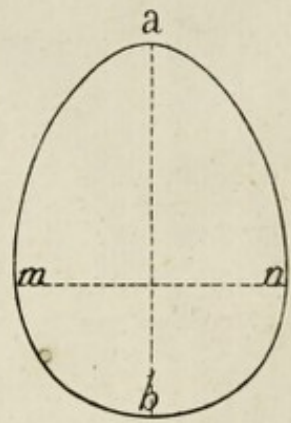


Fig. 1

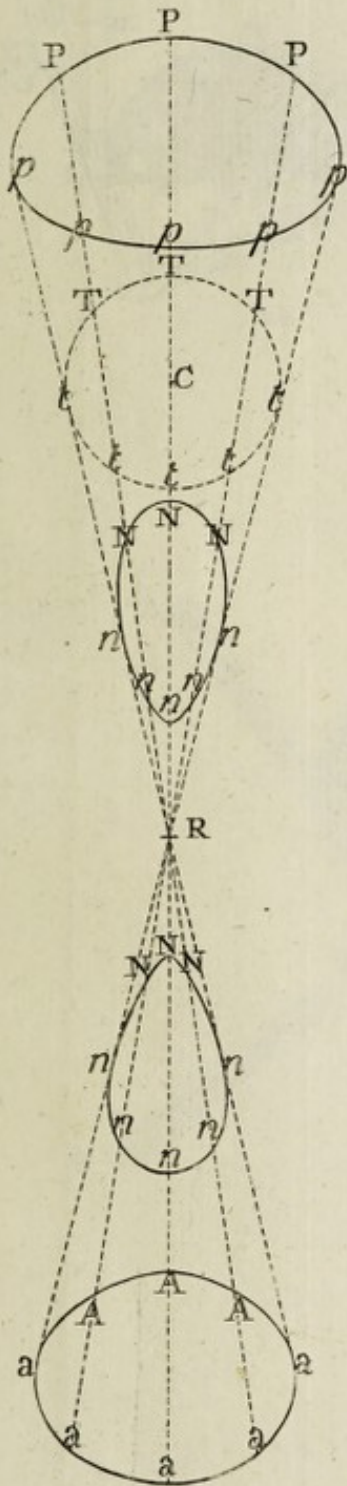


Fig. 5

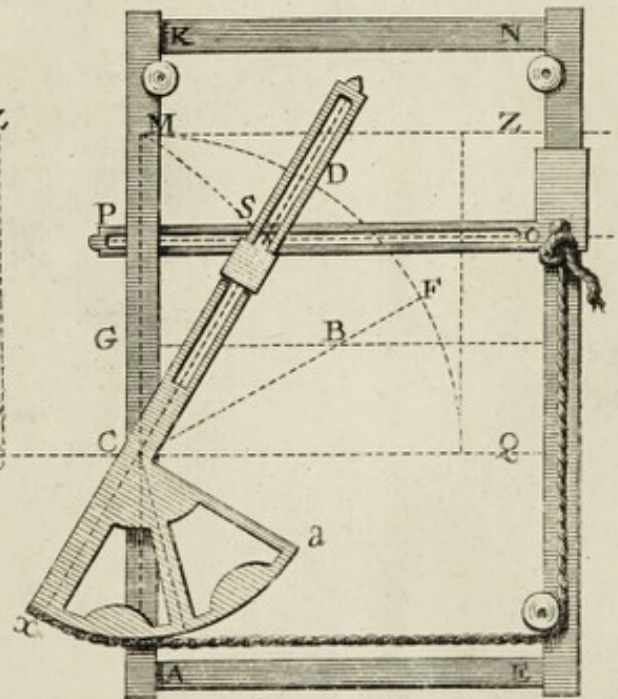
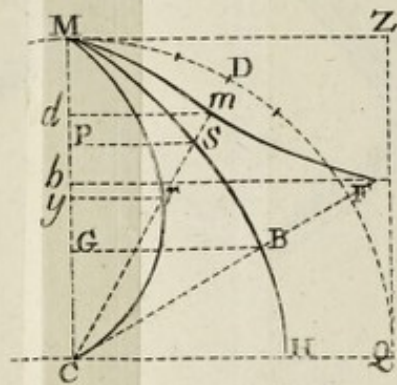


Fig. 4



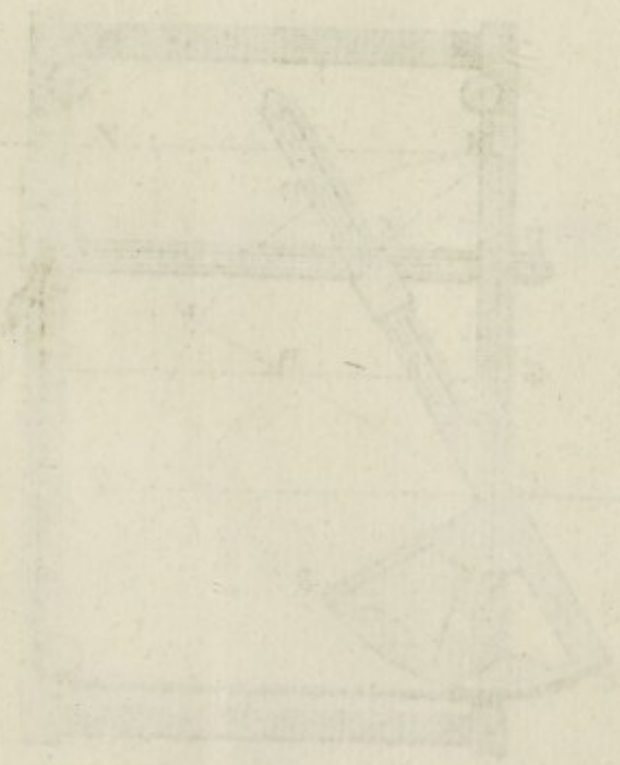
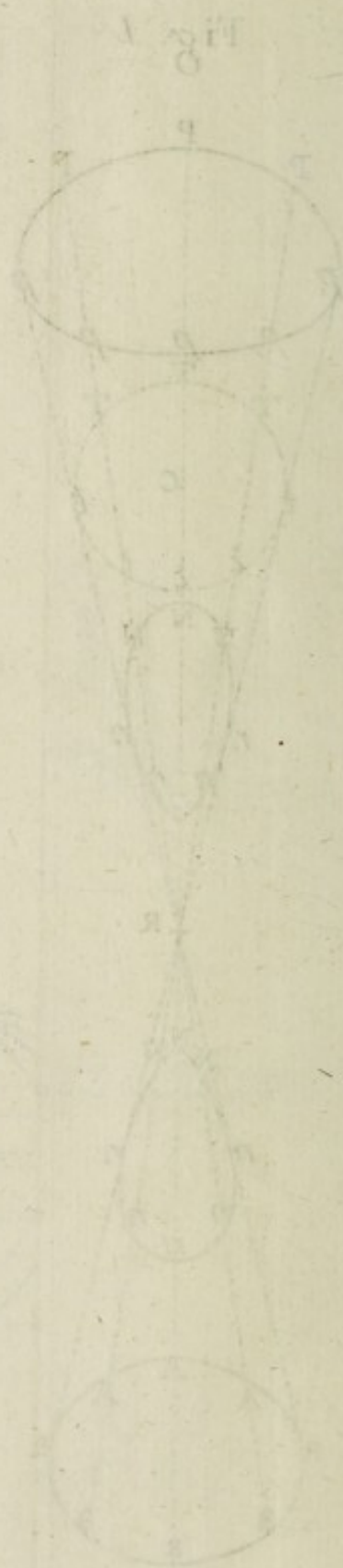


Fig. 3

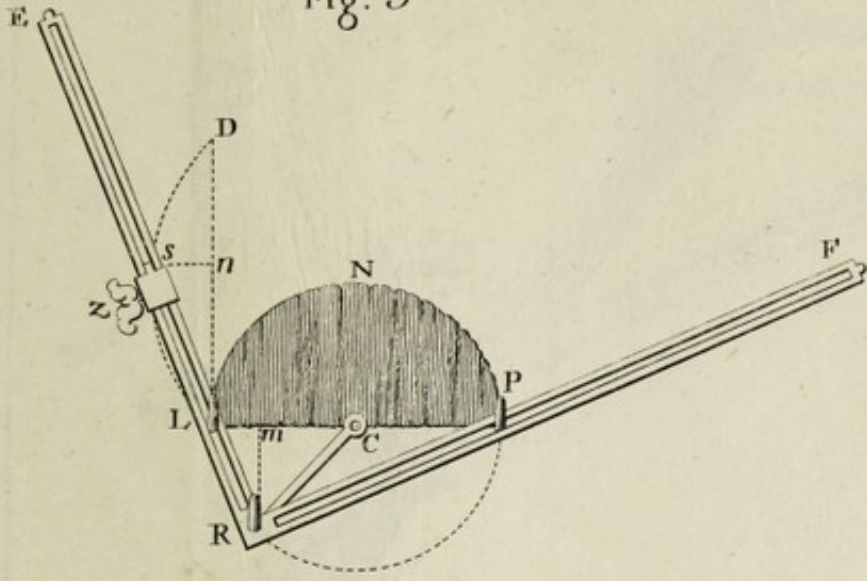


Fig. 1

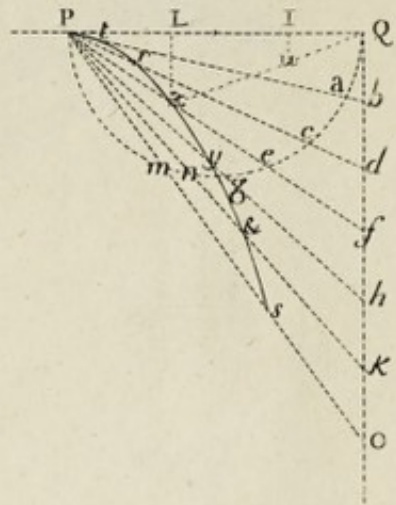
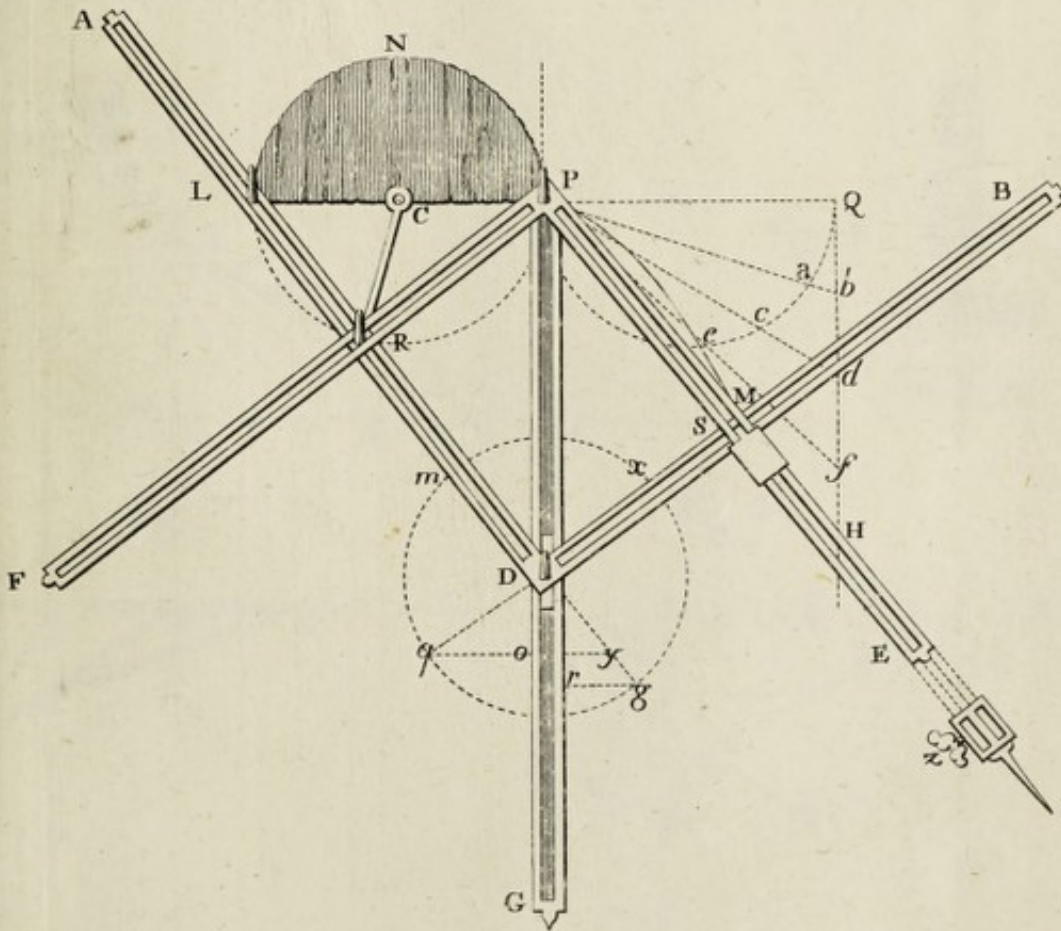


Fig. 2



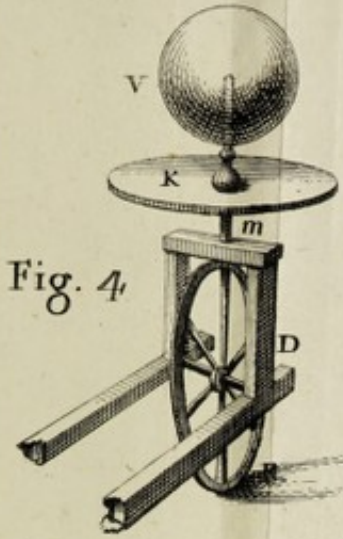


Fig. 4

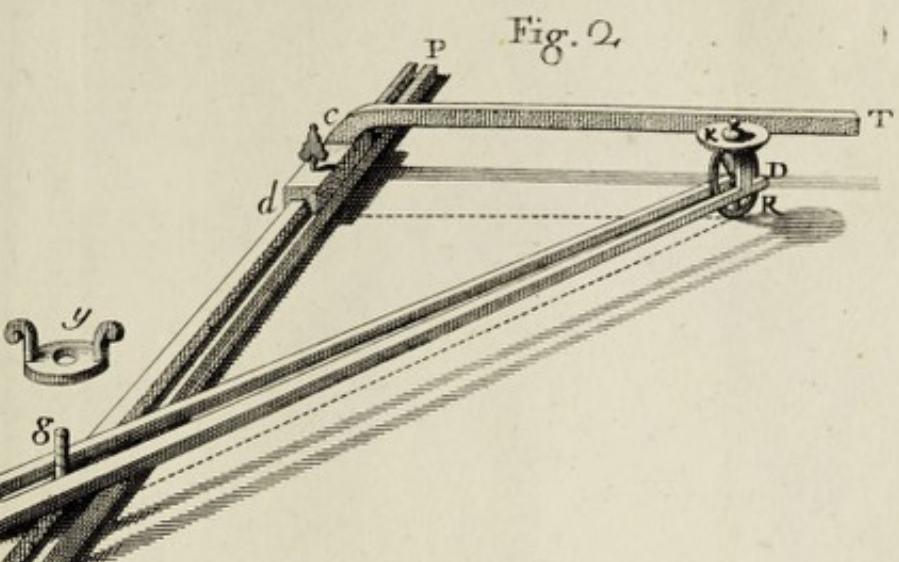


Fig. 2

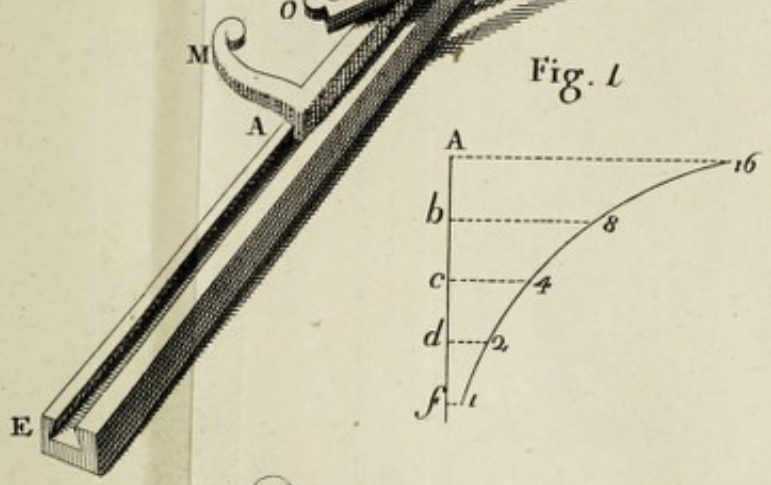


Fig. 1

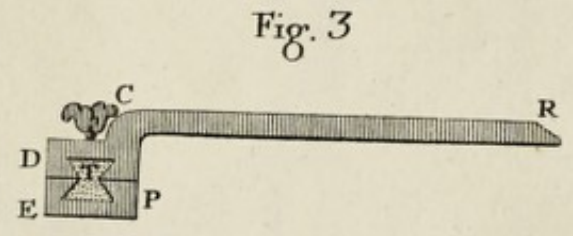


Fig. 3

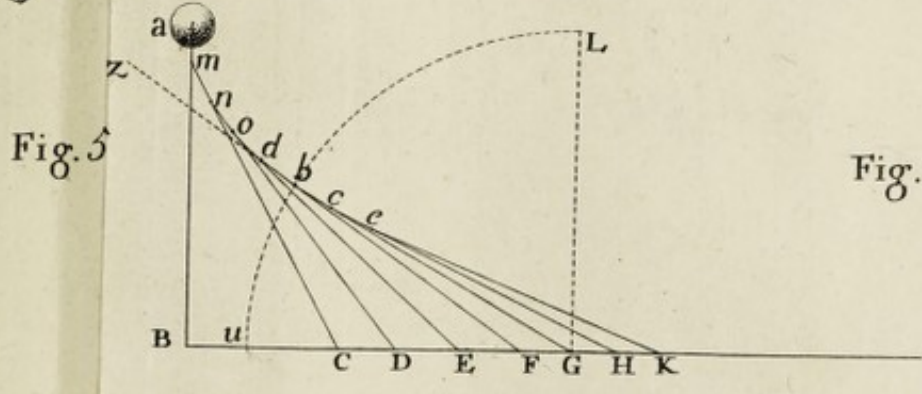


Fig. 5

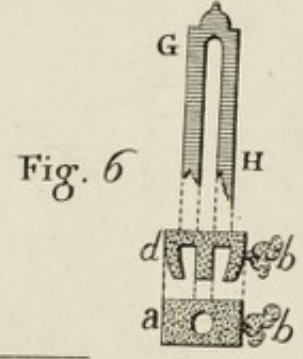


Fig. 6

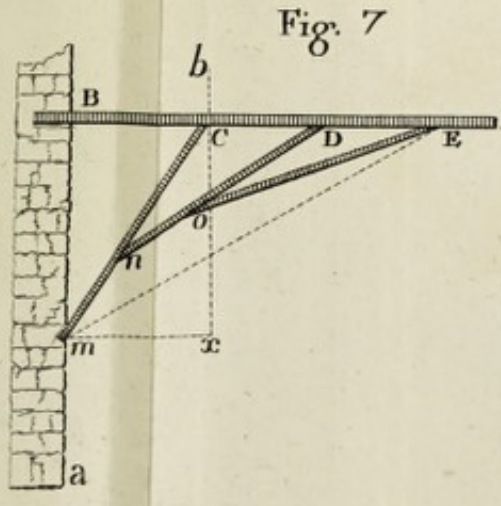


Fig. 7

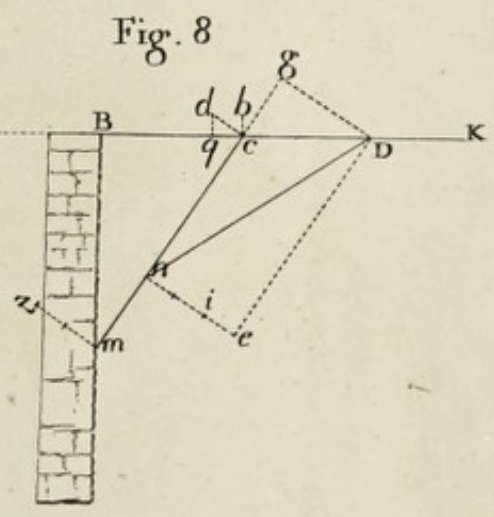


Fig. 8

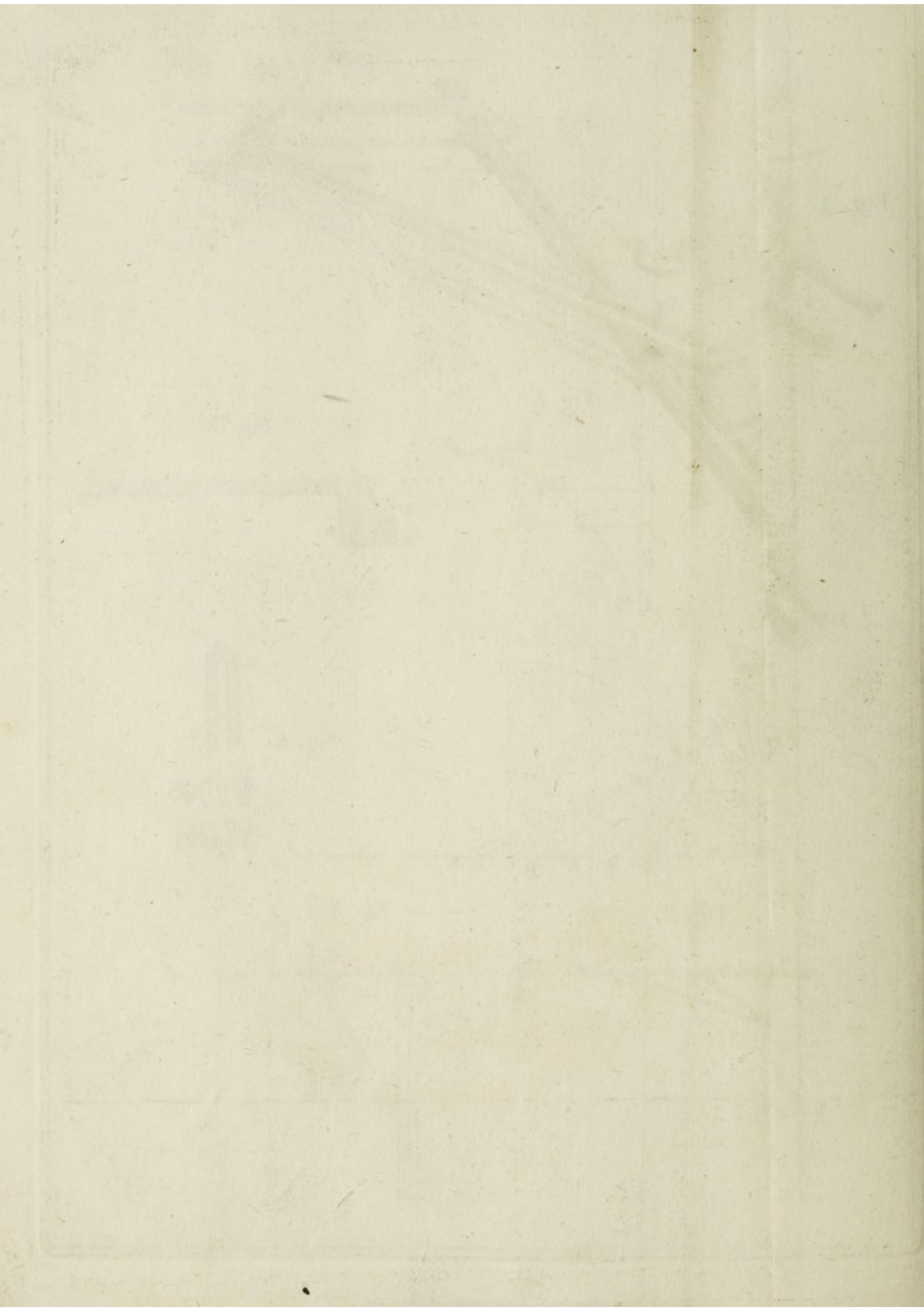


Fig. 2

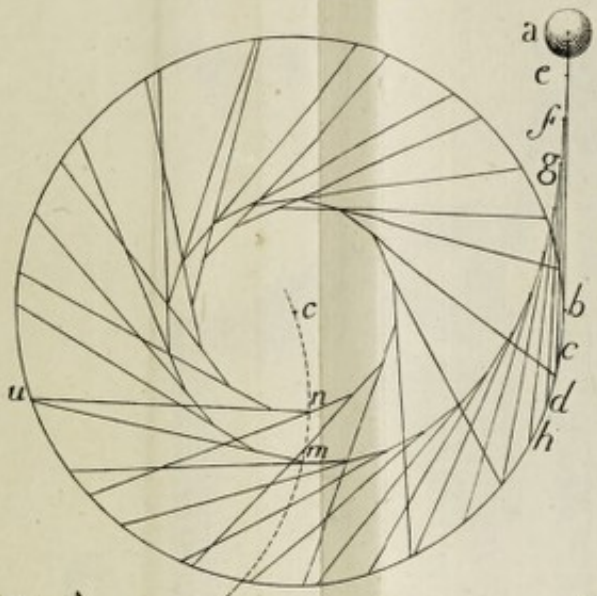


Fig. 1

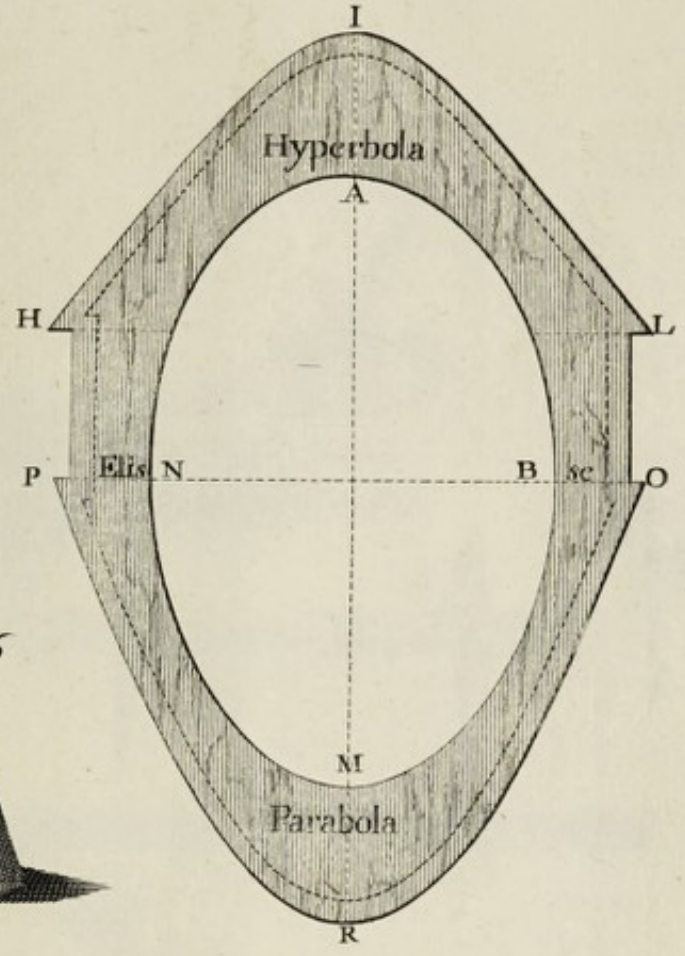


Fig. 5

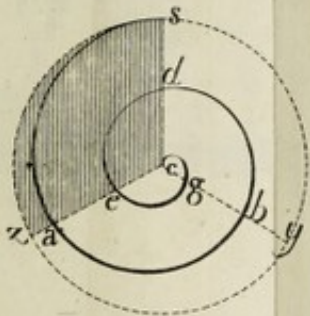


Fig. 6



Fig. 4

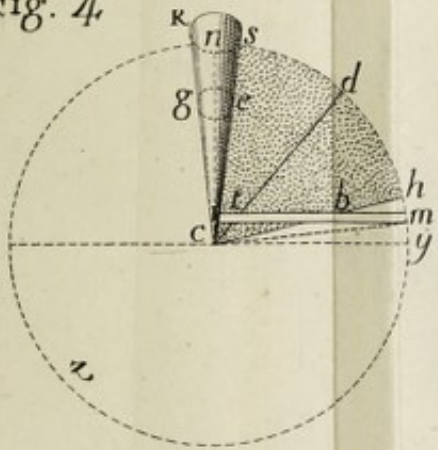


Fig. 3

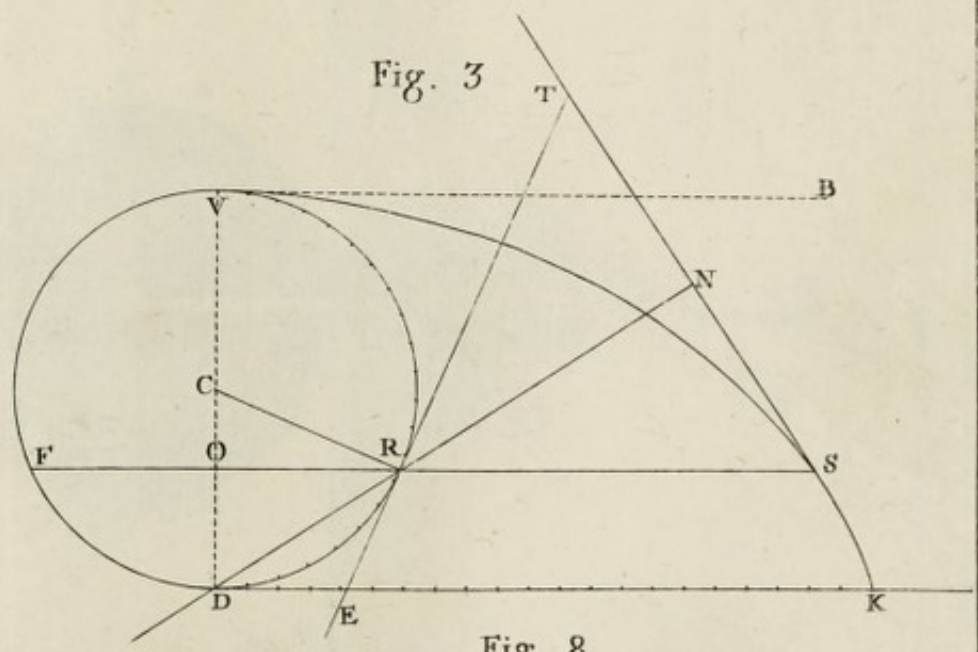


Fig. 7

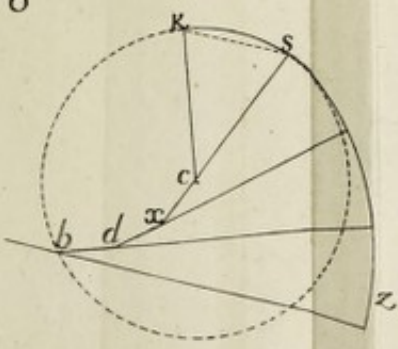
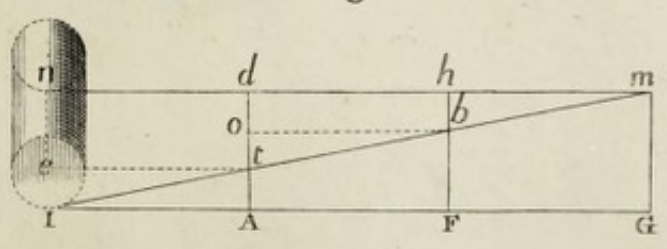


Fig. 8



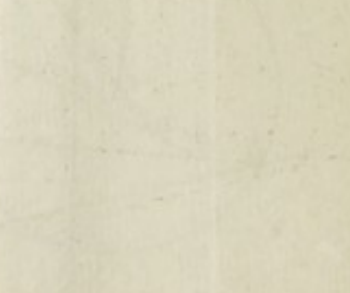
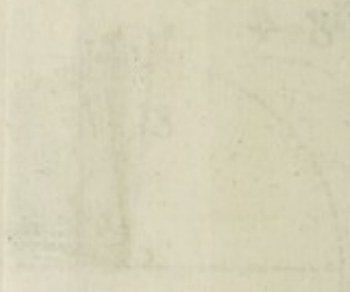
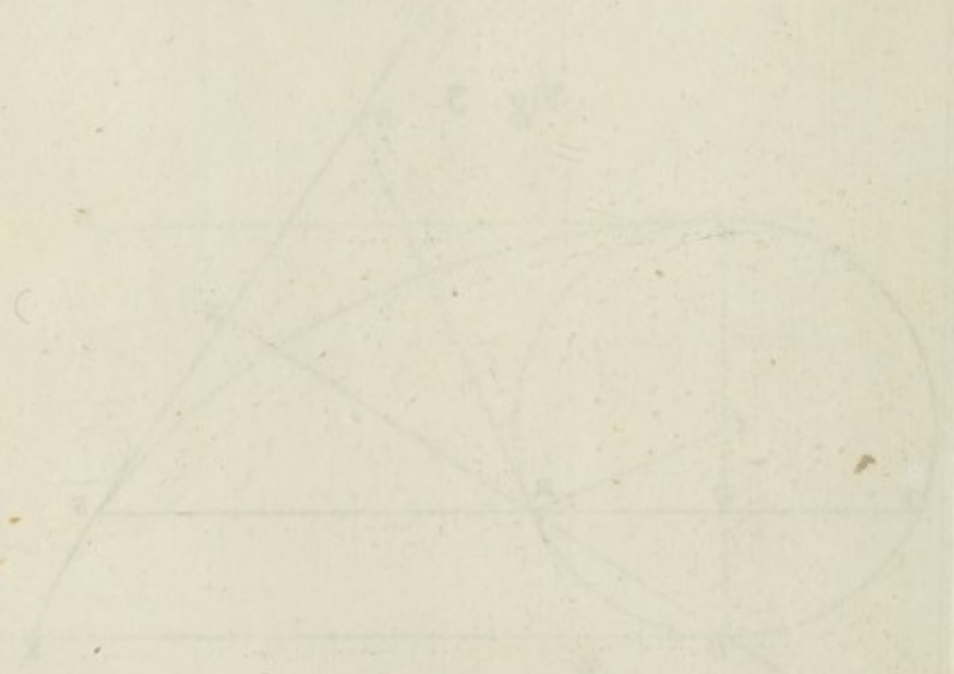


Fig. 1

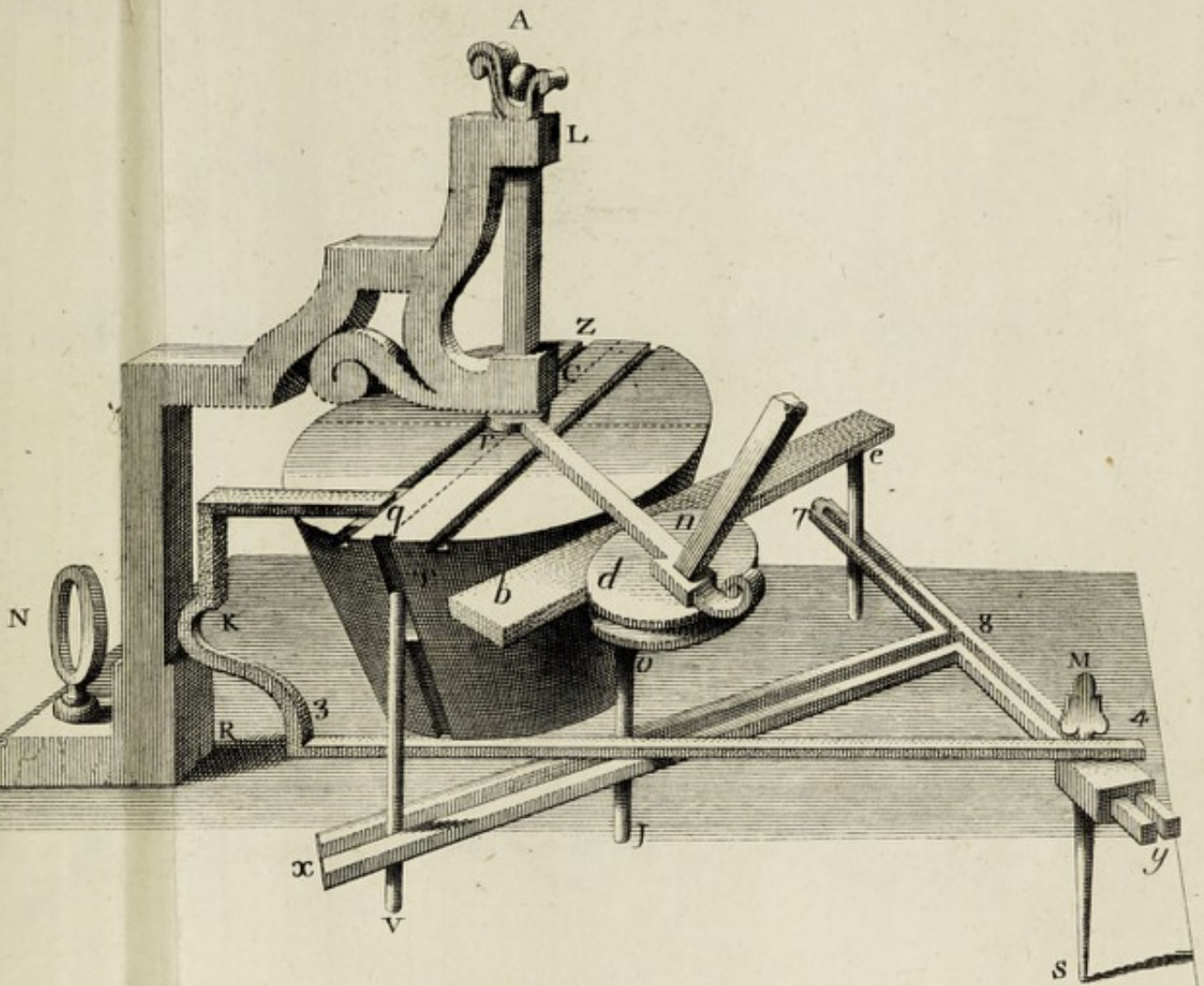


Fig. 3

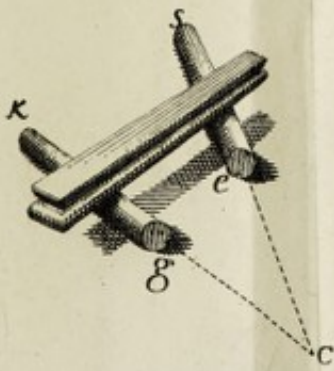


Fig. 2

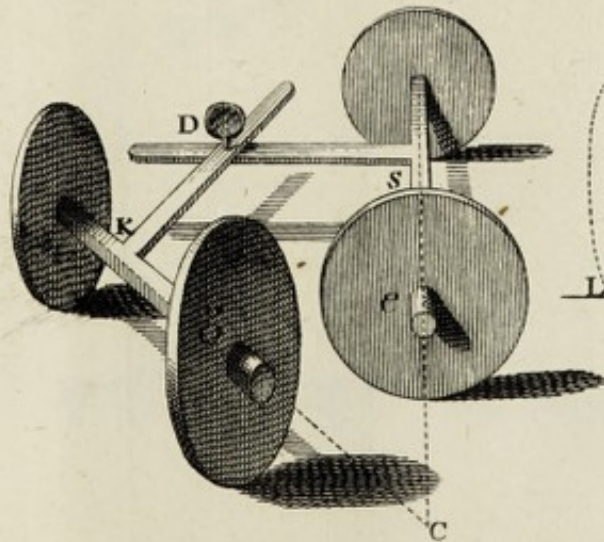
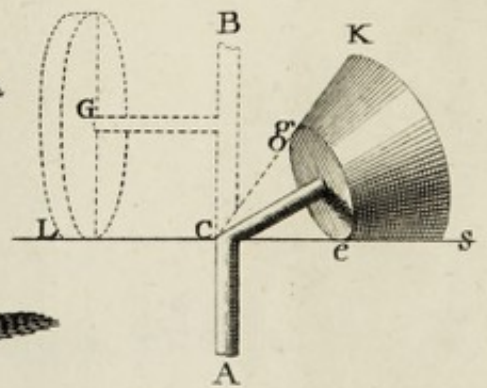


Fig. 4



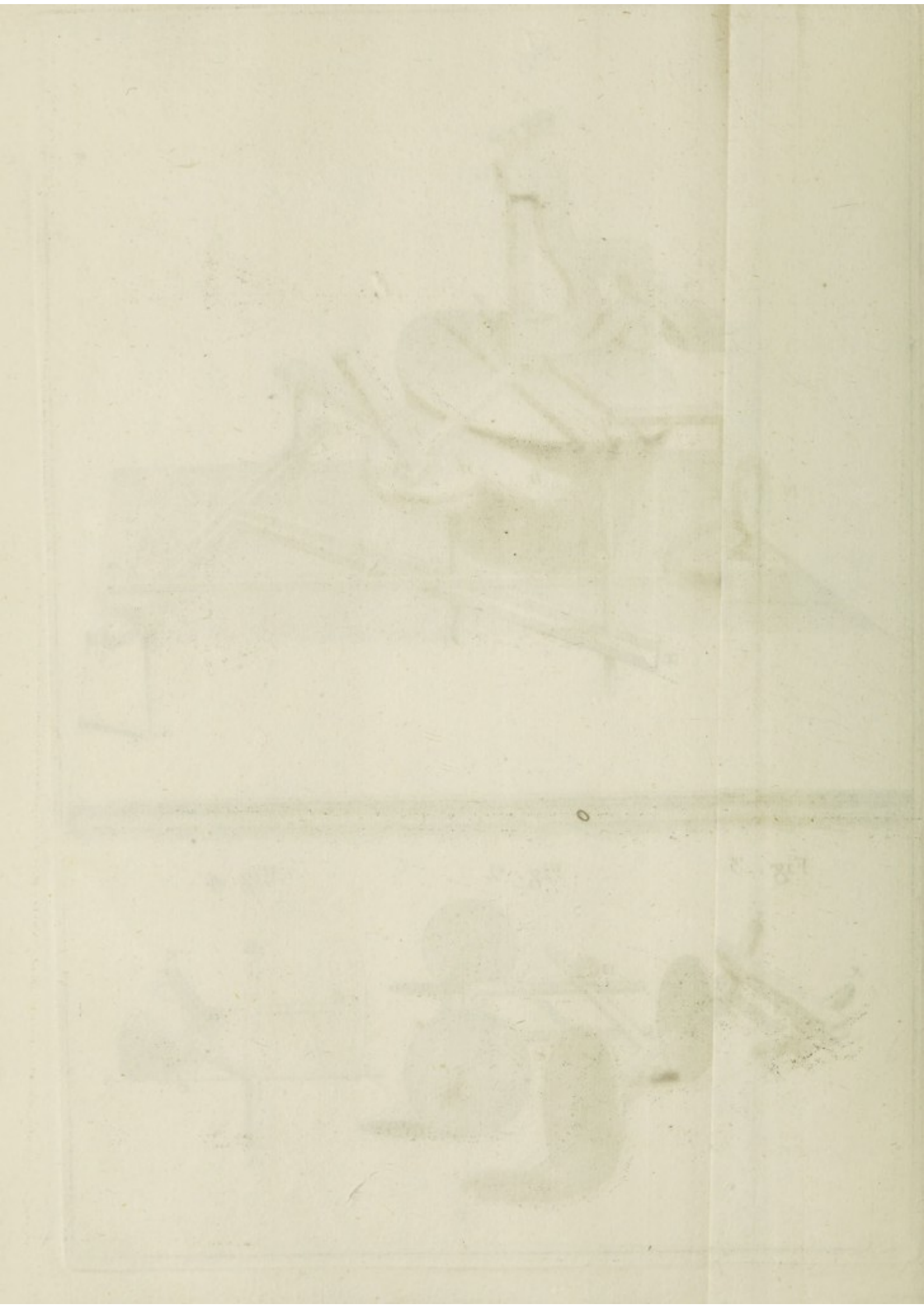


Fig. 1

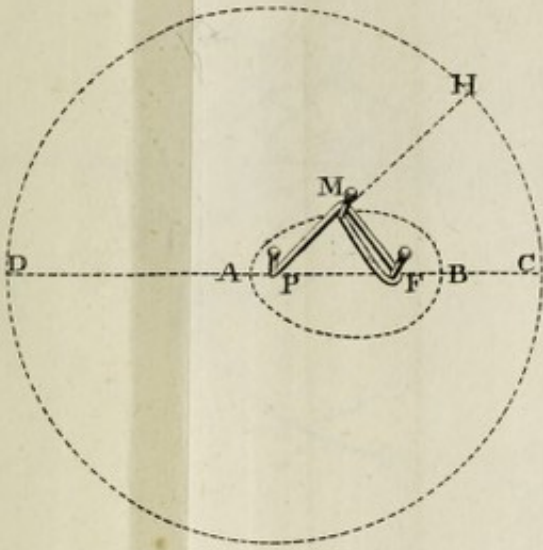


Fig. 2

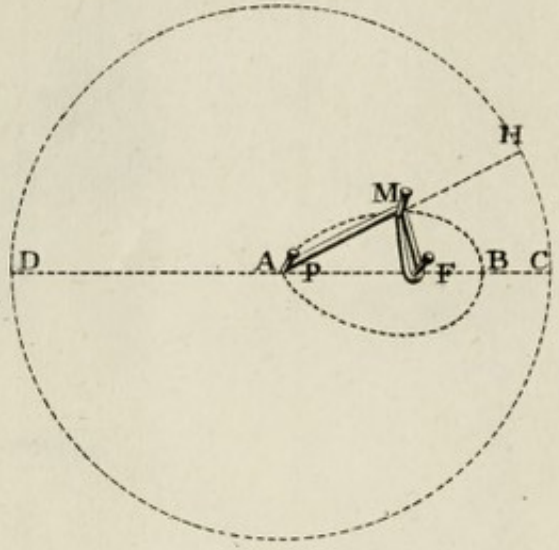


Fig. 3

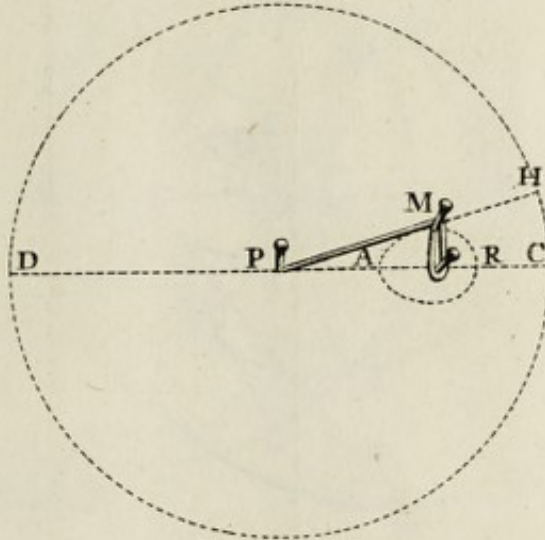


Fig. 4

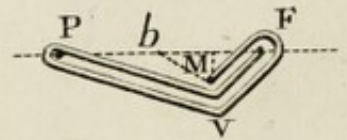


Fig. 6

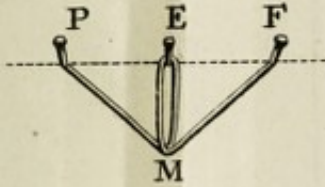


Fig. 5

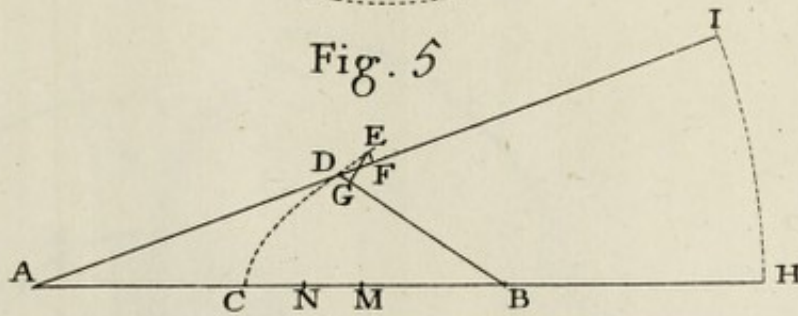


Fig. 8

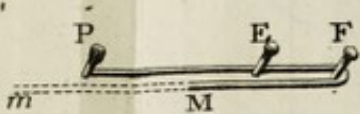


Fig. 9

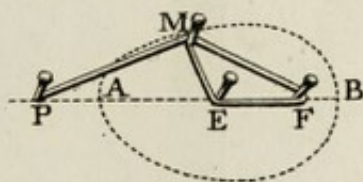
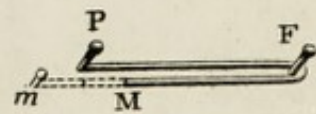


Fig. 7



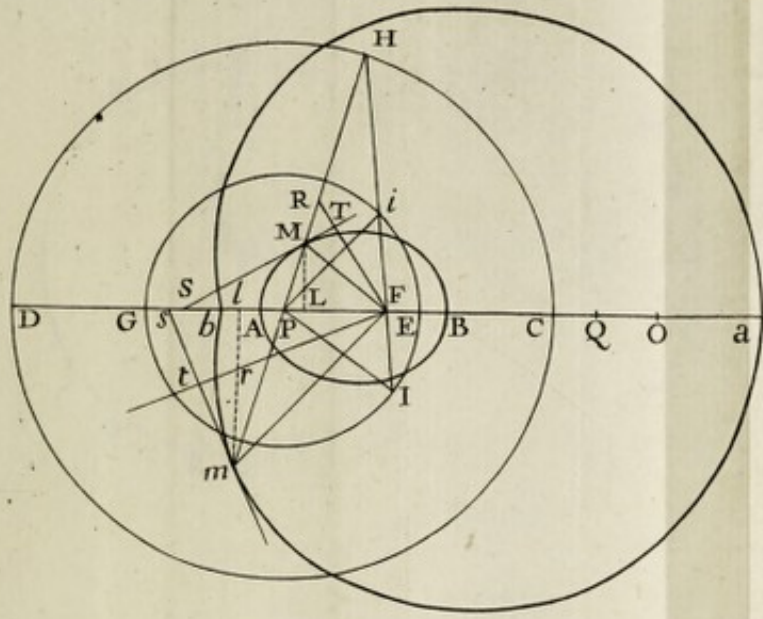


Fig. 1

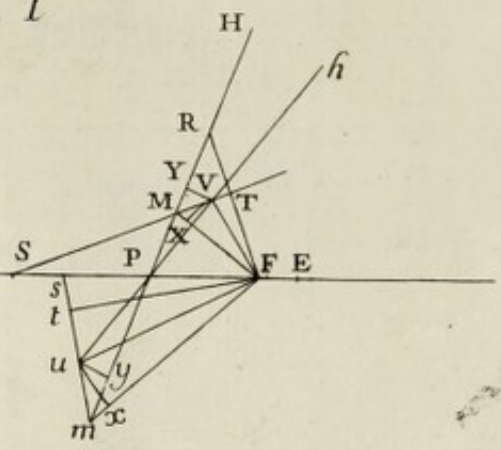


Fig. 2

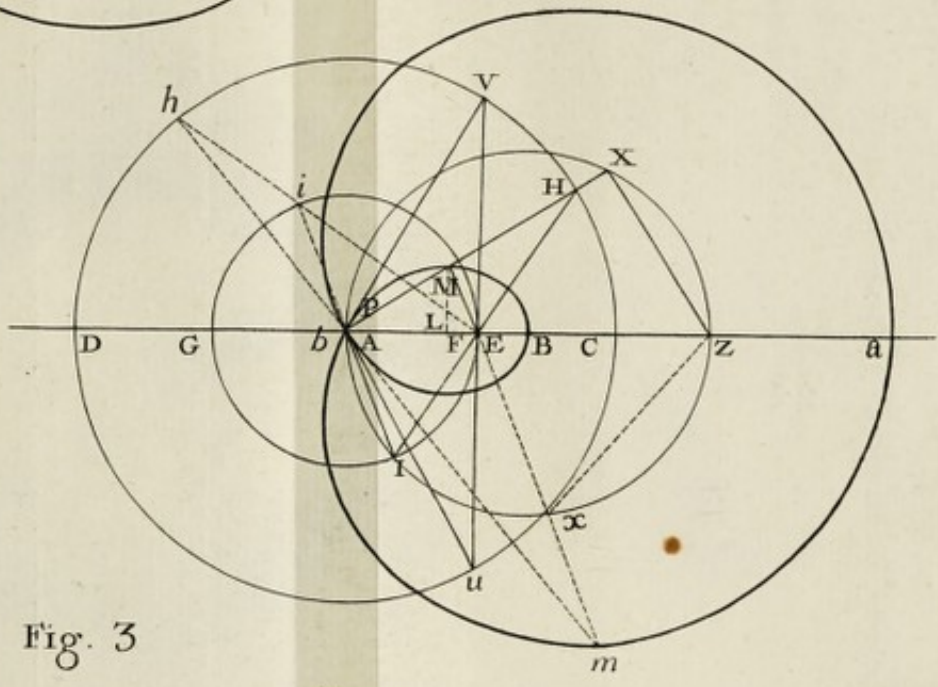
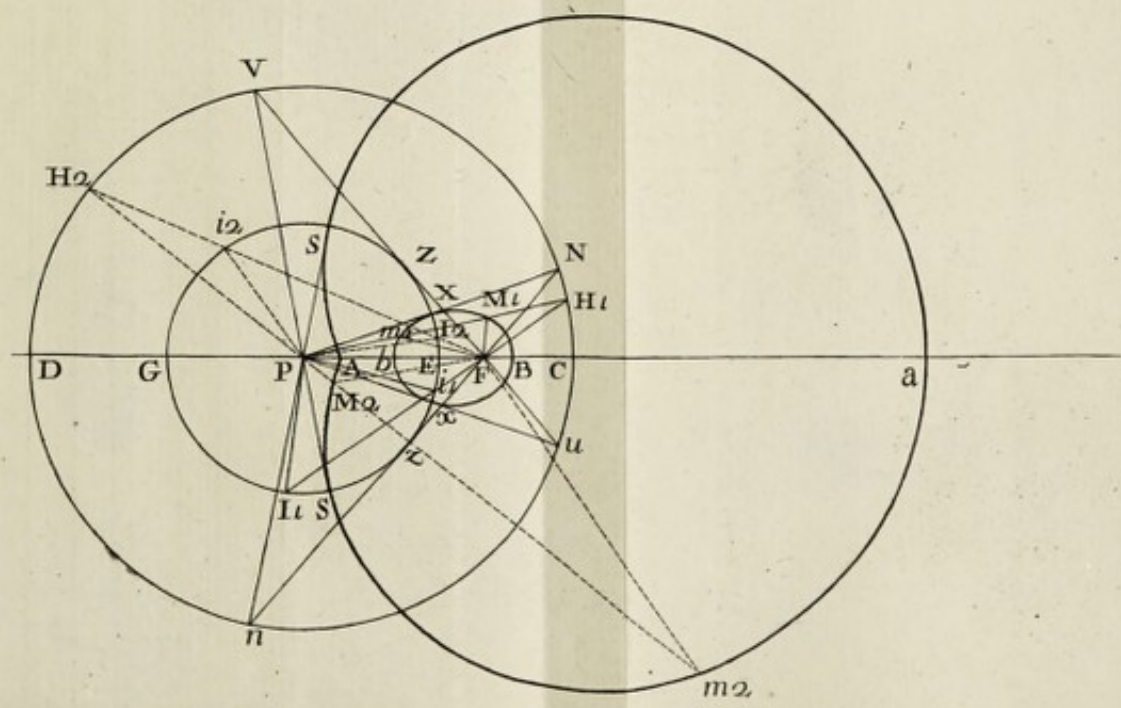


Fig. 3



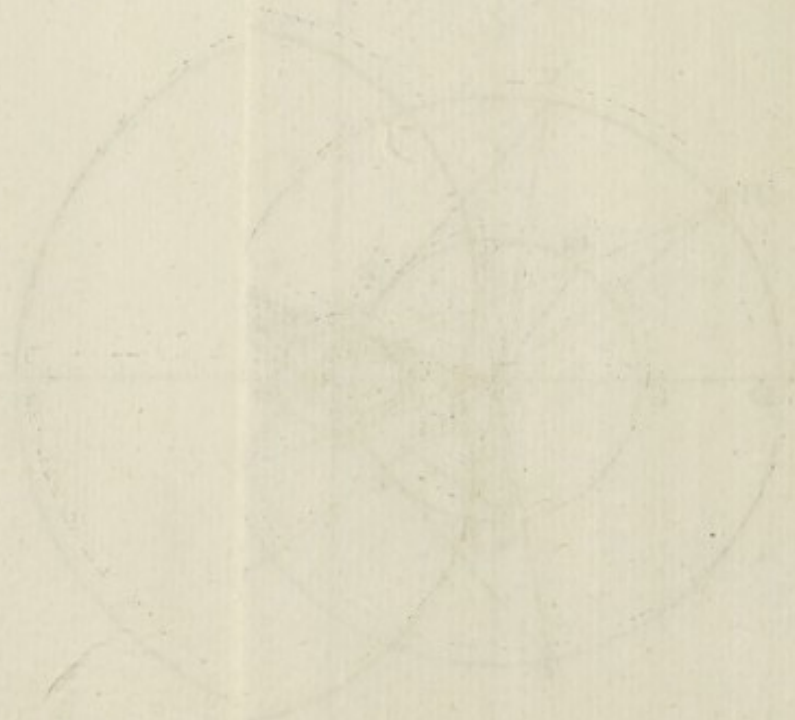
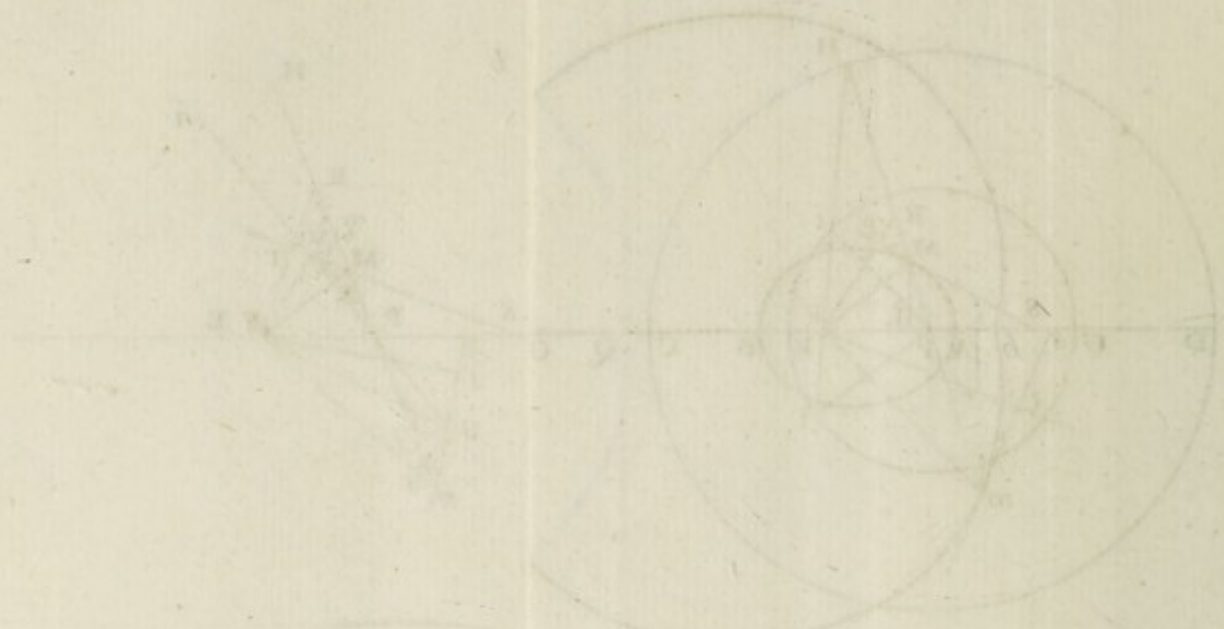


Fig. 1

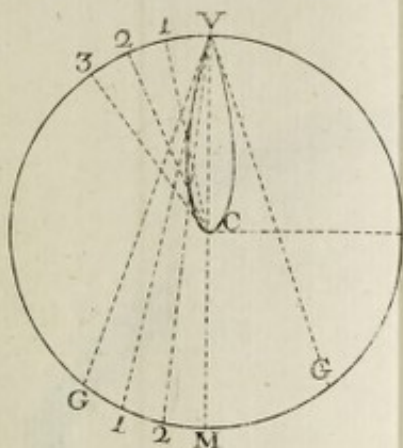


Fig. 2

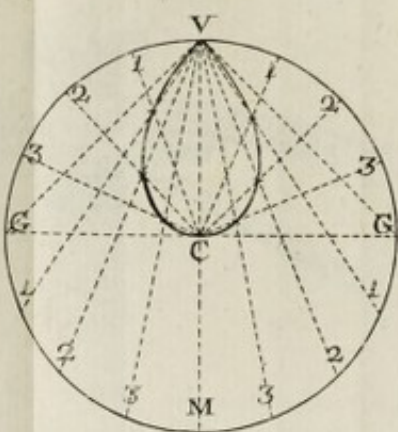


Fig. 3

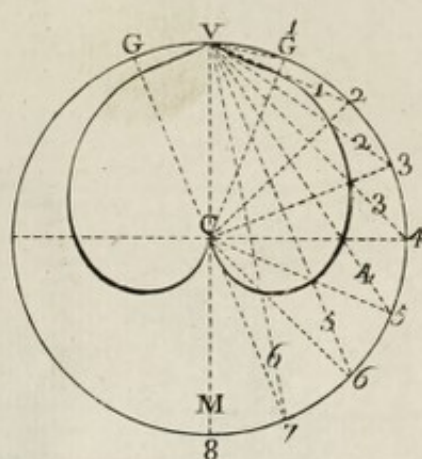


Fig. 4

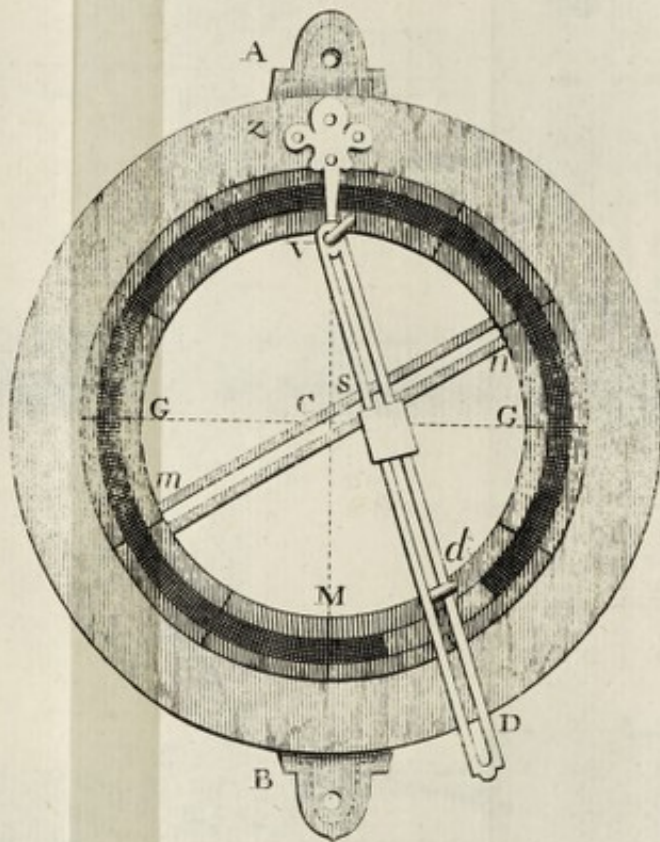


Fig. 5

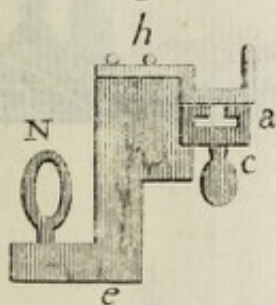


Fig. 6



Fig. 7

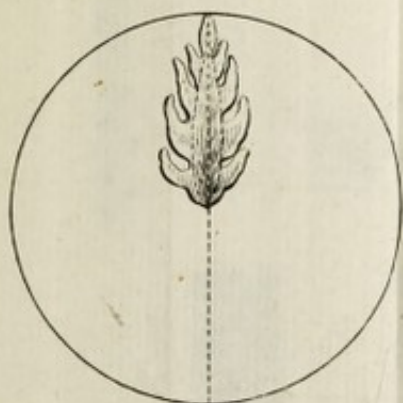


Fig. 8

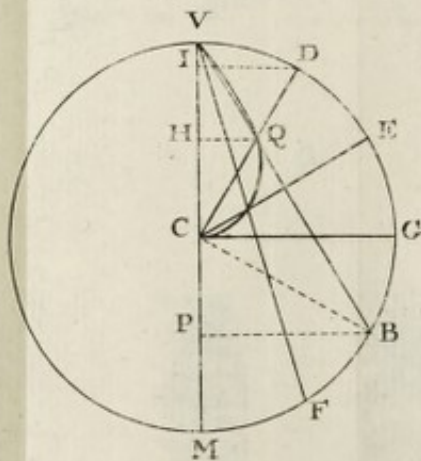
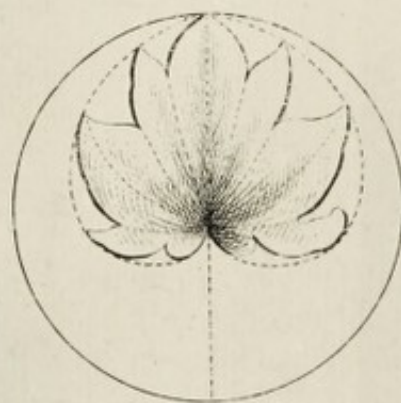
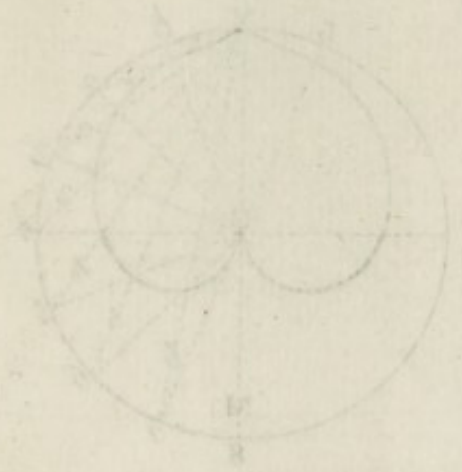


Fig. 9





Handwritten scribbles or faint text, possibly initials or a signature.

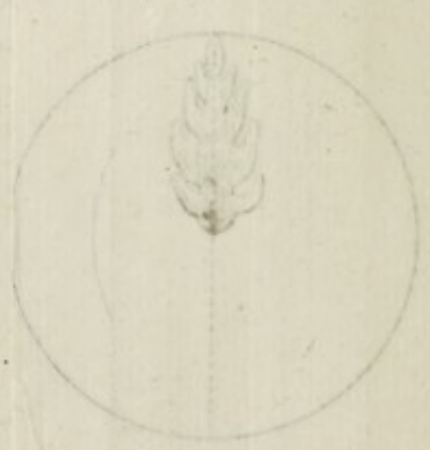
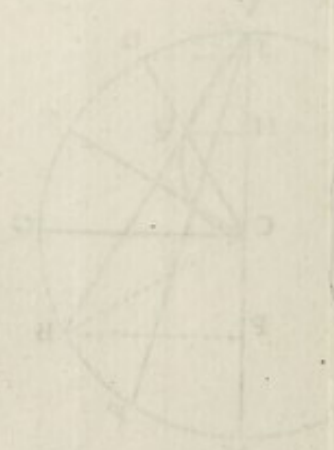
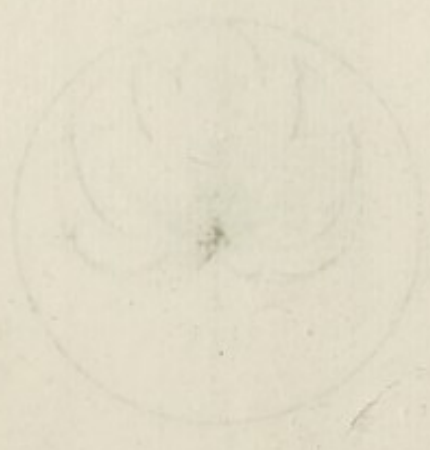
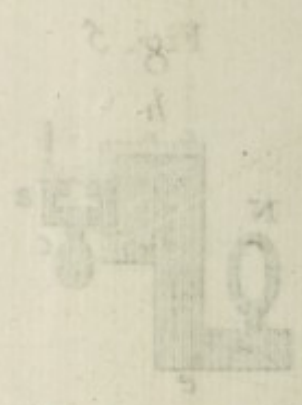
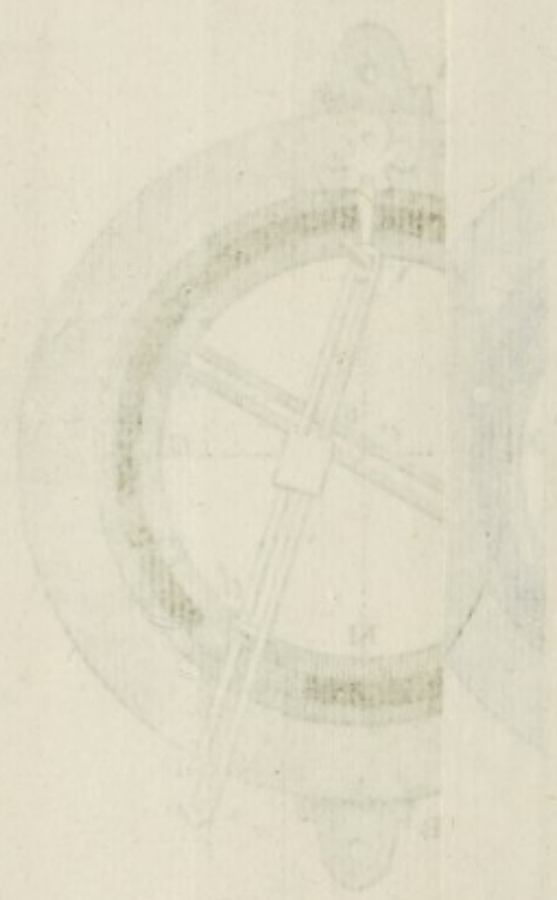


Fig. 3

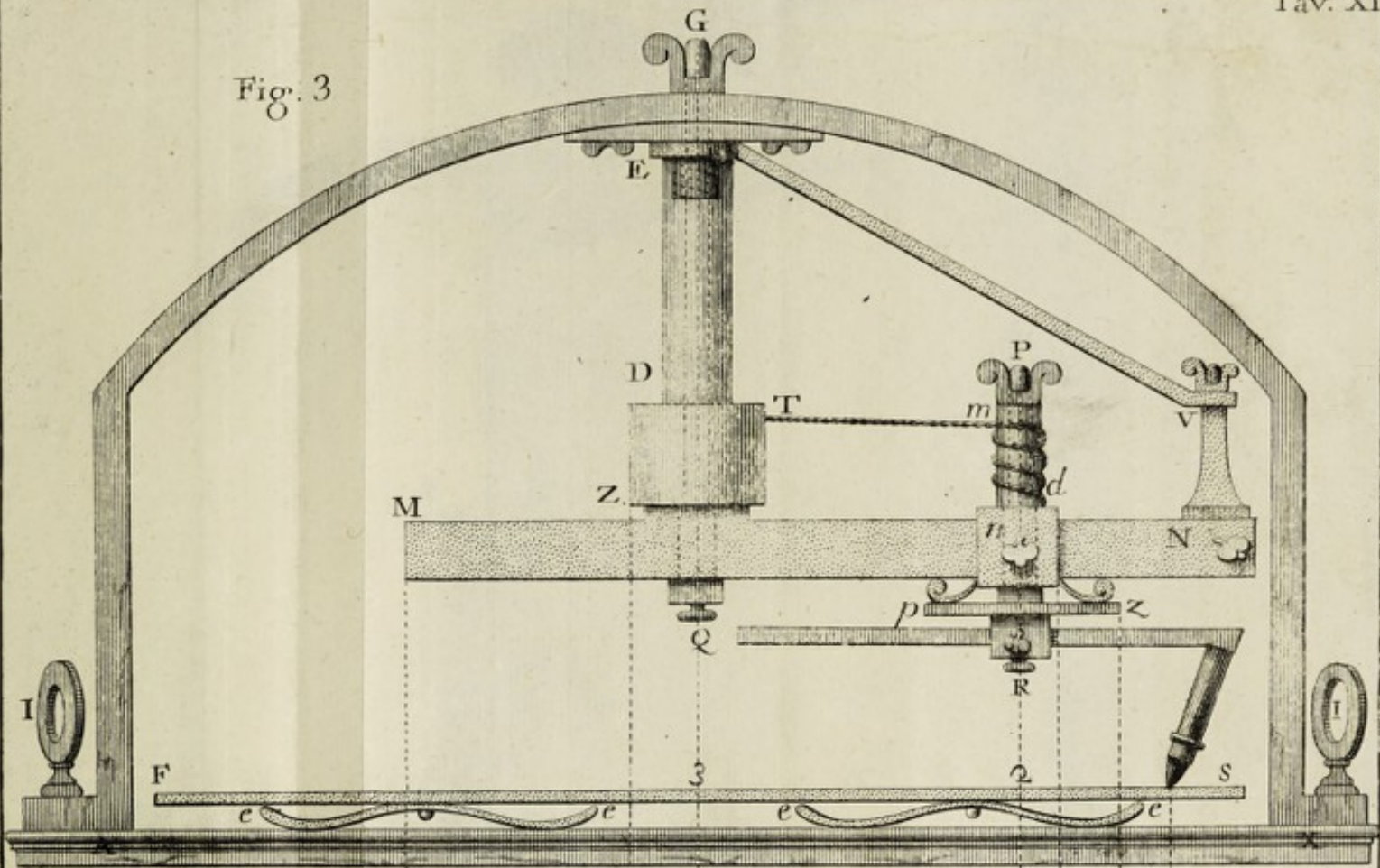


Fig. 2

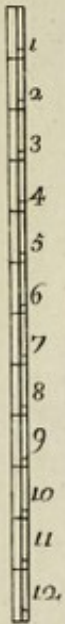


Fig. 1

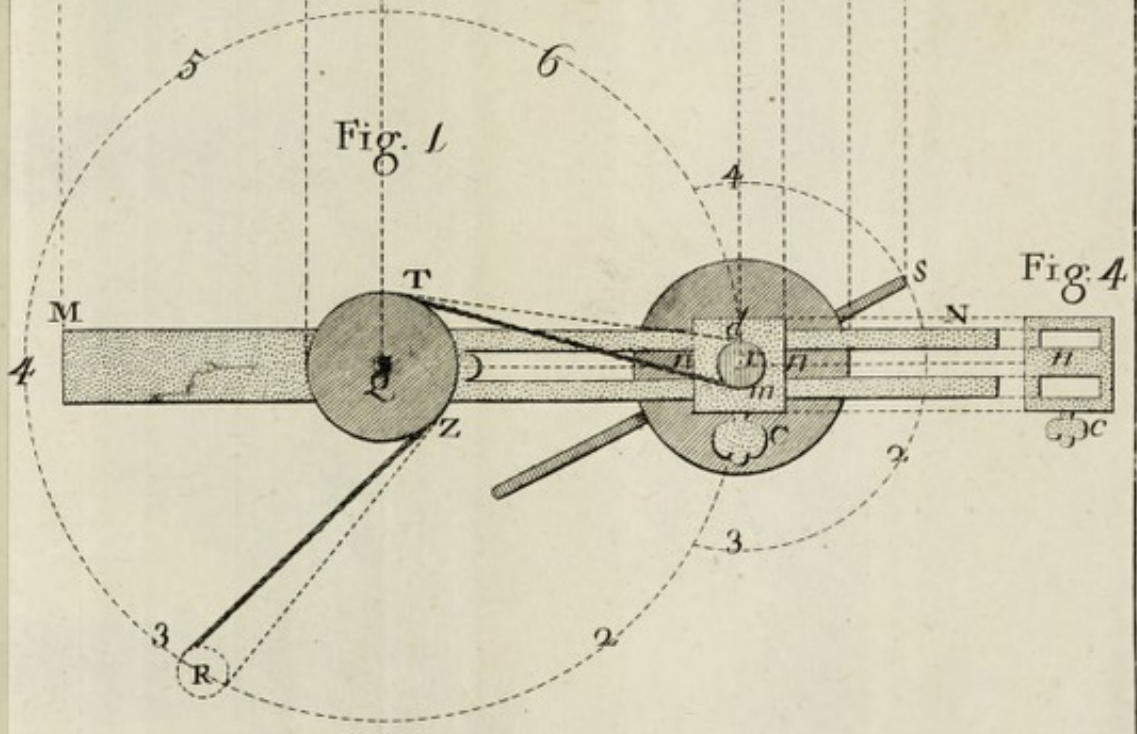
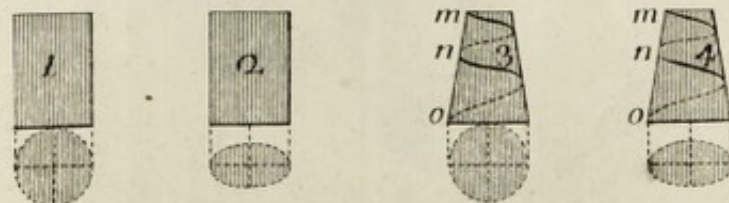
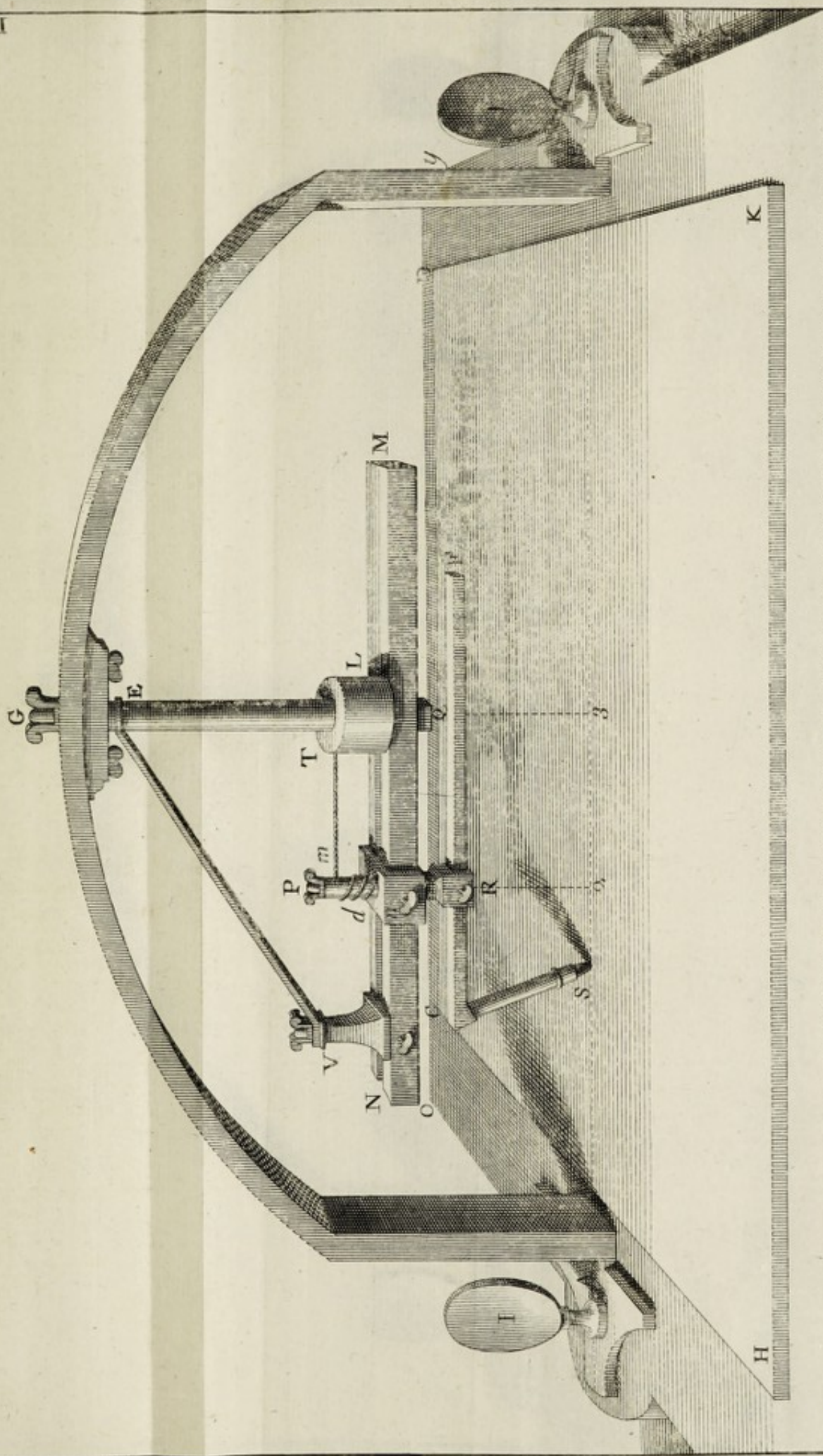
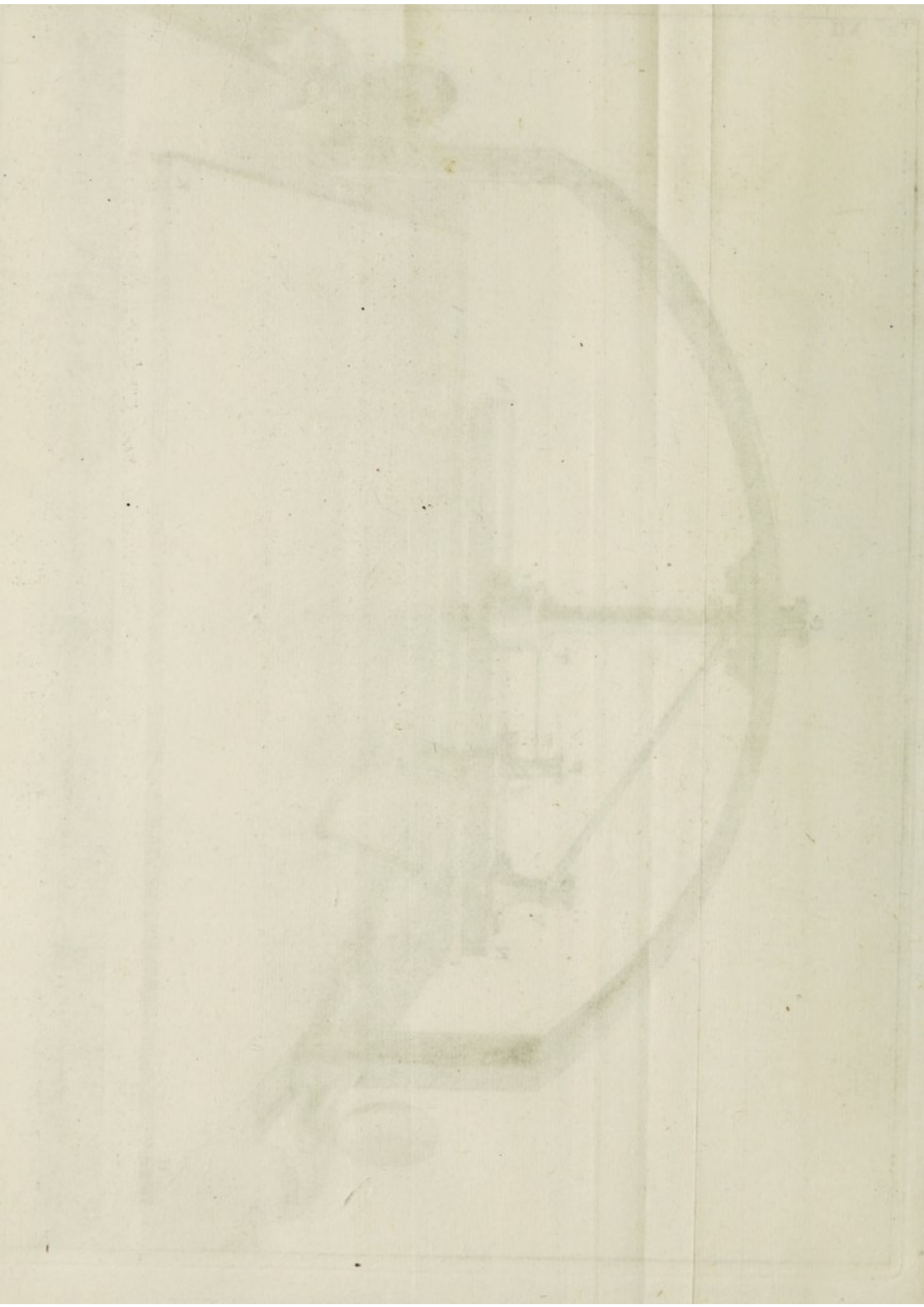


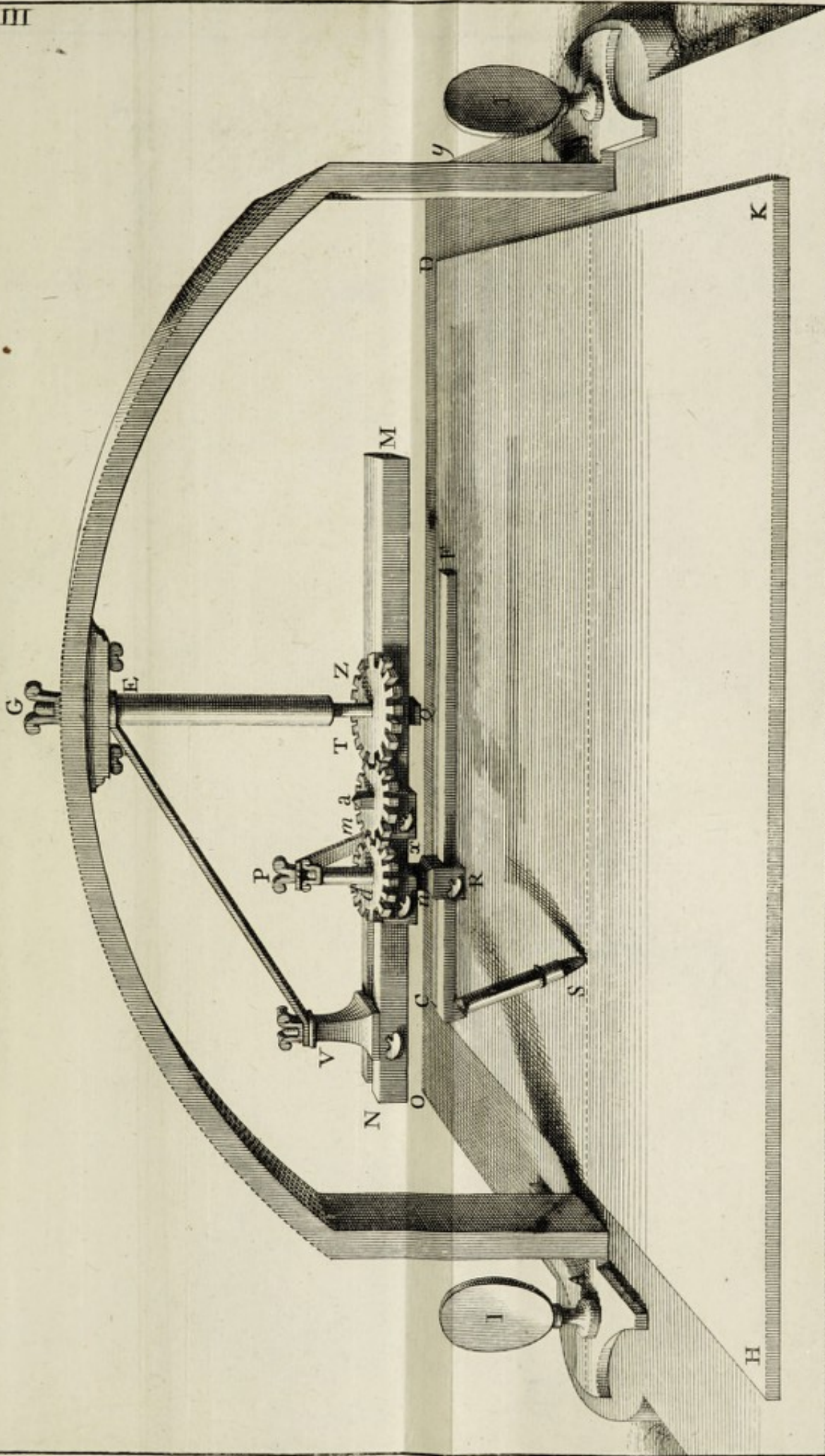
Fig. 4

Fig. 5









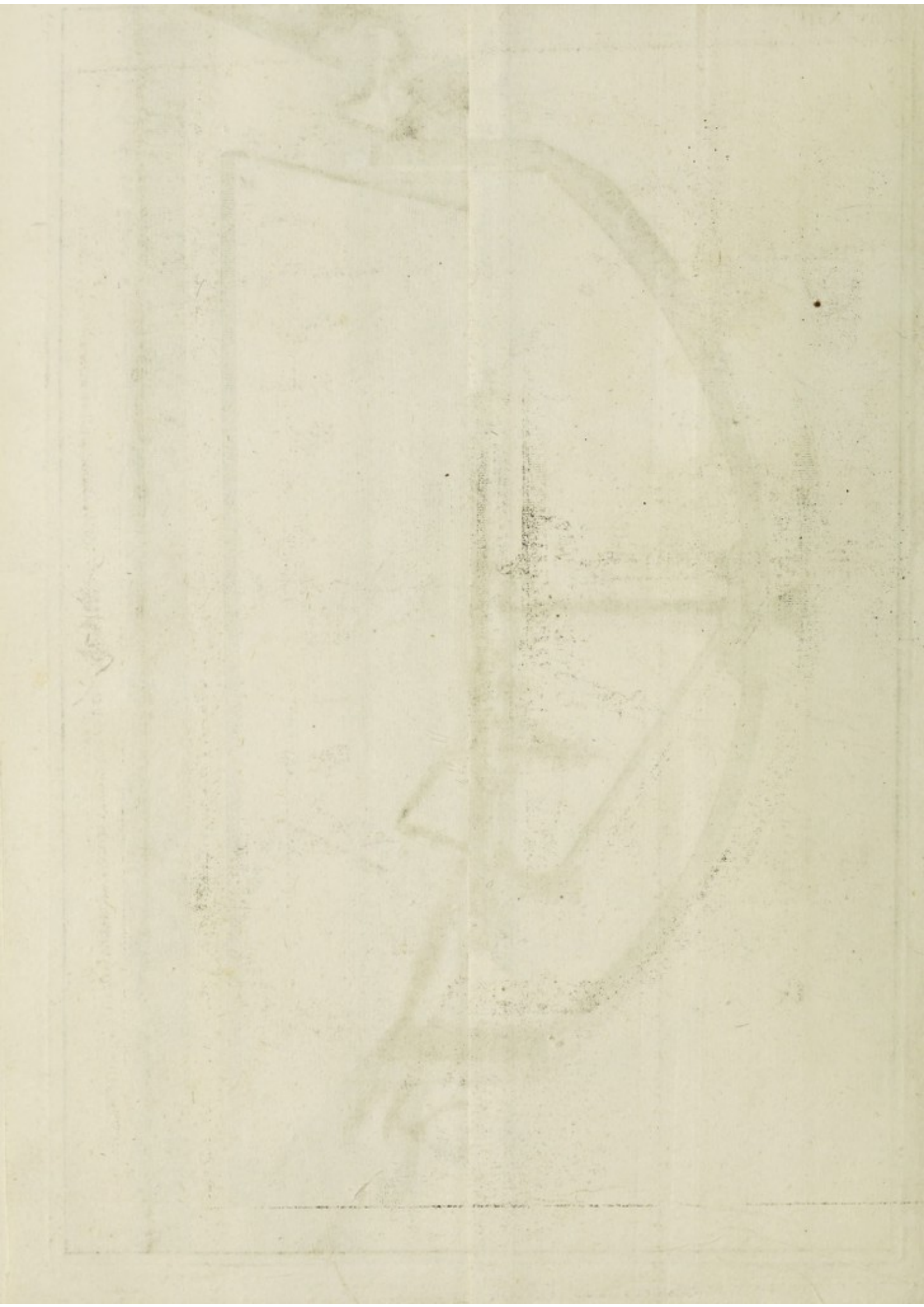


Fig. 1

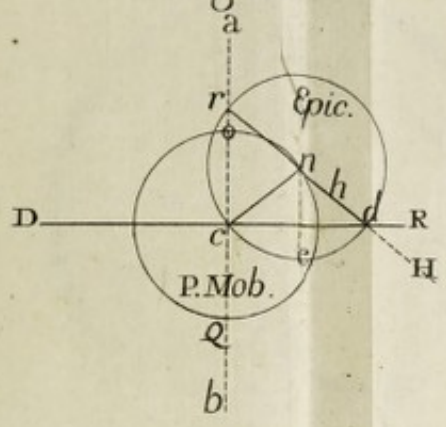


Fig. 4

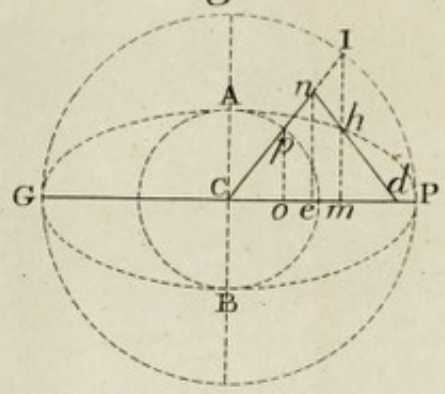


Fig. 6

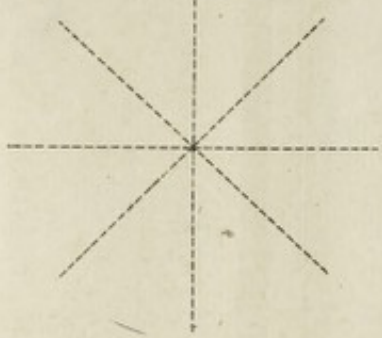


Fig. 2

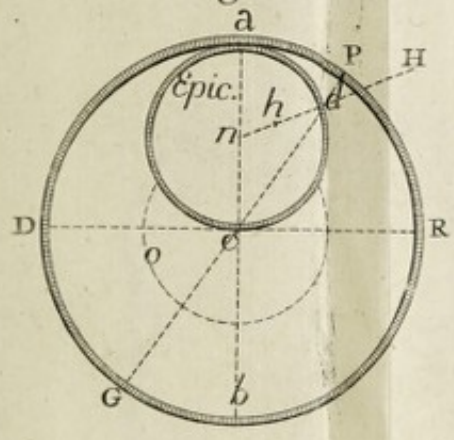


Fig. 5

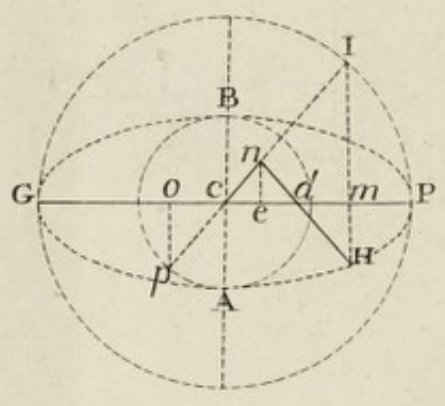


Fig. 7

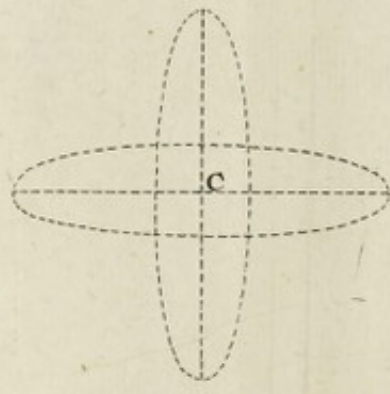


Fig. 3

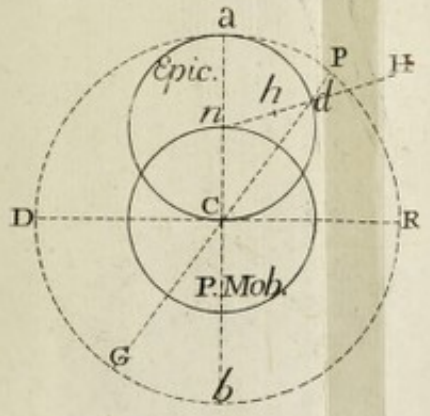


Fig. 9

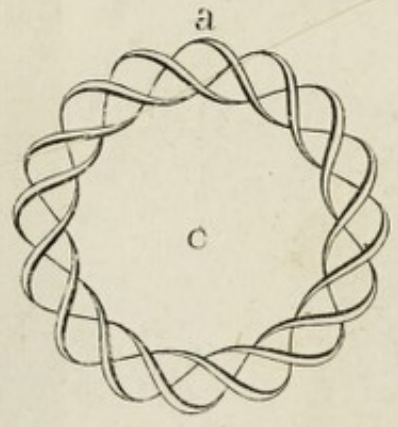
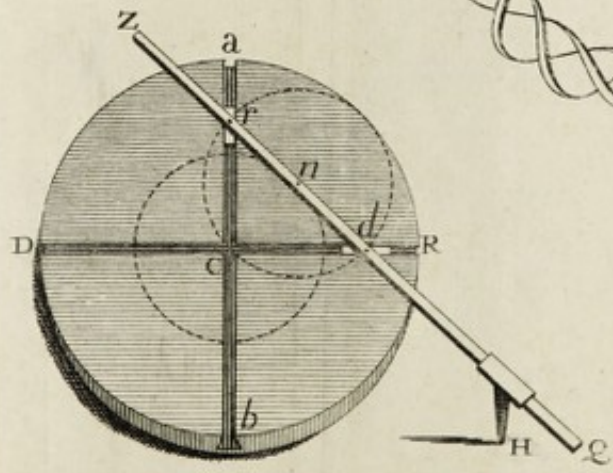


Fig. 8



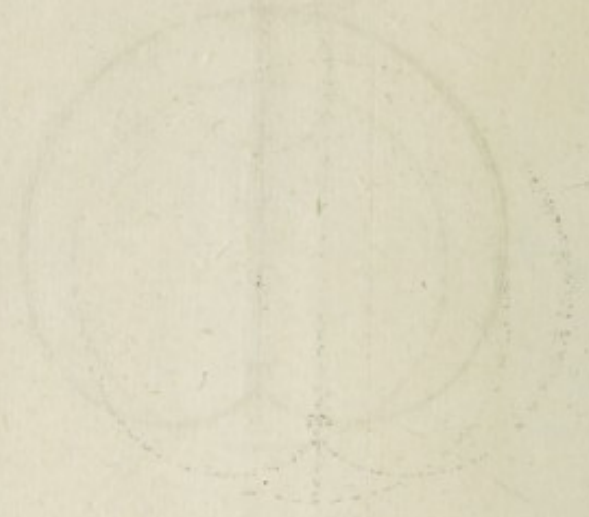


Fig 1



Fig 2

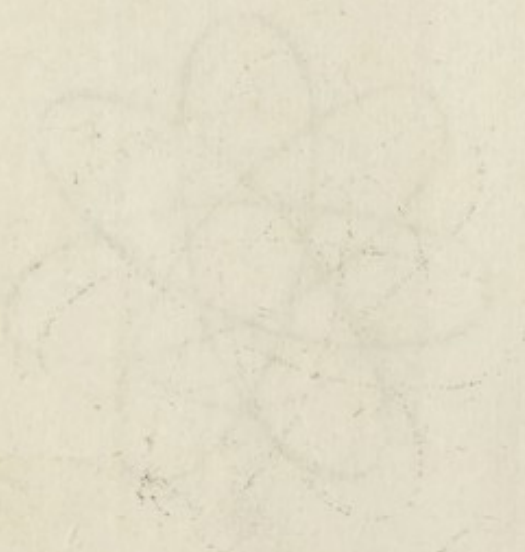


Fig. 7

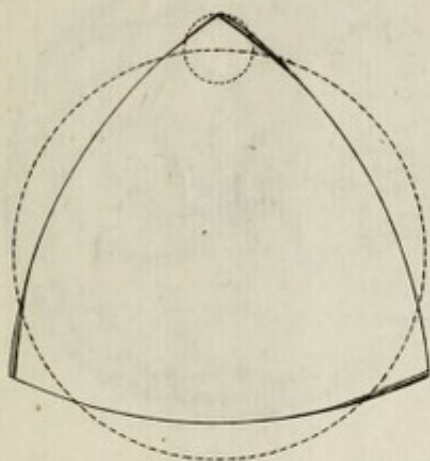


Fig. 8

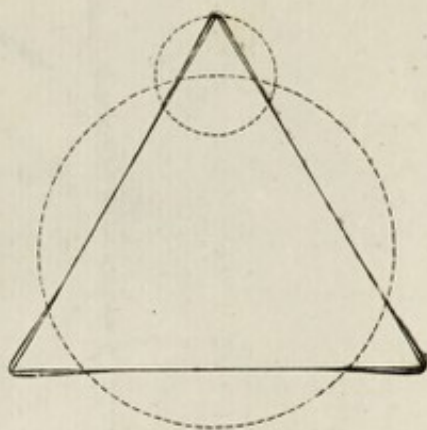


Fig. 9

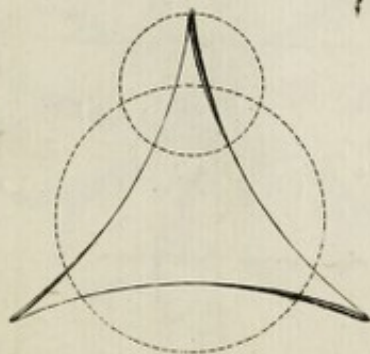


Fig. 10

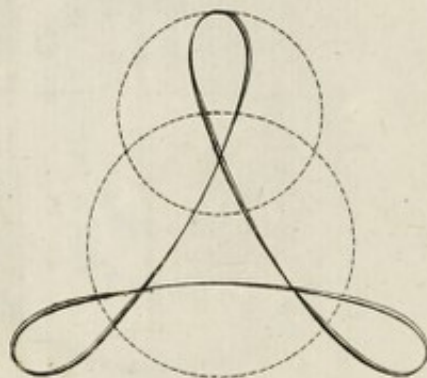


Fig. 11

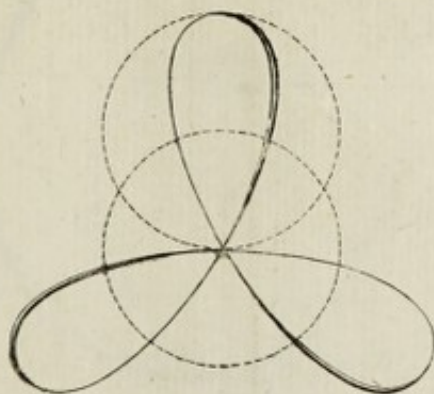


Fig. 12

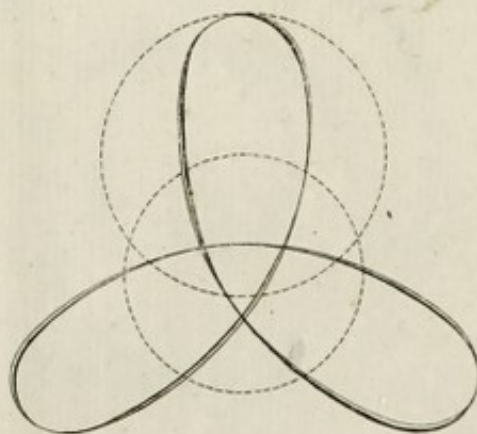


Fig 8

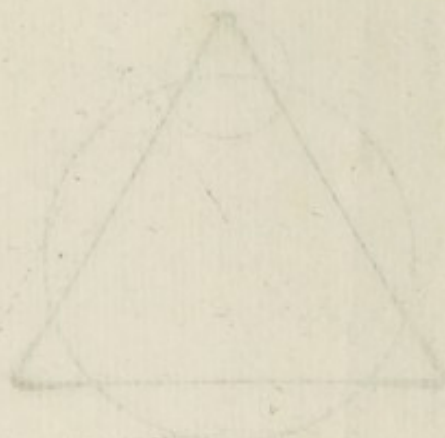


Fig 7

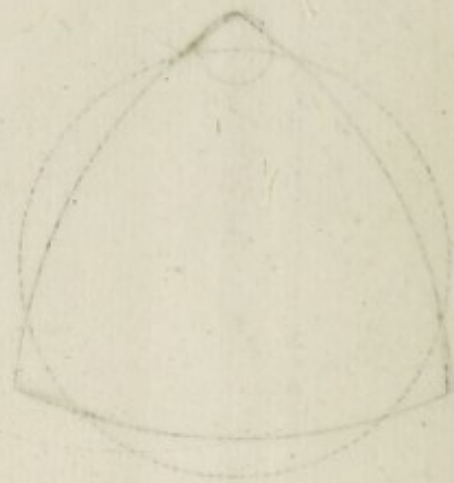


Fig 10

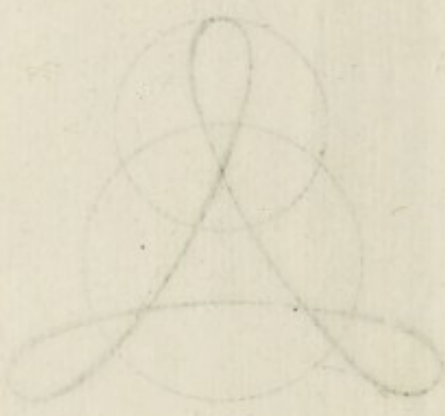


Fig 9



Fig 11

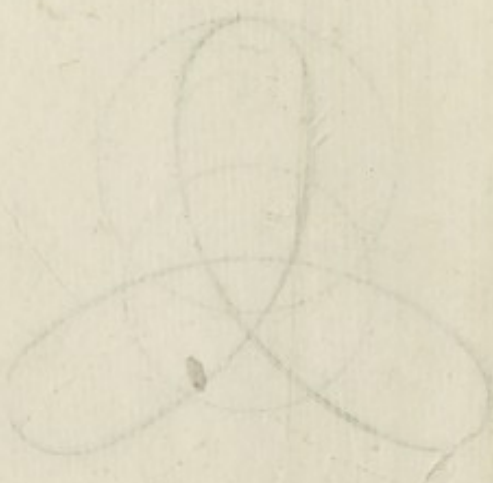


Fig 12



Fig. 13

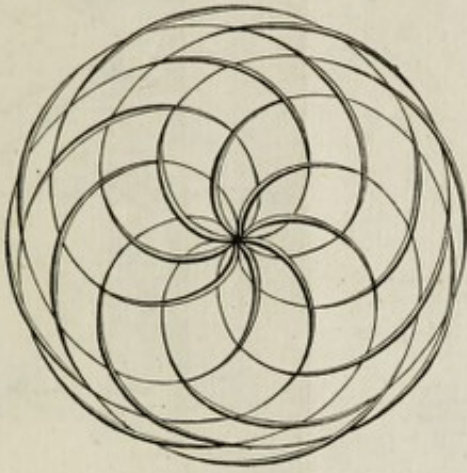


Fig. 14

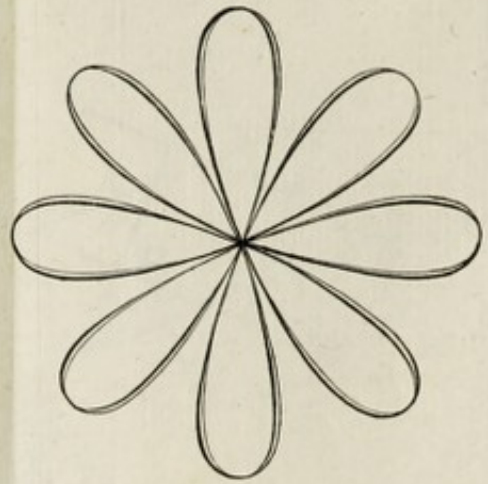


Fig. 15

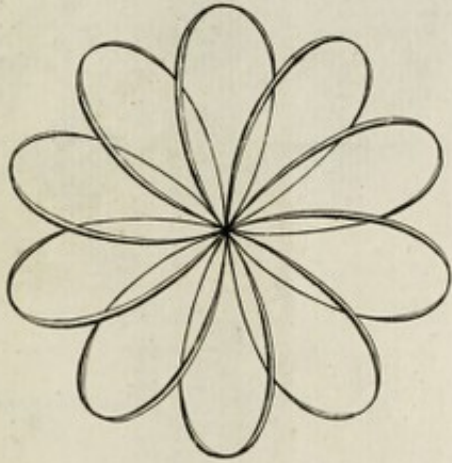


Fig. 16

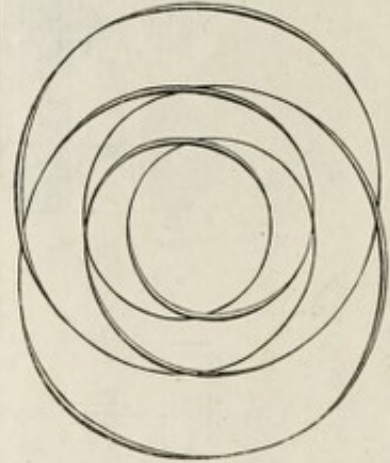


Fig. 17

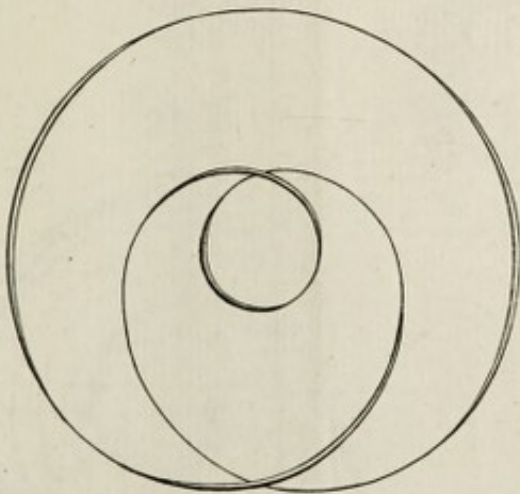


Fig. 18

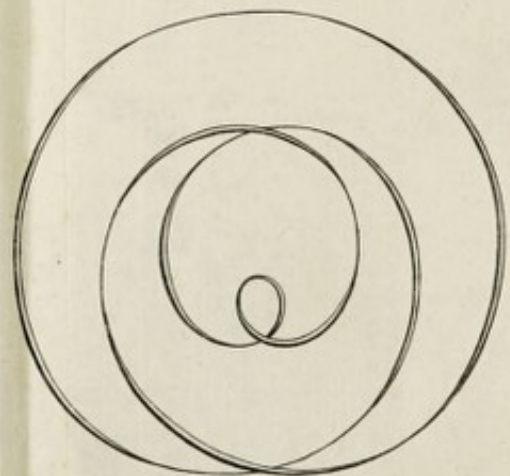


Fig. 13

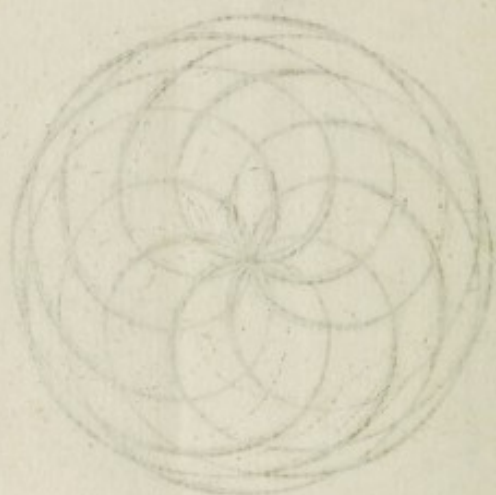


Fig. 14



Fig. 15



Fig. 16



Fig. 17

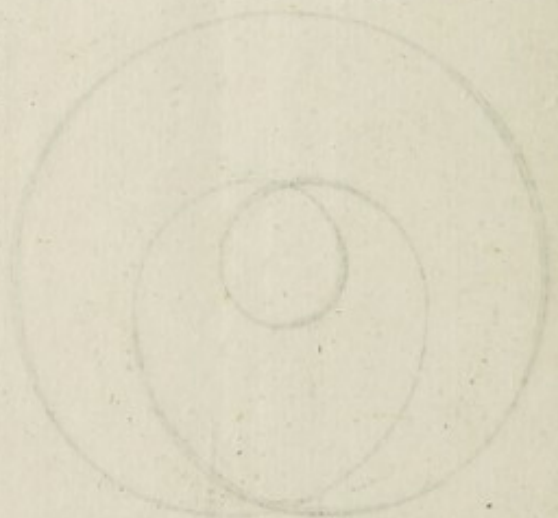


Fig. 18



Fig. 2

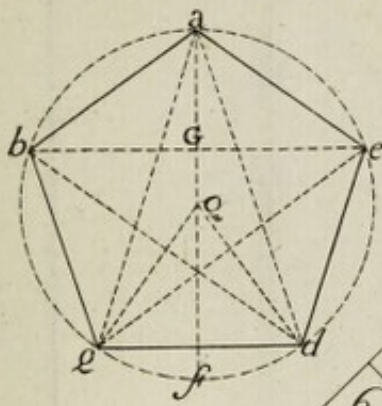


Fig. 1

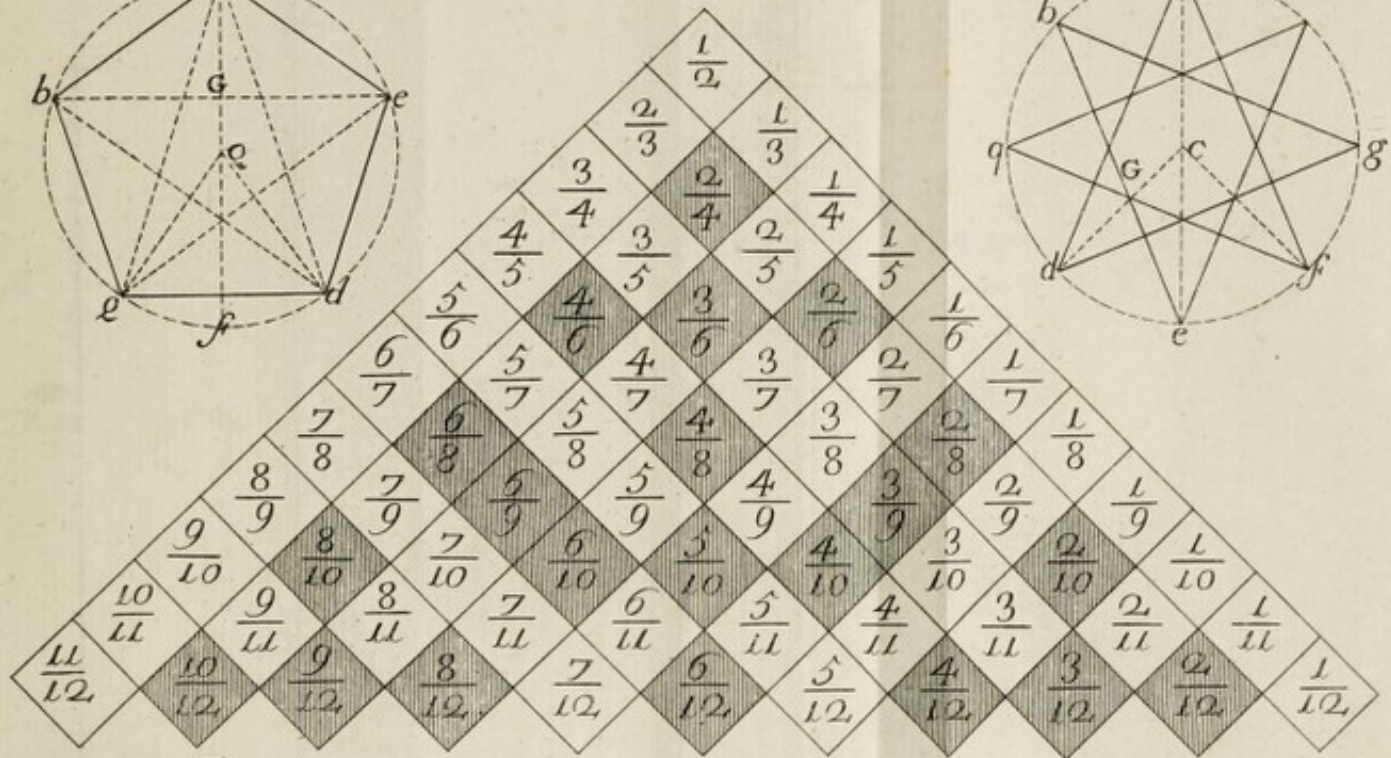


Fig. 3

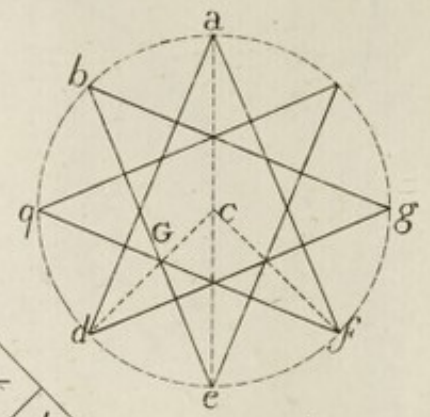


Fig. 4

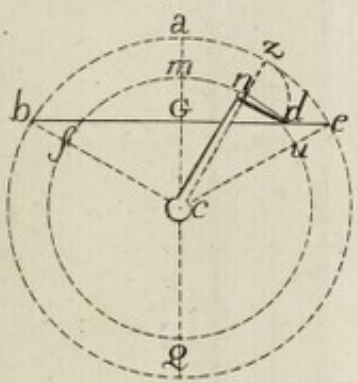


Fig. 5

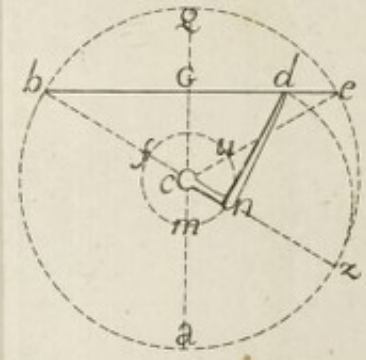


Fig. 6

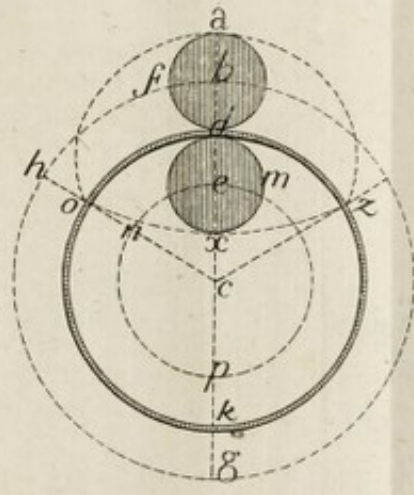


Fig. 7

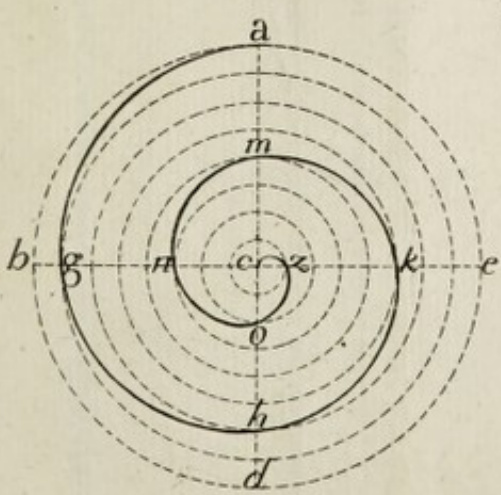


Fig. 8

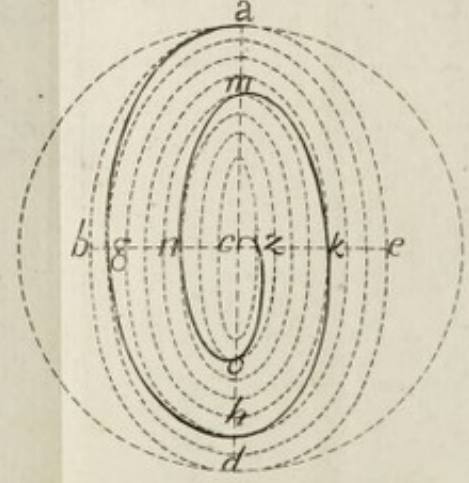


Fig. 1

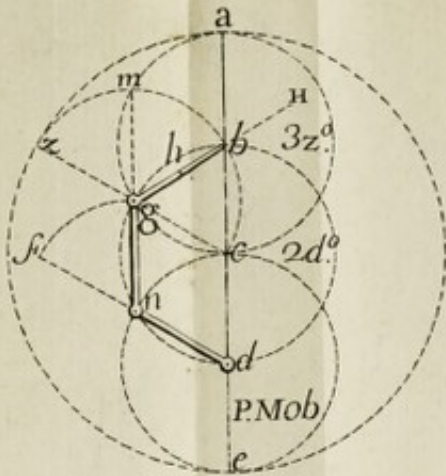


Fig. 2

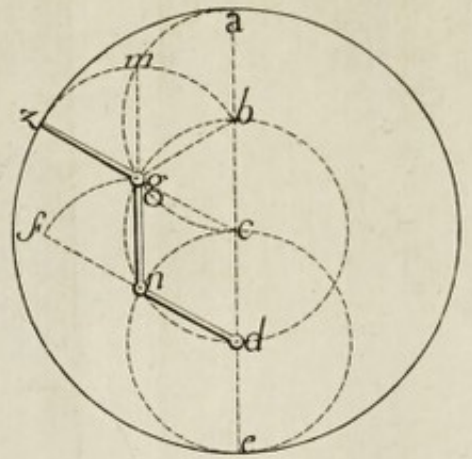


Fig. 3

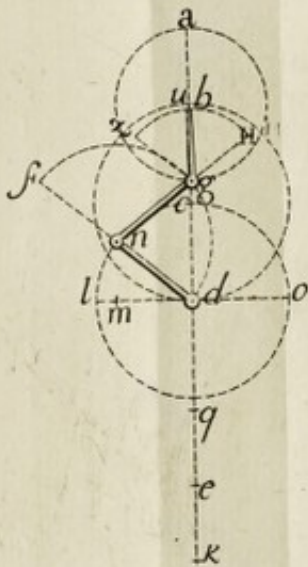


Fig. 4

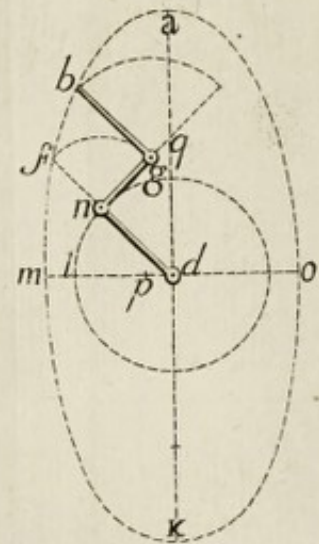


Fig. 5

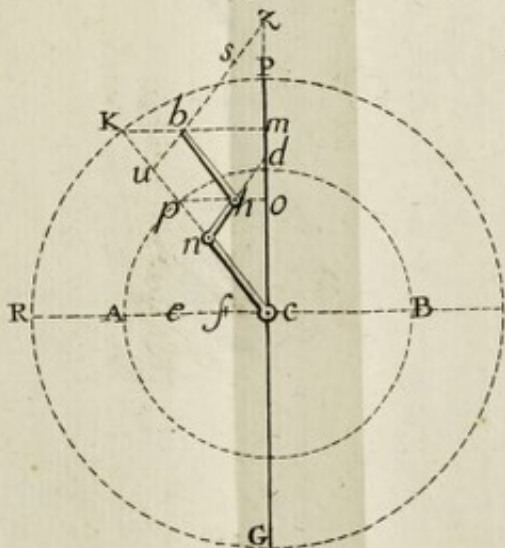


Fig. 6

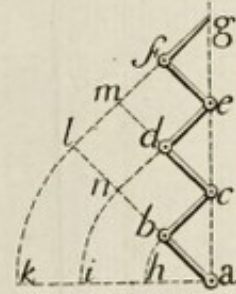


Fig 3

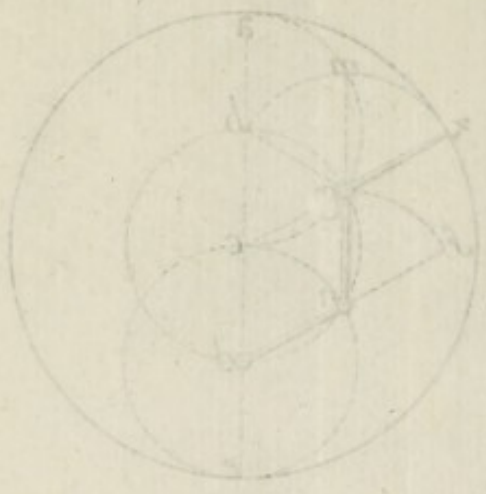


Fig 4



Fig 5



Fig. 7

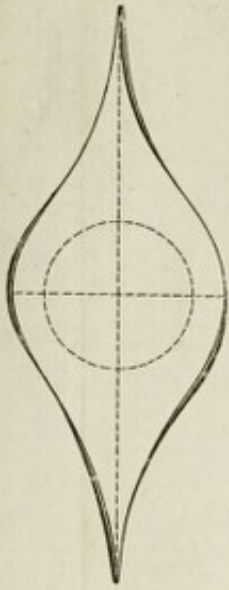


Fig. 8

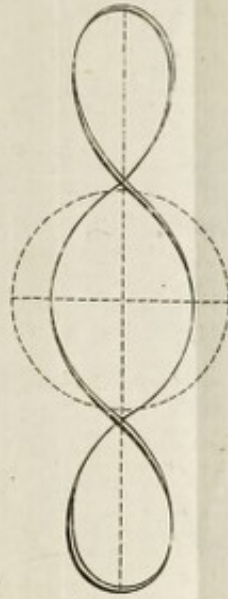


Fig. 9

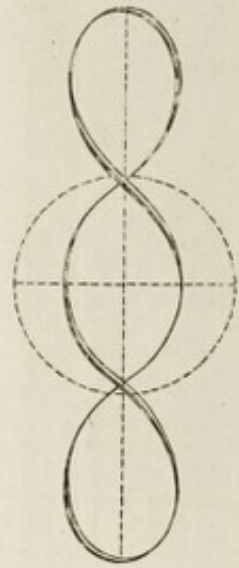


Fig. 10

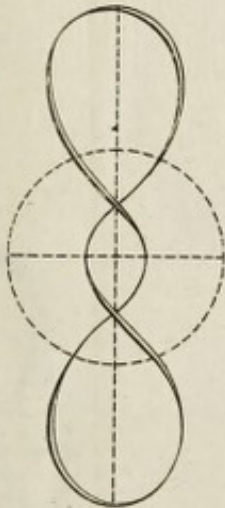


Fig. 11

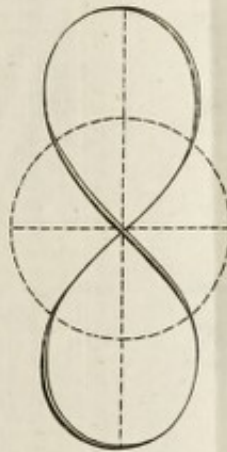


Fig. 12

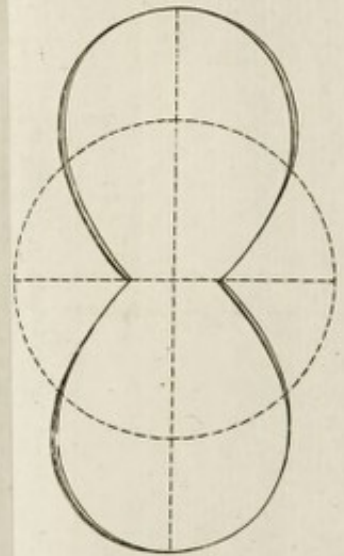


Fig. 13

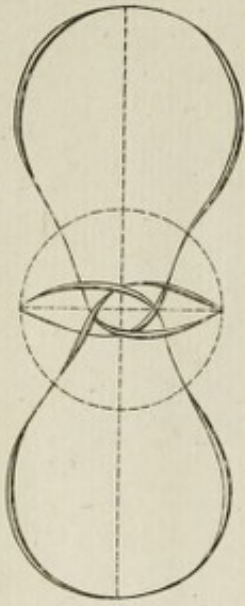


Fig. 14

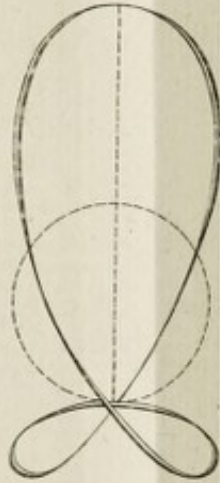


Fig. 15

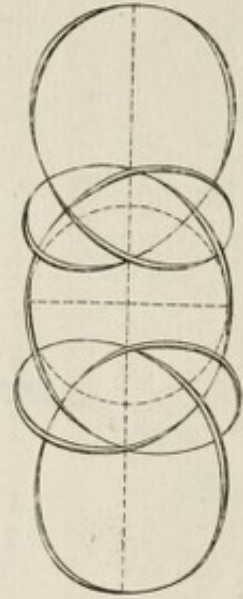


Fig. 16

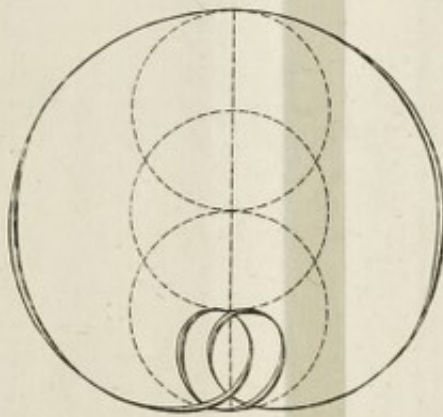


Fig. 17

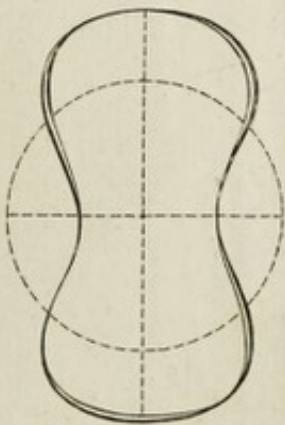


Fig. 18

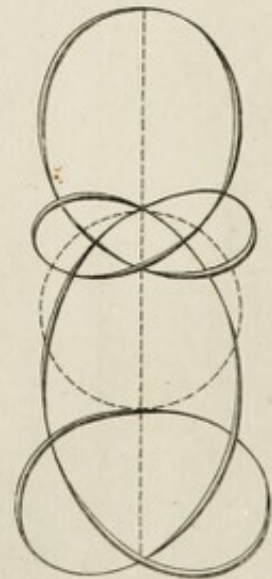
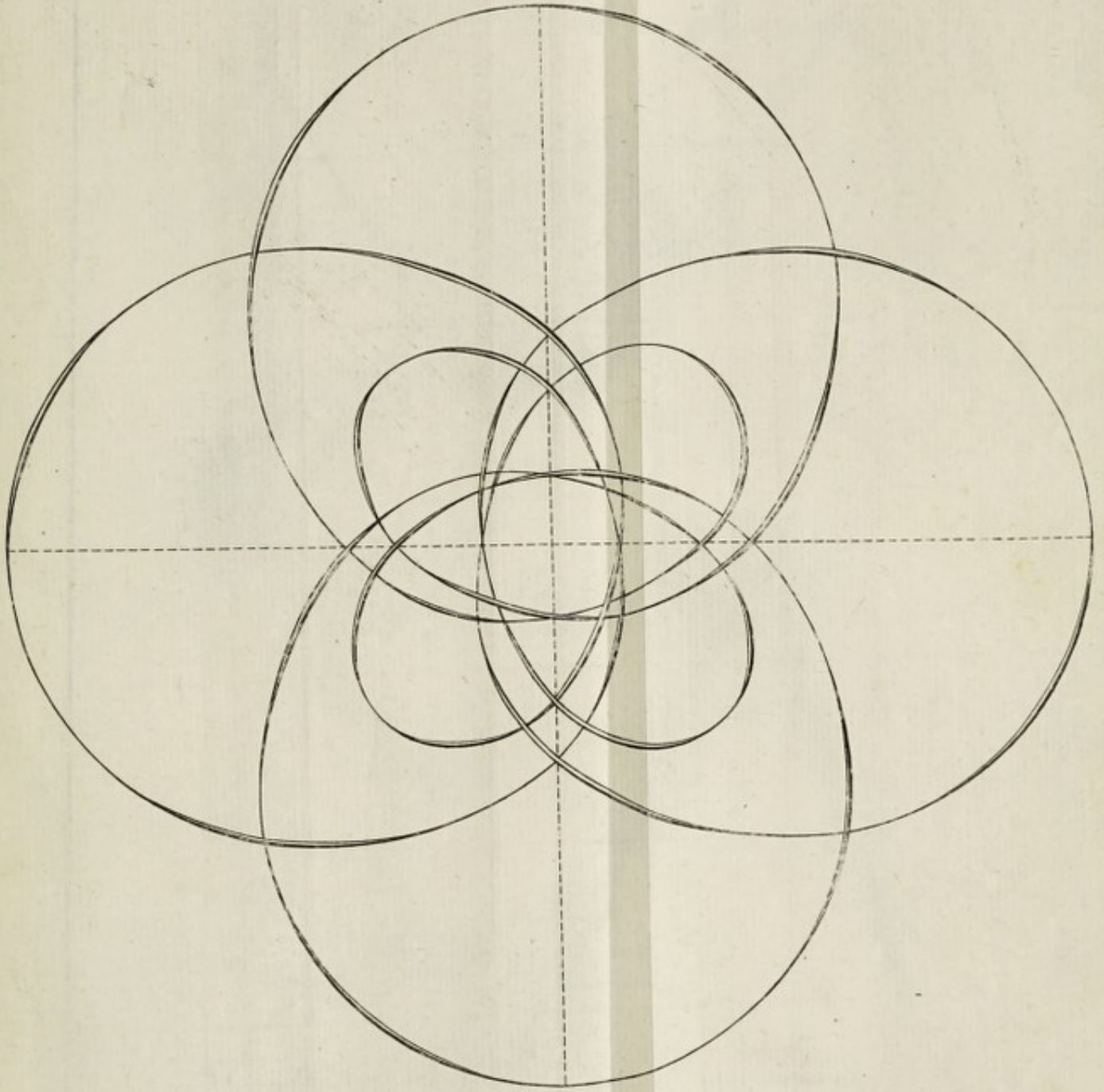
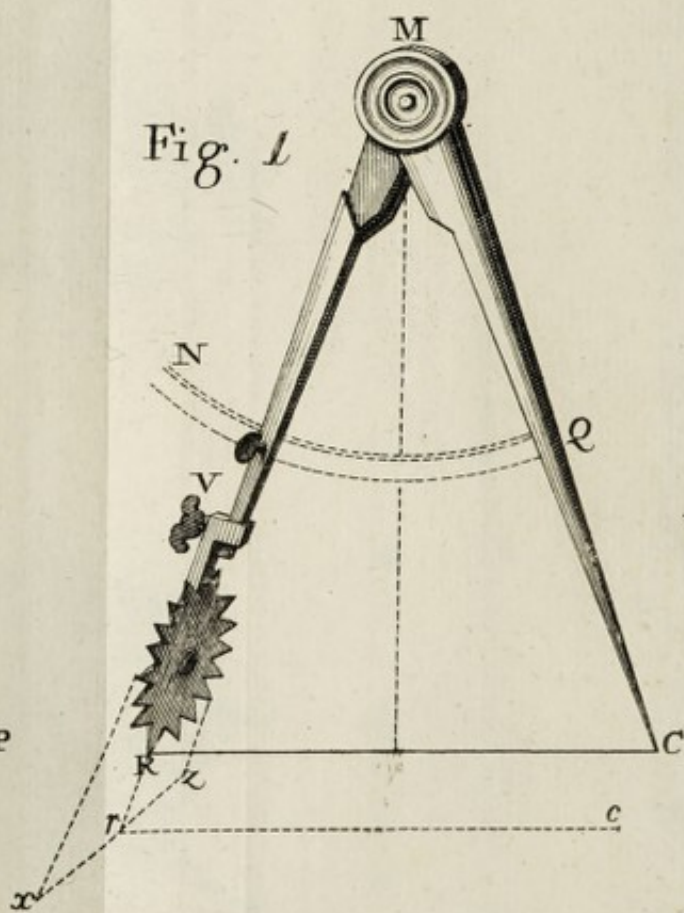
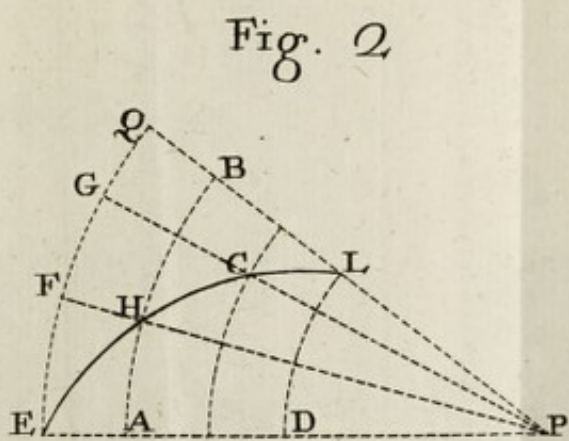
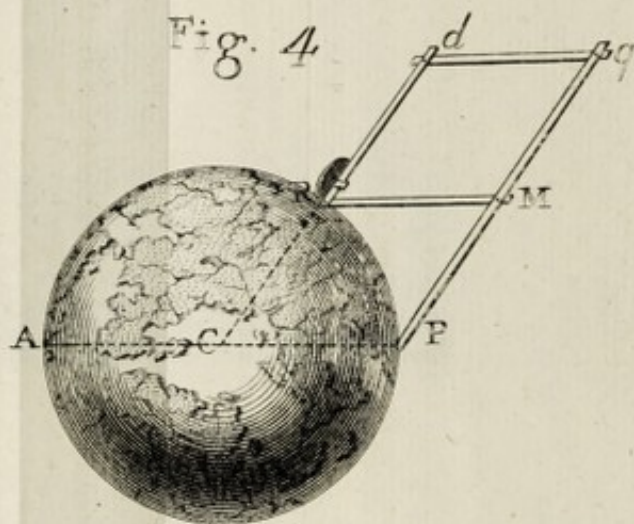
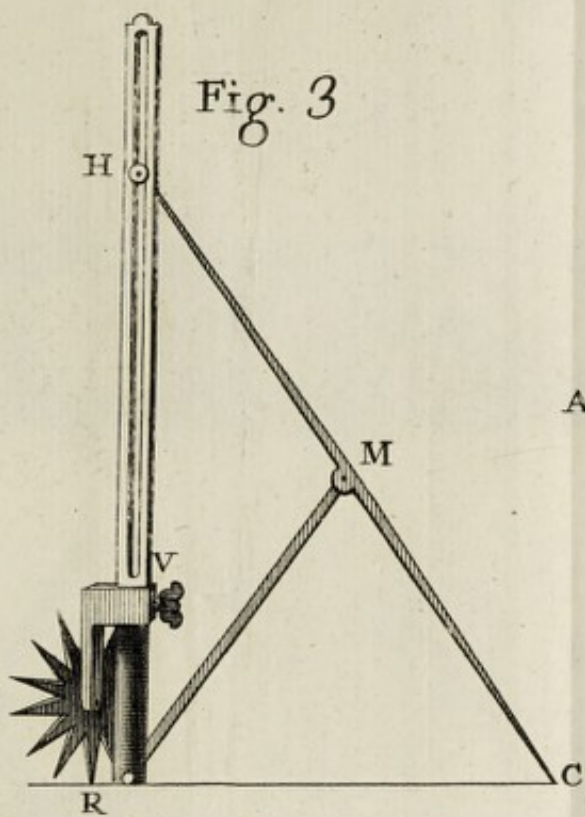


Fig. 19





5

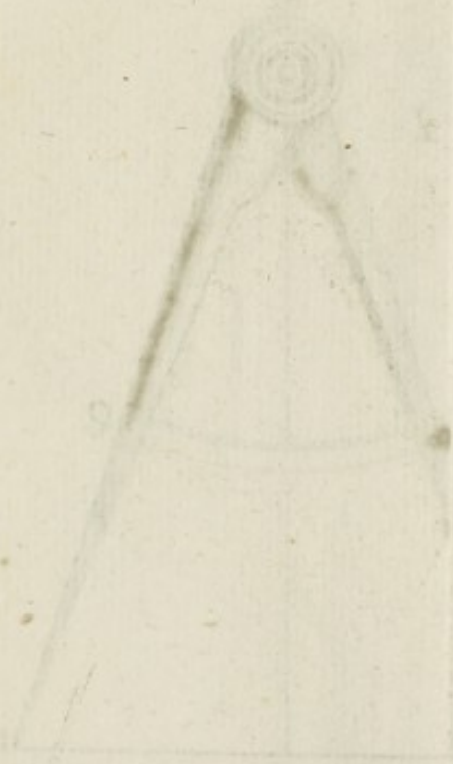


Fig 5



Fig. 3

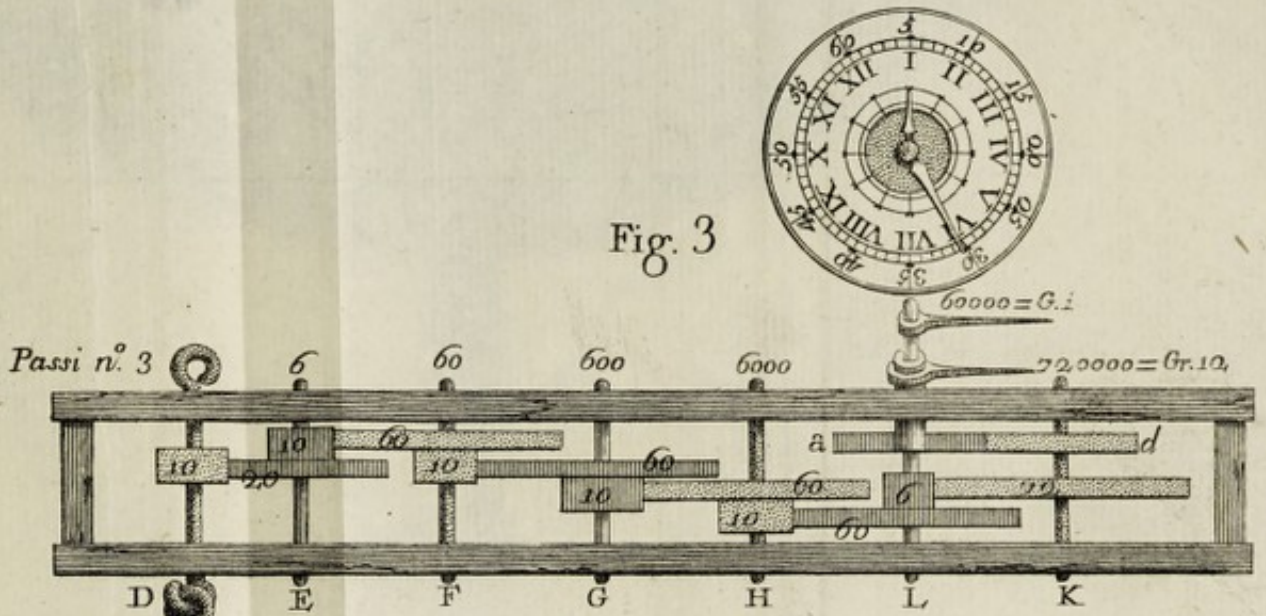


Fig. 4

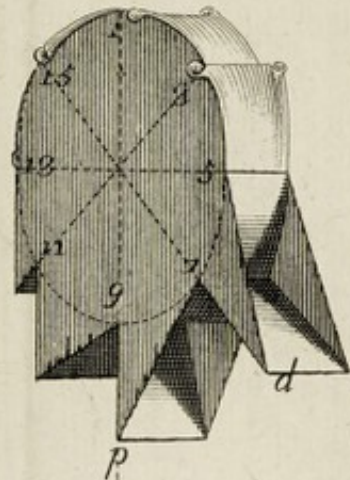


Fig. L

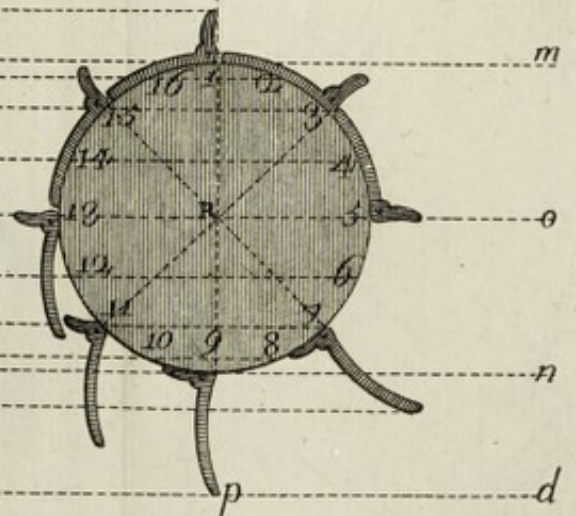


Fig. 2

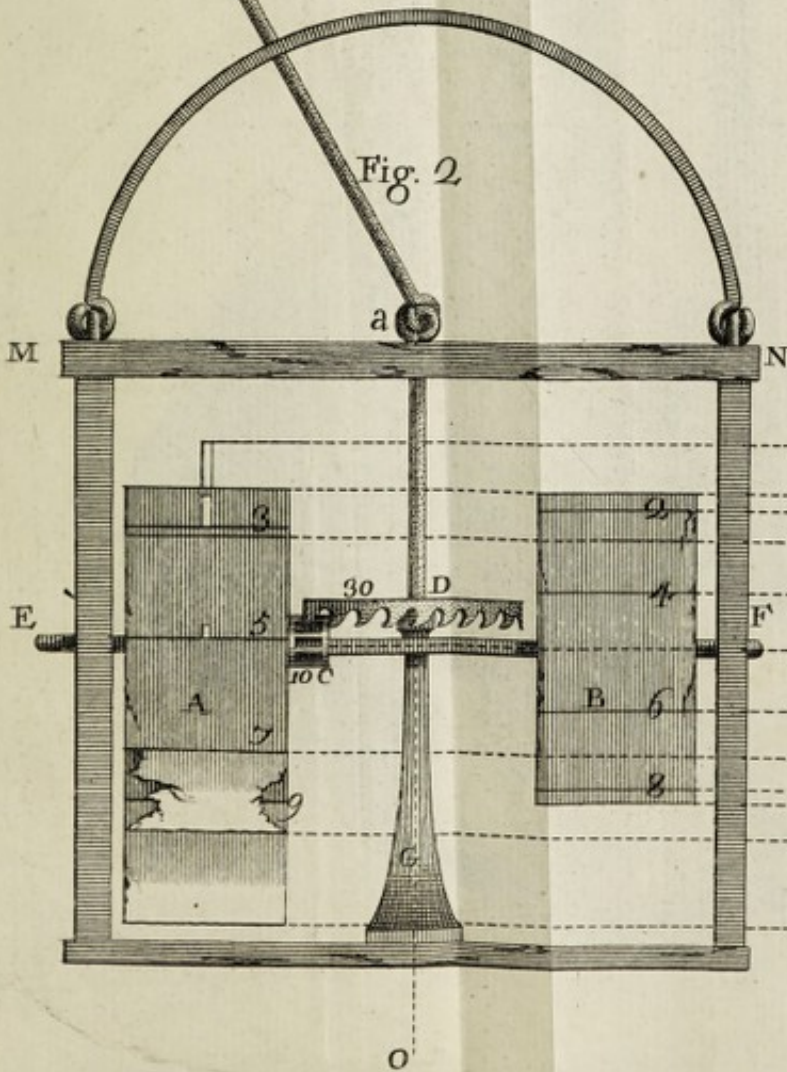




Fig. 3

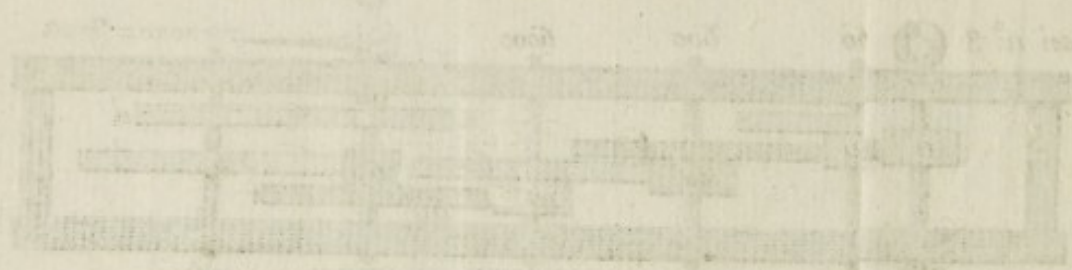


Fig. 4

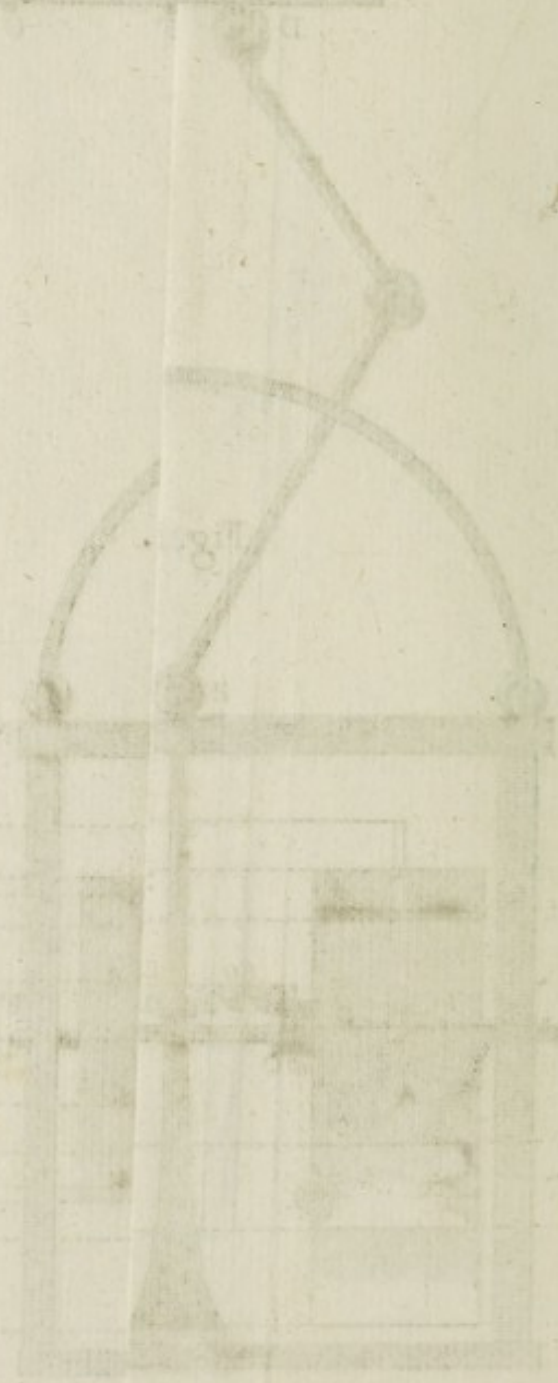
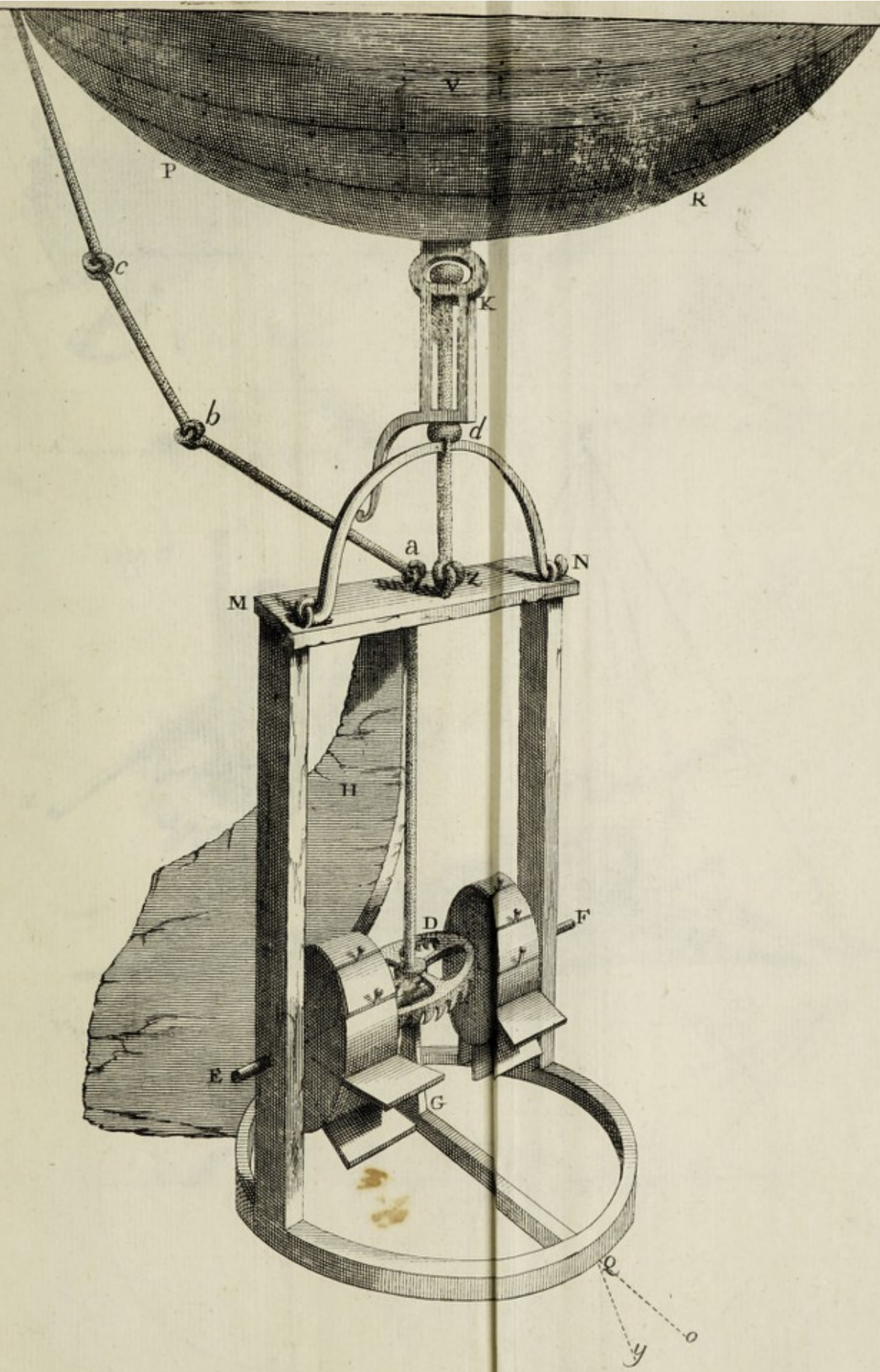
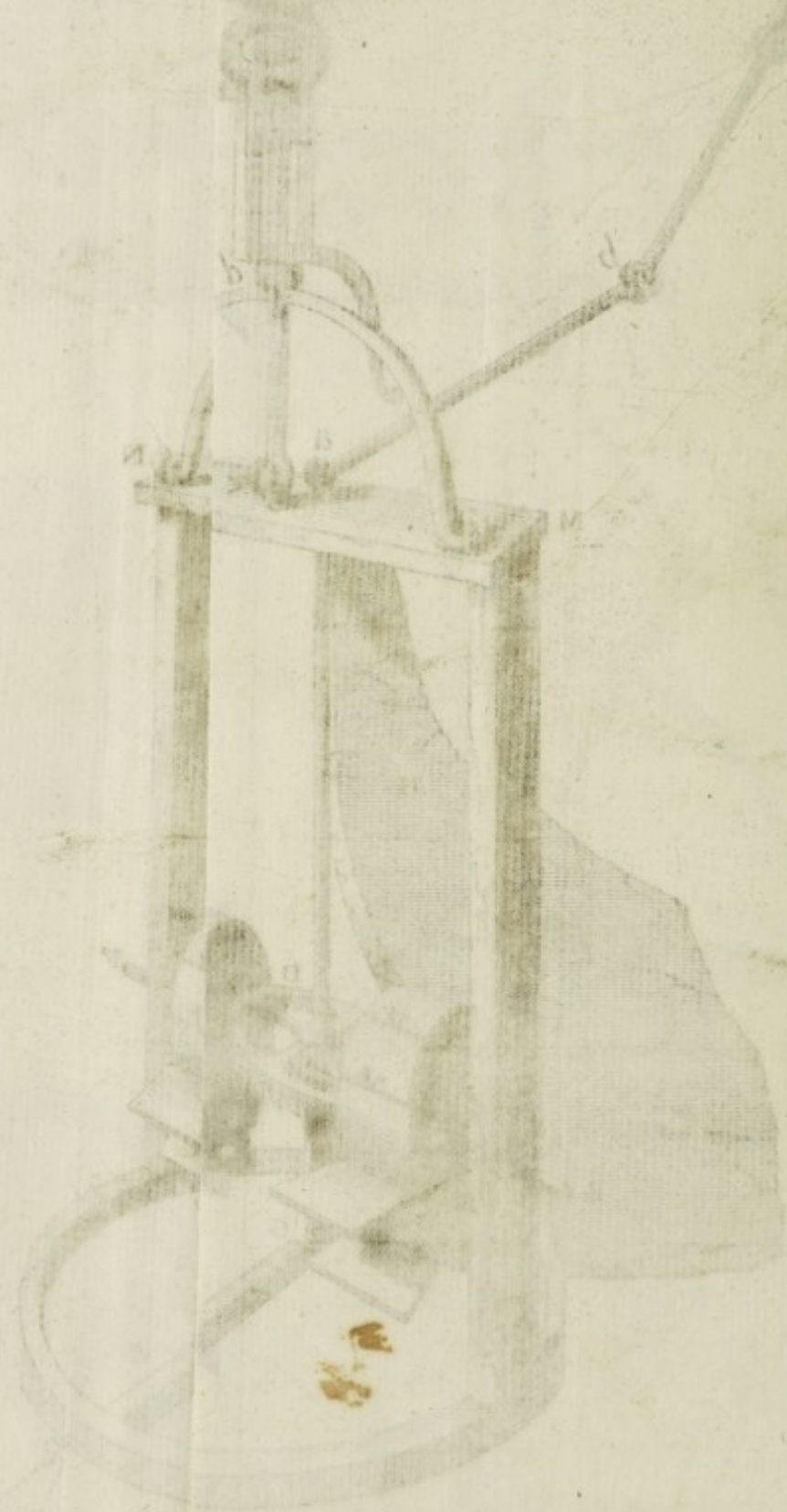


Fig. 5





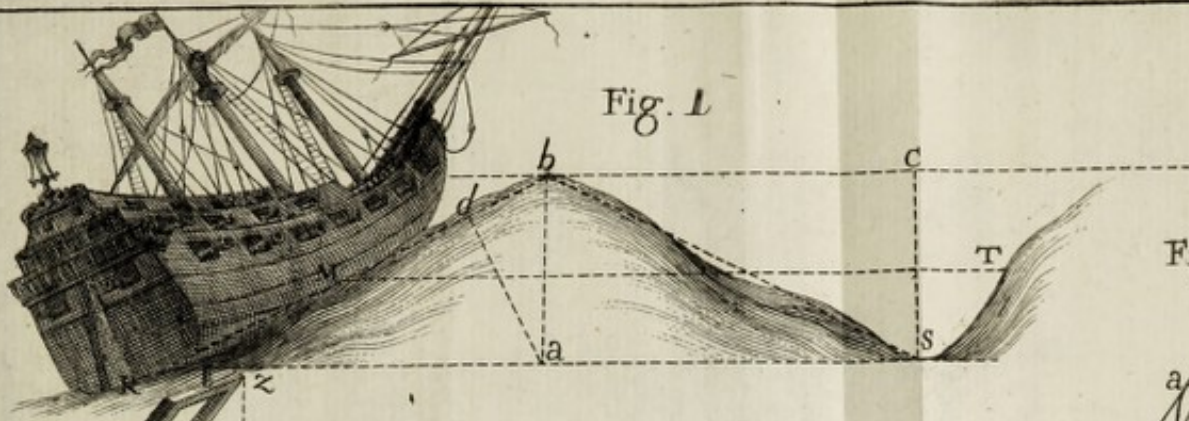


Fig. 1

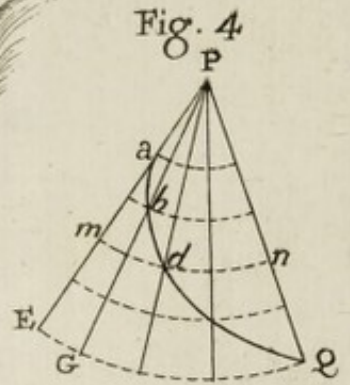


Fig. 4

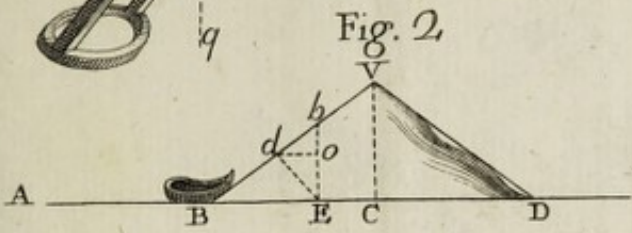


Fig. 2

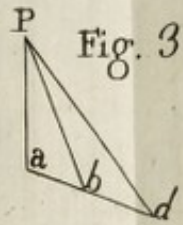


Fig. 3

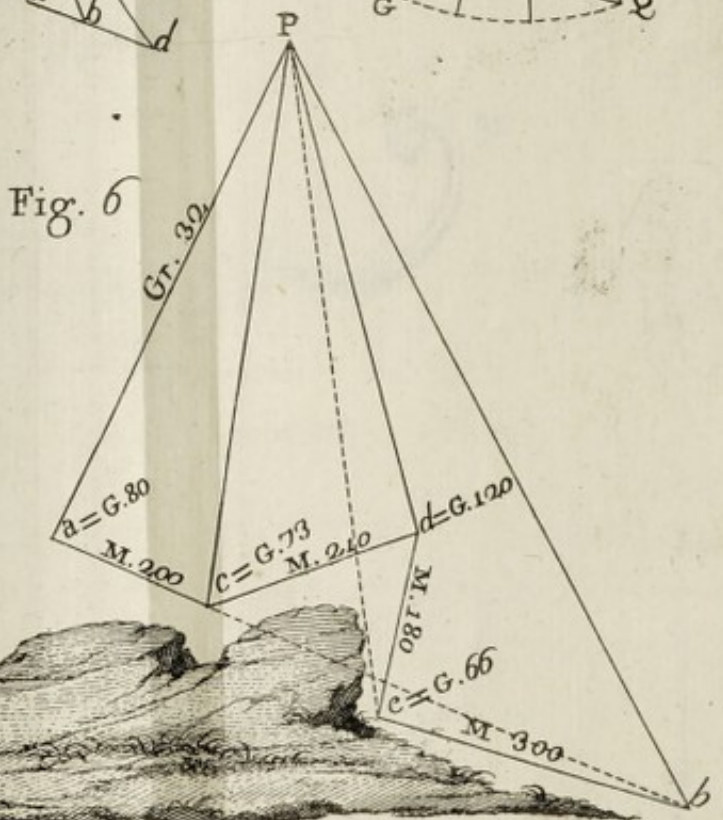


Fig. 6

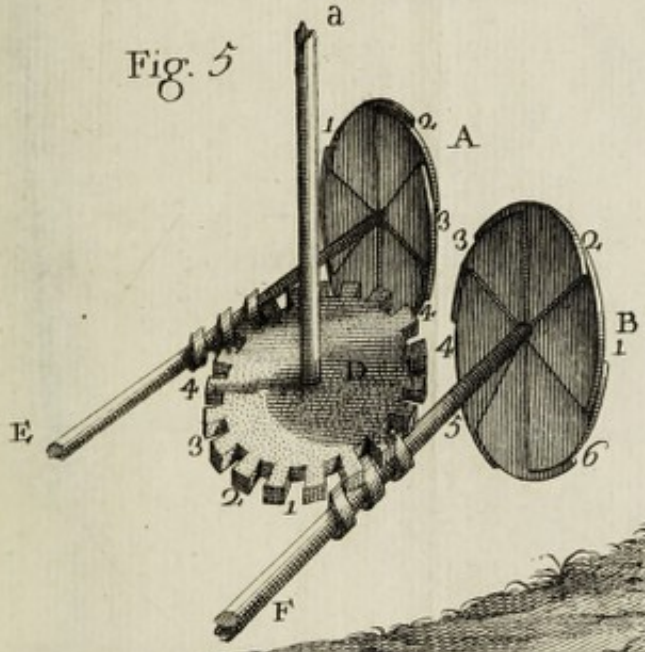


Fig. 5

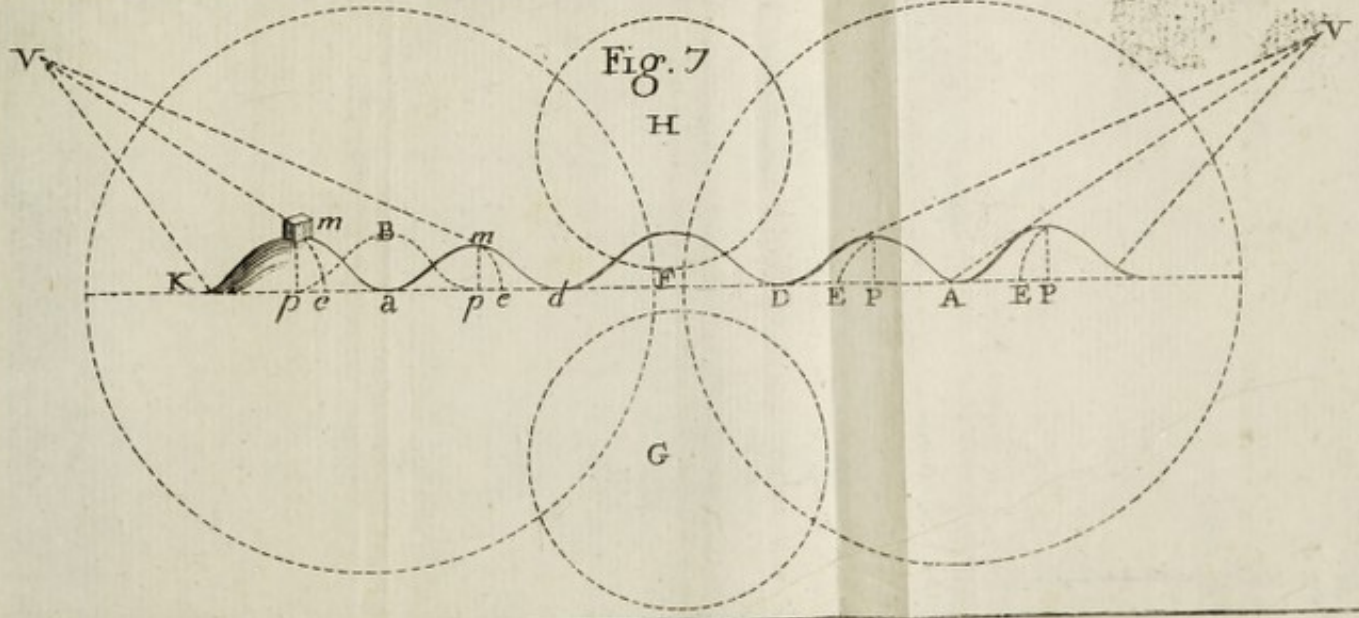


Fig. 7

Fig. 1



Fig. 2

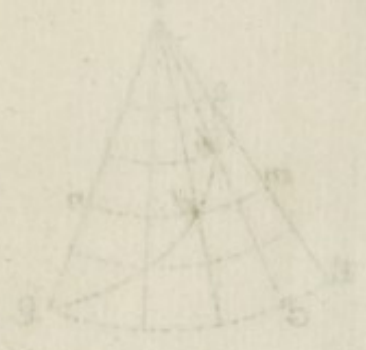


Fig. 3



Fig. 4



Fig. 5



Fig. 2,

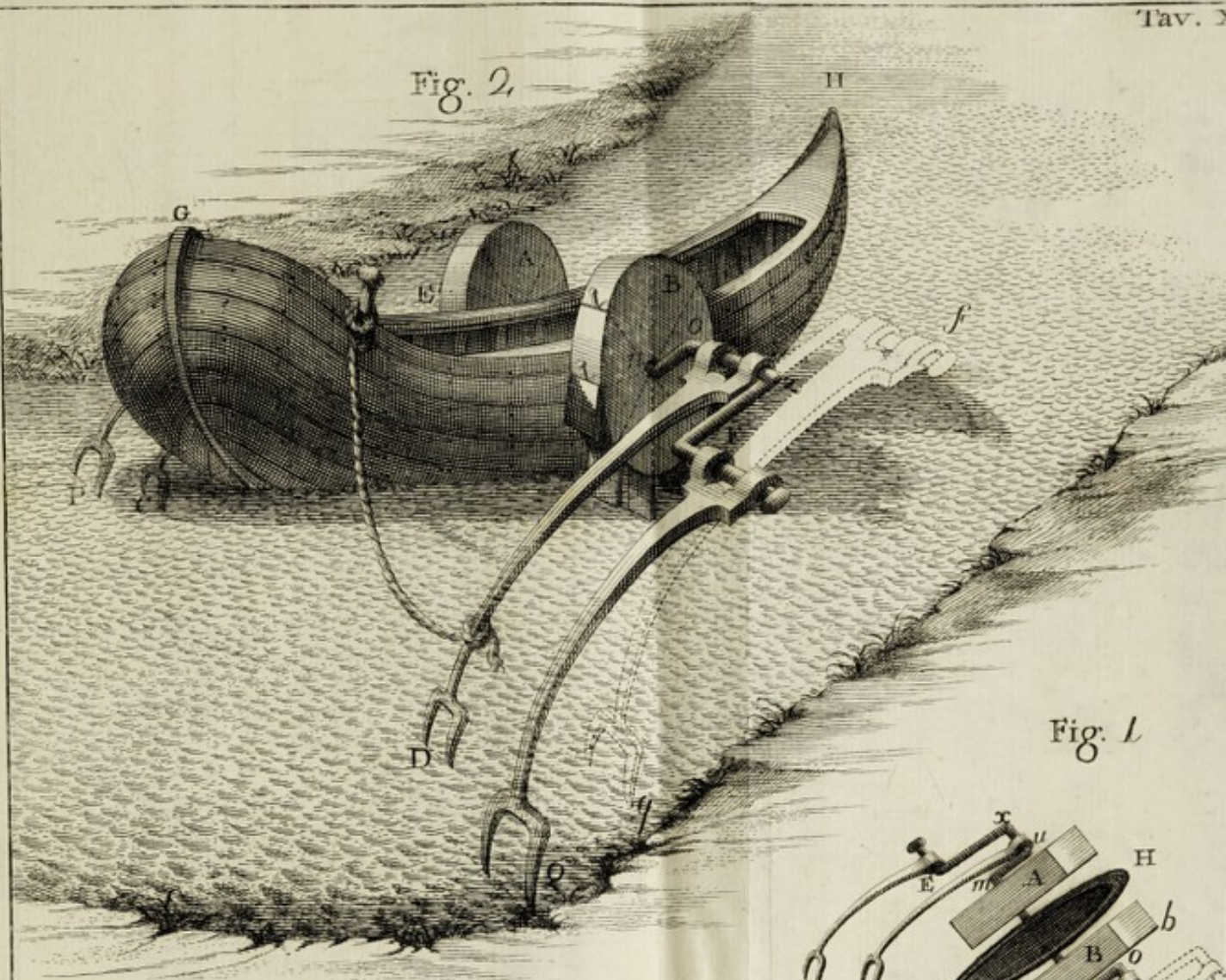


Fig. 1

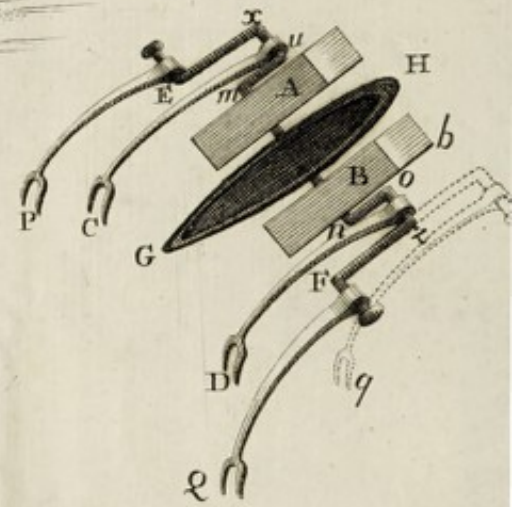


Fig. 3

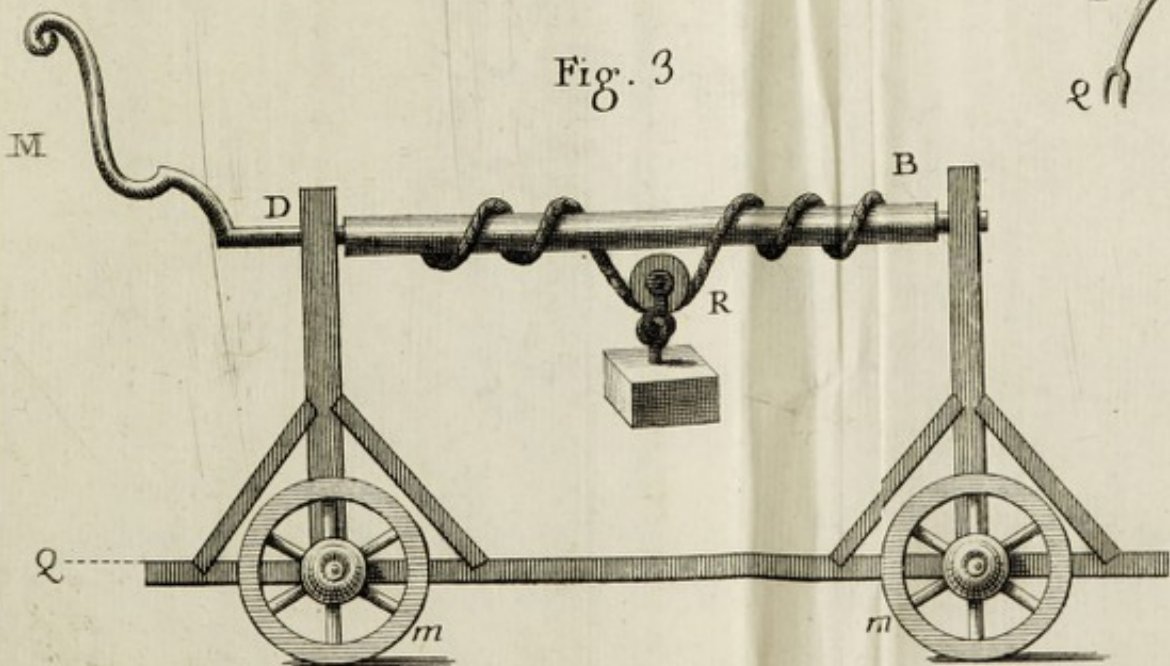


Fig. 2



Fig. 1



Fig. 3

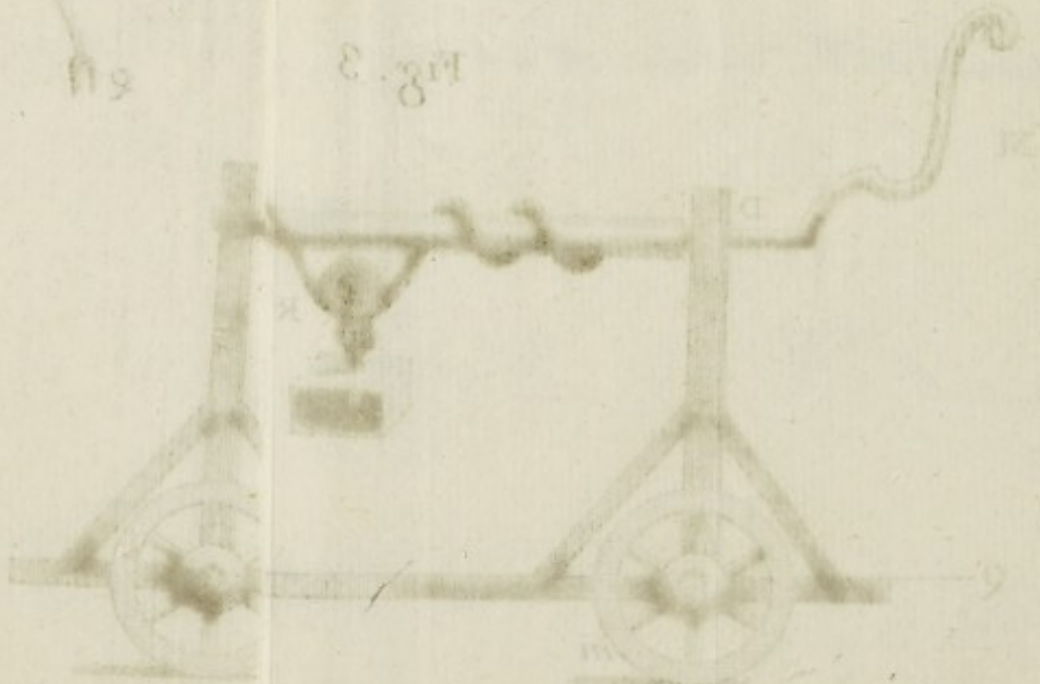


Fig. 3

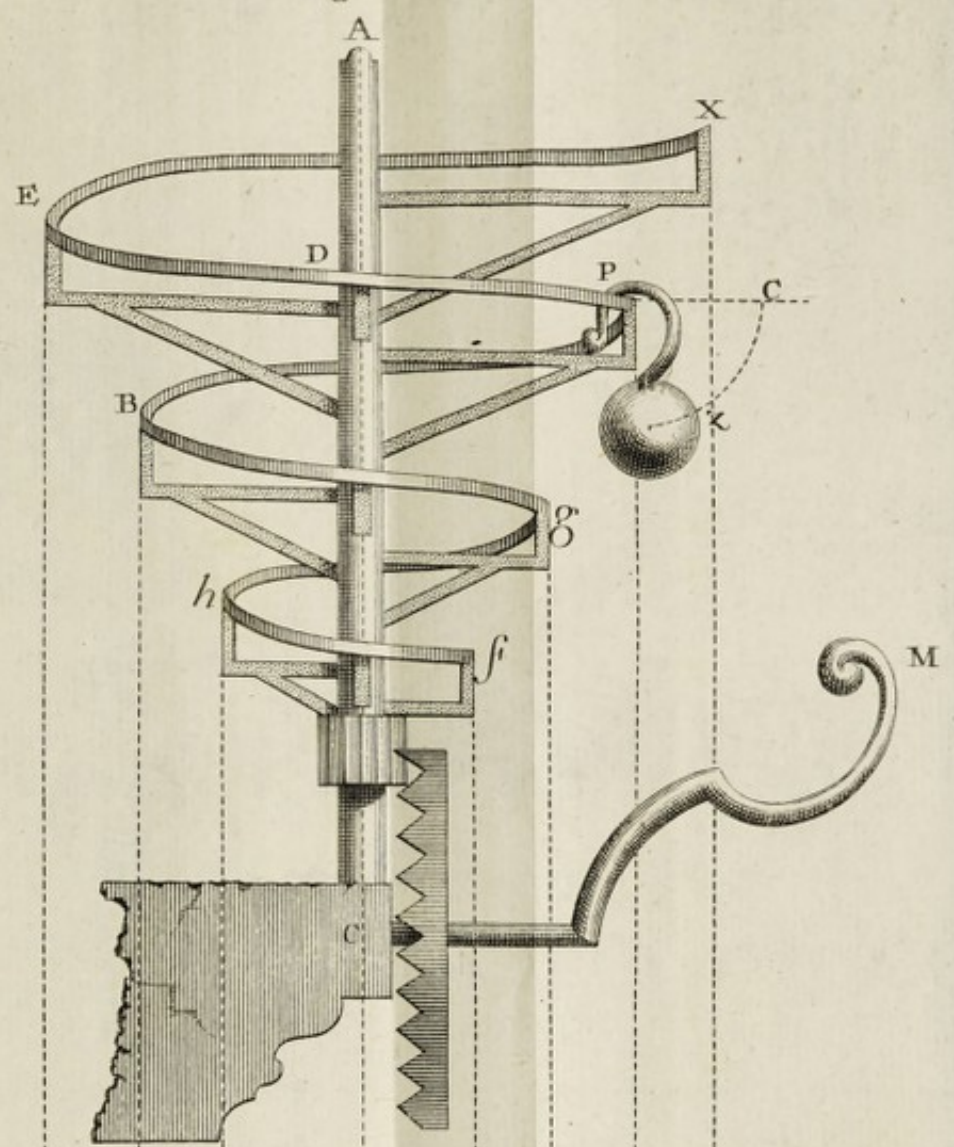


Fig. 4

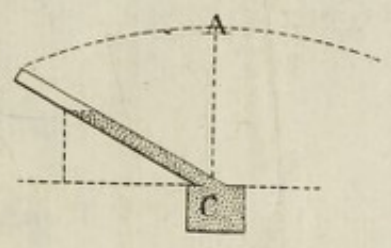


Fig. 1

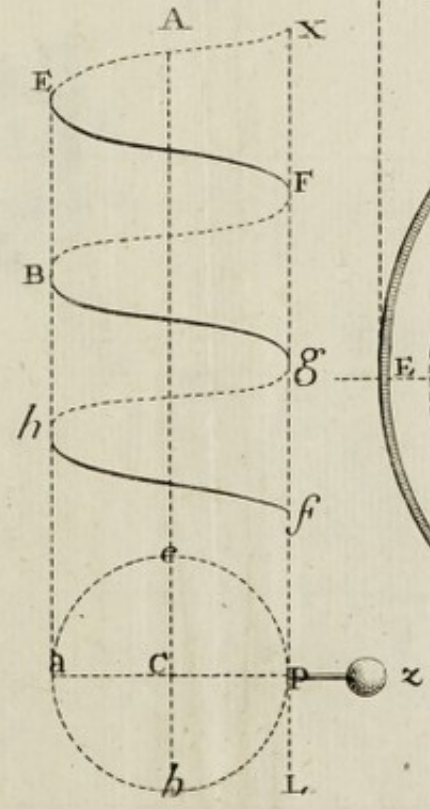


Fig. 2

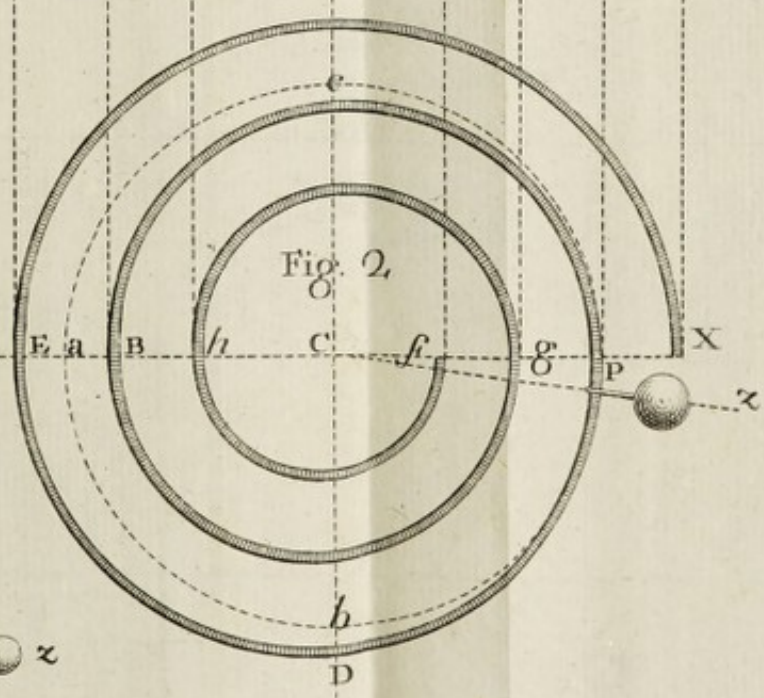




Fig. 1

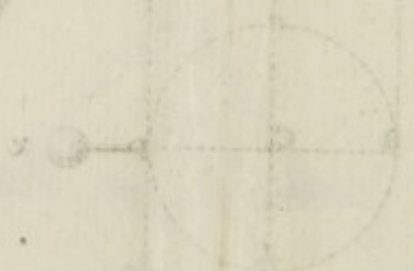
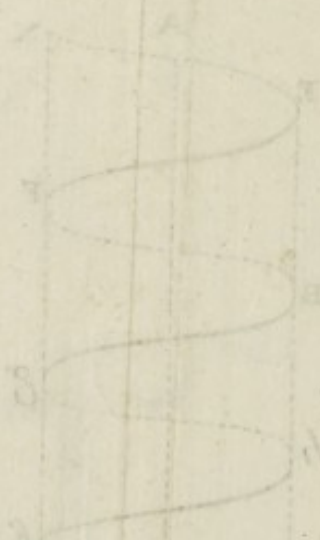


Fig. 4

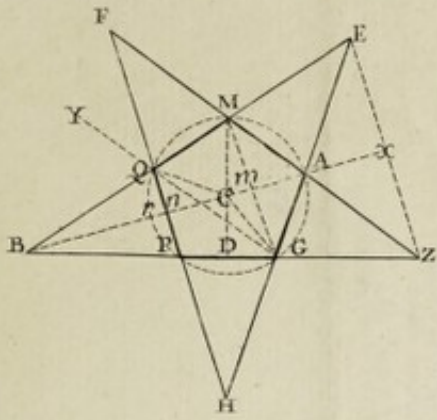


Fig. 5

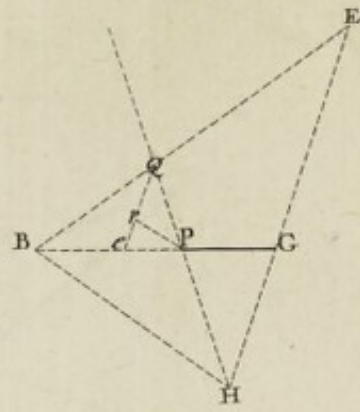


Fig. 3

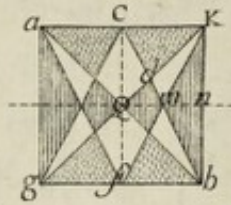


Fig. 6

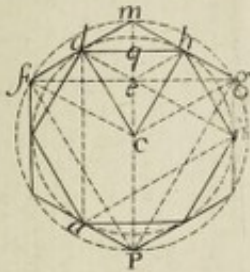


Fig. 1

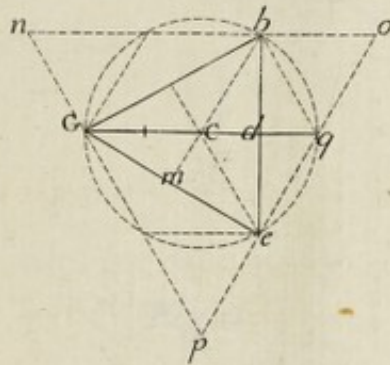


Fig. 2

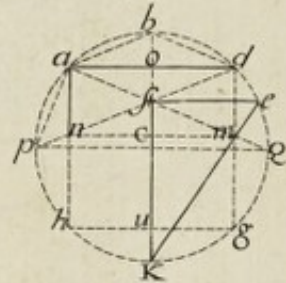


Fig. 7

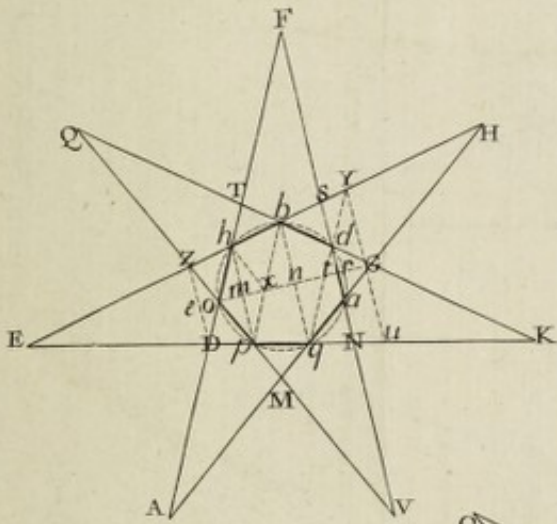


Fig. 8

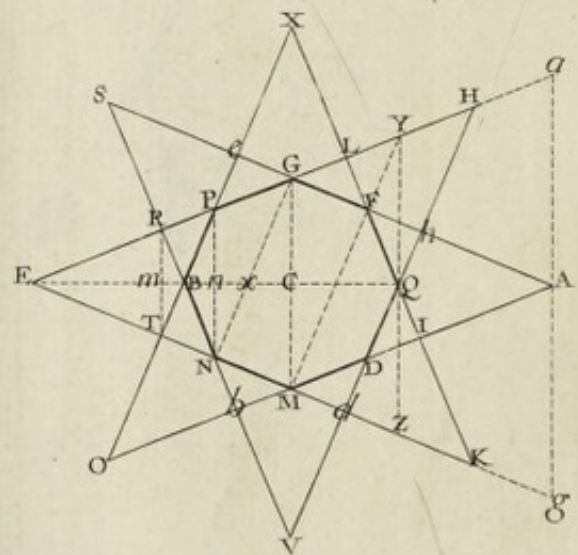


Fig. 9

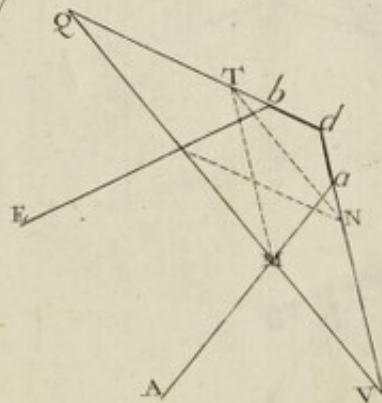


Fig. 10

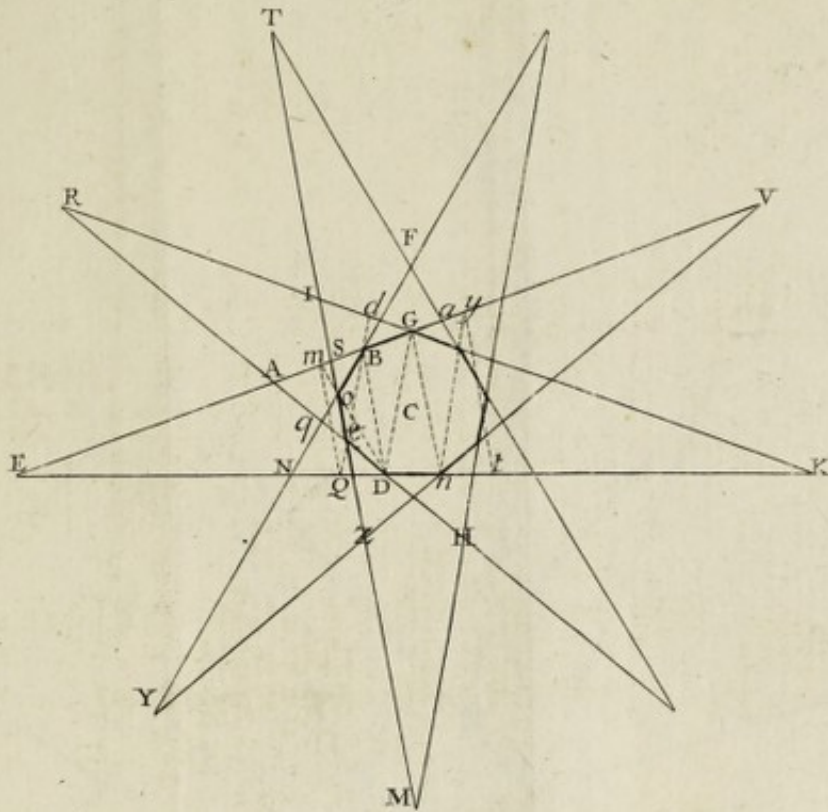


Fig. 11

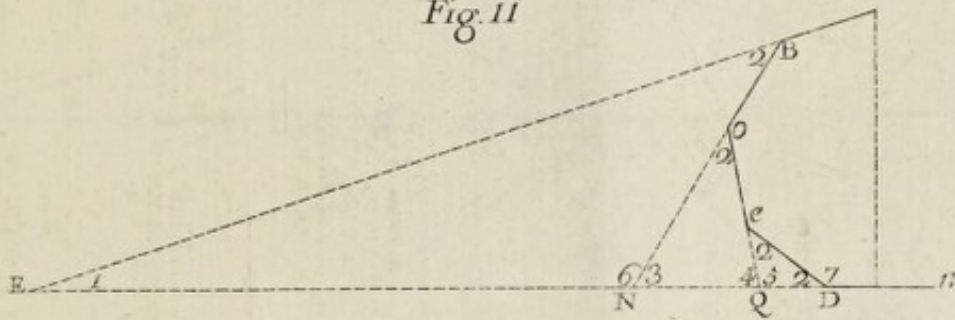


Fig. 12

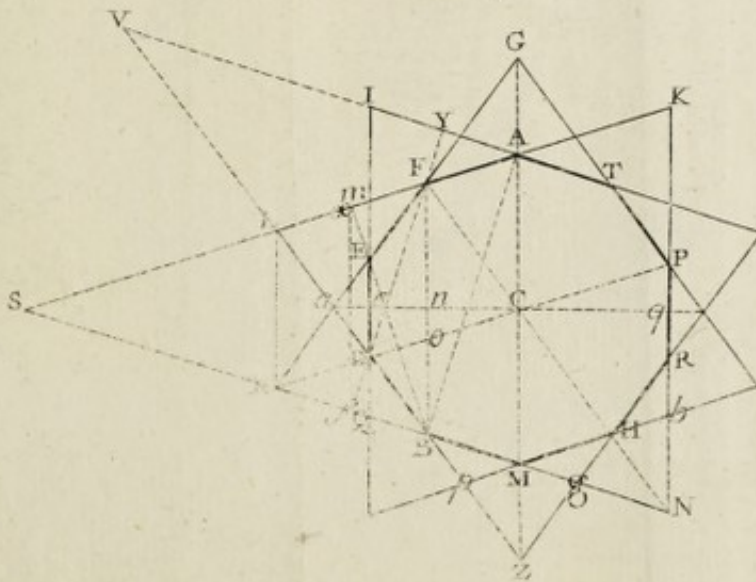


Fig. 13

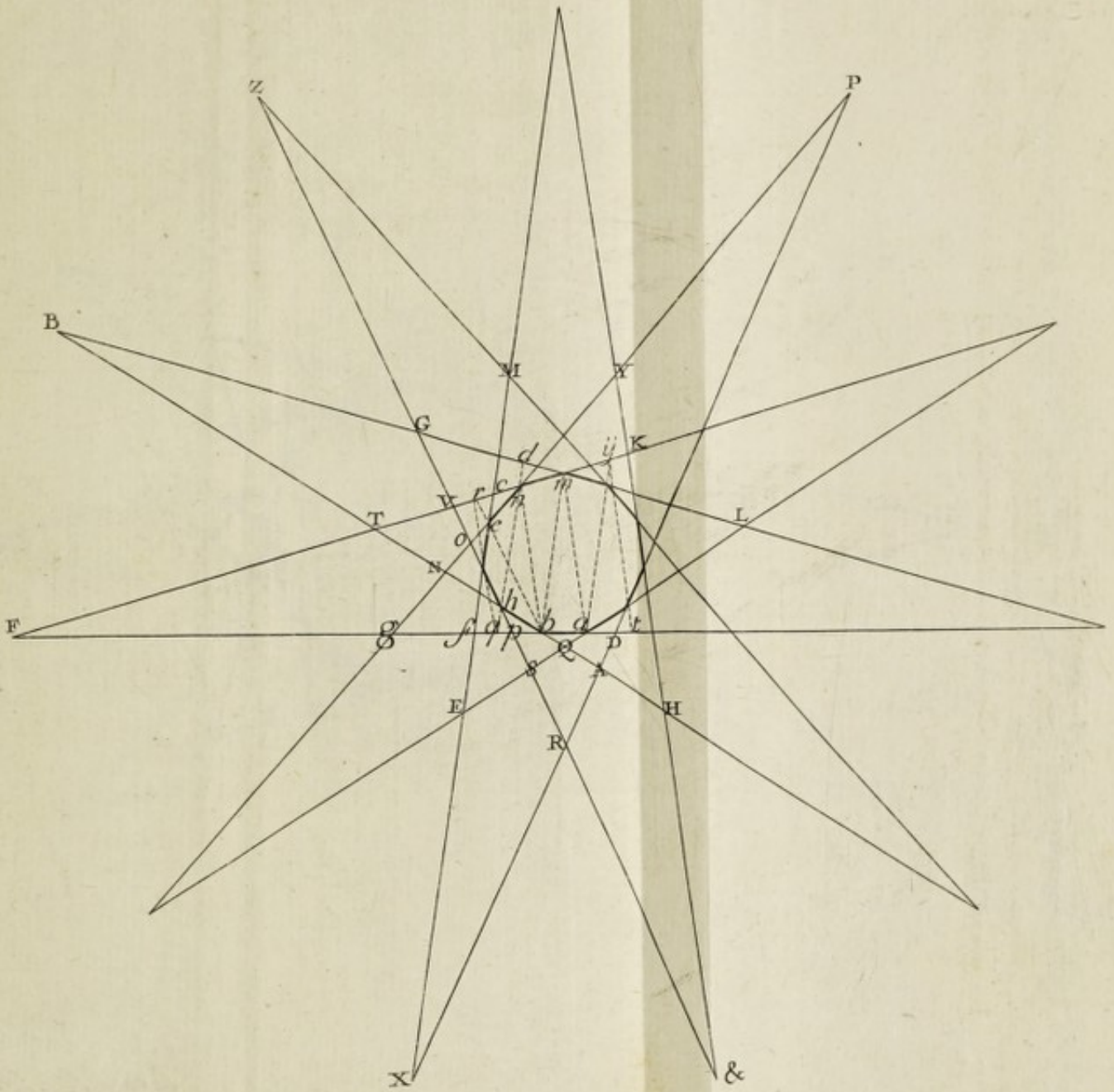


Fig. 14

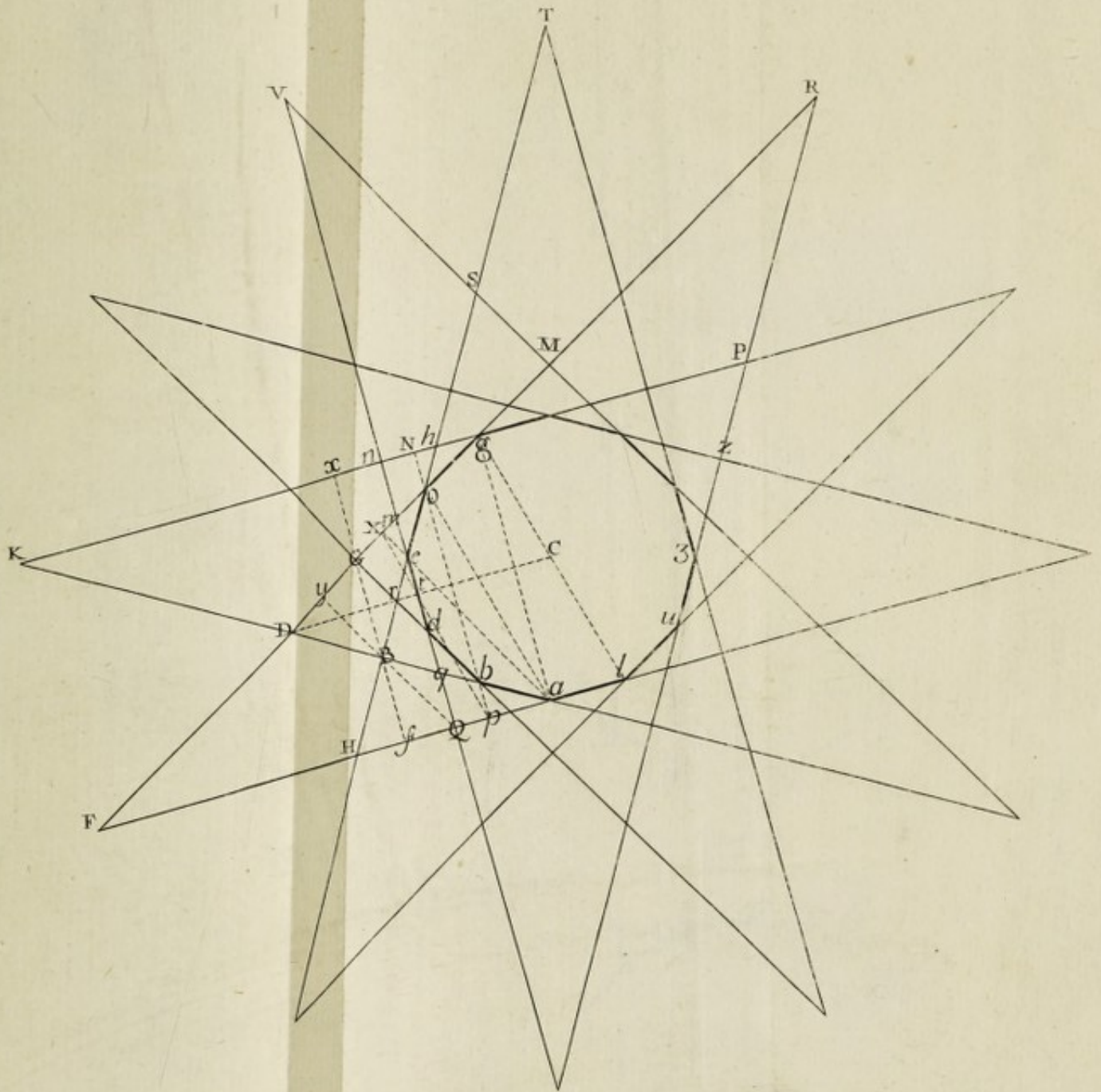


Fig. 15

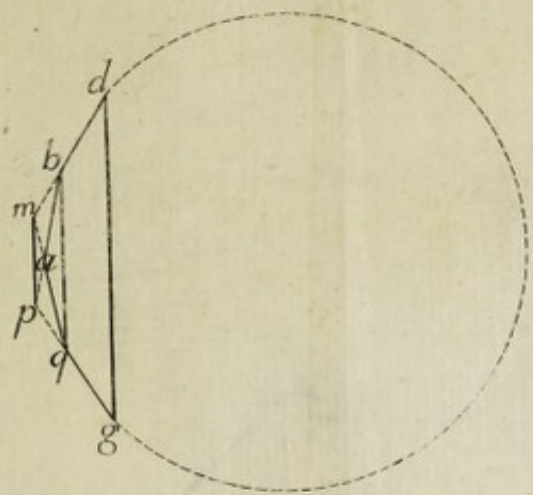


Fig. 16

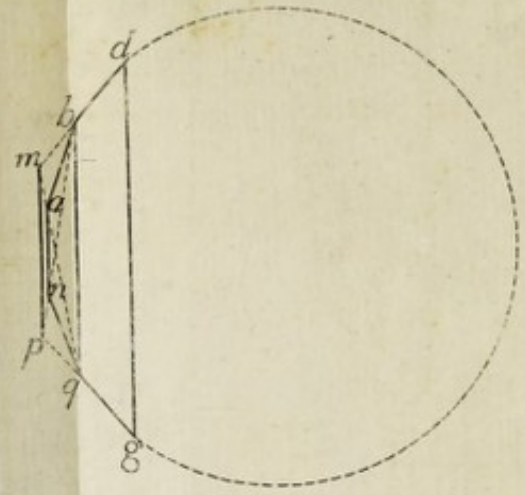


Fig. 17

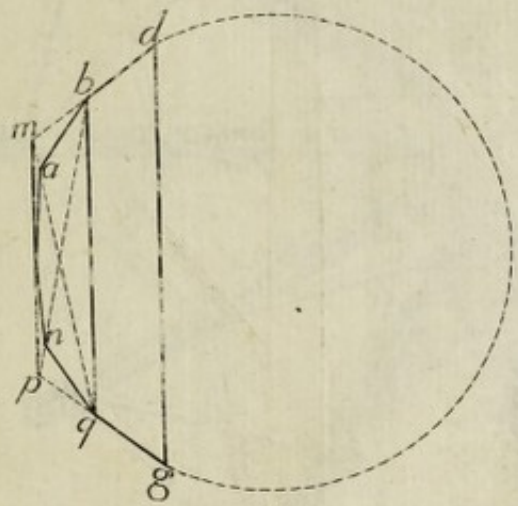


Fig. 18

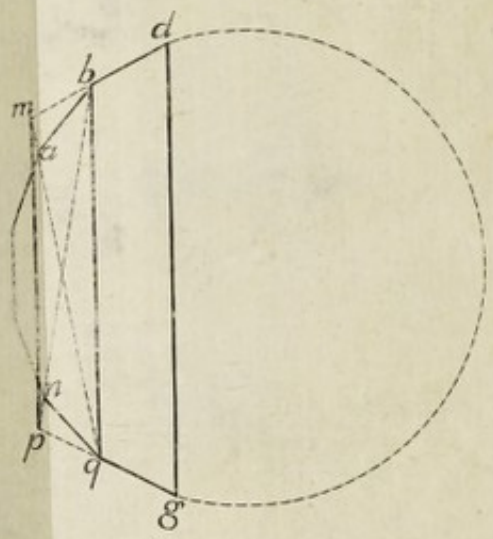


Fig. 19

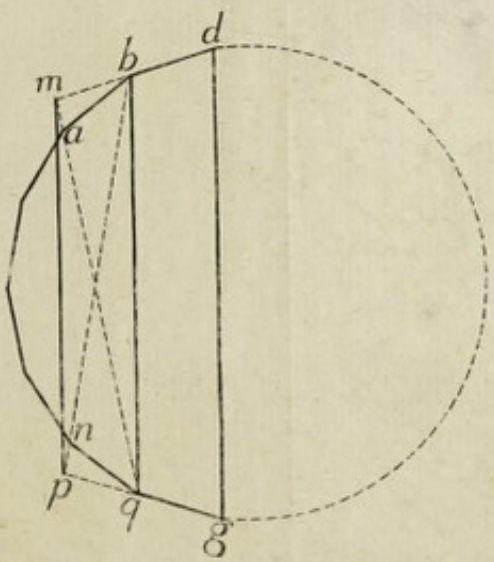


Fig. 20

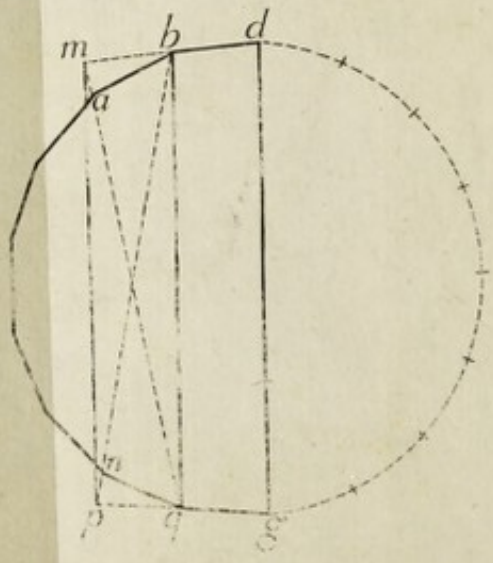




Fig. 21

