SAGGIO ANALITICO

DI

MECCANICA

ESPOSTO

DAL SIGNOR

CRISTOFORO BELLOLI

DI SCANDIANO

CONVITTORE

NEL SEMINARIO DI REGGIO

È permesso ad ognuno l'interrogare

1796

DINAMICA.

Moto uniforme, e vario.

I

Costruire le formule per la Tavola del moto uniforme.

Chiamando M, C, S, T, F la massa, la celerità, lo spazio, il tempo, la forza: si avrà 1.° $C = \frac{S}{T}$, 2.° $F = CM$, 3.° $FT = MS$.

2

Costruire le formule del moto vario.

Posta $\phi = \frac{F}{M}$, e c, s, t la celerità, lo spazio, il tempo, si ha 1.° $c = \frac{ds}{dt}$, 2.° $\phi\, dt = \pm\, dc$, 3.° $dc = d\left(\frac{ds}{dt}\right)$, 4.° $\phi\, ds = \pm\, c\, dc$, 5.° $\phi\, dt = \pm\, d\left(\frac{ds}{dt}\right)$.

Moto accelerato, e ritardato.

3

Dentro i limiti almeno di 100$^{\text{pie.}}$ le direzioni dei gravi cadenti son fisicamente parallele?

Fig. 1 Posto il raggio medio terrestre $CH = 19631100^{\text{pie.}}$, $HB = 200^{\text{pie.}}$, $BD = 100^{\text{pie}}$ sarà tang. $C = \frac{1}{196313}$, e $D = 89°, 59', 59'' = 90°$ vicinissimamente.

4

Dentro i limiti almeno di 2000$^{tes.}$ la forza di gravità è sensibilmente costante?

Fig. 1 Fatto il raggio terrestre $CB = r$ (3), una distanza $BA = d = 12000^{pie.}$, l'attrazione in $B = a = 15^{pie.}, 092$, se l'attrazione in A si chiami z, sarà $z = \frac{a\,r^2}{(r+d)^2} = 15^{pie.}, 073$, cioè la differenza fra l'attrazione in B, e l'attrazione in A è minore di $\frac{1}{50}$ di piede.

5

Costruir le equazioni per la tavola del moto uniformemente accelerato.

Sia una celerità p verticalmente impressa all'ingiù, s lo spazio AB, t il tempo speso a trascorrerlo, e g la forza acceleratrice di gravità: per mezzo del calcolo differenziale, ed integrale troveremo 1.° $s = \frac{c^2 - p^2}{2g}$, 2.° $s = \frac{gt^2}{2} + pt$, 3.° $s = \frac{t(c+p)}{2}$, 4.° $s = ct - \frac{gt^2}{2}$, 5.° $p = c - gt$.

6

$s : s' :: t^2 : t'^2 :: c^2 : c'^2$ (5) cioè gli spazj trascorsi dal principio del moto sono come i quadrati dei tempi, o delle celerità.

7

Nel moto uniformemente accelerato gli spazj trascorsi in porzioni eguali di tempo formano la serie 1, 3, 5, 7 . . . . . . $2m+1$.

V

8

La celerità generata in $1''$ dalla forza acceleratrice terrestre, quanto spazio in questo tempo, di moto uniforme, farà percorrere a un mobile?

Sarà $g = \frac{2s}{t^2}$ (5) $= 30^{\text{pie.}}, 2$ in circa.

9

Supposto che un mobile scorrendo con moto uniformemente accelerato uno spazio s si trovi in fine con una celerità c, quale spazio S trascorrerà nel tempo stesso con moto uniforme, e con la stessa celerità finale c?

Si avrà $s = \frac{ct}{2}$ (5), $S = ct$ (1); cioè: de' due spazj trascorsi in egual tempo, l'uno con moto uniformemente accelerato, l'altro con moto uniforme, e con la celerità finale di quello, il secondo è doppio del primo.

10

Quale spazio s avrebbe dovuto trascorrere con moto uniformemente accelerato un corpo, che con moto uniforme trascorre lo spazio $S = 100^{\text{pie.}}$ in un tempo $T = 3''$?

Sarà $s = \frac{S^2}{2gT^2}$ (5) $= 18^{\text{pie.}}, 4$.

11

Chiamando a, a' le altezze, da cui dovrebbe cadere un mobile per acquistare le celerità C, C': avremo $C : C' :: \sqrt{a} : \sqrt{a'}$ (10) cioè le celerità acquistate sono come le radici delle altezze a loro dovute.

12

Costruir le formule per la Tavola del moto uniformemente ritardato.

Fig. 1 Prese χ, σ, τ invece delle c, s, t (5) pel moto uniformemente accelerato, posta p una celerità impressa verticalmente all'insù, g la solita forza di gravità: troveremo 1.° $\sigma = \frac{p^2 - \chi^2}{2g}$, 2.° $\sigma = p\tau - \frac{g\tau^2}{2}$, 3.° $\sigma = \tau\frac{(\chi + \rho)}{2}$, 4.° $\sigma = \chi\tau + \frac{g\tau^2}{2}$, 5.° $p = \chi + g\tau$.

13

La celerità acquistata da un corpo cadente, a quale altezza può farlo risalire?

Sarà $\sigma = \frac{c^2}{2g}$ (12) $= s$ (5), cioè può farlo risalire all'altezza da cui partì.

Moto composto.

14

2 Il corpo M spinto dalle forze omogenee F, f va per la diagonale MN del parallelogrammo IE fatto dalle rette ME, MI rappresentanti le forze F, f.

15

2 Descritto col raggio MI l'arco IST, e condotte sopra ME le normali IG, SQ, e sopra MN la normale IK, avremo: F : f : Φ :: IK : SQ : IG : cioè qualun-

que delle tre forze potrà sempre rappresentarsi col seno che è compreso fra le direzioni delle altre due.

16

Quand'è che avremo la massima, e quando la minima risultante M N?

Fig. 2 Fatta $ME = a$, $MI = b$, e l'angolo $MEN = x$ sarà differenziando, $d \frac{(MN)}{dx} = \frac{\pm ab \, sen \, x}{\sqrt{(a^2 + b^2 \mp 2ab \cos x)}}$: e di qui si raccoglie che si ha la massima $MN = a + b$, quando E N gira in fuori, e forma una sola retta con M E; e si ha la minima $MN = a - b$, quando E N gira indentro, e cade sopra E M. Cosicchè nel caso del massimo operando le forze F, f nel senso, e nella direzione medesima, e nel caso del minimo operando nella direzione stessa, ma in senso contrario, sarà, riunendo in una sola equazione questi due casi, $\Phi = F \pm f$.

17

Date due forze parallele F, f vogliansi ridurre ad una sola Φ, e reciprocamente.

3 Condotta tra le loro direzioni una retta qualunque R O si troverà 1.° $OV = \frac{F.OR}{F \pm f}$, e la parallela ΦV, che passa pel punto V. sarà la direzione della cercata risultante Φ. 2.° $VO = \frac{F.VR}{\pm \Phi \mp F}$, e la parallela fO che passa pel punto O, sarà la direzione dell'altra forza f.

18

Fig. 3 Nel caso della massima, o della minima risultante, cioè quando le tre forze F, f, Φ sono coincidenti, o parallele se si prenda un punto fisso qualunque A nel piano delle medesime, e da quello su le direzioni di queste si conducano tre normali, sarà $\Phi . AG = F . AG \pm f . AG$, $\Phi . AV = F . AG \pm f . AI$. Cioè il momento della risultante eguaglia la somma, o differenza de' momenti delle componenti.

19

4 Anche nei casi delle risultanti intermedie, se il centro o punto fisso A, A' è fuori o dentro dell'angolo EMI, il momento di Φ eguaglia la somma o differenza dei momenti di F, f.

20

5 Anche riguardo all'asse, e riguardo al piano de'
6 momenti, se le forze son parallele, si verifica, che il momento della risultante eguaglia la somma o differenza dei momenti delle componenti.

21

2 Dall'equazione $\sqrt{(a^2 + b^2 \pm 2\, a\, b \cos x)} = o$ (16) si ricava, che quando la risultante di più forze è zero, esse sono in equilibrio, e reciprocamente.

22

Fig. 7 Due masse sono in ragione inversa delle loro distanze dal comun centro di gravità.

23

8 Si vuole il centro di gravità di una linea AE, di cui si ha l'equazione.

Posta $AI = x$, $IE = y$, $AN' = z$, $N'N = u$, $AE = s$: avremo $z = AN' = \int \frac{x\,ds}{s}$, $u = NN' = \int \frac{y\,ds}{s}$ formule che determinano il cercato centro N di gravità.

24

$2\pi \int y\,ds = s.\ 2\pi NN'$ (23): cioè se quante linee si voglia rette o curve AEB, AEL situate da una stessa parte dell'asse AB girino intorno ad AB, la superficie generata dalla rivoluzione eguaglia sempre la somma delle linee genitrici moltiplicata per la circonferenza descrittta dal loro comun centro di gravità.

25

Determinare il centro N di gravità di un arco AE di circolo.

Sarà $TN = \frac{a \sqrt{2ax}}{s}$; cioè il centro di gravità di un arco di circolo è nel raggio, che lo divide in mezzo, e la sua distanza TN dal centro del circolo è quarta proporzionale dopo l'arco s, il raggio a, e la corda $\sqrt{2ax}$.

26

Fig. 8 Vogliasi il centro di gravità di una superficie piana AEI, delle cui coordinate si ha l'equazione.

Fatta $AN' = z$, $N'O = u$, $AI = x$, $IE = y$, sarà $z = AN' = \int \frac{xydx}{\int ydx}$, $u = N'O = \int \frac{y^2 dx}{2\int ydx}$.

27

$\int ydx \,.\, 2\pi N'O = \int \pi y^2 dx$ (26): cioè se quante figure si voglia situate nello stesso piano, e dalla parte stessa dell'asse AB girino intorno ad AB, il solido generato eguaglierà la somma delle figure genitrici moltiplicate per la circonferenza descritta dal loro comun centro di gravità.

28

8 Qual è il centro di gravità di un triangolo AEI?

E' tale che $AN' = \frac{2x}{3}$, $N'O = \frac{y}{3}$.

E di un parallelogrammo?

Tale che $AN' = \frac{x}{2}$, $N'O = \frac{y}{2}$. Cioè il centro di gravità di un parallelogrammo è nel mezzo di esso.

29

Qual è il centro di gravità di una parabola AEI dell'equazione $y^2 = px$?

E' tale che $AN' = \frac{3x}{5}$, $N'O = \frac{3y}{8}$.

30

Fig. 8 Si vuole il centro N′ di gravità di una superficie curva prodotta dalla rivoluzione della linea AE intorno all' asse AI.

Troveremo $z = AN' = \frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds}$.

31

Trovare il centro di gravità della superficie curva del cono retto generata della retta AE.

Posto l'angolo IAE $= b$, si ha $AN' = \frac{2x}{3} = \frac{2}{3} AI$.

32

Scoprire il centro N′ di gravità della superficie del segmento sferico generata dall'arco AE di circolo.

Sarà $AN' = \frac{x}{2} = \frac{AI}{2}$.

33

Cercasi il centro N′ di gravità di un solido prodotto dalla rivoluzione della superficie AEI intorno all' asse AI.

Sarà $z = AN' = \frac{\int xy^2\,dx}{\int y^2\,dx}$.

34

Assegnare il centro N′ di gravità del cono retto generato dal triangolo AEI.

Si ha $AN' = \frac{3}{4} AI$.

35

Fig. 8 In che punto di AI si trova il centro N′ di gravità di un segmento sferico generato dal semisegmento AEI di circolo.

Avremo $AN' = \frac{8ax - 3x^2}{12a - 4x}$.

36

9 Essendo i corpi M, m, od M, m, μ coi piani PQ,
10 P′Q′, P″Q″, od LN, L′N′, L″N″, che passino 1.° pel loro comun centro di gravità, 2.° fuori di esso, e fuori di detti corpi, 3.° fuori di esso e tra i corpi medesimi: Saranno 1.° i prodotti di ciascun corpo da una parte per la sua distanza dal piano PQ, od LN eguali ai prodotti dei corpi dell'altra per la loro distanza dal detto piano, 2.° i prodotti di ciascun corpo per la sua distanza dal piano P′Q′, od L′N′ eguali al prodotto di tutti per la distanza del loro comun centro di gravità dallo stesso piano, 3.° i prodotti di ciascun corpo da una parte per la sua distanza dal piano P″Q″, od L″N″ meno i prodotti di ciascun dell'altra parte per la rispettiva distanza da detto piano eguali al prodotto di tutti per la distanza del comun centro di gravità dallo stesso piano.

XIII

Moto per le Trajettorie.

37

Fig. 8 Costruire le formule pel moto uniformemente accelerato, e ritardato pe' piani inclinati.

Sia $\varkappa$ la celerità finale acquistata nel tempo θ per la discesa $AD=\lambda$ lunghezza d'un piano inclinato alto della $AB=\alpha$. Poste $\varkappa$, θ, λ invece di c, t, s; e $\frac{ag}{\lambda}$ invece di g (5) sarà 1.° $p=\sqrt{(\varkappa^2-2ag)}$, 2.° $\lambda=\frac{\theta(\varkappa+\sqrt{(\varkappa^2-2ag)})}{2}$, 3.° $\lambda=\frac{\theta(p+\sqrt{(2ag+p^2)})}{2}$, 4.° $\lambda=\frac{\theta(\varkappa+p)}{2}$; e sostituite le stesse quantità in luogo di χ, τ, σ, g (12) si avrebbero le formule pel moto uniformemente ritardato ne' piani inclinati.

38

Trovar la ragione delle celerità, che acquisterebbe un mobile trascorrendo AB, ed AD.

La ragione è di egualità.

39

Data l'altezza $AB\,a=$ d'un piano inclinato ABD trovare nella sua lunghezza $AD=\lambda$ il punto E tale, che un mobile partendosi da A trascorra in tempo eguale l'inclinata AE, e la verticale AB.

Fig. 8 Sarà $AE = x = \frac{a^2}{\lambda}$, cioè alzata BE normale ad AD, sarà E il punto cercato.

40

8 I tempi che impiegherebbe un mobile trascorrendo la lunghezza AD, e l'altezza AB d'un piano inclinato sono come la lunghezza all'altezza.

41

Ne' piani egualmente inclinati ABD, GMD i tempi spessi per AD, GD sono come le radici delle altezze, o delle lunghezze: e le forze di due masse negli stessi piani sono come le dette masse.

42

7 Se un mobile scenda per una curva ABCD, la forza totale perduta lungo la curva sarà nulla.

43

Le piccole oscillazioni circolari sono isocrone.

44

I tempi delle oscillazioni NDO, M'ΔX di due pendoli semplici sono direttamente come le radici delle lunghezze FD, FΔ dei pendoli, e queste lunghez-

Fig. 7 ze son reciprocamente come i quadrati dei numeri delle oscillazioni fatte in un dato tempo.

45

Si vuole il centro Π di oscillazione di un pendolo composto FM.

Sia $F\Pi = x$, $FM = a$, $FM' = \pm b$, m, m' le masse in M, M', sarà $x = \frac{ma^2 + m'b^2}{ma \pm m'b}$: cioè la distanza del centro Π di oscillazione dal punto F di sospensione in un pendolo composto qualunque si ha dividendo per l'aggregato di tutte le forze coi loro segni, ciascuna forza col suo segno moltiplicata per la sua positiva o negativa distanza da F.

46

Si cerca il centro di oscillazione, o di percussione della verga pesante ed omogena FO.

Dall'equazione (23) $z = \int \frac{x\,ds}{s}$, troveremo, che il centro richiesto è ne' due terzi della data verga pesante FO.

47

12 Se la forza acceleratrice ϕ che unita all'istantanea guida il corpo M per la trajettoria SMN si risolva nell'orizzontale acceleratrice $\phi' = X$, che lo spingerebbe per MI parallela all'ascisse $SV = x$, e nella acceleratrice $\phi'' = Y$ che lo spingerebbe per MH pa-

Fig. 12 rallela all'ordinate $VM = y$; e se sia c la celerità dovuta $a\phi$, $c'a\phi'$, $c''a\phi''$: avremo $X\,dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $Y\,dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$: equazioni generali, che serviranno a scoprire le più importanti proprietà delle trajettorie.

48

12 Sia C il centro della forza, $CS = a$ la distanza ove il mobile ricevè da principio una celerità p di projezione, $CM = z$ un raggio vettore, $MR = F$ la forza centripreta in M l'equazioni generali (47) divengono $F\,dt\left(\frac{a-x}{2}\right) = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\frac{-F\,y\,dt}{2} = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, e quindi $o = y \times d\left(\frac{dx}{dt}\right) + (a-x)\,d\left(\frac{dy}{dt}\right)$: onde $CSM : CMT :: t : t'$, cioè in ogni trajettoria l'aree comprese dai raggi vettori e dall'arco della curva son proporzionali ai tempi impiegati a trascorrerlo.

49

Sia l'angolo $SCM = \beta$: sarà $\frac{d\beta}{dt'} : \frac{d\beta'}{dt'} :: \frac{1}{z^2} : \frac{1}{z'^2}$: cioè le celerità angolari sono in ragione inversa del quadrato dei raggi vettori.

50

Supposta MN tangente in M, e ad essa la normale $CN = q$: sarà $\frac{ds}{dt} : \frac{ds'}{dt'} :: \frac{1}{q} : \frac{1}{q'}$: cioè in ogni trajettoria le celerità effettive sono inversamente come le normali condotte dal centro su le tangenti.

51

Dall'equazione $-\frac{F y d t}{z} = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ (48) si ricava

Fig. 12 $F : F' :: \frac{z}{q^3 r} : \frac{z'}{q'^3 r'}$, cioè in ogni trajettoria le forze centrali sono come i raggi vettori divisi pel prodotto dei raggi osculatori nel cubo delle normali condotte dal centro su le tangenti.

52

Dall'equazioni $\frac{F d t (a-x)}{z} = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $-\frac{F y d t}{z} = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ (48) s'ottiene $c\, d\, c = -F\, dz$. Supposto ora che in una data distanza b dal centro C la forza centrale F divenga la solita forza g di gravità, si avrà $F\, d\, z = b^2 g z^{-2} d\, z = -c\, d\, c$, e integrando in fine si troverà, che quando la forza centrale opera in ragione inversa del quadrato delle distanze, la celerità di rivoluzione in qualunque punto della trajettoria è $c = \sqrt{(p^2 - 2 b^2 g (\frac{1}{a} \frac{-1}{z}))}$.

53

Sieno f, h le altezze dovute alle celerità c, p di rivoluzione, e projezione, si saprà che operando la forza centrale nella ragione già detta (52) il raggio vettore è $z = \frac{a b^2}{b^2 - a(h-f)}$

54

Si vogliono i punti della curva, in cui la celerità c (52) è massima o minima:

Fig. 12 Dall'equazione $b^2 g z^{-2} dz = -cdc$ si impara che operando la forza centrale al solito (52) la celerità è massima o minima, quando il raggio vettore o di qua o di là da C si confonde coll'asse CS.

55

13 Determinare la trajettoria d'un mobile lanciato obliquamente con una data celerità C.

Sia la data celerità C quella a cui è dovuta l'altezza $a = AB$, sia $BD = S$ lo spazio che la forza istantanea farebbe percorrere al corpo B nel tempo T, se la forza centrale non lo facesse scendere in egual tempo t per la verticale $DM = s$: sarà $S^2 = 4as$, equazione alla parabola, il cui diametro è BC, il parametro $4a$, e l'angolo delle coordinate BD, DM uguale BDE complemento dell'angolo DBE di projezione.

56

Trovare una formula, dove tutta si contenga la teoría della Balistica.

Fatto $BE = x$, $EM = y$, t la tangente dell'angolo, che l'asse del cannone dee far con l'orizzonte, ed a la forza della polvere: sarà (55) $x^2 (t^2 + 1) - 4a(tx - y) = 0$.

57

Fig. 13 Data la forza della polvere, trovar l'angolo a cui dee porsi il cannone, onde colpisca il dato scopo S, S′, S″.

Fatto $BS' = x = b$, $SS' = y = c$ si avrà l'angolo cercato per mezzo della sua tangente $t = \frac{2a \pm \sqrt{(4a(a-c) - b^2)}}{b}$.

Se lo scopo S sia sopra l'orizzontale BG; $t = \frac{2a \pm \sqrt{(4a^2 - b^2)}}{b}$, se lo scopo S′ è nell'orizzonte: $t = \frac{4a \pm \sqrt{(4a(a+c) - b^2)}}{b}$, se S″ sia sotto l'orizzonte; prendendo sempre l'angolo più grande, allorchè lo scopo da colpirsi è un piano orizzontale come un tetto ec., e il più piccolo quando lo scopo è un piano verticale come un muro ec.

58

Data la forza della polvere trovar il massimo tiro, o la massima distanza orizzontale BG, a cui può giugnere la bomba B:

Col calcolo de' massimi e de' minimi troveremo $t = 1$ (56) massimo cercato: cioè il massimo tiro si avrà quando il cannone farà coll'orizzonte un angolo semiretto.

59

Dato l'angolo del cannone, e l'ampiezza del tiro, trovare la forza della polvere.

Sarà $a = \frac{b^2(1 + t^2)}{4(bt - c)}$ (56).

60

Fig. 13 Dato lo scopo S, trovar la minima forza della polvere, che potrà farvi giugnere la palla B.

Sarà $a = \frac{c + \sqrt{(b^2 + c^2)}}{2}$ (56) minima carica cercata.

61

Qual sarà la trajettoria d'un mobile animato da due forze BC, BD tra loro normali in modo che la forza centrale acceleratrice g' stia alla solita forza g di gravità come il doppio $2a$ della consueta verticale
1 AB (55) al raggio vettore $CB = r$.

Fatti $BD = S$, $DM = s$ gli spazj che le due forze finite istantanea e centrale farebbero scorrere al corpo in egual tempo infinitesimo: sarà $S^2 = 2rs - s^2$ equazione alla trajettoria cercata, che atteso l'angolo retto delle coordinate è un circolo del raggio $CB = r$.

62

Il moto del mobile nella trajettoria circolare è uniforme.

63

$DM = BL = \frac{BM^2}{EB}$: cioè lo spazio BL, che la forza centrale farebbe trascorrere al mobile in un istante, eguaglia il quadrato dell'arco BM, che realmente trascorre diviso pel diametro del circolo.

64

Fig. 1 Poste $F, F', C, C', t, t, m, m', r, r'$, le forze centrali, le celerità, i tempi periodici, le masse, i raggi in due diverse circonferenze EMB, GNH, sarà 1.° $F : F' :: \frac{C^2 m}{r} : \frac{C'^2 m'}{r'}$: cioè nelle trajettorie circolari le forze centrali sono in ragion diretta composta delle masse, e dei quadrati delle loro celerità, ed inversa dei raggi. 2.° $F : F' :: \frac{rm}{t^2} : \frac{r'm'}{t'^2}$: cioè le forze centrali sono in ragion diretta composta delle masse e dei raggi, ed inversa dei quadrati dei tempi periodici. 3.° $F : F' :: \frac{Cm}{t} : \frac{C'm'}{t'}$; cioè le forze centrali sono in ragion diretta composta delle masse e delle loro celerità, ed inversa dei tempi periodici.

65

Se le forze centrali F, F' sieno reciprocamente come i quadrati delle distanze dal centro c, sarà $r^3 : r'^3 :: t^2 : t'^2$, cioè i quadrati de' tempi periodici di due mobili eguali, che girano in due diverse circonferenze sono come i cubi dei raggi.

Comunicazione del moto.

66

Trovare le celerità dopo l'urto *diretto* di due corpi in qualunque grado elastici.

Dette $C, \pm c$ le celerità prima dell'urto de' due corpi M, m, C', c' le celerità loro dopo l'urto, e posto $n = 1$, o $n > 1$, o $n < 2$, o $n = 2$, sarà

Per gli elastici in generale $C' = C - \frac{nm(C \mp c)}{M+m}$, $c' = \frac{nM(C \mp c)}{M+m} \pm c$.

Per li perfettamente elastici $C' = C - \frac{2m(C \mp c)}{M+m}$, $c' = \frac{2M(C \mp c)}{M+m} \pm c$.

Per li perfettamente molli $C' = c' = \frac{MC \pm mc}{M+m}$.

67

Trovar la massa y d'un corpo elastico tale, che posto in mezzo ai due elastici M, m, il corpo M, che solo si muove, imprima ad m la massima possibil celerità.

Per mezzo del calcolo differenziale dopo un breve discorso, si troverà $y = \sqrt{Mm}$, valore, che esprime un massimo: onde la massa cercata y dee esser media proporzionale tra le due date.

68

Si vogliono le celerità dopo l'urto *obliquo* di due corpi comunque elastici.

Fig. 14 Sia $Ao = a$, $ao = b$, l'angolo $AOB = h$, $aob = k$, si avrà (66) $C' = a \cos h - \frac{nm(a \cos h \mp b \cos k)}{M+m}$

Fig. 14 $c' = \frac{nM(a\cos h \mp b\cos k)}{M+m} \pm b\cos k$, e prese $OE = C'$, $oe = c'$, ed alzate da E, e le normali EG, *eg* eguali ad AB, *ab*, si avranno le celerità dopo l'urto espresse dalle diagonali OG, *og*.

69

Trovar la celerità C', e la direzione di M dopo l'urto, quando *m* è un ostacolo insuperabile, e in riposo.

Sarà (66) $C' = (1 - n)C$, e di qui si ha 1.° che un corpo investendone un altro obliquamente, che non può smuovere se sia perfettamente molle non si riflette, e solo scorre per OF perpendicolarmente alla linea dei centri; 2° se sia perfettamente elastico si riflette con una celerità ON eguale alla primitiva AO, e fa con OB l'angolo di riflessione eguale all'angolo d'incidenza.

Moto de' solidi ne' fluidi.

70

15 Passi il solido $A = M$ normalmente per AB dal mezzo AI nel mezzo IH l'uno e l'altro tranquilli. Chiamata C la celerità del solido, sarà $C' = C - \frac{nmC}{M+m}$ (66) dal che si ha 1.° che il corpo A urtando

Fig. 15 il fluido IH direttamente in B continua a muoversi per BD nella direzion di prima, 2° che il corpo A nel passaggio dell'uno all'altro fluido perde parte di sua prima celerità.

71

Sieno d, d' le densità dei fluidi AI, IH, e u il volume che nell' uno, e nell' altro è percosso da A. Posta C la primitiva celerità di A in ambedue i casi, sarà (66) $C' = C\left(1 - \frac{n\,d\,u}{M + d\,u}\right)$ (nel primo) $C'' = C\left(1 - \frac{n\,d'\,o}{M + d'o}\right)$ (nel secondo) e posta $d' > d$ si saprà che se la densità del fluido HI superi quella del fluido IA, anche la celerità, con cui A uscito da HI si muove per IA supererà reciprocamente quella con cui uscito da AI si muove per IH.

72

Se passi il corpo E obliquamente da AI in IH con la celerità EB, 1.° la celerità e la direzione del corpo E nel passaggio obliquo da uno in un altro mezzo eterogeneo si cangia, 2° condotta per B di passaggio la normale AD su la superficie IG dei mezzi contigui, il corpo se ne allontana, o vi si avvicina secondo che da un mezzo passa in un altro più o meno denso, eccettuata la luce che non si rifrange così.

STATICA.

Leva.

73

Fig. 16 Due potenze applicate nel medesimo piano ad una leva, ed i nequilibrio, stanno fra loro in ragion reciproca delle normali condotte dal punto d'appoggio su le loro direzioni.

Leva del primo genere.

74

17 Sia una leva $AB = 2a$ d'un qualunque peso uniforme, g la sua densità, e vogliasi la distanza $Cp = x$ del centro C di gravità da un tal punto d'appoggio p, che sopra di lui tutto il sistema sia in equilibrio.

Posta la forza $= f$, la resistenza $= r$ sarà $x = \frac{a(f - r)}{f + r + 2ag}$.

Secondo genere.

75

18 Supposte tutte le denominazioni di prima, vogliasi la distanza $AB = x$ della forza F da un tal pun-

Fig. 18 to B, che posta in B la resistenza, tutto il sistema sia equilibrio.

Sarà $x = \frac{2a(ag + r - f)}{r}$.

76

18 Fissato il punto B della resistenza, sicchè sia $Bp = b$, si cerca la lunghezza $Ap = 2z$ della leva, onde si abbia l'equilibrio con la minima forza possibile.

Sarà $2z = \sqrt{\left(\frac{2br}{g}\right)}$, ed $f = \sqrt{2bgr}$, minimo cercato.

Terzo genere.

77

19 Ritenute tutte le denominazioni di sopra vogliasi la distanza $BA = x$ della resistenza R da un tal punto A, che posta la forza in A tutto il sistema sia in equilibrio.

Sarà $x = \frac{2a(f - r - ag)}{f}$.

Bilancia.

78

20 Determinar la natura d'una perfetta bilancia.

I. Posta f la merce da pesarsi nel piatto F, r il peso da porsi in R per aver l'equilibrio, g il peso dell' asta AB, $AB = 2a$, $Bp = x$, sarà $x = \frac{2af}{f+r}$. Di qui si

Fig. 20 ha 1.° che non può esservi eguaglianza tra il peso e la merce, se le braccia Ap, Bp della bilancia non sieno eguali, 2° non è punto necessario che le braccia Ap, Bp sieno egualmente pesanti, e purchè il peso dei piatti e lor dipendenze produca l'orizzontalità dell'asta AB è indifferente per l'equilibrio, che il centro G di gravità sia in LO, o in GG; ma se sia in LO, la bilancia sarà migliore.

II. La perfetta bilancia nè deve esser pazza inclinandosi stranamente ad ogni più piccola ineguaglianza tra f, ed r, nè deve esser sorda mantenendo l'equilibrio tra f, ed r sensibilmente ineguali. Aggiunta però in F una merce f'' che conduca la bilancia in apb, onde sia l'angolo D$pa = n$, il dato OpG $=$ C, A$p = a$, pG $= p$H $= h$, sarà $tang\, n = \frac{f''}{\frac{h.g}{a} \cos C}$. Dunque 1.° la bilancia sarà tanto men sorda quanto le sue braccia saranno più lunghe, purchè non s'incurvino; 2.° se il centro G di gravità cada nell'asta AB sarà $tang\, n = \infty$, ed $n = 90°$, cioè la bilancia con l'aggiunta della più piccola merce f'' traboccherà interamente: si eviterà pertanto questo disordine, costruendo la bilancia in modo che i quattro punti A, p, G, B non si trovino insieme in una sola retta; 3.° la bilancia sarà tanto men pazza, quanto è più piccolo l'angolo OpG.

Fig. 20 III. Supposto che una forza straniera ϕ normalmente applicata ad una distanza qualunque $p\mathrm{E} = m$ possa tener la bilancia nella situazione $\mathrm{A}p\mathrm{B}$, si troverà $\phi\, m = gh \cos c \operatorname{sen} n$, e però la bilancia ricupererà tanto più facilmente la posizione orizzontale 1.° quanto più sarà stata rimossa, 2° quanto saran più lunghe le sue braccia, 3° quanto più sarà G vicino ad LO, 4.° quanto più sarà G lontano da p.

Statera.

79

21 Sia f' il peso del piatto vuoto F, e delle sue dipendenze, f la merce che vuol pesarsi, r il peso del romano R, ed il peso dell' asta uniforme $\mathrm{A}m = g$. Supposto che il romano situato in o faccia equilibrio col piatto vuoto, e situato in m lo faccia colla merce f: sarà $f = \frac{r.om}{\mathrm{A}p}$: dunque 1.° diviso il braccio om in n parti eguali ciascuna ad $\mathrm{A}p$, sarà $f = nr$: 2° se il romano pesi una libbra, e posto in k si equilibri con f, sarà $f = 2^{\text{lib.}}$, ec. 3° moltiplicando le divisioni di om potrà pesarsi qualunque parte ancor minima della libbra.

Puleggia.

80

Fig. 22 Nella puleggia fissa, si avrà sempre in caso di equilibrio $f.\,Ap = r.\,Bp$: cioè la puleggia fissa non apporta alcun vantaggio alla forza, e serve solo a cangiarne la direzione.

81

23 Fatto $Cp = a$, l'angolo $pCD = x$, posto il raggio $R = a$, per la puleggia mobile si avrà in caso d'equilibrio $f = \frac{ar}{2\,sen\,x}$.

82

Nella puleggia mobile quand'è che vi vuole la minima, e quando la massima forza per l'equilibrio?

Si avrà $\frac{df}{dx} = \frac{-a\,r\,co\,x}{2\,sen^2 x}(81) = o$, cioè la forza è minima quando l'angolo pCD è retto: divenendo picciolissima, o nulla la leva Ap vi vuole per l'equilibrio una forza grandissima, o infinita.

83

24 In un sistema di puleggie mobili, ove ciascuna è sostenuta da una distinta fune, in tal guisa che fa figura e di resistenza riguardo alla superiore, e di forza riguardo all'inferiore: dette r'', r', r le resistenze in R'', R', R, a'', a', a i raggi delle puleggie, avremo

Fig. 24 per l'equilibrio $f = \frac{a'' a' a\, r}{8\, sen\, x''\, sen\, x'\, sen\, x}$. E se le funi sien parallele alla direzion della resistenza, verrà $f = \frac{r}{2^3}$, cioè in generale, quando in questo sistema le funi son parallele, la forza sta alla resistenza, come l'unità a quella potenza di 2, che ha per esponente il numero delle puleggie mobili.

84

In un sistema orizzontale di puleggie mobili, ove ciascuna è sostenuta da una fune medesima, e portando insieme col nodo R′ una porzione R′′′′, R′′′, R′′ del peso $R = r$ fa solamente figura di resistenza, in caso di
25 equilibrio si ha $\frac{2 f\, sen\, x''}{a''} + \frac{2 f\, sen\, x'}{a'} + \frac{2 f\, sen\, x}{a} + f = r$. E se le funi sono parallele $f = \frac{r}{7}$, cioè quando in questo sistema le funi son parallele, la forza sta alla resistenza come l'unità al numero delle funi che sostengono il sistema mobile.

Argano.

85

27 Detto il raggio $pB = a$, $pD = A$ sia per l'equilibrio $f = \frac{a r}{A}$; cioè nell'argano la forza sta alla resistenza, come la somma dei raggi del cilindro, e della fune al raggio del circolo, o ruota GHD.

86

Fig. 27 Perchè la resistenza si muova colla massima possibile celerità, qual deve essere il valore del raggio pD rispetto al raggio pB?

Come la radice della massa m' della resistenza alla radice della massa m della forza.

87

Sia GuH il quadrante della ruota, in cui caminano per esempio tre uomini u, u', H posti ad eguali distanze Gu, uu', $u'H$ e presso a poco di un'egual massa uguale 150$^{\text{lib.}}$, se si suppongano due le ruote, i sei uomini faranno equilibrio ad una resistenza $r = \frac{300\,A}{a} \cdot \frac{(s + \cot 15^\circ)}{2}$

Ruote dentate

88

Supposti A, A′, A″ i raggi delle ruote, a, a', a'' quelli dei rocchetti, ed r'', r', r le resistenze in R″, R′, R

28 avremo in caso d'equilibrio $f = \frac{a\,a'\,a''\,r}{A\,A'\,A''}$: cioè nelle ruote dentate la forza sta alla resistenza come il prodotto di tutti i raggi dei rocchetti al prodotto di tutti quelli delle ruote.

89

Sia N il numero dei denti della ruota F″, da cui suppongo cominci il moto, ed n il numero dei denti o

Fig. 28 ali del rocchetto R′, sarà la celerità della prima ruota F″ a quella dell'ultimo rocchetto F″ come nn' ad NN′, cioè in generale come il prodotto del numero dell'ali di tutti i rocchetti al prodotto del numero dei denti di tutte le ruote.

90

Date le ruote F″, F′, e i rocchetti R′, R″ trovare un tal numero di denti per quelle, e di ali per questi, che mentre F″ fa un giro R″ ne faccia 60.

Sarà (89) $\frac{NN'}{7 \cdot 8} = 60$, e i numeri $N = 60$, $n = 8$, $N' = 56$, $n' = 7$ ponno soddisfare al problema:

Piano inclinato.

91

29 Sia l'angolo $MCp = n$, $GFC = z$ angolo d'inclinazione della forza F sul piano AD, e chiamate f, r la forza e la resistenza: sarà $f = \frac{r \, sen \, n}{cos \, z}$, cioè nel piano inclinato la forza sta alla resistenza come il seno dell'angolo d'elevazione al coseno dell'angolo d'inclinazione.

92

Se la direzione FC della forza sia normale alla resistenza CM, sarà $f = \frac{ar}{b}$ (91), cioè se nel piano inclinato la forza agisca normalmente alla resistenza, l'una sarà all'altra come l'altezza del piano alla sua base.

93

Fig. 29 Per essere la forza in caso d'equilibrio sul pian inclinato la minor possibile, qual direzione dovrà avere collo stesso piano?

Sarà $\frac{df}{dz} = \frac{r \; sen \; n \; sen \; z}{cos^2 z} = o$: cioè nel piano inclinato allora è bastante per l'equilibrio la minor forza possibile, quando la direzione della forza è parallela a detto piano.

94

Se il corpo C sia tra due piani inclinati ABD, DQX, l'uno o l'altro di essi farà le veci della forza F, e ne avrà tutte le proprietà; onde sarà anche qui $f = \frac{r \; sen \; n}{cos \; z}$ (91).

Vite.

95

30 Fatto il raggio $R'p = c$, e la leva $pF = h$, il pane della vite $= a$, si avrà per la vite in caso d'equilibrio $f = \frac{ar}{2h\pi}$: cioè nella vite la forza sta alla resistenza come il pane a della vite alla circonferenza descritta dalla leva Fp.

Vite infinita.

96

Fig. 31 Sia h il raggio Fp della leva, n il raggio $R''p$ della ruota dentata, m il raggio $p'R'$ del rocchetto, f la forza in F, ed r'', r', r le resistenze in R'', R', R: sarà $f = \frac{amr}{2hn\pi}$: cioè nella vite infinita la forza sta alla resistenza come il prodotto del pane a della vite nel raggio del rocchetto al prodotto del raggio della ruota dentata nella circonferenza descritta dalla leva Fp.

Cuneo.

97

32 Nel cuneo A D C, 1.° se la gravità, o resistenza $R' + R''$ agisca nella direzione M N normale alla forza B E, posto il semidorso $AB = BC = d$, l' altezza $BD = a$: sarà $f = \frac{dr}{a}$; cioè la forza impressa normalmente sul dorso del cuneo isoscele sta alla resistenza che agisce per M N normale a B D, come il semidorso d all' altezza a. 2° Se la gravità $R''' + R''''$ agisca nelle direzioni M B, N B normali alle lunghezze $AD = \lambda$, $CD = \lambda'$ del cuneo sia egli isoscele, o scaleno, sarà $f = \frac{2dr}{\lambda + \lambda}$; cioè la forza impressa normalmente sul dorso del cuneo sta alla somma delle resistenze, che agiscono normalmente su i lati A D, C D come il dorso $2d$ alla somma dei lati $\lambda + \lambda'$.

Attrito de' corpi, e rigidezza delle funi.

98

Fig. 29 Sia a l'attrito, s la pressione, r la resistenza o peso di G, n l'angolo ADB d'elevazione del piano, t l'angolo BAD d'attrito; sarà 1.° $a : r :: sen\ n : 1$, cioè l'attrito al peso del corpo C, come il seno dell' angolo d'elevazione al raggio: 2.° $a : s :: 1 : \text{tang.}\ t$; cioè l'attrito alla pressione, come il raggio alla tangente dell' angolo d'attrito.

99

27 Sia nell'argano l'angolo $CIL = t$, $pI = a'$ raggio del pernio, $pL = q$ distanza del centro della ruota dal punto di concorso delle due forze f, r, $pLI = \Theta$, m l'angolo pLF, n l'angolo pLR; Sarà $f = \frac{r\, sen\,(n + \theta)}{sen\,(m - \theta)}$ espressione della forza, che in caso d'equilibrio è necessaria nell'argano.

100

Dunque 1.° Trovato $sen\ \theta = \frac{a' \cos t}{q}$, se l'attrito sia o, si troverà come sopra (85) $f = \frac{a\, r}{A}$: 2.° se le direzioni LR, LF della resistenza e forza sieno parallele, sarà $f = \frac{r\,(a + a' \cos t)}{A - a' \cos t}$: 3° preso l'angolo $pLI' = pLI$ la risultante delle due forze dirigendosi per LI' favorisce la forza più che se mancasse l'attrito, mentre dirigen-

Fig. 27 dosi per LI era più svantaggiosa alla forza stessa: 4° se
21 nella stadera si faccia $pL = A, pA = a, pu = a'$, a-
20 vremo del pari $f = \frac{r(a + a' \cos t)}{A - a \cos t}$, e se nella bilancia, o
22 nella puleggia fissa si faccia $pA = pB = A = a$,
$pu = a'$ avremo pure $f = \frac{r(a + a' \cos t)}{a - a' \cos t}$.

101

Sia l'angolo $CID = t$ nel piano inclinato, $CF = f$, $CM = r$, $MCp = n$, $FCp = m$, $pCI = \theta$, sarà
29 $f = \frac{r \,sen\, (n + \theta)}{sen\, (m - \theta)}$ espressione della forza F quand'è sul
punto di far salire strisciando il corpo C per DA, ed
$f = \frac{r \,sen\, (n - \theta)}{sen\, (m + \theta)}$, espressione della forza quand'è sul pun-
29 to di lasciare scendere strisciando il corpo C per AD.

102

Se C debba salire, o scendere per DA quand'è che si avrà l'equilibrio con la minima forza?

Troveremo $\frac{df}{dm} = \frac{- r \,sen\, (n + \theta) \cos (m - \theta)}{sen^2 (m - \theta)} = o$,

e di qui s'impara, che sarà minima, quando la direzione della forza F prolungata al di là di C verso D faccia col piano AD un angolo eguale al complemento θ dell'angolo d'attrito. E così troveremo che nella discesa sarà minima, quando l'angolo $CFI' = \theta$.

103

Trovato l'angolo B A D $= t = 71°, 34'$, quale si trova infatti in un gran numero di materie mediocremente levigate, o eguale a $75°, 58'$, o eguale a $78°, 41'$, come si trova in materie sempre più ridotte a pulimento: qual sarà l'attrito in questi tre casi?

Sarà, 1.° $\frac{1}{3}$, 2.° $\frac{1}{4}$, 3.° $\frac{1}{5}$ della pressione.

104

Sieno D, d i diametri di due funi della stessa specie, A, a i raggi de' cilindri o ruote ch' esse circondano, P, p i pesi che sostengono: determinare le rigidezze R, r, o le forze F, f che per vincere la rigidezza dovranno aggiugnersi alla solita forza prescritta dalla teoría.

Sarà $R : r :: F : f :: \frac{DP}{A} : \frac{dp}{a}$, cioè le forze adoperate a piegarle dovranno esprimersi con la ragion composta diretta dei diametri e de' pesi, ed inversa dei raggi delle ruote, o cilindri.

Nel Teatro dell' Arti del Collegio-Seminario
l'anno 1796
sotto l'assistenza del Signor GIO. PIETRO TONELLI
P. Professore di Fisica.

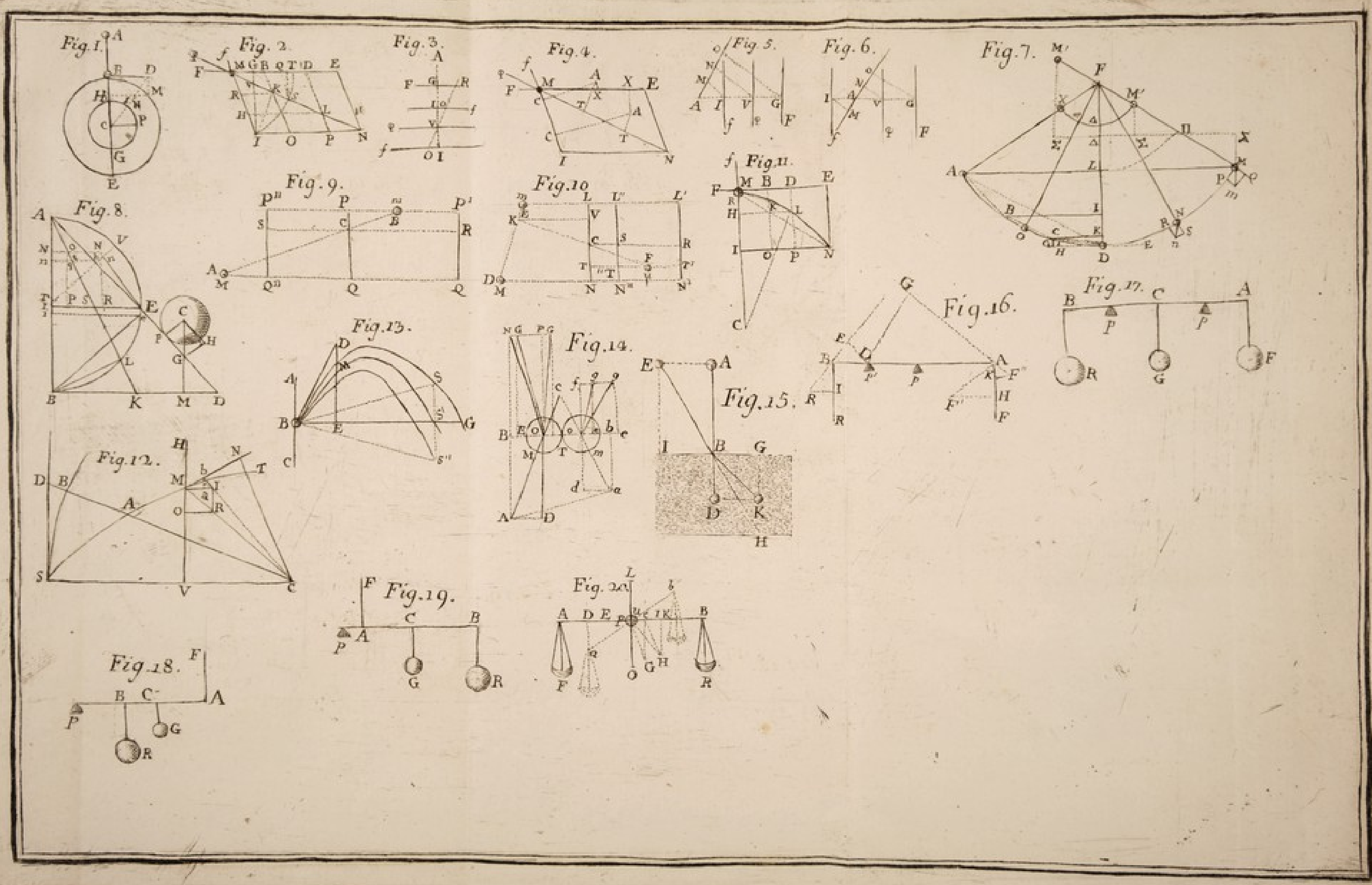
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.

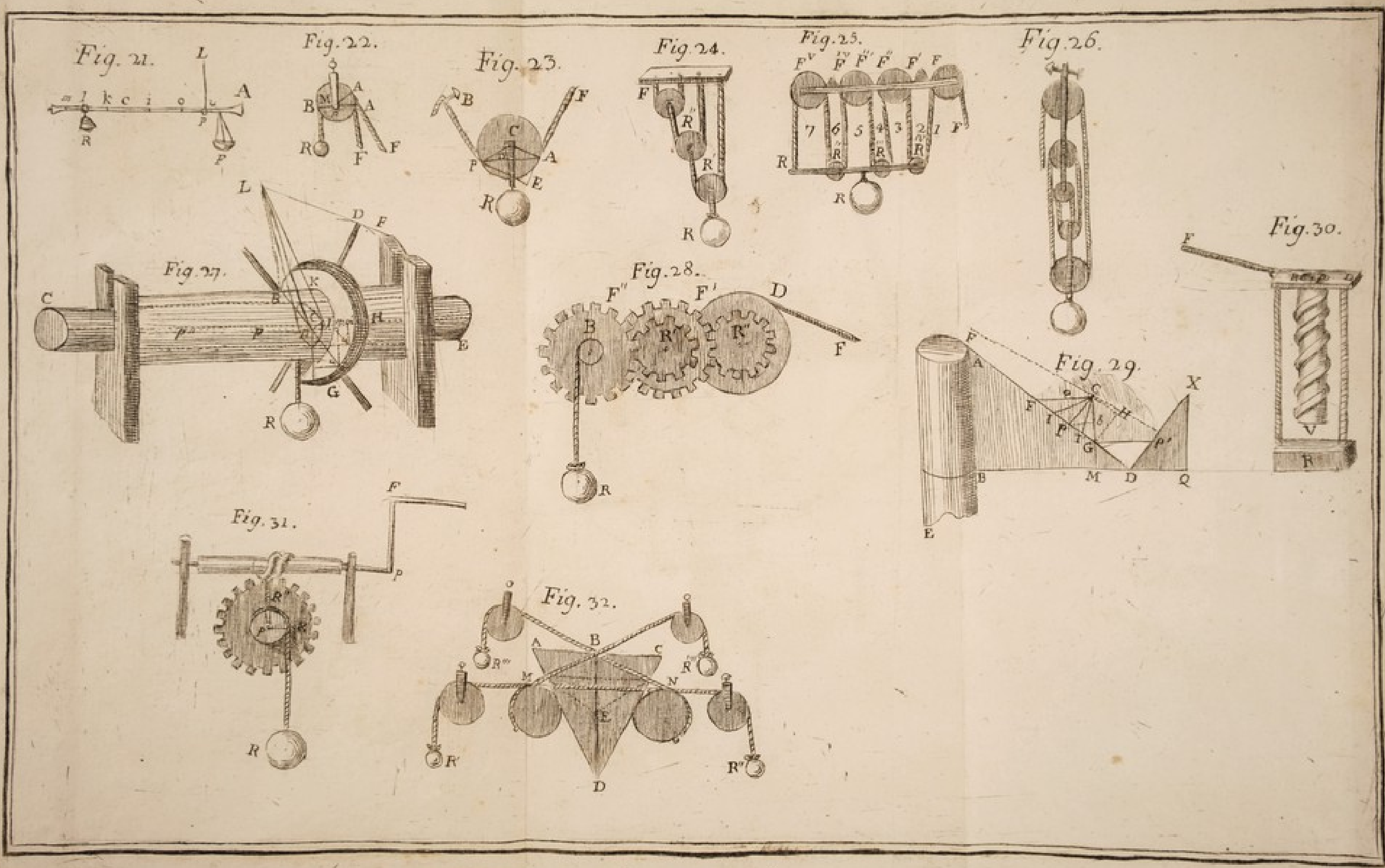
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.