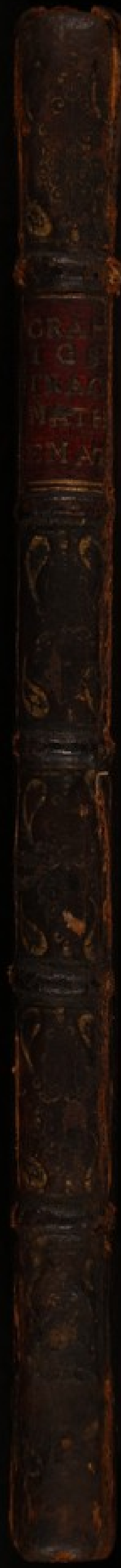

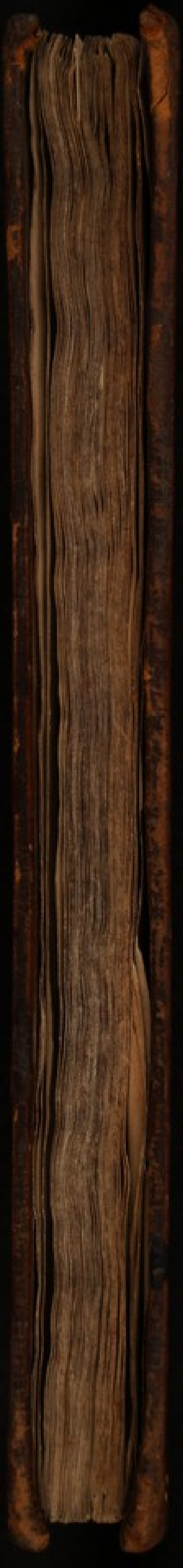

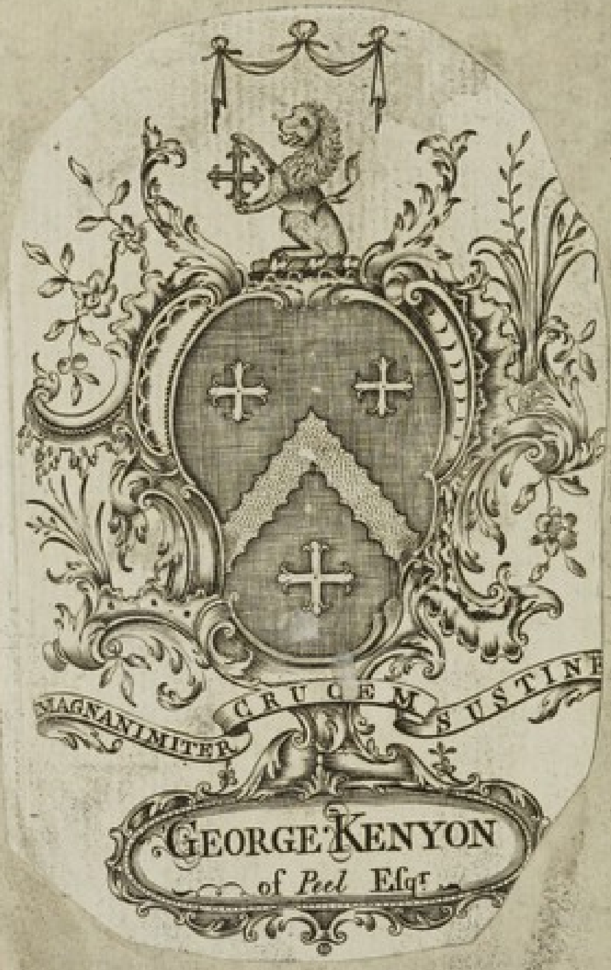
MAGNANIMITER CRUCEM SUSTINE
GEORGE KENYON
of Peel Esqr.

TRACTATUS MATHEMATICUS DE *Figurarum Curvilinearum* QUADRATURIS ET Locis Geometricis.

Autore

JOHANNE CRAIG.

LONDINI:

Proſtant apud *Sam. Smith* & *Benj. Walford*, Societatis Regiæ Typographos, ad Inſignia Principis, in Cœmeterio D. *Pauli*. MDCXCIII.

ad AF (seu AE), & fiat KG$=l=-a$; & quia GN$=$MN$=t=a$, ideo GM$=2t=2a$, coincidentibus proinde punctis K, N. Centro itaque N, latere transverso GM$=2t=2a$, & latere recto $r=2a$ describatur Ellipsis; hoc est centro N (seu K) & radio NG$=$NK$=$NM$=a$ describatur Circulus AGDMO, atque hic erit locus quæsitus, in quo AE$=x$, ED$=y$, & EO$=y$. Ex primis enim Algebræ elementis notum est propositam Æquationem duas habere veras Radices.

FINIS.

---

(2)

METHODUS FIGURARUM LINEIS RECTIS & CURVIS COMPREHENSARUM QUADRATURAS DETERMINANDI.

Authore JOHANNES CRAIGE.

LONDINI:

Impensis *Mosis Pitt*, ad insigne Angeli in Cœmeterio D. *Paulo*, MDCLXXXV.

HONORABILI VIRO

DOMINO

ROBERTO DAWES,

BARONETTO

ANGLO,

TRACTATUM HUNC,

Benevolentiæ & Obſervantiæ ergo,

D. C. Q.

JOHANNES CRAIGE.

Methodus Figurarum, &c.

OPtimè nuper observârunt Geometræ quasdam esse Figuras indefinitæ Quadraturæ capaces, quæ tum quoad totas, tum quoad singulas partes sunt Quadrabiles; Alias vero esse, quæ, licet hujusmodi Quadraturam indefinitam non admittant, aliquam tamen habent portionem quadrabilem, imo tota figura nonnunquam Quadrari potest, cum quælibet ejus pars non possit. Nec credibile est ex alio fonte eorum errorem ortum esse, qui Circuli, Hyperbolæ, & aliarum quarundam figurarum Quadraturas impossibiles existimârunt, quam quia hanc figurarum distinctionem non considerârunt. Methodis enim utentes quæ supponunt figuras esse indefinite Quadrabiles, cum aliquam Quadrandam assumerent, quæ eorum Methodos recusabat, statim illius Quadraturam impossibilem esse crediderunt; cum exinde amplius non esset concludendum, quam Methodos quibus usi sunt esse imperfectas, & ad omnes figuras non extendere. Sed cum institutum meum non sit aliorum errores detegere, ast quid in hac materia excogitavi paucis exponere; Methodum hic tradam (non ex Arithmeticis ſed Geometricis principiis deductam) quæ figurarum utriuſque generis quadraturas determinabit. Prioris generis Geometricas, poſterioris verò Algebraicas quadraturas per ſeries infinitas exhibebit. Et quia Methodus quæ ſpeciales talium figurarum quadraturas determinet, à nemine hactenus vulgata eſt, ſperamus præclarum illum Germanum (qui publice eam promiſit, & omnino in poteſtate ſua eſſe aſſeruit, in Actis Eruditorum Lipſiæ publicatis) ſuam brevi in lucem emiſſurum.

Theorema 1.

Fig. 1. SIt Curva quævis V H. (cujus axis V D, applicata H D ad V D perpendicularis) item linea V Z S talis, ut ſi à curvæ puncto libere ſumpto puta E ducatur recta E P ad Curvam, & E A Z ad axem perpendicularis, ſit recta A Z, interceptæ A P æqualis, erit ſpatium V D S $= \frac{DHq}{2}$.

Demonſtratio: Sit angulus H D O ſemirectus, & æqui ſecetur U D, indefinite punctis A, B, C per quæ ducantur, E A Z, F B Z, G C Z ad H D parallellæ, & Curvæ occurrentes in E, F, G à quibus ducantur E I Y, F K Y, G L Y, ad U D parallelæ, quin & rectæ E P, F P, G P, H P ſint Curvæ V H

perpen-

perpendiculares. Est Triangulum HLG simile triangulo PDH (nam ob indefinitam sectionem Curvula GH pro rectâ haberi potest) quare est HL. LG : : PD. DH, adeoque $HL \times DH = LG \times PD$, hoc est, $HL \times HO = DC \times DS$, & simili discursu monstrabitur, quoniam Triangulum GMF triangulo PCG assimilatur, fore $LK \times LY = CB \times CZ$ & similiter erit $KI \times KY = BA \times BZ$, itidem erit $ID \times IY = AV \times AZ$; unde constat triangulum HDO (quod à rectangulis istis $HL \times HO + LK \times LY + KI \times KY + ID \times IY$ minime differt) æquari Spatio VDS ((quod itidem à rectangulis $DC \times DS + CB \times CZ + BA \times BZ + AV \times AZ$ minime differt) hoc est $VDS = \frac{DHq}{2}$. Quod erat Demonstrandum. Nobile hoc Theorema debetur viro Celeberrimo D. Doctori *Barrow*, qui innumera habet, & sublimia Theoremata circa linearum Curvarum proprietates : nec mihi quenquam (quorum Scripta edita sunt) vidisse contigit (imo nec aliis contigisse puto) qui tanto judicio, & Successu tanto, abstrusiorem hanc & minus cultam Geometriæ partem, tractavit & promovit.

Prob. I.

Data relatione inter PM (quæ distantiam inter Curvæ perpendicularem PC & ordinatim applicatam MC designat) & abscissam AM (quæ distantiam inter applicatam & verticem A designat) æquationem invenire Curvæ lineæ AC naturam definientem. Fig. 2.

UT omnes Curvas sub unâ Regulâ generali comprehendam adnoto in quacunque linea Curva AC fore semper PM x MT = CMq propter angulum rectum PCT Quare multiplico singulos terminos PM denotantes per terminum AM (prius in diversos numeros incognitos multiplicatum) & productum pono æquale Quadrato applicatæ CM. Ratio hujus regulæ colligi potest, ex Methodo inveniendi Tangentes à Clarissimo Slusio edita in *Actis Philosophicis* Reg: Societatis Anglicanæ. Exemplis rem illustrabo.

Exemp. 1. *Fig.* 2. Detur PM $= \frac{1}{2}$ r, & vocetur AM *y*, CM *x*, a, b, c, i, &c. denotent quantitates cognitas & determinatas, item *l*, *m*, *n*, *h*. *k* &c. numeros incogitos. Jam juxta regulam multiplico $\frac{1}{2}$ r per ny, & productum $\frac{nry}{2} = x^2$. quæ est æquatio ad parabolam.

Exemp. 2. (*Fig.* 2.) Sit PM $= y + \frac{1}{2} r$ & quærenda sit æquatio illam curvam determinans: procedens secundũ regulam

regulam mnltiplico $\frac{1}{2}r + y$ per ny, my & productum $\frac{nry}{2} + my^2$ pono æquale quadrato ab x, nempe $\frac{nry}{a} + my^2 = x^2$ quæ eſt æquatio ab curvam quæſitam.

Exemp. 3. Eſto P M $= \frac{y^2}{a} + a$ & quæratur curva A C, in qua Sit P M $= \frac{y^2}{a} + a$. multiplico $\frac{y^2}{a} + a$ per ny, my, əritqne productum $\frac{ny^3}{a} + may = x^2$. *Fig.* 2.

Exemp. 4. Sit P M $= \frac{y^4}{aaa} + \frac{y^3}{aa} + \frac{y^2}{a} + y$, & querenda ſit æ quatio iſtius cnrvæ naturam definiens, ſecundum regulam multiplico $\frac{y^4}{a^3} + \frac{y^3}{a^2} + \frac{y^2}{a} + y$, per ny, my, ly, hy, eritque $\frac{ny^5}{a^3} + \frac{my^4}{a^2} + \frac{ly^3}{a} + hy^2 = x^2$ qua eſt æquatio quæſita. *Fig.* 2

Deniqueſit P M $= \frac{a^3}{y^2}$, multiplico $\frac{a^3}{y^2}$ per ny. erit productum $\frac{na^3}{y} = x^2$, vel $na^3 = yx^2$. ſed quia *n*, *m*, *l*, *h*, &c. adhuc ſint incognita, modum oſtendam ea deɜerminɐndi. *Fig.* 3

Prob. II.

Quantitates l, m, n. &c. in præcedenti Problemate uſurpatas determinare.

PEr æquationem inventam inveſtigo P M (procedendo ſecundum vulgarem aliquam methodum inveniendi Tangentes) & ejus valorem comparo cum valore dato, nempe ſingulos hujus cum ſingulis illius terminis quæ comparatio determinabit, *l*, *m*, *n*, &c.

Ut in exemplo primo $\frac{nry}{2} = x^2$, invenio $PM = \frac{1}{4}nr$, hunc valorem comparo cum valore dato ſc. $\frac{1}{2}r = \frac{1}{4}nr$ unde poſt reductionem $n = 2$, quare ſubſtituto hoc valore pro (n) in æquatione $\frac{nry}{2} = x^2$ erit $ry = x^2$.

Sic in exemplo ſecundo $\frac{nry}{2} + my^2 = x^2$, invenio fore $PM = \frac{nr}{4} + my$, jam comparo utroſque hos terminos cum correſpondentibus terminis valoris dati ſc. $\frac{nr}{4} = \frac{r}{2}$ unde $n = 2$, deni $my = y$ unde $m = 1$. ſi ſubſtituantur hi valores prodibit æquatio quæſita & plene determinata $ry + y^2 = x^2$.

Similiter in exemplo 3: $\frac{ny^3}{a} + may = x^2$ inveni $PM = \frac{3ny^3}{2a} + \frac{ma}{2}$, facta igitur debita comparatione ſc. $\frac{3ny^2}{2} = \frac{y^2}{a}$ erit $n = \frac{2}{3}$, & ex $\frac{ma}{2} = a$, erit $m = 2$, & ſubſtitutis his valoribus erit $\frac{2y^3}{3a} + 2ay = x^2$.

Fig. 1. Et in exemplo 4. erit $PM = \frac{5ny^4}{2a3} + \frac{2my^3}{a2} + \frac{2ly^2}{2} + hy$. & facta comparatione horum terminorum cum terminis datis erit $\frac{5ny^4}{2a3} = \frac{y^4}{a3}$, inde $n = \frac{2}{5}$, & ex $\frac{2my^3}{a2} = \frac{y^3}{2a}$ erit $m = \frac{1}{2}$, ex $\frac{3ly^2}{2a} = \frac{y^2}{a}$ erit $l = \frac{2}{3}$, & ex $hy = y$ erit $h = 1$. Et ſubſtituendo hos Valores, erit equatio $\frac{2y^5}{5a3} + \frac{y^4}{2a2} + \frac{2y^3}{3} + y^2 = x$.

Denique in *Exemp*. 5. Eſt $PM = \frac{na^3}{2y2} = \frac{a^3}{y2}$ *Fig.* 3. unde $n = 2$, adeoque $2a^3 = yx^2$, quæ eſt ad Hyperboliformem D C E.

Hæc duo Problemata (vel potiùs duas partes unius Problematis) fuſius ſum proſecutus, eo quod à nemine

nemine adhuc tractata ſint, ſaltem quorum ſcripta ad manus meas pervenerunt; tum maxime, quod horum ope Figurarum Quadraturas ſim determinaturus.

Prob. III.

Parabolæ Quadraturam determinare.

Fig. 4. ESTO parabola VCS cujus latus rectum ſit r. VM vocetur, y, MC, z, unde ex natura parabolæ $\sqrt{ry} = z =$ MC tum per problema primum inveniatur curva VH, talis ut ſit PM $= \sqrt{ry}$ (per PG hic & in ſequentibus intelligenda eſt Curvæ quæſitæ perpendicularis) ſed per methodum jam traditam invenio Curvam quæſitam definiri per hanc equationem $n\,r\,y^3 = x^4$ (per x deſigno applicatas GM, HD Curvæ quæſitæ) & determinando n per Prob. 2. invenies $n = \frac{16}{9}$ unde $\frac{16}{9} r y^3 = x^4$, ac proinde $\sqrt{\frac{4}{9} r y^3} = \frac{x^2}{2} = \frac{GM}{2} q =$ VMC. ut conſtat ex Theoremate jam præmiſſo.

PROB. IV.

Paraboloidis Cubicalis Quadraturam determinare.

ESTO VCS parabolois Cubicalis, VD axis & latus rectum r, & VM $= y$, unde ex natura Curvæ iſtius erit $rry = z^3$ adeoque $\sqrt[3]{rry} = z$, propterea pro determinatione Quadraturæ areæ VMC invenienda eſt Curva (per Prob. 1.) VH talis ut ſit ſemper PM $= \sqrt[3]{rry}$, & procedens ſecundum regulam ibi propoſitam invenio Curvam VH definiri per hanc æquationem $nr^2y^4 = x^6$ & determinando n (per Prob. 2.) inveniens $n = \frac{27}{8}$, adeoque æquationem quæſitam eſſe $\frac{27}{8}r^2y^4 = x^6$, unde $\frac{1}{4}\sqrt[3]{r^2y^4} = \frac{x^2}{2} = \frac{GM}{2}q =$ VMC. Et in hunc modum Quadrantur infinitæ paraboloides quæ definiuntur per $r^3y = z^4$; $r^4y = z^5$, $r^5y = z^6$, &c. *Fig.* 4.

PROB. V.

Paraboloidis Semicubicalis Quadraturam invenire.

Fig. 4. SIT VCS parabolois ſemicubicalis, cujus hæc eſt proprietas $ry^2 = z^3$, unde $\sqrt[3]{ry^2} = z^1$, invenienda igitur eſt Curva VH in

qua

qua PM $= \sqrt[3]{r y^2} =$ MC; & per problema primum invenio illam definiri per hanc æquationem $n r y^5 = x^6$; & ut determinetur n procedo in hunc modum per Prob. 2. quæro PM ex æquatione inventa $n y^5 r = x^6$, & invenio PM $= \frac{5 n r y^4}{\sqrt[3]{216 n^2 r^2 y^{10}}}$ & facta comparatione cum dato Valore erit $\frac{5 n r y^4}{\sqrt[3]{216 r^3 y^{10}}} = \sqrt[3]{r y^2}$, unde provenit $n = \frac{216}{125}$ post debitam reductionem, adeoque Curva VH definitur per $\frac{216 r y^5}{125} = x^6$. unde erit $\frac{3}{5} \sqrt[3]{r y^5} = \frac{x^2}{2} = \frac{GM}{2} q =$ VMC. Et eodem modo Quadrari possunt paraboliformes infinitæ, quæ definiuntur per $r y^3 = z^4$, $r y^4 = z^5$, $r y^5 = z^6$ &c.

Prob. VI.

In Hyperbola OCN quadranda sit Area interminata OCMVL.

Fig. 4. Esto Hyperbolæ potentia $= a^2$, unde $\frac{a^2}{y} = z$, inquirenda igitur est Curva VH talis ut in ea sit semper PM $= \frac{a^2}{y}$ at nullam esse hujusmodi Methodus jam tradita statim deprehendit: nam juxta regulam multiplicanda est $\frac{a^2}{y}$ per $n y$, & productum

$n\,a^2$ non poteſt poni æquale x^2, Quadratum determinatum nequit æquari Quadrato indeterminato, ac proinde concludendum eſt Spatium interminatum non eſſe Quadrabile: nam ſi daretur illius Quadratura, daretnr etiam Curva quædam V H in qua eſſet ſemper $PM = MC$.

Prob. VII.

Hyberboliformis OCN cujus hæc ſit proprietas $y\,z^2 = a^3$ Quadraturam determinare Areæ Interminatæ OCMVL.

Fig. 5. Quoniam ex natura Curvæ $\sqrt{\frac{a^3}{y}} = z = MC$ quærenda eſt curva V H in qua ſemper ſit $PM = \sqrt{\frac{a^3}{y}}$, atque per *Prob.* 1. Invenio Curvam V H definiri per $n\,a^3 y = x^4$ & determinando n per *Prob.* 2. Invenies $n = 16$, adeoque $16\,a^3 y = x^4$ unde Spatium interminatum $OCMVL = 2\sqrt{a^3 y}$.

Prob. VIII.

PROB. VIII.

Sit natura Hyperboliformis definita hac æquatione $y z^3 = a^4$, & Quadranda ſit Area interminata OCMVL.

EX natura curvæ $\sqrt[3]{\frac{a^4}{y}} = z$, & invenietur curva VH in qua PM $= \sqrt[3]{\frac{a^4}{y}}$ definiri per $27 a^4 y^2 = x^6$, Unde $\frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 y^2} = \frac{x^2}{2} = \frac{GM}{2} q =$ OCMVL. Et ſic quadrantur Hyperboliformes infinitæ definitæ per $y z^4 = x^5$, $y z^5 = x^6$, $y z^6 = x^7$, &c.

PROB. IX.

In Hyperboliformi OCK cujus hæc ſit proprietas $y^2 z = a^3$ Quadranda ſit aeræ interminata OCMVL.

Fig. 6. EX hujus curvæ natura manifeſtum eſt $z = \frac{a^3}{y^2} =$ MC quare Quærenda eſt curva aliqua, ut diſtantia inter ejus perpendicularem & applicatam ſit æqualis $\frac{a^3}{y^2}$, & procedendo ſecundum uſitatam Methodum invenio Curvam quæſitam definiri per $y x^2 = n a^3$ & determinando (n) per Prob. Secundum erit $n = 2$ adeoque æquatio eſt $2 a^3 = y x^2$, quæ itidem eſt æquatio ad Hyberboliformem (ſed alterius naturæ) SGH; & quoniam

illius perpendicularis G P, inter verticem & applicatam cadit, vel ſurſum tendit ideo $\frac{a^3}{y} = \frac{x^2}{2} =$ KCMD Et Aream O C M V L eſſe ex earum numero quas Geometræ vocant pluſquam infinitas, jam monuit clariſſimus Noſtras D. *David Gregorius* in pulcherrimo ſuo Tractatu, de Dimenſione Figurarum.

PROB. X.

Sit A C D curva talis ut ducta ut cunque M C ad A D normali, ſit poteſtas quævis ipſius A D ad ſimilem poteſtatem partis A M, ut poteſtas quævis partis D M ad ſimilem poteſtatem applicatæ M C, & determinanda ſit Quadratura Areæ A M C.

Fig. 7. ESTO AD $= b$, & exponens illius poteſtatis 2, A M vocetur y unde etiam exponens illius poteſtatis eſt, 2 eſto præterea exponens poteſtatis lineæ D M ſeu $b - y$, (1) adeoque exponens applicatæ M C ſeu z eſt 1, tum ex naturæ lineæ curva. $b^2 \, y^2 :: b - y . z$ unde $z = \frac{by^2 - y^3}{b^2}$, Quæratur ergo curva AH in qua ſit P M $= \frac{by^2 - y^3}{b^2}$, invenieturque per Prob. 1. & 2. illam definiri per $\frac{2}{3} b y^3 - \frac{1}{4} y^4 = b^2 x^2$, *und* $\frac{y^3}{3b} - \frac{y^4}{4bb} = \frac{x^2}{2} =$ A MC. Atque hæc eadem eſt curva de qua loquitur D. *Carteſius* in *tom.* 3. Epiſt. pag. 219. quam præferendam putat (ob conſtructionis facilitatem) curvæ quam Galli vocant *la Galande*.

Prob. XI.

Determinanda sit Quadratura Areæ AMC, & definiatur natura Curvæ per $y^5 + ay^4 + a^2y^3 + a^3y^2 + a^5 = a^4z$. Fig. 4.

Quærenda est Curva VH, talis ut in ea sit semper $PM = MC = z = \frac{y^5}{a^4} + \frac{y^4}{a^3} + \frac{y^3}{a^2} + \frac{y^2}{a} + a$. Et per Prob. 1. definietur per $ny^6 + may^5 + la^2y^4 + ka^3y^3 + ha^5y = a^4x^2$ & determinando n, m, l, k, h (per *Prob.* 2.) erit $n = \frac{1}{3}$ $m = \frac{2}{5}, l = \frac{1}{2}, k = \frac{2}{3}, h = 2$; adeoque æquatio quæsita est $\frac{1}{3}y^6 + \frac{2}{5}ay^5 + \frac{1}{2}a^2y^4 + \frac{2}{3}a^3y^3 + 2a^5y = a^4x^2$, adeoque $\frac{y^6}{6a^4} + \frac{y^5}{5a^3} + \frac{y^4}{4a^2} + \frac{y^3}{3a} + ay = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} = AMC$.

Atque hactenus solas illas figuras tractavi quæ sunt indefinitè Quadrabiles, & quantillo labore earum Quadraturæ, per hanc Methodum determinentur, aliis judicandum relinquo: Ad illas jam progredior quæ hujusmodi Quadraturam respuunt: & expresse moneo me Quadraturas quas hic exhibiturus sum per series infinitas, non pro Geometricis sed Algebraicis vel Arithmeticis habere.

Prob. XII.

Circuli Quadraturam determinare.

A Circulo initium faciam, qui omnium linearum curvarum ſimpliciſſima eſt, ſi curvæ ſimplicitas non ex æquationis, ſed deſcriptionis (ut re verâ debet) ſimplicitate æſtimetur.

Fig. 8. Sit itaque Circuli Quadrans ASD in quo AM vocetur y, & ordinata MC z, & radius AL $= r$, tum ex Circuli natura erit $z^2 = r^2 - y^2$, ac proinde $z = \sqrt{r^2 - y^2}$ hunc valorem reſolvo in ſeriem ſecundum Methodum celeberrimi D. *Iſaaci Newtoni*, & invenio $z = r \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} - \frac{y^6}{16r^5}$ ----- &c. quærenda igitur eſt Curva AGH in qua PM $= r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} - \frac{y^6}{16r^5}$ ----- &c. & invenietur per Prob. primum Curvam quæſitam definiri per hanc æquationem.

$$nry - \frac{my^3}{2r} - \frac{ly^5}{8r^3} - \frac{ky^7}{16r^5} = x^2;$$ & determinando. Quantitates, n, m, l, k, per Prob. ſecundum invenietur $n = 2$, $m = {}_3$, $l = \frac{2}{5}$, $k = \frac{2}{7}$, & ſubſtituendo hos valores, æquatio erit $2ry - \frac{y^3}{3r} - \frac{y^5}{20r^3} - \frac{y^7}{56r^5} = x^2$. Unde $ry - \frac{y^3}{6r} - \frac{y^5}{40r^3} - \frac{y^7}{112r^5} = \frac{x^2}{2}$

= GMq

$= \frac{GMq}{2} =$ AMCS. Vel si quæreretur Quadratura totius Quadrantis, erit $ASD = r^2 - \frac{1}{6}rr - \frac{1}{40}rr - \frac{1}{112}rr$ ------ &c. Unde $4rr - \frac{2}{3}rr - \frac{1}{8}r^2 - - \frac{1}{28}r^2 =$ toto Circulo. Et si hæc series per numeros exprimatur, ponendo $r = \frac{1}{2}$ erit area Circuli $= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{32} - \frac{1}{112}$ ----- &c. in infinitum Notatu dignum arbitror hinc elici posse dimensionem Zonæ Circularis, quam à celeberrimo Geometra D. *Isaaco Newtono* inventam refert clariss. *David Gregorius* in memorato tractatu. Esto ABCD Zona cujus latitud. $VL = y$, & Circuli radius $= r$, per præcedentem Quadraturam ---- $VBCL =$ Fig. 9.

$$ry - \frac{y^3}{6r} - \frac{y^5}{40r^3} - \frac{y^7}{112r^5}$$ -- Adeoque -- 2 VBCL

$$= ABCD = 2ry - \frac{y^3}{3r} - \frac{y^5}{20r^3} - \frac{y^7}{56r^5}.$$

Prob. XIII.

Hyperbola Quadraturam determinare.

Fig. 10. SIT LSC Hyperbola cujus Asymptoti VD, VP, & in qua $VE = EL = a$, atque $VA = c$, vocetur abscissa AM y, & ordinatim applicata z, sed ex natura Hyperbola $VE \times EL$

$= VM$

$= VM \times MC$, id est $a^2 = yz + cz$; adeoque est $z = \frac{a^2}{c+y}$, & facta divisione, secundum jam receptam Methodum, erit $z = \frac{a^2}{c} - \frac{a^2 y}{c^2} + \frac{a^2 y^2}{c^3}$ --- &c. Quærenda igitur est Curva AGH, in qua sit ------- $PM = \frac{a^2}{c} - \frac{a^2 y}{c^2} + \frac{a^2 y^2}{c^3}$ ------ &c. & per Prob. primum invenietur illam definiri hac æquatione $\frac{n a^2 y}{c} - \frac{m a^2 y^2}{c^2} + \frac{l a^2 y^3}{c^3} = x^2$, & determinando, n, m, l, per Prob. 2. erit $n = 2, m = 1, l = \frac{2}{3}$, ac proinde æquatio quæsita est $\frac{2 a^2 y}{c} - \frac{a^2 y^2}{c^2} + \frac{2 a^2 y^3}{3 c^3} = x^2$ unde $\frac{a^2 y}{c} - \frac{a^2 y^2}{2 c^2} + \frac{a^2 y^3}{3 c^3} = ASCM = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2}$. Hæc eadem est Hyperbolæ Quadratura quam exhibuit celebris vir *Nicolaus Mercator* in sua Logarithmo-technia, quamvis methodo usus sum ab illius plane diversâ.

Considerando aliam Hyperbolæ proprietatem; aliam etram illius Quadraturam inveniemus. Sit ergo in apposito schemate SCL Hyperbola æquilatera cujus centrum A & latus transversum RS, ponatur $AM = y, = KC$, $MC = z$, $AR = AS$

Fig. 11.

$= AS = r$, unde ex natura Hyperbolæ $rr + yy = zz$, adeoque $z = \sqrt{rr+yy}$, extrahendo radicem Quadraticam ex $rr + yy$ erit $z = r + \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} + \frac{y^6}{16r^5}$ ----- &c. Quærenda ergo eſt Curva AH in qua ſit $PM = z = r + \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} + \frac{y^6}{16r^5}$ ---- &c. & procedendo per Prob. primum invenietur illam definiri hac æquatione $nry + \frac{my^3}{2r} - \frac{ly^5}{8r^3} + \frac{ky^7}{16r^5} = x^2$, & determinando, n, m, l, k, per Prob. ſecundum, erit $n = 2$, $m = \frac{2}{3}$, $l = \frac{2}{5}$, $k = \frac{2}{7}$, ſubſtitutis his valoribus erit æquatio ad Curvam quæſitam plene determinata $2ry + \frac{y^3}{3r} - \frac{y^5}{20r^3} + \frac{y^7}{56r^5} = x^2$, adeoque erit ---- $ry + \frac{y^3}{6r} - \frac{y^5}{40r^3} + \frac{y^7}{112r^5} = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} = ASCM$.

Ex hac Hyperbolæ Quadratura facile eſt Zonæ Hyperbolicæ Quadraturam determinare. Sint EDA, GCB Hyperbolæ oppoſitæ, quarum centrum K & vertices A, B, Zona ABCD cujus latitudo $KL = y$, ſemiaxis tranſverſus AK, vel $KB = r$, unde per præcedentem Quadraturam *Fig.* 12.

D KLCB

$KLCB = ry + \frac{y^3}{6r} - \frac{y^5}{40r^3} + \frac{y^7}{112r^5}$ ac proinde erit $ABCD = 2ry + \frac{y^3}{3r} - \frac{y^5}{20r^3} + \frac{y^7}{56r^5}$ ---- &c.

Prob. XIV.

Ellipſeos Quadraturam determinare.

Fig. 8. IN ſemi-ellipſi LSCD ſit ſemiaxis tranſverſus $AS = b$ & ſemiaxis conjugatus $AL = a$, & ponatur abſciſſa $AM = y$, ordinatim applicata $MC = z$, unde ex natura Ellipſeos $z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}$, ut ergo determinetur Area AMCS, primo reſolvenda eſt $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}$, in ſeriem extrahendo radicem ex $\sqrt{a^2 - y^2}$, unde invenietur $z = b - \frac{by^2}{2a^2} - \frac{by^4}{5a^4} - \frac{by^6}{16a^6}$ ----- &c. Quærenda igitur eſt Curva aliqua AH in qua ſemper PM $= b - \frac{by^2}{2a^2} - \frac{by^4}{8a^4} - \frac{by^6}{16a^6}$ ----- &c. & invenietur per Prob. 1. illam definiri hac æquatione $nby - \frac{mby^3}{2a^2} - \frac{lby^5}{8a^4} - \frac{kby^7}{16a^6} = x^2$ & determinando quantitates,

titates, n, m, l, k per Prob. 2. erit $n = 2$, $m = \frac{2}{3}$ $l = \frac{2}{5}$, $k = \frac{2}{7}$, adeoque $2by - \frac{by^3}{3a^2} - \frac{by^5}{20a^4} - \frac{by^7}{56a^6} = x^2$ unde $by - \frac{by^3}{6a^2} - \frac{by^5}{40a^4} - \frac{by^7}{112a^6} = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} = AMSC$.

Inde facile eruitur Zonæ Ellipticæ dimensio, ut si latitudo Zonæ sit $AM = y$, cæteris positis ut prius erit Zona $2AMCS = 2by - \frac{by^3}{3a^2} - \frac{by^5}{20a^4} - \frac{by^7}{56a^6}$ --- &c.

Prob. XV.

Sit AD ($= d$) *positione & magnitudine data, & Curva SCD talis ut ea ducta utcunque recta MC* ($= z$) *ad AD perpendicularis sit* $d^3 = z^3 + y^3$, *& determinanda sit Areæ AMCS Quadratura.* *Fig.* 13.

Quoniam ex natura Curvæ $z = \sqrt{(3)}\, d^3 - y^3$ extrahenda est radix Cubica ex $d - y^3$, & invenietur fore $z = d - \frac{y^3}{3d^2} - \frac{y^6}{9d^5}$ --- &c.

 Quæren-

Quærenda est linea Curva AGH in qua $PM = d - \frac{y^3}{3d^2} - \frac{y^6}{9d^5}$ — — &c. & definietur Curva quæsita AH hac æquatione $n\,dy - \frac{m\,y^4}{3\,d^2} - \frac{l\,y^7}{9\,d^5} = x^2$ & determinando n, m, l, per problema secundum erit $n = 2$, $m = \frac{1}{2}$, $l = \frac{2}{7}$ adeoque $2\,dy - \frac{y^4}{6\,d^2} - \frac{2\,y^7}{63\,d^5} = x^2$, unde etiam $d\,y - \frac{y^4}{12\,d^2} - \frac{y^7}{63\,d^5} = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} =$ AMCS. Et sic Quadrantur Cycliformes infinitæ quæ definiuntur per $d^4 - y^4 = z^4$, $d^5 - y^5 = z^5$ — — &c.

Prob. XVI.

Esto AD (= d) linea recta positione & magnitudine data, & SCD linea Curva talis ut ducta utcunque MC (= z) ad AD normali sit Cubus ex AD cum Cubo ex AM (= y) æquales Cubo ex MC sc. $d^3 + y^3 = z^3$ & determinanda sit Quadratum Areæ AMC.

Fig. 13.

Quoniam $z = \sqrt{(3)\,d^3 + y^3}$ resolvenda est $\sqrt{(3)\,d^3 + y^3}$ in seriem radicem cubicam extrahendo, & invenietur $z = d + \frac{y^3}{3d^2} - \frac{y^6}{9d^5}$ — — — &c. Quærenda est

est Curva AH in qua sit semper $PM = d + \frac{y^3}{3d^2} - \frac{y^6}{9d^5} - -$ &c. & per Prob. 1. & 2. erit æquatio ad Curvam quæsitam ---- $2dy + \frac{y^4}{6d^2} - \frac{2y^7}{63d^5} = x^2$ unde $dy + \frac{y^4}{12d^2} - \frac{y^7}{63d^5} = \frac{x^2}{2} =$ AMCS. Et sic Quadrari possunt Hyperboliformes infinitæ quæ definiuntur per $d^4 + y^4 = z^4$, $d^5 + y^5 = z^5$, &c.

Prob. XVII.

Sit $AD = a$ $AS = b$, & sit Curva SCD talis ut ducta quavis MC $(= z)$ ad AD perpendiculari sit $z^3 . a^3 - y^3 :: b^3 . a^3$, & determinanda sit Area AMCS. Fig. 13.

Quoniam ex natura Curvæ $z = \frac{b}{a}\sqrt[3]{a^3 - y^3}$ extrahenda est radix ex $a^3 - y^3$, invenieturque $z = b - \frac{by^3}{3a^3} - \frac{by^6}{9a^6} - -$ &c. Quærenda est Curva AH in qua $PM = MC = b - \frac{by^3}{3a^3} - \frac{by^6}{9a^6}$, &c. & per Prob. 1 & 2. invenietur Curvam quæsitam definiri hac æquatione $2by - \frac{by^4}{6a^3} - \frac{2by^7}{63a^6} = x^2$, ac propterea $by - \frac{by^4}{12a^3} - \frac{by^7}{63a^6} = \frac{x^2}{2} = \frac{GMq}{2} =$ AMCS. Et sic quadrantur Ellipsiformes infinitæ, quæ definiuntur æquationibus $\frac{b}{a}\sqrt[4]{a^4 - y^4} = z$, $\frac{b}{a}\sqrt[5]{a^5 - y^5} = z$, &c.

Prob. XVIII.

Esto AD ($= d$) linea recta positione & magnitudine data & SCD Curva talis ut ducta utcunque MC ad AD normali sit $d^2 z + y^2 z = r^3$, & Quadranda sit Area AMCS.

Fig. 13.

Quoniam $z = \frac{r^3}{d^2 + y^2}$; fiat divisio, & invenietur $z = \frac{r^3}{d^2} - \frac{r^3 y^2}{d^4} + \frac{r^3 y^4}{d^6}$; eritque $\frac{2r^3 y}{d^2} - \frac{2r^3 y^3}{3d^4} + \frac{2r^3 y^5}{5a^6} = x^2$ æquatio ad Curvam AH in qua PM $= \frac{r^3}{d^2} - \frac{r^3 y^2}{d^4} + \frac{r^3 y^4}{d^6}$ unde $\frac{r^3 y}{d^2} - \frac{r^3 y^3}{3d^4} + \frac{r^3 y^5}{5d^6} = \frac{x^2}{2} - \frac{GMg}{2} =$ AMCS.

Prob. XIX.

Cujusvis Figuræ Quadraturas infinitas invenire.

Sint duæ quælibet Curvæ ACE, BRF, & à quovis puncto C in curva ACE ducatur tangens CT, & CP ad EP, & CR ad AB parallela, si fiat TP.PC::DR.PX, erit ABZY = BEF, APXY = DBR. Eximium hoc Theorema debetur etiam viro celeberrimo D. Doctori *Barrow*.

Quærenda sint, exempli gratia, Quadratura infinitæ Paraboloidis Cubicalis BRF. Assumatur pro

arbitrio

arbitrio quælibet Curva A C E puta parabola communis cujus parameter ſit r (quod idem ſit cum parametro paraboloidis) & ponatur A P $= y$, P X $= z$, eritque T P $= 2y$, P C $= \sqrt{ry}$, & ex natura paraboloidis D R $= \sqrt[6]{r^5 y}$ adeoque Analogia erit $2y . \sqrt{ry} :: \sqrt[6]{r^5 y} . z$ unde $z = \sqrt[6]{\frac{r^8}{64y^2}}$ quæ eſt æquatio ad Curvam Y X Z, cujus Quadratura invenietur per methodum jam traditam ſc. $\frac{1}{4}\sqrt[6]{r^3 y^4}$ $=$ A P Y Z $=$ D B R. Quæ eſt Quadratura Paraboloidis diverſa ab illa quam dedi in Prob. 4. Et eodem modo inveniri poteſt alia atque alia Quadratura, aſſumendo aliam atque aliam Curvam A C E. Et ſic tractari poſſunt omnes aliæ Curvæ, quemadmodum parabolidem hic tractavi.

Exhinc etiam manifeſtum eſt Figuras deprimi poſſe ad ſimpliciores & Quadratu faciliores, nam in figura ABZY Curva YXZ definita hac æquatione $z^6 = \frac{r^8}{64y^2}$ magis eſt compoſita quam Curva B R F. Adeoque non parum Geometriam promoveret, qui methodum daret Figuras ad ſimpliciſſimas reducendi.

Prob. XX.

Prob. XX.

Curvam invenire cujus Area per datam quamlibet æquationem designetur.

DEsignetur Area hac æquatione $\sqrt{r^3 y} = VMC$ (concipiendo VCS esse Curvam quæsitam.) Tum ex ostensis patet $\sqrt{r^3 y} = \frac{x^2}{2}$ esse æquationem ad Curvam aliam VGH in qua $PM = MC$ (quæ est ordinata Curvæ quæsitæ) investigetur ergo valor lineæ PM, & invenietur $PM = \sqrt{\frac{r^3}{4y}} = z$ seu $4z^2 y = r^3$, quæ est æquatio ad Curvam quæsitam VCS cujus area $= \sqrt{r^3 y}$. Notandum quod hic (ut prius) y denotat abscissas VM, z ordinatas MC, & x ordinatas GM.

Prob. XXI.

Curvas infinitas invenire quarum Areæ per unam datam æquationem designentur.

SOlutio hujus problematis à duobus præcedentibus pendet; inveniatur una Curva cujus Area per datam æquationem exprimatur (per problema 20) & sic infinitæ inveniri possunt per Prob. 19.

Prob. XXII.

Data qualibet Curva AHD Curvam aliam AFB invenire cujus area AGF æquetur rectangulo contento sub ordinata GH & abscissa AG Curvæ datæ. *Fig. 20.*

IN Curva AHD sit $AG = y$, $GH = x$, & exprimatur illius natura hac æquatione $2ay - yy = x^2$, unde $\sqrt{2ay - y^2} = x$ adeoque $\sqrt{2ay^3 - y^4} = xy = AH$. Habetur ergo Area figuræ AGF, unde facile Curva AFB definitur per problema 20. sc. $z^2 = \dfrac{9a^2y - 12ay^2 + 4y^3}{2a - y}$.

Prob. XXIII.

Data qualibet Curva AHD, aliam Curvam AFB invenire cujus area AGF æquatur rectangulo contento sub ordinata GH Curvæ AHD, & constanti aliqua data recta (a) *Fig. 20.*

DEfiniatur Curva AHD ut prius $\sqrt{2ay - yy} = x$ unde $\sqrt{2a^3y - a^2y^2} = ax = AGF$, habetur ergo natura Curvæ AFB per Prob. 20. sc.

 $z^2 =$

$z^2 = \frac{a^4 - 2a^2y^2 + a^2y^2}{2ay - y^2}$ hic & in precedenti z denotat ordinatas Curvæ quæſitæ A F B.

Et quidem aliis modis infinitis (præter duos jam traditos) inveniri poteſt curva cujus area, ope alterius curvæ datæ ſit quadrabilis, per Prob. 20. Quod fieri poſſe aſſeruit jam laudatus Germanus, ſed quo modo faciendum ſit nequaquam oſtendit.

Alia ſolutio problematis præcedentis.

Fig. 21. SIT Curva data ACB, CT tangens in puncto quolibet C, ordinata CF; fiatq; TF. FC : : a. FZ, orietur hinc Curva AZZ talis ut a + FC = AFZ; ut demonſtratum eſt ab illuſtriſſimo D. Doctori *Barrow*.

Nec quidquam jam deeſt ut Methodus quam tradidi Figurarum Quadraturas determinandi, ad omnes figuras extendatur (exceptis iis quæ a Curvis tranſcendentibus terminantur, quas nulla hactenus vulgata Methodus comprehendit) niſi ut difficultates duas amoveam; quæ in quibuſdam caſibus contingere poſſunt; quarum prior accidit cum figuram aliquam Quadrando neceſſe ſit & Radicem ex æquatione effecta (& ſupra Quadraticas aſcendente) extrahere, in quo caſu unicum remedium mihi cognitum eſt radicem iſtius æquationis in ſeriem infinitam (juxta Methodum clariſſimi viri D. Iſaaci Newtoni Geometræ non minus quam Analystæ præstantissimi) resolvere, quam prælo commissam esse à clariss. Wallisio audimus, quamque insignis ipse D. Newtonus mihi in Manuscriptis pro summâ sua humanitate communicavit: Nam Methodus Generalis æquationum radices Analyticè determinandi (in Actis Eruditorum Lipsiæ publicatis A° 1683, Mense Maio a præclaro illo Germano edita) huic negotio parum vel nihil inservit, ut de insuperabili in eâ calculi molestia nihil dicam. Sed nihilominus inventum est inter præcipua Artis Analyticæ merito numerandum.

Secunda difficultas est cum valor ordinatim applicatæ constat terminis asymmetris, nam res esset immensi laboris æquationem ab asymmetria liberare, si plures sint quam quatuor termini signis radicalibus affecti, ut satis norunt Analyseos periti. Sed huic difficultati remedium optimum suppeditavit insignis Geometra G. G. Leebnitius in nova sua Methodo Tangentes inveniendi in Actis Eruditorum Anni superioris publicata. Ibi enim præclarus vir viam expeditam ostendit, Tangentes inveniendi, quamvis æquatio curvæ naturam exprimens terminis irrationalibus quam maximè sit implicita, non ablatis irrationalibus. Quomodo ista methodus ad præsens negotium sit applicanda exemplo ostendam.

Esto V C S circuli Quadrans cujus Diameter sit (r) & V M vocetur y, item ordinata M C *Fig.* 4.

 z, tum

z, tum ex natura circuli $z = \overline{\sqrt{ry - y2}}$ & reſolvendo $ry - y^2$ in ſeriem per extractionem radicis, invenietur. $z = \sqrt{ry} - \sqrt{\frac{y^3}{4r}} \sqrt{\frac{y^5}{16r^3}}$.....&c. Ut determinetur Quadratura areæ V M C, invenienda eſt curva V H, in quâ $PM = \sqrt{ry} - \sqrt{\frac{3}{4r}} - \frac{y^5}{16r^3}$, eritq; per Prob. 1. æquatio ad curvam quæſitam V H $\sqrt{nry^3} - \sqrt{\frac{my^5}{4r}} - \sqrt{\frac{ly^7}{16r^3}} = x^2$; & auferendo quantitates fractas (quod tamen abſolute neceſſe non eſt, ſed hic fit ob majorem facilitatem) multiplicando per $\sqrt{16r^3}$: erit $\sqrt{16nr^4y^3} - \sqrt{4mr^2y^5} - \sqrt{ly^7} = x^2 \sqrt{16r^3}$; & determinando n, m, l, (per Prob. 2.) quæ ſola eſt difficultas ſic procedo: compendii cauſa pono $p = 16nr^4y^3$ $q = 4mr^2y^5$, $s = ly^7$; eritq; $\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{s} = x^2 \sqrt{16r^3}$; ſed per calculum ibi explicatum invenietur $\sqrt{p} = \frac{dp}{\sqrt{4p}}$, $\sqrt{q} = \frac{dq}{\sqrt{4q}}$, $\sqrt{s} = \frac{ds}{\sqrt{4s}}$, atque $x^2 \sqrt{16r^3} = 2x\overline{\sqrt{16r^3}}\,dx$, & ſubſtitutis his valoribus erit $\frac{dp}{\sqrt{4p}} - \frac{dq}{\sqrt{4q}} - \frac{ds}{\sqrt{4s}} = 2x\overline{\sqrt{16r^3}}\,dx$, ſed per eundem, calculum erit $dp = 48nr^4y^2\,dy$, $dq = 20mr^2y^4\,dy$ & deniq; $ds = 7ly^6\,dy$, & ſubſtituendo hos valores cum valoribus quantitatum $\sqrt{4p}$, $\sqrt{4q}$, $\sqrt{4s}$, æquatio erit $\frac{48nr^4y^2dy}{\sqrt{64nr^4y^3}} - \frac{20mr^2y^4dy}{\sqrt{16mr^2y^5}} - \frac{7ly6dy}{\sqrt{4ly7}} = 2x\sqrt{16r^3}\,dx$.———

Quam clariſſimus Author æquationem differentialem appellat: & hæc æquatio in Analogiam reſoluta dat. $dy.\,dx :: x\sqrt{64r^3}.\ \frac{48nr^4y^2}{\sqrt{64nr^4y^3}} \frac{20mr^2y^4}{\sqrt{16mr^2y^5}} \frac{7ly6}{\sqrt{4ly7}} :: x.\,PM.$ ut ex eodem calculo eſt manifeſtum, adeoq; erit

PM=

$$PM = \frac{48\,n\,r^4\,y^2}{\sqrt{4096\,n\,r^7\,y^3}} - \frac{20\,m\,r^2\,y^4}{\sqrt{1024\,m\,r^5\,y^5}} - \frac{7\,l\,y^6}{\sqrt{256\,l\,r^3\,y^7}} = \&c.$$

Et facta comparatione horum terminorum cum terminis prioribus P M denotantibus, juxta cognitas comparationis leges ſc. $\frac{48\,n\,r^4\,y^2}{\sqrt{4096\,r^7\,y^3}} = \sqrt{ry}$, inde $n = \frac{16}{9}$ ſimiliter $m = \frac{16}{25}$; & $l = \frac{16}{49}$, quibus ſubſtitutis erit $\sqrt{\frac{16\,ry}{9}} - \sqrt{\frac{16\,y^5}{100\,r}} - \sqrt{\frac{y^7}{496\,r^3}} = x^2 = G^M q$, adeoque $\sqrt{\frac{4\,ry^3}{9}} -\!-\!- \sqrt{\frac{16\,y^5}{400\,r}} - \sqrt{\frac{y^7}{196\,r^3}} = \frac{x^2}{2} = \frac{CMq}{2} = V\,M\,C.$ Adeoq; etiam hoc modo habetur circuli Quadratura. Et ſimilem diſcurſum in aliis adhibere non erit difficile, cuivis in ſingulari hoc calculi genere verſato, ita ut ſuperfluum duxi præſtantiſſimæ hujus Methodi uſum pluribus exemplis illuſtrare. Unum tamen eſt quod hic obiter notandum puto, poſſe ex hac Tangentium methodo breviter demonſtrari veritatem Regulæ quam dedi pro ſolutione problematis primi.

Namq; $dy.\,dx$: : T M. M C (ut ex iſta methodo eſt manifeſtum) ſed T M. M C : : M C. P M. ob angulum rectum T M P. Ergo $dy.\,dx$: : M C. P M (vel poſito x pro M C) erit $dy.\,dx$: : x. P M. Unde P M $x\,dy = x\,dx$, & ſubſtituendo y & x pro earum differentiis dy, dx erit P M $x.\,y = x^2$. Quod demonſtrandum erat.

Jamq; concludo, ſi nulla ſit Curva in qua diſtantia inter illius perpendicularem & ordinatam ſit æqualis

lis correſpondenti ordinatæ in Curva Figuram (cum recta vel rectis) comprehendentem, illam Figuram non eſſe indefinite Quadrabilem; nam ſi daretur illius Quadratura indefinita, daretur etiam hujuſmodi Curva ut patet ex *Prob.* 20. Et nullam eſſe talem Curvam pro Circulo & Hyperbola, facile poſſum demonſtrare, ſed demonſtrationem ob nimiam prolixitatem hic omitto.

De Linearum Curvarum Rectificatione.

QUiſnam fuerit qui primò Curvæ rectam æqualem invenit diu multumq; Anglos inter & Batavos diſputatum fuit; & qui plenius de ea re ſibi ſatisfieri volunt, totam diſputationem videre poſſunt, in eximio libello de Cycloide a Clariſſ. Walliſio Edito *pag.* 91, 92, 93, *&c.* itemq; in Horologio Oſcillatorio illuſtriſſimi Hugenii *pag.* 72, 73, & deniq; in Epiſtola Walliſii in Actis Philoſophicis Reg. Societ. publicata Num. 98. res enim tanti non eſt ut ulteriori diſquiſitione digna videatur, mihi præſertim qui nec Anglus ſum nec Batavus. Ea tamen, quæ, re bene perpenſa, utrinq; manifeſta videntur, breviter annotabo: 1. Quod Guliel. Nelius Equitis Angli Filius omnium primus rectam Curvæ æqualem invenerit.

2. Quod non datam Curvam rectificaverit ſed Curvam rectificationis capacem exhibuerit. 3. Quod dig-

nissimus & Geometra peritissimus D. Christoph. Wren primo oblatæ Curvæ (sc. Cycloidi) rectam æqualem determinaverit. 4. Quod Heuratius primo ostenderit quamlibet datam Curvam rectificare, suppositis Figurarum Quadraturis. Et in eo Heuratii Methodi non parum est conspicua quod statim indicat quænam illa Figura sit cujus Quadratura Curvam datam rectificaret; Adeoq; cum jam Methodum generalem præmisi Figurarum Quadraturas determinandi; facile erit Curvam aliquam in rectam transmutare; Et recta illa vel per æquationem finitam (cum nempe Figura est indefinite Quadrabilis) vel per seriem infinitam exprimetur. Henratius enim tali methodo destitutus, non potuit methodum suam Curvas rectificandi, ad omnes illas Curvas extendere, Quarum rectificationes a figuris indefinitè Quadrabilibus dependent; multoq; minus cum à figura specialis tantum Quadraturæ capaci dependerent.

THEOREMA 2.

Fig. 14. SINT duæ lineæ Curvæ ACE, GIL, & recta AF ejus naturæ ut (ducta ex puncto M libere sumpto perpendiculari *MI* secante Curvas in C & I, uti & CP perpendiculari ad Curvam ACE) sit .... *MC*. CP : : R. *MI* (R hic est quælibet linea recta data vel assumpta) erit AGILEF = Rx.

R x ACE. Demonstratio hujus Theorematis habetur in Epistola Heuratii ad Schotenium.

PROB. I.

Determinare Longitudinem Parabolæ. A C E.

Fig. 14. SIT parabolæ vertex *A*, ipsius axis *AG*, & parameter (*a*) *AM* vocetur *x* & *MC* vocetur *y*; unde ex natura parabolæ $x^2 = ay$; per methodum aliquam vulgarem Tangentes inveniendi, constabit fore PM$=\frac{2x^3}{a^2}$, adeoq; PM$q=\frac{4x^6}{a^4}$, unde PC $=\sqrt{\frac{4x^6}{a^2}+\frac{x^4}{a}}$ jam quia CM. CP :: *a*. MI; vel in terminis Analytricis $\frac{x^2}{a}$. $\sqrt{\frac{4x^6}{a^4}+\frac{x^4}{a^2}}$ :: *a*. *z* (posito nimirum MI$=z$) unde $z=\sqrt{a^2+4x^2}$, quæ est æquatio ad Hyperbolam; adeoq; pro determinatione longitudinis lineæ parabolicæ A C E, Quadranda est Area Hyperbolica A G I L E F (ut in *Prob.* 13.) eritque,

A G I L F $= ax + \frac{2x^3}{3a}\ \frac{2x^5}{5a^3} + \frac{4x^7}{7a^5}$ ——— ——— ——— &c.

Unde axACE$= ax + \frac{2x^3}{3a}\ \frac{2x^5}{5a^3} + \frac{4x^7}{7a^5}$ — &c. per Theor. 2.

Adeoq; ACE$= x + \frac{2x^3}{3a^2}\ \frac{2x^5}{5a^4} + \frac{4x^7}{7a^6}$ ——— ——— ——— &c.

PROB.

Prob. II.

Circuli Peripheriæ rectam æqualem exhibere.

SIT ACF circuli Quadrans cujus radius ſit d. & vocetur P M y, MCx; & MI z, ſitq; GIL talis curva ut ducta utcunq; normali CMI ad rectam PF ſit M C. P C : : d (recta libere ſumpta). MI. id eſt $\sqrt{dd-yy}$. d : : d. z. unde $z=\frac{dd}{\sqrt{dd-yy}}$ quæ eſt æquatio ad curvam GIL; adeoq; P M16 $= dy + \frac{y^3}{6d} + \frac{3y^5}{40d^3} + \frac{5y^7}{112d^5}$ — — &c. Sed per Theor. 2. eſt dx A C $= dy + \frac{y^3}{6d} + \frac{3y^5}{40d^3} + \frac{5y^7}{112d^5}$ — &c. Ergo AC $= y + \frac{y^3}{6d^2} + \frac{3y^5}{40d^4} + \frac{5y^7}{112d^6}$ — — &c. Fig. 15.

Prob. III.

Hyperbolæ rectam æqualem exhibere.

SIT ACE Hyperbola æquilatera cujus ſemiaxis BA $= a$ & centrum B; & BM vocetur y, ACx, unde ex natura Hyperbolæ $a^2 + y^2 = x^2$; ponatur P C Hyperbolæ in C perpendicularis; Fig. 16.

 inveni-

invenietur $PM = y$ adeoq; $PC = \sqrt{a^2 + 2y^2}$: si fiat MC. $CP :: a. M$. id est, $\sqrt{a^2+y^2}. \sqrt{a^2+2y^2} :: a. z$; erit $z = \frac{\sqrt{a^4+2a^2y^2}}{\sqrt{a^2+y^2}}$ quæ est æquatio ad Curvam GIL.

Sed $\sqrt{a^4+2a^2y^2} = a^2 + y^2 - \frac{y^4}{2a^2}$ ——— &c.

Et $\sqrt{a^2+y^2} = a + \frac{y^2}{2a} - \frac{y^4}{8a^3}$ ——— &c.

Ideoq; $\frac{\sqrt{a^4+2a^2y^2}}{\sqrt{a^2+y^2}} = a + \frac{y^2}{2a} - \frac{5y^4}{8a^3}$ ——— &c.

Unde $BELG = ay + \frac{y^3}{6a} + \frac{5y^5}{40a^3}$ ——— &c.

Atq; $ACE = y + \frac{y^3}{6a^2} - \frac{5y^5}{40a^4}$ ——— &c.

De Curvarum superficierum dimensione.

Quemadmodum linearum Curvarum longitudines, sic etiam superficierum, quæ ab illarum rotatione generantur, dimensio ex quarundam Figurarum Quadraturis dependet, ut ex sequenti Theoremate constat.

THEOREMA 3.

Fig. 17. SIT MP Curvæ AMB perpendicularis & linea KZL talis ut (ducta MFZ ad axem AD normali) sit MP correspondenti FZ æqualis; erit superficies producta à rotatione Curvæ AMB circa axem

axem AD, ad ſpatium ADLK, ut Circumferentia Circuli ad ſuum radium.

Hoc etiam unum eſt ex innumeris & præclaris Theorematis viri celeberrimi D. Iſaaci Barrow.

Prob. I.

Superficiem Sphæræ determinare.

SIT AMB Semicirculus à cujus rotatione data ſphæra producitur: & deſignet r radium & c circumferentiam cujuslibet circuli; & ſit AB (diameter Semicirculi AMB) $= 2d$. jam quoniam omnes lineæ Circulo perpendiculares MP perveniunt ad Circuli centrum P; ideo erit KZL parallello graminum rectangulum cujus longitudo diameter AB & altitudo AK $= d$ radius Semicirculi AMB; unde AL $= 2d^2$; (per literam s ubiq; deſigno ſuperficiem Curvam;) ideo per Theorem tertium $s.\ 2d^2 :: c.\ r.$ unde $s = \frac{2d^2c}{r}$; vel ponendo — $r = d$ erit $s = 2dc$; ac propterea Superficies Sphæræ æquatur rectangulo cujus Longitudo eſt Circumferentia & Latitudo Diameter Circuli in Sphæra maximi. *Fig.* 18.

Notatu dignum arbitror hinc conſequi omnium

Theorematum longe nobilissimum quo æternam sibi famam acquisivit Geometrarum Princeps *Archimedes*; Quod scilicet superficies Sphæræ sit æqualis quatuor maximis in eâ Circulis. Sit enim $Q=$ maximo in Sphæra Circulo; at qui $Q=\frac{dc}{2}$ ut ab *Archimede* demonstratum est; Ergo $2Q=dc$, & $4Q=2dc$; sed jam inventum est $s=2dc$; Ergo $4Q=s$. Quod erat demonstrandum.

Prob. II.

Superficiem Conoidis Parabolici determinare.

Esto r latus rectum Parabolæ AMB à cujus rotatione conoides producitur, sit axis AD, vertex A & vocetur AF, y; FM x; per methodum aliquam tangentium invenietur $PMq=\frac{1}{4}r^2+ry$; vel ponendo $FZ=z$, quia supponitur $PM=FZ$, aut $\frac{1}{4}rr+ry=Z^2$ quæ est æquatio ad parabolam cujus axis idem est cum axe parabolæ datæ AMB; cujus vertex est C, existente $AC=\frac{1}{4}r$; & latus illius rectum etiam r, invenietur $AKLD=\sqrt{\frac{4}{9}rv^3}-\frac{1}{12}r^2$ existente $CD=v$; sed $s.\ \sqrt{\frac{4}{9}rv^3}-\frac{1}{12}r^2::c.r.$ per Theorema 3. Ergo $s=\sqrt{\frac{4c^2v^3}{9r}}-\frac{1}{12}rc$.

In hunc modum mensurantur non modo superficies Conoidis Hyperbolici, & Sphæroidis, sed Quævis alia Curva superficies quæ generatur à rotatione lineæ Curvæ & hæc duo exempla satis ostendunt quomodo eadem Methodus ad omnes alias superficies Curvas sit Applicanda.

ANIM-

ANIMADVERSIO
In Methodum Figuras dimetiendi,
A clarissimo Quodam Germano editam in Actis Eruditorum Lipsiæ publicatis.

METHODUM hanc proposuerat Doctissimus illius Author Anno 1683, Mense *Octob.* quam adeo perfectam credebat; ut vel Quadraturam Figuræ, vel ejusdem Quadraturæ impossibilitatem determinaret; & ex ea Circuli & Hyperbolæ Quadraturam Geometricam impossibilem esse concluserat. Postea vero perspexit clarissimus vir tanta perfectione præditam non esse, ut exinde Circuli, Hyperbolæ aut alterius Figuræ Quadraturæ impossibilitas probari possit, ut ingenue ipse fatetur in iisdem actis Anni sequentis, ubi ait se amore veritatis coactum hoc unum monere. Unde existimat quasdam esse Figuras quæ indefinitæ Quadraturæ non sunt capaces & exemplum Figuræa scribit in qua succedere ait Quadraturam specialem sine generali: in hoc tamen hallucinatus est claris. vir, quod ex sua Methodo Figuram aliquam, Quadraturam indefinitam recusare conclusit; priusquam demonstrasset Metho-

Methodum ſuam ad omnes figuras indefinitè quadrabiles extendere; quod demonſtratu eſt impoſſibile, cum unam è milleſimis non comprehendat; ut poſtea patebit. Dantur enim infinitæ figuræ indefinitæ quadrabiles, quæ nullo modo per iſtam Methodum ſunt Quadrabiles; & quarum exempla poſtea apponam; Et ut non modo errorem ſed erroris fontem detegam, neceſſe videtur breve illius Methodi compendium adjungere.

Adhibet æquationes Curvarum Generales, quarum unaquæque omnes Curvas ejuſdem gradus exprimere exiſtimat: Et talis Curvæ generalis conſideratæ tanquam Quadratricis quærit Quadrandam Generalem. Et oblatæ Quadrandæ ſpecialis æquationem comparat cum aliqua ex formulis generalibus Quadrandaram naturam exprimentibus; unde deducit Quadratricem ſpecialem Quadrandæ ſpeciali convenientem; exemplo res erit manifeſta.

Sit ABC figura, rectis AC, CB & Curva AB comprehenſa, ſitq; ACDE = ABC, AGF = AGHL, & idem concipiatur ubique, proveniet hinc Curva aliqua AHD, quam Quadratricem appellat, quia illius ope Quadratur area ABC, jam æquationem aſſumit ad Quadratricem generalem AHD, & ex ea deducit Quadrandam generalem ABC: ut ſi notentur abſciſſæ AG, AC per x, & ordinatæ Quadratricis CD, GH per y, & deniq; ordinatæ in Quadranda per z, ponitq; æquationem ad Quadratricem generalem in qua ordinata x eſt duarum dimenſiomenſionum hujuſmodi,

$$\left.\begin{array}{l} by^2 + cay + ea^2 \\ \quad + xy + fax \\ \qquad + gx^2 \end{array}\right\} = 0$$

ex qua deducit æquationem ad Quadrandam generalem, in qua ordinata z eſt etiam duarum dimenſionum,

$$\begin{array}{l} bz^2 + caz + ea^2 \\ \quad + 2dxz + 2fax + \\ \qquad + 4gx^2 \end{array} \frac{d^2e + c^2g + f^2b - cdf - 4beg + a^2x^2}{\begin{array}{l} 4bea^2 + 4bfax + 4bgx^2 \\ -ca^2 - 2cdax - dx^2 \end{array}} = 0$$

Et ſimiliter pro reliquis Quadratricibus generalibus Quadrandas generales inveſtigat. Proponatur jam Figura aliqua Quadranda ſpecialis ABC, & exprimatur natura Curvæ AFB hac æquatione ———————— $Z^2 = \frac{[illegible] + 4x^3}{2[illegible]x}$; hanc æquationem comparat cum æquatione generalis Quadrandæ jam poſitæ, (quia ordinata z in Quadranda ſpeciali ad duas tantum dimenſiones aſcendit) nempe ſingulos hujus cum ſingulis illius terminis (ubi x eandem utrobiq; compoſitronem obtinet) eritque ex hac comparatione $c, d, e = o$, & $b = \frac{1}{2}$, $f = -1$ ac $g = \frac{1}{2}$; & hos valores ſubſtituit in æquatione ad Quadratricem ſupra poſitam in qua ordinatæ x eſt duarum dimenſionum, (quia hic ordinata z ad duas quoque dimenſiones aſcendit)eritque $\frac{y^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} = o$, ſeu $y^2 = 2ax - x^2$, proprietas Quadratricis ſpecialis AHD in qua AGF = AGHL adecq; habetur Figuræ propoſitæ Quadratura.

In eo tamen latet ratiocinationis & ipſius Methodi defectus, quod omnes Curvas in quibus z ad duas dimenſiones (nec ultra) aſcendit comparet cum una &

eâdem

eadem Quadranda generali, in quibus z non ultra duas dimenſiones aſcendit ; & quod concludat Figuram non eſſe indefinite Quadrabilem ſi hæc comparatio Quadratricem non determinet. Infinitæ enim ſunt Quadrandæ generales (ex ipſius etiam Methodo deducibiles) in quibus z non ultra duas dimenſiones aſcendit, & non nunquam æquatio Curvæ propoſitæ, cum prima, ſecunda, tertia, &c. comparata Quadratricem non habebit, & tamen comparatio cum Milleſima quadratricem determinabit. Si enim ab æquatione tertia (quam poſuit pro Quadratrice generali in qua x eſſet trium dimenſionum primum terminum $by^3 + dxy^3$ auferat, ex reliquo Quadrandam generalem deducere poteſt, in qua z non ultra duas dimenſiones aſcendit, & quæ Quadratricem determinet, cum illâ quam ille ſtatuit generalem non ſuccedit : Et ſic ex æquatione quarta, quinta (quas ille poneret pro Quadratricibus altiorum graduum) &c. ablatis iis terminis in quibus y ultra duas dimenſiones aſcendit, ex reliquo habere poteſt Quadrandæ generalis æquatio, quæ Quadratricem determinabit, cum nec ejus Quadranda, nec illa quam dixi eſſe deducibilem ex æquatione tertia, determinare poteſt, ita ut caſu non arte incidimus in Quadrandam Generalem requiſitam. Sed quia dixi iſtas æquationes ad Quadrandas generales ex ipſius Methodo eſſe deducibiles ; volo hic paucis oſtendere, Quomodo clariſſ. hic vir æquationes ad Quadrandas generales invenerit, vel ſaltem facile invenire potuiſſet.

Ex *Prob.* 22. conſtat, quomodo data æqua- *Fig. 20.* tione ad Curvam aliquam A H D, alia curva A F B ſit invenienda cujus area A G F æquatur rectangulo comprehenſo ſub ordinatâ G A & abſciſſa A G; id eſt Quomodo data Quadratrice, invenienda ſit Quadranda; adeoq; aſſumpta æquatione ad Quadratricem generalem (qualem hic ſub initio aſcripſi) proveniet æquatio ad Quadrandam generalem. Jamq; exemplum unum aut alterum Figuræ hic aſcribam, in qua Quadratrix ſecundum hanc Methodum eſt impoſſibilis, & tamen alio modo determinabilis. Sit *Fig. 20.* Æquatio naturam curvæ A F B exprimens $z^2 = \frac{\overline{m^2 + x}}{p^2} + x^2$ in qua x denotat abſciſſas A C, A G, & z ordinatas B C, G F, m & p quantitates datas & peterminatas; jam ſi Quadranda ſit Area A G F, comparanda eſt hæc æquatio cum æquatione ad Quadrandam generalem jam tradita, quia in hac propoſita æquatione z ad duas dimenſiones aſcendit; ſed manifeſtum eſt comparationem non ſuccedere (ut ipſe alibi argumentatur) ſi vel ſolus numerator fractionis utrobique exiſtens comparetur, deberet enim $m^2 + x^2$ coincidere cum $\overline{-d^2e + ag + bf_2 - cdf - 4beg + a^2}$, indeterminatum cum determinato, quod fieri nequit, itaq; figura hoc modo Quadratricem non habet, & tamen ipſa hæc figura eſt indefinite quadrabilis, ſcil. AGF $= \sqrt{\frac{m^6 + 2m^4x^2 + 3m^2x^4 + x^6}{9pp}}$ Et non una tantum ſed infinitæ poſſunt inveniri Figuræ indefinitè Quadrabiles, quarum

Quadra-

Quadratrices hoc modo ſunt impoſſibiles per *Prob.* 23.

Fig. 20. Definiatur A H D hac æquatione $x^9 = a^7 y^2$, & per *Prob.* 23. inveniatur curva A F B cujus Area A G F æquetur rectangulo contento ſub ordinata G H & data qualibet recta puta (a), & definietur A F B hac æquatione $z^2 = \frac{81x^7}{4a^5}$; jamq; ſi Quadranda ſit area A G F ſecundum hanc Methodum, comparanda eſt hæc æquatio cum æquatione ad Quadrandam generalem jam tradita, quia in propoſita æquatione z non ultra duas dimenſiones aſcendit; ſed comparatio eſt impoſſibilis, quia in propoſita Curva x ad ſeptimam poteſtatem aſcendit; & in ejus æquatione ad Quadrandam generalem ultra quartam aſcendere non poteſt; ſed terminus in quo x eſt ſeptimæ, non poteſt comparari cum termino in quo x eſt quartæ poteſtatis; nam ſecundum ipſius Regulam, comparatio eſt ſic inſtituenda ut x utrobiq; eandem obtineat compoſitionem; adeoq; Quadratrix hoc modo haberi non poteſt, & tamen Quadratricem habet A H D definita hac æquatione $x^9 = a^7 y^2$, in qua GH + a = AGF; id eſt $-\sqrt{\frac{x^9}{a^5}}$ = AGF. Unde abunde conſtat hanc Methodum omnes Figuras indefinite Quadrabiles non comprehendere; & infinitas poſſe inveniri quarum Areæ hoc modo non ſunt quadrabiles; aſſumatur enim quælibet æquatio in qua z non ultra duas, & x non infra quatuor dimenſiones reperitur, & habetur æquatio naturam Curvæ exprimens cujus area per hanc Methodum non ſunt quadrabiles; ut in his exemplis $z^2 = \frac{x^9}{a^7}$,

$=\frac{x^9}{a^7}$, $z^2=\frac{x^{11}}{a^9}$, $z^2=\frac{x^{13}}{a^{11}}$, &c, quæ ſunt æquationes Curvarum naturas definientes quarum Areæ facile determinantur & tamen nullo modo per hanc Methodum poſſunt inveniri. Sed nolo in hac materia ulterius digredi ſperans clariſſ. virum boni conſulturum quicquid dixerim; quia præcipua ratio quæ me impulit ut hæc ſcriberem, non alia eſſet, quam ut (errores ejus oſtendendo) illum extimulem ad publicanda illa, quibus Geometriam in immenſum ultra terminos à Vieta & Carteſio poſitos ſe promovere poſſe aſſeruit.

F I N I S.

E R R A T A.

PAg. 4. lin. 20. pro $\frac{r9}{2}$ lege $\frac{nry}{2}$; pag. 5. lin. 2. pro $\frac{nry}{a}$ lege $\frac{nry}{2}$. pag. 6. lin. 12. pro $\frac{3rr3}{2a}$ lege $\frac{3rr2}{2a}$, ibid. lin. 20. pro x lege x^2. pag. 14. lin. 11. pro $r\frac{y^2}{2r}$ lege $r-\frac{y^2}{2r}$ ibid. lin. 17. pro $m=3$ lege $m=\frac{2}{3}$. pag. 19. lin. 14. pro $d-y^3$. lege d^3-y^3 pag. 25. lin. 16. pro x lege x^2. pag. 28. lin. 3. pro $\sqrt{\frac{y5}{16r3}}$ lege $\sqrt{\frac{y5}{64r3}}$.