Mémoire sur une méthode générale pour la détermination des racines réeles des équations algébriques ou même transcendantes / par m. Aug. Cauchy ... (Présenté en partie à l'Academie des sciences dans la séance du 4 septembre 1837.).

Contributors

Cauchy, Augustin Louis, Baron, 1789-1857.

Publication/Creation

[Paris] : [publisher not identified], [1837]

Persistent URL

https://wellcomecollection.org/works/mejvxxne

License and attribution

This work has been identified as being free of known restrictions under copyright law, including all related and neighbouring rights and is being made available under the Creative Commons, Public Domain Mark.

You can copy, modify, distribute and perform the work, even for commercial purposes, without asking permission.

wellcome collection

Wellcome Collection
183 Euston Road
London NW1 2BE UK
T +44 (0)20 7611 8722
E library@wellcomecollection.org
https://wellcomecollection.org

MÉMOIRE

SUR UNE

Méthode générale pour la détermination des racines réelles des équations algébriques ou même transcendantes;

PAR M. AUG. CAUCHY.

(Présenté en partie à l'Académie des Sciences dans la séance du 4 septembre 1837.)

---

§ I^er^.

La méthode que je vais exposer est tellement simple, qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle ne se soit pas présentée plus tôt à l'esprit des géomètres. D'un autre côté elle est tellement générale, qu'elle fournit immédiatement des valeurs aussi approchées qu'on le désire de toutes les racines réelles des équations algébriques, souvent même des équations transcendantes. Enfin, les approximations successives sont, non-seulement très faciles, mais encore très rapides, pour le moins aussi rapides que dans la méthode newtonienne, et il arrive bientôt un moment où le nombre des chiffres décimaux est plus que doublé à chaque opération nouvelle. Tous ces avantages réunis ne me permettent pas de révoquer en doute la nouveauté de la méthode, quoique je n'aie en ce moment à ma disposition aucun ouvrage écrit sur le même sujet. Mais ils sont tellement sensibles que la méthode, une fois livrée au public, ne pourrait manquer, ce me semble, d'être adoptée et mise en pratique par tous les amis des sciences. Je commencerai par énoncer deux des principaux théorèmes sur lesquels elle s'appuie; puis je déduirai de ces théorèmes la méthode elle-même.

1^er^ *Théorème.* Supposons que les deux fonctions

$$f(x), \;\; \mathrm{F}(x),$$

étant l'une et l'autre positives, pour $x = a$, restent finies et continues entre les limites

$$x = a, \quad x = b,$$

et vérifient constamment, dans cet intervalle, la condition

$$f(x) < F(x).$$

Si la seconde des équations

$$(1) \qquad f(x) = 0, \qquad\qquad (2) \qquad F(x) = 0$$

offre une ou plusieurs racines réelles comprises entre les limites données, et, si l'on nomme c celle de ces racines qui est la plus voisine de la limite a, l'équation (1) offrira elle-même une ou plusieurs racines réelles comprises non-seulement entre les limites

$$a \text{ et } b,$$

mais encore entre les limites plus resserrées

$$a \text{ et } c.$$

Démonstration. En effet, dans l'hypothèse admise, la condition

$$f(x) < F(x),$$

étant vérifiée pour $x = c$, en même temps que l'équation (2), donnera

$$f(c) < 0,$$

et comme on aura d'ailleurs

$$f(a) > 0,$$

la fonction $f(x)$ passera du positif au négatif, tandis que la variable x passera de la valeur $x = a$ à la valeur $x = c$. Donc cette fonction, variant dans l'intervalle par degrés insensibles, puisqu'elle reste continue, s'évanouira pour une valeur de x comprise entre a et c.

Le théorème 1[er], dans lequel on peut supposer à volonté $b < a$, ou $b > a$, entraîne évidemment la proposition suivante.

2° *Théorème.* Soit

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

une équation dont le premier membre reste fonction continue de x, entre des limites données

$$x = x_0, \quad x = X > x_0.$$

Soient encore

$$\varpi(x), \ \psi(x); \quad \Pi(x), \ \Psi(x)$$

quatre fonctions qui restent continues entre ces limites, et se réduisent à des quantités affectées du même signe que $f(x)$, les deux premières, pour $x = x_0$, les deux dernières pour $x = X$. Supposons, d'ailleurs, qu'entre les limites données ces diverses fonctions vérifient constamment les conditions

$$\text{(3)} \qquad \frac{\varpi(x)}{f(x_0)} < \frac{f(x)}{f(x_0)} < \frac{\psi(x)}{f(x_0)},$$

$$\text{(4)} \qquad \frac{\Pi(x)}{f(\mathrm{X})} < \frac{f(x)}{f(\mathrm{X})} < \frac{\Psi(x)}{f(\mathrm{X})},$$

le signe $<$ pouvant être remplacé par le signe $=$, quand la variable x se réduit, dans la formule (3), à la limite x_0, ou dans la formule (4), à la limite X. Enfin, concevons que, dans le cas où des valeurs de x renfermées entre x_0, X vérifieraient, comme racines, soit l'équation (1), soit une ou plusieurs des équations auxiliaires

$$\text{(5)} \quad \varpi(x) = 0, \qquad \text{(6)} \quad \psi(x) = 0, \qquad \text{(7)} \quad \Pi(x) = 0, \qquad \text{(8)} \quad \Psi(x) = 0,$$

on nomme

ξ et Ξ la plus petite et la plus grande de ces racines, pour l'équation (1),
$x_0 + \mu$ la plus petite, pour l'équation (5),
$x_0 + \nu$ la plus petite, pour l'équation (6),
$\mathrm{X} - \mathrm{M}$ la plus grande, pour l'équation (7),
$\mathrm{X} - \mathrm{N}$ la plus grande, pour l'équation (8).

Si l'équation (1) admet effectivement des racines réelles comprises entre les limites x_0, X, l'existence de ces racines entraînera l'existence des racines

$$x_0 + \mu, \qquad \mathrm{X} - \mathrm{M},$$

qui pourront être substituées avec avantage aux limites x_0, X, attendu que l'on aura

$$\text{(9)} \qquad x_0 + \mu < \xi, \qquad\qquad \text{(10)} \qquad \Xi < \mathrm{X} - \mathrm{M},$$

les deux racines ξ, Ξ pouvant être distinctes ou se réduire à une seule. De plus, l'existence de la racine $x_0 + \nu$ entraînera toujours l'existence des racines ξ, Ξ, distinctes ou non l'une de l'autre, et par suite des racines

$$x_0 + \mu, \qquad \mathrm{X} - \mathrm{M}$$

qui vérifieront la condition (10) ainsi que la suivante

$$\text{(11)} \qquad x_0 + \mu < \xi < x_0 + \nu.$$

Pareillement l'existence de la racine $\mathrm{X} - \mathrm{N}$ entraînera toujours l'existence des racines ξ, Ξ distinctes ou non l'une de l'autre, et par suite des racines $$x_0 + \mu, \qquad X - M$$

qui vérifieront la condition (9) avec la suivante

$$(12) \qquad X - N < z < X - M.$$

Corollaire 1er. Si la limite x_0 était racine de l'équation (1), elle devrait être pareillement racine de l'équation (5); et, en excluant cette racine, on pourrait énoncer encore le 2e théorème, pourvu que l'on remplaçât, dans la formule (3), la quantité $f(x_0)$ par $f(x_0 + \varepsilon)$, ε désignant un nombre infiniment petit.

Corollaire 2e. Si la limite X était racine de l'équation (1), elle devrait être pareillement racine de l'équation (7); et, en excluant cette racine, on pourrait encore énoncer le 2e théorème, pourvu que l'on remplaçât, dans la formule (4), la quantité $f(X)$ par $f(X - \varepsilon)$, ε désignant un nombre infiniment petit.

Corollaire 3e. Supposons la fonction $f(x)$ décomposée en deux autres

$$\varphi(x), \qquad -\chi(x),$$

dont les dérivées

$$\varphi'(x), \qquad -\chi'(x)$$

soient la première toujours croissante, et la seconde toujours décroissante, pour des valeurs croissantes de x, comprises entre les limites données; ce qui arrivera, par exemple, si, ces limites étant positives, et $f(x)$ une fonction entière, on prend pour $\varphi(x)$ la somme des termes positifs, et pour $-\chi(x)$ la somme des termes négatifs. En désignant par a une quantité comprise entre les limites x_0, X, ou même équivalente à l'une de ces limites, on aura, en vertu d'une formule connue

$$(13) \qquad \varphi(x) = \varphi(a) + (x - a)\,\varphi'(u), \qquad \chi(x) = \chi(a) + (x - a)\,\chi'(v),$$

les quantités u, v étant renfermées elles-mêmes entre a et x, à plus forte raison entre les limites x_0, X; puis, en ayant égard à l'équation identique

$$(14) \qquad f(x) = \varphi(x) - \chi(x),$$

on tirera des formules (13)

$$(15) \qquad f(x) = f(a) + (x - a)\,[\varphi'(u) - \chi'(v)].$$

Comme on aura d'ailleurs, dans l'hypothèse admise,

$$(16) \qquad \varphi'(x_0) < \varphi'(u) < \varphi'(X), \quad \chi'(x_0) < \chi'(v) < \chi'(X),$$

la formule (15) donnera

$$(17)\qquad f(x) < f(a) + (x-a)\,[\varphi'(\mathrm{X}) - \chi'(x_0)],$$

$$(18)\qquad f(x) > f(a) + (x-a)\,[\varphi'(x_0) - \chi'(\mathrm{X})];$$

puis, en divisant par $f(a)$ les deux membres de celles-ci, on trouvera, 1°. si $f(a)$ est positif

$$(19)\qquad 1 + \frac{\varphi'(x_0) - \chi'(\mathrm{X})}{f(a)}(x-a) < \frac{f(x)}{f(a)} < 1 + \frac{\varphi'(\mathrm{X}) - \chi'(x_0)}{f(a)}(x-a),$$

2°. si $f(a)$ est négatif

$$(20)\qquad 1 + \frac{\varphi'(\mathrm{X}) - \chi'(x_0)}{f(a)}(x-a) < \frac{f(x)}{f(a)} < 1 + \frac{\varphi'(x_0) - \chi'(\mathrm{X})}{f(a)}(x-a).$$

Si maintenant on désigne, pour abréger, par

$$-\frac{1}{\alpha} \text{ et } -\frac{1}{\beta}$$

le plus petit et le plus grand des rapports

$$(21)\qquad \frac{\varphi'(x_0) - \chi'(\mathrm{X})}{f(x_0)}, \quad \frac{\varphi'(\mathrm{X}) - \chi'(x_0)}{f(x_0)},$$

et par

$$\frac{1}{\mathrm{A}}, \quad \frac{1}{\mathrm{B}}$$

le plus grand et le plus petit des rapports

$$(22)\qquad \frac{\varphi'(x_0) - \chi'(\mathrm{X})}{f(\mathrm{X})}, \quad \frac{\varphi'(\mathrm{X}) - \chi'(x_0)}{f(\mathrm{X})},$$

on tirera de la formule (19) ou (20), 1° en y remplaçant a par x_0,

$$(23)\qquad 1 - \frac{x - x_0}{\alpha} < \frac{f(x)}{f(x_0)} < 1 - \frac{x - x_0}{6};$$

2°. en y remplaçant a par X,

$$(24)\qquad 1 + \frac{x - \mathrm{X}}{\mathrm{A}} < \frac{f(x)}{f(\mathrm{X})} < 1 + \frac{x - \mathrm{X}}{\mathrm{B}}.$$

Comme les trois membres dont se compose chacune des formules (23), (24), sont trois fonctions de x qui offrent des valeurs égales à l'unité, par conséquent affectées du même signe, quand on pose $x = x_0$ ou $x = \mathrm{X}$, ces formules pourront être substituées, dans le 2e théorème, aux formules (3) et (4); et alors les équations (5), (6), (7), (8), réduites aux suivantes :

$$(25)\ 1-\frac{x-x_0}{\alpha}=0,\quad (26)\ 1-\frac{x-x_0}{6}=0,\quad (27)\ 1+\frac{x-X}{A}=0,\quad (28)\ 1+\frac{x-X}{B}=0,$$

offriront pour racines les quatre quantités

$$(29)\qquad x_0+\alpha,\qquad x_0+6,\qquad X-A,\qquad X-B.$$

Mais chacune de ces quantités ne pourra se confondre avec l'une de celles que nous avons représentées, dans le 2[e] théorème, par

$$(30)\qquad x_0+\mu\qquad x_0+\nu,\qquad X-M,\qquad X-N,$$

qu'autant qu'elle restera comprise entre les limites x_0, X. Cela posé, le 2[e] théorème entraînera évidemment la proposition suivante :

3[e] *Théorème.* Soit

$$(1)\qquad f(x)=0,$$

une équation dont le premier membre $f(x)$ reste fonction continue de x, entre les limites

$$x=x_0,\quad x=X.$$

Supposons d'ailleurs la fonction $f(x)$ décomposée en deux autres

$$\varphi(x),\qquad -\chi(x),$$

qui restent elles-mêmes continues entre les limites données, et soient toujours la première croissante, la seconde décroissante, tandis que l'on fait croître x entre ces limites. Enfin, nommons $-\frac{1}{\alpha}$ le plus petit et $-\frac{1}{6}$ le plus grand des rapports

$$\frac{\varphi'(x_0)-\chi'(X)}{f(x_0)},\qquad \frac{\varphi'(X)-\chi'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Nommons, au contraire $\frac{1}{A}$ le plus grand et $\frac{1}{B}$ le plus petit des rapports.

$$\frac{\varphi'(x_0)-\chi'(X)}{f(X)},\qquad \frac{\varphi'(X)-\chi'(x_0)}{f(X)}.$$

Si l'équation (1) offre des racines comprises entre les limites x_0, X, les quantités

$$x_0+\alpha,\qquad X-A$$

seront elles-mêmes renfermées entre ces limites, et comprendront entre elles toutes les racines dont il s'agit. De plus, il suffira que l'une des quantités

$$x_0+6,\qquad X-B,$$

soit comprise entre les limites x_0,X, pour que l'équation (1) offre certainement des racines renfermées entre ces limites. Nommons ξ la plus petite, et Ξ la plus grande de ces racines, les deux racines ξ, Ξ pouvant quelquefois se réduire à une seule. Si la quantité $x_0 + \mathcal{C}$ est comprise entre les limites x_0, X, on pourra en dire autant des quantités $x_0 + \alpha$, X — A, qui vérifieront les conditions

$$(31) \qquad x_0 + \alpha < \xi < x_0 + \mathcal{C}, \qquad (32) \qquad \Xi < \mathrm{X} - \mathrm{A};$$

et si la quantité X—B est comprise entre x_0, X, on pourra encore en dire autant des quantités $x_0 + \alpha$, X — A, qui vérifieront les conditions

$$(33) \qquad x_0 + \alpha < \xi, \qquad (34) \qquad \mathrm{X} - \mathrm{B} < \Xi < \mathrm{X} - \mathrm{A}.$$

Nota. Lorsqu'à la formule (15) on substitue la suivante :

$$f(x) = f(a) + (x - a)\, f'(a) + \frac{1}{2}(x - a)^2\, [\varphi''(u) - \chi''(v)],$$

alors on obtient le théorème suivant analogue à celui qu'on vient d'énoncer.

4^e *Théorème*. Le premier membre de l'équation donnée

$$f(x) = 0$$

étant un polynome en x du degré n, supposons qu'on cherche la racine positive immédiatement inférieure à une limite donnée X. On posera

$$\alpha = f(\mathrm{X}), \quad \beta = f'(\mathrm{X}),$$

et l'on prendra pour γ la moitié du résultat qu'on obtient en écrivant X au lieu de x dans la dérivée du second ordre de la partie de $f(x)$ qui se compose de termes affectés d'un signe opposé à celui de la quantité $f(\mathrm{X})$; puis on résoudra l'équation du second degré

$$(34) \qquad \alpha + \beta(x - \mathrm{X}) + \gamma(x - \mathrm{X})^2 = 0.$$

Si l'on nomme X_1 la plus petite racine de cette dernière équation et

$$\mathrm{X}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots$$

une série de quantités dont la troisième se déduise de la seconde, la quatrième de la troisième, etc..... comme la seconde se déduit de la première ; la racine cherchée sera la limite vers laquelle convergera très rapidement le terme général de cette série.

Si l'on prenait pour X une limite supérieure à toutes les racines positives, la méthode indiquée ferait connaître la plus grande de ces racines.

La méthode est applicable au cas même où X serait une racine positive déjà trouvée, et fournirait alors la racine positive immédiatement inférieure.

Démonstration. En conservant les notations du théorème 3 et supposant de plus $x_0 = 0$, $X > 0$, on aura non-seulement

$$\varphi(x) = \varphi(X) + (x - X)\,\varphi'(X) + \frac{(x-X)^2}{1.2}\,\varphi''(u)$$

u étant compris entre x_0 et X, mais aussi

$$\varphi''(u) > 0 \qquad \varphi''(u) < \varphi''(X),$$

et par suite

$$\varphi(x) > \varphi(X) + (x - X)\,\varphi'(X)\,,$$
$$\varphi(x) < \varphi(X) + (x - X)\,\varphi'(X) + \frac{(x-X)^2}{1.2}\,\varphi''(X),$$

on trouvera de même pour des valeurs de x inférieures à X

$$\chi(x) > \chi(X) + (x - X)\,\chi'(X)$$
$$\chi(x) < \chi(X) + (x - X)\,\chi'(X) + \frac{(x-X)^2}{1.2}\,\chi''(X)$$

et comme on a $f(x) = \varphi(x) - \chi(x)$ on trouvera,

$$f(x) > f(X) + (x - X)\,f'(X) - \frac{(x-X)^2}{1.2}\,\chi''(X)$$
$$< f(X) + (x - X)\,f'(X) + \frac{(x-X)^2}{1.2}\,\varphi''(X)\,;$$

donc, d'après le théorème 2, la plus grande des racines de la proposée inférieures à X sera surpassée si $f(X)$ est positif par la plus petite des racines de l'équation auxiliaire

$$f(x) + (x - X)\,f'(X) - \frac{(x-X)^2}{1.2}\,\chi''(X) = 0,$$

et si $f(X)$ est négatif la plus petite racine de l'équation

$$f(X) + (x - X)\,f'(X) + \frac{(x-X)^2}{1.2}\,\varphi''(X) = 0.$$

Donc, etc.

Exemple. Soit donné à résoudre l'équation de Lagrange

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

et supposons que l'on cherche ses racines positives. Comme on aura (*voir l'analyse algébrique*) $x^3 + 7 > 2\sqrt{7x^3}$, les racines positives de la proposée seront inférieures à la racine positive de l'équation auxiliaire $2\sqrt{7x^3}=7x$, c'est-à-dire à $\frac{7}{4}=1,75$. De plus la formule (1) donnera, pour $X=1,75$,

$$(X^3-7X+7)+(3X^2-7)(x-X)=0, \qquad x=1,7\ldots\text{environ},$$

Et pour $X=1,7\ldots$

$$(X^3-7X+7)+(3X^2-7)(x-X)+3X(x-X)^2=0,\ x=1,38\ldots$$

En posant de nouveau $x=1,38$, on trouvera $x=1,3569$... En po- $x=1,70$, on trouvera $1,692$. Les deux racines de la proposée sont en effet $1,3569$ et $1,692$.

Ajoutons, que les conclusions précédentes subsisteront lors même que $f(x)$ sera une fonction transcendante, si cette fonction est décomposable en deux parties $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ telles que chacune des dérivées $\varphi''(x)$ $\chi''(x)$ acquerra des valeurs positives toujours croissantes pour des valeurs positives de x.

§ II. — *Méthode linéaire.*

Étant donnée une fonction $f(x)$ qui reste finie et continue ainsi que sa dérivée $f'(x)$ entre les limites

$$x=x_0, \qquad x=X>x_0,$$

on aura, en supposant x et a renfermés entre ces limites,

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(u),$$

la valeur de u étant elle-même renfermée entre a et x, à plus forte raison entre x_0 et X. Cela posé, nommons

$$v,\ V$$

la plus petite et la plus grande des valeurs que la fonction dérivée $f'(x)$ puisse acquérir entre les limites $x=x_0$, $x=X$, ou bien encore deux quantités dont la première soit inférieure à la plus petite de ces valeurs, et la seconde supérieure à la plus grande. Si l'on désigne par la notation

$$M(v,\ V)$$

une quantité comprise entre v et V, l'équation

$$f'(u)=M(v,\ V),$$

jointe à celle qui précède, entraînera la suivante

$$f(x) = \mathrm{M}[f(a) + \nu(x-a),\quad f(a) + \mathrm{V}(x-a)],$$

de laquelle on tirera, en posant successivement $a = x_0$, $a = \mathrm{X}$,

$$f(x) = \mathrm{M}[f(x_0) + \nu(x-x_0),\quad f(x_0) + \mathrm{V}(x-x_0)],$$
$$f(x) = \mathrm{M}[f(\mathrm{X}) + \nu(x-\mathrm{X}),\quad f(\mathrm{X}) + \mathrm{V}(x-\mathrm{X})].$$

Or de ces dernières, jointes au 3ᵉ théorème, du paragraphe Iᵉʳ, on déduira immédiatement la proposition que je vais énoncer.

Théorème. Soit

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

une équation dont le premier membre reste fonction continue de x, ainsi que sa dérivée, entre les limites

$$x = x_0, \quad x = \mathrm{X} > x_0.$$

Nommons ν la plus petite, V la plus grande des valeurs que la fonction $f'(x)$ puisse recevoir entre les limites dont il s'agit, ou bien encore, deux quantités, la première inférieure à la plus petite de ces valeurs; la seconde, supérieure à la plus grande; et concevons que l'on résolve les équations linéaires

$$(2) \qquad f(x_0) + \nu(x-x_0) = 0, \quad f(x_0) + \mathrm{V}(x-x_0) = 0,$$
$$(3) \qquad f(\mathrm{X}) + \nu(x-\mathrm{X}) = 0, \quad f(\mathrm{X}) + \mathrm{V}(x-\mathrm{X}) = 0.$$

Supposons d'ailleurs que, dans le cas où des valeurs de x, renfermées entre x_0, X, vérifieraient, comme racines, soit l'équation (1), soit les équations auxiliaires (2) et (3), on nomme

ξ et Ξ la plus petite et la plus grande de ces racines pour l'équation (1),

x_1 et $x_1 + \delta_1$ la plus petite et la plus grande pour le système des équations (2),

X_1 et $\mathrm{X}_1 - \varepsilon_1$ la plus grande et la plus petite pour le système des équations (3).

Si l'équation (1) admet effectivement des racines réelles comprises entre les limites x_0, X, l'existence de ces racines entraînera l'existence des nouvelles limites

$$x_1, \quad \mathrm{X}_1,$$

qui pourront être substituées avec avantage aux limites données

$$x_0, \quad X,$$

attendu que l'on aura

$$(4) \qquad x_0 < x_1 < \xi, \quad \Xi < X_1 < X,$$

les deux racines ξ, Ξ pouvant être distinctes l'une de l'autre, ou se réduire à une seule. De plus, l'existence de la racine $x_1 + \delta_1$ entraînera toujours l'existence des racines ξ, Ξ, distinctes ou non l'une de l'autre, et par suite l'existence des limites x_1, X_1, qui vérifieraient la seconde des conditions (4) avec la suivante

$$(5) \qquad x_0 < x_1 < \xi < x_1 + \delta_1 < X.$$

Pareillement l'existence de la racine $X_1 - \varepsilon_1$ entraînera toujours l'existence des racines ξ, Ξ distinctes ou non l'une de l'autre, et par suite l'existence des limites x_1, X_1 qui vérifieraient la première des conditions (4) avec la suivante

$$(6) \qquad x_0 < X_1 - \varepsilon_1 < \Xi < X_1 < X.$$

Corollaire 1er. Supposons la fonction $f(x)$ décomposée en deux autres

$$\varphi(x), \quad -\chi(x),$$

dont les dérivées

$$\varphi'(x), \quad -\chi'(x),$$

restent fonctions continues de x, entre les limites $x = x_0$, $x = X$, et soient constamment, la première toujours croissante, la seconde toujours décroissante entre ces limites. La condition

$$x_0 < u < X,$$

entraînera les suivantes

$$\varphi'(x_0) < \varphi'(u) < \varphi'(X), \quad \chi'(x_0) < \chi'(u) < \chi'(X);$$

et en conséquence la fonction

$$f'(u)$$

sera supérieure à v, mais inférieure à V ; si l'on pose

$$(7) \qquad v = \varphi'(x_0) - \chi'(X), \qquad V = \varphi'(X) - \chi'(x_0).$$

Donc alors on pourra, dans le théorème énoncé, attribuer à v et à V les valeurs que fournissent les équations (7).

Si, les limites x_0, X étant des quantités de même signe, l'équation (2) a pour premier membre une fonction entière de x, on pourra prendre pour $\phi(x)$ la somme des termes positifs de ce premier membre, et pour $-\chi(x)$ la somme des termes négatifs.

Corollaire 2. Si les limites x_0, X sont assez rapprochées l'une de l'autre pour que la fonction dérivée du second ordre $f''(x)$ ne change pas de signe entre ces limites, la fonction dérivée du premier ordre $f'(x)$ sera toujours croissante, ou toujours décroissante depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$. On aura donc alors, pour une valeur de x comprise entre les limites données,

$$f'(u) = \mathrm{M}[f'(x_0),\ f'(\mathrm{X})];$$

et par suite on pourra prendre pour

$$v \quad \text{et} \quad \mathrm{V}$$

la plus petite et la plus grande des deux quantités

$$(8) \qquad f'(x_0), \quad f'(\mathrm{X}).$$

Corollaire 3. Supposons les valeurs de v, V déterminées d'après une des règles énoncées dans les corollaires 1 et 2, ou d'après toute autre règle, en vertu de laquelle, la condition

$$f'(u) = \mathrm{M}(v,\ \mathrm{V})$$

étant vérifiée pour toute valeur de u comprise entre x_0, X, les limites v, V se rapprochent l'une de l'autre en même temps que les limites x_0, X. Supposons d'ailleurs que l'équation (1) offre une ou plusieurs racines réelles entre les limites x_0, X. L'existence de ces racines entraînera l'existence des nouvelles limites désignées par x_1, X_1; et si l'on représente par

$$(9) \qquad x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \text{etc.},$$
$$(10) \qquad \mathrm{X}, \quad \mathrm{X}_1, \quad \mathrm{X}_2, \quad \mathrm{X}_3, \quad \text{etc.},$$

deux séries, dans chacune desquelles le troisième terme se déduit du second, le quatrième terme du troisième, etc., comme le second terme se déduit du premier, le terme général de la série (9) s'approchera indéfiniment de la racine ξ, et le terme général de la série (10) de la racine Ξ, ξ étant la plus petite et Ξ la plus grande des racines dont il s'agit. En effet, soient

$$v_m, \quad \mathrm{V}_m$$

ce que deviennent v et V, lorsqu'on remplace x_0 et X par x_m et X_m,

m étant un nombre entier quelconque, v_m et V_m seront compris entre les limites v, V, et la valeur de x_{m+1} sera donnée non par l'une des formules(2), mais par l'une des suivantes

$$f(x_m) + v_m(x_{m+1} - x_m) = 0, \quad f(x_m) + V_m(x_{m+1} - x_m) = 0.$$

Or, en vertu de l'une ou de l'autre, la valeur numérique de $f(x_m)$ sera inférieure à celle de l'un des produits

$$v(x_{m+1} - x_m), \quad V(x_{m+1} - x_m),$$

et deviendra infiniment petite avec la différence $x_{m+1} - x_m$ pour des valeurs infiniment grandes de m, attendu que les termes de la série (9) croissent toujours sans pouvoir surpasser X. Nommons ξ la limite dont s'approchent les valeurs décroissantes de ces mêmes termes. La limite de $f(x_m)$ ou $f(\xi)$ sera nulle, d'après ce qu'on vient de dire, et ξ ne pourra être que la plus petite des racines de l'équation (1), entre les limites x_0, X, puisque cette plus petite racine devra surpasser tous les termes de la série (9).

On prouvera de même que la limite dont s'approchent en décroissant les termes de la série (10), se réduit à la plus grande des racines de l'équation (2) comprises entre x_0 et X.

La méthode de résolutions des équations, fondée sur la détermination des divers termes de la série (9) ou (10), ou, ce qui revient au même, sur l'emploi des équations linéaires (2) et (3), est ce qu'on doit naturellement nommer la méthode des approximations linéaires ou simplement la méthode linéaire.

Corollaire 4. Supposons la fonction $f''(x)$ est toujours affectée du même signe, et toujours différente de zéro, entre les limites données $x = x_0$, $x = X$. Alors, en vertu du corollaire 2, on pourra prendre

$$f(x_0) \quad \text{et} \quad f(X)$$

pour valeurs de v et de V, ce qui réduira les équations auxiliaires (2) et (3) aux suivantes :

$$(11) \qquad f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0, \quad f(x_0) + (x - x_0)f'(X) = 0,$$

$$(12) \qquad f(X) + (x - X)f'(x_0) = 0, \quad f(X) + (x - X)f'(X) = 0.$$

Alors aussi, la fonction $f'(x)$ étant toujours croissante ou toujours décroissante entre les limites données, l'équation dérivée

$$(13) \qquad f'(x) = 0$$

offrira tout au plus une racine simple, et la proposée

$$f(x) = 0$$

tout au plus deux racines ξ, Ξ comprises entre ces limites.

Si la proposée offre effectivement deux racines simples

$$\xi, \quad \Xi$$

comprises entre les limites données, les quantités

$$f(x_0), \quad f(\mathrm{X})$$

seront affectées du même signe, et leur signe sera encore celui de $f''(x)$, entre les limites $x = x_0$, $x = \mathrm{X}$. En effet, x venant à croître à partir de x_0, la fonction

$$\frac{f(x)}{f(x_0)},$$

d'abord positive, deviendra nulle pour $x = \xi$, Donc cette fonction décroîtra en passant par zéro, et sa dérivée

$$\frac{f'(x)}{f(x_0)}$$

sera négative pour $x = \xi$. Mais, entre les limites ξ et Ξ, il y aura une valeur de x propre à vérifier la formule (13). Donc la fonction

$$\frac{f'(x)}{f(x_0)}$$

croîtra en passant par zéro, et sa dérivée

$$\frac{f''(x)}{f(x_0)}$$

sera positive pour la valeur de x qui vérifiera l'équation (13). Donc cette fonction sera constamment positive, si, comme nous le supposons, elle conserve constamment le même signe entre les limites données. Dans cette hypothèse, et en admettant que $f(x_0)$, $f(\mathrm{X})$ soient des quantités de même signe, on aura

$$(14) \qquad \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} < 0 < \frac{f'(\mathrm{X})}{f(x_0)}, \qquad \frac{f'(x_0)}{f(\mathrm{X})} < 0 < \frac{f'(\mathrm{X})}{f(\mathrm{X})};$$

et, comme $f'(x_0)$, $f'(\mathrm{X})$ seront des quantités affectées de signes contraires, on pourra en dire autant des valeurs de $x - x_0$ fournies soit par les équations (11), soit par les équations (12). Donc, parmi ces quatre équations, les seules qui fourniront des racines comprises entre les limites x_0, X seront la première et la dernière, en sorte qu'on aura

$$(15) \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \qquad X_1 = X - \frac{f(X)}{f'(X)}.$$

Des deux quantités qui précèdent la première x_1 sera inférieure à la racine ξ, et la seconde X_1 supérieure à la racine Ξ de l'équation (1).

Si la proposée offre une seule racine ξ comprise entre les limites x_0, X, alors $f(x_0)$ et $f(X)$ étant affectées de signes contraires, on trouvera, 1°. en supposant $f''(x)$ constamment affecté du même signe que $f(x_0)$,

$$(16) \quad \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} < \frac{f'(X)}{f(x_0)}, \qquad \frac{f'(x_0)}{f(X)} > \frac{f'(X)}{f(X)},$$

puisque, dans ce cas, la dérivée de $\frac{f'(x)}{f(x_0)}$, savoir $\frac{f''(x)}{f(x_0)}$ sera positive, 2°. en supposant $f''(x)$ constamment affecté d'un signe contraire à celui de $f(x_0)$,

$$(17) \quad \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} > \frac{f'(X)}{f(x_0)}, \qquad \frac{f'(x_0)}{f(X)} < \frac{f'(X)}{f(X)}.$$

Dans la première hypothèse, les formules (11) et (12), jointes aux conditions (16), donneront

$$(18) \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \qquad X_1 = X - \frac{f(X)}{f'(x_0)}.$$

Dans la seconde hypothèse, au contraire, les formules (11), (12) jointes aux conditions (17), donneront

$$(19) \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(X)}, \qquad X_1 = X - \frac{f(X)}{f'(X)}.$$

Dans l'un et l'autre cas, x_1 et X_1 représenteront, la première une limite inférieure, la seconde une limite supérieure à la racine ξ.

Il est bon d'observer que des formules (18) et (19) la première et la dernière coïncident avec la première et la seconde des équations (15).

Lorsque la quantité x_0 ou X représente une valeur déjà très approchée d'une racine ξ ou Ξ de l'équation (1), la substitution de la limite

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

à la limite x_0, ou de la limite

$$X_1 = X - \frac{f(X)}{f'(X)}$$

à la limite X, constitue la méthode d'approximation de Newton. Ainsi la méthode de résolution des équations, fondée sur le théorème premier, comprend comme cas particulier la méthode newtonienne.

Quant à celles des équations (18), (19) qui ne coïncident pas avec l'une des équations (15), elles ont été, je crois, déjà indiquées par M. Fourier, peut-être même par M. Legendre, comme capables de fournir des limites opposées à celles que donne la méthode de Newton.

Si l'équation $f(x)=0$ n'offrait pas de racines comprises entre les limites x_0, X, alors les équations auxiliaires n'offriraient point deux racines comprises entre les limites x_0, X, et que l'on pût considérer comme deux nouvelles limites x_1, X_1; ou les termes de la série (9) finiraient par surpasser les termes correspondants de la série (10).

Corollaire 5. Supposons la fonction $f(x)$ décomposée en deux autres

$$\varphi(x), \quad -\chi(x)$$

dont les dérivées du second ordre

$$\varphi''(x), \quad -\chi''(x),$$

restent continues entre les limites $x=x_0$, $x=X$, et soient la première toujours croissante, la seconde toujours décroissante entre ces limites. Les deux différences

$$\varphi''(x_0)-\chi''(X), \qquad \varphi''(X)-\chi''(x_0) \tag{20}$$

seront, la première inférieure à la plus petite, la seconde supérieure à la plus grande des valeurs qu'acquerra entre ces limites la fonction

$$f''(x)=\varphi''(x)-\chi''(x).$$

Par conséquent, si les quantités (20) offrent le même signe, ce signe affectera constamment la valeur de $f''(x)$ entre les limites données. Donc, pour que la méthode newtonienne fournisse des valeurs de plus en plus approchées d'une racine ou de deux racines de l'équation (1) comprises entre des limites données x_0, X, il suffit que les quantités (20) offrent le même signe.

Si les limites x_0 étant des quantités positives, l'équation (1) a pour premier membre une fonction entière de x, on pourra prendre pour $\varphi(x)$ la somme des termes positifs de ce premier membre, et pour $\chi(x)$ la somme des termes négatifs.

Corollaire 6. La méthode linéaire, telle que nous l'avons développée ci-dessus, étant appliquée à la détermination des racines réelles de l'équation

$$f(x)=0$$

comprises entre des limites données x_0, X, fournit immédiatement des valeurs approchées de la plus petite et de la plus grande entre ces racines, savoir une série de termes

$$(21) \qquad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots.$$

qui croissent en s'approchant de la plus petite racine ξ, et une autre série de termes

$$(22) \qquad X_1, \quad X_2, \quad X_3, \ldots.$$

qui décroissent en s'approchant de la plus grande racine Ξ. Dans un grand nombre de cas, la méthode linéaire fournit en outre une série de termes

$$(23) \qquad x_1 + \delta_1, \quad x_2 + \delta_2, \quad x_3 + \delta_3, \text{ etc.}$$

qui décroîtront en s'approchant de la racine ξ, et une série de termes

$$(24) \qquad X_1 - \varepsilon_1, \quad X_2 - \varepsilon_2, \quad X_3 - \varepsilon_3, \text{ etc.}$$

qui croîtront en s'approchant de la racine Ξ; et c'est ce qui arrivera certainement, si les racines ξ, Ξ ne diffèrent pas l'une de l'autre, c'est-à-dire si l'équation (1) offre une seule racine comprise entre ces limites x_0, X. Dans ce cas, en particulier, la série (23) pourra se confondre avec la série (22), et la série (24) avec la série (21). Dans des cas semblables, en calculant

$$x_m \quad \text{et} \quad x_m + \delta_m,$$

ou

$$X_m \quad \text{et} \quad X_m - \varepsilon_m,$$

on obtiendra non-seulement une valeur approchée x_m ou X_m de la racine cherchée ξ ou Ξ, mais encore une limite δ_m ou ε_m de l'erreur que l'on commet en substituant cette valeur approchée à la racine elle-même.

Corollaire 7. Lorsque l'équation (1) offre une seule racine ξ comprise entre x_0, X, alors, pour des valeurs croissantes de m, les termes généraux

$$x_m, \quad X_m$$

s'approchent indéfiniment de cette racine; et à moins que l'on n'ait

$$(25) \qquad f''(\xi) = 0,$$

il arrive bientôt un instant où les différences

$$\xi - x_m, \quad X_m - \xi,$$

sont assez petites pour que la fonction donnée $f''(x)$ conserve toujours entre les limites $x = x_m$, $x = X_m$ le même signe. A partir de cet instant, de nouvelles valeurs approchées de la racine ξ peuvent être obtenues à l'aide de la règle indiquée et développée dans les corollaires 2 et 4. Ces nouvelles valeurs approchées de la racine ξ seront d'ailleurs déterminées par des équations semblables soit aux formules (18), soit aux formules (19), et fourniront deux séries l'une croissante, l'autre décroissante, composées de termes qui, dans l'une des deux séries, se déduiront les uns des autres suivant la méthode newtonienne. Donc, si l'on suppose une seule racine ξ de l'équation (1) comprise entre x_0, X, et si l'on fait abstraction du cas où cette racine vérifierait l'équation dérivée du second ordre

$$f''(x) = 0, \tag{26}$$

la méthode linéaire, appliquée à la détermination des valeurs approchées de la racine ξ, pourra toujours être réduite, après un certain nombre d'approximations successives, à la méthode newtonienne.

Si le premier membre de l'équation (1) étant une fonction entière $\varphi(x)$, représente la somme des termes positifs du premier membre, et $-\chi(x)$ la somme des termes négatifs, alors, pour que $f''(x)$ ne puisse changer de signe entre les limites $x = x_m$, $x = X_m$, il suffira que les deux différences

$$\varphi''(x_m) - \chi''(X_m), \quad \varphi''(X_m) - \chi''(x_m) \tag{27}$$

soient deux quantités de même signe (*voyez* le corollaire 5).

§ III.

Comme dans une équation donnée

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

les racines positives deviennent négatives, et réciproquement, lorsqu'on remplace dans le premier membre x par $-x$, il est clair que la détermination des racines réelles d'une équation donnée peut toujours être réduite à la détermination des racines positives de cette équation et d'une équation transformée. D'autre part, la méthode linéaire, telle que je l'ai présentée dans le paragraphe précédent, étant appliquée à la résolution d'une équation, offre le moyen de calculer immédiatement la plus petite et la plus grande des racines positives comprises entre deux limites données x_0, X, en fournissant au moins deux séries de valeurs indéfiniment approchées de ces mêmes racines ; savoir, une série de termes

(2) $$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots$$

qui s'approchent en croissant de la plus petite racine ξ, et une série de termes

(3) $$X_1,\ X_2,\ X_3,\ldots$$

qui s'approchent en décroissant de la plus grande racine Ξ. Ce n'est pas tout : en supposant, pour plus de généralité, que la racine ξ soit une racine multiple de l'équation (1), et désignant par i le nombre des racines égales à ξ, on aura sensiblement pour de très petites valeurs numériques de $x-\xi$,

$$\frac{f(x)}{(x-\xi)^i}=\frac{d.f(x)}{d.(x-\xi)^i}=\frac{f'(x)}{i(x-\xi)^{i-1}},\quad \text{ou}\quad \frac{(x-\xi)f'(x)}{if(x)}=1\,;$$

et en réalité

$$\frac{(x-\xi)f'(x)}{if(x)}=1\pm\delta,\quad \xi=x-(1\pm\delta)i\frac{f(x)}{f'(x)},$$

δ désignant un nombre très petit. Or, si le premier membre de l'équation donnée est une fonction entière du degré n, si d'ailleurs on fait abstraction du cas toujours facile à reconnaître où toutes les racines de l'équation deviendraient égales entre elles, et à la $n^{ième}$ partie du coefficient du second terme pris en signe contraire, on aura généralement

$$i<n;$$

et même, dans l'équation

(4) $$\xi=x-(1\pm\delta)i\frac{f(x)}{f'(x)},$$

le produit $(1\pm\delta)i$ deviendra, pour de très petites valeurs numériques de $x-\xi$, inférieure à n, en sorte qu'on tirera de cette équation

$$\xi=\mathrm{M}\left(x,\ x-n\frac{f(x)}{f'(x)}\right),$$

la lettre M indiquant une moyenne entre les deux quantités comprises entre les parenthèses. Donc aussi, pour des valeurs de m suffisamment grandes, le terme de la série (2) désigné par x_m s'approchera de la racine ξ de telle sorte qu'on aura

(5) $$\xi=\mathrm{M}\left(x_m,\ x_m-n\frac{f(x_m)}{f'(x_m)}\right),$$

et alors, en prenant x_m pour valeur de ξ, on commettra une erreur plus petite que la quantité positive

$$(6) \qquad - n \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}.$$

Si la racine ξ est une racine simple de l'équation (1), le produit $i(1 \pm \delta)$, réduit à la quantité $1 \pm \delta$, sera, pour de très petites valeurs de δ, inférieur à 2. Donc alors, pour de très grandes valeurs de m, la différence entre la racine ξ et sa valeur approchée x_m ne surpassera pas le nombre

$$(7) \qquad - 2 \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}.$$

On sera en droit d'affirmer qu'il en est ainsi, lorsque les quantités

$$(8) \qquad x_m, \; x_m - 2 \frac{f(x_m)}{f'(x_m)},$$

substituées à la place de x dans $f(x)$, fourniront des résultats de signes contraires. Alors, dans la détermination des valeurs approchées successives de la racine ξ, la seconde des quantités (8) pourra être substituée au terme général x_m de la série (3).

Par des raisonnements semblables à ceux qui précèdent, on prouvera encore que, pour des valeurs de m suffisamment grandes, le terme X_m de la série (3) s'approchera de la racine Ξ de manière à vérifier la formule

$$(9) \qquad \Xi = M\left(X_m, X - n \frac{f(X_m)}{f'(X_m)}\right).$$

Alors, en prenant X_m pour valeur de Ξ, on commettra une erreur plus petite que la quantité positive

$$(10) \qquad n \frac{f(X_m)}{f'(X_m)}.$$

Si Ξ est une racine simple, l'expression (10) pourra être remplacée, pour de très grandes valeurs de m, par le produit

$$(11) \qquad 2 \frac{f(X_m)}{f'(X_m)};$$

et l'on sera en droit d'affirmer que ce produit surpasse la différence

$$X_m - \Xi,$$

lorsque les quantités

$$(12) \qquad X_m, \quad X_m - 2 \frac{f(X_m)}{f'(X_m)},$$

substituées à la place de x dans $f(x)$, fourniront des résultats de signes contraires. Alors, dans la détermination des valeurs approchées de la racine Ξ, la seconde des quantités (12) pourra être substituée au terme x_m de la série (2).

Si la racine ξ ou Ξ est une racine multiple, elle se trouvera comprise pour de très grandes valeurs de m, non plus entre les quantités (8) ou (12), mais entre ces quantités

$$(13) \qquad x_m, \quad x_m - n\frac{f(x_m)}{f'(x_m)},$$

ou

$$(14) \qquad \mathrm{X}_m, \quad \mathrm{X}_m - n\frac{f(\mathrm{X}_m)}{f'(\mathrm{X}_m)};$$

et l'on sera en droit d'affirmer qu'il en est ainsi, lorsque la substitution des deux quantités (13) ou (14) à la place de x, dans la fonction $f(x)$, fournira deux résultats de signes contraires. Alors aussi le nombre des racines égales à ξ ou Ξ sera certainement impair. Si ce nombre devenait pair, on pourrait affirmer que la racine ξ ou Ξ est effectivement comprise entre les limites (13) ou (14), à l'instant où la substitution, effectuée non plus dans $f(x)$, mais dans $f'(x)$, fournirait des résultats de signes contraires.

En joignant les remarques précédentes aux principes établis dans les paragraphes qui précèdent, on obtiendra non-seulement des valeurs indéfiniment approchées de toutes les racines réelles, mais aussi, lorsque les approximations deviendront suffisamment grandes, des limites des erreurs commises dans la substitution des valeurs approchées aux valeurs exactes.

Au reste, on arrive encore plus promptement au même but, en remplaçant la méthode linéaire par celle qui se fonde sur l'emploi des équations auxiliaires du second degré.

Nota. Lorsque ξ étant une racine multiple de l'équation (1), i désigne le nombre des racines égales à ξ, et a une valeur très approchée de ξ, l'équation (4) donne à très peu près

$$(15) \qquad \xi = a - i\frac{f(a)}{f'(a)},$$

tandis qu'en nommant b une nouvelle valeur approchée fournie par la méthode newtonienne, on aurait

$$(16) \qquad b = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

Donc, a étant une valeur très approchée de ξ, on aura sensiblement

$$(17) \qquad \xi = a + i\,(b - a).$$

Soit c une nouvelle valeur approchée de ξ qui se déduise de b, comme b de a. On aura encore sensiblement $\xi = b + i(c - b)$, et par suite

$$(18) \qquad \frac{1}{i} = 1 - \frac{c-b}{b-a}.$$

La formule (18) fournit le moyen de déterminer, dans la méthode newtonienne, après un nombre suffisant d'approximations, le nombre des racines égales à ξ, et la formule (15) est celle qu'il convient de substituer alors à la formule (16), dans les approximations nouvelles.

§ IV.

La fonction $f(x)$ étant supposée entière entre les limites $x = x_0$, $x = \mathrm{X}$, concevons qu'il s'agisse de trouver les racines de l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 0,$$

comprise entre ces limites, et nommons ξ la plus petite de ces racines. La méthode linéaire fournira une série de termes

$$(2) \qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots$$

qui s'approcheront en croissant de la racine ξ. Si la racine ξ étant multiple, i désigne le nombre des racines égales à ξ, alors, en vertu des principes établis dans le paragraphe précédent, on aura, pour de grandes valeurs de m,

$$(3) \qquad \frac{(\xi - x_m) f'(x_m)}{i f(x_m)} = 1 \pm \delta,$$

δ désignant un nombre très petit; et par suite

$$(4) \qquad \xi = x_m - (i \pm \delta) i \frac{f(x_m)}{f'(x_m)},$$

Donc on aura sensiblement, pour de très grandes valeurs de m, ou, ce qui revient au même, pour de très petites valeurs de δ,

$$(5) \qquad \xi = x_m - i\,\frac{f'(x_m)}{f(x_m)},$$

et rigoureusement

$$\xi = \mathrm{M}\left[x_m-(i-1)\frac{f(x_m)}{f'(x_m)}, \quad x_m-(i+1)\frac{f(x_m)}{f'(x_m)}\right], \tag{6}$$

la lettre M indiquant une moyenne entre les quantités que renferment les parenthèses. Cela posé, pour une valeur de x_m suffisamment approchée de ξ, on pourra substituer à x_{m+1} le second membre de l'équation (5), en prenant

$$x_{m+1} = x_m - i\,\frac{f(x_m)}{f'(x_m)}; \tag{7}$$

et alors, en vertu de la formule (6), l'erreur que produira la substitution de x_{m+1} à ξ, sera inférieure à la valeur numérique du rapport

$$\frac{f(x_m)}{f'(x_m)}. \tag{8}$$

Mais, pour appliquer la formule (7), il est nécessaire de connaître la valeur de i. Or si l'on nomme a une valeur très approchée de ξ, a pourrait être précisément x_m, et b la nouvelle valeur approchée que fournirait la méthode newtonienne, on trouvera

$$b = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \tag{9}$$

et, en vertu de la formule (5), on aura sensiblement

$$\xi = a - i\,\frac{f(a)}{f'(a)} = a + i(b-a).$$

On aura de même, en supposant que c soit déduit de b, comme b de a,

$$\xi = b + i(c-b),$$

et par suite

$$a + i(b-a) = b + i(c-b), \quad \frac{1}{i} = 1 - \frac{c-b}{b-a},$$

d'où

$$i = \left(1 - \frac{c-b}{b-a}\right)^{-1}. \tag{10}$$

Ainsi, d'une première valeur très approchée de la racine ξ, il suffira d'en déduire deux autres b, c, par la méthode newtonienne, pour obtenir une valeur très approchée de i, ce qui sera suffisant, le nombre i devant d'ailleurs être un nombre entier. La valeur de i étant trouvée, la formule (7) pourra, dans la recherche de nouvelles valeurs approchées, être substituée avec avantage à la formule (9), employée par Newton, et la formule (8) fera connaître les limites des erreurs commises. On pourra d'ailleurs s'assurer directement que la différence $\xi - x_{m+1}$ offre une valeur numérique inférieure à celle de l'expression (8), en substituant successivement les deux quantités

$$(11) \qquad x_m - (i-1)\frac{f(x_m)}{f'(x_m)}, \quad x_m - (i+1)\frac{f(x_m)}{f'(x_m)},$$

à la place de x, dans la fonction $f(x)$, si le nombre i est impair, et dans la fonction $f'(x)$, si le nombre i est pair; car une racine ξ de l'équation (1) ou de sa dérivée sera certainement comprise entre les quantités (11), si les substitutions successives de ces deux quantités fournissent des résultats de signes contraires; et il devra en être ainsi, lorsque le nombre m sera très considérable.

Au reste, lorsque x_m représente une valeur déjà très approchée de la racine ξ supposée multiple, il suffit, pour obtenir de nouvelles valeurs approchées, qui convergent rapidement vers la racine ξ, d'appliquer la méthode newtonienne à l'équation (1) présentée sous la forme

$$(12) \qquad \frac{f(x)}{f'(x)} = 0,$$

attendu que ξ sera une racine simple de l'équation (12). Alors, en posant, pour abréger,

$$(13) \qquad \varphi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)},$$

on déduira de x_m une nouvelle valeur approchée x_{m+1} à l'aide de la formule

$$(14) \qquad x_{m+1} = x_m - \frac{\varphi(x_m)}{\varphi'(x_m)},$$

ou

$$(15) \qquad x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)f'(x_m)}{[f'(x_m)]^2 - f(x_m)f''(x_m)}.$$

Des opérations semblables à celles que nous venons d'indiquer serviront encore à déterminer la plus grande des racines comprises entre les limites x_0, X, si cette racine Ξ était multiple.

§ V.

Étant donnée une fonction $f(x)$ qui reste finie et continue ainsi que ses dérivées du premier et du second ordre $f'(x)$, $f''(x)$, entre les limites

$$x = x_0, \quad x = X > x_0,$$

on aura, en supposant x et a renfermés entre ces limites,

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)^2 \frac{f''(u)}{2}$$

la valeur de u étant elle-même renfermée entre a et x, à plus forte raison entre x_0 et X. Cela posé, nommons

$$v \text{ et } V$$

la plus petite et la plus grande des valeurs que la fonction $\frac{1}{2}f''(x)$ puisse acquérir entre les limites $x = x_0$, $x = X$, ou bien encore des quantités dont la première soit inférieure à la plus petite de ces valeurs, et la seconde supérieure à la plus grande. L'équation $\frac{1}{2}f''(u) = M(v, V)$, jointe à celle qui précède, entraînera la formule

$$f(x) = M[f(a) + (x - a)f'(a) + v(x - a)^2, \; f(a) + (x - a)f'(a) + V(x - a)^2],$$

Or, de ces dernières formules, jointes aux théorèmes 2 et 3 du § I^er^, on déduira immédiatement la proposition que je vais énoncer.

Théorème 1^er^. Soit

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

une équation dont le premier membre reste fonction continue de x, ainsi que ses dérivées du premier et du second ordre, entre les limites $x = x_0$, $x = X > x_0$. Nommons v la plus petite, V la plus grande des valeurs que la fonction $\frac{1}{2}f''(x)$ puisse recevoir entre les limites dont il s'agit, ou bien encore deux quantités, la première inférieure à la plus petite de ces valeurs, la seconde supérieure à la plus grande, et concevons que l'on résolve les équations du second degré

$$(2) \quad f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + v(x - x_0)^2 = 0, \quad f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + V(x - x_0)^2 = 0,$$

$$(3) \quad f(X) + (x - X)f'(X) + v(x - X)^2 = 0, \quad f(X) + (x - X)f'(X) + V(x - X)^2 = 0.$$

Supposons d'ailleurs que, dans le cas où des valeurs réelles de x, renfermées entre x_0, X, vérifieraient, comme racines, soit l'équation (1), soit les équations auxiliaires (2) et (3); on nomme

ξ et Ξ la plus petite et la plus grande de ces racines dans l'équation (1),
x_1 et $x_1 + \delta_1$ la plus petite pour l'une des équations (2), et la plus petite pour l'autre, δ_1 étant positif,
X_1 et $X_1 - \varepsilon_1$ la plus grande pour l'une des équations (3) et la plus grande pour l'autre, ε_1 étant positif.

Si l'équation (1) admet effectivement des racines réelles comprises entre les limites x_0, X, l'existence de ces racines entraînera l'existence des nouvelles limites

$$x_1, \quad X_1$$

qui pourront être substituées avec avantage aux limites données

$$x_0 \quad X,$$

attendu que l'on aura

$$x_0 < x_1 < \xi, \quad \Xi < X_1 < X. \tag{4}$$

Les deux racines ξ, Ξ pourront d'ailleurs être distinctes l'une de l'autre, ou se réduire à une seule. De plus, l'existence de la limite

$$x_1 + \delta_1,$$

entraînera toujours l'existence des racines ξ, Ξ distinctes ou non l'une de l'autre, et par suite l'existence des limites x_1, X_1 qui vérifieront la seconde des conditions (4) avec la suivante

$$x_0 < x_1 < \xi < x_1 + \delta_1 < X. \tag{5}$$

Pareillement l'existence de la limite $X_1 - \varepsilon_1$, entraînera toujours l'existence des racines ξ, Ξ distinctes ou non l'une de l'autre, et par suite l'existence des limites x_1, X_1 qui vérifieront la première des conditions (4) avec la suivante

$$x_0 < X_1 - \varepsilon_1 < \Xi < X_1 < X. \tag{6}$$

Corollaire 1er. Supposons la fonction $f(x)$ décomposée en deux autres

$$\varphi(x), \quad -\chi(x),$$

dont les dérivées du second ordre

$$\varphi''(x), \quad -\chi''(x),$$

restent fonctions continues de x, entre les limites $x = x_0$, $x = X$, et soient la première toujours croissante, la seconde toujours décroissante entre ces limites. La condition

$$x_0 < u < X$$

entraînera les suivantes

$$\phi''(x_0) < \phi''(u) < \phi''(X), \quad \chi''(x_0) < \chi''(u) < \chi''(X):$$

et en conséquence la fonction

$$\tfrac{1}{2} f''(u) = \tfrac{1}{2}[\phi''(u) - \chi''(u)]$$

sera supérieure à v, mais inférieure à V, si l'on pose

$$(7) \qquad v = \tfrac{1}{2}[\phi''(x_0) - \chi''(X)], \quad V = \tfrac{1}{2}[\phi''(X) - \chi''(x_0)].$$

Donc alors on pourra, dans le théorème énoncé, attribuer à v et à V les valeurs que fournissent les équations (7).

Si, les limites x_0, X étant des quantités positives, l'équation (1) a pour premier membre une fonction entière de x, on pourra prendre pour $\phi(x)$ la somme des termes positifs de ce premier membre et pour $-\chi(x)$ la somme des termes négatifs.

Corollaire 2. Si les limites x_0, X sont assez rapprochées l'une de l'autre pour que la fonction dérivée du troisième ordre $f'''(x)$ ne change pas de signe entre ces limites, la fonction dérivée du second ordre $f''(x)$ sera toujours croissante ou toujours décroissante depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$. On aura donc alors, pour une valeur de u comprise entre les limites données,

$$f''(u) = M[f''(x_0), \quad f''(X)],$$

et par suite on pourra prendre pour

$$v \text{ et } V$$

la plus petite et la plus grande des deux quantités

$$\tfrac{1}{2} f''(x_0), \ \tfrac{1}{2} f''(X).$$

Corollaire 3. Supposons les valeurs de v, V déterminées d'après une des règles énoncées dans les corollaires 1 et 2, ou d'après toute autre règle, en vertu de laquelle la condition $f''(u) = M(v, V)$ étant vérifiée pour toute valeur de u comprise entre x_0, X, les limites v, V se rapprocheraient l'une de l'autre en même temps que les limites x_0, X. Supposons d'ailleurs que l'équation (1) offre une ou plusieurs racines réelles comprises entre les limites x_0, X. L'existence de ces racines entraînera l'existence des nouvelles limites désignées par x_1, X_1; et si l'on représente par

$$(9) \qquad x_0, \quad x_1, \quad x_2, \; x_3, \text{ etc.},$$
$$(10) \qquad X, \quad X_1, \quad X_2, \quad X_3, \text{ etc.}$$

deux séries de termes dans chacune desquelles le troisième terme se déduise du second, le quatrième du troisième, etc.; comme le second se déduit du premier, le terme général de la série (9) s'approchera indéfiniment de la racine ξ, et le terme général de la série (10) de la racine Ξ, ξ étant la plus petite, et Ξ la plus grande des racines dont il s'agit. En effet, soient

$$v_m, \quad V_m$$

ce que deviennent v et V, lorsqu'on remplace x_0 et X par x_m et X_m, m étant un nombre entier quelconque; v_m et V_m seront compris entre les limites v, V; et x_{m+1} sera la plus petite des racines qui, étant comprises entre x_m, X_m vérifieront l'une des équations

$$(11) \quad f(x_m)+(x-x_m)f'(x_m)+v_m(x-x_m)^2=0, \quad f(x_m)+(x-x_m)f'(x_m)+V_m(x-x_m)^2=0;$$

par suite $f(x_m)$ sera équivalente à l'une des quantités

$$(12) \quad -(x_{m+1}-x_m)[f'(x_m)+v_m(x_{m+1}-x_m)], \quad -(x_{m+1}-x_m)[f'(x_m)+V_m(x_{m+1}-x_m)]$$

Or, comme les termes de la série (9) croissent toujours sans pouvoir surpasser X, il est clair que, pour des valeurs infiniment grandes de m, la différence positive $x_{m+1}-x_m$ devra être infiniment petite, et qu'alors chacune des expressions (12) deviendra encore infiniment petite avec la valeur numérique de $f(x_m)$. Donc, si l'on nomme ξ la limite dont s'approche en croissant le terme général x_m de la série (9), $f(\xi)$ ou la limite de $f(x_m)$ sera nulle; et ξ ne pourra être que la plus petite des racines de l'équation (1) comprises entre x_0 et X, attendu que cette plus petite racine devra surpasser tous les termes de la série (9).

On prouvera de même que la limite Ξ dont s'approche en décroissant le terme général de la série (10) se réduit à la plus grande des racines de l'équation (1) comprises entre les limites x_0, X.

Si l'équation (1) n'offrait point de racines comprises entre x_0, X, alors les équations auxiliaires cesseraient d'offrir deux racines comprises entre x_0, X, et que l'on pût considérer comme deux nouvelles limites x_1, X_1; ou les termes de la série (9) finiraient par surpasser ceux de la série (10).

La méthode de résolution, fondée sur la détermination des divers termes de la série (9) ou (10), ou, ce qui revient au même, sur l'emploi des équations auxiliaires du second degré (2) et (3), est ce qu'on doit naturellement nommer la méthode des approximations du second degré, ou simplement la méthode du second degré.

Corollaire 4. Supposons la fonction $f'''(x)$ toujours affectée du même signe entre les limites $x=x_0$, $x=X$. Alors, en vertu du corollaire 2, on pourra prendre

$$\tfrac{1}{2}f''(x_0) \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}f''(X)$$

pour valeurs de v et de V, ce qui réduira les équations auxiliaires (2) et (3) aux suivantes :

$$(13) \qquad \begin{cases} f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\dfrac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0)=0, \\ f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\dfrac{(x-x_0)^2}{2}f''(X)=0. \end{cases}$$

$$(14) \qquad \begin{cases} f(X)+(x-X)f'(X)+\dfrac{(x-X)^2}{2}f''(x_0)=0, \\ f(X)+(x-X)f'(X)+\dfrac{(x-X)^2}{2}f''(X)=0. \end{cases}$$

Supposons maintenant la fonction $f(x)$ décomposable en deux autres

$$\varphi(x), \quad -\chi(x)$$

dont les dérivées du troisième ordre

$$\varphi'''(x), \quad -\chi'''(x),$$

restent fonctions continues de x entre les limites $x=x_0$, $x=X$, et soient la première toujours croissante, la seconde toujours décroissante entre ces limites. Les deux différences

$$(15) \qquad \varphi'''(x_0)-\chi'''(X), \quad \varphi'''(X)-\chi'''(x_0),$$

seront, la première inférieure à la plus petite, la seconde supérieure à la plus grande des valeurs qu'acquerra entre ces limites la fonction

$$f'''(x)=\varphi'''(x)-\chi'''(x).$$

Par conséquent, si les quantités (15) offrent le même signe, ce signe affectera constamment la valeur de $f'''(x)$ entre les limites données. Donc, pour que les équations auxiliaires puissent être réduites aux équations (13), (14), il suffit que les quantités (15) offrent le même signe.

Si, les limites x_0, X étant des quantités positives, l'équation (11) a pour premier membre une fonction entière de x, on pourra prendre pour $\varphi(x)$ la somme des termes positifs du premier membre, et pour $-\chi(x)$ la somme des termes négatifs.

La première des formules (13), ou la seconde des formules (14) est celle qui a été indiquée par Halley, comme offrant le moyen de tirer d'une première valeur suffisamment approchée d'une racine ξ ou Ξ une série d'autres valeurs indéfiniment approchées de la même racine.

Corollaire 5. Les équations (2), résolues par rapport à $x-x_0$, ou plutôt par rapport à $\frac{1}{x-x_0}$ donnent

$$\frac{1}{x-x_0}=-\frac{f'(x_0)}{2f(x_0)}\left\{1\pm\sqrt{1-4\frac{v f(x_0)}{[f'(x_0)]^2}}\right\},$$
$$\frac{1}{x-x_0}=-\frac{f'(x_0)}{2f(x_0)}\left\{1\pm\sqrt{1-4\frac{\mathrm{V} f(x_0)}{[f'(x_0)]^2}}\right\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=x_0-\frac{2}{1\pm\sqrt{1-4\frac{v f(x_0)}{[f'(x_0)]^2}}}\,\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},\\ x&=x_0-\frac{2}{1\pm\sqrt{1-4\frac{\mathrm{V} f(x_0)}{[f'(x_0)]^2}}}\,\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}; \end{aligned}\right.$$

et chacune des valeurs précédentes de x sera réelle, si le signe de $f(x_0)$ est contraire à celui de la quantité v ou V, ou bien encore, si la valeur numérique de $f(x_0)$ est assez petite pour rendre celles des produits

$$(17)\qquad \frac{4v f(x_0)}{[f'(x_0)]^2},\quad \frac{4\mathrm{V} f(x_0)}{[f'(x_0)]^2}$$

inférieures à l'unité. Pareillement les équations (3), résolues par rapport à x, donnent

$$(18)\qquad x=\mathrm{X}-\frac{2}{\sqrt{1-4\frac{v f(\mathrm{X})}{[f'(\mathrm{X})]^2}}}\,\frac{f(\mathrm{X})}{f'(\mathrm{X})},\quad x=\mathrm{X}-\frac{2}{1\pm\sqrt{1-4\frac{\mathrm{V} f(\mathrm{X})}{[f'(\mathrm{X})]^2}}}\,\frac{f(\mathrm{X})}{f'(\mathrm{X})},$$

et chacune de ces dernières valeurs de x sera réelle, si le signe de $f(\mathrm{X})$ est contraire à celui de v ou V, ou bien encore, si la valeur numérique de $f(\mathrm{X})$ est assez petite pour rendre celles des produits

$$(19)\qquad \frac{4v f(\mathrm{X})}{[f'(\mathrm{X})]^2},\quad \frac{4\mathrm{V} f(\mathrm{X})}{[f'(\mathrm{X})]^2}$$

inférieure à l'unité. D'ailleurs, en vertu du théorème 2, on pourra, dans les formules (16) ou (18), fixer le double signe de manière que les valeurs de x fournies par les équations (16) soient supérieures à x_0, mais aussi rapprochées que possible de x_0, et les valeurs de x fournies par les équations (18), inférieures à X, mais aussi rapprochées que possible de X. Or on atteindra ce but, si les conditions

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < 0, \quad \frac{f(\mathrm{X})}{f'(\mathrm{X})} > 0 \tag{20}$$

se trouvent remplies, en réduisant les formules (16) et (18) aux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0 - \frac{2}{1+\sqrt{1-4\frac{v f(x_0)}{[f'(x_0)]^2}}}\,\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \\ x &= x_0 - \frac{2}{1+\sqrt{1-4\frac{\mathrm{V} f(x_0)}{[f'(x_0)]^2}}}\,\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{X} - \frac{2}{1+\sqrt{1-4\frac{v f(\mathrm{X})}{[f'(\mathrm{X})]^2}}}\,\frac{f(\mathrm{X})}{f'(\mathrm{X})}, \\ x &= \mathrm{X} - \frac{2}{1+\sqrt{1-4\frac{\mathrm{V} f(\mathrm{X})}{[f'(\mathrm{X})]^2}}}\,\frac{f(\mathrm{X})}{f'(\mathrm{X})}. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Si, la première des conditions (20) étant remplie, l'équation (1) admet des racines comprises entre les limites x_0, X, la plus petite ξ surpassera la plus petite x_1 des valeurs de x que donneront les formules (21); et, en prenant x_1 pour ξ, on commettra, si ces deux valeurs sont réelles et renfermées entre x_0, X, une erreur plus petite que leur différence, c'est-à-dire plus petite que la valeur numérique du produit

$$2\,\frac{\sqrt{1-\frac{4 v f(x_0)}{[f'(x_0)]^2}}-\sqrt{1-\frac{4\mathrm{V} f(x_0)}{[f'(x_0)]^2}}}{\left\{1+\sqrt{1-4\frac{v f(x_0)}{[f'(x_0)]^2}}\right\}\left\{1+\sqrt{1-4\frac{\mathrm{V} f(x_0)}{[f'(x)_0]^2}}\right\}}\,\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

équivalent lui-même à l'expression

$$\frac{8(\mathrm{V}-v)\, f[x_0)]^2}{[f'(x_0)]^3\left\{1+\sqrt{1-4\frac{v f(x_0)}{[f'(x_0)]^2}}\right\}\left\{1+\sqrt{1-4\frac{\mathrm{V} f(x)_0}{[f'(x_0)]^2}}\right\}\left\{\sqrt{1-4\frac{v f(x_0)}{[f'(x_0)]^2}}+\sqrt{1-4\frac{\mathrm{V} f(x_0)}{[f'(x_0)]^2}}\right\}}. \tag{23}$$

Il y a plus, si la première des conditions (20) étant remplie, les seconds membres des formules (21) sont renfermés entre les limites x_0, X, ces seconds membres, que nous représenterons alors par

$$x_1 \quad x_1 + \delta_1,$$

comprendront entre eux une racine ξ de l'équation (1); et pareillement, si, la seconde des conditions (20) étant remplies, les seconds membres des formules (22) sont compris entre les limites x_0, X, ces seconds membres que nous représenterons alors par

$$X_1, \quad X_1 - \varepsilon_1,$$

comprendront entre eux une racine Ξ de l'équation (1).

Corollaire 1er. Si la plus petite ξ des racines de l'équation (1) comprise entre x_0, X est assez rapprochée de x_0 pour que la fonction dérivée $f'(x)$ ne change pas de signe entre les limites $x=x_0$, $x=X$, le rapport $\frac{f(x)}{f(x_0)}$ qui décroîtra, dans cet intervalle, en passant de la valeur positive $\frac{f(x_0)}{f(x_0)}=1$ à la valeur nulle $\frac{f(\xi)}{f(x_0)}=0$, offrira une dérivée $\frac{f'(x)}{f(x_0)}$ toujours négative. Donc alors, la première des conditions (20) sera remplie, et la racine ξ surpassera la plus petite x_1 des valeurs de x fournies par les équations (21).

Pareillement, si la plus grande Ξ des racines de l'équation (1) comprises entre les limites x_0, X est assez rapprochée de X pour que la fonction dérivée $f'(x)$ ne change pas de signe entre les limites $x=\Xi$, $x=X$, le rapport $\frac{f(x)}{f(X)}$ qui croîtra dans cet intervalle, en passant de la valeur nulle $\frac{f(\Xi)}{f(X)}=0$ à la valeur positive $\frac{f(X)}{f(X)}=1$, offrira une dérivée $\frac{f'(x)}{f(X)}$ toujours positive. Donc alors la seconde des conditions (20) sera remplie, et la racine Ξ sera inférieure à la plus grande X_1 des valeurs de x fournies par les équations (22).

Mémoire

sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes;

par M. Augustin Cauchy

membre de l'Académie des Sciences de l'Institut de France,
de la Société Royale de Londres, etc....

Paris le 19 octobre 1832.

Il y a plus ; si la première des conditions (20) étant remplie, les seconds membres des formules (21) sont renfermés entre les limites x_0, X, ces seconds membres, que nous représenterons alors par

$$x_1, \quad x_1 + \iota_1$$

comprendront entre eux une racine ξ de l'équation (1) ; et pareillement, si, la seconde des conditions (20) étant remplie, les seconds membres des formules (22) sont compris entre les limites x_0, X, ces seconds membres que nous représenterons alors par

$$X_1, \quad X_1 - \iota_1$$

comprendront entre eux une racine Ξ de l'équation (1).

Corollaire 1^er^. Si la plus petite ξ des racines de l'équation (1) comprise entre x_0, X est assez rapprochée de x_0 pour que la fonction dérivée $f'(x)$ ne change pas de signe entre les limites $x = x_0$, $x = \xi$, le rapport $\frac{f(x)}{f(x_0)}$ qui diminuera dans cet intervalle, en passant de la valeur positive $\frac{f(x_0)}{f(x_0)} = 1$ à la valeur nulle $\frac{f(\xi)}{f(x_0)}$, offrira une dérivée $\frac{f'(x)}{f(x_0)}$ toujours négative. Donc alors la première des conditions (20) sera remplie, et la racine ξ surpassera la plus petite x_1 des valeurs de x fournies par les formules (21).

Pareillement, si la plus grande Ξ des racines de l'équation (1) comprises entre les limites x_0, X est assez rapprochée de X pour que la fonction dérivée $f'(x)$ ne change pas de signe entre les limites $x = \Xi$, $x = X$, le rapport $\frac{f(x)}{f(X)}$ qui croîtra dans cet intervalle, en passant de la valeur nulle $\frac{f(\Xi)}{f(X)}$ à la valeur positive $\frac{f(X)}{f(X)} = 1$, offrira une dérivée $\frac{f'(x)}{f(X)}$ toujours positive. Donc alors la seconde des conditions (20) sera remplie, et la racine Ξ sera inférieure à la plus grande X_1 des valeurs de x fournies par les formules (22).

Mémoire
sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes
par M. Augustin Cauchy
membre de l'Académie des Sciences de l'institut de France, de la Société Royale de Londres, etc...

Les formules que j'ai récemment obtenues pour la résolution directe des équations de tous les degrés, et qui sont mentionnées dans la gazette piémontaise du 22 Septembre, fournissent les moyens non seulement de développer dans tous les cas en séries convergentes les racines réelles ou imaginaires d'une équation donnée, mais encore de fixer les limites des erreurs commises quand on arrête les séries convergentes après un certain nombre de termes. Or la fixation de ces limites est fondée en partie sur quelques théorèmes relatifs à la rectification des courbes, et dont la connaissance peut être fort utile dans un grand nombre de questions diverses ainsi que dans la géométrie pratique. Je vais énoncer en peu de mots ceux qui me paraissent les plus dignes d'être remarqués.

1^er^ Théorème. p désignant l'angle polaire que forme une droite OO' tracée à volonté dans un plan avec un axe fixe, S le système d'une ou de plusieurs longueurs mesurées sur une ou plusieurs lignes droites ou courbes fermées ou non fermées, A la somme des projections absolues des divers éléments de S sur la droite OO', et π le rapport de la circonférence au diamètre, on aura

(1)
$$S = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A\, dp.$$

Démonstration. On démontre aisément ce théorème, en considérant d'abord le cas où l'on remplacerait les quantités S, A par une longueur rectiligne s et par la projection σ de cette longueur sur la droite OO', puis en décomposant dans le cas contraire les longueurs S, A en éléments infiniment petits et correspondants.

Corollaire. Lorsque S représente une longueur rectiligne, la quantité A se réduit à la projection absolue de cette longueur sur la droite OO'. Lorsque S représente une courbe fermée et convexe, ensorte qu'elle ne puisse être coupée par une droite en plus de deux points, A se réduit au double de la projection de cette courbe sur OO'.

Exemples. Si S représente la circonférence d'un cercle décrit avec le rayon R, A sera évidemment le double du diamètre. On aura donc A = 4R, et la formule (1) donnera

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R\,dp = 2\pi R.$$

Si S représente le périmètre de l'ellipse dont les demi-axes a, b sont le premier parallèle, le second perpendiculaire à l'axe fixe, on aura

$$A = 4\sqrt{a^2\cos^2 p + b^2\sin^2 p},$$

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 p + b^2\sin^2 p}\,.\,dp,$$

etc...

2e Théorème. Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, soient menées par un point du plan OO'O" n droites qui comprennent entre elles des angles égaux, et nommons M la moyenne arithmétique entre les n valeurs de A correspondantes à ces n droites. On aura sensiblement, pour de grandes valeurs de n,

$$S = \frac{1}{2}\pi M; \tag{2}$$

et l'erreur que l'on commettra, en prenant le produit $\frac{1}{2}\pi M$ pour valeur de S, sera inférieure au rapport qui existe entre ce produit et le carré de n, c'est-à-dire, à

$$\frac{1}{2}\,\frac{\pi M}{n^2}, \tag{3}$$

pourvu que le nombre entier n surpasse 2.

Démonstration. Ce théorème se déduirait sans peine du précédent, et peut encore se démontrer de la manière suivante.

Soit s une longueur rectiligne, a sa projection absolue sur la droite

OO', et μ la moyenne entre les n valeurs de σ qui correspondent aux n droites mentionnées dans le 2e théorème. $2n\mu$ sera la somme des projections absolues de s sur les $2n$ côtés d'un polygone régulier parallèles deux à deux à ces mêmes droites, ou, ce qui revient au même, $n\mu$ sera la projection absolue sur un de ces côtés d'un second polygone régulier semblable au premier, mais qui aurait pour côté la longueur s. Or, si l'on nomme R le rayon du cercle circonscrit à ce dernier polygone, son apothème sera

$$R\cos\frac{\pi}{2n},$$

et son côté

$$s = 2R\sin\frac{\pi}{2n},$$

tandis que sa projection sur une droite quelconque sera comprise entre le diamètre du cercle circonscrit et le diamètre du cercle inscrit, c'est à dire entre les limites

$$2R = \frac{s}{\sin\frac{\pi}{2n}}, \qquad 2R\cos\frac{\pi}{2n} = \frac{s}{\tang\frac{\pi}{2n}}.$$

Donc le produit $n\mu$ sera compris entre ces limites, et s entre les suivantes

$$(4) \qquad n\mu\sin\frac{\pi}{2n}, \qquad n\mu\tang\frac{\pi}{2n},$$

qui, pour de grandes valeurs de n se réduisent sensiblement à

$$(5) \qquad \tfrac{1}{2}\pi\mu.$$

Ajoutons que, si l'on prend l'expression (5) pour valeur approchée de s, l'erreur commise sera inférieure au produit de cette expression par la plus grande des différences

$$1-\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)}, \qquad \frac{\tang\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)}-1,$$

et que ces deux différences, pour $n =$ ou > 3, deviennent l'une et l'autre inférieures à $\frac{1}{n^2}$. Effectivement, si l'on nomme θ un nombre compris entre les limites 0, 1, on aura, en vertu des formules connues,

$$\sin x = x - x^3\frac{\cos\theta x}{6}, \qquad \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right) = \frac{\cos\theta x}{6},$$

puis on en conclura, en posant $x = \frac{\pi}{2n}$,

$$n^2\left\{1-\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right\} = \frac{\pi^2}{24}\cos\theta x < \frac{\pi^2}{24} < 1.$$

D'autre part, le développement de $\tang x$ suivant les puissances ascendantes de x ne renfermant que des termes positifs, pour $x > 0$, et subsistant pour toutes les valeurs de x inférieures à $\frac{\pi}{2}$, la fonction

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tang x}{x}-1\right)$$

croîtra avec x depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{\pi}{2}$, et par suite le produit

$$n^2\left\{\frac{\tang\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)}-1\right\}$$

décroîtra pour des valeurs croissantes de n. Or pour $n=3$, ce produit devient

$$\frac{9}{\pi}\left(2\sqrt{3}-\pi\right) < 3\left(2\sqrt{3}-\pi\right) = \sqrt{108} - 3\pi < 1.$$

Le 2e théorème étant ainsi démontré dans le cas particulier où la quantité S se réduit à une longueur rectiligne s, il suffira, pour le démontrer dans le cas contraire, de décomposer S en éléments infiniment petits.

Corollaire 1er. La valeur approchée de S étant calculée à l'aide de la formule (2), l'erreur commise ne dépassera pas la neuvième partie de cette valeur, si l'on prend $n=3$, la vingt-cinquième partie, si l'on prend $n=5$, et la centième partie, si l'on prend $n=10$. Dans le premier et le second cas, M sera la moyenne arithmétique entre les sommes des projections des éléments de S sur trois ou cinq droites respectivement parallèles aux côtés d'un hexagone ou d'un décagone régulier.

Exemple. Si la longueur S est égale et parallèle à l'un des côtés d'un hexagone régulier, on trouvera $M = \frac{2}{3}S$, et par suite

$$\frac{1}{2}\pi M = \frac{\pi}{3}S = 1,047\ldots S.$$

Or la différence entre le nombre $1,047\ldots$ et l'unité est effectivement inférieure à $\frac{1}{9}$.

Corollaire 2e. Si le nombre n devient infini, on aura évidemment

(6) $$M = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} A\,dp}{\int_{-\pi}^{\pi} dp} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A\,dp,$$

et la formule (2) se réduira, comme on devait s'y attendre, à la formule (1).

On déduit immédiatement du théorème 2 un troisième théorème qu'on peut énoncer comme il suit

3e Théorème. Si, dans l'intérieur d'un cercle décrit avec le rayon R, on trace une ou plusieurs courbes fermées et que le système de ces courbes ne puisse être traversé par une même droite en plus de $2m$ points, la somme des contours ou périmètres de ces courbes ne dépassera pas le produit de la circonférence $2\pi R$ par le nombre m.

Démonstration. En effet, dans l'hypothèse admise, on aura évidemment, quel que soit p,

$$A < 2m . 2R,$$

et par suite la formule (2) donnera

(7) $$S < m . 2\pi R.$$

Corollaire. Si S se réduit au périmètre d'une courbe convexe et renfermée dans le cercle décrit avec le rayon R, on aura $m=1$, et la formule (7) donnera, comme on devait s'y attendre

(8) $$S < 2\pi R.$$

Des théorèmes analogues à ceux qui précèdent peuvent être appliqués à la quadrature des surfaces courbes et démontrés de la même manière. Nous nous contenterons d'énoncer ici l'un d'entre eux duquel tous les autres se déduisent facilement

4e Théorème. p désignant l'angle formé par une droite quelconque OO' avec un axe fixe OP, q l'angle formé par le plan des deux droites OP, OO' avec un plan fixe qui renferme la première, S le système d'une ou de plusieurs surfaces planes ou courbes, et A la somme des projections absolues des divers éléments de S sur un plan HIK perpendiculaire à la droite OO', on aura

(9) $$S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} A \sin p \, dp \, dq$$

Corollaire. Lorsque S représente une surface plane, la quantité A se réduit à la projection absolue de cette surface sur le plan HIK. Lorsque S représente une surface fermée et convexe, A se réduit au double de la projection de cette surface sur le plan HIK.

Exemple. Si S représente la surface de l'ellipsoïde qui a pour équation

(10) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

A sera la section transversale du cylindre circonscrit à l'ellipsoïde, et dont les arêtes sont parallèles à la droite OO'. Soient R le rayon de l'ellipsoïde parallèle à cette même droite, et α, β, γ les angles qu'elle forme avec les demi-axes des coordonnées positives. On aura

(11) $$\cos\alpha = \cos p, \quad \cos\beta = \sin p \cos q, \quad \cos\gamma = \sin p \sin q$$

(12) $$\frac{1}{R^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2};$$

et l'équation du cylindre ci-dessus mentionné deviendra

(13) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - R^2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2}\right)^2 = 1.$$

Or, la section faite dans le cylindre par le plan des x, y étant l'ellipse qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - R^2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2}\right)^2 = 1,$$

l'aire de cette section sera

$$\frac{\pi abc}{R\cos\gamma},$$

et par conséquent l'aire de la section faite par un plan perpendiculaire aux arêtes sera $\frac{\pi abc}{R}$. On aura donc

(14) $$A = \frac{2\pi abc}{R}, \quad S = abc\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin p \, dp \, dq}{R}.$$

Dans le cas particulier où l'ellipsoïde se réduit à une sphère on a $R = a = b = c$, et par suite, comme on devait s'y attendre, $S = 4\pi R^2$.
Ajoutons que, si dans la seconde des formules (14) on substitue la valeur de R tirée des formules (11), (12), on pourra effectuer dans tous les cas l'intégration relative à p, et réduire ainsi la valeur de S à une intégrale simple. L'intégration s'effectuera complètement, si l'ellipsoïde est de révolution.

Post-Scriptum

On pourrait donner du théorème 4 une démonstration analogue à celle du théorème 1er, en considérant d'abord le cas où l'on remplacerait les quantités S, A par une surface plane s et par la projection a de cette surface sur le plan HIK ; puis, en décomposant, dans le cas contraire, les surfaces S, A en éléments infiniment petits et correspondants. On peut aussi déduire le théorème 4 d'une proposition analogue au théorème 2, et dont voici l'énoncé.

5e Théorème. Les mêmes choses étant posées que dans le théorème 4, construisons un polyèdre convexe dont les faces équivalentes entre elles soient comprises entre deux sphères concentriques décrites avec les rayons

$$r, \quad r(1+\varepsilon),$$

ε désignant une quantité positive, et nommons $\mathfrak{M}$ la moyenne arithmétique entre les n valeurs de A correspondantes aux plans de ces mêmes faces. On aura sensiblement, pour de petites valeurs de ε,

(15) $$S = 2\mathfrak{M},$$

et l'erreur que l'on commettra en prenant $2\mathfrak{M}$ pour valeur approchée de S sera inférieure au produit de $2\mathfrak{M}$ par la différence

(16) $$(1+\varepsilon)^2 - 1.$$

Démonstration. Soient s une surface plane renfermée dans un plan quelconque, a la projection absolue de s sur le plan d'une face du polyèdre, et p la moyenne arithmétique entre les n valeurs de a qui correspondent aux plans des différentes faces. Si la surface s est équivalente à l'aire ς de chaque face du polyèdre, a représentera non seulement la projection absolue de s sur le plan d'une face, mais aussi la projection de cette face sur le plan de s, et par suite np sera le double de la projection absolue du polyèdre sur le plan de s. Cela posé, soient

$$B, \quad C$$

la plus petite et la plus grande des valeurs que puisse acquérir la projection du polyèdre sur un plan quelconque. On aura, dans l'hypothèse admise,

$$np > 2B, \quad np < 2C,$$

et, si s cesse d'être équivalent à ς, np se trouvera compris entre les limites

(17) $$\frac{2Bs}{5}, \quad \frac{2Cs}{5}.$$

Donc S sera compris entre les limites

(18) $$\mu\frac{ns}{2B}, \quad \mu\frac{ns}{2C}.$$

D'ailleurs, le polyèdre ci-dessus mentionné étant convexe, et renfermé entre les sphères décrites avec les rayons

$$r, \quad r(1+\varepsilon)$$

la surface $n\varsigma$ du polyèdre sera comprise entre les limites

$$4\pi r^2, \quad 4\pi r^2(1+\varepsilon)^2,$$

et ses projections B, C seront renfermées entre les surfaces des grands cercles

$$\pi r^2, \quad \pi r^2(1+\varepsilon)^2.$$

Donc les expressions (18) seront comprises entre les limites

$$\mu\frac{4\pi r^2}{2\pi r^2(1+\varepsilon)^2}, \quad \mu\frac{4\pi r^2(1+\varepsilon)^2}{2\pi r^2},$$

ou, ce qui revient au même, entre les limites

$$\frac{2\mu}{(1+\varepsilon)^2}, \quad 2\mu(1+\varepsilon)^2,$$

qui, l'une et l'autre, diffèrent très peu de 2μ, quand ε est très petit; et, si l'on prend 2μ pour valeur approchée de S, l'erreur commise ne dépassera pas le produit de 2μ par la plus grande des différences

$$1-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}, \quad (1+\varepsilon)^2-1,$$

c'est-à-dire, par l'expression (16). Le théorème ρ étant ainsi démontré pour le cas où la quantité S se réduit à une surface plane s; il suffira, pour le démontrer, dans le cas contraire, de décomposer S en éléments infiniment petits.

<u>Corollaire 1</u>er. Si le polyèdre mentionné dans le théorème ρ se réduit à l'un des cinq polyèdres réguliers, et si l'on nomme

$$1-\varepsilon', \quad 1+\varepsilon''$$

les quotients qu'on obtient en divisant la surface de ce polyèdre régulier par le quadruple de la projection maximum ou minimum de ce polyèdre; l'erreur que l'on commettra en prenant 2π pour valeur de S sera inférieure au produit de 2π par le plus grand des nombres ε', ε''. Au reste cette proposition subsisterait encore, si le polyèdre cessait d'être régulier.

Corollaire 2. Si le nombre n devient infini, on aura évidemment

$$(20)\qquad \bar{A} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} A \sin p \, dp \, dq}{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \sin p \, dp \, dq} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} A \sin p \, dp \, dq,$$

attendu que

$$\sin p \, dp \, dq$$

représente l'élément différentiel de la surface de la sphère décrite avec le rayon 1. Or des équations (19) et (20) on déduit immédiatement la formule (9).

Corollaire 3. Si S représente un système de surfaces qui soit renfermé dans l'intérieur d'une sphère décrite avec le rayon R, et qui ne puisse être traversé par une droite en plus de 2m points, on aura évidemment

$$A < 2m \cdot \pi R^2$$

et par suite

$$S < m \cdot 4\pi R^2.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

6e Théorème. Si, dans l'intérieur d'une sphère décrite avec le rayon R, on trace un système de surfaces qui ne puisse être coupé par une droite en plus de 2m points, la somme des aires de ces surfaces ne dépassera pas le produit de la surface de la sphère par ~~le~~ nombre 2m.

Paris ce 22 octobre 1832.