MÉMOIRE

SUR

LA RÉSOLUTION GÉNÉRALE

DES

ÉQUATIONS D'UN DEGRÉ QUELCONQUE;

PAR M. AUG. CAUCHY,

MEMBRE DE L'INSTITUT DE FRANCE.

(Présenté en partie à l'Académie dans les séances des 22 mai et 29 mai 1837.)

Dans deux lettres écrites de Goritz, en janvier 1837, à MM. Libri et Coriolis, et qui ont été imprimées en partie dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie*, du 13 février et du 5 mars de cette année, j'ai donné l'énoncé de plusieurs théorèmes d'analyse, qui conduisent à des méthodes nouvelles très propres à faciliter la résolution générale des équations de tous les degrés. Ces théorèmes ont excité l'attention de plusieurs géomètres distingués, qui m'ont pressé vivement d'en publier les démonstrations. Je satisfais aujourd'hui à leurs désirs par ce petit mémoire, qui n'est qu'un extrait d'un plus grand travail.

§ Ier.

1er *Théorème.* t désignant une variable réelle ou imaginaire, une fonction réelle ou imaginaire de t, représentée par x, sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de t, tant que le module de t conservera une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction x cesse d'être finie et continue.

Démonstration. On peut voir une démonstration de ce théorème dans l'extrait lithographié du mémoire présenté à l'Académie de Turin, le 11 octobre 1831 (1re partie, § 2, pages 6 et 7). Seulement les lettres t et x se trouvent remplacées dans le mémoire dont il s'agit par les lettres x et y (*).

(*) Voici cette démonstration :

Soit $x = \mathrm{f}(t)$ une fonction de la variable t, et τ une valeur imaginaire de cette variable dont le module soit T, en sorte que l'on ait

$$\tau = \mathrm{T}e^{p\sqrt{-1}}.$$

Supposons que la fonction $\mathrm{f}(\tau)$ et ses dérivées successives $\mathrm{f}'(\tau)$, $\mathrm{f}''(\tau)\ldots\ \mathrm{f}^{(n)}(\tau)$, soient finies et continues, quel que soit p, pour une certaine valeur de T, et une valeur plus petite. En intégrant les deux membres de l'équation identique..... $\frac{\mathrm{df}(\tau)}{\mathrm{dT}} = \frac{1}{\mathrm{T}\sqrt{-1}}\frac{\mathrm{df}(\tau)}{dp}$; 1° par rapport à T, à partir de $\mathrm{T} = 0$; 2° par rapport à p, entre les limites $p = -\pi$, $p = \pi$; les résultats de ces deux intégrations seront égaux, à cause de la continuité de la fonction entre ces limites, et l'on aura

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f}(\tau)\mathrm{d}p = 2\pi\,\mathrm{f}(0),$$

puis si $\mathrm{f}(0) = 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f}(\tau)\,\mathrm{d}p = 0;$$

si ayant égard à l'équation $\mathrm{d}\tau = \tau\mathrm{d}p\sqrt{-1}$, et aux équations connues

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{np\sqrt{-1}}\,\mathrm{d}p = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\,\mathrm{d}p = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}p = 2\pi,$$

on applique l'intégration par parties à l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{f}(\tau)}{\tau^n}\,\mathrm{d}p$, on en conclura

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{f}(\tau)}{\tau^n}\mathrm{d}p = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{f}'(\tau)}{\tau^{n-1}}\mathrm{d}p = \frac{1}{n.(n-1)}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{f}''(\tau)}{\tau^{n-2}}\mathrm{d}p\ldots = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}^{(n)}(\tau)\mathrm{d}p;$$

donc

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{f}(\tau)}{\tau^n}\,\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{f}^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}.$$

Si dans l'équation $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(\tau)\,\mathrm{d}p = 0$, on remplace $\mathrm{f}(\tau)$ par le produit $\tau\frac{\mathrm{f}(\tau) - \mathrm{f}(t)}{\tau - t}$, t étant différent de τ et le module de t inférieur à T, on aura

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\tau\mathrm{f}(\tau)}{\tau - t}\,\mathrm{d}p = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\tau\mathrm{f}(t)}{\tau - t}\,\mathrm{d}p = \mathrm{f}(t)\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{\tau^2}\right)\mathrm{d}p = 2\pi\,\mathrm{f}(t),$$

Corollaire. Supposons que x soit une fonction implicite de t, déterminée par la résolution d'une certaine équation

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

dans laquelle t entre comme paramètre. Si la fonction x reste finie pour

---

et par suite

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tau f(\tau)}{\tau - t} dp.$$

Le rapport $\frac{\tau}{\tau - t}$ est la somme de la progression géométrique $1, \frac{t}{\tau}, \frac{t^2}{\tau^2}$, etc., qui est toujours convergente tant que le module de t reste inférieur au module T de τ; donc $f(t)$ sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de t, si le module de la variable réelle ou imaginaire t, conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction $f(t)$ cesse d'être finie et continue. Ce qu'il fallait démontrer.

Ajoutons encore ici ces deux remarques importantes : 1° le terme général du développement obtenu pour $f(t)$, sera

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^n}{\tau^n} f(\tau)\, dp = \frac{t^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(0);$$

donc lorsque la fonction $f(t)$ sera développable en série convergente, on aura

$$f(t) = f(0) + \frac{t}{1} f'(0) + \frac{t^2}{1.2} f''(0) + \text{etc.},$$

conformément au théorème de Maclaurin ou de Stirling.

2°. On a généralement

$$\frac{\tau}{\tau - t} = 1 + \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{\tau^2} \ldots + \frac{t^{n-1}}{\tau^{n-1}} + \frac{t^n}{\tau^{n-1}(\tau - t)};$$

on aura par conséquent

$$f(t) = f(0) + \frac{t}{1} f'(0) \ldots + \frac{t^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^n}{\tau^{n-1}(\tau - t)} f(\tau)\, dp;$$

donc le reste de la série de Maclaurin, prolongée jusqu'au $m^{\text{ième}}$ terme, sera

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^n}{\tau^{n-1}(\tau - t)} f(\tau)\, dp;$$

or, si l'on nomme θ le module de t et $\Lambda f(\tau)$, la limite du module de $f(\tau)$, c'est-à-dire la plus grande valeur que ce module puisse acquérir quand on y fait varier l'angle p sans changer le module T, le module de la fonction $\frac{t^n}{\tau^{n-1}(\tau - t)} f(\tau)$ sera toudes valeurs finies de t, elle ne cessera généralement d'être continue qu'en devenant multiple. Cela posé, soient

$$x, \quad x + \Delta x, \tag{2}$$

deux racines de l'équation (1) : on aura

---

jours inférieur à $\frac{\theta^n}{T^{n-1}(T-\theta)}\,\Lambda\, f(\tau)$, donc l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t^n}{\tau^{n-1}(\tau-t)}\, f(\tau)\, dp$, ou le reste de la série, sera toujours inférieur à la quantité $\frac{\theta^n}{T^{n-1}(T-\theta)}\,\Lambda\, f(\tau)$, qu'il sera facile d'évaluer dans chaque cas particulier.

On serait arrivé au même résultat, en observant que le module du terme général de la série $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t^n}{\tau^n}\, f(\tau)\, dp$ sera toujours inférieur à $\left(\frac{\theta}{T}\right)^n \Lambda\, f(\tau)$, c'est-à-dire au terme général de la progression géométrique qui a pour somme $\frac{T}{T-\theta}\,\Lambda\, f(\tau)$ et dont le reste $\frac{\theta^n}{T^{n-1}(T-\theta)}\,\Lambda\, f(\tau)$ surpassera par conséquent le reste de la série de Maclaurin.

En appliquant ces principes aux fonctions $\cos t$, $\sin t$, e^t, e^{t^2}, $\cos(1-t^2)$, qui ne cessent jamais d'être finies et continues, on en conclura qu'elles seront toujours développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de t. Au contraire les fonctions $(1+t)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{1-t}$, $\frac{t}{1+\sqrt{1-t^2}}$ qui, lorsqu'on attribue à t une valeur imaginaire de la forme $Te^{p\sqrt{-1}}$ cessent d'être fonctions continues de t au moment où le module T devient égal à 1, seront certainement développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de la variable t si la valeur réelle ou imaginaire de t offre un module inférieur à l'unité. Enfin comme les fonctions $e^{\frac{1}{t}}$, $e^{\frac{1}{t^2}}$, $\cos\frac{1}{t}$ deviennent discontinues pour une valeur nulle de t, par conséquent lorsque le module de t est le plus petit possible, elles ne seront jamais développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de t.

Si l'on considère en particulier, et comme application de la méthode, les fonctions e^t, $(1+t)^{-a}$, on trouvera pour limites supérieures aux modules du terme général de la série qui représente le développement de ces fonctions et des restes qui les complètent :

pour la première $\left(\frac{e\theta}{n}\right)^n$, $\frac{n}{n-\theta}\left(\frac{e\theta}{n}\right)^n$

pour la seconde $\frac{(n+a)^{n+a}}{n^n a^a}\theta^n$, $\frac{n}{n(1-\theta)-a\theta}\,\frac{(n+a)^{n+a}}{n^n a^a}\,\theta^n$.

Ces résultats sont une première application du calcul que M. Cauchy a appelé *calcul des limites*.

(Note extraite du Mémoire lithographié, du 11 octobre 1831.)

$$F(x) = 0, \quad F(x) + \Delta(x) = 0,$$

et par suite

$$(3) \qquad \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = 0.$$

Or, si, pour une certaine valeur réelle ou imaginaire de t, les racines $x, x + \Delta x$ se confondent, en faisant converger t vers cette valeur, pour laquelle l'équation (1) acquerra une racine double ou multiple, on verra l'équation (3) se transformer en cette autre

$$(4) \qquad F'(x) = 0.$$

Ainsi, lorsque le paramètre t obtient une valeur pour laquelle l'équation (1) acquiert une racine double ou multiple, cette racine est commune à l'équation (1) et à sa dérivée. Cela posé, si l'on nomme *valeurs principales* du paramètre t celles qui donnent des racines communes à l'équation (1) et à sa dérivée, on déduira immédiatement des remarques précédentes, jointes au théorème 1er, la proposition que nous allons énoncer.

» 2e *Théorème.* Toute racine d'une équation est généralement développable suivant les puissances ascendantes d'un paramètre renfermé dans l'équation dont il s'agit, tant que le module de ce paramètre reste inférieur aux modules de toutes ses valeurs principales.

Corollaire. Soient

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots.$$

plusieurs racines réelles ou imaginaires de l'équation (1). Pour de très petites valeurs du module d'un paramètre t compris dans cette équation, chacune des racines $\alpha, \beta, \gamma, \ldots.$ sera généralement développable suivant les puissances ascendantes de t, et l'on pourra en dire autant de la somme de ces racines et de la somme de leurs puissances entières d'un degré quelconque. Si le module de t venant à croître, deux ou plusieurs racines, par exemple, α et β, ou α, β et γ, etc.,... deviennent égales entre elles, pour une certaine valeur du module dont il s'agit ; à partir de cet instant, les racines α, β ou $\alpha, \beta, \gamma, \ldots.$ cesseront d'être fonctions continues de t, et séparément développables suivant les puissances ascendantes de t. Mais la somme de ces racines, ou la somme de leurs puissances semblables ne cessera pas d'être fonction continue du paramètre t, et développable suivant les puissances ascendantes de ce paramètre ; et il en sera ainsi jusqu'au moment où l'accroissement progressif du module de t rendra l'une des racines que renferme le groupe (α, β) ou (α, β, γ),... équivalente à une ou plusieurs autres racines non comprises dans ce même groupe. Alors ces dernières, et celles qui pouvaient déjà s'être groupées avec elles, formeront avec les premières un nouveau groupe composé d'un plus grand nombre de racines, dont la somme sera encore développable, ainsi que la somme de leurs puissances semblables, en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de t. D'ailleurs, lorsqu'on connaît la somme de plusieurs racines α, β, γ,... de l'équation (1), et la somme de leurs puissances semblables d'un degré représenté par un nombre entier quelconque, on peut aisément développer suivant les puissances descendantes de x, le logarithme du produit

$$\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)\left(1-\frac{\beta}{x}\right)\left(1-\frac{\gamma}{x}\right)\ldots,$$

par conséquent, ce produit lui-même, et former une nouvelle équation dont α, β, γ,... soient les seules racines. Il importe d'observer à ce sujet que, pour obtenir tous les termes du produit en question, il suffit de prolonger le développement de ce produit, et, par conséquent, le développement de son logarithme jusqu'au terme dans lequel l'exposant de $\frac{1}{x}$ est égal au nombre des racines α, β, γ,... Cela posé, les principes que nous venons d'établir conduisent immédiatement au théorème suivant.

3ᵉ *Théorème*. Soit t un paramètre renfermé dans le premier membre de l'équation (1). Tant que le module de ce paramètre restera inférieur aux modules de toutes ses valeurs principales, les racines distinctes de l'équation (1) seront séparément développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de t. Supposons d'ailleurs que, le module de t venant à croître, on distribue en divers groupes les racines de l'équation (1), de telle sorte que, dans l'origine, le nombre des groupes soit égal au nombre des racines distinctes, et que plus tard deux groupes se réunissent en un seul au moment où deux racines qui appartiennent respectivement à ces deux groupes deviennent égales entre elles pour un module donné de t correspondant à une certaine valeur principale de ce paramètre. Le nombre des groupes de racines se trouvera complétement déterminé pour chaque valeur particulière attribuée au module de t, et l'équation (1) pourra être décomposée en plusieurs autres dont chacune fournisse séparément les diverses racines comprises dans un seul groupe.

Corollaire 1ᵉʳ. Dans les démonstrations des théorèmes 2 et 3, nous avons implicitement supposé que les racines, et les sommes de diverses racines de l'équation (1), ne cessaient d'être fonctions continues de t qu'au moment où deux ou plusieurs de ces racines devenaient égales entre elles. C'est ce qui a lieu, par exemple, lorsque l'équation (1) est de la forme

$$\Pi(x) + t\varpi(x) = 0, \tag{5}$$

$\varpi(x)$ et $\Pi(x)$ désignant deux fonctions entières de x, et le degré de la fonction $\Pi(x)$ étant supérieur à celui de la fonction $\varpi(x)$. Si le degré de $\Pi(x)$ devenait inférieur à celui de $\varpi(x)$, une ou plusieurs racines de l'équation (5) deviendraient infinies, par conséquent discontinues pour $t = 0$; et, si l'équation (1) n'était pas de la forme (5), ou si elle devenait transcendante, on conçoit que des valeurs particulières de t pourraient encore rendre une racine infinie ou discontinue, sans donner des racines communes à l'équation (5) et à sa dérivée. Il sera généralement facile de voir quelles sont les restrictions ou modifications qui doivent être apportées aux théorèmes 2 et 3 dans des cas semblables. Ainsi, par exemple, dans le cas où la fonction $\Pi(x)$ que renferme l'équation (5), offrira un degré inférieur à celui de $\varpi(x)$, on pourra encore développer les racines qui deviendront infinies pour $t = 0$, en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de t; seulement, les premiers termes de ces séries renfermeront des puissances négatives de t, comme on peut s'en assurer en développant suivant les puissances ascendantes entières ou fractionnaires du paramètre t, les racines des équations

$$x - 1 + tx^2 = 0, \quad x - 1 + tx^3 = 0.$$

Corollaire 2^e. Il est important d'observer que le 3^e théorème appliqué à l'équation (5), peut aisément se déduire de la formule (29) (page 13) du Mémoire de 14 pages, lithographié à Turin, sous la date du 17 décembre 1831 (*). Pour y parvenir, il suffit de remplacer, dans cette formule, $F(z)$ par une puissance entière de z, et $\varpi(z)$ par $t\varpi(z)$, d'écrire d'ailleurs, au lieu de x, dans l'équation (5),

$$x + y\sqrt{-1} = z,$$

(*) Cette formule 29, dont la démonstration ne peut trouver place ici, exprime, au moyen d'une série convergente, la somme des racines ou des puissances semblables des racines d'une équation $f(\tau) = 0$, et contient, comme cas particulier, la série de Lagrange, que M. Cauchy emploiera de préférence dans la suite de ces recherches.

en considérant les variables x, y, comme propres à exprimer deux coordonnées rectangulaires, et substituant à l'équation (5) la suivante

$$\Pi(x+y\sqrt{-1})+t\varpi(x+y\sqrt{-1})=0, \tag{6}$$

ou

$$t=-\frac{\Pi(x+y\sqrt{-1})}{\varpi(x+y\sqrt{-1})}; \tag{7}$$

puis de construire les différentes courbes représentées par l'équation

$$T=\text{mod.}\ \frac{\Pi(x+y\sqrt{-1})}{\varpi(x+y\sqrt{-1})}\ (*), \tag{8}$$

T désignant le module du paramètre t. Pour $T=0$, cette équation représentera autant de points que la suivante

$$\Pi(z)=0, \quad \text{ou} \quad \Pi(x+y\sqrt{-1})=0, \tag{9}$$

offrira de racines distinctes. T venant à croître, chacun de ces points sera remplacé par une courbe fermée, qui s'étendra de plus en plus; et les différentes courbes resteront isolées et indépendantes les unes des autres, jusqu'au moment où, le module T acquérant une de ses valeurs principales, on verra deux ou plusieurs courbes se réunir en un point multiple, pour se réduire plus tard à une seule et même courbe. Il peut aussi arriver que le périmètre d'une courbe vienne à se rencontrer lui-même en un certain point, ou que deux courbes distinctes se rencontrent en deux points, de manière à se transformer ensuite en deux courbes d'espèce différente, dont l'une s'élargisse et l'autre se rétrécisse de plus en plus. Ainsi, parmi les courbes représentées par l'équation (8), pour une valeur quelconque du module T, on pourra distinguer des courbes de première espèce, qui s'élargiront, et des courbes de seconde espèce qui se rétréciront, pour des valeurs croissantes de ce module. Lorsque T deviendra infiniment petit, les seules courbes qui subsisteront seront des courbes de première espèce, dont les périmètres s'étendront à de très petites distances des points représentés par l'équation

$$\Pi(x+y\sqrt{-1})=0, \quad \text{ou} \quad \Pi(z)=0; \tag{9}$$

pourvu que l'on suppose, comme on l'a dit, le degré de la fonction $\Pi(x)$

(*) Les initiales mod. placées devant une expression imaginaire, indiquent son module.

supérieur au degré de $\varpi(x)$. Au contraire, lorsque T deviendra infiniment grand, les seules courbes qui subsisteront seront des courbes de seconde espèce, dont les périmètres s'étendront à de très petites distances des points représentés par l'équation

$$(10) \qquad \varpi(x+y\sqrt{-1}) = 0, \quad \text{ou} \quad \varpi(z) = 0,$$

et une seule courbe de première espèce, dont le périmètre sera très considérable, et s'étendra à de très grandes distances tout autour de l'origine des coordonnées. Pour une valeur quelconque du module T de t, le nombre des courbes de première espèce, ou du moins le nombre de celles qui ne se trouveront point enveloppées de tous côtés par d'autres courbes de même espèce, sera précisément le nombre des groupes de racines mentionnés dans le 3^e théorème, et la formule (29) du mémoire lithographié déjà cité, fournira le moyen de développer suivant les puissances ascendantes de t, la somme des puissances semblables des racines de l'équation (5) correspondante à un même groupe. On pourra d'ailleurs supposer que le contour OO′O″.... dont il est question dans ce mémoire, se réduit successivement à chacune des courbes de première espèce, non enveloppées par d'autres, et représentées par l'équation (8) au moment où le module T est sur le point d'acquérir une des valeurs principales (*), pour lesquelles deux ou plusieurs courbes de première espèce se réunissent, savoir, celle de ces valeurs principales qui est immédiatement supérieure au module de la valeur réelle ou imaginaire effectivement attribuée à t dans l'équation (5). Cela posé, on reconnaîtra sans peine que les derniers termes de chaque série convergente finiront par être ou sensiblement proportionnels ou inférieurs à ceux d'une progression géométrique décroissante, dont la raison serait le rapport entre le module effectivement attribué à t, et la valeur principale de T.

En opérant comme on vient de le dire, on se procurera le moyen de décomposer l'équation (5) en plusieurs équations particulières dont le nombre soit égal au nombre des groupes de racines mentionnées dans le théorème (3) ou même au nombre des courbes de première espèce, enveloppées ou non enveloppées par d'autres. Il y a plus, si l'on fait usage, non-seulement des développements ordonnés suivant les puissances ascendantes de t, mais

(*) Nous appelons, pour abréger, *valeurs principales du module* T, les modules des valeurs principales de t.

encore des développements ordonnés suivant les puissances descendantes de t, ou ascendantes de $\frac{1}{t}$, on pourra évidemment décomposer l'équation (5), pour une valeur donnée du module T de t, en autant d'équations particulières qu'il y aura de courbes distinctes soit de première, soit de seconde espèce, correspondantes à cette valeur. Car, lorsqu'une courbe en enveloppera d'autres, on pourra déterminer la somme des racines de l'équation (5) correspondantes à des points situés sur ces diverses courbes, avec la somme des puissances semblables de ces racines, soit en tenant compte, soit en faisant abstraction des points situés sur la courbe-enveloppe, et obtenir en conséquence la somme des racines correspondantes aux seuls points situés sur la courbe-enveloppe, avec la somme de leurs puissances semblables. Ce n'est pas tout, si l'une des équations (9) ou (10) admet des racines égales, on pourra développer séparément chacune des racines correspondantes de l'équation (5) suivant les puissances ascendantes et fractionnaires de t ou de $\frac{1}{t}$, lorsque le module T du périmètre t sera inférieur ou supérieur aux modules de toutes ses valeurs principales. Ainsi, par exemple, si l'équation (9) offrant m racines égales à α, le module T de t est inférieur à tous les modules principaux de ce paramètre, alors en posant

$$t = \tau^m. \tag{11}$$

On pourra développer chacune séparément, suivant les puissances ascendantes de τ, celles des racines de l'équation (5) qui deviendraient égales à α pour $t = 0$. Cette proposition se déduit immédiatement du théorème 2^e, lorsqu'on applique ce théorème à l'équation (5) résolue par rapport à τ.

Les variables x et t étant supposées liées entre elles par l'équation (5), les valeurs principales de t vérifieront à la fois cette équation et sa dérivée

$$\Pi'(x) + t\varpi'(x) = 0. \tag{12}$$

Et les valeurs correspondantes de la variable x, c'est-à-dire les valeurs principales de x, seront déterminées par la formule :

$$\frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)} = \frac{\varpi'(x)}{\varpi(x)}, \quad \text{ou} \quad \frac{\Pi(x)}{\varpi(x)} = \frac{\Pi'(x)}{\varpi'(x)}. \tag{13}$$

Si, dans cette dernière on écrit $x + y\sqrt{-1}$ au lieu de x, on obtiendra l'équation

$$\frac{\Pi(x + y\sqrt{-1})}{\varpi(x + y\sqrt{-1})} = \frac{\Pi'(x + y\sqrt{-1})}{\varpi'(x + y\sqrt{-1})}, \tag{14}$$

à laquelle satisferont les coordonnées x, y des points de réunion ou de séparation des courbes de première ou de seconde espèce représentées par la formule (8).

Observons encore que, dans le cas où les fonctions $\Pi(x), \varpi(x)$ sont de forme réelle, l'équation (8) peut s'écrire comme il suit :

$$(15) \qquad T^2 = \frac{\Pi(x+y\sqrt{-1})}{\varpi(x+y\sqrt{-1})}\,\frac{\Pi(x-y\sqrt{-1})}{\varpi(x-y\sqrt{-1})}.$$

Si l'on pose pour abréger,

$$(16) \qquad -\frac{\Pi(x)}{\varpi(x)} = f(x),$$

les équations (12), (13) dont le système détermine les valeurs principales de t et de x, se réduiront à

$$(17) \qquad t = f(x), \qquad f'(x) = 0.$$

Par suite les courbes de première et de seconde espèce, correspondantes à un module donné T du paramètre t, seront représentées par l'équation

$$(18) \qquad T = \text{mod.}\, f(x+y\sqrt{-1}),$$

ou, si $f(x)$ est de forme réelle, par l'équation

$$(19) \qquad T^2 = f(x+y\sqrt{-1})\, f(x-y\sqrt{-1}),$$

et les coordonnées des points de réunion ou de séparation de ces mêmes courbes satisferont à la condition

$$(20) \qquad f'(x+y\sqrt{-1}) = 0.$$

C'est au reste, ce que l'on peut démontrer encore comme il suit :

Si, pour une valeur donnée de T, deux branches de courbes se réunissent en un point, ou pourra couper ces deux branches dans le voisinage du point de réunion par une droite parallèle à celle qui a pour équation $y = \theta x$, θ étant une constante choisie arbitrairement, et satisfaire à l'équation (19), non-seulement par les valeurs de x, y relatives au point de la droite situé sur la première branche de courbe, mais encore en substituant à ces valeurs les coordonnées du point situé sur la seconde branche, que je supposerai désignées par $x + \Delta x, y + \Delta y$, la différence finie Δy étant de la forme

$$(21) \qquad \Delta y = \theta \Delta x.$$

Cela posé, si l'on nomme u le logarithme du produit

$$f(x+y\sqrt{-1})\, f(x-y\sqrt{-1}),$$

l'équation (19) donnera non-seulement

$$(22) \qquad u = 2\log.T,$$

mais encore

$$(23) \qquad \Delta u = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = 0;$$

puis on conclura des formules (21) et (22), en faisant converger Δx vers la limite zéro,

$$(24) \qquad \frac{dy}{dx} = \theta, \qquad \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\theta = 0,$$

quel que soit θ; par conséquent

$$\frac{du}{dx} = 0, \qquad \frac{du}{dy} = 0.$$

Or, il est aisé de voir que ces dernières équations entraînent les deux formules

$$(25) \qquad f'(x + y\sqrt{-1}) = 0, \qquad f'(x - y\sqrt{-1}) = 0.$$

C'est à peu près ainsi que j'avais établi à Turin la formule (14), de laquelle j'avais déduit le théorème 2^e, et les autres théorèmes énoncés dans la *Gazette de Piémont* du 22 septembre 1832.

Si, dans l'équation (19), on attribue à x, y, les valeurs qui correspondent au point de réunion ou de séparation de deux courbes, puis d'autres valeurs très voisines correspondantes à un second point situé sur l'une des courbes et très rapproché du premier; en nommant s l'arc compté à partir du point de réunion ou de séparation, et prenant cet arc s pour variable indépendante, on trouvera que dans le passage du premier point au second, le logarithme du second membre de l'équation (19) reçoit un accroissement qui, eu égard aux formules (25), est sensiblement proportionnel à

$$\left[\frac{f''(x+y\sqrt{-1})}{f(x+y\sqrt{-1})} + \frac{f''(x-y\sqrt{-1})}{f(x-y\sqrt{-1})}\right]\left(\frac{dx^2}{ds^2} - \frac{dy^2}{ds^2}\right)$$
$$+ 2\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\sqrt{-1}\left[\frac{f''(x+y\sqrt{-1})}{f(x+y\sqrt{-1})} - \frac{f''(x-y\sqrt{-1})}{f(x-y\sqrt{-1})}\right].$$

En égalant cet accroissement à zéro, on obtiendra une équation qui fournira pour $\frac{dy}{dx}$ deux valeurs dont le produit sera -1; d'où il suit que deux branches de courbe, en se rencontrant, se couperont à angles droits. On prouvera pareillement que, si n branches de courbe se réunissent au même point, leurs tangentes en ce point comprendront entre elles des angles dont chacun sera le quotient de deux angles droits par le nombre n. En effet, si l'on pose $\frac{dy}{dx}=\theta$, la valeur de θ, relative au point dont il s'agit, sera donnée par une équation de la forme $\cos(c+n\theta)=0$, c désignant une quantité qui ne variera pas dans le passage d'une courbe à l'autre, et rendra le binome $\cos c+\sqrt{-1}\sin c$ égal au quotient qu'on obtient quand on divise l'expression imaginaire $\frac{f^{n}(x+y\sqrt{-1})}{f(x+y\sqrt{-1})}$ par le module de cette même expression.

Si l'on pose

$$(26)\qquad f(x+y\sqrt{-1})=e^{S+P\sqrt{-1}},$$

S et P désignant deux fonctions réelles de x, y, l'équation (18) donnera simplement

$$T=e^{S}.$$

D'ailleurs on déduira de l'équation (26) les formules

$$(27)\qquad \frac{dS}{dy}+\sqrt{-1}\,\frac{dP}{dy}=\frac{f'(x+y\sqrt{-1})}{f(x+y\sqrt{-1})}\sqrt{-1}=\left(\frac{dS}{dx}+\sqrt{-1}\,\frac{dP}{dx}\right)\sqrt{-1},$$

$$(28)\qquad \frac{d^2S}{dy^2}+\sqrt{-1}\,\frac{d^2P}{dy^2}=-\left(\frac{d^2S}{dx^2}+\sqrt{-1}\,\frac{d^2P}{dx^2}\right),\ \frac{d^2S}{dy^2}=-\frac{d^2S}{dy^2},\ \frac{d^2P}{dy^2}=-\frac{d^2P}{dx^2};$$

et, en vertu de celles-ci, jointes à l'équation (20), on aura, pour chaque valeur principale de T ou de S,

$$(29)\qquad \frac{dS}{dx}=0,\ \frac{dS}{dy}=0,\ \frac{d^2S}{dy^2}=-\frac{d^2S}{dx^2}.$$

Donc, généralement, chaque valeur principale de T ou de S sera tout-à-la-fois un maximum relatif à x, et un minimum relatif à y, ou un maximum relatif à y, et un minimum relatif à x.

On prouvera encore aisément que, si la fonction $f(x)$ étant de forme réelle, on prend T^2 pour l'ordonnée d'une surface courbe, les coordonnées x, y d'une ligne de plus grande pente tracée sur cette surface vérifieront l'équation

$$(30)\qquad \frac{f(x+y\sqrt{-1})}{f(x-y\sqrt{-1})}=\text{constante}.$$

Les principes que nous venons d'établir fournissent, pour la résolution des équations les méthodes indiquées dans ma lettre du 29 janvier 1837. Si l'on veut maintenant obtenir les propositions énoncées dans ma lettre du 24 février, il suffira de remplacer les équations (17), (18), (19) par les suivantes :

$$t = \mathrm{K} - e^{\varpi\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(x), \quad \mathrm{f}'(x) = 0, \quad \mathrm{T} = \mathrm{mod.}\,[\mathrm{K} - e^{\varpi\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}x(+y\sqrt{-1})],$$

$$\mathrm{T}^2 = [\mathrm{K} - e^{\varpi\sqrt{-1}}\mathrm{f}(x+y\sqrt{-1})]\,[\mathrm{K} - e^{-\varpi\sqrt{-1}}\mathrm{f}(x-y\sqrt{-1})],$$

K, ϖ, désignant deux quantités réelles, et le paramètre t ne différant pas de celui que nous avons désigné par i dans la lettre en question. La discussion des courbes représentées par la formule

$$\mathrm{T}^2 = [\mathrm{K} - e^{\varpi\sqrt{-1}}\mathrm{f}(x+y\sqrt{-1})]\,[\mathrm{K} - e^{-\varpi\sqrt{-1}}\mathrm{f}(x-y\sqrt{-1})]$$

n'offrira pas plus de difficulté que celle des courbes représentées par la formule (15) ou (19) et cette discussion jointe aux formules établies dans le mémoire lithographié sous la date du 17 décembre 1831, fournira les méthodes présentées dans ma lettre du 24 février pour la résolution de l'équation $\mathrm{f}(x) = 0$.

§ II.

Soit

$$(1) \qquad \mathrm{f}(x) = 0$$

une équation du degré n, dans laquelle le coefficient de x^n se réduit à l'unité, en sorte qu'on ait identiquement

$$(2) \qquad \mathrm{f}(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

a_1, a_2,..... a_{n-1}, a_n étant des coefficients réels ou imaginaires. Soit d'ailleurs k une constante réelle ou imaginaire dont le module surpasse le plus grand des modules principaux de $\mathrm{f}(x)$. D'après ce qui a été démontré dans le paragraphe précédent, on pourra développer, suivant les puissances descendantes et fractionnaires de k, les racines de l'équation

$$(3) \qquad \mathrm{f}(x) = k.$$

Pour y parvenir, il suffira d'employer les formules tirées du calcul des résidus, ou bien encore la formule de Lagrange, en opérant comme il suit.

L'équation (3) étant écrite ainsi,

$$(4) \qquad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = k,$$

si l'on fait, pour plus de commodité,

$$(5) \qquad x = \frac{1}{z}, \qquad 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = [\varpi(z)]^n,$$

en choisissant $\varpi(z)$ de manière que l'on ait

$$(6) \qquad \varpi(0) = 1,$$

cette équation deviendra

$$(7) \qquad z^n = \frac{1}{k}[\varpi(z)]^n,$$

et on la vérifiera en posant

$$(8) \qquad z = \lambda\varpi(z),$$

pourvu que l'on désigne par λ une des racines de l'équation binome

$$(9) \qquad \lambda^n = \frac{1}{k}.$$

Or, les valeurs de z et de $F(z)$ tirées de l'équation (8), en vertu de la formule de Lagrange, pour un module de λ suffisamment petit, ou, ce qui revient au même, pour un module de k suffisamment grand, seront

$$(10) \qquad z = \lambda\varpi(0) + \frac{\lambda^2}{1.2}\frac{d[\varpi(\varepsilon)]^2}{d\varepsilon} + \frac{\lambda^3}{1.2.3}\frac{d^2[\varpi(\varepsilon)]^3}{d\varepsilon^2} + \text{etc}\ldots$$

et

$$(11) \qquad F(z) = F(0) + \lambda F'(0)\varpi(0) + \frac{\lambda^2}{1.2}\frac{d.F'(\varepsilon)[\varpi(\varepsilon)]^2}{d\varepsilon} + \frac{\lambda^3}{1.2.3}\frac{d^2.F'(\varepsilon)[\varpi(\varepsilon)]^3}{d\varepsilon^2} + \text{etc}\ldots$$

ε devant être réduit à zéro après les différentiations, et $\varpi(0)$ ne différant pas de l'unité. On obtiendra donc sans peine les valeurs de z et de $F(z)$, par conséquent celles de $[\varpi(z)]^{-1}$ et de

$$(12) \qquad x = \frac{1}{z} = \lambda^{-1}[\varpi(z)]^{-1},$$

développées en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de λ, ou descendantes et fractionnaires de k, lorsque le module de k surpassera tous les modules principaux de $f(x)$, c'est-à-dire, ceux qui correspondent aux racines de l'équation

$$(13) \qquad f'(x) = 0.$$

Pour remplir cette condition, il suffirait de supposer k équivalent à $2r^n$,

r étant la valeur de x qui, dans l'équation (1), rendrait le premier terme égal à la somme de tous les autres. En effet, soient

$$A_1,\ A_2, \ldots\ldots A_{n-1},\ A_n,$$

les modules des coefficients

$$a_1,\ a_2, \ldots\ldots a_{n-1},\ a_n\,;$$

la valeur de r dont il s'agit sera donnée par la formule

$$(14)\qquad r^n - A_1 r^{n-1} - A_2 r^{n-2} - \ldots - A_{n-1} r - A_n = 0,$$

et surpassera celle que fournirait l'équation

$$(15)\qquad n r^{n-1} - (n-1) A_1 r^{n-2} - (n-2) A_2 r^{n-3} - \ldots - A_{n-1} = 0,$$

de laquelle on tirerait

$$r^n - \frac{n-1}{n} A_1 r^{n-1} - \frac{n-2}{n} A_2 r^{n-2} - \ldots - \frac{1}{n} A_{n-1} r = 0,$$

et par suite

$$r^n - A_1 r^{n-1} - A_2 r^{n-2} - \ldots - A_{n-1} r - A_n < 0.$$

Donc la valeur de r donnée par la formule (14) surpassera les modules de toutes les racines de l'équation

$$n x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1} = 0, \quad \text{ou} \quad f'(x) = 0\,;$$

comme on le démontrera facilement à l'aide des raisonnements dont nous avons fait usage dans l'*Analyse algébrique* (p. 480). D'ailleurs, il résulte évidemment de l'équation (14) que, pour un module de x égal ou inférieur à cette valeur de r, le module de $f(x)$ ne surpassera pas $2r^n$, ou le double de r^n.

Après avoir ramené par le calcul des résidus, ou par le théorème de Lagrange, la résolution de l'équation (3) à la résolution d'une équation binome, savoir, de l'équation (9), du moins pour une valeur du paramètre k suffisamment grande, il reste à montrer comment on peut revenir de l'équation (3) à l'équation (1). Or, pour y réussir, il suffira de faire varier un nouveau paramètre i entre les limites $i = 0$, $i = k$, dans une nouvelle équation de la forme

$$(16)\qquad f(x) = k - i\,;$$

et l'on pourra même supposer que dans ce trajet, le rapport $\frac{i}{k}$ reste toujours réel et positif. Chacune des constantes k, i pouvant d'ailleurs être imaginaire, nous écrirons dans les équations (3), (9) et (16),

$$ke^{-\varpi\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad ie^{-\varpi\sqrt{-1}},$$

au lieu de

$$k \quad \text{et} \quad i;$$

et par suite ces équations deviendront

$$(17) \qquad e^{\varpi\sqrt{-1}}\mathrm{f}(x) = k, \qquad (18) \qquad \lambda^n = \frac{1}{k}\, e^{\varpi\sqrt{-1}},$$

$$(19) \qquad e^{\varpi\sqrt{-1}}\mathrm{f}(x) = k - i,$$

les valeurs de k, i pouvant être supposées ici réelles et positives, et ϖ désignant un arc réel, que nous resterons libres de choisir arbitrairement.

Remarquons à présent que toutes les racines de l'équation (19) seront développables par le calcul des résidus ou par la formule de Lagrange, en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières du paramètre i, si la valeur réelle et positive attribuée à ce paramètre dans l'équation (19), est inférieure aux modules de toutes les valeurs principales de i. Or, ces valeurs principales, qui pourront être imaginaires, se confondront avec les valeurs de la fonction

$$(20) \qquad k - e^{\varpi\sqrt{-1}}\mathrm{f}(x),$$

correspondantes aux racines de l'équation dérivée

$$(13) \qquad \mathrm{f}'(x) = 0.$$

Si la fonction $\mathrm{f}(x)$ étant de forme réelle, l'équation (1) a toutes ses racines réelles et inégales, on pourra en dire autant de l'équation dérivée (13), et par suite les valeurs principales de la fonction $\mathrm{f}(x)$ seront toutes réelles, mais différentes de zéro. Alors, si l'on pose

$$(21) \qquad \varpi = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad e^{\varpi\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{-1},$$

l'expression (20), réduite à

$$(22) \qquad k \mp \mathrm{f}(x)\sqrt{-1},$$

offrira, pour chaque valeur principale de x, un module

$$(23) \qquad \{k^2 + [\mathrm{f}(x)]^2\}^{\frac{1}{2}},$$

supérieur à k; et par suite toutes les racines de l'équation (19) seront développables, même pour $i=k$, en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de i, ces séries ayant pour premiers termes les racines déjà calculées de l'équation (17). Mais, quand on pose $i=k$, l'équation (19) se réduit à l'équation (1). Donc, si l'équation (1) a toutes ses racines réelles et inégales, la résolution de cette équation pourra être réduite à celle de l'équation (17), par conséquent à celle de l'équation binome (18). Observons d'ailleurs qu'en supposant

$$(24) \qquad \varpi=\frac{\pi}{2}, \qquad e^{\varpi\sqrt{-1}}=\sqrt{-1},$$

on réduira les équations (17), (18), (19) à

$$(25) \qquad k=\mathrm{f}(x)\sqrt{-1}, \qquad (26) \qquad \lambda^n=\frac{1}{k}\sqrt{-1},$$

$$(27) \qquad k=i+\mathrm{f}(x)\sqrt{-1}, \quad \text{ou} \quad i=k-\mathrm{f}(x)\sqrt{-1};$$

tandis qu'en supposant

$$(28) \qquad \varpi=-\frac{\pi}{2}, \qquad e^{\varpi\sqrt{-1}}=-\sqrt{-1},$$

on réduira les équations (17), (18), (19), à

$$(29) \qquad k=-\mathrm{f}(x)\sqrt{-1}, \qquad (30) \qquad \lambda^n=-\frac{1}{k}\sqrt{-1},$$

$$(31) \qquad k=i-\mathrm{f}(x)\sqrt{-1}, \quad \text{ou} \quad i=k+\mathrm{f}(x)\sqrt{-1}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

1$^{\text{er}}$ *Théorème.* Lorsque l'équation (1) a toutes ses racines réelles et inégales, on peut obtenir chacune de ces racines développée en série convergente; et, pour y parvenir, il suffit de poser $i=k$, dans les développements des racines de l'équation (27) ou (31), en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de i, ces séries ayant pour premiers termes les racines de l'équation (25) ou (29), développées suivant les puissances descendantes et fractionnaires de k, ou, ce qui revient au même, suivant les puissances ascendantes et entières des valeurs de λ, propres à vérifier l'équation binome (26) ou (30).

Concevons maintenant que la fonction $\mathrm{f}(x)$ étant toujours de forme réelle, l'équation (1) ait encore ses racines toutes distinctes les unes des autres, par conséquent inégales, mais non toutes réelles. Soient, dans ce cas, m le nombre des racines réelles de l'équation (1), et

$$(32) \qquad a, b, c, d, \ldots g, h,$$

ces mêmes racines, rangées d'après leur ordre de grandeur; deux de ces racines réelles prises consécutivement, par exemple, a et b, comprendront toujours entre elles au moins une racine réelle de la dérivée (13). Car si, en supposant x réelle, on fait croître cette variable x entre les limites $x=a$, $x=b$, la fonction $\mathrm{f}(x)$, nulle à ces deux limites, acquerra dans l'intervalle au moins une valeur numérique maximum, pour une valeur réelle de x, qui fera évanouir la dérivée $\mathrm{f}'(x)$. Donc, le nombre des racines réelles de l'équation (1) étant m, le nombre des racines réelles de la dérivée (13) ne pourra être inférieur à $m-1$, et le nombre des racines imaginaires de la dérivée ne pourra surpasser le nombre des racines imaginaires de l'équation (1), c'est-à-dire $n-m$.

D'autre part, si l'on nomme

$$\alpha + 6\sqrt{-1}, \qquad \alpha - 6\sqrt{-1},$$

deux racines imaginaires conjuguées de l'équation (13), les valeurs principales de $\mathrm{f}(x)$ correspondantes à ces racines seront elles-mêmes conjuguées et de la forme

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{-1}, \qquad \mathrm{A} - \mathrm{B}\sqrt{-1},$$

A, B désignant deux quantités réelles dont la seconde deviendra positive, quand on choisira convenablement le signe de 6; et les valeurs principales du paramètre i correspondantes aux mêmes racines seront, pour l'équation (27),

$$i = k - (\mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{-1})\sqrt{-1}, \qquad i = k - (\mathrm{A} - \mathrm{B}\sqrt{-1})\sqrt{-1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(33) \qquad i = k + \mathrm{B} - \mathrm{A}\sqrt{-1}, \qquad i = k - \mathrm{B} - \mathrm{A}\sqrt{-1},$$

et pour l'équation (31)

$$(34) \qquad i = k - \mathrm{B} + \mathrm{A}\sqrt{-1}, \qquad i = k + \mathrm{B} + \mathrm{A}\sqrt{-1}.$$

Or, la première des expressions (33) et la seconde des expressions (34) offriront évidemment des modules supérieurs à k. Donc, si, pour l'équation (27) ou (31), on détermine les modules principaux du paramètre i, ceux de ces modules qui surpasseront la quantité positive k seront en nombre égal ou supérieur à la somme qu'on obtient en ajoutant au nombre des racines réelles de l'équation dérivée (13) la moitié du nombre de ses racines imaginaires. Donc, le nombre des modules principaux de i qui ne surpasseront pas la quantité k sera égal ou inférieur au nombre des couples de racines imaginaires de l'équation (13), par conséquent égal ou inférieur au nombre des couples de racines imaginaires de l'équation (1), c'est-à-dire à

$$\frac{n-m}{2}.$$

Cela posé, si, en attribuant au paramètre i une valeur réelle et positive, on fait croître cette valeur par degrés insensibles, depuis $i = 0$ jusqu'à $i = k$, les racines de l'équation (27) ou (31) commenceront par être développables, chacune séparément, en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de i, et ne cesseront pas de l'être, si l'on remplace la valeur réelle et positive, attribuée à i, par une valeur imaginaire dont cette valeur réelle soit le module.

Les mêmes séries continueront d'être convergentes, tant que la valeur positive du paramètre i ou son module restera inférieur à tous les modules principaux de ce paramètre. Mais, le module de i venant à croître, les racines devront être distribuées en divers groupes, dont le nombre, d'abord égal à n, c'est-à-dire au degré de l'équation (1), diminuera d'une unité chaque fois que deux racines comprises dans deux groupes différents deviendront égales entre elles, pour une valeur donnée du paramètre i. Alors ces deux groupes se réuniront en un seul, composé de racines dont la somme, ainsi que celle de leurs puissances entières de degré quelconque, continuera d'être développable suivant les puissances ascendantes de i. Si trois, quatre,... racines comprises dans trois, quatre,... groupes différents devenaient égales entre elles, la valeur principale correspondante du paramètre i se trouverait fournie par une valeur principale de x, qui serait elle-même une racine double, triple,... de l'équation (13). Alors aussi, le module de i venant à croître au-delà de sa valeur principale, les trois, quatre,... groupes différents se réuniront en un seul. Il suit de ces diverses remarques que, si l'on nomme

$$n - l$$

le nombre des groupes correspondants à un module donné de i, le nombre entier l ne pourra surpasser le nombre des modules principaux de i inférieurs au module donné. Donc, si ce dernier module est égal à k, le nombre l, d'après ce qui a été dit plus haut, ne pourra surpasser la quantité

$$\frac{n-m}{2};$$

et pour chacune des équations (27), (31), réduites à l'équation (1), en vertu de la supposition $i=k$, le nombre des groupes de racines surpassera la différence

$$n-\frac{n-m}{2}=\frac{n+m}{2}. \tag{35}$$

» Il y a plus, si l'on nomme m' le nombre des racines réelles de l'équation (13), le nombre des couples de ses racines imaginaires, savoir :

$$\frac{n-m'-1}{2},$$

sera égal ou supérieur au nombre des modules principaux de i qui ne surpassent point la quantité k; et par suite, le nombre des groupes de racines, pour l'équation (27) ou (31), réduite à l'équation (1), en vertu de la supposition $i=k$, sera égal ou supérieur à la différence

$$n-\frac{n-m'-1}{2}=\frac{1+m'+n}{2}. \tag{36}$$

Supposons maintenant que, parmi ces groupes, ceux qui renferment une seule racine soient en nombre égal à n_1, ceux qui renferment deux racines en nombre égal à n_2, ceux qui renferment trois racines en nombre égal à n_3, etc. On aura tout-à-la-fois

$$n_1+n_2+n_3+\ldots = \text{ou} > \frac{1+m'+n}{2}, \tag{37}$$

$$n_1+2n_2+3n_3+\ldots = n, \tag{38}$$

puis on en conclura

$$n+n_1 = \text{ou} > 2(n+n_2+n_3+\ldots) = \text{ou} > 1+m'+n,$$

par conséquent,

$$n_1 = \text{ou} > 1+m', \qquad n_1 > m'. \tag{39}$$

Donc, le nombre n_1 des racines qui resteront isolées, et séparément développables, suivant les puissances ascendantes de $i=k$, surpassera le nombre m' des racines réelles de la dérivée. On peut donc énoncer le théorème suivant.

2° *Théorème.* La fonction $f(x)$ étant supposée de forme réelle, l'équation

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

considérée comme déduite de la formule (27) ou (31) par la supposition $i = k$, offre plus de racines développables en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances ascendantes de i, que l'équation dérivée

$$f'(x) = 0 \tag{13}$$

n'offre de racines réelles.

Corollaire. Il en résulte que, dans tous les cas, une racine au moins de l'équation (1), si le degré n est un nombre impair, deux racines, si le degré n est un nombre pair, pourront être immédiatement développées en séries convergentes.

» Les théorèmes 1 et 2, ainsi que j'en ai fait l'observation dans ma lettre du 24 février, sont du nombre de ceux auxquels j'étais parvenu à Turin. En s'appuyant sur ces théorèmes on pourrait développer successivement en séries convergentes toutes les racines d'une équation donnée $f(x) = 0$. Car, après avoir développé une première racine x_0, on pourrait en développer une seconde x_1 considérée comme racine de l'équation

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad \text{ou} \quad x^{n-1} + (x_0 + a_1)x^{n-2} + (x_0^2 + a_1 x_0 + a_2)x^{n-3} + \ldots = 0,$$

puis une troisième x_2, ... et ainsi de suite. Si la racine x_0 devenait imaginaire ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, alors $f(x)$ étant de forme réelle, on connaîtrait immédiatement la racine imaginaire conjuguée $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, et, en nommant x_1 cette dernière, on pourrait développer une troisième racine x_2 considérée comme propre à vérifier l'équation

$$x^{n-2} + (x_0 + x_1 + a_1)x^{n-3} + \text{etc.} \ldots = 0,$$

etc... On pourra, d'ailleurs, déterminer les limites de l'erreur que l'on commettra sur une racine en réduisant son développement à un nombre fini de termes, et réciproquement déterminer une limite du nombre des termes qu'il faudra conserver pour obtenir la valeur de chaque racine avec une certaine approximation, par exemple, à $\frac{1}{N}$ près, N étant un nombre entier quelconque. Les problèmes de ce genre sont précisément l'objet du nouveau calcul que j'ai appelé calcul des limites, et qui s'applique même aux équations transcendantes. (*Voyez* le mémoire présenté à l'Académie de Turin, le 11 octobre 1831.)

Je passe à la démonstration du 3ᵉ théorème énoncé dans ma lettre du 24 février.

Soient α, 6 deux quantités réelles, $f(x)$ étant toujours une fonction entière de forme réelle, et

$$x = \alpha + 6\sqrt{-1} \tag{40}$$

une valeur de x propre à vérifier l'équation (27) ou (31) pour une valeur donnée réelle ou imaginaire de i. Si l'on fait varier cette dernière par degrés insensibles, en faisant croître son module, la valeur de x, et par suite celles de α, 6 varieront elles-mêmes par degrés insensibles; mais 6 ne pourra changer de signe avant que le module de i devienne supérieur à k. En effet, 6 ne pourra changer de signe sans passer par zéro, c'est-à-dire sans que x devienne réel, et pour une valeur réelle de x l'équation (27) ou (31) fournira un module de i équivalent à l'expression (23), par conséquent, égal ou supérieur à k, suivant que x sera ou ne sera pas racine de l'équation (1). Il résulte de cette observation, que le module de i venant à croître depuis la limite zéro jusqu'à la limite k, le coefficient 6 de $\sqrt{-1}$, dans une racine imaginaire de l'équation (27) ou (31), ne pourra jamais changer de signe, mais seulement s'évanouir pour $i = k$, si l'équation (1) a des racines réelles. D'ailleurs, avant de se réunir dans un même groupe, deux racines imaginaires de l'équation (1), dans lesquelles les valeurs de 6 ou les coefficients de $\sqrt{-1}$ se trouvent affectés de signes contraires, doivent devenir égales entre elles, ainsi qu'à une valeur principale de x, et par suite l'un de ces coefficients doit changer de signe. Donc, puisque ce changement ne saurait avoir lieu, avant que le module de i devienne supérieur à k, nous devons conclure que les racines imaginaires de l'équation (27) ou (31), dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera positif, resteront séparées des racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera négatif, tant que l'on aura

$$\text{mod. } i < k. \tag{41}$$

Alors chaque groupe sera exclusivement formé des unes ou des autres; par conséquent la somme des unes, aussi bien que la somme des autres, sera développable, avec la somme de leurs puissances entières de degré quelconque, suivant les puissances ascendantes du paramètre i. D'ailleurs, tant que la condition (41) sera remplie, il est évident que l'équation (27) ou (31) n'admettra point de racines réelles.

Lorsque i devient précisément égal à k, l'équation (27) ou (31) se réduit à l'équation (1), et peut offrir des racines réelles. Mais alors la somme des racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ avait un signe déterminé, ne pourrait cesser d'être développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de i, qu'autant qu'une valeur principale de i, correspondante à une valeur principale de x dans laquelle $\mathfrak{G}$ s'évanouirait, c'est-à-dire à une valeur principale et réelle de x, offrirait pour module le nombre k. Alors aussi, l'expression (23) devant se réduire à k, on aurait à la fois

$$\mathrm{f}(x) = 0, \qquad \mathrm{f}'(x) = 0,$$

et par conséquent l'équation (1) admettrait des racines égales, contre l'hypothèse généralement admise dans ce qui précède. Donc, en revenant à cette hypothèse, nous pourrons énoncer la proposition suivante.

3^e *Théorème*. La fonction $\mathrm{f}(x)$ étant supposée réelle et entière, si l'on distribue les racines toutes imaginaires de l'équation (25) ou (29) en deux suites distinctes, la première suite comprenant les racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif, et la seconde suite les racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est négatif; les mêmes conditions seront remplies, pour un module de i inférieur à k, par les racines de l'équation (27) ou (31), qui pourront être distribuées en deux nouvelles suites correspondantes aux deux premières, et composées chacune de racines dans lesquelles les coefficients de $\sqrt{-1}$ seront tous et toujours affectés du même signe. Alors la somme des termes de la troisième ou quatrième suite, ainsi que la somme de leurs puissances entières de degré quelconque, sera développable en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de i, le premier terme de la série étant la somme des termes de la première ou seconde suite, ou de leurs puissances entières du degré donné. Si l'équation (1) n'a point de racines égales, les séries obtenues ne cesseront pas d'être convergentes quand on posera $i = k$, ce qui réduira les formules (27) et (31) à l'équation (1) elle-même, et par conséquent l'équation (1) pourra être décomposée en deux autres dont les racines coïncideront respectivement avec les termes de la troisième suite, puis avec les termes de la quatrième.

Corollaire. Parmi les racines réelles que peut admettre l'équation (1), il importe de savoir quelles sont celles qui devront être censées appartenir à la troisième suite ou à la quatrième. Or, pour décider cette question relativement à une racine donnée de l'équation (1), à la racine a, par exemple, il suffira de rechercher si, en considérant la racine a comme la limite vers laquelle converge une racine imaginaire de l'équation (27) ou (31), tandis que le module de i croît et converge vers la limite k, on doit supposer dans cette racine imaginaire le coefficient de $\sqrt{-1}$ ou positif ou négatif. Soit

$$(42) \qquad x = a + \delta + \varepsilon\sqrt{-1}$$

la racine imaginaire dont il s'agit, δ, ε désignant deux quantités réelles, qui deviennent infiniment petites pour une valeur de i infiniment rapprochée de k, et s'évanouissant pour $i = k$. Posons en outre

$$(43) \qquad f(a + \delta \pm \varepsilon\sqrt{-1}) = D \pm \varepsilon E\sqrt{-1},$$

D, E désignant encore deux quantités réelles. En vertu des formules (42), (43), les équations (27) et (31) donneront

$$(44) \qquad i = k + \varepsilon E - D\sqrt{-1},$$

$$(45) \qquad i = k - \varepsilon E + D\sqrt{-1},$$

la valeur de E étant

$$(46) \qquad E = \frac{f(a + \delta + \varepsilon\sqrt{-1}) - f(a + \delta - \varepsilon\sqrt{-1})}{2\varepsilon\sqrt{-1}}.$$

Donc, pour que la valeur de i fournie par l'équation (27) ou par l'équation (31) offre une partie réelle inférieure à k, et à plus forte raison un module inférieur à k, il sera nécessaire que le signe de ε, ou du coefficient de $\sqrt{-1}$ dans $f(x)$, soit opposé, dans le premier cas, pareil dans le second, au signe de la quantité réelle E déterminée par l'équation (46). Mais, pour des valeurs infiniment petites de ε et δ, cette quantité se réduit sensiblement à

$$f'(a + \delta) \quad \text{ou} \quad f'(a).$$

Donc, les racines réelles de l'équation (1) étant considérées comme des limites vers lesquelles convergent des racines imaginaires de l'équation (27) ou (31), tandis que le module de i croît et converge vers la limite k, le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans chacune de ces racines imaginaires, offrira un signe dépendant de celui que prendra la fonction dérivée $f'(x)$, pour une valeur de x égale à la racine réelle correspondante de l'équation (1), savoir, un signe opposé à celui de $f'(x)$, s'il s'agit de l'équation (27), et un signe pareil à celui de $f'(x)$, s'il s'agit de l'équation (31). En conséquence, parmi les suites de racines mentionnées dans le théorème précédent, la troisième comprendra les racines réelles de l'équation (1), propres à fournir des valeurs ou négatives ou positives de la fonction dérivée $f'(x)$, et la quatrième les racines réelles propres à fournir les valeurs ou positives ou négatives de $f'(x)$, suivant que l'équation (1) sera déduite, par la supposition $i=k$, ou de la formule (27), ou de la formule (31). D'ailleurs, les racines réelles

$$a, b, c, d, \ldots g, h,$$

de l'équation (1) étant rangées d'après l'ordre de leurs grandeurs, lorsqu'on reviendra, en suivant l'ordre inverse, de la dernière h à la première a, ces racines fourniront des valeurs de $f'(x)$ alternativement positives et négatives, la valeur $f'(h)$ qui correspond à la dernière racine étant positive. En effet, la fonction $f(x)$, qui s'évanouit quand x se réduit à l'une de ces racines, doit nécessairement, dans le passage de l'une à l'autre, commencer par croître et finir par décroître, ou commencer par décroître et finir par croître. Mais, à partir du moment où la valeur croissante de x atteint la dernière racine réelle h, il faut que la fonction $f(x)$ croisse pour devenir positive, puisque avec son premier terme x^n elle doit être positive pour de très grandes valeurs de x. D'autre part, on sait que la dérivée $f'(x)$ est positive ou négative, suivant que la fonction $f(x)$ croît ou décroît pour des valeurs croissantes de x. Cela posé, si le nombre m des racines réelles $a, b, c, d, \ldots g, h$ est impair, la fonction dérivée $f'(x)$ sera négative pour $\frac{m-1}{2}$, racines réelles, savoir

$$b, d, \ldots g,$$

et positive pour $\frac{m+1}{2}$, racines réelles, savoir :

$$a, c, \ldots h.$$

Si au contraire le nombre m est pair, la fonction $f'(x)$ sera négative pour $\frac{m}{2}$, racines réelles, savoir :

$$a, c, \ldots g,$$

et positive pour $\frac{m}{2}$, racines réelles, savoir :

$$b, d, \ldots h.$$

Donc, si l'on pose pour une valeur impaire de m,

(47) $u=(x-b)(x-d)\ldots(x-g)$, (48) $v=(x-a)(x-c)\ldots(x-h)$,

et pour une valeur paire de m,

(49) $u=(x-a)(x-c)\ldots(x-g)$, (50) $v=(x-b)(x-d)\ldots(x-h)$,

Si d'ailleurs on nomme U le produit des facteurs simples, qu'on obtient en retranchant successivement de x les racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est négatif, et V le produit des facteurs simples conjugués aux premiers; la troisième et la quatrième des suites mentionnées dans le théorème précédent, auraient pour termes les racines de l'équation (1), propres à vérifier la première et la seconde des deux formules

(51) $uU=0$, (52) $vV=0$,

ou bien encore la première et la seconde des deux formules

(53) $vU=0$, (54) $uV=0$,

suivant que l'on supposera l'équation (1) tirée de la formule (27) ou de la formule (31), par la supposition $i=k$. D'ailleurs, les coefficients des équations (51) ou (52), et (53) ou (54), se déduiraient sans peine de la somme des termes de la troisième ou quatrième suite, et de la somme de leurs puissances semblables et entières des divers degrés. Donc l'équation (1), ou

(55) $$uvUV=0,$$

pourra être, en vertu du troisième théorème, décomposée à volonté, soit dans les équations (51) et (52), soit dans les équations (53) et (54). Mais, en divisant par leur plus grand commun diviseur les premiers membres des équations (51) et (53), ou (52) et (54), on réduira ces équations à

(56) $$u=0, \quad v=0.$$

De même, en divisant par leur plus grand commun diviseur les premiers membres des équations (51) et (54), ou (52) et (53), on réduira ces équations à

(57) $$U=0, \quad V=0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant.

4^e *Théorème.* La fonction entière $f(x)$ étant réelle, et les racines de l'équation (1) inégales entre elles, cette équation pourra toujours être décomposée en quatre autres, qui offrent seulement :

» La première, les racines réelles pour lesquelles $f'(x)$ est négatif;

» La seconde, les racines réelles pour lesquelles $f'(x)$ est positif;

» La troisième, les racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est négatif;

» La quatrième, les racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif.

» *Corollaire.* Cette proposition coïncide avec le 3e théorème de ma lettre du 24 février, et lorsqu'on la joint au 1er théorème, elle fournit la détermination complète des racines réelles d'une équation de degré quelconque. J'ajouterai que cette détermination peut encore être simplifiée à l'aide des considérations suivantes :

» Soient s la somme des racines de l'équation (1), ou de leurs puissances semblables d'un degré donné l, et

$$S + T\sqrt{-1}$$

la somme des puissances semblables et de même degré, des racines de l'équation (51),

$$s, S, T,$$

désignant trois quantités réelles. Il est clair que les sommes des puissances semblables et du degré l, des racines des quatre équations (51), (52), (53), (54) seront respectivement, pour les équations (51) et (52)

$$(58) \qquad S + T\sqrt{-1}, \qquad\qquad (59) \qquad s - S - T\sqrt{-1},$$

et pour les équations (53), (54)

$$(60) \qquad s - S + T\sqrt{-1}, \qquad\qquad (61) \qquad S - T\sqrt{-1}.$$

Cela posé, si l'on retranche l'expression (58) de l'expression (60), la différence

$$(62) \qquad s - 2S$$

représentera évidemment la somme des puissances semblables, et du degré l, des racines réelles de l'équation (1), ces puissances étant prises avec le signe + ou avec le signe —, suivant que les racines réelles dont il s'agit vérifieront l'une ou l'autre des formules

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

c'est-à-dire suivant que les valeurs de $f'(x)$ correspondantes à ces racines seront positives ou négatives. On aura donc, pour des valeurs impaires de m,

$$s - 2S = a^l - b^l + c^l - d^l + \ldots - g^l + h^l, \tag{63}$$

et, pour des valeurs paires de m,

$$s - 2S = - a^l + b^l - c^l + d^l - \ldots - g^l + h^l. \tag{64}$$

Si le nombre l est impair, la formule (63) ou (64), dans laquelle S représente la somme d'une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $i = k$, fournira, pour une valeur impaire de m, la somme des puissances semblables, et du degré l, des m racines de l'équation

$$(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)\ldots(x+g)(x-h)=0, \tag{65}$$

ou, pour des valeurs paires de m, la somme des puissances semblables et du degré l, des m racines de l'équation

$$(x+a)(x-b)(x+c)(x-d)\ldots(x+g)(x-h)=0. \tag{66}$$

D'ailleurs étant donnée pour une équation du degré m, la somme des puissances semblables des racines, des degrés représentés par les nombres

$$1,\ 3,\ 5,\ 7\ldots(2m-1),$$

on en tire aisément, à l'aide de formules toutes linéaires, les coefficients des diverses puissances de x dans le premier membre de cette équation. On peut donc énoncer encore la proposition suivante.

5ᵉ *Théorème*. La fonction $f(x)$ étant supposée entière et de forme réelle, et les racines de l'équation (1) inégales entre elles, on pourra déterminer immédiatement à l'aide de séries convergentes, les coefficients d'une autre équation qui offrirait seulement pour racines les racines réelles de l'équation (1), prises avec le signe + ou avec le signe —, suivant qu'elles correspondent à des valeurs positives ou négatives de $f'(x)$.

Corollaire. Le théorème 5ᵉ joint au 1ᵉʳ, suffit à la détermination de toutes les racines réelles d'une équation de degré quelconque. Je me propose de revenir, dans une note nouvelle, sur cette détermination, d'éclaircir encore ce qui a été dit ci-dessus, en montrant la méthode appliquée à des exemples numériques, et d'établir d'autres théorèmes relatifs à la résolution des équations. Parmi ces théorèmes, on doit distinguer ceux auxquels on est conduit, lorsque dans les formules (17), (18), (19), la valeur de

ϖ cesse d'être égale à $\pm\frac{\pi}{2}$. On doit surtout remarquer le cas où l'on a $e^{\varpi\sqrt{-1}} = \pm 1$. On peut aussi établir facilement la proposition suivante :

6^e *Théorème.* $\Pi(x)$ et $\varpi(x)$ désignant deux fonctions entières, la première du degré n, la seconde du degré $m < n$, et dans lesquelles les coefficients des plus hautes puissances de n sont réduits à l'unité; supposons que les racines réelles et finies des deux équations

$$(67) \qquad \Pi(x) = 0, \qquad\qquad (68) \qquad \varpi(x) = 0,$$

étant rangées par ordre de grandeur, forment la suite

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots\ \lambda,\ \mu,\ \nu.$$

En donnant à cette suite, pour termes extrêmes $-\infty$, $+\infty$, on obtiendra celle-ci,

$$(69) \qquad -\infty, \alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots\ \lambda, \mu,\ \nu,\ \infty;$$

et, si l'on nomme i une quantité réelle positive, deux termes de la dernière suite, pris consécutivement, pourront comprendre entre eux des racines réelles d'une seule des deux équations

$$(70) \qquad \Pi(x) - i\varpi(x) = 0, \qquad\qquad (71) \qquad \Pi(x) + i\varpi(x) = 0.$$

Si l'on nomme 1er, 2^e, 3^e... intervalle, les intervalles compris entre le 1er et le 2^e terme, entre le 2^e et le 3^e, entre le 3^e et le 4^e, etc... les racines réelles de l'équation (70) ne pourront être renfermées que dans le 1er, le 3^e, le 5^e,... intervalle, lorsque $n - m$ sera pair, et dans le 2^e, le 4^e, le 6^e... intervalle, lorsque $n - m$ sera impair. Ce sera l'inverse pour l'équatino (71). De plus, le nombre des racines réelles de l'équation (70) ou (71) qui pourront se trouver comprises dans l'intervalle compris entre deux termes consécutifs de la suite (70), par exemple, entre β et γ, sera impair, si ces deux termes sont racines réelles, l'un de l'équation (67), l'autre de l'équation (68). Le même nombre sera pair et pourra se réduire à zéro dans le cas contraire.

Nota. Lorsque deux, trois... racines de l'équation (70) ou (71) deviennent égales, on ne doit pas cesser de la considérer comme représentant deux, trois... termes de la suite (69). Seulement ces termes sont égaux entre eux.

§ III.

Les méthodes que l'on peut déduire du principe ci-dessus établi exigent que l'on sache évaluer les coefficients d'une équation, lorsqu'on connaît les sommes des puissances semblables impaires de ses racines; cette évaluation fera l'objet de ce troisième paragraphe.

1er *Théorème.* Étant données, pour une équation du degré m, les sommes des puissances semblables des racines, de degrés représentés par les nombres

$$1,\ 3,\ 5,\ldots\ldots\ 2m-1,$$

on peut déduire, à l'aide de formules linéaires, les coefficients des diverses puissances de x, dans le premier membre de cette équation.

Démonstration. Soit,

$$(1)\qquad x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0,$$

l'équation dont il s'agit. Nommons $a,\ b,\ c,\ldots\ g,\ h,$ ses diverses racines, et

$$s_n=a^n+b^n+c^n+\ldots+g^n+h^n,$$

la somme de leurs puissances semblables du degré n. On aura identiquement

$$(2)\quad x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-g)(x-h),$$

puis on en concluera, en posant successivement $x=\frac{1}{z}$, $x=-\frac{1}{z}$,

$$1+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_{m-1}z^{m-1}+a_mz^m=(1-az)(1-bz)(1-cz)\ldots(1-gz)(1-hz),$$
$$1-a_1z+a_2z^2-\ldots\mp a_{m-1}z^{m-1}\pm a_mz^m=(1+az)(1+bz)(1+cz)\ldots(1+gz)(1+hz),$$

et par suite

$$(3)\qquad \frac{1+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_{m-1}z^{m-1}+a_mz^m}{1-a_1z+a_2z^2-\ldots\mp a_{m-1}z^{m-1}\pm a_mz^m}=e^{-2zZ},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4)\qquad \frac{a_1+a_3z^2+a_5z^4+\ldots}{1+a_2z^2+a_4z^4+\ldots}=-\frac{1}{z}\,\frac{e^{zZ}-e^{-zZ}}{e^{zZ}+e^{-zZ}},$$

la valeur de Z étant

$$(5)\quad Z=-\frac{1}{2z}\,l\left(\frac{1-az}{1+az}\,\frac{1-bz}{1+bz}\cdots\frac{1-hz}{1+hz}\right)=s_1+\frac{s_3}{3}z^2+\frac{s_5}{5}z^4+\frac{s_7}{7}\,z^6+\text{etc.}$$

On aura d'ailleurs

$$(6)\quad \frac{1}{z}\frac{e^{2Z}-e^{-2Z}}{e^{2Z}+e^{-2Z}}=\frac{1}{6}\frac{2^2-1}{1.2}2^2Z-\frac{1}{30}\frac{2^4-1}{1.2.3.4}2^4z^2Z^3+\frac{1}{42}\frac{2^6-1}{1.2.3.4.5.6}2^6z^4Z^5 \text{ etc.}$$
$$=A+Bz^2+Cz^4+Dz^6+\text{etc.}\ldots,$$

les facteurs $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$,... étant les nombres de Bernouilli, et les valeurs de A, B, C, D,... étant données par les formules

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} A=s_1,\quad B=\frac{1}{3}(s_3-s_1^3), \\ C=\frac{1}{5}s_5-\frac{1}{3}s_1^2s_3+\frac{2}{15}s_1^5, \\ D=\frac{1}{7}s_7-\frac{1}{5}s_1^2s_5-\frac{1}{9}s_1s_3^2+\frac{2}{9}s_1^4s_3-\frac{17}{315}s_1^7, \text{ etc.,} \end{array}\right.$$

dans lesquelles les seconds membres offrent des coefficients numériques dont les sommes

$$1,\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0,\ \frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{15}=0,\ \frac{1}{7}-\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{2}{9}-\frac{17}{315}=0, \text{ etc.,}$$

sont toutes nulles à l'exception de la première. Cela posé, de l'équation (4), présentée sous la forme

$$(8)\quad a_1+a_3z^2+a_5z^4+a_7z^6+\ldots+(1+a_2z^2+a_4z^4+a_6z^6+\ldots)(A+Bz^2+Cz^4+Dz^6+\ldots)=0,$$

on tirera, en observant que cette équation subsiste, quel que soit z,

$$(9)\quad a_1+A=0,\ a_3+a_2A+B=0,\ a_5+a_4A+a_2B+C=0,\ a_7+a_6A+a_4B+a_2C+D=0,$$

Ces dernières formules, toutes linéaires par rapport aux inconnues

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots\ a_{m-1},\ a_m,$$

fourniront les moyens de les déterminer en fonctions de A, B, C, D, et par conséquent en fonctions de

$$s_1,\ s_3,\ s_7\ldots\ s_{2m-1}.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose $m=4$, les formules (9), réduites à

$$(10)\quad a_1+A=0,\ a_3+a_2A+B=0,\ a_4A+a_2B+C=0,\ a_4B+a_2C+D=0,$$

donneront

$$(11)\quad a_1=-A,\quad a_2=\frac{AD-BC}{B^2-AC},\quad a_3=-A\frac{AD-BC}{B^2-AC}-B,\quad a_4=\frac{C^2-BD}{B^2-AC}.$$

Si l'on suppose, par exemple,

$$(12) \qquad s_1 = 0, \quad s_3 = 3, \quad s_5 = 0, \quad s_7 = 0,$$

on tirera des formules (7) et (11)

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = 0; \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = 0.$$

Donc l'équation du 4^e^ degré, dont les racines vérifient la condition (12), est la suivante :

$$(13) \qquad x^4 - x = 0;$$

ce dont il est facile de s'assurer directement. Si l'on eût supposé

$$(14) \qquad s_1 = s_3 = s_5 = s_7 = 1,$$

on aurait tiré des équations (7) et (10)

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0; \quad a_1 = -1, \quad a_3 = -a_2, \quad a_4 = 0,$$

la valeur de a_2 restant indéterminée, comme l'indique la seconde des formules (11). Effectivement, les racines de l'équation

$$(15) \qquad x^4 - x^3 + a_2(x^2 - x) = 0, \quad \text{ou} \quad (x^2 + a_2)(x^2 - x) = 0,$$

c'est-à-dire les quantités 0, 1 jointes aux racines de $x^2 + a_2 = 0$, qui sont égales, au signe près, vérifient toujours les conditions (14). Il y a plus : pour que les formules (11) fournissent des valeurs indéterminées de a_1, a_2, a_3, a_4, il faut que l'on ait

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D};$$

et l'on trouve alors que l'équation, dont les racines correspondent aux valeurs données de s_1, s_3, s_5, s_7, peut s'écrire comme il suit :

$$(16) \qquad \left(x^2 + a_2 + \frac{B}{A}\right)\left(x^2 - Ax - \frac{B}{A}\right) = 0.$$

Or, cette dernière équation se partage en deux autres dont l'une offre encore des racines égales, au signe près, mais affectées de signes contraires. Au reste, on peut démontrer généralement la proposition suivante.

2° *Théorème.* Lorsque, étant données, pour une équation du degré m, les sommes des puissances semblables des racines de degrés impairs, les formules qui servent à en déduire les coefficients de l'équation, laissent quelques uns de ces coefficients indéterminés, on peut affirmer que l'équation proposée offre des racines égales, au signe près, mais affectées de signes contraires.

Démonstration. Supposons, en effet, qu'étant donnés les divers termes de la suite

$$(17) \qquad s_1, \quad s_3, \quad s_5, \quad s_7, \ldots.$$

prolongée aussi loin que l'on voudra, on n'en puisse, à l'aide des formules (7) et (9), déduire complétement les valeurs des coefficients

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots a_{m-1}, \quad a_m,$$

de l'équation (1); en sorte qu'un ou plusieurs de ces coefficients demeurent indéterminés. Si l'on nomme R le plus grand des modules que présentent les racines de l'équation (1), la somme s_n offrira un module inférieur à

$$m\mathrm{R}^n,$$

et par conséquent la série qui compose le dernier membre de l'équation (5) sera convergente pour un module de z inférieur à $\frac{1}{\mathrm{R}}$. Cela posé, concevons que l'on attribue successivement à z, m valeurs particulières dont les modules soient inégaux et inférieurs à $\frac{1}{\mathrm{R}}$. On pourra calculer les valeurs correspondantes du second membre de la formule (4); et, par suite, si l'on nomme u la fraction comprise dans le premier membre, c'est à-dire si l'on pose, pour une valeur impaire de m,

$$(18) \qquad u = \frac{a_1 + a_3 z^2 + a_5 z^4 + \ldots + a_m z^{m-1}}{1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots + a_{m-1} z^{m-1}},$$

ou, pour une valeur paire de m,

$$(19) \qquad u = \frac{a_1 + a_3 z^2 + a_5 z^4 + \ldots + a_{m-1} z^{m-2}}{1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots + a_m z^m},$$

on connaîtra m valeurs de la fraction rationnelle u. On doit en conclure que cette fraction rationnelle aura une valeur complétement déterminée pour chaque valeur donnée de z, quoique, d'après l'hypothèse admise, les coefficients a_1, a_2, ... a_m ne soient pas tous complétement déterminés. En effet, représentons le numérateur et le dénominateur de la fraction dont il s'agit, par

$$\varphi(z), \qquad \Phi(z),$$

pour un premier système de valeurs attribuées aux coefficients a_1, a_2, $a_3, \ldots a_{m-1}$, a_m, et par

$$\chi(z), \quad \mathrm{X}(z),$$

pour un second système de valeurs des mêmes coefficients. L'équation

$$\frac{\phi(z)}{\Phi(z)} = \frac{\chi(z)}{\mathrm{X}(z)},$$

qui se trouvera vérifiée pour m valeurs particulières et inégales de z et de z^2, pourra s'écrire comme il suit :

$$(20) \qquad \phi(z)\mathrm{X}(z) - \chi(z)\Phi(z) = 0;$$

et comme cette dernière équation sera du degré $2m - 2$ par rapport à z, par conséquent du degré $m - 1$ par rapport à z^2, elle ne pourra être vérifiée par m valeurs particulières et inégales de z^2, sans devenir identique. (Voyez l'*Analyse algébrique*.) Par conséquent, m valeurs particulières de la fraction rationnelle u, correspondantes à m valeurs particulières et inégales de z et de z^2, détermineront complétement la valeur générale de cette même fraction. Donc, cette valeur générale pourra encore se déduire des valeurs supposées connues des divers termes de la série (17); et l'on pourra en dire autant de la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{1 + uz}{1 - uz} = \frac{1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m}{1 - a_1 z + a_2 z^2 - \ldots \pm a_m z^m}.$$

D'ailleurs, quand on pose, dans cette dernière $z = \frac{1}{x}$, elle devient

$$(21) \quad \frac{x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{x^m - a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} - \ldots \mp a_{m-1} x \pm a_m} = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-h)}{(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+h)}.$$

Donc cette dernière fraction sera elle-même complétement déterminée, ainsi que les valeurs de x qui la rendront nulle ou infinie. Or,

$$a, \quad b, \quad c, \ldots h$$

étant les racines de l'équation (1), si, parmi ces racines, on ne peut en trouver deux qui soient égales, au signe près, mais affectées de signes contraires, la fraction (21), et par conséquent le polynome

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

s'évanouiront pour chacune des valeurs a, b, c, ... h, attribuée à variable x. Donc alors, les coefficients

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \ldots a_{m-1}, \quad a_m,$$

5..

seront complétement déterminés. D'ailleurs, il est évident qu'on ne pourrait plus tirer la même conclusion si deux racines a et b, par exemple, étant égales, au signe près, se trouvaient affectées de signes contraires, c'est-à-dire si l'on avait

$$b = -a.$$

Car alors, le numérateur et le dénominateur de la fraction (21) ayant pour facteur commun le produit

$$(x-a)(x+a),$$

cette fraction serait réductible à la suivante :

$$\frac{(x-c)\ldots(x-h)}{(x+c)\ldots(x+h)},$$

et cesserait de s'évanouir pour $x = a$.

Corollaire 1[er]. Si l'on calcule avec une approximation suffisante m valeurs de z, et par suite de u, on pourra en déduire les coefficients

$$a_1, \quad a_2, \ldots a_{m-1}, \quad a_m,$$

compris dans le numérateur et le dénominateur de la fraction (18) ou (19), à l'aide de la formule d'interpolation pour les fonctions rationnelles, telle que je l'ai donnée dans l'*Analyse algébrique*. (Voir à la fin de cet ouvrage la note sur la formule d'interpolation de Lagrange.) Alors ces divers coefficients se trouveront exprimés en fonctions des seules valeurs particulières des variables z et u.

Corollaire 2[e]. Si, en cherchant à déduire d'une équation donnée une seconde équation qui offre seulement les racines réelles de la première, on ne pouvait déterminer complétement tous les coefficients de cette seconde équation, on devrait en conclure que l'équation donnée présente un ou plusieurs couples de racines égales, au signe près, mais affectées de signes contraires. Au reste, on peut toujours débarrasser facilement une équation des facteurs du second degré qui correspondent à de semblables racines. Car ces facteurs doivent être diviseurs communs des deux polynomes que l'on obtient en ajoutant les uns aux autres d'une part les termes de degré pair, de l'autre les termes de degré impair. Ainsi, en particulier, a et $-a$ ne peuvent être à la fois racines de l'équation (1), sans que les facteurs $x-a$, $x+a$, et par suite leur produit x^2-a^2, divisent les deux polynomes

$$x^m + a_2x^{m-2} + a_4x^{m-4} + \text{etc}, \quad \text{et} \quad a_1x^{m-1} + a_3x^{m-3} + \text{etc.} \ldots$$

§ IV.

J'ajouterai ici une observation relative au 6^e théorème du § II.

Dans ce théorème, $\Pi(x)$, $\varpi(x)$ représentent deux fonctions entières, la première du degré n, la seconde du degré $m < n$. Or, si l'on pose

$$f(x) = \frac{\Pi(x)}{\varpi(x)},$$

les équations $\Pi(x) = 0$, $\varpi(x) = 0$, pourront être présentées sous les formes

$$(22) \quad f(x) = 0, \qquad (23) \quad f(x) = \frac{1}{0}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{f(x)} = 0,$$

tandis que les équations

$$\Pi(x) - i\varpi(x) = 0, \qquad \Pi(x) + i\varpi(x) = 0,$$

deviendront

$$(24) \qquad f(x) = i, \qquad (25) \quad f(x) = -i;$$

et l'équation (23) sera évidemment vérifiée par $x = \frac{1}{0} = \pm\infty$. Cela posé, le théorème que je viens de rappeler pourra s'énoncer comme il suit :

3^e *Théorème.* $f(x)$ étant une fraction réelle et rationnelle qui devient infinie pour des valeurs infinies de x, supposons que les racines réelles des équations (22) et (23), rangées par ordre de grandeur, composent la suite :

$$(26) \qquad -\infty, \alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \lambda, \mu, \nu, \infty.$$

Soit d'ailleurs i une quantité positive. Deux termes consécutifs de la suite (26) comprendront entre eux un nombre pair ou impair de racines réelles d'une seule des équations (24), (25), savoir, un nombre impair, si ces deux termes sont racines, l'un de l'équation (22), l'autre de l'équation (23), et un nombre pair, qui pourra se réduire à zéro, dans le cas contraire. De plus, si, dans la suite (26), on nomme *premier intervalle* l'intervalle compris entre les deux premiers termes, *second intervalle*, l'intervalle compris entre les 2^e et 3^e termes; *troisième intervalle*, l'intervalle compris entre les 3^e et 4^e termes, etc. . . . ; les racines réelles de l'équation (24) ne pourront être comprises que dans les 1er, 3^e, 5^e. . . intervalles, lorsque $n - m$ sera un nombre pair, et dans les 2ᵉ, 4ᵉ, 6ᵉ... intervalles, lorsque $n-m$ sera impair. Ce sera l'inverse pour l'équation (25). Si les équations (22), (23) avaient des racines égales, il faudrait en tenir compte pour ne pas diminuer le nombre des intervalles, alors quelques-uns de ces intervalles se réduiraient à zéro.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, il suffit de construire les diverses branches de la courbe dont les coordonnées x, y vérifient l'équation

$$y = \mathrm{f}(x).$$

Au reste, après avoir ainsi obtenu du 3ᵉ théorème une démonstration géométrique, on pourra aisément la traduire en langage algébrique. Pour y parvenir, il suffira de recourir aux propriétés des fonctions continues, et d'observer que la fonction $\mathrm{f}(x)$ reste continue entre deux valeurs réelles de x propres à vérifier l'équation (23).

Exemple. Pour montrer une application du 3ᵉ théorème, supposons que l'on considère l'équation du quatrième degré

$$(27) \qquad x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4 = 0,$$

déjà traitée par Fourier, et qui ne peut offrir au plus que deux racines réelles, attendu que sa dérivée du second ordre

$$6x^2 - 3x + 4 = 0,$$

offre deux racines imaginaires. L'équation (27) pourra être présentée sous l'une quelconque des formes

$$(28)\ \frac{x^4 - x^3}{4x^2 + x - 4} = -1, \qquad (29)\ \frac{x^4 - x^3 + 4x^2}{x - 4} = -1, \qquad (30)\ \frac{x^4 + 4x^2 - 4}{x^3 - x} = 1.$$

Cela posé, en prenant

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x^4 - x^3}{4x^2 + x - 4}$$

on trouvera, pour racines de l'équation $\mathrm{f}(x) = 0$,

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad 1,$$

pour racines de l'équation $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{0}$,

$$-\infty, \ -\frac{1}{8} - \sqrt{1 + \frac{1}{64}} = -1{,}133.., \quad -\frac{1}{8} + \sqrt{1 + \frac{1}{64}} = 0{,}883.., \quad \infty,$$

et ces racines ou valeurs de x rangées dans leur ordre de grandeur, composeront la suite

$$-\infty, \quad -1,133\ldots, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 0,883\ldots, \quad 1, \quad \infty,$$

les valeurs correspondantes de la fonction $f(x)$ étant

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{1}{0}, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{1}{0}, \quad 0, \quad \frac{1}{0}.$$

Comme d'ailleurs, dans l'équation (28), la différence entre les degrés du numérateur et du dénominateur du premier membre est un nombre pair $4-2=2$, et le second membre négatif; les racines réelles de cette équation ne pourront être comprises que dans les 2ᵉ, 4ᵉ, 6ᵉ intervalles. De plus, eu égard à la série des valeurs de $f(x)$; le second et le 6ᵉ intervalles comprendront un nombre impair de racines réelles, et le 4ᵉ un nombre pair de racines réelles qui pourra se réduire et se réduira certainement à zéro, l'équation (27) n'ayant pas de racines nulles. Donc, la proposée offrira au moins deux racines réelles, l'une négative, comprise entre les limites $-1,133$ et 0, l'autre positive, comprise entre les limites $0,883$ et 1. D'ailleurs, d'après ce qu'on a dit, elle n'en aura point d'autres.

En posant

$$f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 4x^2}{x-4},$$

on obtiendrait pour racines réelles des équations (22), (23) cinq valeurs de x, savoir, les quantités

$$-\infty, \quad 0, \quad 0, \quad 4, \quad \infty,$$

correspondantes aux valeurs

$$\frac{1}{0}, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{1}{0}, \quad \frac{1}{0},$$

de $f(x)$. Ici, la différence entre les degrés du numérateur et du dénominateur de $f(x)$ étant un nombre impair $4-1=3$, les racines de l'équation (29) devront être renfermées dans le premier et le troisième intervalles. Donc, cette équation admettra une racine négative et une racine positive inférieure à 4, ce que l'on savait déjà.

Enfin, si l'on prend

$$f(x) = \frac{x^4 + 4x^3 - 4}{x^2 - x},$$

comme on aura sensiblement

$$\sqrt{-2+\sqrt{8}} = 0{,}91,$$

on obtiendra pour racines réelles des équations (22), (23) sept valeurs de x, savoir, les quantités

$$-\infty, \quad -1, \quad -0{,}91, \quad 0, \quad 0{,}91, \quad 1, \quad \infty,$$

correspondantes aux valeurs

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{1}{0}, \quad 0, \quad \frac{1}{0}, \quad 0, \quad \frac{1}{0}, \frac{1}{0}$$

de la fonction $f(x)$; et, comme le second membre de l'équation (30) est positif, tandis que la différence entre les degrés du numérateur et du dénominateur de la fraction $f(x)$ est ici un nombre impair $4-3=1$, on conclura du 3ᵉ théorème que les racines de l'équation (30) doivent être cherchées dans les 2ᵉ, 4ᵉ et 6ᵉ intervalles, et qu'en conséquence cette équation offre au moins une racine négative supérieure à $-0{,}91$ et une racine positive inférieure à 0,91.

En résumé, il suit de tout ce qu'on vient de dire, que l'équation (27) offre seulement deux racines réelles, l'une négative, comprise entre les limites

$$-1 \quad \text{et} \quad -0{,}91,$$

l'autre positive, comprise entre les limites

$$0{,}883 \quad \text{et} \quad 0{,}91.$$

Ce théorème conduit à l'une des méthodes pour la résolution des équations de tous les degrés, indiquées dans la lettre du 29 janvier, et qui consiste à partager le premier membre de l'équation donnée en deux polynomes, dont l'un est multiplié par un paramètre que l'on peut rendre égal à l'unité. Les racines des équations auxiliaires ainsi obtenues, servent, comme on l'a vu, de limites aux racines de l'équation cherchée. Or, n étant le degré de l'équation donnée, il est clair qu'on pourra toujours réduire le degré de chacune des deux équations auxiliaires à un nombre égal ou inférieur à la moitié de n. Par exemple, on ramène la résolution d'une équation du cinquième degré à celle de deux équations du second degré; celle des équations trinomes à celle des équations binomes, etc.

§ V.

Les principes établis dans les paragraphes qui précèdent, fournissent des méthodes générales pour la résolution des équations de tous les degrés. En suivant l'une de ces méthodes fondée sur le troisième théorème, page 24, on développe immédiatement chaque racine d'une équation en série convergente, lorsque toutes les racines sont réelles, et l'on peut toujours ramener la question à ce dernier cas, en se débarrassant, comme on l'a expliqué, des racines imaginaires. Mais quoique, sous le point de vue théorique, cette méthode ne laisse rien à désirer, il peut être avantageux de lui substituer, dans la pratique, l'une des autres méthodes qui se déduisent des principes ci-dessus exposés, et en particulier celles qui se fondent sur plusieurs théorèmes que je vais énoncer en peu de mots.

Considérons une équation du degré n. On pourra la réduire, même d'une infinité de manières, à la forme

$$\varphi(x) = i,$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction entière ou fractionnaire, et i un paramètre réel ou imaginaire. Or, comme je l'ai fait voir, la résolution de cette équation pourra toujours être ramenée, pour de très petites valeurs de i, à la résolution de l'équation auxiliaire

$$\varphi(x) = 0,$$

et, pour de très grandes valeurs de i, à la résolution de l'équation auxiliaire

$$\varphi(x) = \frac{1}{0}.$$

Il y a plus; si l'on nomme valeurs principales de x celles qui vérifient l'équation dérivée

$$\varphi'(x) = 0,$$

sans vérifier l'une des deux équations auxiliaires, et modules principaux de $i = \varphi(x)$, ceux qui répondent aux valeurs principales de x; toutes les racines de la proposée seront développables suivant les puissances ascendantes ou descendantes du paramètre i, lorsque le module donné de ce paramètre sera inférieur ou supérieur à tous ses modules principaux. Enfin, si l'on fait correspondre à chaque expression imaginaire un point situé dans un plan donné, en prenant la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ pour l'abscisse et l'ordonnée de ce point, les expressions réelles correspondront toujours à des points situés sur l'axe des abscisses, et les diverses valeurs de x, propres à résoudre l'équation

$$\phi(x) = i,$$

pour un module donné de i, correspondront à des points situés sur un système de courbes qui pourront être de deux espèces différentes. Nous avons nommé courbes de première espèce celles qui s'élargissent, et courbes de seconde espèce celles qui se rétrécissent, pour une valeur croissante du module de i; et nous avons fait voir que l'équation proposée peut toujours être décomposée en autant d'équations partielles qu'il y a de courbes distinctes. Or, si la fonction $\phi(x)$ étant de forme réelle, on attribue au paramètre i une valeur réelle, chacune des courbes traversées par l'axe des abscisses, étant symétrique par rapport à cet axe, ne pourra le couper, en plus de deux points, hors le cas des racines égales. Donc alors chacune des équations partielles offrira au plus deux racines réelles. Ainsi se trouve établie la proposition suivante :

1^er^ *Théorème.* En supposant résolues les équations auxiliaires

$$\phi(x) = 0, \qquad \phi(x) = \tfrac{1}{0},$$

on peut généralement décomposer une équation de la forme

$$\phi(x) = i$$

en équations partielles dont chacune offre au plus deux racines réelles.

Corollaire. Si la proposée a toutes ses racines réelles, elle sera immédiatement décomposable en facteurs réels du premier ou du second degré.

A ce théorème on peut en joindre plusieurs autres dont je vais transcrire les énoncés, me réservant d'en offrir la démonstration dans une autre occasion.

2^e^ *Théorème.* Si l'on donne successivement à la fonction $\phi(x)$ les deux formes

$$k - f(x), \qquad k + f(x),$$

$f(x)$ désignant une fonction entière de forme réelle, et k une constante réelle ou imaginaire dont le module surpasse tous les modules principaux de $f(x)$; si d'ailleurs on suppose inégales entre elles les racines de l'équation

$$f(x) = 0;$$

cette équation, que l'on pourra présenter sous l'une quelconque des formes

$$k - f(x) = i, \qquad k + f(x) = i,$$

en donnant au paramètre i la valeur k, offrira, sous l'une de ces formes, au moins une racine développable suivant les puissances ascendantes de i. On pourra d'ailleurs, dans l'hypothèse admise, développer suivant les puissances descendantes de k les racines de chacune des équations auxiliaires

$$k - f(x) = 0, \qquad k + f(x) = 0.$$

3[e] *Théorème.* Les mêmes choses étant admises que dans le théorème précédent, si l'on forme divers groupes avec les racines de l'équation

$$f(x) = 0,$$

présentée d'abord sous la forme

$$k - f(x) = i,$$

puis sous la forme

$$k + f(x) = i,$$

en composant chaque groupe des racines qu'il est indispensable d'ajouter entre elles pour obtenir une somme développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de i; deux racines distinctes ne pourront en général se trouver réunies dans le premier cas, sans être séparées dans le second, ni réunies dans le second cas, sans être séparées dans le premier.

Corollaire. Après avoir développé toutes les racines de chacune des équations

$$k - f(x) = i, \qquad k + f(x) = i,$$

suivant les puissances ascendantes de i, et calculé les sommes formées par l'addition des développements qu'il est nécessaire d'ajouter entre eux pour obtenir des séries convergentes; il suffira, pour obtenir chaque racine, de réunir entre elles plusieurs de ces sommes, prises les unes avec le signe $+$, les autres avec le signe $-$.

Exemple. Si, l'équation proposée ayant toutes ses racines réelles, on suppose la constante k réelle et positive, les développements correspondants aux racines réelles des équations auxiliaires seront convergents, ainsi que la somme des développements correspondants à deux racines imaginaires conjugées. Cela posé, si l'on nomme

$$a, b, c, d, \ldots, f, g, h,$$

les racines réelles rangées par ordre de grandeur, et si, n étant le degré de l'équation donnée, on suppose le premier terme de $f(x)$ réduit à x^n, alors, pour des valeurs paires de x, l'équation auxiliaire

$$f(x) - k = 0$$

fournira le moyen de calculer les racines a, h, avec les sommes

$$b + c,\ d + e, \ldots f + g,$$

tandis que l'équation auxiliaire

$$f(x) + k = 0$$

fournira le moyen de calculer les sommes

$$a + b,\ c + d,\ \ldots\ g + h.$$

Au contraire, si n est impair, la première équation auxiliaire fournira la racine h, avec les sommes $a + b$, $c + d$, $\ldots f + g$; et la seconde, la racine a, avec les sommes $b + c$, $d + e$, $\ldots$ $g + h$. Dans l'une et l'autre hypothèse, on obtiendra immédiatement la plus petite et la plus grande racine, les autres étant données par les formules

$$b = (a + b) - a, \quad c = (b + c) - (a + b) + a, \quad \text{etc.}\ldots$$

Errata.

Page 40, *au lieu de* conduit, *lisez* se rattache
au lieu de consiste, *lisez* consistait