Aus

Handbuch der physiologischen Methodik

herausgegeben

von

Robert Tigerstedt.

Psychophysik

Darstellung

der

Methoden der experimentellen Psychologie

von

W. Wirth

Professor an der Universität Leipzig

Mit 63 Textfiguren

Leipzig

Verlag von S. Hirzel

1912.

Druck von August Pries in Leipzig.

Vorwort.

Obgleich die in der Einleitung erläuterte Zusammenfassung der spezifisch psychologischen Methoden zunächst in der besonderen Aufgabe dieser Schrift im Rahmen des Handbuches begründet ist, dürfte ihr Inhalt doch vielleicht weitere Kreise interessieren, da ja die experimentelle Analyse psychischer Prozesse über ihre ursprüngliche Bedeutung als Hilfswissenschaft der Sinnesphysiologie längst zu einer selbständigen Disziplin hinausgewachsen ist, deren Problemstellung sogar im wesentlichen eine geisteswissenschaftliche ist. Hierauf beruht vor allem der enge Zusammenhang zwischen ihren einzelnen Problemgruppen, dessen Wahrung auch ein fruchtbares methodisches Prinzip bildet und die bisher in den elementareren Untersuchungen dieses Gebietes erreichbare Exaktheit allmählich auf die Analyse immer komplexerer Vorgänge übertragen lassen wird. Wenn die Darstellung an mehreren Punkten selbständig vorzudringen bemüht war, ohne dabei die stetige Abhängigkeit von den früheren Leistungen aus den Augen zu verlieren, so geschah dies überall in der Absicht, die von theoretischen Streitigkeiten unabhängige Sammlung brauchbarer Beobachtungen zu fördern und eine den praktischen Bedürfnissen noch angemessenere Form der exakten Verarbeitung dieses Materiales zu finden.

Leipzig, im Herbst 1911.

Der Verfasser.

Inhalt.

Psychophysik.

Von

Wilhelm Wirth in Leipzig.

(Mit 63 Textfiguren.)

Einleitung.

Im folgenden sollen die wichtigsten Methoden der experimentellen Psychologie zur Darstellung kommen, soweit sie nicht schon in den früheren Abteilungen dieses Bandes behandelt sind. Wenn dafür speziell die Überschrift „Psychophysik" gewählt wurde, so bringt dies zunächst die Tatsache zum Ausdruck, daß vor allem die denkwürdige Darstellung, die Fechner unter diesem Titel[1]) wichtigen Methoden und Ergebnissen der experimentellen Psychologie zuteil werden ließ, dieser Disziplin im ganzen auch in den Kreisen der Naturwissenschaft zu der Anerkennung verholfen hat, die sie auch hier als Hilfswissenschaft der Physiologie nicht übersehen ließ. Außerdem wird aber von dieser Seite auch gerade derjenigen Gruppe experimentalpsychologischer Methoden ein besonderes Interesse entgegengebracht werden, die man noch heute im Anschlusse an Fechner als sogen. „Psychophysische Maßmethoden" bezeichnet. Da sie nur auf einer ausführlicheren mathematischen Grundlage wissenschaftlich zureichend dargestellt werden können, so werden sie im folgenden sogar einen relativ großen Teil ausmachen. Insofern sie die Abhängigkeit der Vergleichsurteile von den Maßverhältnissen der zu vergleichenden Reize, bei gegebenen physiologischen und psychologischen Voraussetzungen, ermitteln lassen, bringen sie also zunächst eine Ergänzung der subjektiven quantitativen Analyse im Gebiete der sinnesphysiologischen Methoden. Denn soweit dort die Sinneswahrnehmung als Symptom physiologischer Zustände betrachtet, also z. B. die verschiedene Erregbarkeit benachbarter Sinneselemente aus den Unterschieden der beiderseits ausgelösten Sinnesempfindungen erschlossen wurde, sind quantitative Bestimmungen immer nur durch Vergleichungen meßbarer Reize zu erlangen.

Als exakte Analyse der Vergleichsprozesse bilden aber die „psychophysischen Maßmethoden" zugleich den natürlichen Ausgangspunkt für die Darstellung der experimental-psychologischen Methoden zur Erforschung der höheren psychischen Vorgänge und Leistungen

1) Elemente der Psychophysik, 1860.

überhaupt, die zugleich zu den höheren nervösen Zentralteilen in engerer funktioneller Beziehung stehen, deren Untersuchung im unmittelbar vorhergehenden Abschnitte entwickelt wurde. So behandeln wir also dann weiterhin auch wenigstens die wichtigsten Methoden zur Prüfung der Auffassung einzelner Objekte oder Merkmale und umfassenderer Komplexe, zur Untersuchung des Gedächtnisses und der Zeitvorstellung, ferner auch zur experimentellen Analyse der Gefühle und Willensakte. Bei dieser letzteren wird das Hauptgewicht auf die sogen. „Reaktionsversuche" im engeren Sinne des Wortes gelegt werden, d. h. auf die Messungen des psychologisch symptomatischen Verlaufes (insbesondere der Zeitverhältnisse) von Willkürbewegungen auf verabredete Signale hin.

Diese Untersuchungen der höheren psychischen Vorgänge lassen freilich zugleich noch mehr als die subjektive Methode bei sinnesphysiologischen Arbeiten die Selbständigkeit hervortreten, die der experimentellen Psychologie als Teilgebiet der allgemeinen Psychologie zukommt. Als solches faßt sie die generellen Eigentümlichkeiten des psychischen Lebens ins Auge. Dieses kommt zwar immer nur in der individuellen Abgeschlossenheit „eines" Bewußtseins als konkretes Erfahrungsmaterial vor. Bei der Möglichkeit einer gegenseitigen Verständigung über die Inhalte, die den jeweiligen, stets wechselnden Bestand der einzelnen konkreten Innenwelten ausmachen, pflegt es aber in dem Inbegriff „des Bewußtseins", d. h. des „innerlich" oder „unmittelbar" Erlebbaren überhaupt, auch kollektiv zusammengefaßt zu werden, so daß man die Psychologie auch als die Lehre vom „Bewußtsein" schlechthin definieren kann. Als wissenschaftliches System hat sie hierbei natürlich auch alle Bedingungen und Folgeerscheinungen der Bewußtseinsvorgänge zu berücksichtigen, die, ohne selbst dem eigenen oder einem fremden Bewußtsein anzugehören, zur Herstellung gesetzmäßiger Zusammenhänge dienen. Diese hat sie aus den sonstigen Erfahrungen, insbesondere über den physiologischen Organismus der Individuen, aufzunehmen oder eventuell auch zunächst als „psychische", d. h. den Bewußtseinsvorgängen besonders unmittelbar zugeordnete „Dispositionen" rein hypothetisch zu konstruieren. Aber nur wenn wir den besonderen Gegenstand der Psychologie, das reale Bewußtseinsleben, überall im Auge behalten, wird die experimentelle Psychologie dann auch wiederum der naturwissenschaftlichen Physiologie den Dienst leisten können, ihr bei dem Versuche, von der Betrachtung des leiblichen Organismus aus zu einem möglichst geschlossenen Kausalnexus der Lebensprozesse vorzudringen, die neuen Faktoren und Zwischenglieder, womöglich quantitativ bestimmt, aufzuzeigen, die der Welt des Bewußtseins angehören[1]).

---

1) Über den Standpunkt im allgemeinen, der auch für die Auffassung der methodischen Fragen von Bedeutung ist, vgl. des Verf. „Experimentelle Analyse der Bewußtseinsphänomene" 1908, S. 6ff.

I. Methodische Vorfragen.

Kapitel 1.

Selbstbeobachtung und Experiment.

1. Das Bewußtsein als Gegenstand der Selbstbeobachtung.

Da sich alle unsere Fragestellungen im letzten Grunde auf Ereignisse beziehen, die sich in der Welt eines individuellen Bewußtseins abspielen, so muß das wissenschaftliche Erfahrungsmaterial zu ihrer Lösung immer aus dem Selbstbewußtsein einzelner Personen geschöpft sein, dem die Inhalte, die in einem bestimmten Augenblicke erlebt werden, „unmittelbar" gegeben sind. Wie aber das Bewußtsein von äußeren materiellen Objekten überhaupt noch keine logisch vollwertige „Erkennung" derselben, ja sogar deren sinnliche Wahrnehmung noch keine wissenschaftlich verwertbare „Beobachtung" zu sein braucht, so bedürfen wir auch zur Erkennung des Bewußtseins erst einer methodischen Verbindung einzelner Akte, in denen es als besonderer Gegenstand der Betrachtung immer klarer und vollständiger erfaßt und mit den Erfahrungen über andere Bestände gedanklich verknüpft wird. Dies bedeutet jedenfalls immer eine besondere Einstellung, zu der eine spezielle Veranlagung vorhanden sein kann, die aber auch eine Einübung und Erweiterung zuläßt, sobald man ihr Wesen einmal erfaßt hat, und in solcher systematischen Anwendung gewöhnlich als „Selbstbeobachtung" bezeichnet wird. Eine sichere Verständigung über ihr Wesen ist aber, wie gesagt, genau wie bei irgend einer anderen Richtung der Gedanken oder der Beobachtung, nur durch den Hinweis auf ihren besonderen Gegenstand möglich, der uns mit den in seinem eigenen „Umfange" liegenden Grenzen jederzeit als ein einheitlicher Bestand gegeben ist.

Hierbei muß das Bewußtsein natürlich auch von anderen Gegenständen des Denkens unterscheidbar sein. Solche vergegenwärtigen wir uns z. B. fortwährend als die an sich nicht unmittelbar erlebten Bedingungen zu bestimmten Bewußtseinsinhalten, den Sinneswahrnehmungen, bei deren Erleben unsere Gedanken, also die höheren, von den Sinneseindrücken ausgelösten intellektuellen Prozesse, für gewöhnlich nicht diesen selbst, sondern eben ihren Bedingungen, den Dingen der Außenwelt, zugewandt sind. Eine klare begriffliche Trennung dieser verschiedenen Gegenstände, die auch als ein höher entwickelter „erkenntnistheoretischer Standpunkt" bezeichnet werden kann, braucht aber auf primitiveren Stufen des Denkens so wenig vorhanden zu sein, wie eine Kenntnis bestimmter naturwissenschaftlicher oder psychologischer Tatsachen im einzelnen. Ja es scheinen gerade die

Sinneswahrnehmungen augenblicklich wirksamer äußerer Reize wegen ihrer repräsentativen Funktion oft besonders schwer aus ihren gedanklichen Verbindungen mit den Begriffen der Außenobjekte gelöst werden zu können, so daß sie für die Reflexion gewissermaßen aus dem unmittelbar erlebten Bestande herauszufallen drohen. Dagegen bilden die reproduktiven Vorstellungen selbständiger Erinnerungen und vor allem intensivere Gefühle und Willensvorgänge schon ein viel weniger verkennbares Zentrum eines besonderen Etwas, auf das man nur zu achten braucht, um die mit ihnen gleichzeitigen Inhalte aus ihren sonstigen gedanklichen Verbindungen herauszulösen. Durch diesen Rekurs auf den Inbegriff aller gleichzeitig unmittelbar erlebten Inhalte, die das Erfassen des einheitlichen Ganzen durch ihre gemeinsame Zugehörigkeit zu ihm gewissermaßen von allen möglichen Seiten her unterstützen, hat Herbart den fundamentalen Begriff des Bewußtseins zum erstenmal klar fixiert[1]). Dagegen sollte man mit den Begriffen des „Ich" oder „Selbst", ja sogar der „Subjektivität" zum Zwecke einer konkreten Vergegenwärtigung des Gegenstandes der Psychologie wenigstens nicht gerade den Anfang machen, da sie vieldeutig sind und nicht nur für das unmittelbar erlebte Ich des bewußten Vorstellungs- Wertungs-, und Willenslebens, sondern auch für die unmittelbare dispositionelle Grundlage des Bewußtseins, ja sogar für die Lebenseinheit des psychophysischen Organismus im ganzen angewandt werden.

2. Das Grundphänomen aller Bewußtseinsvorgänge.

Die Vertrautheit mit diesem Bewußtseinsbegriff ist aber methodisch nicht nur deshalb von grundlegender Bedeutung, weil er die neuen, spezifisch psychologischen Fragestellungen überhaupt erst gewinnen läßt, sondern weil auch innerhalb des psychologischen Gebietes selbst der methodische Zusammenhang der Probleme erst durch den steten Hinblick auf den jeweiligen Gesamtbestand der Inhalte klar wird, als dessen Komponenten sich die sog. „Elemente", „Seiten" und „Akte" des Bewußtseins realisieren. Zwar herrscht ja hinsichtlich der Qualitäten und ihrer wechselseitigen Beziehungen, z. B. der Raumvorstellung, eine weitgehende Unabhängigkeit zwischen den einzelnen Komponenten, ohne die natürlich ein hinreichend korrektes Weltbild und eine objektive Wertung und zweckmäßige Willensreaktion überhaupt ausgeschlossen wären. Ist aber schon in dieser Hinsicht die Unabhängigkeit schließlich doch immer nur eine relative, so setzt der konkrete Vollzug aller psychischen Leistungen für die beteiligten Inhalte einen bestimmten Grad der sog. Lebhaftigkeit und Frische voraus. Bei den sinnlichen Wahrnehmungen und den reproduktiven Vorstellungen wird diese Eigenschaft auch mit ihrem Korrelate, der sog. „Klarheit und Deutlichkeit" der lebhaften Inhaltskomplexe, begrifflich zusammengefaßt. Insofern aber ihre Herabminderung einen Inhalt stetig an die Grenze seiner Zugehörigkeit zu einem gegebenen Bestande überhaupt heranführt, kann sie geradezu als „Bewußtseinsgrad" bezeichnet werden. Hinsichtlich dieses Merkmales, von dem die gesamte psychische Wirkungsfähigkeit eines Inhaltes abhängt,

1) Psychologie als Wissenschaft I, 1824, § 48.

legt aber nun der Gesamtbestand den einzelnen Komponenten großenteils einschränkende, teilweise aber auch fördernde Bedingungen auf, die in den Untersuchungen über das psychomechanische Grundproblem des sog. „Bewußtseinsumfanges" diskutiert werden. Dort werden wir auch auf die allgemeine methodische Bedeutung dieser Gradunterschiede zurückkommen, von denen natürlich auch das Ergebnis der Selbstbeobachtung in allen Punkten abhängig ist.

3. Das psychologische Experiment.

Die speziellen Methoden, die einen bestimmten Inhalt, bzw. den zuletzt genannten „Grad" seiner Beteiligung an dem Gesamtbestande eines gegebenen Zeitpunktes nachzuweisen gestatten, müssen natürlich zunächst immer von dem geläufigen logischen Prozesse der Erfahrung[1]) ausgehen, durch den auch sonst irgend ein Gegenstand oder ein Merkmal eines solchen begrifflich erfaßt zu werden pflegt. In dieser Weise verschafft sich also schon das vorwissenschaftliche Denken ein sprachlich fixiertes System von psychologischen Begriffen, und zwar speziell auch Kenntnisse tatsächlicher Zusammenhänge, indem ganz von selbst an dem jeweils zufällig Erlebten Gleiches und Ähnliches wiedererkannt und von den gleichzeitigen und vorhergehenden Inhalten unterschieden, also begrifflich verselbständigt wird. Wenn man will, kann man dies alles schon als eine Art primitiver und vielfach unwillkürlich gehandhabter „Vergleichsmethode" bezeichnen. Ein stetiger wissenschaftlicher Fortschritt ergab sich aber auch hier erst seit der systematischen Anwendung des Experimentes, bei dem man das zu analysierende Bewußtsein, im allgemeinen außerhalb des alltäglichen Lebens, d. h. im Laboratorium, künstlich beeinflußt, und die willkürlichen und unwillkürlichen Äußerungen der Versuchsperson (V.-P.), soweit sie mit dem so geschaffenen Bewußtseinszustande in näherem Zusammenhange stehen, exakt protokolliert und registriert und sodann methodisch bearbeitet. Hierbei kommen natürlich vor allem die am vielseitigsten ableitbaren und am unmittelbarsten zu deutenden sprachlichen Mitteilungen seitens der Versuchsperson, weiterhin aber auch alle psychologisch symptomatischen „Reaktionen" überhaupt in Betracht Da nunmehr durch die Festhaltung möglichst konstanter Bedingungen eine beliebige Wiederholung ähnlicher Bewußtseinsvorgänge möglich wird, verringern sich hierbei zunächst einmal die Schwierigkeiten, die deren viel beklagte Flüchtigkeit einer vollständigen und genauen Analyse entgegenstellt. Außerdem gestattet aber nun die methodische und insbesondere graduelle Variation aller greifbaren Teilbedingungen eine immer feinere Unterscheidung der hierbei ausgelösten Inhalte und der von ihnen weiterhin abhängigen inneren und äußeren Prozesse, die bei einer gewissen Zweckmäßigkeit analoger Vorgänge des alltäglichen Lebens in theoretischer oder praktischer Hinsicht auch als „Leistungen" bezeichnet zu werden pflegen, wie z. B. eine Beobachtung dargebotener Reize, ein Merkprozeß, eine nach

1) Alle Namen dieser speziellen „Erfahrung", wie „innere", „unmittelbare" usw. sind natürlich immer nur durch ihren besonderen Gegenstand, das „Bewußtsein" in jenem kollektiven Sinne (s. S. 2), zu definieren.

Richtung, Kraft und Zeitpunkt bestimmte Willkürbewegung und ähnliches. Somit gewinnt also auch die psychologische Analyse erst durch das Experiment die „Tafel der Grade“, die Bacon seinerzeit allen induktiven Wissenschaften empfohlen hatte, damit sie überhaupt gesetzmäßige Beziehungen ableiten könnten.

Mit dieser Einführung des Experimentes ist aber natürlich nicht etwa der eigentliche Gegenstand unserer Wissenschaft verschoben, als ob nunmehr, wie manche gemeint haben, nur noch die objektiv greifbare Reaktion der V.-P. zu studieren und der Rekurs auf ihre der Gesamtheit unzugängliche und ihr selbst großenteils unklare Innenwelt umgangen sei. Es wird vielmehr die Selbstbeobachtung hierdurch erst recht befähigt, allgemeingültige Begriffe von einzelnen Inhalten des Bewußtseins, sowie von ihren Verbindungsweisen und Verlaufsgesetzen abzuleiten. Denn zunächst verleihen schon die allgemein kontrollierbaren Bedingungen der Entstehung und Entwicklung eines bestimmten Bewußtseinsbestandes dem individuellen unmittelbaren Erleben selbst eine Art von Objektivität, weil ja nun auch in jedem anderen Individuum bei seinem ähnlichen psychophysischen Mechanismus durch entsprechende Versuchsanordnungen Erlebnisse herbeigeführt werden können, die wenigstens in gewissen allgemeinen Zügen, häufig aber auch in spezielleren Eigentümlichkeiten mit denen der anderen V.-P. übereinstimmen, so daß sich ein unbegrenztes Erfahrungsgebiet für gemeinsame wissenschaftliche Arbeit eröffnet.

Wie aber der Gegenstand der Selbstbeobachtung hierbei im Mittelpunkte des Interesses bleibt, so hat auch eine von ihr getragene Selbstkontrolle der V.-P. den Kreis der künstlich gesetzten Bedingungen eines jeden psychologischen Experimentes erst noch in seinem häufig einflußreichsten Teile zu vervollständigen. Die Beteiligung der V.-P. ist also hier nirgends mit derjenigen eines passiven oder gar widerstrebenden Versuchstieres in vielen physiologischen Experimenten zu vergleichen. Ihre aktive Unterordnung unter eine objektive, sprachlich fixierte Verabredung vermag nicht nur die äußere Haltung des Körpers im ganzen und der einzelnen Sinnesorgane im besonderen mit einer Präzision zu regulieren, die durch ausschließliche Verwendung äußerer Zwangsmittel niemals erreichbar wäre, sondern verleiht vor allem auch der inneren Einstellung des Bewußtseins eine besondere Eindeutigkeit, soweit diese eben überhaupt willkürlich zu beeinflussen ist. Daher darf also bei keiner Versuchsanordnung eine „Instruktion“ über das äußere und innere Verhalten fehlen, wenn sie auch bisweilen aus besonderen Gründen, falls etwa ausdrücklich die freie Weiterentwicklung von einer bestimmten Ausgangslage aus beobachtet werden soll, relativ allgemein gehalten sein kann. Am deutlichsten tritt diese Willkürtätigkeit der V.-P. als entscheidende Versuchsbedingung natürlich da vor Augen, wo sie als Impuls zu einer äußeren Bewegungsleistung unmittelbar auf einen objektiv wahrnehmbaren Effekt hinwirkt, der hierbei psychologisch gedeutet werden soll, also bei sog. „Reaktionsversuchen“. Indessen kommt schon bei diesen Versuchen, bei denen z. B. eine leichte Handbewegung zeitlich möglichst unmittelbar einem verabredeten Signal nachfolgen oder eine eigentliche Kraftleistung freier oder gebundener vollzogen werden soll, für eine eindeutige experimentelle Bestimmung des Erlebnisses der äußeren Willenshandlung selbst das ganze innere Verhalten der V.-P. in der Vorbereitungszeit sehr wesentlich in Betracht, das alle Stufen von der ersten emotionalen Entstehung der Willensregung bis zur entschlossenen Bereitschaft für einen bestimmt vorausgesehenen Augenblick der Tat durchlaufen kann. Betrachtet man aber die gesamte Fülle der Möglichkeiten willkürlicher innerlicher Einstellungen der V.-P. überhaupt, so treten solche Einflüsse natürlich in allen Bewußtseinserlebnissen hervor, also insbesondere auch in den rein intellektuellen Leistungen der einfachen Beobachtung gegebener Reize, des Gedächtnisses, des Denkens usw., sowie auch in dem genießenden und wertenden Verhalten. Ist ja doch das Bewußtsein nicht einmal in den direkten Sinneswahrnehmungen gegenwärtiger äußerer Objekte einfach ein passiver Durchgangspunkt der Reizeinflüsse. Das unmittelbar erlebte Merkmal der psychischen Wirkungsfähigkeit der Inhalte, ihr bereits S. 18f. genannter Bewußtseinsgrad, dessen höchstes Stadium als (fertige) Apperzeption bezeichnet werden kann, hängt vielmehr jederzeit von einer bewußten inneren Zuwendung, der sog. „Apperzeptionstätigkeit“ ab, die von mehr oder weniger deutlichen Wertgefühlen, dem „Interesse“, vermittelt ist. Natürlich kann diese Tätigkeit auch triebartig, unwillkürlich einsetzen, so daß man bei der Anordnung sorgfältig auf die Bedingungen zu achten hat, die vermutlich in dieser Richtung wirken; ja gewisse „auffällige“ Qualitäten und Intensitäten einzelner Elemente oder Kombinationen von solchen, z. B. Kontraste, drängen sich auch ohne merkliche Vermittlung eines eigenen Tätigkeitserlebnisses geradezu „von selbst“ auf. Für die experimentelle Analyse behält aber natürlich gerade die andere Möglichkeit einer willkürlichen Beeinflussung des Klarheitsreliefs der Bewußtseinsinhalte durch die willkürliche Apperzeptionstätigkeit die größte Wichtigkeit. Sie bedeutet die direkteste künstliche Beeinflussung des Bewußtseinszustandes selbst, gemäß einer bestimmten Verabredung. Man kann sie deshalb auch, unter Verwendung eines historischen Begriffes, geradezu als „innere“ Willenstätigkeit bezeichnen, wenn sie auch in ihren verschiedenen Formen zahlreiche Impulskomponenten „äußerer“ Willenshandlungen, insbesondere Haltungen und Bewegungen der Sinnesorgane, vor allem der Augen, einschließt.

4. Die Willkürtätigkeit der Versuchsperson als innere Hauptbedingung aller psychologischen Versuche.

a) Die Apperzeptionstätigkeit.

Es dürfte wohl gerade vom methodischen Standpunkte aus wünschenswert erscheinen, diese „innere“ Seite jedes psychologischen Experimentes zunächst durch eine kurze Betrachtung einiger wichtigster Hauptformen der Apperzeptionstätigkeit noch etwas näher zu beleuchten. Hierbei darf man sich unbesorgt an die vorwissenschaftlichen Begriffsbildungen unserer Muttersprache halten, welche die verschiedenen Apperzeptionsformen einfach nach den Eigenschaften und Entstehungsweisen der zu klärenden Inhalte unterscheidet. Sie sind auch der V.-P. bereits bei ihrem Eintritt in das Laboratorium bekannt und der gesunde, gebildete Erwachsene bringt zu ihrer Beherrschung jederzeit ein bestimmtes Maß natürlicher Geschicklichkeit, aber auch Übungsfähigkeit an die Versuche heran. Am geläufigsten sind uns die Vorgänge der sog. Aufmerksamkeit, die mir schon in dem volkstümlichen Sprachgebrauch das spezifische Apperzeptionserlebnis der inneren Zuwendung zu gegenwärtig unmittelbar wahrnehmbaren Gegenständen zu bedeuten scheint. Man sollte daher von der wissenschaftlichen Verallgemeinerung dieses Begriffes, die ihn geradezu mit der Apperzeptionstätigkeit überhaupt gleichbedeutend sein läßt, wieder zurückkommen. Denn wir brauchen jedenfalls einen besonderen Terminus für die natürlichen Einheiten der auf die Klärung der direkten Sinneseindrücke gegenwärtiger Reize ausgehenden Willenshandlungen, die von dem Interesse für die jeweils gerade wirkliche Umgebung getragen sind und je nach dem Sinnesgebiet wiederum verschiedene Komponenten einschließen können. Da diese „Aufmerksamkeit" in dem engeren volkstümlichen Sinne auch für die Merkfähigkeit und die Auslösung einschlägiger Assoziationen, die der geistigen Verarbeitung dienen, wesentlich mit entscheidet, so bildet sie natürlich auch die wichtigste Komponente aller „Beobachtung"[1]). Weil nun jedes psychologische Experiment äußere Sinneswahrnehmungen, sei es um ihrer selbst willen, sei es als Grundlage für höhere intellektuelle oder emotionale Prozesse einschließt, so ist keines methodisch eindeutig fixiert, solange nicht die Elemente, Merkmale und sonstigen Beziehungen bestimmt sind, auf welche die Aufmerksamkeit hierbei eingestellt ist oder sein soll.

Bei Versuchen über das Gedächtnis oder über Vorstellungsassoziationen überhaupt ergibt sich ferner ganz von selbst eine entsprechende Anspannung der Impulskomplexe des „Nachdenkens" oder „Sich Besinnens". Dabei können vor allem auch schon die Versuche über einfache Wiedererkennung von Reizobjekten durch die aktive Regulierung der Erinnerung an bestimmte Gruppen der primären Reize, die bereits im ganzen sicher erinnerlich sind, noch exakter gestaltet werden, als es bisweilen bei völliger Freigabe dieses Faktors der Fall war.

Auch das „Denken" in dem ganz allgemeinen Sinne einer großenteils reproduktiven Vergegenwärtigung irgendwelcher begrifflich fixierter Gegenstände wird sich einer immer exakteren experimentellen Analyse zugänglich erweisen und hiermit in unseren medizinischen Grenzgebieten u. a. auch der Psychopathologie wertvolle Methoden an die Hand geben können, wenn man nicht einfach einen individuell beliebig variablen Zustand der Begriffswelt

1) Über diese keineswegs nur terminologische Vorfrage vgl. „Bewußtseinsphänomene", S. 42 f. Auf Parallelbetrachtungen hinsichtlich anderer Sprachen kann natürlich in diesem Zusammenhange nicht eingegangen werden. Daß man ferner ganz populär auch von einer Aufmerksamkeit auf unser jeweiliges Bewußtsein sprechen kann, auch wenn es augenblicklich einmal vorwiegend mit reproduktiven Inhalten erfüllt sein mag, z. B. bei der „Aufmerksamkeit auf unsere Phantasietätigkeit", spricht keinesfalls gegen die sprachliche Korrektheit der engeren Terminologie. Denn hierbei hebt man, ebenso wie bei der systematischen Selbstbeobachtung, gerade das jeweils gegenwärtig unmittelbar Erlebte als einen besonderen Gegenstand der Betrachtung heraus, weshalb man auch diesen Vorgang als innere „Wahrnehmung" bezeichnete, während man bei der Versenkung in die erinnerten oder in der Phantasie vergegenwärtigten Gegenstände, insbesondere also auch in solche psychologischer Natur, wie z. B. frühere Gefühle u. dgl., niemals von „aufmerksamer" Erinnerung usw. spricht.

aus dem alltäglichen Leben aufgreift, sondern die Denkprozesse sich an einem experimentell gewonnenen Vorstellungsmaterial vollziehen läßt und ihnen dadurch eine möglichst genau kontrollierbare Basis verleiht. Natürlich müßte dieser auch die nötige Breite zur Entwicklung der vollen Eigenart dieser höheren geistigen Prozesse beim normalen Erwachsenen verschafft werden, indem man bei der Aufnahme des Stoffes für einen genügenden Reichtum an inhaltlichen Beziehungen sorgt, welche die wichtigsten Verlaufsformen der Begriffs-, Urteils- und Schlußbildung qualitativ und quantitativ zu analysieren gestatten.

Durch geeigneten Anschluß an äußere Sinneseindrücke hat man schließlich auch die willkürliche Apperzeptionstätigkeit der Phantasie mit Erfolg in den Dienst des psychologischen Experimentes gestellt, wenn auch zunächst nur als willkürliche Ergänzung der Auffassung wahrgenommener Objekte durch Bestandteile, welche die V.-P. nach bestimmten Instruktionen in ihrer bloßen Vorstellung mit hinreichender Lebhaftigkeit und Frische hervorrief.

b) Die motorische Bereitschaft und die willkürliche Begünstigung emotionaler Erregungszustände überhaupt.

Besonders natürlich und vollkommen bleibt aber die schon oben zuerst genannte Selbstkontrolle der motorischen „Bereitschaft" zu äußeren Willenshandlungen, so daß sie in den Experimenten mit Willkürreaktionen auf ein gegebenes Signal neben der Aufmerksamkeit auf den Reiz eines der wichtigsten Hilfsmittel zur „künstlichen" Regulierung der Versuchsbedingungen darstellt. Sie ist von der Auslösung des Impulses selbst im ganzen ebenso zu unterscheiden, wie von einem teilweisen Vollzug einzelner, der wirklichen Tat zugehöriger Muskelspannungen, die bei einer „ungeduldigen", keineswegs vorteilhaften Verfassung die bloße Bereitschaft bisweilen vorübergehend ablösen können. Doch schließt natürlich auch die günstigste entschlossene Vorbereitung außer der äußerlich nicht besonders repräsentierten Zielbewußtheit eine charakteristische Haltung als Symptom ein, welches die wirkliche Tat mehr oder weniger eindeutig voraussehen läßt. Unmittelbar vor dem von der V.-P. beabsichtigten Zeitpunkt der Tat löst aber dann diese Bereitschaft bisweilen eher eine schwache oder vorübergehende Innervation der Antagonisten ein. (Selbstverständlich können aber dann auch beliebige weniger günstige und natürliche Einstellungen vom Reagenten im Vorbereitungsstadium verlangt und willkürlich durchgeführt werden). Da aber nun bei dieser motorischen Bereitschaft die V.-P. in dem vorbereiteten Impuls ihr letztes Ziel vor sich hat, wodurch zugleich der ganze Komplex der hinzugehörigen elementaren Impulse in entscheidender Weise bestimmt wird, so wollen wir diesen Zustand so wenig wie die wirkliche Auslösung des vorgeschriebenen Impulses um seiner selbst willen als „Apperzeptionstätigkeit" bezeichnen, unter der wir eben nur jenen „inneren Willen" verstehen, der letzten Endes auf die möglichst vollständige und klare Vergegenwärtigung eines Inhaltes abzielt. Wir werden vielmehr die „äußere Willenshandlung" der „Apperzeptionstätigkeit" als koordinierten Begriff an die Seite stellen.

Endlich dürften sich wohl auch noch manche Widersprüche in den verschiedenen Beobachtungen über die teilweise unwillkürlichen und reflektorischen Äußerungen der mehr passiven Gefühle der Lust und Unlust und der allgemeinen emotionalen Erregungszustände überhaupt lösen, wenn noch mehr als bisher von der ebenfalls teilweise willkürlichen Regulierung der für die Äußerung entscheidenden Erregungszustände Gebrauch gemacht wird. Diese unterscheidet sich natürlich von der Hineinversetzung in eine gefühlsbetonte Situation in der bloßen Phantasievorstellung, die als sogen. „Reproduktionsmethode“ eine viel größere Mannigfaltigkeit der Gemütsbewegungen experimentell erzeugen läßt, als sie durch die einfache Hinnahme äußerer Sinneseindrücke herbeigeführt werden kann. Sie bedeutet eine besondere impulsive Komponente der genießenden, bezw. überhaupt bewertenden Versenkung in den gefühlserregenden Bestand mit allen direkt hinzugehörigen Nebenvorstellungen, die bei jener Phantasievorstellung der Reproduktionsmethode an sich noch nicht dabei zu sein braucht und andererseits, wenn sie hinzutritt, auch schon das Erlebnis des einfachen sinnlichen Gefühles viel tiefer und ausdrucksvoller zu gestalten vermag. Natürlich darf diese impulsive Tätigkeit des Genießens nicht etwa mit einer bloßen Aufmerksamkeit auf die Gefühle als fertig gegebener Bewußtseinsinhalte verwechselt werden, die als Akt der psychologischen Reflexion mit der primären Entwicklung der Gemütserregung eher in Konkurrenz geraten kann.

c) Die experimentelle Verwertung der apperzeptiven und motorischen Zurückhaltung.

In allen dreien dieser eben genannten Richtungen hat die Willkürtätigkeit der V.-P. die experimentell zu schaffende Situation aber nun auch in negativer Richtung wesentlich zu unterstützen, indem sie störende Nebenmomente, die in der Versuchsanordnung aus irgend welchen technischen Gründen nicht vermieden werden können, wenigstens in ihrer psychologischen Wirksamkeit so viel als möglich herabsetzt. Hierzu ist vor allem die zuerst genannte Apperzeptionstätigkeit berufen, die diese Aufgabe eben nicht nur durch die positive Beachtung der vom Experimentator beabsichtigten Momente, sondern vor allem auch durch eine ausdrückliche Unterlassung der Apperzeption unvermeidlicher Störungen, durch ein aktives „Absehen“ oder eine „Abstraktion“ von ihnen zu lösen vermag. Sie hat diese Forderung natürlich nicht nur bei der Analyse der intellektuellen Prozesse um ihrer selbstwillen zu erfüllen, sondern auch überall dort, wo diese „Abstraktion“ von an sich naheliegenden Wahrnehmungsinhalten oder reproduktiven Elementen erst die ideale, eigentlich gewünschte Vorstellungsgrundlage für Willkürreaktionen oder sonstige emotionale Erregungszustände herauslösen muß. Bei diesen Versuchen tritt aber dann natürlich auch die ausdrückliche Zurückhaltung störender Triebe und Reflexe hinzu, die z. B. bei den Versuchen mit Willkürreaktionen auf ein gegebenes Signal hin erst den richtigen, bis zur Wahrnehmung des Signales sicher beherrschten Grad der motorischen Bereitschaft herzustellen hat. Auch bei Erzeugung eines gewünschten Zustandes des

Gemütes im allgemeinen, z. B. für die Untersuchung der unwillkürlichen Ausdruckssymptome, kann eine negative Leistung der Zurückdrängung aller störenden Spannungen, die bei solchen Versuchen sich anfangs aus der „ungemütlichen" Situation des Laboratoriumsversuches zu ergeben pflegen das „ungezwungene" Verhalten des natürlichen Erlebens ähnlicher Situationen früher und vollständiger herbeiführen, als wenn man sich dieses experimentellen Hilfsmittels überhaupt nicht bewußt wird.

d) Die Einschränkung der experimentellen Verwendung der Willkürtätigkeit der V.-P. durch die objektiven Versuchsbedingungen.

Obgleich man aber nun in jedem psychologischen Experimente die innere und äußere Willkürtätigkeit durch eine, wenn auch vielleicht noch so allgemein und eventuell auch negativ gehaltene Instruktion möglichst eindeutig festzulegen hat, soll man doch von ihr immer nur mit Vorsicht und Sparsamkeit Gebrauch machen. Wenn es sich natürlich speziell darum handelt, die Leistungen dieser Tätigkeiten um ihrer selbst willen zu studieren, gibt es für die Anforderungen an sie keine theoretische Einschränkung. Wo sie aber nur die Mängel der objektiven Klarheit und Deutlichkeit einer zu irgendwelchen psychischen Effekten dargebotenen Reizlage kompensieren oder störende Momente abhalten sollen, wird in ihnen immer zugleich noch eine besondere Modifikation des eigentlich zu untersuchenden Haupteffektes geschaffen, der sich eben nun einmal in dem einen Bewußtsein der V.-P. mit jenen Hilfsimpulsen zugleich abspielt. Im allgemeinen fügt man also hiermit zum mindesten immer noch eine schwächende Konkurrenz hinzu, bisweilen auch eine ebenso unerwünschte Miterregung. Alles, was also die objektiven Versuchsumstände in dieser Hinsicht an innerer Arbeit ersparen lassen, wird man schon von ihnen selbst verlangen müssen. Dies gilt natürlich vor allem für die Untersuchung der Maximalleistung hinsichtlich bestimmter Hauptinhalte, dann aber auch für die Analyse jeglicher Wirkung, die sich an sie als neues Erlebnis anschließt, jedoch bei irgend welcher Konkurrenz selbst da, wo der primäre Inhalt als solcher bei besonderer Apperzeptionstätigkeit noch klar und deutlich genug ausfällt, vielleicht eben nicht mehr zu stande kommen kann. Wo man also z. B. Gesichtseindrücke zur Messung des Umfanges der Neuauffassung (vgl. unten) oder der Reproduktion besonderer, mit ihnen früher assoziierter Inhalte darbietet, wird man alle optischen Wahrnehmungsbedingungen durch passende Größe und Entfernung der Zeichen von der V.-P., durch günstige Beleuchtung usw. so bequem als möglich gestalten, allen störenden Lärm der Umgebung und des Apparates nach Möglichkeit ausschalten u. ä. Auch eine bestimmt vorgeschriebene impulsive Bereitschaft zu motorischen Leistungen kann durch passende Regulierung der Haltung des Reagenten, insbesondere auch durch geeignete Angriffsweise an den zur Aufnahme der Bewegungsleistung bestimmten Apparaten von vorn herein schon objektiv bedeutend erleichtert und gesichert werden, ebenso wie natürlich auch das genießende oder in irgendwelcher sonstiger Richtung emotional erregte Verhalten mit bestimmten Haltungen eher übereinstimmt als mit anderen, da wir uns auch bei jeder Haltung „anders fühlen“. Die Vernachlässigung dieser scheinbar so selbstverständlichen Faktoren, bzw. ihre Verschiedenheit in den einzelnen Untersuchungen dürfte vor allem bei quantitativen Analysen an manchen Widersprüchen mit die Schuld tragen.

Zu den objektiven Faktoren, die in dieser Weise der Willkürleistung als experimenteller Bedingung gegenübergestellt werden können, gehören natürlich, außer den äußeren Reizen selbst, alle psychophysischen Mechanismen, wie Reflexvorgänge, unwillkürliche Triebhandlungen oder Assoziationen, die bei gegebener Reizlage die klare und deutliche Wahrnehmung und die Assimilation der von ihr auszulösenden reproduktiven Elemente mit einer umso geringeren willkürlichen Anstrengung erreichen lassen, je leistungsfähiger die Dispositionen sind. Dabei kann sich die „Anordnung“ in diesem allgemeinsten Sinne entweder geeigneter Assoziationen aus dem alltäglichen Leben bedienen oder solche neu schaffen, wie es oben für die experimentelle Analyse des Denkens empfohlen wurde. Jedenfalls werden die Eigentümlichkeiten dieser Denkprozesse umso reiner und vollständiger hervortreten, je weniger das reproduktive inhaltliche Material später durch eine besondere Willkürtätigkeit des Besinnens ins Bewußtsein gehoben zu werden braucht und je leichter die eigentlich gewünschten Vorstellungen „von selbst“ gegen irgendwelche innere Ablenkungen aufkommen.

5. Die Bedeutung des sogen. unwissentlichen Verfahrens.

In den meisten psychologischen Experimenten über intellektuelle Prozesse als solche sowie über den Verlauf von Willkürbewegungen, die von der Verwirklichung irgend eines verabredeten Tatbestandes abhängig gemacht werden, spielt ferner neben der unmittelbaren Sinneswahrnehmung die Entwicklung eines Erkenntnisprozesses eine wichtige Rolle. Wenn es sich z. B. um die Feststellung des objektiven Reizunterschiedes handelt, der eben erkennbar ist, also um eine sogen. „Schwellenmessung“, wird die Entstehung eines Vergleichsurteiles aus der Wahrnehmung zweier Reize verfolgt. Ebenso läßt sich natürlich auch die Entwicklung komplizierterer Erkenntnisse untersuchen, bei denen die beurteilten Gegenstände sämtlich oder wenigstens teilweise der V.-P. nur noch in der Erinnerung vorschweben. In allen diesen Fällen kann natürlich ein bereits vorhandener Bestand eines subjektiv sicheren Wissens im allgemeinen so wenig durch einen bloßen Willkürakt unmittelbar ausgeschaltet oder auch nur in seiner Sicherheit herabgesetzt werden, wie eine gegenwärtige Sinneswahrnehmung bei offenem Sinnesorgan willkürlich beliebig zu verändern ist. Allerdings gelingt es noch relativ leicht, bestimmten Erwartungen aus einer Reihe mehrerer Möglichkeiten willkürlich mit Erfolg entgegenzutreten, aber doch auch nur so weit, als in dem subjektiven Vorstellungsmaterial noch kein genügender Anhalt für die Bevorzugung der einen oder anderen Eventualität enthalten liegt. Bestimmten Kenntnissen gegenüber könnte jedoch ebenso wie bei der Sinneswahrnehmung selbst mitunter nur eine Hypnotisierung aufkommen, die aber dann natürlich auch im übrigen neue, allgemein störende, anomale Bedingungen einführt, deren Untersuchung eine besondere Aufgabe bildet. Ähnliches gilt natürlich auch für das Wertungserlebnis, das ebenso wie das Wissen in fertigen dispositionellen Beziehungen wurzelt. Die Erfolge der Willkürtätigkeit liegen also zunächst nur im Gebiete der motorischen Veränderungen und der Modifikationen des Bewußtseinsgrades der Vorstellungen. Wo es sich aber um Wirkungen eines bestimmten Wissens und Wertens nach seiner Anregung im Bewußtsein, nicht um dessen Dasein als solches handelt, da kann nun allerdings die Willkürtätigkeit, insbesondere der Apperzeption, durch Abstraktion von dem betreffenden Vorstellungsbestande auch diese Wirkung herabsetzen. So ist z. B. zwischen dem Wahrnehmungsurteil, d. h. der unmittelbaren Beurteilung des Eindruckes,und dem reproduktiv vermittelten Wissen von den objektiven Gegenständen psychologisch scharf zu unterscheiden, wenngleich beide Tatbestände in inniger Wechselwirkung stehen. Wer aber einmal zwischen der Empfindung als solcher und einem bloßen Wissen von den Gegenständen unterscheiden kann und sich außerdem die Möglichkeit der Sinnestäuschung und die Tatsache der Schwelle klar vor Augen hält, für den ist speziell auch die häufige assimilative Rückwirkung dieses Wissens auf die Sinneswahrnehmung in dem Maße vermindert, als er von dessen Inhalt gleichzeitig zu abstrahieren vermag. Er mag aber als V.-P. noch so „objektiv" sein, d. h. die eigentlich zu prüfenden Sinneseindrücke als solche in einem noch so reinen Wahrnehmungsurteil zur Geltung kommen lassen: Dennoch bleibt das meistens doch irgendwie wirksame Wissen auch für ihn ein fühlbarer Widerstand seiner unbefangenen Auffassung. In allen solchen Fällen wird man also hinsichtlich derjenigen Punkte, über die sich ein Urteil im Versuche selbst erst entwickeln soll, wenn irgend möglich, für den ganzen Verlauf der Untersuchung die strengste Unwissenlichkeit für die V.-P. aufrecht erhalten. Soweit als es hierzu erforderlich ist, muß dann natürlich auch die Vereinigung der Tätigkeit des Experimentators und des Beobachters oder Reagenten in einer Person ausgeschlossen werden.

6. Die zeitliche Einteilung des psychologischen Versuches (Vorbereitung, Hauptleistung, Protokollierung und Erholungspause).

Zu jeder Hauptleistung, die in einem psychologischen Experimente unter möglichst eindeutigen Bedingungen analysiert werden soll, bedarf nun die Versuchsperson, abgesehen von einer passenden körperlichen und geistigen Verfassung im allgemeinen zur erfolgreichen Wirksamkeit jener speziellen Apperzeptions- und Bereitschaftsimpulse, die an der Herstellung der Ausgangslage immer wieder von neuem beteiligt sind, einer angemessenen Vorbereitungszeit. Wo die instruktionsmäßige Erreichung der Ausgangslage eine besonders schwierige ist und daher je nach der augenblicklichen Verfassung gewissermaßen einen verschieden weiten und kräftigen Anlauf unter steter Selbstkontrolle der V.-P. erfordert, ist es dann häufig vorteilhaft, wenigstens den Zeitpunkt für den Eintritt der Reize, an die sich die Hauptleistung anschließen soll, durch geeignete mechanische Vorrichtungen der V.-P. selbst zu überlassen (Selbstauslösung des Reizes). Doch kann es sich natürlich in anderen Versuchen auch darum handeln, in objektiv bestimmten Zeitpunkten den Grad der jeweiligen Anpassung an eine gegebene Vorschrift zu untersuchen. In diesen

Fällen schickt man daher ebenso, wie bei geringeren Anforderungen an die Vorbereitung, einfach ein Vorsignal, womöglich in einem der V.-P. bequemen und geläufigen Intervalle voraus, das für gewöhnlich $1\,{}^1\!/_2$ bis 2 sec. beträgt und bei einer Wiederholung entsprechender Versuche konstant bleibt. Natürlich hat der Experimentator auch hinsichtlich der objektiven Versuchsbedingungen diese Zeit unmittelbar vor der Hauptleistung am meisten zur Herstellung einer eindeutig bestimmten Bewußtseinslage[1]) auszunutzen. Die Nachwirkungen unmittelbar vorhergehender Sinneseindrücke sind in den ersten Augenblicken so unverhältnismäßig viel stärker als später, daß eine sorgfältig nach jeder Richtung kontrollierte Vorbereitungszeit von relativ kurzer Zeit schon sehr viel zur generellen Bedeutung der Versuchsergebnisse beizutragen vermag.

Ebenso wichtig wie die Vorbereitungszeit ist dann natürlich die der Hauptleistung unmittelbar nachfolgende Periode, wenn diese zur Registrierung verwendet wird, soweit also nicht einfach, wie bei willkürlichen und unwillkürlichen Reaktionen, eine gleichzeitige mechanische Registrierung der „Leistungen" des psychophysischen Organismus im rein physikalischen Sinne stattgefunden hat. Dabei handelt es sich im allgemeinen um eine sprachliche oder schriftliche Mitteilung seitens der V.-P. Diese kann zunächst eine noch vollständig auf die dargebotenen Reize oder sonstigen objektiven Umstände gerichtete Beschreibung sein, wie z. B. bei Auffassungs- oder Gedächtnisleistungen. Sie kann sich aber auch bereits als eigentliche Selbstbeobachtung auf das in der Hauptleistung unmittelbar vorhergehende Bewußtseinserlebnis als solches richten, falls dieses nicht etwa schon selbst eine psychologische Reflexion einschloß. Denn die entscheidenden Deutungen aller Leistungen im ganzen können ja immer nur der systematischen Selbstbeobachtung der V.-P., bzw. deren sprachlicher Mitteilung entnommen werden. Jedenfalls müssen sowohl die vorbereitenden Apperzeptions- und Bereitschaftsleistungen als auch diese nachträglichen Mitteilungen als integrierende Bestandteile eines jeden vollständigen psychologischen Experimentes bezeichnet werden, so daß man sie höchstens von der Fragestellung des Versuches aus als „Nebenleistungen" neben dem eigentlich zu analysierenden Erlebnis selbst bezeichnen kann.

Um nun die bereits oben als wichtig hervorgehobene Wiederholung eines Versuches, die uns unten bei der quantitativen Analyse noch ausführlich beschäftigen wird, unter möglichst vergleichbaren Bedingungen durchzuführen, pflegen auch psychologische Versuche häufig in ganzen Reihen einzelner Experimente angestellt zu werden. Je anstrengender aber die einzelnen Versuchsleistungen sind, um so wichtiger wird dann die Einschiebung einer angemessenen Pause nach jedem Versuche, um durch die Erholung der V.-P. wieder einen annähernd konstanten Ausgangszustand zu sichern. Die speziellen Anstrengungen des Nachdenkens über die früheren Versuche und der sprachlichen Mitteilung in der Pause sind natürlich genau genommen ebenfalls in Rechnung zu ziehen, selbst wenn

1) Dieser wie gewöhnlich dem Worte „Sachlage" analog verwendete Terminus, den man in dieser ganz allgemeinen Bedeutung kaum wird entbehren mögen, ist nicht mit einem ganz speziellen gleichlautenden Begriff von C. Marbe zu verwechseln.

in der Hauptleistung besondere, bei der Mitteilung nicht beteiligte Tätigkeiten in Frage kommen. Jedenfalls könnte der Idealfall, bei welchem die verlorenen Kräfte durch die Pause so weit ersetzt werden, daß die zunehmende Übung die etwaigen Ermüdungsreste gerade kompensiert, also die sog. „Gleichgewichtspause" nach Kraepelin, wieder nur dadurch einigermaßen verwirklicht werden, daß die Selbstkontrolle seitens der V.-P. und die objektive Betrachtung ihrer tatsächlichen Leistungen in den späteren Versuchen seitens des Experimentators gleichmäßig zu Rate gezogen werden.

7. Haupt- und Nebenleistungen, Reiz- und Reaktionsmethoden.

Da der jeweilige Bewußtseinsbestand eine Fülle teils koordinierter, teils über- und untergeordneter inhaltlicher Momente in sich schließt, kann natürlich auch die Fragestellung des Experimentes ein solches System aus koordinierten Leistungen oder aus Haupt- und Nebenleistungen, bzw. aus mehreren gleichzeitigen Erlebnissen von verschiedenen Bewußtseinsgraden überhaupt umfassen, wenn sie sich auf die unmittelbare Feststellung eines konkreten Bestandes als solchen bezieht. Es sind etwa Objekte mit mehreren unterschiedlichen Elementen und Merkmalen dargeboten, die in verschiedenen Hinsichten aufgefaßt oder gemerkt werden können, oder es soll eine komplizierte Bewegungskoordination ausgeführt werden und ähnliches. In solchen Fällen kann natürlich eine Vorschrift über die Abstufungen der apperzeptiven Betonung oder der impulsiven Bereitschaft in den verschiedenen Richtungen zur Eindeutigkeit einer bestimmten Einstellung hinzutreten. Offenbar wird aber dadurch nicht nur die Hauptleistung, sondern auch die Vorbereitung und vor allem auch die nachträgliche Periode der Wiedergabe des Geleisteten oder Erlebten entsprechend belastet werden. Auf alle Fälle wird es unerläßlich, die verschiedenen Seiten der Leistung durch besondere experimentelle Unterstützungen auch während der ganzen Zeit der Mitteilung fortgesetzt vor Augen zu halten, weil in der relativ langen Zeitdauer der dritten Periode, die durch die diskursive Form der Wiedergabe unvermeidlich wird, die Nebenmomente trotz des tatsächlichen Erlebens relativ um so leichter vergessen werden, je dunkler sie primär bewußt waren und je weiter sie naturgemäß in der Aufeinanderfolge der einzelnen Mitteilungen zurückgeschoben werden. Hierauf werden wir vor allem bei der Vergleichsmethode ausführlich zurückkommen.

Eine besonders natürliche Verbindung mehrerer Leistungen ist ihre sukzessive Anordnung in einer einheitlichen, wenn auch zeitlich ausgedehnten Gesamtleistung, die beim Beginn des Versuches der V.-P. als einheitliches Ziel vorschwebt. Unter diesen Erlebnissen aber ist wiederum die spezielle Verbindung einer Sinneswahrnehmung mit einem Bewegungsimpulse als eine durch den Reiz motivierte Willkürhandlung am geläufigsten, wie sie von Donders und S. Exner[1]) als „Reaktion" (im engeren Sinne) bezeichnet wurde, wenn sich diese Bewegung außerdem zeitlich möglichst unmittelbar an das Reizsignal anschließen soll. Wenn man will, kann man

1) Vgl. unten IV. Abschnitt.

aber auch schon jene organische Verbindung der Vorbereitungstätigkeit mit der Hauptleistung, und dann vor allem auch den Übergang zu der nachträglichen Wiedergabe, deren sofortige Notwendigkeit ja der V.-P. von Anfang an vorschwebt, als eine solche Kombination von sukzessiven Haupt- und Nebenleistungen von teils intellektuellem, teils mehr motorischem Charakter, ähnlich wie bei jenen Reaktionsversuchen, auffassen. Nur die Registrierung von ganz unbewußt reflektorisch ausgelösten Bewegungen könnte, wenigstens vom psychologischen Standpunkt aus, nicht mehr als Einbeziehung einer „Nebenleistung" aufgefaßt werden.

Dennoch wird man im Interesse einer naturgemäßen, ungezwungenen Einteilung der psychologischen Experimentalmethode gut daran tun, diejenigen Versuche, in denen die motorische Äußerung der sprachlichen oder schriftlichen Mitteilung als solche nicht besonders studiert werden soll, sondern nur das Mittel zum Zweck einer möglichst getreuen, dem Experimentator leicht verständlichen Rekonstruktion des Bewußtseinsbestandes als solchen ist, von den „Reaktionsmethoden" im weitesten, von W. Wundt[1]) eingeführten Sinne zu unterscheiden, die außer den sog. „Reaktionsversuchen" die ergographische Leistung, sowie alle teilweise unwillkürlichen, ja sogar unbewußt ausgelösten Ausdruckssymptome zu analysieren und psychologisch zu deuten versuchen. Bei diesen kommt es dann andererseits wieder nicht darauf an, ob die analysierte symptomatische Bewegungsäußerung nicht nur vom Bewußtseinszustand überhaupt mehr oder weniger eindeutig abhängt, sondern auch als eine Art „Leistung" bewußt ausgelöst wurde. Jene Versuche aber, bei denen es sich nur um die Beschreibung einer durch eine äußere Reizlage und die sich anschließenden inneren Vorgänge geschaffene Bewußtseinslage handelt, stellt Wundt den „Reaktionsmethoden", als „Reizmethoden" gegenüber. Indessen soll hiermit ausdrücklich nicht etwa gesagt sein, daß es bei den Reaktionsmethoden nicht noch außerdem auch darauf ankomme, Selbstbeobachtungen in der nämlichen Art wie bei der „Reizmethode" zu Protokoll zu geben.

Natürlich kann man auch die sprachliche Mitteilung bei der Reizmethode selbst noch einmal nach Form und Inhalt, insbesondere auch hinsichtlich der Zeit- und Intensitätsverhältnisse, als interessantes Ausdruckssymptom behandeln, um dadurch eine noch vollständigere Parallele in der Anwendung der Reiz- und Reaktionsmethode zu erreichen. Wo jedoch diese Verwertung der Äußerlichkeiten ihrer Darstellungsweise von der V.-P. nicht ausdrücklich erwartet wird, kommen freilich in jenen Hinsichten häufig ganz zufällige Nebenmomente zur Geltung. Sie entspringen insbesondere dem beliebigen Alternieren der Mitteilung mit der Erinnerung an das von ihr unmittelbar Erlebte selbst, das ihr hier ja auch der für den Experimentator allein wichtige Untersuchungsgegenstand zu sein scheint. Sucht man aber durch eine ausdrückliche Aufnahme einer bestimmten Art und Weise der Wiedergabe in die Instruktion ein eindeutiges Material für Rückschlüsse zu erlangen, z. B. durch die Forderung, ein auf die Reize bezogenes Urteil, wie bei einer „Reaktion" im S. Exnerschen Sinne, möglichst sofort zu registrieren, oder lenkt man überhaupt nur das Interesse der V.-P.

1) Psychologische Studien, III, 4. H. 1907.

auf die Verlaufsform der Mitteilung als solcher, so bedeutet dies bereits ganz neue Versuchsbedingungen, die auch das Bewußtsein in der Vorbereitungszeit wesentlich mehr belasten und sodann auch mit der Hauptleistung konkurrieren.

8. Die Einschränkung der Selbstbeobachtungen der Versuchsperson mit dem Fortschritt der Wissenschaft.

Je weiter aber nun die methodische Analyse der generellen Bewußtseinstatsachen auf dieser objektiven, gemeinsamen Arbeitsbasis des Experimentes bereits fortgeschritten ist, um so eher können neue Aufgaben an der Hand bestimmter Apparatanordnungen und Instruktionen ohne eine immer wieder bis in alle Einzelheiten durchgeführte Selbstbeobachtung der V.-P. gelöst werden. Diese wird dadurch geradezu jeglicher weiterer Mitteilungen außer der geforderten Hauptleistung überhoben, so daß sie z. B. bei der Untersuchung der Auffassung objektiver Tatbestände oder irgendwelcher Reaktionen auf solche hin fortgesetzt objektiv gerichtet bleiben darf. Da nun die Selbstbeobachtung in allen nicht auf ihre eigene Analyse gerichteten Untersuchungen eine Nebenleistung als bloßes Mittel zum Zweck darstellt, die bei dem schnellen Verblassen aller dunkler bewußten Inhalte möglichst bald nach oder sogar gleichzeitig mit dem eigentlich zu untersuchenden Bestande zu vollziehen ist, so ist klar, daß man durch jede Einsparung an Spezialinstruktionen, die sich auf irgend welche Selbstbeobachtungen beziehen, das Bewußtsein in jeder der drei genannten Hauptperioden des Versuches selbst wesentlich entlastet[1]). Bei der Aufdringlichkeit, mit der die Instruktionen oder der eigene Vorsatz zu psychologischen Reflexionen wegen ihrer Schwierigkeit und der Langsamkeit der Klärung einschlägiger Beobachtungen die V.-P. auch während der ganzen Zeit nach dem Versuche zu verfolgen pflegen, wird ihre Verminde-

1) Diese Mahnung ist natürlich nicht etwa mit dem einst von Kant, aber auch noch von manchen neueren Psychologen erhobenen Einwande gegen die Leistungsfähigkeit der Selbstbeobachtung überhaupt zu verwechseln. Man hat bekanntlich bisweilen gemeint, daß die Reflexion weder bei gleichzeitigem noch bei nachträglichem Vollzug einen adäquaten Einblick in die wirklichen Erlebnisse verschaffen könne, und zwar bei ersterem nicht, weil hier die Simultankonkurrenz die primäre Entwicklung der zu beobachtenden Prozesse selbst, insbesondere die Gefühle und Willensakte prinzipiell modifiziere, während bei letzterem eben das unkontrollierbare Medium der Erinnerung an sich trügerisch sein könne. Jenes Bedenken beruht aber, soweit es nicht die bereits oben zugestandenen, völlig sekundären Einflüsse betrifft, auf einer veralteten Anschauung von dem Umfange des Bewußtseins, dessen Wichtigkeit für alle methodischen Probleme schon zu Anfang (S. 4) betont wurde. Sein Bereich macht es keineswegs unmöglich, daß in jedem Augenblicke des unmittelbaren Erlebens auch noch ein psychologischer, d. h. auf das Bewußtsein als solches gerichteter Apperzeptionsakt überhaupt nebenhergeht, der die aus der affektvollen Beschäftigung mit beliebigen Gegenständen entspringenden Inhalte begrifflich zu erfassen vermag. Das Mißtrauen gegen die nachträgliche Verarbeitung des Erlebten aber, die in der unmittelbar nachfolgenden Periode sogar noch sehr hohe Bewußtseinsgrade zur Verfügung hat, würde abgesehen von seiner Zurückweisung auf allen anderen wissenschaftlichen Arbeitsgebieten auch durch die fortwährende Bestätigung der aus dieser Erinnerung abgeleiteten Erwartungen durch die neuen Erlebnisse als haltlos erscheinen.

rung oder ihr Wegfall auch den Erholungspausen einen viel gleichartigeren, ungestörteren Verlauf sichern und dadurch auch einen konstanteren Normalzustand am Beginn des neuen Versuches garantieren.

Soweit natürlich die Selbstbeobachtung, bzw. eine überhaupt psychologisch gerichtete Apperzeption notwendig ist, um die in jeder Instruktion unerläßliche Einstellung der willkürlichen inneren und äußeren Impulse nach einem fertigen, in sich klar zu verstehenden Plane richtig vollziehen zu lassen, d. h. also, soweit es die Selbstkontrolle der erforderlichen Versuchsbedingungen erheischt, ist die psychologische Reflexion niemals auszuschließen. Nur bedeutet sie eben hier keine fortgesetzt angestrengte „Beobachtung" zur induktiven Auffindung neuer, bisher der V.-P. unbekannter innerer Tatsachen, sondern ein rein deduktives Verhalten. Je weiter die psychologische Schulung der V.-P. bereits fortgeschritten ist, um so höhere und kompliziertere Anforderungen können daher hinsichtlich dieser psychologisch-deduktiven Beherrschung ihres Bewußtseins, wie schon erwähnt, an sie gestellt werden. Diese Selbstkontrolle ist aber bei genügender Übung der V.-P. in der Rekapitulation gewisser schwieriger Partien der Instruktion unter Umständen sogar schon gegen das Ende der Pause, die immerhin solche Nebenfunktionen oft ganz von selbst übernimmt, abgeschlossen, mindestens aber mit dem Vorbereitungsstadium, so daß weder die Hauptleistung noch die nachfolgende Periode durch irgendwelche Zweifel an der korrekten Durchführung der Instruktion gestört zu werden pflegen. Im übrigen wird dann auch die Verfolgung der Versuchsergebnisse seitens des Experimentators eine stete objektive Kontrolle dafür an die Hand geben, wie weit eine Korrektur des Verhaltens durch eine verbesserte Selbstkontrolle, eventuell durch ein besseres Verständnis und eine klarere Vergegenwärtigung der Instruktion notwendig sind.

Mit diesem Hinweise auf die Vorteile einer zunehmenden Entlastung von Selbstbeobachtungen soll aber natürlich ja nicht etwa einer Vernachlässigung der Mitteilungen das Wort geredet werden, die sich, trotz der prinzipiellen Anerkennung dieses soeben skizzierten Standpunktes, der psychologisch interessierten V.-P. jederzeit ganz von selbst aufdrängen können, ein Zusatz, der sich natürlich erübrigt, wenn der Leiter der Untersuchung selbst V.-P. ist. Nachdem solche introspektive „Entdeckungen", infolge der sonstigen Beschäftigung mit dem Problem, bei einem neuen Erlebnisse — vielleicht gerade wegen seiner Ungestörtheit durch den Verzicht auf die willkürliche Anstrengung besonderer Apperzeptionsimpulse der Selbstbeobachtung — zufällig einmal zur Klarheit gelangt sind, geben sie dann für die weiteren theoretischen Überlegungen oft sogar die besten Grundlagen ab.

Auch hinsichtlich der Individuen, die zu psychologischen Experimenten beizuziehen sind, wird man immer nur bedingte Einschränkungen statuieren dürfen. Im allgemeinen wird man sich natürlich immer an den normalen gebildeten Erwachsenen zu halten haben, der selbst ein psychologisches Interesse an die Versuche heranbringt. Den immer komplizierteren Fragestellungen der fortschreitenden Wissenschaft gegenüber wird aber auch er stets erst eine gewisse Schulung durchmachen müssen, um die Instruktion sinngemäß einhalten und sachgemäße Mitteilungen machen zu können. Unter dieser Voraussetzung sind aber dann oft auch Kinder und andere in ihrer

Auffassungs- und Reaktionsfähigkeit beschränkte Wesen für einzelne Probleme brauchbare Versuchsobjekte, zumal auch hier die Analyse objektiv meßbarer Leistungen immerhin gewisse Kontrollen in sich selbst trägt.

Endlich braucht man natürlich bei einem vorläufigen Überblick über neue Tatsachen nicht sogleich von vorne herein alle diese methodischen Vorschriften bis ins einzelne zu befolgen, wenn man auch für die genauere Untersuchung stets ganz von selbst auf sie zurückkommen wird, da sie im Wesen unseres Gegenstandes begründet sind.

Kapitel 2.

Qualitative und Quantitative Analyse.

9. Eindeutige funktionelle Beziehungen zwischen quantitativen und qualitativen Werten.

Wie schon bei der Einführung des Experimentes (§ 3) gesagt wurde, hat dieses nicht nur die Aufgabe, die einfache Beobachtung und Beschreibung des konkreten psychischen Geschehens, wie es sich im Bewußtsein verschiedener Individuen und zu verschiedenen Zeiten abspielt, durch Schaffung eindeutiger äußerer und innerer Bedingungen gewissermaßen zu dem Range einer experimentellen Naturgeschichte emporzuheben. Es soll vielmehr durch die genannten Vorzüge, genau wie in der Naturwissenschaft, besser als es die gelegentliche Beobachtung vermag, zu einer Induktion genereller Zusammenhänge verhelfen, durch die sich der Bewußtseinsverlauf als ein gesetzmäßiger in den allgemeinen Kausalnexus alles Geschehens überhaupt einordnet. Hierbei ist also zunächst jeder bestimmten Teilbedingung x, y, z usw. eine bestimmte Art der Wirkung w eindeutig zugeordnet. Das Ideal des Einblickes in die Notwendigkeit eines solchen Zusammenhanges bleibt natürlich stets die Erfassung einer eindeutigen mathematischen „Funktion", d. h. einer Abhängigkeitsbeziehung, wie sie in einer Gleichung $w = f(x, y, z..)$ darstellbar ist. Eine solche Formel umfaßt also die bei stetigen Größen mehrfach unendliche Mannigfaltigkeit der Einzelfälle, die sich aus der Abhängigkeit je eines w von allen möglichen Werten der Bedingungen x, y, z ergeben. Aber auch alle Natur- und Geisteswissenschaften streben wenigstens dem Ziele zu, möglichst viele konkrete Ereignisse von der nämlichen Art als Abhängige einer bei ihnen allen analogen Gruppierung gewisser Teilbedingungen zu verstehen, deren untergeordnete, einer bloßen Größenänderung jener x, y, z entsprechende Variationen zu den verschiedenen Spielarten der Wirkung führen. Soweit dann diese Unterarten durch eine quantitative Abstufung gleichwertiger Faktoren gewonnen wurden, ist jederzeit auch Mathematik auf das betreffende Erfahrungsgebiet anwendbar. Denn wenn man auch bei einer rein induktiv festgestellten Gesetzmäßigkeit das Zusammenbestehen der beobachteten Größen der Teilbedingungen und ihrer Folge einfach als letzte Tatsache hinnimmt, d. h. ohne die Abhängigkeit dieser von jenen so einzusehen, wie bei der mathematischen Formel $w = f(x, y, z)$, so lassen sich eben doch bei jeder Reihe gleichartiger Zuordnungen, die durch eine quantitative Abstufung der Bedingungen erlangt wird, die Größenbeziehungen auf eine solche Formel bringen, wenn man nur eine hinreichende Anzahl entscheidender Teilbedingungen als unabhängige Variable des Funktionsausdruckes zuläßt. Indessen ist die Ableitbarkeit von generellen Funktionszusammenhängen überhaupt von der speziellen Voraussetzung einer quantitativen Abstufung der entscheidenden Momente an sich unabhängig. Es genügt hierzu die eindeutige Bestimmbarkeit der Gegenstände und Vorgänge, die in dem begrifflichen System, das hierbei an die Stelle der mathematischen Funktion $w = f(x, y, z)$ tritt, als numerierbare Unterarten der einzelnen Teilbedingungen A, B, C ... und ihrer Folge F vorkommen, so daß sich die in allen Elementen eindeutige Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned} &A_1, B_1, C_1 \rightarrow F_1 \\ &A_2, B_2, C_2 \rightarrow F_2 \text{ usw.} \end{aligned} \qquad [1]$$

feststellen läßt, in welcher der Pfeil den Übergang von den Bedingungen zur Folge andeutet. Auch ließe sich die Darstellung einer solchen Mannigfaltigkeit wenigstens teilweise durch mathematische Hilfsmittel vereinfachen, wenn sich z. B. nur die linke Seite vor dem Pfeile wegen einer durchgängigen quantitativen Abstufung der A, B, C auf einen mathematischen Ausdruck bringen ließe. Hierzu müßte nur eben auch die rechte Seite F_1, F_2 usw. unter einem generellen Symbol F zusammengefaßt werden können, das die einzelnen Fälle durch einen der Größe der x, y, z entsprechenden Index bezeichnen ließe. Als eine solche qualitative, stets eindeutig zugeordnete Variable könnte man z. B. das stets gleichartige Erlebnis der Ebenmerklichkeit eines Unterschiedes zweier gleichartiger Reize A und B in verschiedenen Intensitätsstufen 1, 2, 3 usw. auffassen. Bei strenger Gültigkeit des Weberschen Gesetzes ließe dies dann z. B. die symbolische Darstellung zu:

$$(B = f(A) = A \cdot c) \rightarrow F, \qquad [2]$$

d. h.: „Wenn der eine Reiz B zu dem anderen A in dem konstanten Verhältnis c, also in einer bestimmten mathematischen Abhängigkeitsbeziehung, steht, so tritt beim Vergleich in allen Intensitätsstufen das hierbei überall eindeutig bestimmbare Erlebnis der Ebenmerklichkeit ihres Unterschiedes ein.“ Auch die Abhängigkeit äußerer, physikalisch meßbarer Bewegungseffekte von einer bestimmten Variation des bewußten Impulserlebnisses, die in Reaktionsversuchen feststellbar ist, gäbe zu ähnlichen Formeln Veranlassung, wenn die zugeordneten Bewußtseinsinhalte nur überhaupt eindeutig bestimmbar sind. Nur stände hier natürlich die Bewußtseinsqualität links vor dem Pfeil. Selbstverständlich könnte dann auch eine durch das Erlebnis der motivierten Willenstätigkeit W vermittelte Abhängigkeit des äußeren Bewegungseffektes B von meßbaren Eigentümlichkeiten des Reizsignales R zu der Anwendung des mathemathischen Funktionsausdruckes führen, die schon bei rein qualitativer Eindeutigkeit des vermittelnden W-Erlebnisses, in welchem sich der Reagent einer bestimmten Instruktion freiwillig unterordnet, eine wirklich eindeutig exakte wäre, indem

$$R \rightarrow W \rightarrow B = f(R). \qquad [3]$$

Da nun diese Eindeutigkeit durch die begriffliche Bestimmung nach unterscheidenden Merkmalen oder „Qualitäten“ im allgemeinsten Sinne des

Wortes erfolgt, wie sie natürlich auch den Bewußtseinsinhalten in der Selbstbeobachtung zuteil werden kann, so wird also auch ein rein „qualitatives Verfahren" bei Anwendung des Experimentes niemals bei einer rein historischen Beschreibung stehen zu bleiben brauchen. Der Wert einer solchen ganz oder teilweisen qualitativen Induktion wird aber natürlich in dem Maße erhöht, als die qualitative Abwandlung der Bedingungen und ihrer Folge eine stetige ist. Auch in diesem Falle kann natürlich die Induktion nach Schema [1] nur einzelne Fälle herausgreifen. Nach dem allgemeinen Stetigkeitsprinzip alles Geschehens steht dann jedoch auch für die dazwischenliegenden Stufen der A, B, C eine im rein qualitativen Verfahren freilich nicht näher bestimmbare Zwischenstufe zwischen den nächstbenachbarten F_n und F_{n+1} als deren Folge zu erwarten. Der Wert eines solchen Systems beruht eben darauf, daß die Erfahrung zwar niemals genau die nämliche Situation, aber doch wenigstens ähnliche wiederkehren läßt, die von ihm bei der Möglichkeit einer „qualitativen Interpolation" mit umfaßt werden können. Im Gebiete solcher stetig abstufbaren Qualitäten ist aber jederzeit auch die Größenauffassung oder die Abbildung durch die Zahlenreihe am Platze, und bei eindeutiger experimenteller Fixierbarkeit ihrer Beobachtung kann auch jederzeit eine mehr oder weniger genaue Messung stattfinden. Die natürliche, enge Zusammengehörigkeit der verschiedenen Grade einer konstanten Qualität A, B usw. drängt dann geradezu ganz von selbst dazu, die in verschiedenen Stufen wiederkehrenden Zusammenhänge unter das begriffliche System einer Funktion oder eines „Gesetzes" zusammenzufassen.

10. Die Auffassung der Bewußtseinsinhalte als Größen überhaupt und ihre direkte Meßbarkeit.

Während die Anwendung der reinen Analysis auf die gedanklich konstruierten Gebilde der Geometrie das Vorbild aller Anwendungen der Mathematik auf gegebene Verhältnisse überhaupt bildet, finden die Wissenschaften der realen Tatsachen einschließlich der Psychologie ihrerseits wiederum das Ideal des quantitativen Verfahrens in der physikalischen Messung, die durch die besondere Natur ihrer Gegenstände eine sehr genaue sein kann. Bei jeder Diskussion der Meßbarkeit ist jedoch die allgemeine Vorfrage, ob und wie Größen- und Zahlbegriffe auf die gegebenen Verhältnisse überhaupt anwendbar sind, scharf von der praktisch freilich ebenso wichtigen Spezialfrage zu unterscheiden, welcher Grad der Genauigkeit nun bei der Messung im einzelnen, d. h. bei der Zuordnung bestimmter Zahlen zu bestimmten Gegenständen des Gebietes erreichbar ist. Zur direkten Anwendung des Zahlbegriffes überhaupt ist nur vorausgesetzt, daß die Einheiten des Gegenstandes, die den Einheiten der Maßzahl zugeordnet werden sollen, im gemessenen Ganzen als gleichartige Elemente voneinander unterschieden werden können. Zur beliebigen Genauigkeit dieser direkten Anwendung aber ist dann immer erst noch erforderlich, daß die als Einheiten betrachteten Elemente auch als völlig gleich nachgewiesen werden können, eine Voraussetzung, die offenbar nur für rein gedanklich konstruierte Gegenstände extensiver Natur, also für Geometrie und Kinematik, ex definitione genau zutrifft. Bei den realen physikalischen Raum- und Zeitgrößen dagegen, auf die der Zahlbegriff überhaupt offenbar ebenso direkt angewandt werden kann, bedeutet die wirkliche Konstanz des Maßstabes für alle Teile des Ganzen eine neue, allerdings sehr plausible Annahme. Auch im Gebiete des Bewußtseins haben wir nun zunächst einmal einen weiten Umkreis von Inhalten, auf welche Zahlen als solche ganz sicher ebenso direkt wie auf rein geometrische oder auf die realen physikalischen Extensionen angewandt werden können: eben die extensiven Teile jedes Gesamtbestandes in der unmittelbaren Wahrnehmung und reproduktiven Vorstellung von Raum und Zeit, sowie in jedem Nebeneinander gleichzeitig unterscheidbarer Bewußtseinsinhalte überhaupt, die hierbei als „Einheiten" gezählt werden können. Dabei sind vor allem die Gebilde der optischen Raumwahrnehmung überaus klar und eindeutig, so daß hier auch die tatsächliche Vergleichbarkeit der eventuell als Einheiten markierten Elemente und damit die Genauigkeit der Messung nach reinem Bewußtseinsmaß, dem sogen. „Augenmaß", einen ziemlich hohen Grad erreicht, ein für die Meßbarkeit psychischer Größen als solcher sehr wichtiger Beleg, dessen Bedeutung allerdings über den Versuchen, die extensiven Werte hierbei genetisch auf intensive, stets nur ganz indirekt meßbare Inhalte, wie Muskelempfindungen u. ä. zurückzuführen, bisweilen nicht genügend hervorgetreten ist[1]). Freilich bleibt die Tatsache, daß zu jedem Inhalte eine individuelle „Stelle" des Bewußtseins als integrierendes Moment hinzugehört, also kein einzelner Prozeß als transportabler „Maßstab" dienen kann, eine mit der Distanz variable Schwierigkeit der Durchführung der „Messung" im einzelnen.

Bisweilen ist aber die Vergleichbarkeit der Einheiten bei Gegenständen, auf die jedenfalls Zahlen überhaupt direkt anwendbar sind, höchstens nur noch indirekt gewährleistet. So besteht eine physikalische Masse aus simultanen Quanten; aber die Gleichheit der Einheiten, in die wir sie bei Angabe einer bestimmten Maßzahl zerlegt denken, ist nur indirekt, d. h. durch eine eindeutige Beziehung zu dem heteronomen Kriterium des Gleichgewichtes feststellbar[2]). So ist auch im Bewußtsein eine Abteilung der Inhalte in ungefähr gleichmäßig wirksame Unterbestände möglich, z. B. bei den Einheiten in der Auffassung einer Reihe gleichzeitig dem Auge dargebotener Buchstaben u. ä. Auch hier besteht daher die Möglichkeit, psychologische Konstante im vollsten Sinne des Wortes abzuleiten, wenn die entscheidende Wirkungsfähigkeit dieser einzelnen Wahrnehmungsinhalte eine hinreichend vergleichbare ist: Dies ist z. B. hinsichtlich der speziellen Fähigkeit eines solchen an sich bekannten inhaltlichen Elementes gewährleistet, in einer neuen Kombination mit anderen durch einen einzigen Auffassungsakt soweit gemerkt zu werden, daß jedes wenigstens unmittelbar nach

1) Hiermit ist also nicht etwa die objektive „Richtigkeit" solcher Schätzungen nach dem Augenmaß gemeint, die erst wieder die neuen Beziehungen der Raumwahrnehmungen zu den realen Raumverhältnissen in die Betrachtung einbezieht. Diese wäre nur bei genau proportionaler „Abbildung" der wirklichen Raumverhältnisse durch die unmittelbar erlebten Extensionen ein Beweis für eine analoge Genauigkeit der rein immanenten direkten Meßbarkeit der räumlichen Wahrnehmungsinhalte als solcher.

2) Vgl. v. Kries, Vierteljahresschrift für wissensch. Philosophie 6, S. 257ff.

der Wahrnehmung frei aus dem Gedächtnis wiedergegeben werden kann. Falls eine möglichst gleichmäßige Berücksichtigung aller Elemente stattfindet, können hierbei höchstens 8 Elemente die für jene Wirkung offenbar entscheidende Klarheit und Deutlichkeit erlangen. — Um weiterhin auch die Erlebnisse verschiedener Zeitpunkte möglichst vergleichbar zu gestalten und die Anwendung einer bestimmten Zahl auf die zeitlich extensive Gesamtleistung zu ermöglichen, wird häufig auch der jeweils maximale Grad der Leistung angestrebt, der bei entsprechenden Erholungspausen relativ konstant erreichbar ist.

Bei anderen, sei es natürlichen, sei es künstlichen Einteilungen des simultanen Gesamtbestandes ist dagegen entweder die Vergleichbarkeit der unterschiedenen Elemente nicht so bestimmt garantiert, oder die Abhebung der einzelnen Elemente oder Seiten voneinander nicht deutlich genug, wie z. B. bei dem Versuch der Abzählung aller jeweils aktuellen Bewußtseinsinhalte überhaupt, gleichgültig welcher Klarheitsgrad ihnen zukommt, wobei die Unvollständigkeit aller direkten und indirekten Angaben bezüglich der dunkleren Inhalte bei der praktischen Durchführung dieser Aufgabe hindernd im Wege steht. Unter Schwierigkeiten hinsichtlich der Abgrenzung der Einheiten, leiden auch alle quantitativen Bestimmungen in den klassifikatorischen Versuchen, d. h. die Abzählung der Hauptarten der gleichzeitigen Inhalte, also die Entscheidung darüber, ob man eine prinzipielle Gleichartigkeit aller Inhalte, oder eine Zwei- oder Dreiteilung (Empfindung, Gefühl, Willensakt) annehmen solle.

Auf die Intensitäten sind dagegen schon innerhalb der Physik die Zahlbegriffe nur indirekt anwendbar, da hier z. B. bei der Wärme, der elektrischen Stromstärke u. a. keine Einheiten als unterscheidbare Elemente konkret gegeben sind, wenn wir von hypothetischen Vorstellungen absehen. Ihre Messung beruht also auf der Kausalbeziehung zu Extensions- und Massengrößen, die natürlich bei der Konstanz dieser Zusammenhänge im einzelnen trotzdem eine sehr eindeutige bleibt. Daß wir aber doch die Wärme-, Licht-, Schallintensitäten u. a. selbst als eine Größe auffassen, was in der Vorstellung einer kausalen Verbindung mit wahren Größen an und für sich noch nicht enthalten liegt, beruht, von naheliegenden hypothetischen Vorstellungsweisen abgesehen, wohl vor allem mit auf der unmittelbaren Beziehung, welche die Zahlbegriffe zu den Empfindungen der Intensitäten und stetig abgestuften Qualitäten überhaupt erlangen können. Hiermit soll keineswegs etwa die oft mit Recht zurückgewiesene Auffassung vertreten werden, als ob die einzelnen Empfindungen als solche durch eine Zahl abgebildet werden könnten. Sie bilden ja im unmittelbaren Erleben auch für die genaueste Analyse eine völlig unzerlegbare Einheit. Wenn man also doch ihrer Intensität unmittelbar ein „Mehr" oder „Weniger" zuschreibt, so faßt man sie eben als einen Zustand auf, der sich von einer als Nulllage betrachteten Qualität, also beim Schall von der subjektiven Stille, beim Licht vom Dunkel usw., mehr oder weniger unterscheidet. Wie man aber in dieser Weise zwei Empfindungsänderungen, die von der nämlichen Nulllage aus verschieden weit gehen, unmittelbar vergleichen kann, so gestatten offenbar auch zwei beliebige Empfindungspaare des Kontinuums eine unmittelbare Vergleichung der zwischen ihren Elementen bestehenden Kontraste, so daß schließlich das gesamte Kontinuum der betreffenden Intensitäten von gleicher Qualität als Möglichkeit des Fortschreitens in gleichen Kontrasten und somit als eine Extension von meßbaren Dimensionen erscheint, falls nur die entscheidenden Empfindungen als solche experimentell eindeutig festzulegen sind, wozu freilich auf die von größeren Intensitätsvariationen stets bedrohte Konstanz der Erregbarkeitsverhältnisse besondere Sorgfalt verwendet werden muß. Dies ist die bekannte experimentelle Fragestellung der sogen. Methode der „*übermerklichen Unterschiede*", auf die wir unten zurückkommen.

Man darf sich bei diesem Zugeständnis einer direkten Anwendbarkeit der Zahlbegriffe auf Intensitäts- und Qualitätsreihen von Empfindungen freilich nicht daran stoßen, daß die tatsächliche Auffindung gleicher Kontraste, deren Möglichkeit übrigens schon E. H. *Weber* das Wort redete, also *die konkrete Durchführung einer solchen Messung*, bei vielen Bewußtseinsqualitäten wiederum sehr schwierig ist und überhaupt meist innerhalb einer sehr großen Unsicherheitsregion schwankt. Zur Anwendung des Größenbegriffes überhaupt reicht jedenfalls allein schon die Tatsache aus, daß der eine Kontrast wenigstens bei hinreichend großer Änderung gegenüber dem Vergleichskontrast schließlich immer ein Maß erreicht, wo er sicher als verschieden, und zwar zu groß, bezw. zu klein, befunden wird.

Dagegen muß vorläufig noch dahingestellt bleiben, wie die zahlenmäßige Auswertung eines solchen Kontrastes oder unmittelbar erlebten Verhältnisses zwischen zwei gegebenen Empfindungsinhalten nun im einzelnen möglich wird. Es hat zunächst die Anschauung mancherlei Erfahrungen für sich, daß die im übertragenden Sinne als Extension bezeichnete Variationsmöglichkeit innerhalb eines Empfindungskontinuums zunächst bereits die Grundlage für die Auffindung *absolut* gleicher Empfindungsschritte bilde, wenn auch ihre Erkennung schwieriger sei als diejenige *verhältnismäßig* gleicher Schritte, die dann natürlich in verschiedenen Entfernungen von dem als Nulllage gewählten Zustande eine verschiedene Zahl von *absolut* gleichen in sich schließen würden. Jedenfalls wäre bei dieser Auffassung auch die „Messung" im einzelnen *direkt*, wie bei einem physikalischen *Raum*wert, zu vollziehen. Andererseits könnte man aber die wirkliche Feststellung gleicher und zwar absolut oder verhältnismäßig gleicher „Einheiten" dieser Extension, *deren zahlenmäßige Darstellbarkeit als solche also auch hierbei außer Zweifel bleibt*, wiederum einer rein *indirekten* Bewertung gewisser Schritte als vergleichbarer Einheiten überlassen glauben, also ähnlich, wie bei der ebenfalls unbestreitbar aus Teilen bestehenden physikalischen *Masse*, bei der die Gleichheit der Teileinheiten *ausgewogen* werden muß. Man würde also annehmen können, daß die als gleich bezeichneten Distanzen in verschiedenen Intensitätsstufen doch erst gleiche oder irgendwie ähnliche Nebenvorstellungen und Gefühle auslösen müßten, um als „äquivalent" zu erscheinen. Sicher bliebe aber, wie gesagt, auch hierbei wenigstens so viel, daß diese Auslösung für die V.-P. subjektiv wirklich von der Extension ausgeht, die ihr hierbei schon im allgemeinen als Quantität überhaupt vorschwebt[1]).

1) Somit unterschiede sich auch diese zweite Auffassung immer noch von der bloßen Annahme einer subjektiven Gleichheit der „Zusammengehörigkeit" oder „Kohärenz"

11. Psychologisch vermittelte Funktionsbeziehungen zwischen objektiven Größen als Symptome rein psychologischer Zusammenhänge.

Hiermit sind nun der Bewußtseinsanalyse eine Fülle rein quantitativer Probleme gestellt, nach deren Lösung dann auch die inneren funktionellen Zusammenhänge nicht mehr bloß überhaupt eindeutig, sondern auch in allen bewußten Gliedern quantitativ formuliert werden könnten. Da sich die meisten experimentell untersuchten Prozesse an Empfindungen anschließen, so wird insbesondere zunächst die sogen. „psychophysische" Grundbeziehung im engeren Sinne zwischen den Reizen R und den Empfindungsquantitäten als solchen, z. B. ihrer Intensität E, zu diesem Endziele als eine Funktion

$$E = f(R) \qquad [4]$$

darzustellen sein. Nur wird die psychologische Untersuchung nirgends auf die Lösung dieser quantitativen Spezialfragen zu warten brauchen, da eben eindeutige Funktionszusammenhänge von der Art [2] oder [3] u. ä. auch schon bei der Eindeutigkeit der entscheidenden Inhalte überhaupt abzuleiten sind.

Außerdem kann aber natürlich auch in der Psychologie jede einmal erkannte Funktionsbeziehung einzelner Bewußtseinsquantitäten zu meßbaren Größen irgendwelcher Art wiederum für eine indirekte quantitative Darstellung ihrer rein innerpsychologischen Zusammenhänge benutzt werden, wie ja auch in der Naturwissenschaft alle jene indirekten Messungen physikalischer Intensitäten einfach spezielle Anwendungen von Naturgesetzen sind. Solche indirekte Darstellungen oder „Abbildungen" können offenbar gerade für Gegenstände, die ihrer Natur nach einer direkteren Messung wohl fähig wären, noch außerdem oder vorläufig von Wert sein. Man muß sich dann eben nur bei der Einsetzung indirekter, z. B. physikalischer Maße für die eindeutigen Glieder aus dem Gebiete des bewußten Erlebens stets darüber im klaren bleiben, daß man doch im Grunde genommen nur eine psychologisch vermittelte Größenbeziehung zwischen den indirekten objektiven Maßstäben herstellt. In Wirklichkeit ist es übrigens häufig auch so, daß die äußeren Reizmaße zu den im psychologischen Zusammenhange entscheidenden Empfindungsquantitäten wenigstens eine relativ einfache Proportionalität einhalten, so daß die objektiven Größenbeziehungen wirkliche Bewußtseinsmaße gut veranschaulichen. Da alle Funktionen innerhalb kleiner Grenzen als geradlinig betrachtet werden können, so ist insbesondere die Darstellung psychologischer Zusammenhänge durch Größenbeziehungen zwischen kleinsten Veränderungen, die unter den verschiedenen psychologischen Bedingungen ebenmerklich sind, in mittlerer, meist am besten differenzierter Lage des Kontinuums von einer solchen einfachen Proportionalität begünstigt. Dies gilt zumal dann, wenn nicht die absoluten Werte dieser Unterschiedsschwellen, sondern nur deren Verhältnisse im Endresultat vorkommen. Ist nämlich bei dem einen Zustande des Bewußtseins der Reiz R_2 und bei einem anderen R_3 von R_1 eben unter-

der Glieder der äquivalent erscheinenden Kontraste, bei welcher die Anwendung des Größenbegriffes auf die Extensionen des Kontinuums selbst noch nicht anerkannt wäre (G. E. Müller, Gesichtspunkte und Tatsachen der psychologischen Methodik 1904, S. 237).

scheidbar, so wird das Verhältnis dieser beiden Schwellen $(R_3 - R_1):(R_2 - R_1)$ mit dem entsprechenden Verhältnisse der Empfindungsänderungen $E_3 - E_1$ und $E_2 - E_1$ für alle beliebigen Formen der Funktion [4] $E = f(R)$ annähernd übereinstimmen, da eben bei linearem Verlauf dieser Funktion $f(R)$ zwischen R_1 und R_3 die Gleichung

$$\frac{R_3 - R_1}{R_2 - R_1} = \frac{E_3 - E_1}{E_2 - E_1} \tag{5}$$

von der Form der Funktion [4] unabhängig gilt, so daß dann die gefundenen Größenbeziehungen auch bei analogen psychologischen Zusammenhängen in verschiedenen Intensitäts- und Qualitätsstufen usw. noch besser vergleichbar werden. Als Hauptbeispiel dieser Art werden wir unten die „Messung" des Effektes der Aufmerksamkeitsverteilungen A', A'', A'''... auf verschiedene Stellen x_1, x_2 ... innerhalb eines Wahrnehmungsfeldes, z. B. des Sehfeldes, durch die Schwellen S_1', S_1'' ... S_2', S_2'' ... für eine Intensitätsänderung an je einer dieser Stellen kennen lernen, die nach allgemeinen Erfahrungen tatsächlich von den A abhängen. Ein konstantes Verhältnis $S_1' : S_1'' : S_1''' = S_2' : S_2'' : S_2'''$ usw. als solches, oder spezielle Beziehungen zwischen S_1', S_2', S_3'.. und irgend welchen rein objektiven Größenbeziehungen der x_1, x_2, x_3, z. B. den Distanzen $x_1 - x_p$, $x_2 - x_p$, $x_3 - x_p$ von dem durch die Aufmerksamkeit fixierten Punkte x_p, welche die Funktion

$$S'_x = f(x - x_p)$$

rein empirisch ableiten ließen, wären an sich zunächst rein physikalische Größenbeziehungen. Da aber alle Größen doch nur um ihres psychologischen Effektes willen in diese Beziehung gesetzt werden, so ist diese eben kein Naturgesetz, sondern ein psychologisches Symptom, genau so wie analoge Beziehungen zwischen physikalischen Raum- und Zeitmaßen, die in Reaktionsversuchen als „Ausdruckssymptome" bestimmter Bewußtseinszustände, z. B. von Affektzuständen, erkannt werden und ähnliche Formulierungen zulassen. Da sich nun unsere Bewußtseinsleistungen im praktischen Leben überall auf die für uns gemeinsam gültigen objektiven Verhältnisse beziehen, so ist die exakte Ableitung solcher psychologisch bedingter Funktionszusammenhänge zwischen objektiven Raum-, Zeit- und Energiewerten sogar eine Hauptaufgabe der experimentellen Psychologie, deren Lösung das Bewußtsein des Menschen in seiner natürlichen Wechselwirkung mit der Umgebung kennen lehrt. Die oben zunächst als zurückstellbar bezeichnete quantitative Auswertung der beteiligten Bewußtseinsinhalte selbst ist zwar eine für die psychophysische und innerpsychische Energetik höchst wichtige Aufgabe, aber theoretisch und praktisch von der eben genannten jedenfalls noch genügend abzutrennen.

Hierbei tritt dann natürlich auch wiederum die Selbstbeobachtung als direkte Quelle der neuen Endresultate noch weiter zurück. Nicht nur, daß also die fortschreitende Entwicklung, wie schon oben erwähnt, ihre Beteiligung an bestimmten Gruppen von Forschungen immer mehr einengt, wird das Experiment vielmehr schließlich vielfach überhaupt nur noch auf die Bestimmung solcher psychologisch symptomatischer Beziehungen zwischen objektiven Werten ausgehen, wobei die Selbstbeobachtung also wiederum nur jene deduktive Rolle der Selbstkontrolle der an sich qualitativ bekannten inneren Bedingungen spielt. Diese bleibt natürlich auch hier erst recht unerläßlich. Ebenso fallen aber eben auch die oben genannten Störungen induktiv gerichteter Beobachtungsakte dieser Art bei quantitativen Problemen noch mehr ins Gewicht. Die induktive Selbstbeobachtung erlangt also hiermit vor allem die Rolle einer Aufsuchung der Beziehungen überhaupt, die an sich wertvoll oder zu speziellen quantitativen Untersuchungen geeignet sind. Sie kann daher zunächst in einer Art von „qualitativer“ Voruntersuchung im engeren Sinne verwendet werden, wie man sie auch im Gebiete der exaktesten Funktionsanalysen, in der Physik, der Anordnung quantitativ gerichteter Versuche vorausschicken muß, um die bei einem Endresultat überhaupt mitwirkenden Faktoren in allgemeinen Umrissen kennen zu lernen und von der Erkenntnis des Einfacheren zum Komplizierteren fortzuschreiten. Denn nur dann, wenn diese Faktoren im Experiment sämtlich, aber auch allein berücksichtigt werden, wird dieses wirklich fruchtbar angelegt werden können. Man wird auch in der experimentellen Psychologie diese bereits allgemein anerkannte engere Bedeutung der „rein qualitativen Untersuchung“ wohl gelten lassen, obgleich eben gerade die genaue Analyse der Qualitäten bei ihrer stetigen Abstufung, wie gesagt, ganz von selbst auf die quantitative Behandlung hindrängt. Die quantitativen Resultate geben dann natürlich auch im Hauptversuch eine immer feinere objektive Kontrolle dafür ab, ob die deduktive Anwendung der Selbstbeobachtung zur Selbstkontrolle der inneren Einstellung sicher und instruktionsgemäß vor sich geht, so daß auch jedes ängstliche Schweifen der Selbstkontrolle, das die Leistung sehr herabsetzen kann, durch ein gewisses objektiv bedingtes Selbstvertrauen vermieden wird. Wo sich aber dann trotzdem ganz von selbst der V.-P. neue innere Gesichtspunkte ergeben, führt dies gerade beim quantitativen Experiment meistens einfach zu der Schlußfolgerung, daß die Versuche von diesem neuen Standpunkte aus vielleicht ganz anders anzulegen oder wenigstens mit neuer Instruktion durchzuführen und dann nicht mehr ohne weiteres mit den früheren vergleichbar sind. Dies gilt natürlich auch dann, wenn nur subjektiv neue Beobachtungen eine neue V.-P. erst dem vollen Verständnis der vom Experimentator gegebenen Instruktion näher gebracht haben.

Ebenso, wie aber die qualitative Analyse ihre Aufgabe erst mit der Ableitung allgemeiner Begriffe von Inhalten und Verlaufsformen gelöst hat, gehen wir nun auch bei der quantitativen Analyse über die bloße Feststellung der Einzelheiten des unmittelbaren Erlebnisses hinaus. Denn wir können schließlich nicht die einzelnen objektiv gemessenen Werte als solche, die zu einem bestimmten einzelnen, der Selbstbeobachtung zugänglichen Erlebnis zugeordnet sind, in jene als eigentliche Endresultate einer Untersuchung betrachteten Größenbeziehungen aufnehmen, sondern erst sog. „Mittelwerte“, welche zur Elimination von Zufälligkeiten, die überhaupt oder wenigstens in dem analysierten Zusammenhange gleichgültig sind, aus den einzelnen beobachteten Größen nach gewissen allgemeinen Prinzipien berechnet werden. Auch diese aus den beobachteten Größen berechneten Durchschnitte bleiben aber natürlich rein psychologische Symptome, soweit als es die Beziehungen zwischen den beobachteten Einzelwerten selbst sind. Nur sind sie eben den allgemeineren Zügen der Bewußtseinserlebnisse zugeordnet. Auch stehen sie bisweilen gerade als Mittelwerte zu einzelnen selbständigen Bewußtseinsinhalten, z. B. zu Stimmungen von längerer, über die ganze Reihe der Einzelfälle sich erstreckender Dauer in einer besonderen Beziehung, und am meisten vielleicht zu gewissen rein dispositionellen Momenten. Die theoretischen Gesichtspunkte, nach denen sie als selbständige Tatsachen von psychologischer Bedeutung abgeleitet sind, stimmen mit analogen Prinzipien für die Verarbeitung von Einzelbeobachtungen in beliebigen Wissenschaften realer Tatsachen überein, und sind daher ebenso wie das Experiment als solches ein besonderes methodisches Hilfsmittel, das zur Selbstbeobachtung hinzutreten muß, um die experimentelle Psychologie zum Range einer exakten Wissenschaft zu erheben.

12. Die Resultate der experimentellen Psychologie als Kollektivgegenstände.

Die Notwendigkeit zu einer besonderen rechnerischen Bearbeitung der einzelnen beobachteten Größen, auf die wir am Schlusse des vorigen Paragraphen hingeführt wurden, ergibt sich daraus, daß die Eindeutigkeit der Abhängigkeitsbeziehungen von der Art wie in Formel [1], [2], [3] u. ä. auch in der experimentellen Psychologie allenthalben auf gewisse Grenzen eingeschränkt bleibt, die alle Untersuchungen realer Verhältnisse von den rein mathematischen unterscheiden. Bei den rein gedanklich konstruierten Begriffen der Mathematik, z. B. einem Winkel und einer trigonometrischen Funktion, kann einer gegebenen Maßzahl des einen eine ganz bestimmte Größe des andern völlig eindeutig zugeordnet werden, soweit überhaupt eine streng bewiesene gegenseitige Abhängigkeit besteht. Die psychophysischen Gesetzmäßigkeiten stimmen dagegen mit allen anderen Regeln für den Verlauf des realen, von unserem Denken unabhängigen Geschehens prinzipiell darin überein, daß für die Merkmale der Ereignisse, die nach einer möglichst genauen Einhaltung gewisser Versuchsbedingungen zu erwarten sind, niemals ganz bestimmte Werte (Konstante), sondern nur mehr oder weniger eng begrenzte Spielräume angegeben werden können, innerhalb deren die abhängigen Erscheinungen variieren.

Es muß heutzutage noch immer ausdrücklich betont werden, daß sich die experimentelle Psychologie hinsichtlich dieser Schwankungsbreite, die gerade bei ihren Ergebnissen häufig relativ sehr groß ist, doch immer nur graduell von den übrigen Wissenschaften realer Verhältnisse unterscheidet. Auch die Physik kommt selbst bei den feinsten Beobachtungsmethoden niemals über einen, wenn auch vielfach verschwindend kleinen Spielraum ihrer „Konstanten" hinaus. Dieses Zugeständnis wird aber hier natürlich heute von niemand mehr als Widerspruch gegen die Annahme einer völlig eindeutigen Gesetzmäßigkeit des realen physikalischen Geschehens selbst betrachtet. Denn die wirklichen Vorgänge, zwischen denen ein gesetzmäßiger Zusammenhang anzunehmen ist, lassen eben weder als Ursachen noch als Wirkungen eine so eindeutig erschöpfende Erfassung nach allen für den Effekt entscheidenden Richtungen zu, wie die von uns rein gedanklich abgegrenzten mathematischen Gegenstände. Was wir in der Außenwelt oder in einem konkreten Bewußtseinsbestande unter der begrifflichen Bestimmung einer gewissen Größe, Lage usw. auffassen oder durch experimentelle Eingriffe nach gewissen Vorschriften herstellen, hängt im konkreten Geschehen in jedem Augenblicke sachlich immer noch mit einer unerschöpflichen Reihe von Faktoren zusammen, die sich zwar unserer Kenntnis und Kontrolle entziehen, aber doch den nachfolgenden Gesamteffekt mehr oder weniger wirksam beeinflussen. Hierzu sind selbstverständlich auch die subjektiven Faktoren unserer Sinneswahrnehmung und Reflexion zu rechnen, von denen die schließliche Abbildung aller Vorgänge in unserem erkennenden Bewußtsein abhängig ist. Eine und die nämliche, beliebig scharf abgegrenzte Wirkung darf aber natürlich gerade bei völlig eindeutiger Gesetzmäßigkeit der materiellen Natur und des Bewußtseins von einer neuen Konstellation der Versuchsbedingungen immer nur insoweit erwartet werden, als auch jene unkontrollierbaren Nebenbedingungen der früheren Beobachtung zugleich mit wiederkehren. Je mehr sich diese von Fall zu Fall ändern, eine um so größere Schwankungsbreite wird bei der Ableitung der Konstanten mit in Kauf zu nehmen sein. Daher läßt sich auch die relativ große, wenn auch nicht absolute Präzision vieler physikalischer Bestimmungen einfach aus einer entsprechenden Konstanz jener unkontrollierbaren Nebenumstände erklären, während man schon in der Physiologie der niederen, nach ihrer materiellen Seite betrachteten Lebensvorgänge bei einer viel größeren Schwankungsbreite stehen bleiben muß, da dem Gegenstande dieser Disziplin als solchem ein weit komplizierterer Mechanismus mit vielen einflußreichen, schnell wechselnden und dabei doch schwer greifbaren Nebenfaktoren eigentümlich ist. Selbstverständlich muß dies bei den höchstentwickelten biologischen Prozessen, mit denen sich die Psychologie beschäftigt, noch weiterhin zunehmen, ohne daß man deshalb die Hoffnung auf die Herausschälung der gesetzmäßigen Zusammenhänge bei geeigneter Anordnung der Versuche und methodischer Verarbeitung ihres Rohmateriales aufzugeben braucht. Bringt doch andererseits die im vorigen Kapitel besonders betonte Ausnutzung der Selbstkontrolle und der willkürlichen Selbstbeherrschung von seiten der Versuchsperson auf dieser Stufe auch wiederum neue konstanzerhöhende Momente von größter Wichtigkeit hinzu, weshalb das Maximum des Verzichtes auf eine deduktiv-theoretische Durchdringung des Materiales und der Einschränkung auf eine mehr deskriptive Behandlung bei der experimentellen Psychologie sogar schon wieder überschritten sein dürfte.

Man wird aber nun trotz dieser Schwankungen der Ergebnisse möglichst gleichartiger Versuchsbedingungen doch immerhin eine Art von Allgemeingültigkeit zweiten Grades erlangen, soweit sich wenigstens dieser Spielraum in genereller Form zur Darstellung bringen läßt, aus der zugleich die bereits genannten „Mittelwerte", d. h. gewisse Repräsentanten der realen Verhältnisse, die hierbei untersucht werden sollen, in bestimmt definierbarer Weise zu berechnen sind. Bei der Zufälligkeit jener unkontrollierbaren Nebenbedingungen handelt es sich hierbei offenbar um die bekannten statistischen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung, bzw. ganz allgemein der von Fechner als „Kollektivmaßlehre"[1]) (K.-L.) bezeichneten Theorie der Gegenstände, die „aus unbestimmt vielen, nach Zufall variierenden Exemplaren" bestehen, die „durch einen Art- oder Gattungsbegriff zusammengehalten werden", und die von Fechner eben als „Kollektivgegenstände" (K.-G.) bezeichnet wurden. Da nun im Gebiete der experimentellen Psychologie der Umfang des unvermeidlichen Spielraumes der Resultate, die bei gleichen Bedingungen einen K.-G. bilden, im Verhältnis zu den absoluten Werten sogar besonders groß zu sein pflegt, so muß denn auch den an sich für alle empirischen Wissenschaften wichtigen Prinzipien der Kollektivmaßlehre hier ein ganz besonderer Platz eingeräumt werden. Da außerdem aus dem nämlichen Grunde die Anordnung psychologischer Versuche überall von den Voraussetzungen beherrscht ist, welche diese K.-L. für eine generelle Bedeutung der nach ihren Sätzen abgeleiteten Mittelwerte machen muß, so werden die wichtigsten Gesichtspunkte am besten der Darstellung der experimentellen Methodik vorauszuschicken sein.

1) Im Auftrage der K. S. Gesellschaft der Wissensch. herausgeg. von G. F. Lipps 1897.

II. Hilfssätze aus dem Gebiete der Kollektivmaßlehre.

Kapitel 3.

Allgemeine Voraussetzungen und Aufgaben der Kollektivmaßlehre.

13. Die generelle Bedeutung relativer Häufigkeiten.

1. Die nächstliegende Form, in der auch irgendwie schwankende Prozesse eine eventuell zu verallgemeinernde Darstellung erlangen können, besteht in der ganz konkreten Wiedergabe des gesamten Umfanges dieser Schwankungen innerhalb einer längeren Reihe von Beobachtungen, die natürlich stets als Erfahrungsgrundlage vorhanden sein muß, wenn man über die Konstanz oder Variabilität einer einzelnen, wiederholt für sich betrachteten Erscheinung oder mehrerer, in einer bekannten funktionellen Beziehung gedachter Größen eine Aussage machen soll. Diese empirische Darstellung kann daher auch als die erste Hauptaufgabe der Kollektivmaßlehre betrachtet werden. Hierzu sind die Häufigkeiten Z_1, $Z_2, \dots Z_s$ festzustellen, mit denen jeder unterscheidbare Spezialfall A_1, $A_2 \dots . A_s$ der beobachteten Erscheinung vorkommt.

Die Notwendigkeit dieser „Statistik“ läßt also auch erst die Bedeutung vollständig hervortreten, welche das Experiment durch die Ermöglichung einer beliebigen Wiederholung des nämlichen Falles für die empirischen Wissenschaften besitzt. Zu den schon ausführlich erörterten Vorzügen, daß es die Beobachtung als solche erleichtert und unter objektiv kontrollierbaren und systematisch variierbaren Bedingungen zu arbeiten erlaubt, tritt also hier noch die wesentliche Funktion hinzu, daß es bei seiner Häufung vor allem auch den Einfluß der zufälligen Nebenumstände darstellen läßt, eine Aufgabe, die wiederum gerade im Gebiete der Psychologie infolge der relativen Größe dieser Nebeneinflüsse als besonders wichtig betrachtet werden muß.

2. Nun läßt sich weiterhin selbstverständlich einstweilen wenigstens so viel sagen, daß wenn genau die nämlichen Verlaufsbedingungen wiederkehren würden, auch die nämliche Mannigfaltigkeit der Z_x in n neuen Versuchen zu erwarten wäre. Auch diese Verallgemeinerung bedeutet aber jedenfalls

bereits die induktive Statuierung einer bestimmten „Wahrscheinlichkeit“, wenn diese auch als „relative Häufigkeit“ (r. H.) $z_x = \frac{Z_x}{n}$ von der speziellen Versuchsbedingung der Versuchszahl n noch nicht losgelöst ist. Für diese r. H. gilt natürlich stets die Gleichung

$$\frac{Z_1}{n} + \frac{Z_2}{n} + \ldots . \frac{Z_s}{n} = 1. \qquad [6]$$

Tatsächlich findet man aber eine relative Häufigkeit wenigstens annähernd wieder, wenn man die bereits gewonnene Reihe nur bis zu einem bestimmten Versuche berücksichtigt oder neue Versuche unter gleichen Bedingungen hinzufügt. Für die Verallgemeinerung ist jedenfalls ein nicht zu kleines n von Vorteil, auch wenn sich dieselbe nur auf eine Reihe von ungefähr gleichem n beziehen sollte. Für den Schluß der einen Reihe auf eine beliebige mit irgend einer Versuchszahl n' aber ergibt sich schon aus der Erfahrung, wie in § 20 auch theoretisch noch weiter verständlich werden wird, nicht etwa eine Konstanz der relativen H. (also keine einfache Proportionalität zwischen der absoluten H. Z_x' und n'), sondern höchstens eine Einschränkung ihres Wertes in mehr oder weniger enge Grenzen.

Wie groß aber eine Reihe sein muß, um überhaupt einen genügenden Grad der Verallgemeinerung des K.-G. im ganzen zu gestatten, ja, ob eine solche für ein bestimmtes Gebiet überhaupt möglich ist, läßt sich wiederum nicht a priori angeben, sondern höchstens durch eine Zerlegung längerer Reihen in kleinere, zeitlich ebenfalls zusammenhängende Partien, die Fechner ganz allgemein als „Fraktionierung“[1]) bezeichnet, rein empirisch ausprobieren. Aber auch im besten Falle kann die Allgemeingültigkeit eines K.-G. immer nur eine relative sein und mit der weiteren Verlängerung der Reihe unter Umständen sogar nur verschlechtert werden. Denn die entscheidende Voraussetzung, daß immer eine ganz bestimmte Mannigfaltigkeit an sich unkontrollierbarer, mit den kontrollierbaren al eindeutig zusammenhängender Nebenbedingungen im Spiele bleibe, gilt überall nur in beschränktem Maße. Die Nebenumstände unterliegen vielmehr im ganzen unbekannten Veränderungen, und zwar vor allem wieder auf biologischem, bzw. psychologischem Gebiete. Doch kann dabei die generelle Bedeutung eines K.-G. bei Berücksichtigung analoger Abschnitte des Verlaufes der Ereignisse immer noch eine sehr hohe sein. Jedenfalls sind aber hiermit besondere Probleme bezeichnet, die sich eben auf die Erklärung der Abweichungen zwischen den vermeintlich gleich bedingten K.-G. beziehen und immer nur durch Aufzeigung tatsächlicher Unterschiede der Nebenumstände gelöst werden können.

So sind z. B. alle längeren Reihen psychologischer Versuche mit besonderen geistigen und körperlichen Leistungen die Quelle von Übung und Ermüdung, ferner stehen sie unter dem Einfluß der Tageszeit und ähnlichem. Wenn nun diese Faktoren bei den verglichenen Reihen ganz gleichmäßig wirkten, so könnten die K.-G. wenigstens bei gleicher Versuchszahl n immerhin noch genügend miteinander übereinstimmen. Indessen sind

1) Elemente der Psychophysik, 1, S. 83. Vgl. auch G. E. Müller, a. a. O. S. 77.

sie eben ihrem Wesen nach überaus variable Nebeneinflüsse. Wo es sich also darum handelt, gewisse Prozesse unter möglichst eindeutigen kontrollierbaren Bedingungen zu studieren, gerät die Anforderung der K.-L. an die Ausdehnung der Versuche nach dem sog. Prinzip der „großen Zahlen" (vgl. § 20) mit ihrer allgemeinen Voraussetzung der Eindeutigkeit des Gegenstandes überhaupt in Konflikt. Man wird sich also durch geeignete Fraktionierung der Reihen stets möglichst gleichartige Gesamtdispositionen für die Zusammenstellung der entscheidenden Resultate heraussuchen müssen.

Dennoch werden die Mannigfaltigkeiten der unkontrollierbaren Bedingungen auch bei jenen zeitweise oder fortgesetzt einseitig fortschreitenden Änderungen selbst bisweilen wieder generellere Momente in sich schließen. Diese können dann natürlich nur im ganzen K.-G. vollwertig zutage treten, wie auch hinsichtlich der mathematischen Behandlung nach Bruns[1]) die Einschränkung Fechners auf nur zufällig wechselnde Einzelfälle nicht berechtigt erscheint, und auch die theoretischen Voraussetzungen zur mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung seit Poisson für solche Probleme allgemein genug geworden sind (vgl. § 20). Diese Zusammenfassung erlangt insbesondere dann eine höhere Bedeutung, wenn die systematisch variierten Nebenumstände eine gewisse Periode, z. B. von der Dauer eines ganzen Tages, einhalten, wodurch der äußere Prospekt sogar wiederum demjenigen einer zufälligen Variation ähnlicher wird. In diesem Falle gibt die Konstruktion des K.-G. aus einem ganzen Vielfachen der Periode unter Umständen auch hinsichtlich der unkontrollierbaren Nebenumstände mehr generelle, typische Momente, als die bloße Einzeldarstellung einzelner Fraktionen aus einer bestimmten Phase der Periode, die in sich geringere Schwankungen zeigt. Doch wird man sich auf eine solche, wie schon gesagt, überall da beschränken, wo es nicht auf die Darstellung des Umfanges der unkontrollierbaren Einflüsse als solcher, sondern vielmehr auf ihre Elimination aus den Endresultaten ankommt.

14. Die relative Häufigkeit als mathematische Funktion einer stetigen Größe.

(Die sogen. „Verteilungsfunktion" eines K.-G.)

1. Soeben war einstweilen vorausgesetzt, daß eine ganz bestimmte konkrete Möglichkeit A_x genau in der nämlichen Weise z_x = mal wiederkehre. Die bisherigen Überlegungen gelten aber natürlich auch dann, wenn nur gewisse Hauptmerkmale der Fälle wiederholt zu konstatieren sind, wie man also z. B. bei der Statistik über ein Würfelspiel zur Exemplifizierung des Gesagten nur auf die Zahlenbilder als solche zu achten braucht, gleichgültig, wie die Endlage der Würfel bei gleichem Bildwerte sonst variieren mag. Hierbei können auch die miteinander konkurrierenden Möglichkeiten oder Hauptfälle A_x, wie z. B. die Würfelbilder, beliebig unstetig abgestuft, ja geradezu unter sich unvergleichbar sein, wenn sie nur qualitativ eindeutig definiert sind. In der Psychophysik kommen solche „unstetige K.-G.", bei denen zwischen den einzelnen Möglichkeiten A_x Übergänge überhaupt nicht bestehen oder wenigstens nicht in die Beobachtung einbezogen werden,

1) Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre, 1906, S. 96.

vor allem da vor, wo man die relative Häufigkeit bestimmter Vergleichsurteile feststellt, die trotz der Gleichheit des Unterschiedes d zwischen den wiederholt zum Vergleich dargebotenen Reizen R_1 und R_2 infolge der zufälligen Nebenbedingungen mit je einer bestimmten relat. H. abwechseln, wie z. B. die drei Hauptfälle von Urteilen „gleich", „größer", „kleiner" oder auch die fünf bereits feiner differenzierten Urteilsarten „gleich" „deutlich größer, bezw. kleiner" und „ebenmerklich größer, bezw. kleiner". Hierbei gelten also gleich formulierte Urteile immer als gleiche Fälle überhaupt. Analoges gilt dann auch für die freie, aber dabei von Zufälligkeiten beeinflußte Auswahl aus einer Reihe diskret abgestufter Werte nach irgend welchen Gesichtspunkten.

2. Häufig werden aber die entscheidenden Maße der einzelnen, zufällig wechselnden Resultate A_x stetig abstufbar sein, wie z. B. Raum- und Zeitstrecken, während die Abstufung der einzelnen beobachteten Größen, die natürlich stets nur mit einer bestimmten Genauigkeit gemessen werden, dem zufälligen Lauf der Ereignisse selbst überlassen bleibt. Wenn aber nun z. B. eine V.-P. ein stetig variables Vergleichsobjekt wiederholt nach einer konstanten Norm einzustellen sucht und dabei zufällige Fehler begeht, die einzeln bestimmt werden, oder wiederholt eine Reaktionsbewegung auf ein gegebenes Signal hin möglichst schnell ausführt, wobei die Reaktionszeiten mit einer hinreichend genauen Uhr gemessen werden, so kehren bei einer endlichen Gliederzahl n der Reihe nicht immer genau die nämlichen A_1, A_2 usw. wieder, weder innerhalb der nämlichen, noch auch bei mehreren Reihen. Ja bei größtmöglicher Präzision der sogen. „Urliste", wie Fechner die ursprüngliche Registrierung der beobachteten Einzelfälle bezeichnet, treffen im allgemeinen kaum jemals auch nur zwei Einzelfälle genau zusammen. Denkt man sich also in einem solchen Falle auf einem Maßstabe sämtliche beobachtete Punkte eingetragen, so besteht die zu verallgemeinernde Tatsache hierbei zunächst höchstens darin, daß die sogen. „Verteilung" der Fälle[1]) in den verschiedenen Teilen des Maßstabes je eine besondere „Dichtigkeit" besitzt. Man kann also hier, genau genommen, auch nur soviel sagen, daß je einem ganzen Intervalle i_x des Maßstabes, z. B. den Strecken von $A_1 - \frac{1}{2}i$ bis $A_1 + \frac{1}{2}i$, von $A_1 + \frac{1}{2}i = A_2 - \frac{1}{2}i$ bis $A_2 + \frac{1}{2}i$ usw., oder kurz von $A_x - \frac{i}{2}$ bis $A_x + \frac{i}{2}$, eine bestimmte r. H. zukomme.

Die Tatsache, daß die wirklichen Beobachtungen auf beliebige Stellen des Maßstabes treffen können, nötigt aber nun doch auch andererseits wiederum schon von vorne herein, jedem Punkte des stetig abstufbaren Kontinuums, bezw. jedem kleinsten, bei der gewählten Präzision eben noch meßbaren Intervalle, eine gewisse Wahrscheinlichkeit w zuzuerkennen; d. h. der Wert w ist bei einem stetigen K.-G. auch als eine stetige Funktion der beobachteten Maßzahlen aufzufassen, oder

$$w = f(x), \qquad [7]$$

1) Gelegentlich wird auch „Streuung" in diesem ganz allgemeinen Sinne gebraucht. Bei Bruns ist die „Streuung" (str) jedoch ein ganz spezieller Begriff. A. a. O. S. 119.

wenn wir die beobachteten A-Werte als Abszissen mit x ausgedrückt denken. Sieht man wiederum von ihrer generellen Bedeutung als Wahrscheinlichkeit ab, so kann man mit Bruns einfach von einer stetigen „Verteilungsfunktion“ $\mathfrak{V}$ (x) des betreffenden K.-G. sprechen[1]). Nur die Endlichkeit der Beobachtungsreihen hindert uns daran, jedem kleinsten Intervalle schon rein empirisch eine von 0 oder $\frac{1}{n}$ verschiedene Häufigkeitszahl zuzuordnen, wie es bei Auswahl größerer Intervalle i möglich wird. Nimmt ja doch auch mit der Verkleinerung der Intervalle die Wahrscheinlichkeit dafür, daß gerade ein ganz bestimmtes getroffen werde, bei der großen Fülle aller Möglichkeiten, die durch Berücksichtigung der sämtlichen kleinen Intervalle entstehen, sehr schnell ab; ja bei einer wirklich stetigen Funktion $w = f(x)$ muß sie wegen der Unendlichkeit der Möglichkeiten als $f(x)dx$ die Dimension des Differentiales annehmen, wenn man die Dimension der r. H. dafür, daß ein Fall in einem ganzen Intervalle $i_x = (x + \frac{i}{2}) - (x - \frac{i}{2})$ liege, derjenigen von $\frac{Z_x}{n}$ gleich setzt, wobei Z_x und n endliche Zahlen bedeuten. Diese r. H. w (i_x) für das ganze Intervall läßt sich dann durch das bestimmte Integral über die Funktion zwischen den Grenzen $x + \frac{i}{2}$ und $x - \frac{i}{2}$ ausdrücken:

$$w\,(i_x) = \int_{x-\frac{i}{2}}^{x+\frac{i}{2}} f\,(x)\,d\,x \qquad [8]$$

Hierbei soll aber mit der Annahme einer Stetigkeit der Verteilungsfunktion, welche die Abhängigkeit der r. H. $\frac{Z_x}{n}$ von der Größe x des sogen. „Argumentes“ des K.-G. zum Ausdruck bringt, keineswegs etwa ein neuer realer Faktor eingeführt werden, wie er nach S. 32 mit der Veränderung der Gesamtzahl n der tatsächlichen Einzelbeobachtungen gegeben wäre. Die unendlich vielen Fälle, die der stetige K.-G. f (x) repräsentiert, sollen also dabei zunächst doch wieder nur die Verallgemeinerung eines K.-G. mit einer bestimmten Anzahl n darstellen, die nur eben in jeder Reihe zu n Gliedern aus beliebigen x bestehen darf. Zur rein empirischen Lösung der Frage nach dem Einfluß des n sind also bei stetigem K.-G. erst y verschiedene Funktionen dieser Art aus Reihen mit je n_y Gliedern abzuleiten, deren jede hierbei unendlich viele Fälle repräsentiert, die man sich in zufällige Gruppen von je n_y Gliedern mit einem eindeutigen Ergebnis w $(i_{x,y})$ zerlegbar denkt, von denen je eine die tatsächlich beobachtete ist.

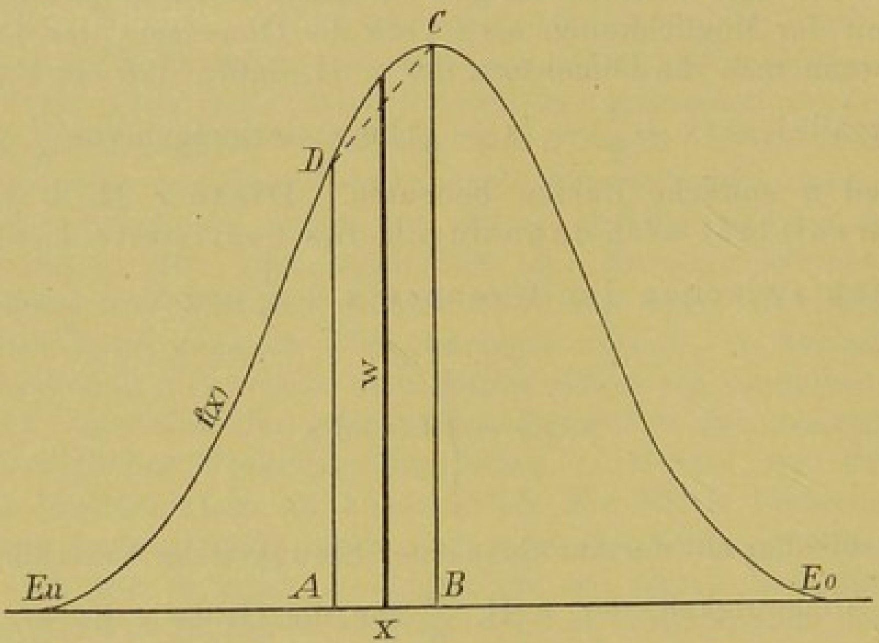
Sind E_0 der größte und E_u der kleinste Wert x, denen eben keine beobachteten Fälle mehr entsprechen und die von Fechner als die „Extreme“ des K.-G. bezeichnet werden (vgl. Fig. 1), so gibt das bestimmte Integral

$$\int_{E_u}^{E_0} f(x)\,d\,x = 1 \qquad [9]$$

1) A. a. O. S. 104.

wiederum, wie [6], die stets der Einheit gleiche r. H. oder die der „Gewißheit" gleiche Wahrscheinlichkeit dafür, daß überhaupt irgend ein Fall des K.-G. auftrete.

Setzt man aber nun einmal die Gültigkeit einer solchen stetigen Funktion w voraus, so kann man zunächst **wenigstens für einzelne Abszissenpunkte** x_1, x_2 **usw. die zugehörigen Ordinaten aus der Beobachtung** der r. H. innerhalb ganzer Intervalle von überall gleicher Größe i erschließen, in die man die Abszissenachse einteilt. Man hat hierzu nur vorauszusetzen, daß wenigstens für ein solches Intervall i die relative Häufigkeit $z_x = \frac{Z_x}{n}$ bei einer beliebigen Wiederholung von je n Beobachtungen



Figur 1.
Die relative Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit) w als stetige Funktion (f)x eines stetigen Argumentes x.

konstant bleibe, also wirklich etwas Generelles sei. In diesem Falle folgt also aus Gl. [8] annähernd

$$z_x = \frac{Z_x}{n} = \int_{x-\frac{i}{2}}^{x+\frac{i}{2}} f(x)\,d\,x. \qquad [10]$$

Dieses bestimmte Integral ist aber bekanntlich dem Flächeninhalt äquivalent, der zwischen dem Stück der die Funktion f(x) darstellenden Kurve von $x + \frac{i}{2}$ bis $x - \frac{i}{2}$ und der Abszissenachse gelegen ist. Denkt man sich also z. B. f(x) durch die Kurve Fig. 1 dargestellt, so ist das Flächenstück A B C D dem bestimmten Integral [8] bezw. [10] äquivalent. Ihm muß daher auch die beobachtete r. H. z_x unter der genannten Voraussetzung gleich zu setzen sein, wenn A B = i eines der Intervalle ist, deren „Dichtigkeit" eben durch z_x ausgedrückt wird. Nehmen wir aber nun weiterhin an, daß das Intervall i klein genug sei, um den Verlauf der Kurve von D bis C noch als annähernd geradlinig betrachten zu lassen, so wäre nach dem elementaren Satz für den Flächeninhalt eines Paralleltrapezes mit den parallelen Seiten A D und C B und der Höhe $AB = i$

$$z_x = \int_{x-\frac{i}{2}}^{x+\frac{i}{2}} f(x)\,dx = \frac{i}{2}(AD + BC) = i \cdot w, \qquad [11]$$

da in diesem Falle die zu dem Mittelpunkt x des Intervalles gehörige Ordinate w die Mittellinie des Paralleltrapezes mit dem Flächeninhalt

$$w = \frac{i}{2}(AD + BC) \qquad [12]$$

wäre.

Somit ergibt sich also bei einem vom Zufall abgestuften, an sich stetigen Argument in der Tat eine genügende Proportionalität der relativen Dichtigkeiten gleich großer[1]) Intervalle zu den r. H. einzelner Beobachtungswerte x, die in der Mitte der Intervalle gelegen sind.

Der Fehler, der bei dieser Voraussetzung eines geradlinigen Verlaufes von f (x) zwischen den Grenzen des Intervalles begangen wird, ist seinem absoluten Werte nach von der Stärke und in seinem Vorzeichen von der Richtung der Krümmung der Kurve f (x) abhängig. Da Fig. 1 zugleich den häufigsten Verlauf eines vollständigen K.-G. in diesen beiden Hinsichten andeutet, so sieht man, daß zwar der absolute Betrag bei kleinem Intervalle meist an keinem Punkte sehr groß ist, aber in dem mittleren, gegen die x-Achse konkaven Teil negativ, in den äußeren, bei Eo und Eu gelegenen Flanken dagegen positiv ausfällt. Eine genauere Aussage über die mögliche Korrektur dieser kleinen Fehler kann aber natürlich erst gemacht werden, wenn man wirklich einen bestimmten Verlauf der Kurve f (x) im ganzen voraussetzen kann. Ein solches vollständiges Bild der Funktion läßt sich nun nach der Feststellung dieser einzelnen Punkte der Kurve, die den Intervallmitten x_1, x_2 usw. zugeordnet sind, ohne spezielle Voraussetzungen über K.-G. überhaupt, also rein immanent aus den beobachteten Dichtigkeiten

1) Da Gleichung [11] für jedes beliebige Intervall i gilt, wenn es nur klein genug ist, um C D als annähernd geradlinig betrachten zu lassen, so wäre natürlich eine Reduktion der Ordinaten vorzunehmen, falls zunächst die relativen Dichtigkeiten für etwas verschiedene Intervalle festgestellt worden wären. Da

$$[13] \qquad i\,w = i_1 \cdot w \cdot \frac{i}{i_1},$$

so ist die der vorigen Berechnung aus i entsprechende Ordinate w aus der dem Intervall i_1 entsprechenden relativen Dichtigkeit z'_x durch Multiplikation mit $\frac{i}{i_1}$ zu finden. Bei durchweg verschiedenen Intervallen i_1, i_2 . . . usw. wären also die auf ein gleiches i bezogenen Ordinaten ihrer nicht mehr „äquidistanten" Mittelpunkte $x_1, x_2, \ldots x_3$ den i_x reziprok:

$$[14] \qquad f(x) = \frac{i}{i_x} \cdot z_x.$$

selbst, durch die sogen. Interpolation gewinnen, für welche die naturwissenschaftlichen Maßmethoden für beliebige Funktionen längst ganz bestimmte Prinzipien entwickelt hatten, welche die allgemeine K.-L. nur fertig herüberzunehmen brauchte. Hat man aber einmal einen solchen Einblick in den ungefähren Verlauf der Kurve, der bei genügender Versuchszahl und Kleinheit der Intervalle nach Größe und Richtung der Krümmung mit der wahren Funktion hinreichend übereinstimmt, so kann man die bei Vernachlässigung dieser Krümmung im ursprünglichen Ansatz der Ordinaten begangenen Fehler abschätzen und dann natürlich auch wiederum die aus diesen Ordinaten interpolierte Funktion selbst korrigieren, falls man die Fehler nicht überhaupt gegenüber den z-Werten im ganzen oder im Verhältnis zu anderen, größeren Fehlern, die aus einer nur annäherungsweisen Gültigkeit von Gl. [8] entspringen, vernachlässigen zu dürfen glaubt. Die so gewonnene stetige Funktion für die Verteilung einer zwischen bestimmten Grenzen E_0 und E_n zufällig schwankenden Größe wird man auch als einen „einfachen K.-G." bezeichnen können, gegenüber komplizierteren Abhängigkeitsbeziehungen, in denen r. H. überhaupt zu stetigen Größen stehen können, wie unten näher auszuführen ist.

Wenn die Maßeinheit der „Urliste" so fein oder die Anzahl der Beobachtungen so gering ist, daß die Kurve, die aus dieser „primären Verteilungstafel" der Z konstruiert würde, noch zu viele Zufälligkeiten enthielte, so muß die Verteilungstafel zunächst erst noch durch die schon erwähnte Zusammenfassung der Z aus Vielfachen des primären Intervalles „reduziert" werden[1]). Diese Aufgabe ist aber nun freilich niemals völlig eindeutig lösbar, da weder über die Zahl der in der neuen Einheit enthaltenen primären Intervalle oder über die sog. „Reduktionstufe", noch über die Lage der Grenzpunkte dieser neuen Gruppen oder über die sog. „Reduktionslage" allgemeine Vorschriften zu machen sind, solange man nicht neue Voraussetzungen über die Form der resultierenden Verteilungskurve einführt. Fechner selbst verwendet natürlich bereits sehr spezielle Annahmen dieser Art, wenn er so viele Intervalle zusammenzufassen empfiehlt, bis die Ordinatenreihe ohne Rückläufigkeiten „glatt" zu einem Maximum ansteigt und wieder absinkt. Auch die Reduktionslage wählt er nach ähnlichen Gesichtspunkten. Hinsichtlich der letzteren könnte allerdings auch schon die Ableitung eines Mittels aus allen möglichen Lagen die Vieldeutigkeit wenigstens innerhalb der nämlichen Reduktionsstufe beseitigen[2]), sobald über die Form der Mittelbildung entschieden ist. Doch kommt es in der Praxis natürlich vor allem nur darauf an, daß man die Verteilungskurven der K.-G., die miteinander verglichen werden sollen, stets in der nämlichen Weise ableitet.

3. Die vom Zufall beeinflußte Abhängigkeit der relativen Häufigkeit eines Ereignisses von einer stetig abstufbaren Größe kann aber noch in einer anderen, in psychophysischen Versuchen häufig benutzten Form abgeleitet werden, bei der nicht die verschiedenen, in jedem Versuche miteinander konkurrierenden Möglichkeiten A_x selbst die stetig abstufbare Größe

1) Fechner, Kollektivmaßlehre S. 111 ff.
2) Ebenda, S. 139.

bilden. Wenn unter dem Einflusse einer beliebigen Stufe einer stetigen Größe x überhaupt oder zwischen bestimmten Grenzen x_u und x_o zwei oder mehrere Möglichkeiten A, B ··· beliebiger Art zufällig abwechseln, so kann zunächst für jede einzelne Stufe x die absolute Anzahl Z_{xA} einer dieser Möglichkeiten z. B. A, im Verhältnis zu der Summe $Z_{xA} + Z_{xB} \cdots$ aller n_x Einwirkungen der nämlichen Stufe x, als r. H. gefaßt werden. Die Möglichkeiten A, B usw. können natürlich beliebig unstetig abgestuft sein, wie in Absatz 1 dargelegt wurde, wenn sie nur eindeutig voneinander unterscheidbar sind. Stellt man nun mit einer Reihe systematisch abgestufter Werte $x_1, x_2 \ldots x$ zeitlich getrennt oder untermischt je eine analoge Versuchsreihe mit $n_1, n_2 \ldots n_s$ Einwirkungen jeder einzelnen Stufe an, bei denen stets alle Möglichkeiten A, B . . . usw. in Frage kommen, so lassen sich wieder die r. H.

$$\frac{Z_{1A}}{n_1}, \frac{Z_{2A}}{n_2}, \ldots \frac{Z_{sA}}{n_s}$$

$$\frac{Z_{1B}}{n_1}, \frac{Z_{2B}}{n_2}, \ldots \frac{Z_{sB}}{n_s}$$

usw.

als Abhängige der Größe x ins Auge fassen. Greift man eine der eben genannten Horizontalreihen für sich heraus, so läßt sich in diesem Falle allerdings nicht wie in [6] etwas Allgemeines über die Summe sämtlicher r. H. aussagen. Nur die Summe der Vertikalreihen, die die Summe der r. H. sämtlicher bei dieser Stufe des x, z. B. x_1, x_2 usw. in Betracht kommenden Möglichkeiten A, B usw. darstellen, müssen überall wieder gleich der Einheit sein. Sie allein bilden ja auch einen einfachen, eventuell unstetigen K.-G., deren man hierbei so viele ableitet, als Stufen des x wiederholt auf ihre Effekte A, B usw. untersucht wurden. Auch kann von einer bestimmter Stufe x an nach oben oder unten der zufällige Wechsel zwischen mehreren Möglichkeiten völlig aufhören, so daß für diese x-Werte überhaupt kein K.-G. im gewöhnlichen Sinne des Wortes mehr existiert. Dennoch kann der Inbegriff der Beobachtungen über die r. H. nach Vertikal- und Horizontalreihen, wie er wenigstens innerhalb gewisser Grenzen x_u und x_o die r. H. der A, B usw. . . . von x nach Zufall abhängig erscheinen läßt, als ein K.-G. im allgemeinen Sinne betrachtet werden, zumal wir ja schon oben mit Bruns die Zufälligkeit der Abhängigkeit, die jenseit gewisser Grenzen des x aufhören kann, von dem Begriff des K.-G. ausgeschlossen haben. Es handelt sich also hierbei schließlich nur noch um eine funktionelle Abhängigkeit relativer Häufigkeiten eines bestimmten Ereignisses von einem x überhaupt.

Mit der systematischen Abstufung der $x_1, x_2, \ldots x_s$ ist nun allerdings zunächst künstlich ein unstetiger K.-G. (in diesem umfassenderen Sinne) herbeigeführt, ähnlich wie nach der Konstruktion der Ordinaten für die Intervallmitten im vorigen Falle. Nach Beobachtung bestimmter r. H. irgend eines dieser Ereignisse A, B usw. bei x_1, x_2 usw. kann aber durch Interpolation auch wieder der stetige K.-G. konstruiert werden, der bei der Zufälligkeit, mit der natürlich das spezielle System der konstanten Größen x_1, x_2 usw. aus dem ganzen Kontinuum der x-Werte herausgegriffen ist, als übergeordnete generelle Tatsache vorauszusetzen ist und bei einer unbegrenzten Feinheit dieser systematischen Abstufung auch empirisch realisiert werden könnte. Doch bedarf eben die theoretische Bearbeitung der Urliste zur Ableitung der stetigen Verteilungskurven für die verschiedenen Möglichkeiten A, B. usw. keinerlei Berechnung der Ordinaten, von denen die Interpolation auszugehen hat, weil die Häufigkeiten

$$\begin{array}{l} f_A(x_1),\ f_A(x_2)\ \ldots\ f_A(x_s) \\ f_B(x_1),\ f_B(x_2)\ \ldots\ f_B(x_s) \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}$$

von vornherein unmittelbar bei x_1, x_2 usw. beobachtet worden sind. Deshalb sind also diese Verteilungsfunktionen auch der Vieldeutigkeit jener „reduzierten Verteilungstafeln" prinzipiell überhoben.

In psychophysischen Versuchen kommt dieser besonders wichtige Fall bekanntlich dann vor, wenn die r. H. der schon oben genannten Vergleichsurteile, z. B. „größer", „gleich", „kleiner", für eine ganz systematisch abgestufte Reihe von Vergleichsreizen $x_1, x_2, \ldots x_s$ bei konstantem Normalreiz a abgeleitet werden. Bezeichnet man die Funktionen, welche die Abhängigkeit der r. H. jeder der drei Urteilsarten vom Vergleichsreiz ausdrücken, der Reihe nach mit $F_g(x)$, $F_u(x)$, $F_k(x)$, so gilt also in diesem Falle für jede einzelne Stufe des Vergleichsreizes für sich betrachtet

$$F_g(x) + F_u(x) + F_k(x) = 1\,, \tag{15}$$

da eben nur diese drei Möglichkeiten von Urteilen in Betracht gezogen sind. Würde man mehr Urteilsarten, z. B. die ebenfalls S. 34 schon genannten fünf Hauptfälle, zulassen, so wäre natürlich erst die Summe aller fünf Funktionswerte für jede Stufe x gleich der Einheit. Die Abstufung der Möglichkeiten, aus denen in jedem einzelnen Versuche der Verlauf der Dinge eine herausgreift, wäre also hiermit eine feinere, ähnlich wie wenn man bei der sub 2) betrachteten Einstellung eines Maßstabes nach einer selbst der x-Reihe zugehörigen Norm eine Reihe von feineren Stufen der x-Werte selbst zur Auswahl vor sich hätte. Nur handelt es sich hier eben um die „Auswahl" eines von x erst abhängigen Urteiles und um die „Feinheit" dieses Urteilsmaßstabes. Bei 3 Urteilsarten besitzt der K.-G. allerdings nur für die Gleichheitsurteile zwei bestimmte Extreme E_u und E_o, während er dagegen für $F_g(x)$ und $F_k(x)$ nur ein unteres, bezw. ein oberes Extrem aufweist und andererseits von einem bestimmten Werte an dauernd der Einheit gleich ist, also in der S. 33 bereits in Betracht gezogenen Weise überhaupt nicht mehr „nach Zufall wechselt". In allen solchen Fällen wird sich indessen der wirklich vom Zufall beeinflußte Bereich der Schwankung als K.-G. in einem besonderen Sinne von dem konstanten Bereiche abtrennen und wenigstens hypothetisch zu einem „einfachen" K.-G. in Beziehung bringen lassen, dessen einzelne „Exemplare" überhaupt nur in seinen Grenzen vorkommen und durch ihre zufällige Variation es mit sich bringen, daß das Urteil „größer" bezw. „kleiner" in diesem Bereiche mit den beiden anderen abwechselt. Hierauf werden wir aber erst im 7. Kapitel zurückkommen.

Die sachliche Einheitlichkeit des ganzen Systems der r. H. ist freilich wiederum nur dann gewährleistet, wenn wirklich für sämtliche Versuche mit allen beliebigen Werten x die Wirksamkeit des nämlichen Systemes unkontrollierbarer Nebenbedingungen garantiert ist, zu dem wiederum die Versuchszahl n mit hinzugehört. In Versuchen dieser Art wird man also bei der Anlage der Reihen von vornherein danach streben, unter sonst gleichen Umständen auf jedes x auch die nämliche Anzahl n von Einzelversuchen zu verwenden. Auf die Gesichtspunkte, die bei verschiedenen n in Frage kommen, werden wir unten im Zusammenhange des 6. Kapitels § 27 näher eingehen.

Die Intervalle i zwischen den x können an sich natürlich ganz beliebig gewählt werden, doch wird die weitere rechnerische Behandlung der Funktionen, insbesondere zunächst die Interpolation einer stetigen Kurve, durch gleiche Abstände sehr erleichtert.

Zwischen den beiden sub 2) und 3) betrachteten K.-G. können natürlich ganz bestimmte Beziehungen bestehen. So kann z. B. die in bestimmte Grenzen eingeschlossene Verteilung der r. H. von Gleichheitsurteilen im letzteren Falle mit dem „einfachen“ K.-G. der r. H. der Selbsteinstellungen im ersteren verglichen werden, da auch diese Selbsteinstellungen von einem Gleichheitsurteil endgültig entschieden werden. Doch sind die allgemeinen Versuchsbedingungen bei der Möglichkeit einer aktiven Variation bis zur Gleichheit, bei der alle Anlässe zu anderen Urteilen außer der subjektiven Gleichheit sofort wieder beseitigt werden, von denjenigen bei passiver Beurteilung bestimmter Reizstufen prinzipiell verschieden. Von diesen Nebenumständen ist aber natürlich auch die Mannigfaltigkeit der unkontrollierbaren Einflüsse wesentlich mit abhängig, so daß die Vergleichbarkeit niemals als Identifizierbarkeit betrachtet werden darf. Hierauf kommen wir an Ort und Stelle zurück.

4. In beiden hier zunächst in Betracht kommenden Hauptfällen, in denen ein einfacher K.-G. einer stetig variablen Größe x gegeben ist oder die r. H. mehrerer, nach Zufall wechselnder Ereignisse, die von einer stetig abstufbaren Größe x abhängig sind, bei bestimmten Stufen der letzteren beobachtet werden, ist nun zunächst, wie schon erwähnt, der allgemeinere stetige K.-G. im ganzen als eine mathematische Funktion der unabhängigen Variablen x darstellbar. Hierbei ist aber nunmehr überall die rein empirische Aufstellung einer Kurve, welche einfach die beobachteten Ordinatengipfel stetig verbindet, oder, rein analytisch betrachtet, die Ableitung einer Formel, die bei Einsetzung des Abszissenwertes x zu einem beobachteten y dieses letztere selbst genau ergibt und außerdem für jedes beliebige x ein y eindeutig bestimmen läßt, von der theoretischen Verallgemeinerung dieser Formel für beliebige K.-G. dieser Art scharf zu unterscheiden. Die wissenschaftliche Verarbeitung des Rohmateriales hat überall nur diese letztere als Endziel vor Augen. Man kann aber nun zunächst, unter Voraussetzung einer genügenden Versuchszahl und aller sonstigen bisher genannten Bedingungen für die „Induktion“ von Wahrscheinlichkeiten, diese rein empirisch abzuleitende Kurve unmittelbar selbst zu verallgemeinern suchen, und in einem „unmittelbaren Verfahren“ im allgemeinsten Sinne die Bestimmung von „Mittelwerten“ u. ä. direkt hierauf gründen. Hieraus ergibt sich als nächstliegende Aufgabe, die bei der Verarbeitung des Rohmaterials vorkommen kann, die Interpolation, deren Methoden daher, soweit sie für

die spezielleren Probleme unten in Betracht kommen, im 4. Kapitel zusammengestellt sind.

Da aber bei jedem empirischen K.-G. auch von diesen allgemeinsten Voraussetzungen der Wahrscheinlichkeitsinduktion aus schon die begrenzte Versuchszahl als solche die Verallgemeinerung der Verteilung einschränken muß, so kann diese rein empirische Kurve stets nur als eine Annäherung an die ideale, d. h. vollständige Repräsentation der gesamten Mannigfaltigkeit der „unkontrollierbaren" Nebenbedingungen betrachtet werden. Von diesem Ideal müssen aber freilich stets erst irgendwelche speziellere Eigentümlichkeiten als bekannt vorausgesetzt werden können, wenn man die rein empirische Verteilung zunächst als mit Fehlern behaftet betrachten soll, die in einem sogen. „Ausgleichungsverfahren" (im allgemeinen Sinne) zu eliminieren sind.

Unter diesen speziellen Merkmalen ist relativ noch am allgemeinsten eine gewisse Einfachheit, die man bei einer einfachen Variation der Unabhängigen x auch für die Abhängige voraussetzen zu können glaubt. Nach diesem Prinzip verfährt ja schon die Interpolation der nicht beobachteten r. H. zwischen den beobachteten. Man kann aber eben auch die Form dieser rein empirisch aufgestellten Kurve im ganzen darauf hin betrachten, ob nicht eine allzu große Unruhe der Hin- und Herbewegung des Kurvenzuges um eine einfachere Grundrichtung vielleicht doch nur der bloßen Unvollständigkeit oder sonstigen Unvergleichbarkeit der bei den einzelnen x beobachteten r. H. zuzuschreiben sei. Ein „Ausgleichungsverfahren", das sich nur auf diese allgemeinste Voraussetzung stützen würde, wäre freilich eine ziemlich willkürliche Sache. Gibt es doch zunächst schon für die bloße Interpolation, also bei voller Anerkennung der beobachteten Werte, eine unbegrenzte Zahl von Möglichkeiten, eine beliebige endliche Reihe beobachteter Funktionswerte $y_1, y_2 \dots y_s$ als eine stetige Funktion $y = f(x)$ mit beliebiger Annäherung darzustellen, falls man nur eine unbegrenzte Anzahl von Gliedern des Ausdruckes für diese sogen. „willkürlichen Funktionen" zuläßt. Jede von ihnen läßt sich aber dann in ihrer Art auch zu einer analytischen „Ausgleichung" verwenden, indem man eine einfachere Form der Funktion ansetzt, als sie zur genauen Befriedigung aller gegebenen Funktionswerte nötig wäre, und die Konstanten im einzelnen so bestimmt, daß die Abweichungen der tatsächlich beobachteten Werte von der Funktion (die sogen. „übrig bleibenden" Fehler) irgend einem Prinzip folgen. Da in diesem eine weitere Willkürlichkeit enthalten liegt, so bedeutet es bereits eine einheitlichere Gestaltung dieses Verfahrens, wenn man zwar die allgemeine Form der Funktion und den Grad ihrer Komplikation freistellt, aber wenigstens über das Wesen der „Fehlerausgleichung" bestimmtere Vorschriften macht. Als das anerkannteste Prinzip dieser Art werden wir die „Methode der kleinsten Quadrate", die auch in psychophysischen Aufgaben eine Rolle spielt, kurz darzustellen haben.

Noch eindeutigere Vorschriften für die Ausgleichung könnten dann erst aus umfassenden Erfahrungen oder aus allgemeinen Überlegungen über die Form der Verteilungsfunktion selbst gewonnen werden. Jene lassen aus großen Versuchsreihen unter möglichst konstanten kontrollierbaren Bedingungen rein induktiv Anhaltspunkte für die häufigste Grundform und den Grad der Kompliziertheit der Verteilungsfunktionen entnehmen. Diese dagegen bestehen in den bekannten Annahmen des Wahrscheinlichkeitskalküls. Vor allem aus ihnen suchte man denn auch geradezu spezielle Verteilungsgesetze für K.-G. überhaupt abzuleiten, die man als die generelle, ideale Form jeder Verteilung bei genügender Versuchszahl und Vergleichbarkeit der einzelnen Häufigkeits-Ordinaten ansah.

Da aber die K.-G. Erfahrungsobjekte sind, die nur eben, wie alle empirische Tatsachen, gewisse generelle Züge aufweisen, so hätte sich die Ableitung „spezieller Verteilungsgesetze" jedenfalls nur im engsten Anschlusse an die empirischen Verteilungen zu vollziehen. Erweist sich ja doch auch ihre mathematische Formulierung als eine zunehmende Spezialisierung der Formeln, die sich zunächst für die Darstellung aller möglichen Beobachtungen verwenden lassen, und die bei dem Zugeständnis von immer größeren „Fehlern" der „unmittelbar" abgeleiteten Funktionen natürlich immer spezieller und zugleich einfacher ausfallen dürfen, um in möglichst vielen K.-G. von verschiedener Form ihrer Verteilung noch als annähernd verwirklicht zu erscheinen. Die historische Entwicklung ist freilich auch hier den umgekehrten Weg gegangen, indem man nach einer Reihe von Erfahrungen über Verteilungen sogleich zu einem möglichst umfassenden Gesetz des Zufalles hinaufzusteigen suchte, dessen spezielle Form im wesentlichen apriorisch aus den allgemeinsten Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung abzuleiten ist. Die einfachste Formel dieser Art, in der diese Entwicklung einen vorläufigen Abschluß für längere Zeit gefunden hatte, ist das bekannte Gausssche Exponentialgesetz für einfache K.-G. (vgl. S. 38), das in § 21 entwickelt werden soll. Sein Anwendungsgebiet, das es durch die Brauchbarkeit der berechneten Resultate fortwährend von neuem behauptete, war vor allem die Physik, die Astronomie, die Geodäsie und ähnlich exakte Gebiete, bei deren Beobachtungen die Schwankungen nicht nur im Verhältnis zu den absoluten Werten häufig sehr klein ausfallen, sondern in der Tat ein relativ einfaches Schema der Streuung erkennen lassen. Die neuere Statistik über meteorologische, volkswirtschaftliche, biologische und insbesondere auch über psychophysische Zusammenhänge nötigte aber dann freilich zu jener empirischen Darstellung der beobachteten Variationsmöglichkeiten, eine Entwicklung, in der vor allem Fechner bahnbrechend gewirkt hat. Seine 1874 erschienene Schrift „Über den Ausgangswert der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung"[1]) enthielt bereits die wesentlichen Prinzipien seiner (postumen) „Kollektivmaßlehre", mit deren Grundbegriffen wir uns bisher beschäftigten.

Im Endresultate seiner Induktionen suchte sich Fechner indessen doch wiederum möglichst enge an das Gausssche Gesetz anzuschließen, das er einfach als eine auf K.-G. bruchstückweise anwendbare Interpolationsformel betrachtete, wobei er sogar nur mit einer Zweiteilung der ganzen Abszissenachse auszukommen suchte. (Zweiteiliges Gausssches Gesetz.) H. Bruns[2])

1) XI. Band der Abh. der math. phys. Kl. der K. sächs. Ges. der Wissensch. No. I, S. 1 ff. 1874.

2) a. a. O. sowie die Abhandlung „Zur Kollektivmaßlehre" in Wundt, Phil. Studien, Bd. 14, S. 139.

stellte indessen die stetige Verbindung zwischen dem Gaussschen Gesetz und der Induktion her, welche durch die angenäherte Gültigkeit der im Gaussschen Gesetz enthaltenen Voraussetzungen für alle einfachen K.-G. möglich ist: Die tatsächliche Verwandtschaft aller Verteilungsfunktionen dieser Art mit dem Gaussschen Exponentialgesetz läßt eine aus dem einfachen Gesetz und seinen Ableitungen kombinierte Formel für jeden empirischen Kollektivgegenstand mit wenig Gliedern einen Grad der Annäherung erreichen, der mit den zwar für beliebige Funktionen durchschnittlich vorteilhaftesten Ansätzen der allgemeinen Interpolationsrechnung meistens nur mit viel mehr Gliedern zu gewinnen ist.

Für die praktische Brauchbarkeit des Verfahrens kommt freilich vor allem noch in Betracht, wie schnell die Formeln für die K.-G. im ganzen aus den beobachteten r. H. anzusetzen und weiterhin vor allem die Mittelwerte zu berechnen sind. Die relative Kompliziertheit der Aufstellung der Brunsschen Reihe für eine gegebene Beobachtungsreihe und ihrer weiteren Behandlung zur Berechnung der in der Psychophysik wichtigen Mittelwerte usw. wird sie daher in allen Fällen, in denen nicht schon das einfache Gausssche Gesetz mit großer Annäherung zutrifft, immerhin hinsichtlich der „Unmittelbarkeit" des Verfahrens in diesem Sinne hinter den auf die allgemeinen Interpolationsmethoden gegründeten Berechnungen und vereinfachenden Ausgleichungen zurückstehen lassen, wenn auch in allen Fällen, in denen die Zeit zu Gebote steht, eine exaktere Behandlung der Verteilungsfunktion nicht unterbleiben sollte. Wegen der Voraussetzung des Gaussschen Gesetzes für ihre analytische Form werden wir natürlich die Brunssche Reihe erst nach diesem in § 24 behandeln, obgleich sie, wie gesagt, vom Gaussschen Gesetze aus wieder zu dem induktiv gerichteten Verfahren der Interpolationsrechnung im 4. Kapitel zurückkehrt.

15. Die Repräsentation eines K.-G. durch einzelne Werte. (Hauptwerte und Streuungsmaße.)

1. Die ausgleichende Vereinfachung, die an der Verteilungsfunktion zu ihrer größeren Verallgemeinerung vorgenommen werden kann, steht bereits mit der weiteren Hauptaufgabe der K.-L. in innigem Zusammenhange, an der konkreten Verteilung im ganzen, gleichgültig auf welchem Stande der Ausgleichung man sie ins Auge faßt, zunächst gewisse typische Grundzüge festzustellen, welche die K.-G. unmittelbarer vergleichen, also auch die speziellen Einflüsse einer systematischen Variation der Versuchsbedingungen viel leichter herausfinden lassen, als es die unanalysierten Verteilungsfunktionen $\mathfrak{V}_1(x)$, $\mathfrak{V}_2(x)$ usw. im ganzen ermöglichen würden. Die K.-L. enthält nun an und für sich gar keine Einschränkungen hinsichtlich der Gesichtspunkte, die bei einem Vergleich einer sachlich zusammengehörigen Reihe von K.-G., z. B. einer Reihe jener Urteilsfunktionen bei verschiedenen Intensitätsstufen der Vergleichsreize, gelegentlich als charakteristische Unterschiede herauszuheben wären. Bald kann nur die Ausdehnung oder die Form der Kurve im ganzen Änderungen erleiden, bald aber auch ihre Lage zu den absoluten Werten der unabhängigen Variablen (z. B. bei den Urteilsfunktionen $F_u(x)$ usw. die Lage zu den absoluten Werten der Vergleichsreize x) bei ungefähr glei-

cher Streuungsform, bald kann sich die Änderung auf beide Hauptmerkmale gemeinsam erstrecken und dabei an ihnen noch speziellere Unterscheidungen irgendwelcher Art nahe legen. Das vergleichende Studium der Verteilungen wirklich vergleichbarer K.-G. im ganzen, die stets das quantitative „Symptom“ (vgl. § 11, S. 26) einer Fülle gleichzeitig wirksamer Versuchsbedingungen in sich enthalten, ist bisher noch wenig in Angriff genommen worden.

2. Am unmittelbarsten tritt aber natürlich der zu untersuchende Einfluß irgend einer systematischen Variation dann hervor, wenn man jeder Verteilung einen einzelnen Wert als vergleichbaren „Repräsentanten“ entnimmt. Die Vergleichung verschiedener Effekte gestaltet sich dann eben weiterhin genau so, als ob bei jeder Kombination bestimmter systematischer Versuchsbedingungen von vorn herein wirklich nur ein einziger konstanter Wert zu beobachten gewesen wäre. Die Ableitung solcher „Hauptwerte“ (Fechner), oder „Mittelwerte“ schlechthin, hängt denn historisch auch eng mit dem Versuche zusammen, einen sog. „wahren“ oder „wahrscheinlichsten“ Wert aus den Einzelbeobachtungen zu berechnen. Solange man aber über die Natur der zufälligen Nebenbedingungen keine weiteren hypothetischen Voraussetzungen macht, läßt sich ein „Hauptwert“ nur sehr allgemein definieren. Er ist eine einzelne Größe, die aus dem gesamten K.-G. stets in vergleichbarer Weise so abgeleitet wird, daß wirklich vor allem die generellen Eigentümlichkeiten dabei zur Geltung kommen, daß also z. B. bei unwesentlicheren Variationen des K.-G., vor allem bei etwas verschiedener Versuchszahl, das Resultat ebenfalls kein wesentlich anderes wird. Bei einem einfachen K.-G. nach § 14,2 wird man hierbei, wenn es die Berechnungsweise des gesuchten Repräsentanten irgendwie zuläßt, von der „primären“ Verteilungstafel ausgehen, wenn auch die oben hervorgehobene Vieldeutigkeit ihrer „Reduktion“ wenigstens hinsichtlich dieser Repräsentanten sehr zurücktritt und diese Operation gerade deshalb als eine zweckmäßige Ausgleichung erscheint.

Natürlich werden die theoretischen Überlegungen über das Wesen der zufälligen Einflüsse für die Auswahl der Repräsentanten von größter Bedeutung sein. Auch wird die wissenschaftliche Praxis darüber entscheiden können, ob die eine oder andere Formel theoretisch brauchbarere Konstante ergibt, die einen größeren Umkreis von Erfahrungen widerspruchslos verstehen lassen und daher von der Voraussetzung der tatsächlichen Gesetzmäßigkeit der Erscheinungen aus nachträglich gerechtfertigt erscheinen. Auch die Bequemlichkeit der Ableitung wird natürlich bei der Auswahl keine unwesentliche Rolle spielen. Am meisten hat sich nach jeder Richtung das „arithmetische Mittel“ bewährt. Seine Definition ist bekanntlich

$$\mathfrak{A} = x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots . x_s z_s \qquad [16]$$

wenn die relativen H. wieder mit z_x bezeichnet werden.

In neuerer Zeit gewann auf Grund der rein empirischen Darstellung von Verteilungskurven daneben zunächst auch noch das sog. „Dichtigkeitsmittel“ eine selbständige Bedeutung, dessen Bezeichnung unmittelbar dem in 14, 2 erläuterten Begriffe der relativen „Dichtigkeit“ der Streuung als der r. H. innerhalb eines Intervalles entnommen ist, wie auch die Ableitung dieses Hauptwertes bei einem K.-G. von der dort geschilderten Art gewöhnlich erst jener „Reduktion" der „Urliste" bedarf. Er ist einfach das „Maximum" der aus dieser Dichtigkeit abgeleiteten Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}$ (x), war aber auch unabhängig von der Stetigkeit des K.-G. als „häufigster" oder „wahrscheinlichster" Wert schlechthin bereits eindeutig definiert und ist in seiner repräsentativen Bedeutung ohne weiteres verständlich.

Fechner fügte noch den „Zentralwert" als denjenigen Wert $\mathfrak{C}$ hinzu, unterhalb und oberhalb dessen gleich viele Fälle vorkommen (vgl. S. 43, Anm. 1), ein Kriterium der Repräsentationsfähigkeit, das seinerzeit schon innerhalb der Reihe der nur nach ihrem absoluten Werte betrachteten „Fehler", die von einem „wahren" Werte aus bestimmt werden, dem sog. „wahrscheinlichsten Fehler" eine allerdings nicht mehr anerkannte Bedeutung verschafft hatte. Von Fechner wurde jedoch seine Bedeutung als Hauptwert der gesamten Reihe der Beobachtungsgrößen selbst allgemein begründet. Bei einem einfachen K.-G. nach § 14, 2, also einer Reihe zufällig abgestufter Werte eines stetigen Argumentes, zählt man $\mathfrak{C}$ einfach direkt aus der Urliste als den $\frac{n+1}{2}$-ten Beobachtungswert von einem der beiden Extreme E_o oder E_u aus ab, eine auch für gerade Versuchszahlen n gültige Definition, da sie hier eben die Mitte des Intervalles zwischen dem $\frac{n}{2}$-ten und dem $\frac{n+2}{2}$-ten Wert bedeutet.

In den mit der x-Achse geschlossenen Häufigkeitskurven nach § 14, 3 steht dagegen ein z für ein ganzes Intervall von $x - \frac{i}{2}$ bis $x + \frac{i}{2}$, wenn i den womöglich überall gleichen Abstand zweier Ordinaten bezeichnet. Zählt man also von einem der beiden Extreme E_u oder E_o die Ordinatenwerte bis zu ihrer halben Summe $\frac{n}{2}$ ab, so kommt man von jeder der beiten Seiten aus im allgemeinen mit verschiedenen Restbeträgen bei einer mittleren Ordinate Z_c des Intervalles $x_{c-1} - \frac{i}{2}$ bis $x_{c+1} + \frac{i}{2}$ an. Nach Fechner teilt man nun dieses mittlere Intervall einfach nach Maßgabe des beiderseits noch bis zum Werte $\frac{n}{2}$ fehlenden Restes der Abzählung. Man berechnet also die Abszisse dieses Teilungspunktes $x_c + \frac{i}{2} - \alpha i$ als den nunmehr völlig eindeutig bestimmten Zentralwert $\mathfrak{C}$, wobei

$$\sum_{x=0}^{x=c-1} z_x : n - z_c - \sum_{0}^{c-1} z_x = (1-\alpha) : \alpha.$$

Zur Veranschaulichung dieser Berechnung diene eine wirklich beobachtete Verteilung $F_u(x)$, die unten noch in mehreren Richtungen analysiert werden soll (vgl. § 17b, 3 und Fig. 3). Die obere Rubrik gibt die Mittelpunkte x_s der

Intervalle $i = 3$, die untere die bei ihnen beobachtete absolute Anzahl an Einzelfällen (Gleichheitsurteile).

x	43	46	49	52	55	58	61	64	67
50z	0	5	11	20	21	15	6	2	0

Die Summe n der absoluten Häufigkeiten Z_x ist 80, also $\frac{n}{2} = 40$. Das Abszissenintervall, in das man bei der Abzählung des 40-ten Einzelfalles von den Extremen her hineintrifft, reicht von 53,5 bis 56,5. Da man bis zu seiner linken Grenze 36, bis zu seiner rechten aber 23 Einzelfälle abgezählt hat, so daß links noch 4, rechts aber noch 17 Fälle fehlen, so hat man das Intervall $i = 3$ im Verhältnis 4:17 zu teilen. Es ist dann

$$\mathfrak{C} = 53{,}5 + \frac{3 \cdot 4}{4 + 17} = 56{,}5 - \frac{3 \cdot 17}{4 + 17} = 54{,}07.$$

Das arithmetische Mittel $\mathfrak{A}$ würde hier sehr nahe an $\mathfrak{C}$ heranrücken, da es bei 54,1 liegt. Die Kurve ist also eine ziemlich „symmetrische“.

3. Mit solchen Hauptwerten, die wir auch im folgenden der Reihe nach mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}$ bezeichnen wollen, ist aber, wie gesagt, nur die Lage des Schwankungsbereiches im ganzen zu den absoluten Werten der unabhängigen Variablen zum Ausdruck gebracht, der gegenüber alles übrige um so mehr zurücktritt, je enger der Streuungsbereich im Verhältnis zu der absoluten Größe der beobachteten Werte ist, je mehr sich also die Sachlage der vollständigen Konstanz nähert, bei der eben mit der Angabe des einen Wertes alles erschöpft ist. Wenn aber einmal zur Vollständigkeit des Resultates auch eine Angabe über die Verteilung der zufälligen Werte notwendig wird, so kann doch auch hierzu ebenfalls gewissermaßen ein einziger „Hauptwert“ aus sämtlichen zufälligen Abweichungen, von einem mittleren Werte aus gerechnet, benutzt werden. Er bildet dann ein Maß der sog. „Streuung“. Dabei verwenden wir diesen Begriff hier ganz allgemein für alle Repräsentanten dieser Art, während er als „Streuung“ (str.) schlechthin von Bruns nur für das anerkannteste Maß dieser Art, den sogleich zu nennenden „mittleren Fehler“ M, reserviert ist (a. a. O. S. 119). Ebenso, wie nun der „häufigste Wert“ $\mathfrak{D}$ aus der Reihe der diskreten Beobachtungen oder der interpolierten Kurve sich direkt aus den übrigen Werten heraushebt, ohne eine eigentliche Berechnung oder Abzählung aus allen einzelnen zu verlangen, so treten an einer empirischen Verteilung auch die äußersten Grenzen, jenseit deren keine Exemplare des K.-G. mehr vorkommen, die sog. Extreme E_o und E_u, (s. S. 35) als charakteristische Merkmale der Ausdehnung des ganzen Schwankungsbereiches ohne weiteres hervor. Da indessen die Kurve bei genügender Versuchszahl an ihren Extremen im allgemeinen nur ganz allmählich zur Abszissenachse herabsinkt, so ist gerade bei diesen Grenzen mit ihrer minimalen Wahrscheinlichkeit die Verallgemeinerung bei kleinem n meist eine etwas prekäre Sache, wenngleich für eine bestimmte Versuchszahl die Distanz $E_o - E_u$ völlig eindeutig bestimmbar ist. Von einem anderen, im § 27 näher erläuterten Gesichtspunkte aus kommt jedoch wenigstens den kleinsten Werten, die praktisch überhaupt noch für die Berechnung der Hauptwerte von Bedeutung sind, eine relativ sogar besonders

große Allgemeingültigkeit zu, so daß die empirischen Extreme bei gleicher Versuchszahl auch in psychophysischen Untersuchungen wichtiger sind, als manchmal angenommen wurde.

Höher ist aber jedenfalls auch hier der repräsentative Wert des arithmetischen Mittels sämtlicher, auf einen Hauptwert bezogenen Abweichungen. Da natürlich die Abweichungen nach der negativen Seite die Ausdehnung der Verteilung ebenso vergrößern, wie die positiven, so können als Streuungsmaß nur die Durchschnitte der absoluten Werte der Abweichungen dienen. Bezeichnet x_m den Mittelwert, auf den die Abweichungen der einzelnen Fälle eines einfachen K.-G. bezogen sind, so ist also das nächstliegende Maß dieser Art die in psychologischen Versuchen oft benutzte sog. „mittlere Variation", d. h. der fast ebenso bequem wie $\mathfrak{A}$ zu berechnende Durchschnitt

$$D = (x_m - x_1)\, z_1 + (x_m - x_2)\, z_2 \ldots + (x_m - x_n)\, z_n \cdot \qquad [17]$$

Wegen bestimmter Beziehungen zwischen den Streuungsmaßen und speziellen Hauptwerten, um derentwillen wir beide auch unten in engem Zusammenhange behandeln müssen, kommt aber nun hier vor allem auch der Durchschnitt der Quadrate der Abweichungen, der sog. „mittlere Fehler"

$$M = \sqrt{(x_m - x_1)^2 z_1 \ldots + (x_m - x_1)^2 z_n} \qquad [18]$$

in Betracht, der ebenso, wie alle Durchschnitte gerader Potenzen der Abweichungen, ohnehin von deren Vorzeichen unabhängig ist, und auch schon deshalb das am allgemeinsten anerkannte „Streuungsmaß" schlechthin ausmacht. M nimmt hierin eine ähnliche Vorzugsstellung ein, wie das einfache arithmetische Mittel $\mathfrak{A}$ unter den Hauptwerten, zu dem es auch sonst in enger analytischer Beziehung steht. Das dem „Zentralwert" entsprechende „Streuungsmaß" des „wahrscheinlichsten Fehlers" P wurde bereits oben genannt. Auch auf die Repräsentation sonstiger charakteristischer Eigentümlichkeiten der Verteilung durch einzelne Funktionen solcher Abweichungen wird im Zusammenhange einzugehen sein.

4. Überall, wo nun solche Durchschnitte der beobachteten Werte selbst oder ihrer Abweichungen, wie bei $\mathfrak{A}$, D, M u. a., für einen stetigen K.-G. abzuleiten sind, gehen die oben genannten Summen in bestimmte Integrale von der Form

$$J(x) = \int_b^a T(x)\,\mathfrak{V}(x)\,dx \qquad [19]$$

mit den „Grenzen" a und b über, die Bruns als „Durchschnitte" nach der Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$ schlechthin bezeichnet[1]). T(x) ist die für die Eigenart des Durchschnittes entscheidende Funktion. Beim Zentralwert $\mathfrak{C}$, der für stetige K.-G. durch die Gleichung

$$\int_{E_u}^{\mathfrak{C}} \mathfrak{V}(x)\,dx = \int_{\mathfrak{C}}^{E_0} \mathfrak{V}(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{E_u}^{E_0} \mathfrak{V}(x)\,dx = \frac{1}{2} \qquad [20]$$

1) Wahrscheinlichkeitsrechnung usw., S. 106.

definiert ist, kommt $\mathfrak{V}(x)$ von vornherein nur allein unter dem Integralzeichen vor. T(x) ist also hier konstant 1 oder x^0. Bei $\mathfrak{A}$ ist dann einfach $T(x) = x$, da bei einem stetigen K.-G.

$$\mathfrak{A} = \int_{E_u}^{E_0} x \cdot \mathfrak{V}(x)\,dx \tag{21}$$

Ferner ist

$$D = \int_{E_u}^{x} (x_m - x)\,\mathfrak{V}(x)\,dx + \int_{x}^{E_0} (x - x_m)\,\mathfrak{V}(x)\,dx \tag{22}$$

und

$$M^2 = \int_{E_u}^{E_0} (x_m - x)^2\,\mathfrak{V}(x)\,dx, \tag{23}$$

wenn x_m wieder den sog. Ausgangswert bedeutet, auf den die Abweichungen bezogen werden. Da sich nun alle diese Ausdrücke für $\mathfrak{A}$, D und M^2 durch partielle Integration in einfache und m-fache Integrale über die Verteilungsfunktion

$$\int_b^a\!\!\int\!\!\int \mathfrak{V}(x)\,dx^m$$

auflösen lassen, so sollen schon bei den Methoden zur rein empirischen Aufstellung der Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$ selbst, im 4. Kapitel, die entsprechenden Integrationen angegeben werden.

5. Da man aber bei gegebenem einfachen K.-G., wie z. B. bei der in 14, 2 erwähnten Aufgabe, die genannten Durchschnitte meistens direkt aus dem unstetigen K.-G. berechnet, so gewinnen diese Integrationsmethoden ihre volle Bedeutung doch erst bei der Untersuchung der zusammengesetzten K.-G., die § 14, 3 als besonders wichtige psychophysische Probleme geschildert wurden. Hier erwächst nämlich noch die besondere Aufgabe, die eben genannten Hauptwerte und Streuungsmaße für einfache K.-G. zu berechnen, die der Abhängigkeit der r. H. bestimmter Ereignisse A, B . . . usw. (z. B. der Vergleichsurteile) von dem Argument x des zusammengesetzten K.-G. (von den Vergleichsreizen) hypothetisch zugrunde zu legen sind. Diese hypothetischen K.-G. stehen nun zu den beobachteten r. H. in den unten betrachteten Fällen der Psychophysik in der speziellen Beziehung, daß man die sämtlichen Fälle des hypothetischen K.-G. von einem seiner Extreme an bis zu der Abszisse der beobachteten r. H. aufsummieren muß, um den Wert dieser r. H. zu erlangen. Diese sogen. „Summenfunktion" wird aber natürlich für einen stetigen hypothetischen K.-G. wieder zu einem bestimmten Integral über seine Verteilung f(x). Hieraus ergibt sich zunächst für den Zentralwert $\mathfrak{C}$ über die hypothetische Verteilung eine große Vereinfachung, da er nach [21] einfach gleich der Hälfte des Integrales über die Funktion f(x) zwischen den Extremen E_0 und E_u des (hier hypothetischen) einfachen K.-G. ist, also gleich der Hälfte der r. H. der Abszisse E_0, wenn jene Aufsum-

mierung von E_u aus stattfindet. Die Bestimmungen der genannten Durchschnitte $\mathfrak{A}$, D, M u. a. erfordern aber, wie oben erwähnt, teilweise sogar eine mehrfache Integration über die Verteilung f(x) des K.-G., der durch sie repräsentiert wird. Dabei läßt sich aber nun offenbar eine Integration ersparen, wenn man sich, wie hier, unmittelbar an die beobachteten r. H. des zusammengesetzten K.-G. halten kann, der als „Summenfunktion" des hypothetischen einfachen aufzufassen ist. Die Vereinfachungen der Formeln von diesem Gesichtspunkte aus sollen als rein rechnerisches Hilfsmittel ebenfalls noch am Schlusse dieses kurzen Abrisses der K.-L. vor dem Übergang zu den speziellen psychologischen Anwendungen entwickelt werden.

Kapitel 4.

Die Interpolation der Verteilungsfunktion nach allgemeinen Gesichtspunkten.

(„Unmittelbares Verfahren" ohne Voraussetzung eines speziellen Verteilungsgesetzes.)

16. Die graphische Methode.

1. Unter den Methoden der Interpolation und der an sie sich anschließenden Operationen, für deren ausführlichere Darstellung und Begründung natürlich auf die bekannten Werke über wissenschaftliches Rechnen zu verweisen ist[1]), besteht das einfachste und voraussetzungsloseste Verfahren in der sog. graphischen Interpolation, die sich auf die geometrische Abbildung der Verteilungsfunktion aufbaut. Bei ihrer allgemeinen Bekanntheit braucht über sie hier wohl nur wenig gesagt zu werden. Nachdem die beobachteten Ordinatengipfel der r. H. auf sog. Millimeterpapier an ihrer Stelle mit der gewählten Genauigkeit eingetragen sind, legt man einfach nach dem Augenmaß eine möglichst stetig gekrümmte Kurve durch sie hindurch, falls man nur die erste Aufgabe einer rein interpolatorischen Behandlung ohne Ausgleichung lösen will. Das Stetigkeitsprinzip, das bei jeder rein empirischen Interpolation allein entscheidet, realisiert sich also hier ausschließlich durch die besondere Fähigkeit der optischen Simultanauffassung, Sprünge in der Krümmungsänderung der Kurve unmittelbar herauszuerkennen. Wenn die Richtung in der gegebenen Punktreihe sich nur allmählich ändert und das Abszissensintervall relativ gering ist, so wird bisweilen sogar die einfache geradlinige Verbindung unmittelbar benachbarter Punkte ausreichen. Auch sonst kann diese einen ersten Anhaltspunkt für die Auswahl der stetigsten Verbindungslinie abgeben. Dabei wird sich überall eine passende absolute Größe der Zeichnung und eine Proportion zwischen den Ordinaten und Abszissen herausfinden lassen, die den Krüm-

1) Vgl. u. a. Weinstein, Handbuch der physikalischen Maßbestimmungen, 1. Band, Die Beobachtungsfehler, ihre rechnerische Ausgleichung und Untersuchung. 1886. H. Bruns, Grundlinien des wissensch. Rechnens. 1903. E. Blaschke, Vorlesungen über mathematische Statistik 1906.

mungskontrast möglichst wirksam gestaltet. Auch Veränderungen der Lage der Bildebene zum Auge werden hierfür empfohlen.

2. Hat man einmal den Verlauf der Funktion innerhalb gewisser, von der Beobachtung gegebener Grenzen aufgezeichnet, so läßt sich übrigens auch noch jenseit dieser Grenzen eine Fortsetzung herausfinden, die dem Augenmaß relativ stetig erscheint. Man bezeichnet diese Ausdehnung der Funktion über die Grenzen der Erfahrung hinaus ganz allgemein als Extrapolation, deren Methoden überall einfach eine Verallgemeinerung der Interpolation bilden. Natürlich nimmt bei der graphischen Extrapolation die innere Notwendigkeit der Fortsetzung nach dem allgemeinen Stetigkeitsprinzip mit der Entfernung von den gegebenen Grenzen schnell ab, indem beliebige neue Krümmungstendenzen stetig aus den Extremen der interpolierten Kurve herausentwickelt werden können. Im allgemeinen bildet aber jedenfalls auch hier die geradlinige Verbindung unmittelbar benachbarter Endpunkte der interpolierten Kurve, also die Tangente an deren Extrem, einen ersten Anhaltspunkt dieser Extrapolation. Dennoch wird man von ihr, wie überhaupt von jedem anderen extrapolatorischen Verfahren, in psychophysischen Funktionen nur sehr selten Gebrauch machen können, da deren Verlauf mit der Variation der Bedingungen ein viel zu wechselnder ist, als daß er eine solche Verallgemeinerung ohne neue empirische Kontrollen gestattet.

3. Bei der innigen Verschmelzung, welche die gegebenen Punkte mit ihrer Verbindungslinie in dem subjektiven Gesamtbilde eingehen, hängt aber hier natürlich die Tendenz zu ihrer eigenen Korrektur nach dem nämlichen Prinzip der Formauffassung so enge mit der Interpolation als solcher zusammen, daß diese graphische Interpolation gewöhnlich sogleich mit der graphischen Ausgleichung zusammen behandelt wird. Falls hier jedoch bereits Messungen der resultierenden Abstände eines freier entworfenen Linienzuges von den gegebenen Punkten oder sonstige geometrische Konstruktionen neuer Treffpunkte hinzutreten, geht diese Ausgleichung ebenso stetig in ein analytisch begründetes Verfahren über, wie wenn man die primäre Verbindung der gegebenen Punkte mittels eines Kurvenlineales herstellt.

4. Auch die sog. graphische Integration, die zur Lösung der uns im 7. Kapitel begegnenden Aufgaben dienen könnte, ist wenigstens bei der Ableitung des einfachen bestimmten Integrales $\int_b^a f(x)\,dx$ zwischen den Grenzen a und b ein Rechnungs- bzw. Abzählungsverfahren, das sich einfach an die fertige graphische Interpolation anschließt. Der Flächeninhalt zwischen der Abszissenachse, den beiden Grenzordinaten in a und b und der stetigen Kurve, der, wie schon S. 36 erwähnt, jenem bestimmten Integral entspricht, kann ja einfach an den Quadraten des Millimeterpapieres abgezählt, bzw. in dem Restbetrag ihrer von der Kurvenlinie selbst abgeschnittenen Bruchteile wenigstens abgeschätzt werden, falls man nicht einfach die ausgeschnittene Fläche im ganzen abwiegen will. Wollte man aber auch noch ein bestimmtes Doppelintegral auf diese Weise auswerten, so wäre natür-

lich erst die Kurve der Funktion $J = \int_{Eu}^{x} f(x)\,dx$ graphisch zu entwerfen. Hierzu ist zunächst eine Reihe von Ordinaten J_1, J_2 J_3 ... aus den Flächenstreifen A_1, A_2, A_3 ... zwischen Eu und x_1, x_1 und x_2, x_2 und x_3 usw. aufzusummieren, indem man $J_1 = A_1$, $J_2 = A_1 + A_2$, $J_3 = A_1 + A_2 + A_3$ usw. setzt, nach deren graphischer Interpolation wie bei dem einfachen Integral weiterverfahren werden kann. Natürlich werden die Ungenauigkeiten des ersten Verfahrens bei Bestimmung der A_1 usw. in die höheren Integrationen jeweils übertragen. Übrigens werden wir sehr einfache analytische Formeln kennen lernen, welche in den bisher in Betracht kommenden Fällen die Doppelintegrale aus den Beobachtungen rechnerisch bereits mit viel größerer Genauigkeit als ein solches graphisches Verfahren bestimmen lassen, so daß man von dieser Integrationsweise wohl nur in seltenen Fällen Gebrauch machen dürfte.

5. Freilich wird diesem ganzen graphischen Verfahren selbst bei gutem Augenmaß und großer Geschicklichkeit und Übung im Zeichnen überall eine gewisse Willkürlichkeit und Unvergleichbarkeit der individuell und dispositionell schwankenden Resultate anhaften müssen. Wenn es also auch zum ersten Überblick über die Funktion und zur fortlaufenden Kontrolle eines anderen Verfahrens überall vortreffliche Dienste leisten kann, so wird sich ein eindeutiges und genau vergleichbares Resultat aus der gegebenen Reihe einzelner Funktionswerte immer nur durch rechnerische Ableitung einer analytischen Funktion erreichen lassen.

17. Die analytische Interpolation nach Lagrange.

a) Die Interpolation der Ordinate z einer relativen Häufigkeit zu einem gegebenen Abszissenwerte x ihres Argumentes.

1. Fechner[1]) benutzte bei seinen Interpolationen der Verteilungsfunktion die wohl am meisten gebräuchliche Formel von Lagrange, die als Umformung einer algebraischen Funktion von der Form

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots + a_n x^n \tag{24}$$

aufzufassen ist. Die $n+1$ Koeffizienten a_0 bis a_n werden hierbei durch die $n+1$ beobachteten Funktionswerte z_0, z_1 ... z_n und ihre zugehörigen Abszissen x_0, x_1 ... x_n so bestimmt, daß diese Gleichung n ten Grades zunächst für jedes Paar zusammengehöriger Beobachtungswerte x_0, z_0; x_1, z_1 usw. streng erfüllt wird. Außerdem läßt sie aber dann auch jedem beliebigen Abszissenwerte x eine r. H. z eindeutig zugeordnet sein. In der Formel kommen nur ganzzahlige Potenzen von x^0 bis x^n vor. Bei $n = 2$ bedeutet sie eine einfache Parabel, auch wird die Kurve zu [24] verallgemeinernd als „Parabel n-ten Grades" bezeichnet.

Die Koeffizienten werden naturgemäß so bestimmt, daß man zunächst die $n+1$ Koeffizienten als Unbekannte und die Beobachtungswerte x_0, z_0, x_0^2, z_0^2 usw. als ihre Koeffizienten auffaßt, die bei $n+1$ voneinander un-

1) Kollektivmaßlehre, S. 182 ff.

abhängigen Beobachtungen aus den $n+1$ selbständigen, in diesen Unbekannten linearen Gleichungen

$$\begin{array}{l} z_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots . a_n x_0^n \\ \vdots \\ z_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots . a_n x_n^n \end{array} \qquad [25]$$

eindeutig berechnet werden können. Setzt man dann die Lösungen für die verschiedenen a-Werte wieder als Koeffizienten in die Grundgleichung [24] ein, so ergibt sich nach entsprechenden Zusammenfassungen eben die Lagrangesche Interpolationsformel[1]):

$$z = (x - x_0)(x - x_1) \ldots . (x - x_n) \left[\frac{z_0}{(x - x_0)} \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots . (x_0 - x_n)} + \ldots . \frac{z_n}{(x - x_n)} \frac{1}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})} \right] \qquad [26]$$

Hierbei können die Intervalle zwischen den Abszissen $(x_1 - x_0)$ usw. der beobachteten r. H. beliebig verschieden sein. Die Formel gestattet aber natürlich wesentliche Vereinfachungen, wenn man wiederum äquidistante Funktionswerte beobachtet hat.

2. Wenn nun bloß eine begrenzte Anzahl von $n+1$ Beobachtungen vorliegt, wird man also stets eine einzige Parabel n-ten Grades durch sie hindurchlegen können. Dagegen ist es, wie schon S. 42 erwähnt, zumeist völlig dahingestellt, ob eine neue $(n+2)$ te Beobachtung ebenfalls zu der nämlichen Funktion paßt, ja die sonstigen allgemeinen Erfahrungen und theoretischen Überlegungen, die uns von § 20 an beschäftigen sollen, lassen von vornherein das Gegenteil erwarten. Denn die Verteilungen, die aus möglichst vielen Beobachtungen unter genügend konstanten Bedingungen konstruiert sind, zeigen insbesondere auch auf psychophysischem Gebiete bei freihändiger stetiger Verbindung der Ordinaten eine größere Verwandtschaft mit transzendenten Funktionen, die nur durch eine unendliche, wenn auch konvergente Reihe von Potenzen der unabhängigen Variablen mit allerdings rasch abfallenden Koeffizienten darzustellen sind. Vor allem die Tatsache der „Extreme" des K.-G. läßt sich nur so generalisieren, daß jenseit bestimmter Grenzen $E_u = x_0$ und $E_0 = x_p$ entweder sämtliche Funktionswerte Null sind oder zum mindesten praktisch mit der Abszissenachse zusammenfallen bzw. einen ihr als ihrer „Asymptote" zustrebenden Verlauf zeigen. Diese beiderseits unbegrenzte Flankenreihe von annähernden oder vollständigen Nullwerten würde also bei einer durchgängigen Berücksichtigung des ganzen Verlaufs der Verteilungsfunktion im Ansatze der Lagrangeschen Formel allein schon eine unendliche Potenzreihe zu einer Interpolation erforderlich machen. Auch wären wenigstens einige dieser Flankenwerte $z = o$ hinzuzunehmen, um auch nur das beiderseitige vollständige Einlenken in eine der x-Achse möglichst eng sich anschmiegende Oszillation schon innerhalb der Extreme stetig vorzubereiten. Die endliche Reihe ganzer Potenzen nach

1) Beispiele aus der psychophysischen Praxis gibt F. M. Urban, Die psychophysischen Maßmethoden als Grundlagen empirischer Messungen, Archiv f. d. ges. Psychologie. Bd. XV. 1909, S. 335 f.

[24] kann also immer nur den Zweck verfolgen, den wahrscheinlichen Verlauf zwischen den beobachteten Werten höchstens annähernd darzustellen, und darf insbesondere keinerlei Bedeutung über die Extreme hinaus beanspruchen.

Eben deshalb begnügt man sich aber nun bei Verwendung der algebraischen Funktionen im allgemeinen schließlich auch damit, immer nur ein Stück der ganzen Verteilungsfunktion mit je einem Funktionsausdruck einheitlich und mit durchweg stetigen Richtungsänderungen darzustellen. Man vereinigt also je s aufeinander folgende Werte $z_0, z_1 \ldots z_s$; $z_s, z_{s+1} \ldots, z_{2s}$ usw. zu je einer algebraischen Funktion $(s-1)$ten Grades, wodurch natürlich die Formel [26], zumal bei äquidistanten Ausgangswerten, bedeutend vereinfacht werden kann. Freilich wird hiermit zunächst bei dem Übergang zur neuen Funktion die Stetigkeit der Richtungsänderung preisgegeben, wenn auch die Funktion selbst keinen Sprung macht. Denn die Richtungsänderung der Kurve, die in den Differentialquotienten erster bis n-ter Ordnung zum Ausdruck kommt — der $n+1$-te verschwindet hier, nachdem der n-te einfach eine Konstante war — ist nur innerhalb der nämlichen Interpolations-Funktion eine stetige, da im allgemeinen die nächstbenachbarte doch nicht mit ihr zusammenfällt.

Der Grenzfall dieser stückweisen Darstellung mittels algebraischer Funktionen ist natürlich wiederum die lineare Verbindung von jeweils nur zwei unmittelbar benachbarten Werten, die sich analytisch so darstellt, daß das System der „Beobachtungsgleichungen" [25] durch lauter Paare linearer Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} z_s &= a_{s,0} + a_{s,1}\, x_s \\ z_{s+1} &= a_{s,0} + a_{s,1}\, x_{s+1} \end{aligned} \qquad [27]$$

ersetzt wird, aus denen sich dann je eine lineare Interpolationsfunktion von der Form

$$z = \left(\frac{z_s x_{s+1} - z_{s+1} x_s}{x_{s+1} - x_s}\right) + \frac{z_{s+1} - z_s}{x_{s+1} - x_s} \cdot x \qquad [28]$$

ergibt. Die einfachste Form erlangt man freilich erst durch eine passende Änderung der Koordinaten, die in Fig. 2 geometrisch veranschaulicht ist. Man verlegt den Anfangspunkt in den ersten der beiden linear zu verbindenden Punkte A mit den alten Ordinaten x_s, z_s. Hierdurch wird

$$\begin{aligned} z' &= z - z_s;\; z'_s = z_s - z_s = 0;\; z'_{s+1} = z_{s+1} - z_s = \Delta_s \\ x' &= x - x_s;\; x'_s = x_s - x_s = 0;\; x'_{s+1} = x_{s+1} - x_s = i \end{aligned} \qquad [28a]$$

und die neue bekannteste Gleichung für die rein lineare Interpolation zwischen x_s und x_{s+1} lautet somit einfach:

$$z' = \frac{\Delta_s}{i}\, x', \qquad [29]$$

wie man sich natürlich auch aus Fig. 2 durch die bekannte Proportion

$$z' : x' = \Delta : i$$

geometrisch ableiten kann. Bei absoluten H. steht für z' wieder Z'.

4. Wenn nun auch diese einfachste und unstetigste Verbindungsweise für viele Zwecke ausreicht, so entfernt sie sich doch von dem wahrscheinlichen stetigen Verlauf meistenteils am weitesten, und läßt z. B. auch das Maximum der ganzen Funktion $\mathfrak{V}(x)$ nicht anders bestimmen, als es auch schon aus dem unstetigen K.-G. der einzelnen Funktionswerte ohne weiteres als größter Wert zu entnehmen ist, weil eben die Gerade die für das Maximum unerläßliche Richtungsänderung ausschließt.

Viel stetiger kann sich der Übergang zwischen den einzelnen Teilfunktionen aber schon bei der Zusammenfassung von je drei aufeinander folgenden Werten gestalten, die wohl die häufigste Anwendung der Lagrangeschen Formel ausmacht. Man nimmt also z. B. die Werte z_0, z_1, z_2; z_2, z_3, z_4 usw. zu einer gewöhnlichen Parabel zusammen, denkt sich somit die ganze Verteilungskurve in lauter Parabelbogen I, II usw. zerlegt, die nur zwischen z_0 und z_2, z_2 und z_4 usw. gültig sind. Hierbei ist es dann wiederum vor-

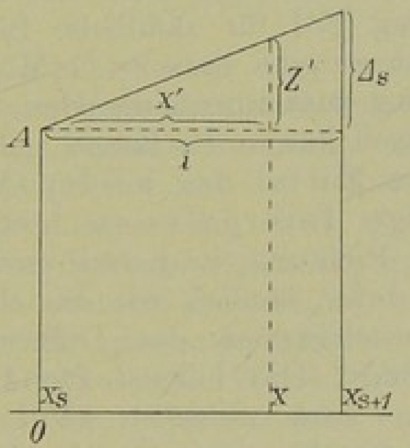


Fig. 2.
Schema der einfachsten, linearen Interpolation.

teilhaft, den Nullpunkt der Abszissen bei der Behandlung jedes einzelnen Bogens in dessen Mitte zu verlegen[1]). Wir ziehen also von x, sowie von allen x_1, x_2 usw. bei I den Wert x_1, bei II den Wert x_3 usw. ab und setzen unter der Annahme äquidistanter Beobachtungswerte:

$$x'_0 = x_0 - x_1 = -i;\ x'_1 = x_1 - x_1 = 0;\ x'_2 = x_2 - x_1 = +i. \qquad [30]$$

So erlangen wir aus Gleichung [26] für $n = 2$

$$z_I = \frac{1}{2}\left(z_0 x'^2 - z_0 i x' - 2 z_1 (x'^2 - i^2) + z_2 x'^2 + z_2 i x'\right). \qquad [31^{2)}]$$

Setzt man hierin außerdem

$$x' = \alpha i, \qquad [32]$$

indem man x' von seinem Nullpunkt aus in echten Brüchen α des Intervalles i positiv und negativ bis zur Grenze der Gültigkeit des

1) Vgl. Urban, a. a. O. S. 374.

2) Diese Gleichung ist natürlich ebenso wie [28] durch direkte Berechnung aus einem nach [25] neu angelegten speziellen System für $n = 2$ leicht zu finden.

Parabelbogens fortschreiten läßt, so fällt i^2 als Quadrat der neuen Einheit fort, und wir erlangen als allgemeine Formel:

$$z_I = \frac{1}{2}\left(z_0\alpha^2 - z_0\alpha - 2z_1(\alpha^2 - 1) + z_2\alpha^2 + z_2\alpha\right)$$
$$= \frac{\alpha^2}{2}(z_0 - 2z_1 + z_2) - \frac{\alpha}{2}(z_0 - z_2) + z_1. \qquad [33]$$

Für z_{II}, z_{III} usw. ist jetzt nur noch zu den Indices der z immer ein weiteres Vielfaches von 2 hinzuzufügen, da α für alle Bogen den Bruchteil des Intervalles bedeutet, um den die Interpolationsabszisse von dem Mittelpunkte des Stückes x_1, x_3, x_5 usw. nach links oder rechts abweicht. Freilich ist diese stückweise Interpolation bei $s > 2$, also abgesehen von der rein linearen, nicht mehr eindeutig, da die Zusammenfassung zu je s aufeinander folgenden Werten natürlich bei jedem beliebigen beginnen kann. Jene Parabelbogen können also anstatt durch z_0, z_1, z_2; z_2, z_3, z_4 usw. auch durch $z_{-1} = 0$, z_0, z_1; z_1, z_2, z_3 usw., also stets auf zweifache Weise gelegt werden, so daß Gleichung [33] für sämtliche Indices x, $x+1$, $x+2$ statt 0, 1, 2, anwendbar ist. Kurz es gibt stets $s-1$ Möglichkeiten, wie man eine stetige Funktion $\mathfrak{B}(x)$ aus zusammenhängenden Stücken je einer Parabel $(s-1)$ten Grades aufbauen kann. Es lassen sich aber nun bei $s = 3$ sehr leicht das arithmetische Mittel der beiden Möglichkeiten als endgültige und eindeutige Interpolation bestimmen, die zugleich die starken Änderungen der Richtung in jedem zweiten beobachteten Punkte aufhebt, wenn sie auch dafür, ähnlich wie die ebenfalls eindeutige lineare Interpolation, solche Unstetigkeiten des Differentialquotienten in sämtlichen Punkten herbeiführt. Die Formel für dieses arithmetische Mittel kann natürlich auch nur noch zwischen zwei unmittelbar benachbarten Punkten gültig sein, da nur hier jede der im Mittel berücksichtigten Urfunktionen gleichzeitig durch beide Funktionswerte hindurchgeht, während in jedem Intervall dann natürlich auch ungültige, d. h. bei der Interpolation hier nicht berücksichtigte Stücken aller anderen Teilfunktionen an beiden oder wenigstens einem der Grenzpunkte vorbeigehen.

Leitet man speziell für $s = 3$, also bei der einfachen Parabel, dieses arithmetische Mittel aus den beiden Möglichkeiten z_a und z_b ab, so muß natürlich die Abszisse α in z_a und z_b die nämliche Bedeutung haben, so daß also (bei der Kombination der durch z_0, z_1, z_2 gelegten Parabel z_a mit der Kurve z_b durch z_1, z_2, z_3) in der Gleichung [33] für z_b das α durch $(\alpha - 1)$ zu ersetzen ist. Es folgt also aus Gleichung [33], in der nur z_a für z gesetzt wird, und aus der folgenden Gleichung für die zweite Parabel z_b

$$2z_b = (\alpha^2 - 2\alpha + 1)(z_1 - 2z_2 + z_3) - (\alpha - 1)(z_1 - z_3) = 2z_2 \qquad [33a]$$

als arithmetisches Mittel aus beiden

$$z' = \frac{z_a + z_b}{2} = \frac{\alpha^2}{4}(z_0 - z_1 - z_2 + z_3) - \frac{\alpha}{4}(z_0 + 3z_1 - 5z_2 + z_3) + z_1. \ [33b]$$

Diese zwischen z_1 und z_2, also nur für positive Werte von $\alpha < 1$ gültige Formel ist jetzt in ihren Koeffizienten von beiden Seiten her, durch z_0 und z_3, beeinflußt und so viel weniger willkürlich wie [33] allein für sich.

b) Die Umkehrung der Interpolation.
(Bestimmung des Argumentes x zu einem direkt oder indirekt gegebenen Funktionswert z.)

1. Berechnung des Argumentes x zur r. H. $z = a$.

Die graphische Interpolation ist auch insofern das einfachste Verfahren dieser Art, als bei ihr nach Zeichnung des Kurvenzuges je zwei Koordinaten, die hierdurch einander neu zugeordnet werden, von seiten der Ordinate aus ebenso leicht zu bestimmen sind, als vorhin von seiten der Abszisse. Wurde hier zunächst in einem beliebigen Punkte der Abszissenachse eine Senkrechte errichtet und von deren Schnittpunkt mit der Kurve das Lot auf die Ordinatenachse gefällt, so nimmt bei der Umkehrung einfach das nämliche Verfahren von dem beliebigen Punkte der Ordinatenachse seinen Ausgang. Bei der rechnerischen Interpolation erfordert nun diese Umkehrung die Auflösung der unentwickelten Funktionsgleichung

$$f(x,z) = 0$$

nach x, bzw. α, nachdem sie bisher in den Formeln [26] bis [33b] immer nach z aufgelöst war. Doch kann man natürlich auch hier sofort von den das z explizite enthaltenden Formeln ausgehen. Die Ordnung der Parabelfunktion, die man für z angesetzt hat, ist selbstverständlich auch für den Grad der Gleichung für x entscheidend, doch nicht ohne weiteres mit ihm identisch, da bei indirekten Bestimmungen des z, z. B. als Maximum, die Ausgangsgleichung erst eine weitere Behandlung erfordert. Doch sucht man im allgemeinen, nicht über die quadratische Form der Endgleichung für x, bzw. α hinauszukommen. Die passende Wurzel ist aus dem Zusammenhange stets leicht herauszufinden. Im folgenden sind nun einige Spezialaufgaben behandelt, die uns in der psychophysischen Methodik begegnen werden.

Bei der Analyse der K.-G. nach § 14, 3 S. 38 ff. wird im siebenten Kapitel, § 30, b das Argument x zu bestimmen sein, bei dem die r. H. gleich $\frac{1}{2}$ ist. Da dieser Punkt der Funktion im allgemeinen nicht gerade selbst beobachtet ist, so muß er meistens erst interpolatorisch, unter Voraussetzung einer wenigstens in diesem Intervall auf die Funktion zutreffenden Formel, gesucht werden. Die Aufgabe sei zuerst allgemein für $z = a$ behandelt. Bei einer solchen direkten Bestimmung des z ist sofort die Gleichung der Funktion selbst nach x bzw. α aufzulösen. Man kann nun zunächst eine Gerade durch die Gipfel von $z_s < a$ und $z_{s+1} > a$ gelegt denken, also linear nach [29] und Fig. 2 interpolieren. Setzt man dort für z' den Wert a, so findet man

$$x' = x - x_s = \alpha i = \frac{i \cdot (a - z_s)}{z_{s+1} - z_s}. \qquad [34]$$

Interpoliert man dagegen nach [33b] eine einfache Parabel, die durch die Punkte $z_s < a$, $z_{s+1} > a$ hindurchgeht, so erhält man für α die quadratische Gleichung:

$$\alpha^2 - \alpha \frac{A}{B} = \frac{4(a - z_1)}{B},$$

worin
$$A = z_{s-1} + 3z_s - 5z_{s+1} + z_{s+2}$$
$$B = z_{s-1} - z_s - z_{s+1} + z_{s+2}$$
$$\alpha = \frac{1}{2B}\left(A \pm \sqrt{A^2 + 16B(a - z_1)}\right) \qquad [35]$$

Nach den Voraussetzungen für [33b] kommt nur die Wurzel $0 < \alpha < 1$ in Frage.

Zum Beispiel soll für eine später noch öfter behandelte Funktion $F_k(x)$ nach S. 40, deren z-Werte in Tabelle 5 und Fig. 4 angegeben sind, das Argument x für $z = \frac{1}{2}$ nach [34] und [35] gesucht werden. Die in der Nähe des kritischen Punktes einander zugeordneten äquidistanten Koordinaten mit $i = 3$ sind aus später ersichtlichen Gründen nach fallenden Abszissen geordnet, so daß also auch das Vorzeichen von α nach seiner Berechnung umzukehren ist. (Die Zahl 50 ist das n nach S. 39ff.)

Index ν	$s-1$	s	$s+1$	$s+2$
x_ν :	55	52	49	46
50 z :	7	13	33	45

Das Maß der Ordinate der relativen H. $^1/_2$ ist also hier $a = 25$. Somit folgt aus [34]:
$$\alpha \cdot i = \frac{3 \cdot (25 - 13)}{33 - 13} = 1{,}8$$
$$x = 52 - 1{,}8 = \mathbf{50{,}2}.$$

Aus [35] aber ergibt sich als gültige Wurzel:
$$\alpha = \frac{1}{12}\left(-74 + \sqrt{5476 + 1152}\right) = 0{,}617$$
$$x = x_s - \alpha \cdot i = 52 - 0{,}617 \cdot 3 = \mathbf{50{,}149},$$

also ein nur sehr wenig kleinerer Wert als bei rein linearer Interpolation Wie Fig. 4 zeigt, ist ja auch der Verlauf der Kurven dieser in § 14, 3 genannten Gattung in der Mitte wirklich annähernd geradlinig, so daß [34] meistens ausreicht. Wir werden übrigens auf diese Aufgabe in § 30, 2 nochmals zurückkommen.

2. Die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Kurven.

Da bisweilen auch dem Schnittpunkt zweier Verteilungskurven der eben genannten Art eine theoretische Bedeutung beigemessen wird, so wollen wir auch diese Aufgabe hier sogleich allgemein behandeln. Da die Ordinaten des Schnittpunktes bei den Kurven gemeinsam sind, setzen wir ihre auf die nämliche unabhängige Variable bezogenen Funktionswerte allgemein einander gleich und suchen das x bzw. α, das diese Gleichung befriedigt. Der Überblick über die beobachteten Funktionswerte ergibt auch hier zunächst das kritische Intervall zwischen $x_s < x$ und $x_{s+1} > x$. Begnügt man sich vorerst wieder für beide Funktionen $z_{1,s}$ usw. und $z_{2,s}$ usw. mit einer geradlinigen Verbindung von $z_{1,s}$ und $z_{1,s+1}$ bzw. $z_{2,s}$ und $z_{2,s+1}$, so ist diesmal auf [28] zurückzugehen. Denn bei der Verschiedenheit von $z_{1,s}$ und $z_{2,s}$ kann im allgemeinen nicht auch $z_{1,s}$ und $z_{2,s}$ zugleich mit x_s durch die Wahl eines neuen Anfangspunktes A des Koordinatensystemes zum Verschwinden gebracht werden, wohl aber x_s für sich allein durch die Wahl des neuen Ausgangspunktes $A' = x_s, 0$. Dadurch wird [28], da $x'_{s+1} = x_{s+1} - x_s = i$, zunächst allgemein: $z' = \frac{z_s \cdot i}{i} + \frac{z_{s+1} - z_s}{i} x'$,

oder, da $x' = \alpha \cdot i$, einfach:

$$z' = z_s + \alpha (z_{s+1} - z_s).$$

Durch Gleichsetzung von z'_1 und z'_2 ergibt sich also

$$z_{1,s} + \alpha (z_{1,s+1} - z_{1,s}) = z_{2,s} + \alpha (z_{2,s+1} - z_{2,s})$$

$$\alpha = \frac{z_{1,s} - z_{2,s}}{z_{1,s} - z_{2,s} + z_{2,s+1} - z_{1,s+1}} \qquad [36]$$

Die Abszisse des gesuchten Schnittpunktes wird dann schließlich

$$x = x_s + \alpha i. \qquad [36a]$$

Interpoliert man aber wieder mittels [33b], so ist folgende quadratische Gleichung nach α aufzulösen.

$$\frac{\alpha^2}{4} B_1 - \frac{\alpha}{4} A_1 + z_{1,s} = \frac{\alpha^2}{4} B_2 - \frac{\alpha}{4} A_2 + z_{2,s},$$

oder

$$\alpha^2 - \frac{\alpha(A_1 - A_2)}{B_1 - B_2} - \frac{4 (z_{2,s} - z_{1,s})}{B_1 - B_2}.$$

Hierin bedeuten die A und B analog wie in [35]:

$$A_1 = z_{1,s-1} + 3z_{1,s} - 5z_{1,s+1} + z_{1,s+2}$$
$$B_1 = z_{1,s-1} - z_{1,s} - z_{1,s+1} + z_{1,s+2}$$
$$A_2 = z_{2,s-1} + \text{usw.}$$

Somit ist

$$\alpha = \frac{1}{2(B_1 - B_2)} \left[(A_1 - A_2) \pm \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 16 (B_1 - B_2)(z_{2,s} - z_{1,s})} \right] \qquad [37]$$

Als Beispiel werde der Schnittpunkt der schon vorhin betrachteten Kurve der Fig. 4 mit einer zweiten Kurve von analoger Form, aber symmetrischer Hauptrichtung gesucht, die der nämlichen Versuchsreihe angehört. Man stellt zunächst die auf die nämlichen äquidistanten Abszissen (mit $i = 3$) bezogenen Ordinaten der beiderseits beobachteten Funktionswerte zusammen, die auch den Schnittpunkt in dem nämlichen Intervall, wie vorhin $z = \frac{1}{2}$, voraussehen lassen, nämlich zwischen 52 und 49. Auch die Indices für [36] und [37] werden daher die nämlichen wie vorhin:

Index ν:	$s-1$	s	$s+1$	$s+2$
x_ν :	55	52	49	46
$50z_1$:	7	13	33	45
$50z_2$:	22	17	6	0

Somit folgt zunächst aus [36] bei linearer Interpolation:

$$\alpha = \frac{13 - 17}{13 - 17 + 6 - 33} = \frac{-4}{-31} = 0{,}129.$$

Da die Abszissen fallen, ist α wieder negativ zu nehmen. Nach [36a] ergibt sich somit als Abszisse des Schnittpunktes

$$x = 52 - 0{,}129 \cdot 3 = \mathbf{51{,}613}.$$

Bei Parabelinterpolation findet man bei dem fast geradlinigen Verlauf beider Kurven in dieser Zone hier auch wieder einen ganz ähnlichen Wert. Als gültige Wurzel nach [37] erhält man, da

$$\begin{aligned} A_1 &= -74 & B_1 &= +6 \\ A_2 &= +43 & B_2 &= -1 \\ A_1 - A_2 &= -117 & B_1 - B_2 &= +7, \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{14}\left(-117 + \sqrt{13689 + 448}\right) = 0{,}135$$

Es schneiden sich also beide Parabeln in

$$x = 52 - 0{,}135 \cdot 3 = \mathbf{51{,}595}.$$

Die zugehörige r. H. z ist natürlich jeweils einfach durch Einsetzung des gefundenen Arguments x in die Ausgangsgleichung [33b] für eine von beiden Funktionen zu berechnen, die nach richtiger Rechnung hierdurch beide identisch erfüllt werden müssen. In der Tat finden wir in unserem Falle für $\alpha = 0{,}135$

$$50 z_{1,x} = 15{,}52$$
$$50 z_{2,x} = 15{,}54,$$

wobei in der zweiten Dezimale offenbar nur ein kleiner Abrundungsfehler zur Geltung kommt.

Beide hier gelösten Aufgaben lassen sich natürlich nach allen möglichen Interpolationsmethoden behandeln. Doch werden wir in unserer Praxis mit dem hier Gebotenen bereits ausreichen, so daß wir hierauf nicht weiter zurückkommen. Bei der sogen. Differenzen-Interpolation (s. § 19), bei der diese Aufgaben z. B. von Lehmann erwähnt werden, werden ja die Lösungen aus Formeln abgeleitet, die zu [28] und [33a] analog sind, so daß sie ohnehin wieder mit [34] bis [37] übereinstimmen.

3. Die Bestimmung des Maximums der Verteilungskurve (das sogen. Dichtigkeitsmittel $\mathfrak{D}$).

An alle bisher genannten Formeln läßt sich dann natürlich auch die Differentiation und Integration innerhalb der Grenzen ihrer Gültigkeit anschließen, die man in den Lehrbüchern ausführlich dargelegt findet. Für unsere Zwecke werden wir uns dagegen hierzu im wesentlichen der erst im nächsten Paragraphen entwickelten Differenzenmethode bedienen, die zwar auf der Voraussetzung der nämlichen analytischen Funktion für $\mathfrak{V}(x)$ fußt, aber bei äquidistanten Ordinaten von vorne herein mit einer ganz analogen Formel operiert wie Gl. [30], wobei deren Bestandteile aus den beobachteten

Einzelwerten z_0, z_1 usw. viel unmittelbarer als bei [26] gebildet werden können. Nur die Differenzierung der Gleichung [30] sei schon hier kurz erwähnt, da sie eine rasche annähernde Bestimmung des Maximums der Verteilungskurve, des sogen. „Dichtigkeitsmittels $\mathfrak{D}$" (s. S. 45) ermöglicht. Doch entspricht eben auch ihr eine ganz analoge Gleichung der Differenzenmethode, wenn man sich mit einer ebenso einfachen Funktion begnügt. Wir betrachten hier zunächst die Bedingungen für das Maximum der einfacheren Funktion [33] $z = f(\alpha)$, da diese in der psychophysischen Literatur bei der Anwendung der Lagrangeschen Methode bisher verwendet wurde. Sie bestehen bekanntlich darin, daß der erste Differentialquotient der Funktion nach der unabhängigen Variablen α verschwindet, während der zweite negativ wird. Es liegt also ein Maximum bei demjenigen α ($\mathfrak{D}$), das aus der linearen Gleichung

$$\frac{dz}{d\alpha} = 0 = \alpha(z_0 - 2z_1 + z_2) - \frac{1}{2}(z_0 - z_2) \qquad [38]$$

eindeutig zu finden ist, wenn zugleich

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} = (z_0 - 2z_1 + z_2) < 0 \text{ oder} \qquad [39]$$
$$\frac{1}{2}(z_0 + z_2) < z_1 \cdot$$

Ein zweites Extrem ist dann im Bereich der nämlichen einfachen Parabel ausgeschlossen. Aber auch dieses eine Extrem besitzt bei den Voraussetzungen der Gl. [33] nur dann für die Funktion $\mathfrak{V}(x)$ Gültigkeit, wenn sein α zwischen -1 und $+1$ liegt, bezw. sein x zwischen x_0 und x_2.

Greift man nun drei unmittelbar zusammenhängende Ordinaten heraus, die zugleich [39] erfüllen, z. B. wenn die mittlere unter ihnen die größte ist, so liegt das gesuchte Maximum bei

$$\alpha(\mathfrak{D}) = \frac{z_0 - z_2}{2(z_0 - 2z_1 + z_2)} \qquad [40]$$

Kehrt man schließlich an der Hand der Beziehungen [32] wieder zu den ursprünglichen Abszissen zurück, so liegt das Maximum also um den Wert $\alpha(\mathfrak{D}) \cdot i$ links oder rechts von x_1, je nachdem $\alpha(\mathfrak{D}) <$ oder > 0.

Wie die Parabelinterpolation nach [33] überhaupt, so ist aber natürlich auch diese Ableitung des Maximums an sich noch keine eindeutige. Im allgemeinen wird dieses also wieder erst aus der Kurve [33b] zwischen zwei unmittelbar benachbarten Punkten eindeutig zu bestimmen sein. Unter Berücksichtigung der neuen Koeffizienten von α^2 und α in Gl. [33b] findet man also die neue, eindeutige Bestimmung des von x_1 aus zu rechnenden α für das Maximum zwischen x_1 und x_2 als

$$\alpha'(\mathfrak{D}) = \frac{z_0 + 3z_1 - 5z_2 + z_3}{2(z_0 - z_1 - z_2 + z_3)}, \qquad [41]$$

wenn gleichzeitig der Koeffizient von α^2 negativ, also

$$z_0 + z_3 < z_1 + z_2 \cdot \qquad [42]$$

Dabei sind hier überhaupt nur noch positive Werte von $\alpha' < 1$ gültig.

Natürlich ist hiermit zunächst immer nur ein relatives Maximum zwischen den mit z_1 und z_2 bezeichneten Punkten eindeutig bestimmt. Erst die Vergleichung der verschiedenen Intervalle kann dann darüber Auskunft geben, ob es sich auch um das als $\mathfrak{D}$ bezeichnete absolute Maximum der r. H. handelt. Häufig reicht aber schon die graphische Interpolation hin, um das kritische Intervall ausfindig zu machen, in welchem sich das absolute Maximum befinden muß, ja bisweilen genügt hierzu schon ein Blick auf die einzelnen Beobachtungszahlen als solche.

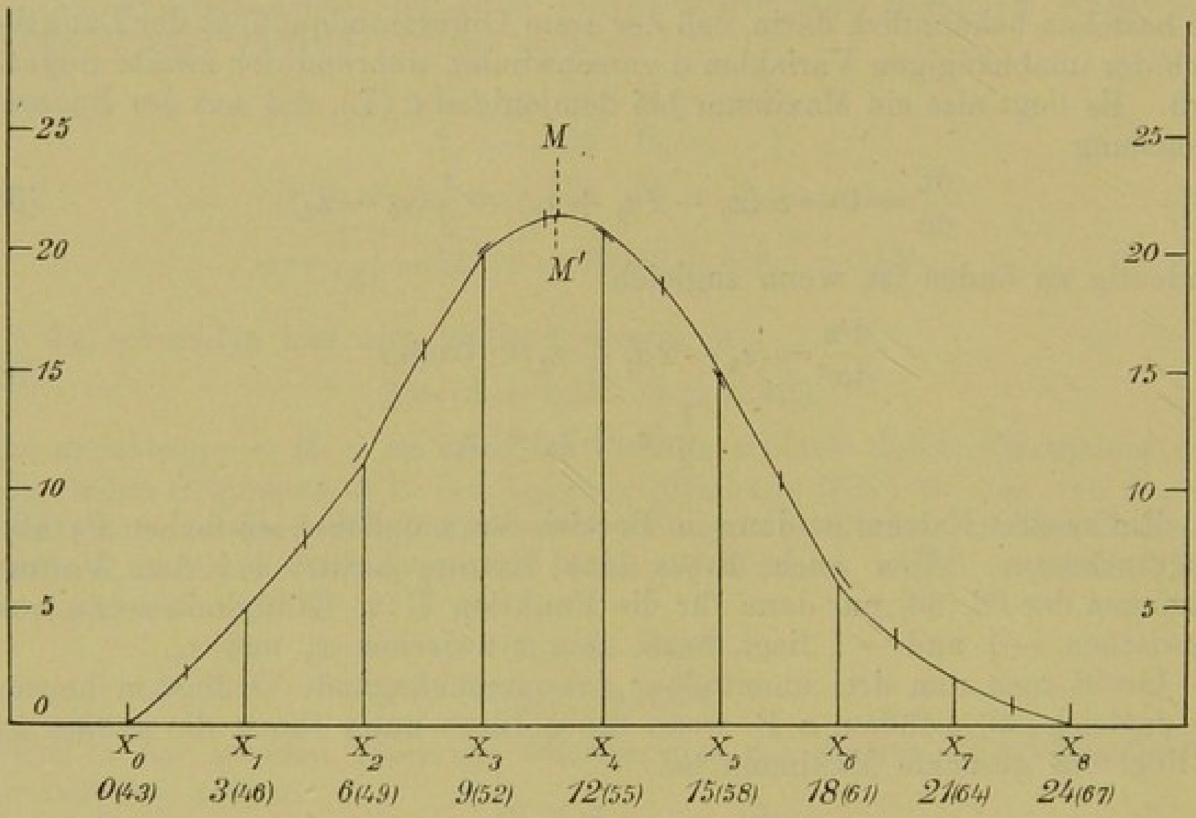


Fig. 3.

Die Interpolation einer (mittleren) einfachen Parabel nach Formel [33 b] zwischen je zwei benachbarten Ordinatengipfeln und die Ausgleichung mittels einer solchen Interpolation.

Später werden wir allerdings noch eine genauere Methode zur Bestimmung des Maximums von $\mathfrak{W}$ (x) kennen lernen. Doch haben schon Fechner und in neuester Zeit Urban a. a. O. mittels der einfachen Parabelinterpolation [33] das Dichtigkeitsmittel annähernd bestimmen können. Insbesondere Gl. [41] wird bereits eine ziemlich gute und dabei zugleich eindeutige Lösung geben können. Im folgenden sei daher auch unser Beispiel für die spätere genauere Bestimmung sogleich nach dieser einfachen Methode behandelt, aus dem zugleich alles Bisherige noch anschaulicher werden soll. Es ist eine den Versuchen von H. Keller über die Unterschiedsschwellen für Schallintensitäten entnommene Kurve der Gleichheitsurteile nach der in § 14, 3 behandelten Methode der systematischen Abstufung der Vergleichsreize[1]) und wurde schon oben in § 15 auf ihr arithmetisches Mittel $\mathfrak{A}$ und ihren Zentralwert $\mathfrak{C}$ hin untersucht (s. S. 46). Fig. 3 zeigt die

1) Wundt, Psychol. Studien, Bd. 3, 1. H. 1907, S. 49 ff. Tabelle S. 89 (Mc N-R = 55).

9 beobachteten r. H. (einschließlich der Extreme). Das Intervall i der Abszissen war 3. Folgende Tabelle gibt die beobachteten z-Werte:

Tabelle 1.

Index ν:	(−1)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	(9)
x_ν:	(40)	43	46	49	52	55	58	61	64	67	69
50z:	(0)	0	5	11	20	21	15	6	2	0	(0)

Die graphische Interpolation nach Art der Fig. 3 läßt das Maximum (in der Figur bei M) zwischen $x = 52$ und 55 erwarten. Für die Fig. 3 wurden auch die Mittelpunkte $z'_{s+0,5}$ der Intervalle nach Gl. [33b] mit dem unten aus Tabelle 2 ersichtlichen Resultate interpoliert. Sie sind durch senkrechte Striche angedeutet. Hierauf ließ sich der ungefähre Verlauf der einzelnen Parabelbogen leicht ergänzen.

Wir rechnen wieder einfach mit den absoluten H. $Z = 50z$ und setzen

$$z_0 = 11 \quad z_1 = 20 \quad z_2 = 21 \quad z_3 = 15,$$

die durch die Ungleichung

$$36 < 41$$

die Bedingung [42] für ein Maximum zwischen ihnen erfüllt zeigen. Dieses liegt nun nach [41] bei

$$\alpha'(\mathfrak{D}) = \frac{11 + 60 - 105 + 15}{2(11 - 20 - 21 + 15)} = \frac{-19}{-30} = 0{,}633$$

oder bei

$$\mathfrak{D} = x_1 + \alpha' \cdot i = 52 + 0{,}633 \cdot 3 = \mathbf{53{,}899} \cdot$$

Die maximale a. H. dieser Stelle findet man dann aus Gl. [33b]

$$Z'(\mathfrak{D}) = 21{,}55.$$

Nach der genaueren Methode wird sich später $\alpha = 0{,}565$ ergeben, also immerhin bereits eine gute Übereinstimmung, die bei dem ruhigen Verlauf von $\mathfrak{V}(x)$ im ganzen hier auch leicht begreiflich ist.

Die Symmetrie der ganzen Verteilung Tab. 1 bringt es übrigens hier mit sich, daß man kein wesentlich anderes Resultat erhalten hätte, wenn man eine beliebige der beiden einzelnen Parabeln z_a oder z_b allein für sich verwendet, also Gleichung [40] benutzt hätte.

Bei Herstellung von z_a aus z_2 bis z_4, d. h. 11, 20 und 21 (statt z_0 bis z_1) würde man nach Gl. [40] den fast gleichen Wert 53,87 gefunden haben. Die Vorschrift einer Auswahl der 3 absolut größten Werte 20, 21, 15 hätte hier ein von 55 aus gerechnetes $\alpha = -0{,}357$ ergeben, dem somit von 52 aus $\alpha = +0{,}643$ statt 0,633 entspräche. Dieses kann natürlich, da ja die Reihenfolge in der Zusammenfassung der z-Werte zu Parabelbögen frei steht, genau die nämliche Gültigkeit wie das andere beanspruchen, so daß zwischen ihnen in der Tat nur durch den Übergang zu Formel [33a] bezw. [41] entschieden werden kann. Bei ihrer Einfachheit sollte man daher diese Formeln [33a] und [41] ganz allgemein selbst dann von vorne herein allein anwenden, wenn die Ähnlichkeit der beiden Partialkurven an und für sich das Resultat der drei Möglichkeiten nur wenig verschieden ausfallen läßt.

c) Die Ausgleichung der Funktion mittels Interpolation.

Auch jede analytische Interpolationsmethode läßt sich ebenso wie die graphische weiterhin eventuell zu einer „Ausgleichung“ mutmaßlicher „Fehler“ der beobachteten Funktionswerte benutzen. Nur muß natürlich hier auch deren Prinzip zunächst auf einen klaren rechnerischen Ausdruck gebracht werden. In diesem Zusammenhange handelt es sich einstweilen nur um die, wie gesagt, noch sehr willkürliche und den wahrscheinlichen z-Werten nur ganz annähernd entsprechende Beibehaltung der allgemeinen Form von Gl. [24] für die Verteilungsfunktion, die nur eben einfacher und ruhiger verlaufen soll, als die durch die $n + 1$ Beobachtungswerte genau hindurchgehende Kurve n-ter Ordnung. Man könnte also zunächst einfach wiederum für die ganze Verteilung eine einfachere Parabel von niedrigerer, z. B. $(s - 1)$ ter Ordnung als generellen, wahren Verlauf ansehen, von dem die n beobachteten z-Werte in irgend einer Weise abweichen. Wenn über die Verteilung der Fehler gar nichts weiter bekannt ist, bezw. wenn dieselbe für eine völlig zufällige gelten darf, kann man natürlich nicht etwa s Werte herausgreifen und durch sie jene einfachere Form $(s - 1)$ -ter Ordnung, was nach [25] möglich sein muß, wieder genau hindurchlegen. Denn die $n - s$ anderen Werte weichen dann natürlich hiervon im allgemeinen ab. Durch alle n Beobachtungsgleichungen zusammen sind ja die s Koeffizienten *überbestimmt*, so daß also *zu einem eindeutigen Ergebnis erst noch etwas über die „Verteilung“ der Beobachtungsfehler auszumachen ist. Hierin besteht eben die spezielle Voraussetzung jeder analytischen Ausgleichungsmethode.* Die „Fehler“ sind nun offenbar die Differenzen zwischen den z-Werten, die man aus den s Konstanten der Funktion in ihrer als „wahr“ betrachteten Form und den Abszissen $x_0, x_1 \ldots x_n$ der Beobachtungswerte *berechnet*, einerseits und den tatsächlich beobachteten z-Werten andererseits. Bezeichnet man diese sogen. „übrig bleibenden“ Fehler mit v_x, so ist also z. B. nicht mehr

$$a_0 + a_1 x_0 + \ldots a_{s-1} x_0^{s-1} - z_0 = 0,$$

sondern vielmehr

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + \ldots a_{s-1} x_0^{s-1} - z_0 = v_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots a_{s-1} x_1 \delta^0 \quad - z_1 = v_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots a_{s-1} x_n \delta^0 \quad - z_n = v_n \end{array} \qquad [43]$$

Nun sind natürlich die n einzelnen Abweichungen v_x ebenso viele neue Unbekannte, die mit den s übrigen, den a-Koeffizienten, nicht ohne neue Annahmen berechnet werden können. Doch lassen sich wenigstens *gewisse Annahmen über den Mittelwert der Fehler* einführen, die zu einer eindeutigen Berechnung der a und dann natürlich auch bestimmter Einzelwerte der v_x führen. Hierauf wollen wir aber erst bei der Bestimmung der Hauptwerte und Streuungsmaße in § 26 ganz allgemein, d. h. unabhängig von der speziellen Form der Funktion in [43] zurückkommen. Bei einer größeren Anzahl von Koeffizienten, wie sie bei dem Versuch einer angenäherten Darstellung der gesamten Verteilung durch [43] stets nötig sind, würde freilich die Anwendung jeder dieser Methoden schon so kompliziert, daß man sie in der psychophysischen Praxis kaum jemals anwenden wird.

Der stückweisen Interpolation mittels einzelner Parabelbogen, bezw. Mittelwerten aus solchen, die immer nur durch wenige unmittelbar aufeinander folgende Punkte hindurchgehen, und zwar beim eindeutigen Mittelwert immer nur durch je zwei direkt benachbarte, läßt sich aber nun auch eine zwar ebenso willkürliche, durch die Praxis aber immerhin einigermaßen abgegrenzte stückweise Ausgleichung mittels einzelner Parabelbogen an die Seite stellen. Das Prinzip derselben ist bereits von A. Lehmann in seinem leicht zugänglichen „Lehrbuch der psychologischen Methodik" 1906, S. 48 ff. ausführlich für psychophysische Aufgaben empfohlen worden, so daß ich hier, mit der eben genannten Einschränkung seiner Eindeutigkeit, im wesentlichen wohl einfach darauf verweisen darf. Er verwendet hierzu allerdings die Differenzenmethode. Doch hat diese bei ihren gleichen Voraussetzungen über die Form der Funktion die hier in Betracht kommenden Formeln mit der Lagrangeschen Methode gemeinsam, wie unten aus § 19 zu ersehen ist, so daß wir diese Parabelausgleichung ebenfalls schon hier erledigen können. Auch Lehmann fordert übrigens die graphische Ausgleichung zur fortgesetzten Kontrolle dafür, ob man sich mit dieser Ausgleichung von dem mutmaßlichen Verlaufe nicht eher mehr entferne, anstatt sich ihm zu nähern.

Man kann das Prinzip dieser Ausgleichung mit dem Hinweis auf die S. 54 erwähnten Unstetigkeiten der Krümmung formulieren, die bei der stückweisen Interpolation zunächst an denjenigen beobachteten Punkten auftreten müssen, bei denen die Gültigkeit einer neuen Teilfunktion einsetzt. Diese Unstetigkeiten der Richtungsänderung, die gerade bei den eindeutigen mittleren Kurven nach [33b] sogar an allen beobachteten Punkten überhaupt übrig blieben, sollen nun durch eine passende Abänderung der beobachteten Werte selbst ebenfalls noch beseitigt werden. Zu diesem Zwecke verlegt man die Ausgangspunkte des ganzen Verfahrens der stückweisen Interpolation zunächst in neue, durch das erste Verfahren interpolierte Kurvenpunkte in der Mitte der Intervalle, wie man sie also z. B. bei stückweiser Interpolation mittels einfacher (mittlerer) Parabeln zweiter Ordnung durch fortgesetzte Anwendung von Gl. [33b] finden kann, wenn man hierin $\alpha = 0{,}5$ setzt. Hat man also z. B. in der Kurve Fig. 3 zu Tabelle 1 (unter Hinzunahme der „Beobachtungen" $z_{-2} = z_{10} = 0$) nach [33b] die Werte $z'_{-0,5}$, $z'_{0,5}$, $z'_{1,5} \ldots z'_{8,5}$ interpoliert, so läßt sich durch eine neue Anwendung einer Gl. [33b] mit der Viererreihe: $z'_{-0,5}$, $z'_{0,5}$, $z'_{1,5}$, $z'_{2,5}$ für $\alpha = 0{,}5$ ein neuer Wert (z'_1) finden, ferner aus der nächsten Gruppe $z'_{0,5}$, bis $z'_{3,5}$ ein neues (z'_2) usw. Aus diesen ergeben sich aber dann endlich die neuen Interpolationsfunktionen (z') von der Form [33b], die oft schon geringere Unstetigkeiten an den neuen (z')-Werten zeigen, als bei der stückweisen Interpolation mittels der ursprünglichen z-Werte, wenigstens soweit sich die zur Interpolation benutzten Parabeln schon von Anfang an dem wahrscheinlichen Verlauf enge genug anschmiegten, wenn also in der Kurve keine Spitzen vorkamen. Bei annähernd geradlinigem Verlauf kann die stückweise Ausgleichung statt mit [33b] geradezu bereits mit einer ganz analogen Verwendung der linearen Interpolationsformel [29] versucht werden.

Ist die Richtungsänderung bei den neuen z-Werten noch immer zu schroff, so kann das nämliche Verfahren nochmals durchgeführt werden, indem man zunächst die Reihe $(z')_{-0,5}$, $(z')_{0,5} \ldots (z')_{8,5}$ und erst hieraus wiederum die ausgeglichenen Funktionswerte $((z'))_1$ berechnet bis $((z'))_8$, aus denen dann die endgültige Interpolationsformel für $((z'))$ nach [33b] zu bilden wäre usw.

Die Verteilung Tab. 1 zeigt jedoch z. B. schon nach einmaliger Anwendung des geschilderten Prozesses ziemlich unwesentliche Veränderungen, so daß die Ausgleichung als abgeschlossen gelten kann.

Folgende Tabelle 2 enthält neben den Ausgangswerten z_ν die nach [33b] berechneten Übergangswerte $z'_{\nu+0,5}$ sowie die hiermit abermals nach [33b] berechneten neuen Werte (z'_ν) für $x_2, x_3 \ldots x_6$, die aus $z'_{0,5}$ bis $z'_{7,5}$ zu finden sind:

Tabelle 2.

	x_0	$x_{0,5}$	x_1	$x_{1,5}$	x_2	$x_{2,5}$	x_3	$x_{3,5}$
z	0		5		11		20	
z′		2,125		7,750		15,813		21,437
(z′)					**11,78**		**20,17**	

	x_4	$x_{4,5}$	x_5	$x_{5,5}$	x_6	$x_{6,5}$	x_7	$x_{7,5}$	x_8
z	21		15		6		2		0
z′		18,687		10,375		3,563		0,750	
(z′)	**20,93**		**14,79**		**6,61**				

In Fig. 3 sind diese Korrekturen nur durch kleine zur Kurve parallele Strichmarken angedeutet, da zwei vollständige Darstellungen der alten und der neuen Kurve bei dem geringen Betrage ihrer Abweichungen wenig übersichtlich wären. Die größere Stetigkeit der neuen Krümmungsänderungen und die Erhöhung der Symmetrie der neuen Kurve im ganzen ist auch schon hieraus genügend ersichtlich.

Die vollständige Symmetrie des Verfahrens nach [33b] bringt ferner den auch von A. Lehmann[1]) erstrebten Vorteil mit sich, daß das Maximum der ausgeglichenen Kurve von dem ursprünglichen kaum abweicht. Wendet man Gl. [41] auf die Werte (z_2), (z_3), (z_4) und (z_5) (statt z_0 bis z_3) an, so findet man auch hier für das neue, in Fig. 3 mit M' bezeichnete Maximum

$$\text{korr. } \alpha' = 0{,}616$$
$$\text{korr. } \mathfrak{D}' = 53{,}848$$

statt 0,633 und 53,899, also eine gute Übereinstimmung.

18. Die Fouriersche Reihe.

Wenngleich die Übersichtlichkeit der algebraischen Funktion [24] und vor allem die Einfachheit der stückweisen Interpolation der Lagrangeschen Formel auch für K.-G. stets ihren Platz sichern wird, so sollte doch die

1) Psychologische Methodik S. 51.

Rücksicht auf die größere Verwandtschaft von $\mathfrak{V}$ (x) mit den trigonometrischen Funktionen bei Verwendung der allgemeinsten analytischen Hilfsmittel (wenigstens für die Gesamtdarstellung bis zu den Extremen) zunächst eigentlich auf die Fouriersche Reihe hinführen. Sie ist meines Wissens in der Psychophysik noch nicht benützt worden, gestattet aber bei äquidistanten Beobachtungswerten mitunter eine relativ bequeme Interpolation und gehört ebenfalls zu dem bekanntesten Inventar der physikalischen Maßmethoden. Ihre allgemeine Formel lautet

$$\begin{aligned} z = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots a_r \cos rx \ldots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots b_r \sin rx \ldots, \end{aligned}$$

bedeutet also wegen der Verwendung von Winkelgrößen als Abszissen eine periodische Funktion. Als solche ist sie z. B. auch die übliche Darstellung beliebiger Schwingungsformen, wobei z die von der Zeit abhängige Entfernung des schwingenden Teilchens aus der Gleichgewichtslage ausdrückt. Freilich sind auch hier nur sogen. Klangkurven mit einer endlichen Zahl von Obertönen durch eine endliche Reihe darstellbar, während völlig willkürliche Funktionen, wie es die rein empirischen K.-G. sind, doch auch wiederum einer unendlichen Reihe bedürfen. Indessen kann der Grad der Annäherung bei gleicher Gliederzahl wegen des besonderen Charakters der Verteilungsfunktionen größer sein als bei jenen algebraischen Funktionen.

Eine endliche Anzahl n von einzelnen Beobachtungswerten ist aber natürlich auch wiederum mit einer endlichen Reihe aus $n = 2r + 1$ Gliedern genau in Einklang zu bringen und sodann zur Interpolation zu verwenden. Nur muß man auch hier wieder darauf verzichten, diese Fouriersche Reihe schlechthin mit dem ganzen K.-G. von $-\infty$ bis $+\infty$ zu identifizieren. Man wird vielmehr auch hier nur den zwischen den Extremen gelegenen, von Null verschiedenen Bereich des empirischen K.-G. einer Periode von 0 bis 2π entsprechen lassen, indem man $E_0 - E_n = 2\pi$ setzt, also bei äquidistanten Intervallen die einzelnen Abszissen zu den n beobachteten z-Werten als Vielfache von $\frac{2\pi}{n}$ auffaßt. Dabei ist $z(E_0) = 0$ als Ende der Periode und Anfang der neuen in den n Werten nicht inbegriffen, wohl aber $z(E_n)$, bezw. nur eines von beiden. Alle übrigen Perioden der Funktion besitzen dagegen für den realen K.-G. keine Bedeutung. Denkt man sich nun, analog zum System [25] für die Lagrangesche Formel, mittels der n Beobachtungen $z_0 = 0,\ z_1, \ldots z_{n-1},\ z_n = 0$ bei den verschiedenen Abszissen

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1 \cdot \frac{2\pi}{n},\ x_2 = 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \ldots,\ x_{n-1} = (n-1)\frac{2\pi}{n},\ x_n = 2\pi$$

wieder n Beobachtungsgleichungen von der Form [40] mit den zunächst unbekannten $n = 2r + 1$ Koeffizienten angesetzt, also

$$\begin{aligned} z_i = a_0 + a_1 \cos x_i + a_2 \cos 2x_i + \ldots a_h \cos h \cdot x_i \\ {\scriptstyle i=1 \text{ bis } n} \quad + b_1 \sin x_i + b_2 \sin 2x_i + \ldots b_h \sin h \cdot x_i, \end{aligned}$$

so ergibt sich nach Gauss eine der Lagrangeschen ähnliche Interpolationsformel[1])

1) Vgl. Weinstein, a. a. O. S. 467.

$$z = \sin\frac{x - x_1}{2}\cdot\sin\frac{x - x_2}{2}\ldots\sin\frac{x - x_n}{2}$$

$$\cdot\left(\frac{z_1}{\sin\frac{x - x_1}{2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{(x_1 - x_2)}{2}\sin\frac{(x_1 - x_3)}{2}\ldots\sin\frac{(x_1 - x_n)}{2}} + \ldots\frac{z_n}{\sin\frac{x - x_n}{2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{(x_n - x_1)}{2}\cdot\ldots\sin\frac{(x_n - x_{n-1})}{2}}\right).$$

Dieser Ausdruck wird nun bei äquidistanten Intervallen $i = \frac{2\pi}{n}$ bisweilen noch etwas einfacher, wenn n nicht gerade Primzahl ist, da man dann durch Berücksichtigung der elementaren trigonometrischen Beziehungen manche Faktoren zusammenfassen kann. In dem oben S. 63 genannten Beispiele ist sogar zufällig $n = 8$. Die Abszissenreihe wird daher $0, \frac{\pi}{4}, 2\cdot\frac{\pi}{4}$ usw. so daß besonders viele Reduktionen vorgenommen werden können. In dem Intervall $x = 52$ bis 55 der Tabelle 1, welche das Maximum enthält, findet man z. B. für die Mitte nach dieser Methode den Wert $z_{3,5} = 21{,}806$, während die Interpolation nach der Differenzenmethode (s. u.) mittels einer algebraischen Funktion sechsten Grades, die somit durch sieben zum Intervall möglichst symmetrisch gelagerte Punkte hindurchgeht, den Wert 21,799 finden läßt, also immerhin eine sehr große Übereinstimmung, die freilich auch keiner der beiden Methoden irgend einen entscheidenden Vorteil zugestehen läßt. Schließlich läßt sich das Fouriersche System für eine Reihe $z_{i\ (i = 1 \text{ bis } n)}$ mit beliebig verminderter Gliederzahl $2r' + 1 < n$ auch wiederum als Ansatz zu einer Ausgleichung der beobachteten Funktion verwenden, wie es schon oben bei Gl. [43] dargelegt wurde.

19. Die Methode der Funktionsdifferenzen.

a) Die Interpolation.

1. Als „unmittelbar" im eminenten Sinne kann die Interpolation, sowie die Differentiation und Integration der interpolierten $\mathfrak{V}(x)$ mittels der sogen. „Funktionsdifferenzen" bezeichnet werden. Denn sie läßt die Koeffizienten der Funktion $\mathfrak{V}(x)$, besonders bei äquidistanten Reihen, sehr rasch aus den gegebenen Funktionswerten ansetzen. Freilich wird dies nicht etwa durch Voraussetzung einer bisher noch nicht bekannten Verteilungsfunktion erreicht, sondern nur durch die spezielle Form, auf die man die Gl. [26] für die auch von Lagrange benutzte Parabel n-ter Ordnung bringen kann. Teilweise wurden wir denn auch schon in § 17 selbst auf diese die sogen. Funktionsdifferenzen einschließende Formeln geführt, als der Anfangspunkt der Abszissen nach einem der beobachteten Punkte verlegt wurde. So wird aus [28], also der Formel für rein lineare Interpolation, bei Verlegung des Nullpunktes nach x_0 und Verwendung lauter gleicher Intervalle $i = 1$

$$z = z_0\,i + \frac{z_1 - z_0}{i}\,x = z_0 + (z_1 - z_0)\,x\,,$$

oder, wenn wir wieder

$$x = \alpha i = \alpha \cdot 1$$

setzen, also die Abszissen als stetige Vielfache des Intervalles auffassen,

$$z = z_0 + \alpha (z_1 - z_0).$$

Hier kommt außer dem Funktionswert des Nullpunktes und α nur noch die „Funktionsdifferenz" $(z_1 - z_0)$ vor. Ebenso erhielten wir durch eine ganz analoge Transformation der Abszissen für die einfache Parabel zweiter Ordnung in [33] einen Ausdruck, der außer dem unserem dortigen Nullpunkt entsprechenden Funktionswert z_1 und den Potenzen der unabhängigen Variablen α und $\frac{\alpha^2}{2}$ ebenfalls nur noch Funktionsdifferenzen enthielt, nämlich einerseits das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}\left[(z_2 - z_1) + (z_1 - z_0)\right] = \frac{1}{2}(z_2 - z_0)$ zweier unmittelbar benachbarter Funktionsdifferenzen und andererseits den Koeffizienten

$$z_0 - 2 z_1 + z_2 = (z_2 - z_1) - (z_1 - z_0),$$

der offenbar die Differenz zweier Funktionsdifferenzen $(z_2 - z_1)$ und $(z_1 - z_0)$, also eine sogen. Funktionsdifferenz zweiter Ordnung darstellt. Durch Hinzufügung von höheren Potenzen der Variablen α, deren Koeffizienten je eine Differenz immer „höherer Ordnung" bis zur n-ten in sich enthalten, können aber nun weiterhin auch analoge Ausdrücke für Parabeln bis zur n-ten Ordnung aufgebaut werden. Diese gehen dann wieder durch die $n + 1$ gegebenen Kurvenpunkte hindurch, die zur Ableitung der Funktionsdifferenzen bis zur n-ten Ordnung notwendig sind.

2. Bei der Anwendung dieser Methode hat man sich also zunächst immer ein Differenzenschema anzulegen, wie es unten skizziert ist. Es enthält außer den Abszissen x und den Ordinaten z der Beobachtungswerte vorerst die einfachen Differenzen verschiedener Ordnung, die durch Subtraktion der gegebenen Funktionswerte z, bezw. ihrer bereits gebildeten einfachen Differenzen voneinander zu berechnen sind, und mit denen man bei mehreren Formeln dieser Methode auch allein auskommen kann. Dabei wird natürlich im ganzen System die nämliche Richtung der Subtraktion beibehalten, meistens wird die obere Zahl von der unteren abgezogen. Diese einfachen Differenzen, die aus den $n + 1$ gegebenen z-Werten gebildet werden können, sind also

$$\begin{aligned}
&\Delta_0^{I} = z_1 - z_0,\ \Delta_1^{I} = z_2 - z_1,\ \ldots\ \Delta_n^{I} = z_{n+1} - z_n \\
&\Delta_0^{II} = \Delta_1^{I} - \Delta_0^{I} = z_2 - 2 z_1 + z_0,\quad \Delta_1^{II} = \Delta_2^{I} - \Delta_1^{I} = z_3 - 2 z_2 + z_1, \ldots \\
&\Delta_{n-1}^{II} = \Delta_n^{I} - \Delta_{n-1}^{I} \\
&\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
&\Delta_0^{n} = \Delta_1^{n-1} - \Delta_0^{n-1}.
\end{aligned} \tag{44}$$

Es sind die Werte, die im Schema nicht in Klammern stehen. Jeder Vertikalreihe entspricht eine neue Ordnung der Differenzen, die hierbei immer auf die Zeile zwischen den Ausgangswerten der nächst niedrigen Ordnung in die Vertikalreihe rechts daneben geschrieben sind.

Außerdem sind aber noch andere Symbole in Klammern beigefügt. In den ungeraden Ordnungen sind dies die arithmetischen Mittelwerte je zweier benachbarter Differenzen der nämlichen Ordnung in derselben Vertikalkolumne, zwischen die der Wert gesetzt ist. Diese Mittelwerte kommen nämlich gerade in einer besonders wichtigen Formel, die zum Ausgangswert z der Interpolation völlig symmetrisch ist, mit dem auf gleicher Höhe stehenden Ausgangswert selbst und den einfachen Differenzen gerader Ordnung der nämlichen Horizontalreihe zusammen vor, so daß es sich für diese Interpolation mit den sogen. „Zeilendifferenzen" empfiehlt, sämtliche hinzugehörigen Werte als ein besonderes System von Symbolen mit einem einfach der Vertikal- und Horizontalreihennummer entsprechenden Doppelindex auch äußerlich zusammenzufassen, wobei also die Differenzen gerader Ordnung einfach mit Gleichheitszeichen wiederholt sind. Obgleich wir von diesen eingeklammerten Werten erst bei der Differentiation und Integration (vgl. unten Abschnitt b und c) Gebrauch machen werden, fügen wir sie sogleich hier in das Schema ein, wie man es auch im praktischen Falle mit konkreten Zahlenwerten sogleich im Ganzen ableiten wird, um dann bei den für uns in Betracht kommenden Anwendungen nicht weiter aufgehalten zu sein. Bei $n+1$ Funktionswerten gehören also zu diesem System der Zeilendifferenzen folgende, im Schema sämtlich durch Klammern herausgehobene Werte, wenn wir die Vertikalreihen des Schemas zunächst horizontal entwickeln:

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,1} &= \frac{1}{2}\left(\Delta_0^{\mathrm{I}} + \Delta_1^{\mathrm{I}}\right), \;\dots\; \Delta_{n-1,1} = \frac{1}{2}\left(\Delta_{n-2}^{\mathrm{I}} + \Delta_{n-1}^{\mathrm{I}}\right);\\
\Delta_{1,2} &= \Delta_0^{\mathrm{II}} \qquad\qquad, \;\dots\; \Delta_{n-1,2} = \Delta_{n-2}^{\mathrm{II}};\\
\Delta_{2,3} &= \frac{1}{2}\left(\Delta_0^{\mathrm{III}} + \Delta_1^{\mathrm{III}}\right), \;\dots\; \Delta_{n-2,3} = \left(\Delta_{n-4}^{\mathrm{III}} + \Delta_{n-3}^{\mathrm{III}}\right)\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\Delta_{n-3,\,n-1} &= \frac{1}{2}\left(\Delta_0^{n-1} + \Delta_1^{n-1}\right)\\
\Delta_{n-3,\,n} &= \Delta_0^{n}
\end{aligned} \qquad [45]$$

Das folgende Schema enthält nun sämtliche $n=6$ Ordnungen der einfachen Differenzen und ebenso viele Ordnungen der Werte des Klammersystemes, die aus $n+1=7$ gegebenen z-Werten abzuleiten sind.

3. Obgleich nun dieser Interpolationsmethode ebenfalls wieder die Voraussetzung der Parabelfunktion [24] zugrunde liegt, erscheint sie doch insofern auch wiederum relativ selbständig, als die Interpolationsformel, in der nur ein Ausgangswert z_p der Reihe der gegebenen z, ferner die von x_p als Nullpunkt aus gerechnete Unabhängige α und die Funktionsdifferenzen vorkommen, nicht erst des Umweges über ein System wie Gl. [25] bedarf, sondern direkt aus der Definition der Differenzen abgeleitet werden kann.

Schema der Funktionsdifferenzen.

$$
\begin{array}{lllllll}
x_0\ z_0 & & & & & & \\
 & \Delta_0^{\mathrm{I}} & & & & & \\
x_1\ z_1 & (\Delta_{1,1}) & \Delta_0^{\mathrm{II}} (= \Delta_{1,2}) & & & & \\
 & \Delta_1^{\mathrm{I}} & & \Delta_0^{\mathrm{III}} & & & \\
x_2\ z_2 & (\Delta_{2,1}) & \Delta_1^{\mathrm{II}} (= \Delta_{2,2}) & (\Delta_{2,3}) & \Delta_0^{\mathrm{IV}} (= \Delta_{2,4}) & & \\
 & \Delta_2^{\mathrm{I}} & & \Delta_1^{\mathrm{III}} & & \Delta_0^{\mathrm{V}} & \\
x_3\ z_3 & (\Delta_{3,1}) & \Delta_2^{\mathrm{II}} (= \Delta_{3,2}) & (\Delta_{3,3}) & \Delta_1^{\mathrm{IV}} (= \Delta_{3,4}) & (\Delta_{3,5}) & \Delta_0^{\mathrm{VI}} (= \Delta_{3,6}) \\
 & \Delta_3^{\mathrm{I}} & & \Delta_2^{\mathrm{III}} & & \Delta_1^{\mathrm{V}} & \\
x_4\ z_4 & (\Delta_{4,1}) & \Delta_3^{\mathrm{II}} (= \Delta_{4,2}) & (\Delta_{4,3}) & \Delta_2^{\mathrm{IV}} (= \Delta_{4,4}) & & \\
 & \Delta_4^{\mathrm{I}} & & \Delta_3^{\mathrm{III}} & & & \\
x_5\ z_5 & (\Delta_{5,1}) & \Delta_4^{\mathrm{II}} (= \Delta_{5,2}) & & & & \\
 & \Delta_5^{\mathrm{I}} & & & & & \\
x_6\ z_6 & & & & & &
\end{array}
$$

Man findet diese Differenzenmethode bei A. Lehmann[1]) ausführlicher behandelt, der sie zum ersten Male auf psychophysische Berechnungen angewandt hat. Dabei leitet er nicht nur die Ausdrücke für äquidistante Ordinaten ab, deren Anwendung man natürlich überall von vorn herein möglich zu machen sucht, sondern auch die kompliziertere Formel[2]) für beliebige Abszissenintervalle $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$ usw., die sogen. Newtonsche Interpolationsformel mit den dividierten Differenzen. Ich führe nur kurz deren Endresultat an, das ebenfalls elementar ableitbar ist, weil man auch in der psychophysischen Praxis die Verschiedenheit der Beobachtungsintervalle bisweilen nicht oder nur unter besonderen Schwierigkeiten der Versuchstechnik umgehen kann. In diesem Falle wird man dann am besten zunächst nach den Newtonschen Formeln (und zwar wieder mit beliebiger Ausdehnung der Punktreihe, durch die man die in einem Intervalle benutzte Interpolationskurve hindurchgelegt denkt), eine Reihe äquidistanter Ordinaten interpolieren, die man dann nach den nur für sie gültigen Formeln weiter behandeln kann. Für beliebige Intervalle gilt also die folgende Formel, deren Beziehung zu der auf gleichen allgemeinen analytischen Voraussetzungen aufgebauten Gl. [26] nach Lagrange leicht ersichtlich ist:

$$
\begin{aligned}
z = z_p &+ (x - x_p)\,\delta_p^{\mathrm{I}} + (x - x_p)(x - x_{p+1})\,\delta_p^{\mathrm{II}} \\
&+ (x - x_p)(x - x_{p+1})(x - x_{p+2})\,\delta_p^{\mathrm{III}} \ldots, \qquad [46]
\end{aligned}
$$

wonach wieder für jedes beliebige x ein z interpoliert werden kann. Die Bedeutung der δ-Werte, der sogen. „dividierten Differenzen", ersieht man

1) Archiv f. d. ges. Psychologie 6, 1906, S. 444. — Lehrbuch der psychologischen Methodik 1906, S. 31 ff.

2) A. a. O. S. 34 ff.

am besten aus folgendem Schema, dessen Anordnung ganz derjenigen in dem obigen Schema der einfachen Differenzen Δ_0^I usw. entspricht, deren erste Ordnung auch hierin wiederkehrt:

Schema der dividierten Differenzen.

$$
\begin{array}{llll}
x_0 \; z_0 & & & \\
 & \delta_0^I = \dfrac{\Delta_0^I}{x_1 - x_0} & & \\
x_1 \; z_1 & & \delta_0^{II} = \dfrac{\delta_1^I - \delta_0^I}{x_2 - x_0} & \\
 & \delta_1^I = \dfrac{\Delta_1^I}{x_2 - x_1} & & \delta_0^{III} = \dfrac{\delta_1^{II} - \delta_0^{II}}{x_3 - x_0} \\
x_2 \; z_2 & & \delta_1^{II} - \dfrac{\delta_2^I - \delta_1^I}{x_3 - x_1} & \\
 & \delta_2^I = \dfrac{\Delta_2^I}{x_3 - x_1} & & \\
x_3 \; z_3 & & &
\end{array}
$$

Das Schema der δ-Werte in [46] ist also aus dem hier angegebenen einfach dadurch abzuleiten, daß zu allen Indices noch p, d. h. der Index des Ausgangswertes, hinzu addiert wird. Ist nun i das Intervall der erwünschten äquidistanten Reihe, das man am besten so wählt, daß die neuen Abszissen den alten im Mittel möglichst nahe kommen, so wird für x in [46] einfach der Reihe nach $x_0 + i$, $x_0 + 2i, \ldots x_0 + ri = x_n$ eingesetzt und der jeweils nächstbenachbarte Wert der gegebenen Reihe als x_p bzw. z_p behandelt, woraus sich dann die neue, äquidistante z-Reihe $z'_0 = z_0$, $z'_1, \ldots z'_r = z_n$ ergibt.

4. Die unmittelbare Ableitung der Formeln für äquidistante Ausgangswerte aus der Definition der Funktionsdifferenzen Gleichung [44] und [45] wird nun durch Ausdrücke vermittelt, in denen zunächst ein beliebiger Wert z_{p+n} der beobachteten z selbst zu einem anderen z_p dieser Reihe durch eine Gleichung in Beziehung gesetzt werden kann. In ihr kommt außer diesem Ausgangswert z_p und Differenzen aus [44] oder [45] nur noch eine in diesen Gleichungen mit n bezeichnete ganze Zahl vor, die der Differenz der Reihennummern $p + n$ und n entspricht. So findet man z. B. durch fortgesetzte Substitution höherer Differenzen für Werte aus niederen Ordnungen des Schemas, z. B. durch die Umformungen

$$z_1 = z_0 + \Delta_0^I$$

$$z_2 = z_1 + \Delta_1^I = z_0 + \Delta_0^I + \Delta_0^I + \Delta_0^{II} = z_0 + 2\Delta_0^I + \Delta_0^{II}$$

usw.

schließlich folgende Gleichung

$$z_{p+n} = z_p + \frac{n}{1} \Delta_p^I + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta_p^{II} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta_p^{III} \text{ usw.} \quad [47]$$

Die Koeffizienten der Differenzen Δ gleichen hier denen der Potenzen des x beim Binomialausdrucke $(x + 1)^n$, wobei sich Potenz und Ordnung der Differenz entsprechen. Das Prinzip der Interpolation nach dieser Methode für äquidistante Ordinaten besteht nun einfach darin, daß man das n in einer solchen Gleichung wie [47] nicht mehr nur eine ganze Zahl, sondern eine beliebige stetige Größe bedeuten läßt. Bei dieser Behandlung des n auf der rechten Seite der Gleichung [47] als unabhängige stetige Variable ist ja nur vorausgesetzt, daß sich auch die linke Seite, also z_{p+n} dieser Variablen eindeutig zuordnen läßt. Der Bedeutung des n im Index von z entspricht aber ja auch in der Tat eine völlig eindeutige Beziehung des z zu n selbst, da durch Vermittelung des ihm zugeordneten Abszissenwertes x_{p+n}

$$x_{p+n} = x_p + ni$$
$$z_{p+n} = f(x_p + ni). \qquad [48]$$

Zudem stimmt der Ausdruck [47], nach Potenzen des n geordnet, völlig mit der Gleichung einer Parabel r-ter Ordnung überein, wenn r die Ordnung der Differenz in dem letzten Gliede der Gleichung [47] bedeutet. Auch diese macht ja zu ihrer Ableitung die r + 1 Funktionswerte von z_p bis z_{p+r} erforderlich, durch welche diese Parabel hindurchgeht. Es entspricht hierbei n vollkommen der unabhängigen Variabel α, die in [33] vorkam, wenn man α von x_p als Nullpunkt aus in Vielfachen des i fortschreiten läßt. Für ganzzahlige Werte jenes α müssen sich eben auch wieder beobachtete Werte ergeben.

5. Die in [47] benutzten Differenzen liegen nun allerdings im Schema S. 71 sämtlich in einer schrägen Linie, resultieren somit aus Funktionswerten, die vom Ausgangswerte z_p nur einseitig in der nämlichen Richtung nach z_{p+n} hin fortschreiten. z_p liegt also hier am einen Ende der Punktreihe, durch welche die Interpolationsparabel festgelegt ist. Alle Berechnungen von z-Werten zu einem $x < x_p$ wären daher bereits sog. Extrapolationen, die wir ja nach dem S. 51 Gesagten tunlichst zu vermeiden haben. Um also mit positiven und negativen n-Werten interpolieren zu können, muß die Differenzenreihe der Formelglieder von der Ausgangsabszisse x_p aus möglichst in horizontaler Richtung durch das Schema fortschreiten, um von Funktionswerten unterhalb und oberhalb z_p abzuhängen. Es lassen sich nun in der Tat wieder direkt wie bei [47] solche Beziehungen ableiten und zwar zunächst zwischen lauter beobachteten z_p und kleineren und größeren z_{p-s} bis z_{p+t}, wobei n eine ganze Zahl bedeutet, und sodann wieder für ein stetiges n verallgemeinern, so vor allem die im Schema der einfachen Differenzen in einer horizontal gerichteten Zickzacklinie weitergreifende Formel, die A. Lehmann vor allem empfiehlt:

$$\begin{aligned} z_{p+n} = f(x_p + ni) = z_p &+ \frac{n}{1} \Delta^{I}_{p} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^{II}_{p-1} \\ &+ \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^{III}_{p-1} + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta^{IV}_{p-2} \\ &+ \frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \Delta^{V}_{p-2} + \\ &+ \frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \Delta^{VI}_{p-3} \text{ usw.} \end{aligned} \qquad [49]$$

Diese Gliederzahl wird für alle psychophysischen Zwecke ausreichen. Wählt man also z. B. $p = 3$, so sind die Differenzen von [49] nach dem Schema S. 71

$$\varDelta^{\mathrm{I}}_{3}, \quad \varDelta^{\mathrm{II}}_{2}, \quad \varDelta^{\mathrm{III}}_{2}, \quad \varDelta^{\mathrm{IV}}_{1}, \quad \varDelta^{\mathrm{V}}_{1}, \quad \varDelta^{\mathrm{VI}}_{0}.$$

Die Ordnung der Gleichung [49] nach Potenzen des n würde auch wieder die Übereinstimmung mit einer nach Art von [33] dargestellten Funktion einer Parabel sechster Ordnung erkennen lassen, die durch die sieben z-Werte des Schemas hindurchgeht und von denen hier ebenso viele (drei) oberhalb und unterhalb $z_p = z_3$ liegen. Hierbei kann man also bei positiven und negativen Werten von n völlig gleichmäßig im Rahmen der Interpolation bleiben.

Bei [49] geht die Zickzacklinie, in der die Differenzen $\varDelta$ im Schema fortschreiten, von z_p aus zunächst nach unten zu dem mit [47] übereinstimmenden $\varDelta^{\mathrm{I}}_{3}$ weiter. Man kann aber nun auch eine Formel ableiten, die von z_p aus zunächst nach oben zu $\varDelta^{\mathrm{I}}_{2}$ schreitet, und nur in den Differenzen gerader Ordnung mit [49] übereinstimmt. Sie lautet

$$z_{p+n} = f(x_p + ni) = z_p + n\varDelta^{\mathrm{I}}_{p-1} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\varDelta^{\mathrm{II}}_{p-1} \text{ usw.} \qquad [50]$$

Es tritt also hier immer zuerst ein neuer Faktor $(n + 1)$, $(n + 2)$ usw. hinzu, und dann erst im nächsten Gliede der symmetrische $(n - 1)$, $(n - 2)$ usw. Läßt man aber diese beiden Gleichungen [49] und [50] mit einer ihnen ja gemeinsamen Differenz gerader Ordnung, also bei $\varDelta^{\mathrm{II}}_{p-1}$ oder $\varDelta^{\mathrm{IV}}_{p-2}$, $\varDelta^{\mathrm{VI}}_{p-3}$ … $\varDelta^{(2r)}_{p-r}$ abbrechen, so hat man offenbar die nämlichen 2_{r+1} Ausgangswerte z_{p-r} bis z_{p+r} zur Festlegung der Funktion benutzt, also die nämliche Parabel 2r-ter Ordnung angesetzt. Jede von beiden Gleichungen ist deshalb beim Abschluß mit einer geraden Ordnung trotz der Willkür, mit der die eine von beiden möglichen Zickzacklinien ausgewählt ist, bereits eindeutig die symmetrischste Interpolationsformel. Dabei ermöglicht aber die Unmittelbarkeit, mit der auch die neu hinzutretenden Glieder aus dem Differenzenschema angesetzt werden können, viel leichter die Berücksichtigung einer größeren Zahl gegebener Funktionswerte als bei der Lagrangeschen Formel [26].

Völlig gleichmäßig wird das Verfahren nach Gl. [49] oder [50] bei konstanter Gliederzahl die verschiedenen Stellen der Verteilungskurve freilich nur dann behandeln, wenn man jeden Funktionswert z_p immer nur für den Bereich der Interpolation von $n = -0{,}5$ bis $n = +0{,}5$ benutzt, also für $z_{p-0,5}$ bis $z_{p+0,5}$, während man für entferntere Stellen von dem nächst niedrigen bzw. nächst höheren Funktionswert ausgeht. Da die beobachtete Reihe relativer Häufigkeiten nach dem S. 53 Gesagten jenseits der Extreme einfach mit beliebig langen Nullreihen flankiert zu denken ist, so wird man auch eine solche Interpolation nach Gl. [49] oder [50] mit einer beliebigen Gliederzahl für alle Teile der Verteilungskurve ganz gleichmäßig anwenden können. Da aber die gegebenen Punkte der Funktion nicht etwa sämtlich auf der nämlichen Parabel 2r-ter Ordnung liegen, sondern bei beliebiger Anzahl einer transzendenten Kurve entsprechen, so werden natürlich die Werte $z_{p+0,5} = f(x_{p+0,5})$ und $z_{(p+1)-0,5} = f(x_{(p+1)-0,5})$ nicht identisch sein, so daß an diesen Übergangsstellen von einer Formel zur anderen inmitten der Intervalle hier sogar die Kurve der r. H. selbst Unstetigkeiten zeigt. Diese sind aber natürlich um so geringer, von je höherer Ordnung die Parabeln sind. Völlig gleichgültig aber werden diese übrigbleibenden Unstetigkeiten der Funktion selbst bei bestimmten Integralen über mehrere Intervalle der Verteilungsfunktion. Deren stetige Zunahme mit stetiger Erweiterung der Grenzen würde durch solche kleine Sprünge der Funktion ja an sich schon relativ viel weniger gestört. Durch passende Wahl der Integrationskonstanten jedes einzelnen, einen gegebenen Wert umschließenden Intervalles läßt sich aber hier das Wachstum sogar wieder vollständig stetig gestalten, ganz abgesehen von dem entscheidenden Vorteil, daß sich alle Ausgangswerte z_p an der Formel für das bestimmte Integral bei unserer Interpolationsweise völlig gleichmäßig beteiligen. Will man dagegen eine dichtere Punktreihe zu einem Zwecke ableiten, bei dem die Stetigkeit der Funktion selbst erforderlich ist, also z. B. bei der Vorbereitung der graphischen Vollendung der Interpolation und vor allem bei der Aufsuchung eines Maximums, so wird man allerdings von $n = -1$ bis $+1$ interpolieren, also den sicheren Anschluß an den benachbarten Beobachtungswert mittels des ganzzahligen n herstellen. Zu einer völlig gleichmäßigen Behandlung aller Kurventeile wären dann freilich wieder ähnlich wie bei Gleichung [33a] Mittelwertbildungen aus den beiden Kurvenstücken erforderlich, die sich bei Verwendung jedes einzelnen Beobachtungswertes für jedes Intervall ergeben würden, und die auch durch eine einheitliche Formel und Tabelle zu erleichtern wäre. Doch sind die Unterschiede zwischen den beiden Möglichkeiten, die sich bei Benutzung jedes zweiten Punktes z_p für den ganzen Bereich von $n = -1$ bis $+1$ ergeben, wenigstens bei hinreichend kleinen Intervallen (im Verhältnis zu $E_0 - E_u$ betrachtet) und bei höheren Ordnungen der Parabel wohl zu gering, um solche Umständlichkeiten zu lohnen.

Zu einer besseren Einführung der Methode für diese beiden zuletzt genannten Zwecke, die Vorbereitung der graphischen Interpolation und einer genaueren Bestimmung des Maximums (also des Dichtigkeitsmittels), füge ich noch eine Tabelle der Koeffizienten bei, die in Gleichung [49] zu den einzelnen einfachen Differenzen hinzutreten, wenn n sukzessiv in Zehnteln des Intervalles fortschreitet. Da die Differenzen Δ bei ihrer Ableitung aus ganzzahligen Häufigkeiten ebenfalls ganzzahlig und selbst in den höheren Ordnungen nur selten mehr als zweistellig sind, so lassen sich die neuen äquidistanten Punkte nach Tabelle III schnell mit der erforderlichen Genauigkeit bestimmen[1]):

[1]) Wenn für die Multiplikation auch noch eine der im § 31 genannten Rechentafeln zur Verfügung steht, würde sich insbesondere auch die unten genannte verfeinerte Wiederholung der Interpolation mit den neuen, auf 3 bis 4 Stellen berechneten Punkten als Ausgangswerten eben so leicht erledigen lassen, falls gerade einmal ein so genaues Verfahren begründet erscheinen sollte.

Tabelle 3.

Koeffizienten der $\varDelta$ in Gleichung [49]:

$$z_{p+n} = z_p + \frac{n}{1}\varDelta^{I}_{p} + a\varDelta^{II}_{p-1} + b\varDelta^{III}_{p-1} + c\varDelta^{IV}_{p-2} + d\varDelta^{V}_{p-2} + e\varDelta^{VI}_{p-3}$$

n	a	b	c	d	e
+ 0,1	— 0,04500	— 0,01650	+ 0,00784	+ 0,00329	— 0,00159
+ 0,2	— 0,08000	— 0,03200	+ 0,01440	+ 0,00634	— 0,00296
+ 0,3	— 0,10500	— 0,04550	+ 0,01934	+ 0,00890	— 0,00400
+ 0,4	— 0,12000	— 0,05600	+ 0,02240	+ 0,01075	— 0,00466
+ 0,5	— 0,12500	— 0,06250	+ 0,02344	+ 0,01172	— 0,00488
+ 0,6	— 0,12000	— 0,06400	+ 0,02240	+ 0,01165	— 0,00466
+ 0,7	— 0,10500	— 0,05950	+ 0,01934	+ 0,01044	— 0,00400
+ 0,8	— 0,08000	— 0,04800	+ 0,01440	+ 0,00806	— 0,00296
+ 0,9	— 0,04500	— 0,02850	+ 0,00784	+ 0,00455	— 0,00159

b) Die Bestimmung eines Maximums von $\mathfrak{V}(x)$.

1. Während nun das Bisherige zur numerischen Interpolation beliebiger Punkte, eventuell mit graphischer Weiterbehandlung der Funktion $\mathfrak{V}(x)$, bereits ausreichen würde, ist zur Bestimmung des Maximums und der Durchschnitte über die Verteilung mittels der Differenzenmethode wiederum die Differentiation und Integration der Formeln notwendig. Was zunächst das Maximum $\mathfrak{D}$ anlangt, so liegt es, wie bereits bei Formel [38] erwähnt wurde, bekanntlich an der Stelle, wo

$$\frac{df(x_p + ni)}{dx} = 0. \qquad [51]$$

Zur möglichsten Vermeidung einer Ausdehnung des aus [51] berechneten n-Wertes über die Grenzen — 1 und + 1, die nach dem früher Gesagten innegehalten werden sollten, ist hierbei natürlich zuerst wieder der nächstbenachbarte Beobachtungswert z_p durch eine graphische Interpolation ausfindig zu machen, die bereits rechnerisch in entscheidenden Punkten verfeinert sein mag. Für die Differentiation einer mit diesem z_p angesetzten Formel dieser Methode findet man dann in den Lehrbüchern alles Notwendige genau abgeleitet, so daß ich mich hier wohl wieder auf den wesentlichsten Gedankengang dieser Deduktion und das Endresultat beschränken darf[1]). Man ordnet vor allem die Funktion nach Potenzen von n. Bei nicht zu großen Intervallen und bei Einschränkung des n auf echte Brüche lassen sich dann offenbar zunächst die Koeffizienten dieser Potenzen direkt an die Koeffizienten der nämlichen Potenzen des h in der Taylorschen Reihe angleichen, da ja

$$f(x_p + ni) = f(x_p + hi) = f(x_p) + \frac{hi}{1}\,\frac{df(x_p)}{dx} + \frac{h^2 i^2}{2}\,\frac{d^2 f(x_p)}{dx^2} \text{ usw.} \qquad [52]$$

1) Vgl. Weinstein, a. a. O. S. 486 f.

So findet man also z. B. bei Verwendung der einfachsten Formel [47] durch Gleichsetzung der beiderseitigen Koeffizienten der ersten Potenz von n bezw. h:

$$\frac{d\,f(x_p)}{dx} = \frac{1}{i}\left(\varDelta_p^{I} - \frac{\varDelta_p^{II}}{2} + \frac{\varDelta_p^{III}}{3} - \frac{\varDelta_p^{IV}}{4}\cdots\right) \qquad [53]$$

Man erlangt aber eine besser konvergente Reihe, wenn man von einer völlig symmetrischen und eindeutig anwendbaren Formel ausgeht, die sogar [49] und [50] für sich betrachtet, hierin noch übertrifft, indem die interpolierte Parabel auch beim Abbrechen mit einer ungeraden Ordnung der Differenzen für jeden Ausgangswert durch gleich viele oberhalb und unterhalb gelegene Beobachtungspunkte hindurchgeht. Man erhält diese Formel, ganz analog, wie [33b] aus [33] und [33a], als arithmetisches Mittel von [49] und [50]. Hierbei kommen dann also auch die Differenzen des zweiten Systemes aus dem Schema S. 71 zur Anwendung, die dort in Klammern gesetzt sind[1]). Die Formel lautet bis zur sechsten Ordnung:

$$\begin{aligned} z_{p+n} = f(x_p + ni) = z_p &+ \frac{n}{1}\,\varDelta_{p,1} + \frac{n^2}{2}\,\varDelta_{p,2} + \\ &+ \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\varDelta_{p,3} + \frac{(n+1)\,n^2\,(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\varDelta_{p,4} + \\ &+ \frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,\varDelta_{p,5} + \\ &+ \frac{(n+2)\,(n+1)\,n^2\,(n-1)\,(n-2)}{6!}\,\varDelta_{p,6} \text{ usw.} \end{aligned} \qquad [54]$$

Diese in sog. „Zeilendifferenzen" fortschreitende Formel werden wir mit Weinstein bei der Differentiation und vor allem auch bei der Integration mittels Funktionsdifferenzen immer zugrunde legen. Man ordnet sie zunächst wieder nach Potenzen von n:

$$z_{p+n} = z_p + L_{p,1}\,n + L_{p,2}\,\frac{n^2}{2} + \ldots L_{p,m}\,\frac{n^m}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}, \qquad [54a]$$

wobei die mit L bezeichneten Koeffizienten

$$L_{p,1} = \varDelta_{p,1} - \frac{1}{6}\,\varDelta_{p,3} + \frac{1}{30}\,\varDelta_{p,5}\ldots$$

$$L_{p,2} = \varDelta_{p,2} - \frac{1}{12}\,\varDelta_{p,4} + \frac{1}{90}\,\varDelta_{p,6}\ldots$$

$$L_{p,3} = \varDelta_{p,3} - \frac{1}{4}\,\varDelta_{p,5}\ldots$$

$$L_{p,4} = \varDelta_{p,4} - \frac{1}{6}\,\varDelta_{p,6}\ldots$$

1) Natürlich ergibt diese Formel dann beim Abbrechen mit einer geraden Ordnung nichts Neues, da ja dann die Werte nach [49] und [50] ohnehin identisch sind. Beim Abschluß mit der $(2r+1)$-ten Ordnung aber geht die resultierende Parabel als neue Kurve von gleicher Ordnung nur noch durch die Punkte der Beobachtungsreihe hindurch, die den Gleichungen [49] und [50] auch hierbei noch gemeinsam sind, also durch z_p und nur je $(r-1)$ obere und untere Punkte.

$$\begin{aligned} L_{p,5} &= \varDelta_{p,5} \ldots \\ L_{p,6} &= \varDelta_{p,6} \ldots \end{aligned} \qquad [55]$$

Dann ergibt sich ebenso, wie vorhin aus Gleichung [47] die Gleichung [53] folgte, durch Vergleich mit der Taylorschen Reihe:

$$\frac{df(x_p)}{dx} = \frac{1}{i} \cdot L_{p,1} \qquad [56]$$

$$\frac{df(x_p)}{dx^2} = \frac{1}{i^2} L_{p,2} \text{ usw.} \qquad [57]$$

Gleichung [51] enthält aber nun freilich nicht einfach die Differentialquotienten von $f(x_p + ni)$ für einen beobachteten Punkt, bei dem $n = 0$ ist, sondern eben den allgemeinen Ausdruck $\frac{df(x_p + ni)}{dx}$, der aus [56] offenbar selbst erst wiederum durch eine neue Interpolation zu finden ist, bei der man die Differenzen $\varDelta_{p,x}$ als Ausgangswerte betrachtet. Man hat also jede der Differenzen in [55] am besten wieder nach der Interpolationsformel [54] zu behandeln. Die Klammerdifferenzen gerader Ordnung $\varDelta_{p,2}$ sind nun nach S. 70 mit den einfachen Differenzen $\varDelta^{II}_{p-1}$, $\varDelta^{IV}_{p-1}$ usw. identisch, so daß die hier erforderliche Interpolation $\varDelta'_{p,x}$ ohne weiteres aus dem Schema S. 71 entnommen werden kann. Es ist

$$\varDelta'_{p,2\nu} = \varDelta_{p,2\nu} + n\varDelta_{p,2\nu+1} + \frac{n^2}{2} \varDelta_{p,2\nu+2} + \ldots \qquad [58]$$

Bei den ungeraden Ordnungen $\varDelta_{p,2\nu+1}$ kommen aber ja in [54] bereits Mittelwerte vor, so daß auch die neue Interpolation wieder erst eine mittlere Formel aus $\varDelta^{(2\nu+1)'}_{p-1}$ und $\varDelta^{(2\nu+1)'}_{p+1}$ benutzen muß, wobei die oberen Indices $(2\nu + 1)$ hier den römischen Ziffern I, III, V des Schemas S. 71 entsprechen. In den drei ersten Gliedern, die übrigens für uns allein in Betracht kommen, ist indessen der resultierende Ausdruck demjenigen bei [58] ganz analog, indem auch

$$\varDelta'_{p,2\nu+1} = \varDelta_{p,2\nu+1} + n\varDelta_{p,2\nu+2} + \frac{n^2}{2} \varDelta_{p,2\nu+3} \ldots \qquad [59]$$

Bis zu höheren Potenzen als n^2 dürfen wir nämlich nicht hinaufsteigen, wenn wir für [51] eine bequem lösbare, also höchstens quadratische Gleichung erhalten wollen, für deren Zulänglichkeit allerdings die von n selbst abhängige Konvergenz des Ausdruckes [59] entscheidend ist. Erweitert man also die Gleichung [56] interpolatorisch durch [59], so findet man als Bedingung des Maximums, unter Berücksichtigung der Differenzen von $L_{p,1}$ in [56] bis zur sechsten Ordnung, wobei wir den allen $\varDelta$ gemeinsamen Index p weglassen,

$$\begin{aligned} \frac{df(x_p + ni)}{dx} &= \frac{1}{i} L_{p,1} = 0 \\ &= \left(\varDelta_1 - \frac{1}{6} \varDelta_3 + \frac{1}{30} \varDelta_5\right) \\ &+ n\left(\varDelta_2 - \frac{1}{6} \varDelta_4 + \frac{1}{30} \varDelta_6\right) \\ &+ \frac{n^2}{2}\left(\varDelta_3 - \frac{1}{6} \varDelta_5\right). \end{aligned} \qquad [60]$$

Setzt man hierfür

$$An^2 + Bn + C = 0,$$

so ergibt sich schließlich als Abszisse des Maximums, also des Dichtigkeitsmittels $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{V}(x)$

$$n(\mathfrak{D}) = \frac{1}{2A}\left(-B + \sqrt{B^2 - 2AC}\right), \qquad [61]$$

wenn gleichzeitig der zweite Differentialquotient negativ ist. Für letzteren erhalten wir durch eine analoge interpolatorische Erweiterung von [57] durch [58]

$$i^2 \frac{d^2 f(x_p + ni)}{dx^2} = \left(\Delta_2 - \frac{1}{12}\Delta_4 + \frac{1}{90}\Delta_6\right) + n\left(\Delta_3 - \frac{1}{12}\Delta_5\right) + \frac{n^2}{2}\left(\Delta_4 - \frac{1}{12}\Delta_6\right). \qquad [62]$$

Als Beispiel wählen wir die nämliche Verteilung $\mathfrak{V}(x)$, deren Maximum schon S. 63 nach [33b] vorläufig berechnet wurde. Zunächst ist hierzu für Tabelle 1 das System der Differenzen zu berechnen, in das wir die Zeilendifferenzen ungerader Ordnung sogleich in Klammern einfügen. Diejenigen gerader Ordnung sind natürlich nicht mehr besonders angeschrieben. Als ungefähre Lage des Maximums vermuten wir nach dem Früheren $52 < \mathfrak{D} < 55$, so daß x_3 Ausgangswert wird ($p = 3$). Für $\Delta_{3,6}$ genügt also bereits die Reihe von $z_0 = f(E_u) = 0$ an.

Tabelle 4.

Funktionsdifferenzen der Verteilung der Gleichheitsurteile nach Tabelle 1, S. 63.

x	50 z	Δ^{I}	Δ^{II}	Δ^{III}	Δ^{IV}	Δ^{V}	Δ^{VI}
x_0	0						
		5					
x_1	5		1				
		6		2			
x_2	11		3		−13		
		9		−11		25	
x_3	20	(5)	−8	(−5)	12	(8)	−34
		1		1		−9	
x_4	21		−7		3		10
		−6		4		1	
x_5	15		−3		4		−16
		−9		8		−15	
x_6	6		5		−11		
		−4		−3			
x_7	2		2				
		−2					
x_8	0						

Die Zeilendifferenzen für $x_3 = 52$ als Ausgangswert sind

$$\Delta_{3,1} = 5;\ \Delta_{3,2} = -8;\ \Delta_{3,3} = -5;\ \Delta_{3,4} = 12;\ \Delta_{3,5} = 8;\ \Delta_{3,6} = -34.$$

Es wird also in Gl. [61]:

$$\begin{aligned} A &= 3{,}16 \\ B &= -11{,}13 \\ C &= -6{,}1, \end{aligned}$$

und daher

$$n(\mathfrak{T}) = +0{,}477.$$

Denn nur diese Wurzel der Gleichung ergibt zugleich für den Ausdruck [62] nach Einsetzung der Δ-Werte aus Tabelle 4 den negativen Wert

$$\frac{d^2 f(20 + n i)}{d x^2} = \frac{-10{,}44}{i^2}.$$

Für die andere, negative Wurzel der Gleichung im Werte von etwa -4 ist dagegen [62] positiv. Dies bedeutet also ein Minimum an einer Stelle, an der die Parabel sechster Ordnung für uns gar nicht mehr gültig sein soll, da z_0 der äußerste überhaupt von ihr berührte Beobachtungswert ist. Der so gefundene Wert $n(\mathfrak{T})$ weicht allerdings von dem früheren $\alpha(\mathfrak{T}) = 0{,}633$ einigermaßen ab, wenn auch $x(\mathfrak{T})$ dadurch nur von 53,9 auf 53,4 zurückgeht. Dabei zeigt eine Kontrolle durch die Interpolation einer ganzen Punktreihe mittels Tabelle 3 nach Formel [49], die ja mit der bis Δ_6 geführten Gl. [54] nach dem Gesagten identisch ist, auch schon bei graphischer Weiterbehandlung, wie wir sogleich sehen werden, eine etwas bessere Übereinstimmung mit jener früheren Berechnung. Trotzdem eben auch die Benutzung der Formel [55] und [56] zunächst einmal die Parabel sechster Ordnung zugrunde legt, so ist die Lage der einfachen Parabel zweiter Ordnung, auf die man sich mit [60] bei der Entscheidung über das Maximum wieder beschränkt, doch zu sehr von Nebensächlichkeiten beeinflußt, als daß sie einer genaueren numerischen Lösung der Gl. [51] mittels einer vollständigeren Gl. [59] entsprechen könnte. Wo man aber das Differenzenschema zu weiterer Verwendung ohnehin einmal aufstellt, da behält Gl. [61] neben jener einfachsten, enger an Lagrange angeschlossenen Berechnung immerhin einen selbständigen Wert als eine vorläufige Orientierung über die Lage des Maximums.

2. Zu einer genaueren Bestimmung bleibt aber wohl nichts weiter übrig, als eine neue äquidistante Reihe von Funktionswerten mittels einer genauen Anwendung der Formel [54], bezw. [49] bis zur VI. Ordnung zu interpolieren, die so dicht ist, daß die Interpolation des Maximums mittels einfacherer Parabeln eindeutig möglich wird, eine Methode, die von A. Lehmann a. a. O. ausführlich erläutert worden ist. Da man dann zur Bestimmung des Maximums wieder den Differentialquotienten dieser einfacheren Parabel gleich Null setzt, so darf diese also höchstens von dritter Ordnung sein, wenn man durch die Differentiation auf einen Ausdruck kommen soll, der höchstens das Quadrat von n enthält. Nun kann man natürlich durch vier Punkte stets eine solche Kurve legen. Wenn ihr Maximum aber der vorigen direkten Lösung nach Gl. [60] mit höheren Potenzen bis n^5 entsprechen soll,

muß die neue, das Maximum sicher einschließende Punktreihe so dicht sein, daß die einfachere Parabel dritter Ordnung wenigstens durch je sieben äquidistante Punkte von ihr annähernd hindurchgeht. Denn erst so viele Funktionswerte legen die ursprüngliche Parabel eindeutig fest, wenn sie mittelst Gl. [49] aus Differenzen bis zur VI. Ordnung berechnet ist. Erst dann werden also beide Parabeln auf dieser Strecke annähernd zusammenfallen und daher auch in ihren Extremen übereinstimmen. Die Annäherung der Parabel von höherer an eine solche von niedrigerer Ordnung ist aber um so größer, je enger die Punkte stehen, so daß kleinste Kurvenstrecken stets sogar einfach als Gerade betrachtet werden können. Dabei gibt nun gerade die Differenzenmethode selbst ein sicheres Kriterium dafür an die Hand, wie weit sich eine Reihe von $s+1$ äquidistanten Punkten einer Parabel von geringerem als s-tem, also z. B. r-tem Grade unterordnen läßt, wobei $r < s$. Wie durch direkte Berechnung der einzelnen Differenzen des äquidistanten Schemas aus Gl. [24] leicht abgeleitet werden kann, muß nämlich in diesem Falle die r-te Ordnung der Differenzen eine Konstante werden, so daß also alle Differenzen von höherer Ordnung, als es die Parabel selbst ist, verschwinden.

Eben deshalb läßt sich auch durch die Differenzenmethode direkt erkennen, daß die $\mathfrak{V}(x)$ im allgemeinen überhaupt keine algebraischen Kurven sind, wie schon in § 16 ausführlich erörtert wurde. Denn wenn man die Differenzen auch nur so weit ableitet, als es die Zahl $s+1$ der gegebenen Funktionswerte z_0 bis z_s erlaubt, also bis zur s-ten Ordnung, so lassen sie nicht einmal eine Herabsetzung ihrer Werte erkennen, die mit der Ordnung sogar gewöhnlich divergieren. Denkt man sich außerdem auch wieder die unbegrenzte Flankenreihe der Nullwerte hinzu, so ergibt dies eigentlich genau genommen eine unendliche Reihe von Gliedern der Gl. [47] oder [49], die allerdings bei $n < 1$ wegen der stark abnehmenden Koeffizienten eine immer geringere Bedeutung besitzen, wie es bei der Darstellung transszendenter Funktionen durch die Taylorsche Reihe der Fall ist.

Infolgedessen muß denn auch die neu interpolierte Reihe, von der man sich gleichzeitig überzeugt hat, daß sie das $\mathfrak{D}$ auch wirklich einschließt, schon sehr enge sein, wenn wirklich die vier Differenzen dritter Ordnung, die man aus sieben Funktionswerten ableiten kann, auch nur annähernd konstant sein sollen. In unserem numerischen Beispiele ist jedenfalls das Intervall $i=3$ noch zu groß, als daß der neue Abstand $i=0{,}3$ nach einer einmaligen Interpolation nach Tabelle 3 schon klein genug wäre. In diesem Falle wäre also zunächst in der Gegend des Maximums die Interpolation z. B. mit 0,2; 0,4 usw. oder auch nur mit 0,5 zu wiederholen, wobei man mindestens sieben der zunächst interpolierten Werte mit dem Abstande $0{,}1 \cdot i$ zu Ausgangspunkten des neuen Differenzenschemas wählte. Doch läßt sich der Gang dieser Maximumsbestimmung im allgemeinen auch an dem einmaligen Prozesse dieser Art mit nur 5 (statt 7) neuen Werten genügend erläutern, wenn wir unser voriges Beispiel nach Tabelle 4 fortsetzen.

In dem kritischen Intervall zwischen x_3 und x_4 werden zunächst neue Werte mittelst Tabelle 3 interpoliert. Aus ihnen ergibt sich folgendes neue Differenzenschema, das allerdings keineswegs konvergiert:

x_3+	50z	Δ^{I}	Δ^{II}	Δ^{III}	Δ^{IV}
0,3 i	21,370				
		0,264			
0,4 i	21,634		— 0,099		
		0,165		— 0,047	
0,5 i	21,799		— 0,146		0,111
		0,019		+ 0,064	
0,6 i	21,818		— 0,082		
		— 0,063			
0,7 i	21,755				

Da das Maximum jedenfalls etwas größer als $x_3 + 0{,}5\,i$ ist, kann dieser Wert als Ausgangspunkt x_p der Gleichung [49] für die Parabel 3. Ordnung betrachtet werden, die wir durch die Punkte $f(x_3 + 0{,}4\,i)$ bis $f(x_3 + 0{,}7\,i)$ hindurchlegen. Ihre Formel lautet dann

$$50z = f\left(53{,}5 + n\,i\,\frac{1}{10}\right) = 21{,}799 + 0{,}019\,n - 0{,}146\,\frac{(n^2 - n)}{2} + 0{,}064\,\frac{(n^3 - n)}{6}$$
$$= 21{,}799 + 0{,}0814\,n - 0{,}073\,n^2 + 0{,}0106\,n^3.$$

Die Bedingung für das Maximum aber wird

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dn}\cdot\frac{dn}{dx} = \frac{dz}{dn}\cdot 1 = 0 = 81{,}4 - 146\,n + 32\,n^2.$$

Von den beiden Wurzeln der Gleichung

$$n_1 = 0{,}650 \text{ und } n_2 = 3{,}93$$

gibt nur die erste einen negativen Wert des zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2z}{dn^2} = -146 + 64\,n.$$

Von $x_p = 52$ aus gerechnet wird daher $n(\mathfrak{D}) = 0{,}5 + 0{,}065 = 0{,}565$, oder $x(\mathfrak{D}) = 53{,}70$, also ein ähnlicher Wert, wie wir ihn nach der einfachen Lagrangeschen Methode mit der Parabel zweiter Ordnung fanden ($\alpha = 0{,}633$), und zwischen ihm und dem vorhin direkt aus [60] gefundenen Wert $n = 0{,}477$ etwa in der Mitte liegend, näher allerdings dem ersteren.

3. Im 7. Kapitel wird auch noch die Aufgabe genannt werden, den Wendepunkt der Verteilung eines komplexen K.-G. von der in § 14,3 definierten Art zu bestimmen. An dieser Stelle muß bekanntlich

$$\frac{d^2 f(x_p + n\,i)}{dx^2} = 0$$

werden, so daß bei einer interpolatorischen Bestimmung der Ausdruck [57], durch Hinzunehmen von [58] interpolatorisch verallgemeinert, d. h. der Ausdruck [62] gleich Null zu setzen wäre. Während aber bei der sogleich zu betrachtenden Integration, wenigstens bei bestimmten Integralen mit weiteren Grenzen, die speziellen Eigentümlichkeiten der interpolierten Kurve einer algebraischen Funktion, die für den K.-G. selbst nicht charakteristisch sind, mit den höheren Ordnungen dieser Operation immer mehr zurücktreten, kommen sie bei den höheren Differentialquotienten umgekehrt immer mehr zur Geltung. Soweit daher charakteristische Eigentümlichkeiten der zu analysierenden Verteilung nur in diesen höheren Abgeleiteten zum Ausdruck kommen, wird die Interpolation also doch wohl auf spezielle Verteilungsgesetze zurückgreifen müssen, die auch im einzelnen einen charakteristischen Verlauf zeigen. Der praktische Wert einer Bestimmung des Wendepunktes ist aber überhaupt so gering, daß wir uns an Ort und Stelle neben einer rein theoretischen Fixierung seiner Bedeutung auf die Ableitung der übrigen wichtigeren Hauptwerte und Streuungsmaße beschränken werden.

c) Die numerische Integration.

1. Die ein- und mehrfachen Integrale über die Verteilung $\mathfrak{V}(x)$ zwischen den Extremen des K.-G. E_u und E_0 oder zwischen E_u und einem beliebigen Werte x_m, die nach S. 48f zur Berechnung der Durchschnitte erforderlich sind, werden nach dieser Methode sinngemäß so auszuführen sein, daß man sich das ganze bestimmte Integral in einzelne Stücke zerlegt denkt, die je einen Beobachtungswert z_s von $x_s - 0{,}5\,i$ bis $x_s + 0{,}5\,i$ umschließen. Die Extreme E_u und E_0 einfacher K.-G. sind hierbei selbst als Beobachtungswerte $z_0 = z_p = 0$ zu betrachten. Auch die zusammengesetzten K.-G. nach § 14,3, die eine Abhängigkeit der r. H. von einer stetigen Größe x überhaupt bedeuten, gehen in den von uns betrachteten Fällen der Größer- und Kleinerurteile bei der Untersuchung der Unterschiedsempfindlichkeit einerseits von einem $f(a) = 0$ aus, steigen aber dann zu einem $f(b) = 1$ empor, um von da konstant zu bleiben. Bezeichnen wir auch a und b als „Extreme" E' und E, so sind die Integrations-Aufgaben auch auf unsere zusammengesetzten K.-G. innerhalb ihrer Extreme auszudehnen. Nachdem schon früher die Figur 3 eine Kurve der Gleichheitsurteile in Abhängigkeit von dem variablen Vergleichsreiz x als Beispiel eines einfachen K.-G. darbot, sei in Fig. 4 die Kurve der Kleiner-Urteile[1]) aus der nämlichen Versuchsreihe von H. Keller dargestellt, um an ihr die Integrationen einer beliebigen Verteilung $\mathfrak{V}(x)$ nach der Differenzenmethode zu veranschaulichen, von denen wir im 7. Kapitel Gebrauch machen. Dabei lassen wir hier zur Vereinfachung die Abszissen von $x_0 = 0$ nach x_7 hin in Intervallen $i = 3$ aufsteigen (während in der Versuchstabelle die Abszissen mit $x_0 = 64$ beginnen und in dieser Richtung um je $i = 3$ abnehmen).

Tabelle 5.

x_p:	$x_0 = E'$ (0)	x_1 (3)	x_2 (6)	x_3 (9)	x_4 (12)	x_5 (15)	x_6 (18)	$x_7 = E$ (21)	x_8 (24)
z_p	$\frac{0}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{13}{50}$	$\frac{33}{50}$	$\frac{45}{50}$	$\frac{50}{50} = 1$	1

1) D. h. die aus Kellers Urteilen „Kleiner" und „Deutlich kleiner" kombinierte Kurve der Kleiner-Urteile überhaupt. Die Abszissen sind dort fallend, also $x_0 = 64$ $x_1 = 61$ usw. Vgl. S. 228 c.

In Tabelle 5 sind die $p + 1 = 8$ Beobachtungswerte einschließlich $z(E') = 0$ und $z(E) = 1$ der $\mathfrak{V}(x)$ nach Fig. 4 zusammengestellt, aus denen nach Gl. [54] unter Abschluß mit der III. Ordnung der Differenzen, die bei unseren numerischen Integrationen genügen werden, die Interpolation berechnet wurde. In der Fig. 4 sind zunächst nur die Mittelpunkte der Intervalle in dieser Weise auf zweifache Art ($x_s + 0{,}5\,i$ und $x_{s+1} - 0{,}5\,i$) bestimmt worden, worauf die Kurve durch graphische Interpolation ergänzt ist. Bis zu $\Delta_{s,3}$ kommen

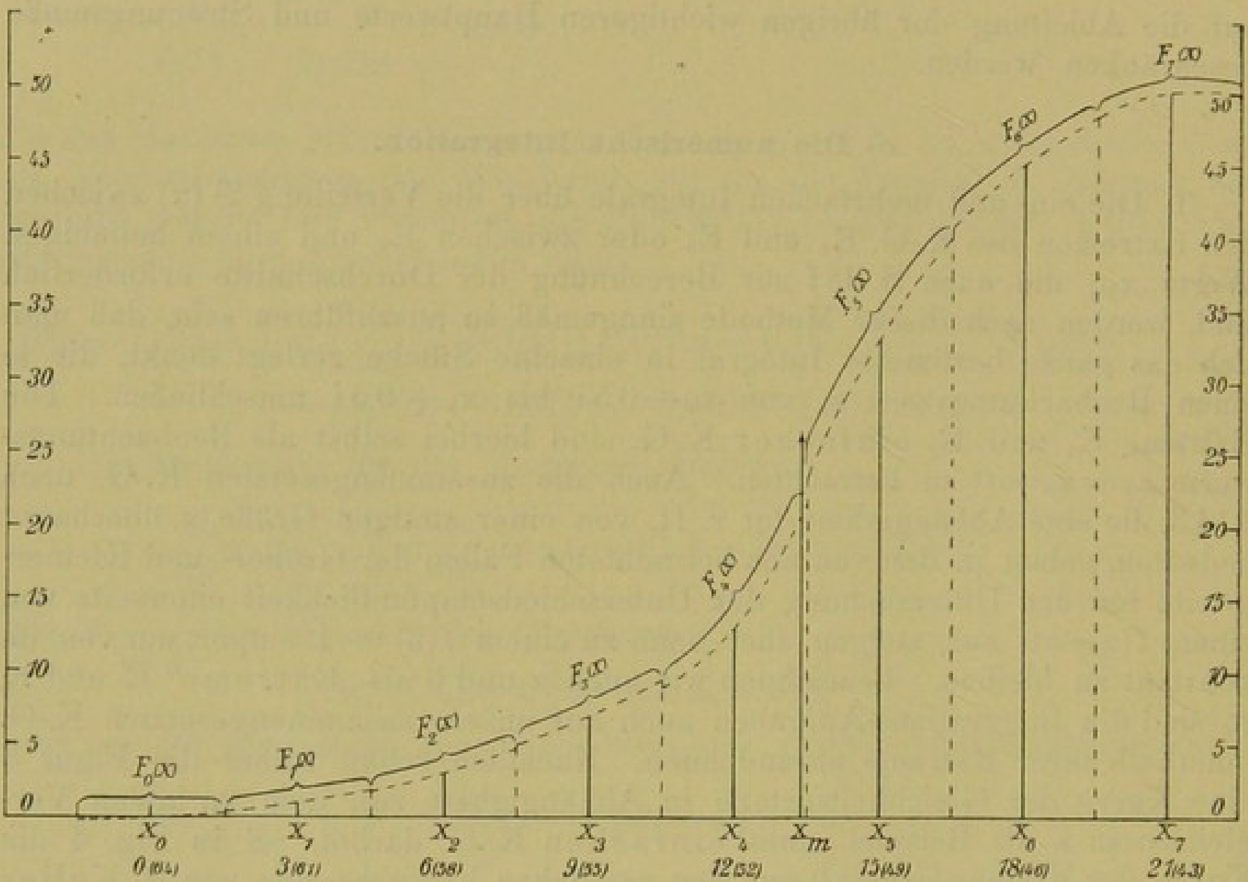


Fig. 4

Die **Interpolation** mittelst der **Differenzenmethode**, zugleich als Grundlage der **numerischen Integration**. (Beobachtungswerte nach Tabelle 5.)

hierbei für $n = \pm 0{,}5$ und $\pm 0{,}25$, das bei x_5 noch hinzugenommen wurde, Gleichungen mit folgenden Koeffizienten in Betracht:

$$z_{s \pm 0,5} = z_s \pm 0{,}5\,\Delta_{s,1} + 0{,}125\,\Delta_{s,2} \mp 0{,}0625\,\Delta_{s,3}$$

$$z_{s \pm 0,25} = z_s \pm 0{,}25\,\Delta_{s,1} + 0{,}03125\,\Delta_{s,2} \mp 0{,}00781\,\Delta_{s,3}.$$

Das Intervall ist wieder überall $i = 3$. Die Unstetigkeiten, die inmitten der Intervalle wegen des Überganges von der einen Interpolationsfunktion zur anderen auftreten, sind so klein, daß sie in der Fig. 4 nicht überall zu erkennen sind. Höchstens in den beiden mittleren Intervallen ist die Differenz etwas größer, da hier der Verlauf nach oben und unten wesentlich anderen Gesetzen folgt. Indessen tritt auch hier der Betrag im Verhältnis zur Höhe der ganzen Ordinate zurück. Auch werden wir sehen, daß nach allgemeineren theoretischen Überlegungen g e r a d e b e i d e n m i t t l e r e n O r d i n a t e n, die der r. H. $\frac{1}{2}$ nahe liegen, die Präzision der Einzelwerte als solcher am geringsten ist[1]). (Vgl. Kap. 6, § 27.)

Die Bezirke dieser einzelnen Funktionen nach [54a]

$$
\begin{aligned}
F_0(x) &= \mathfrak{B}(x_0 + n\,i) = z_0 + n\,L_{0,1} + \frac{n^2}{2} L_{0,2} + \ldots \\
F_1(x) &= \mathfrak{B}(x_1 + n\,i) = z_1 + n\,L_{1,1} + \frac{n^2}{2} L_{1,2} + \ldots \\
&\vdots \\
F_p(x) &= \mathfrak{B}(x_p + n\,i) = z_p + n\,L_{p,1} + \frac{n^2}{2} L_{p,2} + \ldots
\end{aligned}
\qquad [63]
$$

sind in Fig. 4 durch die punktierten Ordinaten inmitten der Intervalle abgegrenzt, während die Ordinaten der Beobachtungswerte z_s selbst ausgezogen sind. Die Ordinate mit dem Pfeil wird erst unten erörtert werden.

2. Es besteht also dann z. B. das bestimmte einfache Integral über $\mathfrak{B}(x)$ zwischen den Grenzen E' und E aus der Summe von $p + 1 = 8$ bestimmten Partialintegralen, die mit $J_0(x)$, $J_1(x) \ldots J_p(x)$ bezeichnet werden sollen, d. h. es ist:

$$\int_{E'}^{E} \mathfrak{B}(x)\,dx = J_0(x) + J_1(x) + \ldots J_p(x), \qquad [64]$$

wobei die $J(x)$ durch Vermittelung der Werte aus [63] definiert sind:

$$
\begin{aligned}
J_0(x) &= \int_{x_0}^{x_0 + 0{,}5\,i} F_0(x)\,dx, \\
J_1(x) &= \int_{x_1 - 0{,}5\,i}^{x_1 + 0{,}5\,i} F_1(x)\,dx, \\
&\vdots \\
J_{p-1}(x) &= \int_{x_{p-1} - 0{,}5\,i}^{x_{p-1} + 0{,}5\,i} F_{p-1}(x)\,dx, \\
J_p(x) &= \int_{x_p - 0{,}5\,i}^{x_p} F_p(x)\,dx.
\end{aligned}
\qquad [65]
$$

1) Die Werte der auf beide Arten nach Tab. 7 und Gl. [54] berechneten Intervallmitten sind im einzelnen:

Tabelle 6.

Index s =	0	1	2	3	4	5	6
$z_s + 0{,}5 \cdot 50$	0,344	1,844	4,719	9,375	21,563	40,656	48,281
$z_{(s+1)} - 0{,}5 \cdot 50$	0,406	1,781	5,125	7,937	23,344	39,969	48,344

Die Integrationskonstanten C_s der $\int F_s(x)\,dx$ kommen bei dem bestimmten einfachen Integral natürlich in Wegfall.

Nun ist aber die unabhängige Variable im System [63] wiederum n, so daß auch die Integrale zunächst in solche nach n umzuwandeln sind.

Da innerhalb sämtlicher Partialintegrale

$$x = x_s + n\,i,$$

$$\frac{dx}{dn} = i,$$

so wird

$$dx = i \cdot dn, \qquad [66]$$

und daher zunächst das unbestimmte Integral, zu dem die Integrationskonstante C_s gehört,

$$\int F_s(x_s + n\,i)\,dx = i \int F_s(n)\,dn. \qquad [67]$$

Bei zweifacher Integration aber wird das unbestimmte Doppel-Integral

$$\int\int F_s(x)\,dx\,dx = \frac{1}{i^2}\int\int F_s(n)\,dn\,dn = \frac{1}{i^2}\int\int F_s(n)\,dn\,dn. \qquad [68]$$

3. Geht man nun wieder zu den bestimmten Integralen über, und setzt dabei sogleich das System [63] in [67] und [68] ein, so wird das einfache Integral

$$\int\limits_{x_s + n_2 i}^{x_s + n_1 i} F_s(x)\,dx = i \int\limits_{n_2}^{n_1} F_s(n)\,dn = i \left\{ n \cdot z_s + \frac{n^2}{2} L_{s,1} + \frac{n^3}{2 \cdot 3} L_{s,2} \ldots \right|_{n_2}^{n_1}$$

$$= i \left\{ (n_1 - n_2)\,z_s + \frac{n_1^2 - n_2^2}{2} L_{s,1} + \frac{n_1^3 - n_2^3}{2 \cdot 3} L_{s,2} \ldots \right\}. \qquad [69]$$

Hierbei fällt also die Integrationskonstante C_s hinaus. Das bestimmte Doppelintegral aber wird

$$\int\limits_{x_s + n_1 i}^{x_s + n_2 i}\int F_s(x)\,dx\,dx = i^2 \int\limits_{n_2}^{n_1}\int F_s(n)\,dn\,dn$$

$$= i^2 \left\{ \frac{n^2}{2} z_s + \frac{n^3}{2 \cdot 3} L_{s,1} + \frac{n^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} L_{s,2} \ldots + C_s n \right\}_{n_2}^{n_1}$$

$$= i^2 \left\{ \frac{n_1^2 - n_2^2}{2} z_s \text{ usw. } \right\}. \qquad [70]$$

In unseren späteren Anwendungen dieser Integrale werden wir übrigens durchweg mit den Gliedern bis höchstens $L_{s,2}$ ausreichen. Bei einfachen Integralen kommt nämlich von $L_{s,3}$ immer nur die Differenz $L_{0,3} - L_{s,3}$ vor, und auch diese nur mit dem Koeffizienten $\frac{1}{384}$; $L_{s,4}$ aber hat in der Klammer bei [69] für $n = 0{,}5$ nur noch den Koeffizienten $\frac{1}{3840}$, der dann beim Doppelintegral [70] sogar bereits zu $L_{s,3}$ hinzutritt. Innerhalb der $L_{s,1}$ und $L_{s,2}$ könnte man natürlich nach Anlegung des Schemas leicht bis $\varDelta_{s,6}$ gehen. Wie aber die Koeffizienten der $\varDelta$ in Gleichung [55] erkennen lassen, wird man die Differenzen von höherer als dritter Ordnung hier vernachlässigen dürfen. Wir setzen also in unserem Rechenbeispiele unten einfach:

$$\begin{aligned} L_{s,1} &= \varDelta_{s,1} - \frac{1}{6}\varDelta_{s,3}, \\ L_{s,2} &= \varDelta_{s,2}. \end{aligned} \qquad [70\mathrm{a}]$$

Im folgenden betrachten wir nun kurz die vier Hauptfälle, die für Kap. 7 allein erforderlich sind: Die bestimmten einfachen und Doppel-Integrale über die gesamte Verteilung $\mathfrak{V}(x)$ zwischen den Extremen, und die einfachen und Doppel-Integrale zwischen dem einen Extrem E_u bezw. E', bei dem $z = 0$ ist, und einem beliebigen Wert x_m, wobei

$$x_m = z_\varrho + \alpha i.$$

Hierbei kann α positiv oder negativ sein, ohne jedoch bei unserer Zerlegung in Partialintegrale größer als $\pm\, 0{,}5$ zu werden, so daß also

$$-\,0{,}5 < \alpha < +\,0{,}5.$$

Dabei erlaube ich mir für die Ausrechnung des Ansatzes im einzelnen auf meine vor kurzem erschienene Abhandlung „Die mathematischen Grundlagen der sog. unmittelbaren Behandlung psychophysischer Resultate“[1]) zu verweisen, und gebe hier nach dem Ansatze sogleich überall das genaue Resultat unter Berücksichtigung aller Glieder bis $L_{s,2}$ bzw. $\varDelta_{s,3}$, sowie vor allem auch eine für die psychophysischen Zwecke wohl überall ausreichende Annäherungsformel, die in der Praxis zugleich sehr bequem zu handhaben ist. Die Durchführung unseres Rechenbeispieles nach der genauen und der angenäherten Formel wird uns die Brauchbarkeit der letzteren auch sogleich an einem ganz beliebig herausgegriffenen praktischen Falle veranschaulichen.

4. Zur Lösung der ersten Aufgabe, die schon in [64] und [65] zur Erklärung dieser Integrationsweise überhaupt in Angriff genommen wurde, knüpfen wir wieder an Gleichung [65] an und finden mit Rücksicht auf [69]:

$$\frac{1}{i}\int\limits_{E'}^{E}\mathfrak{V}(x)\,dx = \int\limits_{0}^{+0{,}5} F_0(n)\,dn + \sum_{s=1 \text{ bis } p-1}\int\limits_{-0{,}5}^{+0{,}5} F_s(n)\,dn + \int\limits_{-0{,}5}^{0} F_p(n)\,dn$$

$$= (0{,}5 + 0)\cdot 0 + \left(\frac{0{,}5^2}{2} + 0\right) L_{0,1} + \left(\frac{0{,}5^3}{4} + 0\right) L_{0,2}\,\ldots$$

1) In Wundt, Psychol. Studien VI, 3 u. 4, 1910, S. 252 ff.

$$+ 2 \cdot 0{,}5 \cdot z_1 + \frac{0{,}5^2 - (-0{,}5)^2}{2} L_{1,1} + 2 \cdot \frac{0{,}5^3}{6} L_{1,2} \ldots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$+ 2 \cdot 0{,}5 \cdot z_{p-1} + \frac{0{,}5^2 - (-0{,}5)^2}{2} L_{p-1,1} + 2 \cdot \frac{0{,}5^3}{6} L_{p-1,2}$$

$$+ \Big(0 - (-0{,}5)\Big) z_p + \left(0 - \frac{(0{,}5)^2}{2}\right) L_{p,1} + 0 - \frac{(-0{,}5)^3}{6} L_{p,2} \ldots \Big)$$

$$= \sum_{s=1 \text{ bis } p-1} z_s + \frac{1}{2} z_p + \frac{1}{8} (L_{0,1} - L_{p,1}) + \frac{1}{48} \Big(L_{0,2} + L_{p,2}\Big)$$

$$+ \frac{1}{24} \sum_{s=1 \text{ bis } p-1} L_{s,2}. \qquad [71]$$

Hier sind nun sämtliche Glieder mit L praktisch überhaupt zu vernachlässigen. Man kann also in unseren Anwendungen einfach mit der Formel auskommen:

$$\int_{E'}^{E} \mathfrak{B}(x)\,dx = i \cdot \sum_{s=1 \text{ bis } p-1} z_s + \frac{i}{2} z_p. \qquad [72]$$

Da bei einem einfachen K.-G. $z_p = z_0 = 0$ ist, so fällt das zweite Glied $+ \frac{1}{2} z_p$ dort weg. Bei unserem Beispiel Fig. 4 aber ist $z_p = 1$, also das zweite Glied einfach $\frac{1}{2}$. Bei einem einfachen K.-G. mit den Extremen E_o und E_u, wo $z_0 = z_p = 0$, wird also aus [72] einfach:

$$\int_{E_u}^{E_o} \mathfrak{B}(x)\,dx = i \cdot \sum_{s=1 \text{ bis } p-1} z_s \qquad [72a]$$

und bei einem K.-G., bei dem $z_0 = 0$ und $z_p = 1$,

$$\int_{E'}^{E} \mathfrak{B}(x)\,dx = i \sum_{s=1 \text{ bis } p-1} z_s + \frac{i}{2}. \qquad [72b]$$

Wie man leicht sieht, entspricht aber diese Annäherungsformel der ganz elementaren geometrischen Berechnung des (dem bestimmten Integral numerisch gleichen) Inhaltes der Fläche zwischen der Kurve und der Abszissenachse, wenn man sich die beobachteten Punkte z_s rein linear verbunden denkt. Diese Kurvenfläche ist dann einfach aus den Paralleltrapezen zusammengesetzt, die durch die parallelen Beobachtungsordinaten z_s und z_{s+1}, das geradlinige Kurvenstück und ein als „Höhe“ zu betrachtendes Stück i der Abszissenachse gebildet werden, wie es schon Fig. 1 darstellte. Das unterste Stück bei E_u (bzw. E′) ist natürlich ein Dreieck, bei einem einfachen K.-G.

auch noch das entgegengesetzte Ende der Fläche bei E_o. Somit ist beim einfachen K.-G., z. B. Fig. 3, nach linearer Interpolation[1]):

$$\int_{E_u}^{E_o} \mathfrak{V}(x)\,dx = \frac{i}{2}(0+z_1) + \frac{i}{2}(z_1+z_2) + \dots \frac{i}{2}(z_{p-1}+0)$$

$$= i\,(z_1 + z_2 \dots + z_{p-1}) = i \sum_{s=1 \text{ bis } p-1} z_s,$$

womit wir also wieder Formel [72a] erlangt haben.

Wenn dagegen $z_0 = 0$ und $z_p = 1$, wie in Fig. 4, so kommen wir bei linearer Interpolation auf [72b]; denn es ist

$$\int_{E'}^{E} \mathfrak{V}(x)\,dx = \frac{i}{2}(0+z_1) + \frac{i}{2}(z_1+z_2) + \dots \frac{i}{2}(z_{p-1}+1)$$

$$= i \sum_{s=1 \text{ bis } p-1} z_s + \frac{i}{2}.$$

Die ganze Interpolation hat geradezu die Tendenz, an der Fläche der gesamten Verteilungskurve zwischen den Extremen, wie sie bei rein linearer Interpolation abgegrenzt wird, möglichst wenig zu ändern. Beim einfachen K.-G. (Fig. 3) wird die durch die höheren Differenzen entstehende Konvexität gegen die X-Achse in der Nähe der Extreme durch eine Konkavität in der Mitte ausgeglichen, und bei Fig. 4 die Konvexität in der Nähe von E′ durch die Konkavität bei E. Eine völlig eindeutige Beziehung läßt sich aber natürlich in dieser Hinsicht bei der Beschränkung auf die Extreme nicht herstellen, da sich ja diese Ausgleichung der Kurvenrichtung über die Extreme hinaus erstreckt. Mindestens hinsichtlich des allerdings minimalen Betrages der Restglieder in [71] würde man also von den Zufälligkeiten der Kurve abhängig werden.

Wie wenig aber diese Restglieder ausmachen, erhellt wieder am besten aus der rechnerischen Behandlung unseres Beispieles Tabelle 5, Fig. 4. Wir

---

1) Da die rein lineare Interpolation das bestimmte Integral einfach elementar geometrisch abzuleiten gestattet, so ist eine solche Auswertung auch bei nicht äquidistanten Intervallen leicht durchführbar. In diesem Falle haben die Paralleltrapeze nur eben verschiedene Höhen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... $x_p - x_{p-1}$. Daher wird der gesamte Flächeninhalt zwischen den Extremen

a) bei einem einfachen K.-G., bei dem $z_0 = z_p = 0$,

$$\int_{E'=x_0}^{E=x_p} V(x)\,dx = \frac{1}{2}\left\{z_1(x_2-x_0) + z_2(x_3-x_1)\dots z_{p-1}(x_p-x_{p-2})\right\}, \qquad [73]$$

b) bei einem K.-G., dessen $z_0 = 0$ und $z_p = 1$:

$$\int_{E'=x_0}^{E=x_p} V(x)\,dx = \frac{1}{2}\left\{z_1(x_2-x_0) + z_2(x_3-x_1)\dots + z_{p-1}(x_p-x_{p-2}) + (x_p - x_{p-1})\right\}. \qquad [74]$$

entwerfen zunächst wieder das **Differenzenschema** aus den zur Erlangung der rel. H. mit 50 zu dividierenden z-Werten bis $\Delta_{s,3}$, wobei wir zur Ableitung von $\Delta_{0,3}$ oberhalb bis x_{-2} und zur Ableitung von $\Delta_{7,3}$ unterhalb bis x_9 gehen müssen.

Tabelle 7.
Schema der Funktionsdifferenzen zu Tabelle 5.
(Vgl. Fig. 4.)

x	50 z	Δ^{I}_{s} und ($\Delta_{s,1}$)	$\Delta^{II} = (\Delta_{s,2})$	Δ^{III}_{s} und ($\Delta_{s,3}$)
x_{-2}	0			
		0		
x_{-1}	0		0	
		0		1
x_0	0	(0,5)	1	(0,5)
		1		0
x_1	1	(1,5)	1	(0,5)
		2		1
x_2	3	(3)	2	(0,5)
		4		0
x_3	7	(5)	2	(6)
		6		12
x_4	13	(13)	14	(— 5)
		20		— 22
x_5	33	(16)	— 8	(— 10,5)
		12		1
x_6	45	(8,5)	— 7	(1,5)
		5		2
x_7	50	(2,5)	— 5	(3,5)
		0		5
x_8	50		0	
		0		
x_9	50			

Nach Gleichung [72b], die bei der Art des K.-G. hier in Betracht kommt, wird also

$$\int_{x_0}^{x_p} \mathfrak{W}(x)dx = i \sum_{s=1 \text{ bis } p-1} z_s + \frac{i}{2} = \frac{3}{50}\left(1+3+7+13+33+45+\frac{50}{2}\right) = 7{,}62. \quad [75]$$

Die Restglieder aus [71] aber betragen mit Rücksicht auf [70a]:

$$\frac{3}{50}\left\{\frac{1}{8}\left(\Delta_{0,1} - \frac{1}{6}\Delta_{0,3} - \Delta_{7,1} + \frac{1}{6}\Delta_{7,3}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{48}\left(\Delta_{0,2} + \Delta_{7,2}\right) + \frac{1}{24}\sum_{s=1 \text{ bis } 6} \Delta_{s,2} \right\} =$$
$$= \frac{3}{50}\left\{\frac{1}{8}\left(0{,}5 - \frac{1}{6}\,0{,}5 - 2{,}5 + \frac{1}{6}\cdot 3{,}5\right) + \frac{1}{48}(1-5) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{24}\cdot 4\right\} = -0{,}00625. \quad [76]$$

Eine so geringe Differenz zwischen zwei Werten ist natürlich auf alle Fälle zu vernachlässigen, gleichgültig, welchen von beiden man als den bei einer idealen Interpolation wahrscheinlicheren ansehen mag.

5. Die zweite Aufgabe ist die Berechnung des einfachen bestimmten Integrales zwischen x_0 und einem beliebigen Wert x_m, dessen Ordinate nicht selbst beobachtet worden ist. Es enthält dieses Integral offenbar erstens eine ganz analog wie in Gleichung [71] berechnete Summe von Partialintegralen J_s, die sich von $E' = x_0$ bis zu $x_\varrho - 0{,}5i$ erstrecken, wenn x_ϱ die dem x_m nächstbenachbarte Beobachtungsabszisse bedeutet (vgl. Fig. 4), die in diesem Teile der Formel also einfach an Stelle von x_p zu treten hat, und zweitens noch den Rest eines Partialintegrales, das von $x_\varrho - 0{,}5i$ bis x_m reicht. Je nachdem also x_m der nächstniedrigeren oder der nächsthöheren Beobachtungsabszisse näher liegt, wird die obere Grenze n_1 des letzten Restintegrales oberhalb oder unterhalb des Ausgangswertes x_ϱ liegen, also positiv oder negativ sein. Wir setzen dieses $n_1 = \alpha$, so daß

$$\alpha = \frac{1}{i}\left(x_m - x_\varrho\right),$$

das also im Falle $x_m > x_\varrho$ positiv, bei $x_m < x_\varrho$ aber negativ wird. Der Ansatz wird daher analog wie in [71]:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}\int\limits_{E'=x_0}^{x_m}\mathfrak{V}(x)\,dx &= \int\limits_{0}^{0,5}F_0(n)\,dn + \sum_{s=1 \text{ bis } \varrho-1}\int\limits_{-0,5}^{+0,5}F_s(n)\,dn + \int\limits_{-0,5}^{\alpha}F_\varrho(n)\,dn \\
&= \frac{0{,}5^2}{2}L_{0,1} + \frac{0{,}5^3}{6}L_{0,2}\ldots \\
&\quad + z_1 + 0\cdot L_{1,1} + \frac{0{,}5^3}{3}L_{1,2}\ldots \\
&\quad\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\quad + z_{\varrho-1} + 0\cdot L_{\varrho-1,1} + \frac{0{,}5^3}{3}L_{\varrho-1,2}\ldots \\
&\quad + (\alpha + 0{,}5)\,z_\varrho + \frac{\alpha^2 - (0{,}5)^2}{2}L_{\varrho,1} = \frac{\alpha^3 + (0{,}5)^3}{6}L_{\varrho,2}\ldots \\
&= \sum_{s=1 \text{ bis } \varrho-1} z_s + (0{,}5 + \alpha)\,z_\varrho + \frac{\alpha^2}{2}\left(\varDelta_{\varrho,1} - \frac{1}{6}\varDelta_{\varrho,3}\right) + \frac{1}{8}\left(\varDelta_{0,1} - \varDelta_{\varrho,1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{24}\sum_{s=1 \text{ bis } \varrho-1}\varDelta_{s,2} + \frac{1}{48}\left(\varDelta_{0,2} - \varDelta_{0,3} + \varDelta_{\varrho,2} + \varDelta_{\varrho,3}\right) + \frac{\alpha^3}{6}\varDelta_{\varrho,2}.
\end{aligned} \qquad [77]$$

Auch hier sind von den bis zur zweiten Ordnung berücksichtigten L nur die $\varDelta_{s,3}$ noch mitgenommen. Doch genügt für praktische Zwecke wohl wieder vollkommen folgende Annäherungsformel:

$$\frac{1}{i}\int_{E'=x_0}^{x_m}\mathfrak{B}(x)\,dx = \sum_{s=1 \text{ bis } \varrho-1} z_s + (0{,}5+\alpha)\,z_\varrho + \frac{\alpha^2}{2}\,\Delta_{\varrho,1}$$

$$= \sum_{s=1 \text{ bis } \varrho-1} z_s + (0{,}5+\alpha)\,z_\varrho + \frac{\alpha^2}{4}\,(z_{\varrho+1} - z_{\varrho-1}). \qquad [78]$$

Eventuell kann noch

$$\frac{1}{8}\,(\Delta_{0,1} - \Delta_{\varrho,1}) = \frac{1}{16}\,(z_1 - z_{\varrho+1} + z_{\varrho-1})$$

hinzugenommen werden. Den geringen Betrag der vernachlässigten Restglieder ersehen wir wieder an unserem Zahlenbeispiele. In Voraussicht künftiger Aufgaben wählen wir als beliebige obere Grenze $x_m = 13{,}38$, deren Ordinate in Fig. 4 mit dem Pfeil versehen ist. Da x_m noch unterhalb der Mitte des Intervalles zwischen x_4 und x_5 liegt, so wird $x_\varrho = x_4 = 12$, und da das Intervall $i = 3$ ist, so ergibt sich:

$$\alpha = \frac{1}{3}\,(13{,}38 - 12) = +\,0{,}46.$$

Somit wird der genaue Wert, in dem wir zuerst die Annäherungsglieder von [76] und dann die Restglieder anschreiben und beide Teile auch in der Summation trennen:

$$\int_0^{13.38}\mathfrak{B}(x)\,dx = \frac{3}{50}\Big\{1 + 3 + 7 + 0{,}96\cdot 13 + \frac{0{,}46^2}{2}\cdot 13$$

$$+ \frac{0{,}46^2}{12}\cdot 5 + \frac{1}{8}\,(0{,}5 - 13) + \frac{1}{24}\cdot 5 + \frac{1}{48}\,(0{,}5 + 9) + \frac{0{,}46^3}{6}\cdot 14\Big\}$$

$$= \frac{3}{50}\Big\{24{,}8554 - 0{,}841\Big\} = 1{,}49135 - 0{,}05046.$$

Auch hier ist somit der Wert 1,4913 der angenäherten Formel [78] nur um 0,05046 kleiner als der genaue Wert nach [77], d. h. um 3,5 % des letzteren. Obgleich also hier der Einfluß der Restglieder um eine Dimension höher ist als bei dem Integral über den ganzen K.-G., ist er wohl praktisch immer noch zu vernachlässigen. Auch hier ist der Betrag des Integrales in [78] übrigens ein ganz ähnlicher, wie wenn man nach linearer Interpolation wieder die Flächeninhalte der Paralleltrapeze berechnet; nur kommt durch die Verwendung der symmetrischen Interpolationsformel [54] die Differenz $\Delta_{\varrho,1} = \frac{1}{2}\,(\Delta_{\varrho+1} - \Delta_{\varrho-1})$ herein, während die geometrische Ableitung dafür die einfache Differenz $\Delta^{I}_{\varrho} = z_{\varrho+1} - z_\varrho$ enthält. Es ergibt sich nämlich aus der rein linearen Interpolation durch die nämliche Überlegung wie S. 88f

$$\frac{1}{i}\int_{E_i}^{x_m}\mathfrak{B}(x)\,dx = \sum_{s=1 \text{ bis } \varrho-1} z_s + (\alpha + 0{,}5)\,z_\varrho + \frac{\alpha^2}{2}\,(z_{\varrho+1} - z_\varrho). \qquad [78a]$$

In unserem Beispiele bedeutet dies

$$\int_0^{13,38} \mathfrak{V}(x)\,dx = \frac{3}{50}\left(1 + 3 + 7 + 0{,}96 \cdot 13 + \frac{0{,}46^2}{2} \cdot 20\right) = 1{,}535,$$

also einen Wert, der nur um $+\,0{,}0437$ von der angenäherten Formel [78] abweicht, was als Eigentümlichkeit der speziellen Interpolationsweise wohl ebenfalls vernachlässigt werden dürfte[1]).

6. Besonders wichtig ist drittens die Berechnung des bestimmten Doppelintegrales über den ganzen Bereich des K.-G. von E bis E' nach Gl. [68] und [70]:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i^2}\int_{E'=x_0}^{E=x_p}\!\!\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx &= \int_0^{+0,5}\!\!\int F_0(n)\,dn\,dn + \sum_{s=1 \text{ bis } p-1}\int_{-0,5}^{+0,5}\!\!\int F_s(n)\,dn\,dn + \int_{-0,5}^{0}\!\!\int F_p(n)\,dn\,dn \\
&= +\frac{0{,}5^2}{2} z_0 + \frac{0{,}5^3}{6} L_{0,1} + \frac{0{,}5^4}{24} L_{0,2} + 0{,}5\, C_0 \\
&\quad + \frac{0{,}5^2 - 0{,}5^2}{2} z_1 + \frac{2 \cdot 0{,}5^3}{6} L_{1,1} + \frac{0{,}5^4 - 0{,}5^4}{24} L_{1,2} + 2 \cdot 0{,}5\, C_1 \qquad [80] \\
&\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\quad 0 \cdot z_{p-1} + \frac{0{,}5^3}{3} L_{p-1,1} + 0 \cdot L_{p-1,2} + C_{p-1} \\
&\quad - \frac{(-0{,}5)^2}{2} z_p - \frac{(-0{,}5)^3}{6} L_{p,1} - \frac{(-0{,}5)^4}{24} L_{p,2} + 0{,}5\, C_p.
\end{aligned}$$

Die Glieder mit $L_{s,2}$ fallen von F_1 bis F_{p-1} ebenso hinaus wie die ersten Glieder dieser Partialintegrale mit den z-Werten. Bei F_0 und F_1 aber erhalten sie nur noch den Koeffizienten $\frac{1}{384}$, so daß wir hier von den $L_{s,2}$ überhaupt absehen können, soweit sie nicht in den Konstanten C_s enthalten sind. Diese letzteren stellen hier offenbar den Hauptwert des ganzen Doppelintegrals dar. Sie sind nach dem bereits S. 75 genannten Prinzip zu berechnen, daß die unbestimmten einfachen Partialintegrale zweier aufeinanderfolgender Interpolationsfunktionen an der Übergangsstelle den nämlichen Wert erlangen müssen, so daß also

1) Auch hier wird natürlich die geometrische Berechnung bei rein linearer Interpolation ohne die sonst überall vorausgesetzte Äquidistanz der Ordinaten kaum schwieriger. Für nicht äquidistante Ordinaten findet man, da das letzte Paralleltrapez die Seiten z_ϱ und $z_\varrho + \alpha\,(z_{\varrho+1} - z_\varrho)$ sowie die Höhe $(x_{\varrho+1} - x_\varrho)\,\alpha$ hat,

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_m} \mathfrak{V}(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big\{ & z_1\,(x_2 - x_0) + \ldots z_{\varrho-1}\,(x_\varrho - x_{\varrho-2}) \\
& + z_\varrho\,(x_\varrho - x_{\varrho-1} + 2\alpha\,[x_{\varrho+1} - x_\varrho]) \\
& + \alpha^2\,(z_\varrho \cdot x_\varrho - z_{\varrho+1} \cdot x_\varrho - z_\varrho \cdot x_{\varrho+1} + z_{\varrho+1} \cdot x_{\varrho+1})\Big\} \qquad [79]
\end{aligned}$$

$$\int \mathfrak{B}(x_0 + 0{,}5\,i)\,dn = \int \mathfrak{B}(x_1 - 0{,}5\,i)\,dn \text{ usw.}$$

und allgemein

$$\int \mathfrak{B}(x_s + 0{,}5\,i)\,dn = \int \mathfrak{B}(x_{s+1} - 0{,}5\,i)\,dn\,. \qquad [81]$$

Setzt man nun wie beim bestimmten Integral [69] die Funktion $\mathfrak{B}(x)$ selbst ein, so erhält man folgendes Gleichungssystem zur Berechnung der Konstanten:

$$0{,}5\,z_s + \frac{0{,}5^2}{2} L_{s,1} + \frac{0{,}5^3}{6} L_{s,2} + C_s =$$
$$= -0{,}5\,z_{s+1} + \frac{(-0{,}5)^2}{2} L_{s+1,1} + \frac{(-0{,}5)^3}{6} L_{s-1,2} + C_{s-1}. \qquad [82]$$

Da das erste Integral $\int F_0(x)\,dn$ beim Wert $n = 0$ selbst verschwinden soll, so ist

$$C_0 = 0\,, \qquad [83]$$

und daher

$$C_1 = \frac{1}{2} z_1 + \frac{1}{8}\left(L_{0,1} - L_{1,1}\right) + \frac{1}{48}\left(L_{0,2} + L_{1,2}\right) \qquad [84]$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left(z_1 + z_2\right) + \frac{1}{8}\left(L_{1,1} - L_{1,1}\right) + \frac{1}{48}\left(L_{1,2} + L_{2,2}\right) + C_1$$

usw.

Jedenfalls erhält man für die Konstanten von [80] ein System, das sich schreiben läßt

$$\begin{aligned}\sum_{s=1 \text{ bis } p-1} C_s + 0{,}5\,C_p = {} & C_1 \\ & + C_1 + a_2 \\ & + C_1 + a_2 + a_3 \\ & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ & + C_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_{p-1} \\ & + \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{2} a_3 \quad + \frac{1}{2} a_{p-1} + \frac{1}{2} a_p\,,\end{aligned}$$

wobei die a_s nach dem System [84] zu berechnen sind. Nach den nötigen Zusammenfassungen findet man schließlich als Endformel, die dann nur noch nach [70a] bis auf $\Delta_{s,3}$ näher auszuführen ist:

$$\frac{1}{i^2}\int_{E'}^{E}\int \mathfrak{B}(x)\,dx\,dx = (p-1)\,z_1 + (p-2)\,z_2 \ldots + 2\cdot z_{p-2} + 1\cdot z_{p-1} + \frac{1}{8} z_p$$
$$+ \frac{3p-1}{24} L_{0,1} - \frac{1}{12}\sum_{s=1 \text{ bis } p-1} L_{s,1} - \frac{1}{24} L_{p,1} + \frac{2p-1}{96} L_{0,2}$$
$$+ \frac{1}{24}\left((p-1)\,L_{1,2} + (p-2)\,L_{2,2} + \ldots 1\cdot L_{p-1,2}\right) + \frac{1}{96} L_{p,2}\,. \qquad [85]$$

Die Glieder mit Δ haben aber hier, zusammen genommen, einen so geringen Wert, daß für die Praxis folgende überaus einfache und leicht zu merkende Annäherungsformel vollkommen genügt:

$$\int_{E'}^{E}\!\!\int \mathfrak{V}(\mathbf{x})\,\mathbf{d\,x\,d\,x} = \mathbf{i}^2\left((\mathbf{p}-\mathbf{1})\,\mathbf{z}_1 + (\mathbf{p}-\mathbf{2})\,\mathbf{z}_2 + \cdots \mathbf{1}\cdot\mathbf{z}_{p-1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\,\mathbf{z}_p\right). \quad [85a]$$

Für einen einfachen K.-G. fällt das letzte Glied $\frac{1}{8}\,z_p$, wegen $z_p = 0$, völlig fort, für diejenigen K.-G. aber, bei denen $z_p = 1$, ist dieses Glied konstant $\frac{1}{8}$.

Um die große Genauigkeit von [85a] zu prüfen, berechnen wir es wieder neben [85] für unser Beispiel Tab. 5 und finden zunächst nach [85a], ohne überhaupt ein Differenzenschema ansetzen zu müssen,

$$\int_{E'}^{E}\!\!\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx = \frac{3^2}{50}\left(6\cdot 1 + 5\cdot 3 + 4\cdot 7 + 3\cdot 13 + 2\cdot 33 + 1\cdot 45 + \frac{50}{8}\right) = 36{,}9450.$$

Nach Formel [85] wäre nun wieder an der Hand des Differenzenschemas der Tabelle 7 noch hinzuzufügen:

$$\begin{aligned}\frac{9}{50}\Big\{\frac{20}{24}\cdot 0{,}5 - \frac{1}{12}\left(47+\frac{7}{6}\right) - \frac{1}{24}\left(2{,}5-\frac{3{,}5}{6}\right) + \frac{13}{96}\cdot 1 \\ + \frac{1}{24}\left(6\cdot 1{,}5 + 5\cdot 3 + 4\cdot 5 + 3\cdot 13 + 2\cdot 16 + 1\cdot 8{,}5\right) \\ - \frac{1}{144}\left(6\cdot 0{,}5 + 5\cdot 0{,}5 + 4\cdot 6 + 3\cdot(-5) + 2\cdot(-10{,}5)\right) + \frac{1}{96}\cdot(-5)\Big\} = +\,0{,}28545,\end{aligned}$$

also nur 0,87 % des gesamten Wertes. Da diese Formeln nur in den Streuungsmaßen verwendet werden (vgl. S. 49), während für den Hauptwert nur die noch viel genauere Annäherungsformel für das einfache Integral in Frage kommt, wird man sich mit diesem Grad der Genauigkeit wohl begnügen können.

7. Endlich wird noch die Formel für das bestimmte Doppelintegral von E' bis zu einem beliebigen Wert x_m eine allerdings mehr sekundäre Bedeutung bei der Berechnung der sogen. „mittleren Variation" D (vgl. S. 48) erlangen. Ich gebe daher hier wenigstens den Ansatz, der ganz analog wie bei Absatz 5) und 6) angelegt ist, und zwar nach 6), was das Doppelintegral und seine Konstanten als solche anlangt, und nach 5) bezüglich der Bedeutung des Faktors

$$\alpha = \frac{(x_m - x\varrho)}{i}.$$

Es ist also, ebenso wie bei [77] und [80]

$$\frac{1}{i^2}\int_{E'}^{x_m}\!\!\int \mathfrak{V}(x)\,d\,x\,d\,x = \int_{0}^{+0{,}5}\!\!\int F_0(n)\,d\,n\,d\,n + \underset{s=1 \text{ bis } \varrho-1}{\Sigma}\int_{-0{,}5}^{+0{,}5}\!\!\int F_s(n)\,d\,n\,d\,n$$

$$+ \int_{-0{,}5}^{\alpha}\!\!\int F\varrho(n)\,d\,n\,d\,n =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{0{,}5^3}{6} L_{0,1} + 0{,}5\, C_0 \\
&+ \frac{0{,}5^3}{3} L_{1,1} + \quad C_1 \\
&\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&+ \frac{0{,}5^3}{3} L_{\varrho-1,1} + C_{\varrho-1} \\
+ \frac{\alpha^2 - 0{,}5^2}{2} z_\varrho + \frac{\alpha^3 + 0{,}5^3}{6} & L_{\varrho,1} + (\alpha + 0{,}5)\, C_\varrho. \qquad [86]
\end{aligned}
$$

Nach Bestimmung der Konstanten C aus [84] ergibt sich eine Formel, deren erste wichtigste Glieder wir in folgender Annäherung berücksichtigen:

$$
\begin{aligned}
\int_{E'}^{x^m}\!\!\int \mathfrak{B}(x)\, dx\, dx = i^2 \Big\{ & (\varrho - 1) z_1 + (\varrho - 2) z_2 \cdots + 1 \cdot z_{\varrho - 1} \\
& + \frac{1}{2} (0{,}5 + \alpha)^2 z_\varrho + \alpha \cdot \sum_{s = 1 \text{ bis } \varrho - 1} z_s \Big\}. \qquad [87]
\end{aligned}
$$

Eventuell kann noch das Restglied $+ \frac{\alpha}{16} (z_1 - z_{\varrho+1} + z_{\varrho-1})$ hinzugenommen werden. Ein Rechenbeispiel wird uns später bei der Bestimmung der mittleren Variation von Reaktionszeiten begegnen.

Man hätte diese für die Psychophysik am meisten in Betracht kommenden Annäherungsformeln natürlich auch nach anderen Interpolations- bezw. Integrationsmethoden ableiten können. Doch geschah dies hier eben sogleich im Zusammenhang derjenigen Methode, die dann unmittelbar aus dem Differenzenschema heraus auch beliebig genauere Werte zu liefern vermag.

Kapitel 5.

Gesetze für die Verteilung der relativen Häufigkeiten.

20. Das Mengenverhältnis in n-klassigen Kombinationen als gesetzmäßiger K.-G.

(Das annähernd einfache Exponentialgesetz (E.-G.) nach Laplace.)

1. Die Ableitung spezieller Gesetze für die Verteilung der r. H. eines K.-G. ging bekanntlich bereits im 17. Jahrhundert aus den Versuchen hervor, den Verlauf zufälliger Ereignisse, unter denen vor allem die Glücksspiele von alters her das allgemeinste Interesse fanden, quantitativ zu analysieren und allgemeine Sätze aufzustellen, die gewisse, wenn auch bedingte Voraussagen ermöglichen. Insofern die Bedingungen, die man hierbei verwirklicht dachte, die an sie geknüpften Erwartungen ohne spezielle Erfahrungen mit logischer Notwendigkeit aus sich hervorgehen lassen, kann man jene Voraussagen auch als Deduktion einer „Wahrscheinlichkeit“ betrachten,

wobei deren begriffliche Bedeutung als relative Häufigkeit einer Möglichkeit innerhalb einer längeren Reihe gedachter Beobachtungen die Vermittelung bildet. Die festen Voraussetzungen, die natürlich jeder Deduktion zugrunde liegen müssen, sind die sogen. „wahren" Verhältnisse, von denen schon S. 45 gesagt wurde, daß eine Annahme über sie mit jeder Statuierung sogen. „Verteilungsgesetze" in engstem Zusammenhange stehe. Da es sich um Gesetze über relative Häufigkeiten handelt, so ging man naturgemäß auch von der Annahme eines bestimmten Zahlenverhältnisses aus, in welchem zwei (oder mehrere) verschiedenartige, aber in sich homogene Mengen, z. B. r weiße und s schwarze Kugeln, zueinander stehen. Ist $r + s = t$, so bilden also

$$\frac{r}{t} = p \text{ und } \frac{s}{t} = q \tag{88}$$

die „wahren" r. H. der weißen und schwarzen Kugeln in der vorausgesetzten Gesamtmenge. Als die Mannigfaltigkeit aller zufällig wechselnden Erscheinungen aber, denen jenes „wahre Verhältnis" zugrunde liegt, betrachtet man nun die sämtlichen Kombinationen zu je n Gliedern (n-klassige Komb.), die aus den t individuell verschiedenen Grundelementen in der Weise hergestellt werden können, daß man jedesmal aus n Setzungen der nämlichen Gesamtmenge $r + s = t$ je ein beliebiges Glied für die Kombination auswählt. Gewöhnlich konkretisiert man diese Entstehung der Kombinationen in der Weise, daß man für jede derselben n-Mal hintereinander eine beliebige Kugel aus der Gesamtmenge t ziehen und wieder zurücklegen läßt. Berücksichtigt man nun bloß das Merkmal der Partialmengen als solches also z. B. die Farbe der Kugeln, so ergeben sich hierbei offenbar nur $n + 1$ verschiedene Arten von Kombinationen, die allen möglichen rel. H. der weißen, bezw. der schwarzen Kugeln innerhalb der einzelnen Kombinationen zu je n Gliedern entsprechen, nämlich $\frac{n}{n}, \frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n} \cdots \frac{1}{n}, \frac{0}{n}$. Denkt man sich sämtliche Kombinationen nach zunehmenden r. H. der weißen Kugeln in ihnen geordnet, so ist die nämliche Gruppierung bei nur zwei Arten von Elementen natürlich auch zugleich eine Ordnung nach r. H. der schwarzen, aber nach abnehmenden r. H. Wir können also die $n + 1$ Kombinationen der Reihe nach ebenso wohl mit $A_{r,n}, A_{r,n-1}, \ldots A_{r,1}, A_{r,0}$ bezeichnen, wie mit $A_{s,0}, A_{s,1}, \ldots A_{s,n-1}, A_{s,n}$. Diese $n + 1$ verschiedenen Mischungsverhältnisse von n-klassigen Kombinationen besitzen aber nun innerhalb der gesamten Mannigfaltigkeit aller Kombinationen überhaupt eine verschiedene r. H. Sie können somit wie $n + 1$ verschiedene Spezialfälle $A_0, A_1, A_2 \cdots A_n$ eines Kollektivgegenstandes einer „Verteilung" als diskrete Abszissen $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}$ usw. zugrunde gelegt werden, denen die zuletzt genannten r. H. jedes Mischungsverhältnisses innerhalb aller möglichen Kombinationen überhaupt als z-Ordinaten zugeordnet sind. Bei nur zwei Partialmengen r und s ergeben sich also zwei Verteilungen, von denen aber jede nach dem Gesagten einfach ein Spiegelbild der anderen ist, je nachdem einmal die Anzahl der schwarzen, und das andere Mal diejenige der weißen Kugeln innerhalb der Kombination als Abszissen dienen. (Bei k Partialmengen $r_1 + r_2 + \cdots r_k = t$ aber lassen sich k Verteilungen konstruieren, deren Herstellung jedoch einfach auf eine wiederholte Anwendung des nämlichen Schemas zurückgeführt werden kann, indem man immer in einer kontradiktorischen Gliederung alle Partialmengen außer einer zu einer zweiten Gruppe zusammenfaßt, also zunächst

$$s_1 = r_2 + r_3 + \cdots r_k \quad \text{dann}$$
$$s_2 = r_1 + r_3 + \cdots r_s \quad \text{usw.}$$

herstellt und die Verteilung für das jeweils isolierte Element r_i usw. in der nämlichen Weise wie bei nur zwei Grundqualitäten ableitet. Die Ordinaten bedeuten ja stets die r. H. einer Mengenart im Verhältnis zu allen Kombinationsmöglichkeiten überhaupt, die nur von der Gesamtzahl aller Grundelemente $t = r_1 + r_2 \cdots + r_s$ abhängig ist.)

Aus diesen Daten kann man nunmehr einfach nach den Regeln der Kombinationsrechnung die Gesamtzahl aller überhaupt möglichen Kombinationen dieser Art und die r. H. jeder der $n+1$ Arten $A_{r,0} = A_{s,n}$, $A_{r,1} = A_{s,n-1}, \ldots . A_{r,n} = A_{s,0}$ im Verhältnis zu dieser Gesamtzahl im einzelnen bestimmen und außerdem eine Reihe wichtiger Sätze ableiten, durch die Jacob Bernoulli in seiner „Ars conjectandi“[1]) die Grundlagen der heutigen Wahrscheinlichkeitsrechnung geschaffen hat und aus denen dann Laplace (Théorie analytique de probabilité 1812) nach Vorarbeiten von Stirling und Moivre geradezu ein allgemeines Verteilungsgesetz für stetige K.-G. überhaupt entwickelte[2]). Diese Ableitungen sind zunächst ganz unabhängig davon, ob irgendwo in der materiellen oder geistigen Welt eine solche Konstanz relativ selbständiger, kombinierbarer Elementarbedingungen existiert, oder ob sich die verschiedenen Kombinationen, falls sie real möglich sein sollten, auch wirklich sämtlich gleichmäßig einstellen. Sie bilden also einen Zweig der Mathematik. Doch kann diese Kombinatorik natürlich auch auf die empirischen K.-G. „angewandt“ werden, indem man die Verteilung der r. H. jener Kombinationen unmittelbar zur Abbildung eines empirischen K.-G. benützt, wozu die beiderseitige Ableitung stetiger Funktionen $\mathfrak{V}(x)$ die allgemeinste Vermittelung bildet. Von einem solchen Standpunkte aus muß man also dann auch die einzelnen Spezialfälle A_x des empirischen K.-G. als Erfolg der Kombination elementarerer Faktoren auffassen[3]) und versucht dadurch die induktiv gewonnene Verteilungsfunktion deduktiv zu erklären.

1) Erschienen 1713. Übersetzt und herausgeg. in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 107 und 108 (Wahrscheinlichkeitsrechnung von J. Bernoulli) von R. Haussner. 1899.

2) Vgl. hierüber die Anmerkungen Haussners, a. a. O., bes. Nr. 108, S. 157 ff. sowie E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung usw. 1. Band, 2. Aufl. 1908, S. 19 ff. und 109 ff. und G. F. Lipps, Die psychischen Maßmethoden (Sammlung „Wissenschaft“, H. 10). 1906. S. 23 ff.

3) Hierbei ist also nicht zu vergessen, daß die frühere Zahl n sämtlicher Beobachtungen, die in einem einfachen empirischen K.-G. dargestellt sind (vgl. S. 137), nicht der obigen Zahl n der einzelnen Kombinationsglieder, sondern der Gesamtzahl aller Kombinationsmöglichkeiten entspricht.

2. Nach den Sätzen der Kombinationslehre ist nun zunächst die Gesamtzahl aller möglichen Kombinationen überhaupt, wie schon vorhin erwähnt, nur von der Gesamtzahl aller gegebenen Elemente $t = r + s$ und der Gliederzahl (Klasse) n der Kombination abhängig und beträgt

$$t^n = (r + s)^n . \qquad [89]$$

Löst man aber diesen Binomialausdruck nach der bekannten Formel auf, wonach

$$t^n = r^n + \frac{n}{1} r^{n-1} s + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} r^{n-2} s^2 + \ldots s^n , \qquad [90]$$

so bedeutet jedes der $n + 1$ Glieder die absolute Häufigkeit je einer der oben genannten $n + 1$ Hauptarten von Kombinationen $A_{r,x} = A_{s,n-x}$ $(x = n \text{ bis } o)$ innerhalb der gesamten Mannigfaltigkeit der t^n überhaupt möglichen Kombinationen. Die gesuchte relative Häufigkeit $z_{r,x} = z_{s,n-x}$ aber erlangt man einfach durch Division der Glieder von [90] mit t^n, insofern nach [88] ja auch

$$\sum z = 1 = \frac{t^n}{t^n} = (p + q)^n = p^n + \frac{n}{1} p^{n-1} q + \cdots q^n . \qquad [91]$$

Hierbei werden die Produkte $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m$ gewöhnlich durch das sogen. Fakultätssymbol $m!$ und die Koeffizienten $\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$ durch das Symbol $\binom{n}{m}$ ausgedrückt, das übrigens in der höheren Analysis eine viel allgemeinere Bedeutung für stetige Größen $\pm n$ und $\pm m$ besitzt, wobei dann $\binom{n}{0} = 1$ wird. Somit läßt sich die unstetige Verteilung der r. H. unseres K.-G. auch durch die zunächst ebenfalls unstetige Funktion

$$z = f(A_{r,x}) = \underset{x = n,\, n-1, \ldots 2, 1, 0}{f(A_{s,n-x})} = \binom{n}{n-x} p^x q^{n-x} \qquad [92]$$

darstellen.

Wie man sieht, sind also die relativen H., d. h. die endgültigen Ordinaten des K.-G. der ganzen Mannigfaltigkeit, von der absoluten Gesamtzahl t der Elemente r und s nicht mehr abhängig, sondern nur noch von dem zugrunde liegenden Verhältnis $p = 1 - q$ bezw. $q = 1 - p$ der gleichartigen Elemente r bezw. s zu ihrer Gesamtzahl t. Man kann sich also aus beliebigen Vielfachen $at = ra + sa$ der nämlichen Gesamtmenge die nämliche Verteilung der relativen H. der einzelnen Kombinationsarten abgeleitet denken, wenn nur die Gliederzahl n innerhalb jeder Kombination konstant bleibt und das Vielfache at aus gleichen Vielfachen jedes einzelnen Grundelementes (z. B. der weißen und schwarzen Kugeln) aufgebaut ist. In dieser Weise lassen sich daher auch beliebig viele Konkretisierungen des nämlichen K.-G. unter eine Verteilungsfunktion subsumieren.

3. Jeder K.-G. der eben geschilderten Art läßt aber nun einen „Hauptwert“ in dem bereits § 15 näher erläuterten Sinne berechnen, der mit jenem

„wahren" Verhältnis der Partialmengen, für welche eben der K.-G. konstruiert ist, zur Gesamtmenge, also mit $\frac{r}{r+s} = p$ oder mit $\frac{s}{r+s} = q$ genau übereinstimmt. Es ist dies das arithmetische Mittel aus der gesamten Mannigfaltigkeit des K.-G. Schon Bernoulli fand nämlich elementar, wie hier nicht weiter abgeleitet werden soll, daß (nach aufsteigenden Abszissen des K.-G. für die Qualität r geordnet)

$$A_{r,0} \cdot f(A_{r,0}) + A_{r,1} \cdot f(A_{r,1}) + \cdots A_{r,n} \cdot f(A_{r,n}) =$$
$$\frac{0}{n} q^n + \frac{1}{n}\binom{n}{n-1} q^{n-1} p + \cdots \frac{n-1}{n}\binom{n}{1} q p^{n-1} + \frac{n}{n} p^n = p.$$

Und ebenso ist das arithmetische Mittel des K.-G. für die schwarzen Kugeln

$$0 \cdot p^n + \frac{1}{n}\binom{n}{1} p^{n-1} q + \cdots q^n = q. \qquad [93]$$

Weiterhin stellte Bernoulli fest, daß auf die dem arithmetischen Mittel eines solchen K.-G. entsprechende Abszisse, also z. B. auf $\frac{x}{n} = p$ bei dem nach weiß geordneten K.-G., stets die größte r. H. entfalle, daß sie also bei gleichmäßiger Berücksichtigung aller Kombinationen die größte Wahrscheinlichkeit unter allen Möglichkeiten A_x besitze. Dabei ist freilich die Verteilung im allgemeinen zu diesem Maximum asymmetrisch, außer wenn gerade $p = q = \frac{1}{2}$. Wie man aus den die r. H. darstellenden Reihengliedern in [91] leicht erschließen kann, muß das Maximum demjenigen Extrem näher liegen, dessen r. H. die n-te Potenz des größeren der beiden „wahren" Verhältnisse enthält.

Als „Bernoullisches Theorem" im engeren Sinne aber wird der wichtigste Hauptsatz dieser Deduktionen bezeichnet, wonach sich die ganze Verteilung um so enger um die Abszisse des arithmetischen Mittels schart, je größer n ist. Bestimmt man also zwei Abszissen in einem bestimmten Abstande vom arithm. Mittel des K.-G., also z. B $\pm\left(p - \frac{x}{n}\right)$ von p bezw. $\pm\left(q - \frac{x}{n}\right)$ von q, so läßt sich die Summe $\sum z'$ der sämtlichen r. H. zwischen diesen Grenzen der Summe sämtlicher Ordinaten, d. h. der Einheit dadurch beliebig nahe bringen, daß man n immer größer wählt. Die quantitative Formulierung dieses Theoremes werden wir aber erst in der Form erwähnen, die ihm endgültig von Laplace für stetige Verteilungen gegeben wurde, die nach dem nämlichen Prinzip unter Voraussetzung eines sehr großen n konstruiert sind. Als Abbildungen der psychophysischen, interpolatorisch bearbeiteten K.-G. kommen nämlich diese elementaren K.-G. noch nicht in Betracht. Wenn man allerdings durch Ziehungen aus einer Urne oder dergl. einfach solche Kombinationen von je n zufällig herausgegriffenen Mengenexemplaren wirklich empirisch ableitet, wie sie eben zur Veranschaulichung der rein gedanklichen Konstruktionen der Kombinatorik verwendet wurden, so gestatten sie in der Tat eine ziemlich detaillierte Angleichung an die ganze Verteilung der soeben abgeleiteten unstetigen theoretischen K.-G., auch wenn die Zahl n der Glieder jeder Kombination noch gar nicht sehr hoch ist[1]). Dabei sind meistens schon von $\frac{0}{n}$ an bis $\frac{n}{n}$ Fälle zu verzeichnen, wie es auch die Theorie verlangt. Der Grundtypus eines einfachen K.-G., wie er in § 14,2 vor allem an dem Resultate der wiederholten Einstellung eines Maßstabes nach einer gegebenen Norm exemplifiziert wurde, steht jedoch zu der anderen Hauptkategorie rein theoretischer K.-G. in engster Beziehung, die man als „Beobachtungsfehler" bezeichnet. So scharen sich z. B. die Ablesungen an einer Skala meistens mehr oder weniger enge und symmetrisch um ihren Mittelwert a, wobei von je einem extremen Abstand $+v_0$ und $-v_u$ von diesem a an überhaupt keine Registrierungen mehr auftreten, und außerdem sind, wie oben ausführlich dargelegt wurde, in jedem beliebigen kleinsten Intervalle der Skala Ablesungen möglich, die somit einen stetigen K.-G. konstituieren. Nun könnte man natürlich auch einen theoretischen K.-G. mit kleinem n für ein annähernd 0,5 betragendes $p = q$ (vgl. S. 100) rein äußerlich zur Abbildung eines solchen empirischen K.-G. von Beobachtungsfehlern beiziehen, indem man einfach die tatsächlichen Extreme einander zuordnet und die Stetigkeit bei dem theoretischen wie bei dem empirischen K.-G. durch Interpolation hergestellt denkt. Ja die Kombinatorik muß dieses letztere Hilfsmittel der Interpolation, das bei der Konstruktion empirischer Verteilungskurven von einer Änderung der die Form des K.-G. real beeinflussenden Gesamtzahl der Beobachtungen des K.-G. scharf unterschieden wurde (s. S. 35), an einem bestimmten Punkte sogar immer anwenden, um mit einer bestimmten endlichen Zahl n von Kombinationsgliedern, die natürlich allein noch eine eindeutige differenzierte Verteilung ableiten läßt, doch eine stetige Funktion $f\left(\frac{x}{n}\right)$ mit Gl. [92] in Übereinstimmung zu bringen. Indessen läßt sich der theoretische unstetige K.-G. durch eine bedeutende Steigerung des n diesem Zwecke bereits von vorne herein sehr viel mehr anpassen. Freilich mußten für eine erfolgreiche Operation mit Kombinationen von so hoher „Klasse" erst die Ausdrücke für die einzelnen z-Ordinaten in [92] vereinfacht werden, was mit Hilfe der Stirlingschen Formel für die Fakultät

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \cdots\right) \qquad [94]$$

gelang. Nunmehr ließ sich die r. H. z_v in Abhängigkeit von dem Abstand

1) Beispiele einer „experimentellen" Bestimmung der r. H. in Kombinationen gezogener Kugeln und dergleichen finden sich in vielen Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Vgl. Czuber, a. a. O. S. 286 ff.). Auch G. F. Lipps gibt eine solche empirische Verteilung an, die aus 4800 Einzelfällen besteht, deren Kombinationen zu je $n = 10$ — also einer Gliederzahl, bei der die Verteilung noch in relativ weiter Entfernung vom arithmetischen Mittel hohe z-Werte aufweist — schon eine ziemlich gute Übereinstimmung mit der theoretischen Berechnung der einzelnen z nach [92] zeigen (a. a. O. S. 31 ff.).

$\pm$ v der Kombination A_x von dem arithmetischen Mittel p oder q der Verteilung durch die bei großem n mit guter Annäherung gültige Funktion

$$z_v = f(v) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2pq\pi}{n}}} e^{-\frac{v^2 n}{2pq}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2} \qquad [95]$$

darstellen. Hierin ist $e = 2{,}71828$ die Basis der natürlichen Logarithmen und

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{2pq}{n}}}. \qquad [95a]$$

Die Asymmetrie von [92] für beliebige p, q, mit der auch die spiegelbildliche Zuordnung der beiden K.-G. mit den Mitteln p und q zusammenbesteht, ist also nach der bedeutenden Zunahme von n so weit zu vernachlässigen, daß eine nur noch symmetrisch von v^2 abhängige und für beide K.-G. gleiche Funktion zur Darstellung genügt. Dem arithmetischen Mittel (mit der Abszisse $v = 0$) gehört zugleich wieder die höchste Ordinate $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ zu, und die merklichen z-Werte der Verteilung nach [95] konzentrieren sich zugleich so enge um dieses Mittel, daß der asymptotische Verlauf mit minimalen endlichen z-Werten für $v = \pm \infty$ nicht als ernstliche Störung der Abbildung der empirischen K.-G. der Beobachtungsfehler und dergleichen in Betracht kommen kann. Die Formel [95], die von Laplace in diesem Zusammenhange allerdings nur als Annäherungsformel abgeleitet wurde, pflegt als „einfaches Exponentialgesetz“[1]) bezeichnet zu werden. In der zunächst gefundenen Form hat sie allerdings vorerst auch wieder nur für die diskreten Abstufungen der Vielfachen von $\frac{1}{n}$ Bedeutung. Betrachtet man aber [95] unabhängig von seiner Deduktion als Funktion eines stetigen v, so erlangt man durch Integration schließlich die quantitative Formulierung, die in einer Vereinfachung der Laplaceschen Formel dem Bernoullischen Theorem gegeben werden kann. Die Wahrscheinlichkeit W dafür, daß ein Spezialfall der Kombination (sowie jeder zu ihm in Parallele gesetzter Spezialfall eines K.-G. überhaupt) vom arithmetischen Mittel nicht mehr als $\pm$ v abweiche, ist ja (nach S. 35) gleich dem bestimmten Integral über die zu $v = 0$ symmetrische Funktion [95] zwischen den Grenzen $+$ v und $-$ v, d. h. es gilt näherungsweise

$$W = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^v e^{-h^2 v^2} dv. \qquad [96]$$

Substituiert man $hv = \gamma$ als Variable, wobei dv durch $\frac{1}{h} d\gamma$ zu ersetzen ist, so erlangt man schließlich

1) Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung usw. S. 109.

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\gamma^2} d\gamma. \qquad [97]$$

Deutet man also das bekannte Integral $\Phi(\gamma)$, das mehrfach in verschieden genauen Tabellen dargestellt ist[1]) und bereits von Fechner in die psychophysische Methodik eingeführt wurde[2]), vom Standpunkte der Kombinationsrechnung in der eben skizzierten Weise, so ist W die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei der Ermittlung eines wahren Wertes p oder q durch n Einzeloperationen höchstens die Abweichung

$$\pm v = \frac{\pm \gamma}{h} = \pm \gamma \sqrt{\frac{2pq}{n}} \qquad [98]$$

vorkomme. Hierin ist dann zugleich der Einfluß der Zahl n der Beobachtungen auf die Genauigkeit eines empirischen Mittelwertes, den man sich als Analogon eines „wahren" Mischungsverhältnisses $p = \frac{x}{n}$ denken kann, quantitativ ausgedrückt. Legt man eine bestimmte eben noch zulässige Abweichung $\pm v$ fest, so kann man also schließlich durch Steigerung von n das nämliche bis γ genommene Integral oder die nämliche Wahrscheinlichkeit für $-v < \frac{x}{n} > +v$ immer engeren Grenzen $\pm$ v zuordnen, falls nur die Voraussetzung erfüllt ist, daß der Verlauf der Ereignisse alle Exemplare des K.-G., die den von p abweichenden Mischungsverhältnissen der Urelemente entsprechen, wirklich gleichmäßig erschöpft[3]). Dieser ganze Zusammenhang pflegt nun mit einem von Poisson stammenden Ausdrucke als „Gesetz der großen Zahlen" bezeichnet zu werden, ein Prinzip, das Poisson auch noch über das einfache Schema Bernoulli's hinaus verallgemeinerte, indem er die größte rel. Häufigkeit des arithmetischen Mittels innerhalb einer kombinatorisch abgeleiteten Mannigfaltigkeit von der speziellen Voraussetzung der Konstanz jenes „wahren" Mischungsverhältnisses p unabhängig nachwies.[4])

21. Das einfache Exponentialgesetz nach Gauss.

Das einfache E.-G., mit dem nach Laplace die aus Kombinationen gebildeten K.-G. annähernd ausgedrückt werden, war erst kurz zuvor von Gauss als vollständig genau aus allgemeinen Voraussetzungen abgeleitet worden, die allerdings an sich mehrere Schlußfolgerungen zulassen und erst durch

1) Eine genaue Tabelle ließ Bruns durch B. Kämpfe herstellen (Wundt, Phil. Stud. Bd. 9. 1894. S. 145), die in seiner „Wahrscheinlichkeitsrechnung usw." zusammen mit den Abgeleiteten Φ_1, bis Φ_6 veröffentlicht ist (vgl. § 24). Ebenso bei Czuber a. a. O. S. 98.

2) Für einfachere Anwendungen ist in Kapitel 7 wenigstens die Fechnersche Tabelle angegeben (aus Elemente, Bd. I, S. 108 und Wundt, Physiol. Psychol. I[6], 1908, S. 605), während im allgemeinen auf die Brunssche Tabelle zu verweisen ist.

3) H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung usw. S. 13.

4) E. Czuber, a. a. O. S. 134 ff u. 164 ff.

noch speziellere Annahmen, die ihrerseits als Annäherungen an den tatsächlichen erfahrungsgemäßen Verlauf von Beobachtungen betrachtet werden können, das einfache E.-G. eindeutig aus sich hervorgehen lassen.

Auch Gauß entnimmt übrigens seine entscheidende allgemeinste Voraussetzung einer von J. Bernoullis Neffen Daniel 1777 angegebenen Überlegung, die von einem bekannten Satze der auf r. H. angewandten Kombinatorik ausgeht[1]). Indessen braucht man eben dabei nicht die Verteilung der r. H. einzelner Kombinationen in der vorigen Weise unmittelbar zu bestimmen. Es handelt sich vielmehr nur um die allgemeine Formel für die Wahrscheinlichkeit W einer ganz speziellen Kombination von Kombinationen $A_1, A_2 \ldots A_s$, denen im einzelnen wieder die Wahrscheinlichkeiten (r. H.)

$$z_r = Z_r : \sum_{r=1}^{r=s} Z_r$$

zukommen. Diese entspricht bekanntlich dem Produkt aus deren r. H.

$$W = z_1 \cdot z_2 \ldots z_s. \qquad [99]$$

(Denn die resultierende r. H. besteht in dem Verhältnis zwischen sämtlichen $Z_1 \cdot Z_2 \cdot \ldots Z_s$ Möglichkeiten, gerade je ein $A_1, A_2 \ldots A_s$ zu kombinieren und der Gesamtzahl $(\Sigma Z)^s$ aller möglichen Kombinationen zu je s von allen Elementarkombinationen A_x überhaupt.) Die Mannigfaltigkeit jedes K.-G. läßt sich nun als ein solches (zufälliges) Zusammentreffen aller im Verlaufe der Beobachtung auftretenden Exemplare A_x auffassen, denen im einzelnen die in seiner Verteilungsfunktion inbegriffenen Wahrscheinlichkeiten $z = f(A_x)$ zukommen. Auch ohne deren Kenntnis läßt sich nun nach D. Bernoulli doch bereits wenigstens so viel von ihnen aussagen, daß diejenige Verteilung $f(A_x)$ tatsächlich herrschen wird, deren Wahrscheinlichkeit ein Maximum wird. Somit besteht die Lösung der Frage nach dem allgemeinen Verteilungsgesetz einfach darin, die Funktion $f(A_x)$ so zu wählen, daß jenes Produkt [99] seinen größtmöglichen Wert erlangt. Da die Spezialfälle A_x eben durch die Abszissen x dargestellt sind, setzen wir mit den gewöhnlichen Symbolen einfach $f(A_x) = \varphi(x)$, so daß jenes Produkt $\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \ldots \varphi(x_s)$ lautet. Durch eine beliebig große Zahl s kann man auch hier wiederum zugleich dem stetigen K.-G. näher kommen, ohne daß zwischen der Ableitung der Funktion für diskrete x und der Interpolation einer stetigen Funktion weiter unterschieden zu werden brauchte, wenn nur der Ausdruck für W endlich bleibt.

Eine konkrete Bedeutung gewinnt aber nun diese ganz allgemeine Forderung eines Maximums erst dadurch, daß das Produkt W als stetige Funktion einer dem $\varphi(x)$ angehörigen Größe t aufgefaßt wird, bei deren Abstufung die Form der $\varphi(x)$ passiert wird, die das Maximum bedingt. Dieses liegt dann bei derjenigen Größe t, bei der

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d[\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \ldots \varphi(x_s)]}{dt} = 0. \qquad [100]$$

1) Vgl. Weinstein, a. a. O. S. 24 u. S. 54 f.

Zur Erleichterung der Rechnung kann außerdem unter den gegebenen Voraussetzungen (W und $\varphi(x) > 0$) der Logarithmus log W des Produktes, dessen Maximum ja mit demjenigen von W selbst übereinstimmt, der weiteren Untersuchung zugrunde gelegt werden. Man wählt also $\varphi(x)$ so, daß

$$\frac{d \log W}{dt} = \frac{d \log \varphi(x_1)}{dt} + \frac{d \log \varphi(x_2)}{dt} + \ldots \frac{d \log (x_s)}{dt} = 0. \qquad [101]$$

Da nun im weiteren Verlaufe der Deduktion eine wichtige Annahme über das System der Abweichungen der Spezialfälle x von einem ganz bestimmten Fall a hinzutritt, der also dem Wertsystem der möglichen x, d. h. den Abszissen der Verteilungskurve $\varphi(x)$ selbst zugehört und als wahrer Wert aufgefaßt wird, so muß das Produkt [99] bzw. [100] als Abhängige des zunächst als variabel betrachteten Ausgangswertes a dieser Abweichungen („Fehler") v_x

$$v_x = x - a, \qquad [102]$$

betrachtet werden. Die Variation von t = a ist dann allein für die Passierung des Maximums entscheidend, dessen Stelle eben dann auf Grund der weiteren Annahmen erst den „wahren" Wert schlechthin markiert, d. h. es wird

$$\varphi(x) = \varphi(v_x). \qquad [103]$$

Somit wird aus [101] bei der Beziehung der v auf den wahren Wert a

$$\frac{d \log W}{da} = \sum \frac{\delta \log \varphi(v_x)}{\delta \varphi(v_x)} \cdot \frac{\delta \varphi(v_x)}{\delta v_x} \cdot \frac{dv_x}{da} = 0, \qquad [104]$$

$$\text{worin } \frac{dv_x}{da} = 1 \text{ (nach [102])},$$

so daß aus der ersten Voraussetzung schließlich die endgültige Bedingung resultiert:

$$\frac{1}{\varphi(v_1)} \cdot \frac{\delta \varphi(v_1)}{\delta v_1} + \frac{1}{\varphi(v_2)} \cdot \frac{\delta \varphi(v_2)}{\delta v_2} + \ldots = 0. \qquad [105]$$

Um aber nun von dieser abstrakten, für alle Fehlerausgleichung überhaupt gültigen Voraussetzung zu einer konkreten Lösung $\varphi(x)$ zu gelangen, nimmt Gauß die neue, bereits an die tatsächliche Erfahrung sich anlehnende Annahme hinzu, daß die Verteilungsform der einzelnen Abweichungen von der Größe a, die W zu einem Maximum macht, eine zum wahren Wert a oder zu $v_x = 0$ symmetrische sei. Hierin ist zweierlei inbegriffen: Erstens ist $\varphi(v_x)$ dann nicht mehr von dem Vorzeichen von v_x, sondern nur noch von dessen absolutem Werte abhängig, also von einer geraden Potenz, am einfachsten von v_x^2, wodurch [105] in die neue, spezielle Ausgleichungsbedingung übergeht:

$$\frac{\delta \log W}{da} \cdot = \sum \frac{1}{\varphi'(v_x^2)} \cdot \frac{\delta \varphi'(v_x^2)}{\delta v_x^2} \cdot \frac{d v_x^2}{d v_x}$$

$$= v_1 \cdot \frac{1}{\varphi'(v_1^2)} \cdot \frac{\delta \varphi'(v_1^2)}{\delta v_1^2} + v_2 \cdot \frac{1}{\varphi'(v_2^2)} \cdot \frac{\delta \varphi'(v_2^2)}{\delta v_2^2} + \ldots = 0. \qquad [106]$$

Zweitens müssen sich aber bei einer symmetrischen Verteilung alle mit ihrem Vorzeichen genommenen Fehler $\pm v_x$ gegenseitig zu Null aufheben, so daß ihre Summe oder der sog. „resultierende Fehler R“

$$R = v_1 + v_2 + \ldots v_s = 0. \qquad [107]$$

Die beiden Gleichungen [106] und [107] bilden nunmehr den fertigen Ansatz zu der Berechnung von $\varphi(v_x)$. In der Tat ergibt sich aus ihrer Vereinigung eine eindeutige Lösung insofern, als sie nur zusammen bestehen können, wenn die sämtlichen Koeffizienten der v_x in [106], die mit denen in [107] übereinstimmen, unter sich gleich sind, also wenn

$$\frac{1}{\varphi'(v_x^2)} \cdot \frac{\delta \varphi'(v_x^2)}{\delta v_x^2} = c. \qquad [108]$$

Diese Differentialgleichung kann durch beiderseitige Differentiation der Gleichung

$$\log \varphi'(v_x^2) = c v_x^2 + C \qquad [109]$$

nach v_x^2 entstanden gedacht werden, wobei $e = 2{,}71828$ wieder die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Also findet man die Lösung von Gleichung [108] und dadurch des Problems überhaupt nach ihrer beiderseitigen Integration durch Delogarithmierung von [109]. Es wird

$$\varphi'(v_x^2) = \varphi(v_x) = e^{c v_x^2 + C} = e^C \cdot e^{c v_x^2}. \qquad [110]$$

Die Integrationskonstante C, die bei der Integration von [108] in Gl. [109] hinzutritt, bestimmt offenbar die oft mit w_0 bezeichnete Wahrscheinlichkeit für $v_x = 0$, da hierbei $e^{c0} = 1$.

Zur genaueren Bestimmung von c, das man außerdem von gleicher Dimension wie v_x^2, also als Quadrat einführt, wird aber nun noch die weitere Erfahrungstatsache hinzugenommen, daß $\varphi(v_x)$ mit der Abweichung des x von der Symmetrieachse immer kleiner wird. Man setzt also $c = - h^2$ und erlangt so die Formel, in der v nunmehr einfach als stetige Variable ohne Index betrachtet werden kann:

$$\varphi(v) = w_0 e^{-h^2 v^2}. \qquad [111]$$

Auch diese Formel läßt ebenso, wie es schon bei [95] erwähnt wurde, zwar bis zu $v = \pm \infty$ noch von Null verschiedene Wahrscheinlichkeiten berechnen; doch rückt die Kurve bei nicht zu kleinem h der x-Achse als ihrer Asymptote sehr bald so nahe, daß $\varphi(v)$ darüber hinaus zu vernachlässigen ist. Theoretisch bleiben aber die Extreme $E_u = -\infty$, $E_o = +\infty$. Berücksichtigt man nun weiterhin, daß auch noch die frühere Gleichung [9] für Verteilungen der r. H. überhaupt ganz allgemein zu Recht besteht, so lassen sich auch die beiden Variablen w_0 und h, die außer v noch in [111] enthalten sind, und als sog. „Parameter“ bezeichnet werden können, durch eine einzige von beiden ausdrücken, so daß in der Endformel also nur noch ein einziger Parameter vorkommt. Man wählt hierzu meistens h. Aus

Gleichung [9] wird zunächst durch die bereits bei [96] angewandte Substitution

$$hv = t$$

$$dv = \frac{1}{p}\,dt$$

$$1 = w_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 v^2}\,dv = \frac{w_0}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt. \qquad [112]$$

Da nun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}, \qquad [113]$$

so findet man

$$w_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}},$$

woraus sich dann ohne weiteres die als Gaußsches einfaches E.-G. bekannte, mit [95] identische Endformel ergibt:

$$\varphi(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2 v^2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2(x-a)^2}. \qquad [114]$$

22. Hauptwerte und Streuungsmaße beim einfachen Exponentialgesetz.

1. Denkt man sich zunächst eine Verteilung, welche genau dem Gaußschen Gesetze entspricht, so folgt aus der Haupteigenschaft der Symmetrie der Funktion $\varphi(x)$ zu $x = a$, bzw. zu $v = 0$ hinsichtlich der in § 15 definierten Hauptwerte, daß sowohl das arithmetische Mittel $\mathfrak{A}$, als auch das Maximum $\mathfrak{D}$ und der Zentralwert $\mathfrak{C}$ mit dem „wahren" Wert a zusammenfallen müssen. Da nämlich (bei einem unstetigen K. G.)

$$\mathfrak{A} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_s}{s},$$

wobei ebenso wie bei den v jeder einzelne Beobachtungswert gesondert angeschrieben ist, so ist auch

$$(\mathfrak{A} - x_1) + (\mathfrak{A} - x_2) + \ldots (\mathfrak{A} - x_s) = 0 \qquad [115]$$

oder $\mathfrak{A}$ erfüllt die beim einfachen E.-G. für a zutreffende Bedingung [107], daß der auf dasselbe bezogene „resultierende Fehler" R verschwindet. Diese Eigenschaft kommt dem arithmetischen Mittel $\mathfrak{A}$ allerdings ganz allgemein zu, gleichgültig, ob die Aufhebung der positiven und negativen „Fehler" $v = (\mathfrak{A} - x)$ zu Null gerade paarweise geschieht, wie bei der symmetrischen Verteilung, oder ob ganz unregelmäßig gebildete positive und negative Resultanten der Fehlerreihe schließlich einander gleich werden. Hierauf werden wir im 6. Kapitel bei der Betrachtung weniger spezieller Verhältnisse zurückkommen.

Weiterhin folgt dann aus der Symmetrie zu $\mathfrak{A}$ natürlich aber auch, daß gleich viele Werte unterhalb x beobachtet worden sein müssen als oberhalb, daß also $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$ (Zentralwert). Endlich ergab schon die Herleitung des E.-G. nach Laplace, daß dem arithmetischen Mittel hier auch die größte r. H. Z zugehört, ebenso wie auch die direkte Untersuchung der Funktion [114] auf Extreme, durch Ableitung von $\frac{d\varphi(v)}{dt}$ und $\frac{d^2\varphi(v)}{dt^2}$, für $v = \pm\infty$ je ein Minimum, für $v = 0$ aber ein Maximum ergibt. Es ist also einerseits, wie schon erwähnt, die X = Achse eine sog. „Asymptote" der Kurve φ (v), andererseits aber ist das arithmetische Mittel $\mathfrak{A}$ zugleich das Dichtigkeitsmittel $\mathfrak{D}$.

2. Während aber dieses Zusammentreffen der drei Fechnerschen Hauptwerte mehr oder weniger schon mit der bloßen Annäherung der gegebenen Verteilung an die Symmetrie überhaupt gegeben ist, läßt sich der Grad der Unterordnung unter die spezielle Form der beiden symmetrischen Flügel der Kurve, die übrigens auch schon der Fig. 1 S. 36 abgesehen von den dort endlichen Extremen zugrunde liegt, erst aus den Verhältnissen der schon oben S. 48 als Repräsentanten dieser Form genannten Streuungsmaße, d. h. aus dem Verhältnis der Mittelwerte der Abweichungen

$$D = \frac{(\mathfrak{A} - x_1) + (\mathfrak{A} - x_2 + \ldots . (\mathfrak{A} - x_s)}{s} = \frac{\Sigma v}{s} \qquad [19]$$

$$M = \sqrt{\frac{(\mathfrak{A} - x_1)^2 + (\mathfrak{A} - x_2)^2 + \ldots (\mathfrak{A} - x_s)^2}{s}} = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{s}} \qquad [19a]$$

unter sich erkennen[1]). Bei stetigem K.-G. lassen sich beide Werte wieder durch ein Integral definieren und durch Reihenentwicklung berechnen. Da im E.-G. nur der einzige Parameter h vorkommt, müssen natürlich ferner beide Werte D und M auch als Funktionen von h darstellbar sein. Hieraus ergibt sich beim einfachen E.-G.:

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} v \cdot \varphi(v)\,dv = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}; \quad h = \frac{1}{D\sqrt{\pi}} \qquad [116]$$

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \varphi(v)\,dv = \frac{1}{h\sqrt{2}}; \quad h = \frac{1}{M\sqrt{2}} \qquad [117]$$

$$M : D = 1{,}25331 : 1. \qquad [118]$$

3. Der Parameter h ist also zu den sog. „charakteristischen" Fehlern M und D, die als Repräsentanten der ganzen Fehlerreihe zu be-

1) Über die sonstigen, aus höheren Mittelwertpotenzen gewonnenen Kriterien des Gaußschen Gesetzes vgl. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung usw. S. 152, G. F. Lipps, Psychische Maßmethoden 1906, S. 98 ff. und H. Keller, a. a. O. (Wundt. Psychol. Stud. III, S. 57 ff.).

trachten sind, reziprok und daher zu der Präzision der Messung direkt proportional. Da natürlich auch bei wachsender Präzision alle Ordinaten $\varphi(v)$ zusammen die Summe 1 ergeben und sich nur eben immer enger um den wahren Wert konzentrieren, so muß die r. H. für kleine Fehler bei wachsendem h immerhin zunehmen, aber eben (bei konstantem beliebigem v) immer nur bis zu einer bestimmten Größe des h, die zur Größe dieses v selbst reziprok ist. (Das nach den Regeln der Maximumsberechnung gefundene Extrem der r. H. $\varphi(v)$ in Abhängigkeit von h ist $\frac{1}{v\sqrt{2}}$.) Im Hinblick auf sämtliche Fehler v erscheint also h auch von dieser Seite betrachtet als das eigentliche „Präzisionsmaß". Nach [95] und [114] ist diese Konstante h zugleich der Wahrscheinlichkeit w_0 des Fehlers 0 direkt proportional

$$h = w_0\sqrt{\pi}.$$

Auch bei jener früheren Ableitung des h aus der Kombinatorik, d. h. bei der Deutung des h in Gleichung [95], läßt sich seine Beziehung zum sog. „mittleren Fehler" M untersuchen, und zwar ist sie dort mit dem nämlichen Resultate wie in [117] unmittelbar aus der unstetigen Verteilung nach Gl. [92] zu bestimmen, indem man M nach seiner Definition [18] ganz elementar aus Gleichung [92] berechnet[1]) und mit dem h aus Gleichung [95a] vergleicht. Hieraus ergibt sich das auf das arithmetische Mittel p bezogene M für p und $q = 1 - p$ gleichmäßig als

$$M = (1-p)^2 f(A_{r,n}) + \left(\frac{n-1}{n} - p\right)^2 f(A_{r,n-1}) \ldots + (0-p)^2 f(A_{r,o}) = \pm\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}. \qquad [119]$$

Nimmt man also Gleichung [95a] hinzu, so ergibt sich ohne weiteres wieder [117]:

$$\frac{1}{M\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\,p \cdot q}{n}}} = h. \qquad [120]$$

4. Durch Reihenentwicklung wird ebenso wie [116] und [117] auch die numerische Beziehung des sog. „wahrscheinlichen Fehlers" P zu h, bzw. zu D und M gefunden, wobei P, wie schon S. 46 erwähnt, seiner Definition nach die Anzahl der Abweichungen v ihrer absoluten Größe nach in zwei gleiche Partieen zerlegt. Wenn aber

$$2\int_0^P \varphi(v)\,dv = 2\int_P^{+\infty} \varphi(v)\,dv = \frac{1}{2},$$

1) Vgl. auch G. F. Lipps, Psychische Maßmethoden S. 30 f. (Auch das Bernoullische Theorem kann durch die Abhängigkeit des M von der Zahl n der Kombinationsglieder ausgedrückt werden.)

so wird

$$P = \frac{0{,}47694}{h} = 0{,}67449\,M = 0{,}84533\,D. \qquad [121]$$

Die letzte Gleichung gibt also ein sehr einfaches Mittel an die Hand, um aus einer großen Reihe von Beobachtungen, deren Verteilungsfunktion $\mathfrak{B}(x)$ man eine genügende Übereinstimmung mit $\varphi(v)$ zutraut, h, M und D zu bestimmen, nachdem man zunächst den wahrscheinlichen Fehler P selbst einfach durch Abzählung herausgefunden hat. Würde wirklich $\varphi(v)$ genau erfüllt sein, also vor allem auch eine symmetrische Streuung herrschen, so würde man aus der Viertelung der gesamten Fehlerreihe das nämliche P erlangen, wie aus der Halbierung der nach ihrem absoluten Werte geordneten Abweichungen von $\mathfrak{A}$.

5. Diese Prüfung der Verteilungsform durch Abzählung der Fälle oberhalb und unterhalb von $\mathfrak{A}$, und die Vergleichung des durch Abzählung gefundenen P mit demjenigen, das mittels der selbständig aus der Verteilung zu berechnenden Werte M und D [1]) abgeleitet wurde, ist aber offenbar nur der einfachste Spezialfall einer Angleichung der empirischen Verteilung an die Summenfunktion $\mathfrak{S}$

$$\mathfrak{S} = \int_0^v \varphi(v)\,dv$$

überhaupt, bei der die Anzahl der Fehler in jedem einzelnen Abszissenintervalle natürlich auch gesondert abgezählt werden kann. Hierbei läßt sich also dieses bei P auf $^1/_4$ angewachsene Integral in seiner Zunahme Stufe für Stufe verfolgen. Dazu kann dann wieder ohne weiteres die Tabelle Φ (s. S. 103, $\mathfrak{A}$. 1) verwendet werden. Allerdings müßten dann aus den Abzählungsgrenzen der v zunächst immer erst die Grenzen dieses Integrales Φ, also $t = hv$ berechnet werden, wozu aber nur irgend eine der genannten Bestimmungen von h aus der ganzen Fehlerreihe, am besten als

$$h = \frac{1}{M\sqrt{2}},$$

auszuführen ist. Mit dem beim Argument $t = hv$ in der Tabelle jeweils verzeichneten Wert des Integrales Φ müßte also dann die doppelte Summe der r. H. der Fehler von 0 bis $+v$ oder $-v$ oder die Summe der r. H. von $-v$ bis $+v$ für alle $v_x = x - \mathfrak{A}$ übereinstimmen [2]).

1) Nach Gauß ist die Genauigkeit der Bestimmung dieser Repräsentanten der Fehlerreihe bei M am größten.

2) Nach Encke (vgl. Weinstein, a. a. O. S. 78) kann man wenigstens die Berechnung von h aus einem der charakteristischen Fehler ersparen, wenn die Argumente der Integraltabelle nicht in vh, sondern sogleich in Vielfachen eines solchen charakteristischen Fehlers ausgedrückt sind, was nach Gl. [116], [117] und [121] leicht geschehen kann. Dabei hat schon Encke den „wahrscheinlichen" Fehler P dazu verwendet. Auch A. Lehmann gibt in seiner „Methodik" (S. 23) eine solche Tabelle für die Argumente

$$\frac{vh}{Ph} = \frac{vh}{0{,}47694} = \frac{v}{P} = 0{,}1 \cdot m \; (m = 0,1,2,\ldots 40). \qquad [122]$$

Wenn eine strenge Gültigkeit des Gesetzes vorläge, müßte sich die ganze Verteilung allerdings auch schon allein aus dem „wahren" Wert und seiner r. H. rekonstruieren lassen, also z. B. aus $\mathfrak{A}$, das dann mit $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ übereinstimmen würde. Denn sobald außer der Abszisseneinheit der „wahre" Wert $\mathfrak{A}$, d. h. der Nullpunkt der Variablen v, und dessen Funktionswert $\varphi(0) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$ festgelegt sind, ist die ganze übrige Funktion eindeutig bestimmt. In der aus Kellers Versuchen entnommenen Verteilung der Gleichheitsurteile war z. B. nach S. 47 und S. 63

$$\mathfrak{A} = 54{,}1 \qquad \mathfrak{C} = 54{,}07 \qquad \mathfrak{D} = 53{,}899,$$

also eine zwar gute, aber doch nicht vollständige Symmetrie. Würde man h nach dem Funktionswert w_0 bestimmen, so wäre also für irgend einen der Hauptwerte der Funktionswert $\mathfrak{B}(x)$ z. B. nach [33b] zu interpolieren. In jenem Beispiele kann auch einfach unsere Interpolation der Ordinate 21,55 für $\mathfrak{D}$ (s. S. 63) benutzt werden, die als r. H. zu der Gesamtzahl 80 aller Gleichheitsfälle (s. S. 47) ins Verhältnis zu setzen ist. Es wäre also bei der Annahme, daß $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D}$ ist,

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{D}) = \varphi(0) = \frac{21{,}55}{80}; \quad h = \frac{21{,}55}{80}\sqrt{\pi} = 0{,}4775.$$

Jedenfalls wäre aber diese ausschließliche Berücksichtigung des Wertes $\varphi(0)$ bei der Auswahl des Parameters ein völlig einseitiges Verfahren. Denn bei einer begrenzten Zahl von Beobachtungen brauchen die einzelnen Werte das Gesetz nicht genau zu erfüllen, weil die Mannigfaltigkeit nicht vollständig erschöpft wird. Doch dürften bei zufälligen Abweichungen dieser Art wenigstens die Repräsentanten nicht wesentlich beeinflußt sein. Insbesondere dürften also eigentlich auch schon die genannten drei Hauptwerte in diesem Falle nicht viel differieren. Dabei kann es dann als das nächstliegende Ausgleichungsverfahren betrachtet werden, wenn man h nach einem Repräsentanten der Fehlerreihe bestimmt, also vor allem nach M an der Hand von Gl. [18] und [117]. Behält man in unserem Beispiele $\mathfrak{D}$ statt des gebräuchlicheren $\mathfrak{A}$ als Ausgangspunkt bei, zumal beide Werte einander sehr nahe liegen, so wird für $i = 1$

$$M^2 = \frac{1}{80}(2{,}633^2 \cdot 5 + 1{,}633^2 \cdot 11 + 0{,}633^2 \cdot 20 + 0{,}367^2 \cdot 21 + \\ + 1{,}367^2 \cdot 15 + 2{,}367^2 \cdot 6 + 3{,}367^2 \cdot 2)$$

---

während es wohl der größeren Bedeutung des mittleren Fehlers eher entspräche, eine Tabelle für

$$\frac{vh}{Mh} = vh\sqrt{2} = \frac{v}{M} \qquad [123]$$

zu wählen. Indessen ist es überhaupt fraglich, ob die Division mit einer Größe M oder P bequemer ist als die Multiplikation mit h. Wenn das h einmal festgestellt ist (und dies bedarf nur einer einmaligen Operation), wird man also jetzt mit der Bruns-Kämpfeschen allgemeinen und sehr genauen Tabelle für Φ wohl mindestens ebenso schnell arbeiten.

und hiernach

$$M = \sqrt{1{,}989};\ h = \frac{1}{M\sqrt{2}} = 0{,}501 \cdot$$

Immerhin stimmt hier dieser allgemeingültigere Wert, zu dessen Berechnung sämtliche Beobachtungen benutzt worden sind, mit $\varphi(0) \cdot \sqrt{\pi}$ noch ziemlich gut überein. Die Verteilung kommt eben im ganzen dem einfachen E.-G. in der Tat ziemlich nahe, wie auch schon aus dem Verhältnis $M:D$ zu ersehen ist, das bei rein zufälligen Lücken in einer endlichen Beobachtungsreihe nach dem einfachen E.-G. ebenfalls im wesentlichen erhalten bleiben muß. Da nämlich

$$D = \frac{1}{80}(2{,}633 \cdot 5 + 1{,}633 \cdot 11 + 0{,}633 \cdot 20 + 0{,}367 \cdot 21 + \\ + 1{,}367 \cdot 15 + 2{,}367 \cdot 6 + 3{,}367 \cdot 2) = 1{,}161,$$

so wird

$$M:D = 1{,}2147$$

statt ca. 1,25 nach [118]. Man würde also auch einen ähnlichen Wert für h erlangen, wenn man es nach [116] als $\frac{1}{D\sqrt{\pi}}$ bestimmte, nämlich $h = 0{,}4859$. Als Repräsentant der ganzen Reihe liegt er seinerseits der Berechnung aus M bereits näher und zufällig gerade in der Mitte zwischen den beiden anderen $w_0\sqrt{\pi}$ und $\frac{1}{M\sqrt{2}}$.

Man könnte aber natürlich auch alle beobachteten Funktionswerte. z_1, $z_2 \cdots z_s$ im einzelnen an berechnete $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ usw. angleichen, bzw. $\mathfrak{A}$ und h so bestimmen, daß für die „übrig bleibenden" Fehler $\varphi(v_x) - z_x$ bestimmte Vorschriften gemacht werden. Nach der unten angewandten Methode der „kleinsten Quadrate" müßten jedoch hier ebenfalls wenigstens bereits Annäherungen an die gesuchten Werte $\mathfrak{A}$ und h bekannt sein, da $\varphi(v)$ keine lineare Funktion dieser beiden Unbekannten ist, wie später ausführlicher zu begründen ist. Zu solchen Annäherungen wären aber die eben genannten Berechnungsweisen beider Größen vollkommen genügend. Indessen werden diese für die psychophysische Praxis überhaupt ausreichen, soweit das Gausssche Gesetz für die Darstellung eines einfachen K.-G. nach § 14, 2 in Frage kommt. Denn sobald die Fehler, die bei der eben geschilderten Ableitung von h aus der beobachteten Verteilung übrig bleiben, wirklich nicht zu vernachlässigen sind, wird man sich nicht auch noch der großen Mühe unterziehen, die Methode der kleinsten Quadrate mit den aus der transzendenten Form von $\varphi(v)$ sich ergebenden Hindernissen darauf anzuwenden, ganz abgesehen davon, daß jene spezielle Methode nur bei kleineren Fehlern zuverlässig ist, da sie auf der Abkürzung der Taylorschen Reihe für $f(x+h)$ bis zur ersten Potenz von h beruht. Sind aber die Abweichungen nicht zufällig verteilt, so müßte man überhaupt erst eine passendere Beobachtungsgleichung ansetzen.

Relativ einfach wird diese Ausgleichung jedoch in dem in der Psychophysik allerdings besonders wichtigen Fall, daß nicht die Funktion $\varphi(v)$

selbst beobachtet ist, sondern eine andere Funktion, die nach dem schon S. 40 und 49 Gesagten als „Summenfunktion" oder Integral eines hypothetischen einfachen K.-G. aufzufassen ist. Denn in diesem Fall kann ohne weiteres die schon öfters genannte Funktion $\Phi(t)$ als Darstellung der beobachteten Funktion vorausgesetzt werden, wenn der hypothetische K.-G. das einfache E.-G. befolgt. Hier ist also die beobachtete Funktion mit ihren Derivierten wenigstens nach vh eindimensional tabellierbar, was in jenem Ausgleichungsverfahren wesentliche Erleichterungen bedingt. Hierauf werden wir aber erst im Zusammenhang der Operationen für diese besonderen K.-G. zurückkommen.

Auch für $\varphi(v)$ könnte man allerdings die Summenfunktion für die einzelnen Intervallgrenzen x_1, x_2 usw., die schon oben als Kontrolle der Übereinstimmung einer beobachteten Verteilung mit dem E.-G. erwähnt wurde, zum Ansatz neuer Gleichungen für ein Ausgleichungsverfahren (nach Art des Systemes S. 64 unter Voraussetzung einer Parabel) benutzen. Dabei kann irgendeine Integrationsmethode, z. B. die numerische Integration nach S. 91ff., an der Hand der empirischen Interpolation die Grundlage des Verfahrens bilden. Denn die s Werte

$$\int^{x} \mathfrak{V}(x)\,dx$$

für alle s Beobachtungsabszissen als obere und $\mathfrak{A}$ als untere Grenzen können als ebenso viele Werte $\frac{1}{2}\Phi([\mathfrak{A} - x]h)$ aufgefaßt werden, und wenn nicht alle s Werte z_x selbst mit einem einzigen $\mathfrak{A}$ und h in Übereinstimmung zu bringen sind, gilt das nämliche natürlich auch für die s Integralwerte. Indessen wäre hiermit das Problem zunächst nur ganz äußerlich auf das in § 31 behandelte zurückgeführt, bei dem die $\Phi(vh)$ als beobachtet zu betrachten sind. Denn bei der einfachen Anwendung der herkömmlichen Ausgleichungsmethoden ist stets sorgfältig darauf Rücksicht zu nehmen, ob in den sogen. „Beobachtungsgleichungen" auch wirklich beobachtete Werte, d. h. nicht etwa erst Funktionen von solchen, zu den Unbekannten, hier also $\mathfrak{A}$ und h, in Beziehung gesetzt sind. Andernfalls ergeben sich für die Ausgleichung besondere Komplikationen. Eben deshalb werden wir uns aber auch hinsichtlich der Darstellung einfacher K.-G. durch die Funktion $\varphi(v)$ selbst auf das bisher Gesagte beschränken.

In dem vorhin behandelten Zahlenbeispiele der Kurve der Gleichheitsurteile $F_u(x)$ in Abhängigkeit vom Vergleichsreiz x steht übrigens der einfache K.-G. $F_u(x) = \varphi(v)$ mit zwei anderen beobachteten K.-G. $F_g(x)$ und $F_k(x)$ der Größer- und Kleinerurteile in der schon genannten Abhängigkeitsbeziehung

$$F_u(x) + F_g(x) + F_k(x) = 1\,.$$

Die Subsumtion dieser beiden anderen K.-G. unter das E.-G. nach § 31 wird aber ja hier in der Tat $F_g(x)$ als $\Phi_g(x)$ und $F_k(x)$ als $\Phi_k(x)$ auffassen bzw. nach den dort betrachteten Prinzipien ausgleichen lassen. In einem solchen

Falle ist aber dann natürlich auch wiederum $F_u(x)$ bereits als korrigiertes

$$F_u'(x) = 1 - \Phi_g(x) - \Phi_k(x) \qquad [124]$$

dem Exponentialgesetze eindeutig subsumiert.

23. Fechners logarithmisches Gesetz und zweiteiliges Gaußsches Gesetz.

1. Da sowohl die Gaußsche als auch die Laplacesche Ableitung des einfachen Exponentialgesetzes annehmen, daß eine Mannigfaltigkeit von sehr vielen Möglichkeiten in dem K.-G. gleichmäßig zur Geltung kommen, so können viele Abweichungen von diesem Verteilungsgesetz bei kleinerer Versuchszahl, wie soeben erwähnt wurde, gewissermaßen als Zufälligkeiten zweiter Ordnung angesehen werden, die bei Zunahme dieser Zahl immer kleiner werden. Dennoch hat die Erfahrung gezeigt, daß die Abweichungen der empirischen Verteilungen vom einfachen E.-G., insbesondere ihre Asymmetrie, auch bei beliebig großer Versuchszahl vorhanden bleiben und daher als systematische, also selbst gesetzmäßige Erscheinungen zu betrachten sind[1]). Ohne daß wir hier auf ihre theoretische Erklärungen aus einer entsprechenden Modifikation der Faktoren näher eingehen könnten, deren Hypostasierung oben zunächst die annähernde Symmetrie nach den Sätzen der Kombinationslehre verständlich machten, sollen hier nur die wichtigsten Versuche kurz erwähnt werden, beliebige empirische Formen der $\mathfrak{V}(x)$ durch eine Anlehnung an die Exponentialfunktion im ganzen analytisch darzustellen, so daß die Hauptwerte und Streuungsmaße auch in diesem Falle in ähnlicher Weise wie im vorigen Paragraphen ausgedrückt werden können.

Diese in der Brunsschen Reihe vorläufig abgeschlossenen Versuche wurden zunächst von Fechner vorbereitet. Als einfachste Möglichkeit, ein an sich asymmetrisches $\mathfrak{V}(x)$ doch durch das einfache E.-G. darzustellen, betrachtete er naturgemäß die Transformation der Abszissen: Wie man sich jede tatsächlich symmetrische Verteilung durch eine fortschreitende Zu- oder Abnahme der ursprünglich gleichen Abszissenintervalle, denen hierbei ihre alten Ordinaten zugeordnet bleiben, in eine scheinbar asymmetrische verwandelt denken kann, läßt sich umgekehrt auch bei einer als asymmetrisch beobachteten Verteilung versuchen, sie durch eine entgegengesetzte Modifikation der Abszissenwerte in eine symmetrische überzuführen. Man kann dabei annehmen, daß erst nach dieser Transformation die „wahren" Werte der unabhängigen Variablen richtig getroffen wären. Nun faßte Fechner bekanntlich speziell auch die ganze psychophysische Beziehung unter dem Gesichtspunkt einer solchen Transformation der zueinander parallel gedachten physischen und psychischen Maße auf, bei denen diese dem Logarithmus jener proportional seien. Daher konnte er in vielen Fällen, in denen das psychische Maß für die Abweichungen v_x von einem wahren Wert A entscheidend ist und gleichzeitig die Kurvenfläche von $\mathfrak{V}(x)$ oberhalb des Maximums $\mathfrak{D}$ die Fläche unterhalb desselben überwiegt, von der Transformation der Abszissen x in log x eine Annäherung an die

1) Fechner, a. S. 30 und 43 a. O.

Symmetrie erwarten. Dennoch erscheint diese Umwandlung für die tatsächliche Asymmetrie im allgemeinen viel zu stark, so daß sie meistens nur eine entgegengesetzte Asymmetrie an die Stelle setzen würde.

2. Während nun bei diesem „logarithmischen Gesetze“ die Variable v in φ (v) für die einzelnen Abszissengebiete verschieden gewählt wurde, wobei diese Änderung zugleich als eine stetige angenommen war, empfahl Fechner als eine noch allgemeinere und dabei wirklich überall bis zu einem gewissen Grade erfolgreiche Subsumtion einer beliebigen Verteilung, die andere der beiden Unabhängigen in φ (v), also den Parameter h, in den verschiedenen Abszissengebieten verschieden zu wählen. Dabei wurde dieses Verfahren, das sich somit bereits wiederum der stückweisen Parabel-Interpolation in § 17 annähert, ebenso wie dort (vgl. S. 54) noch durch den Verzicht auf eine stetige Änderung des h erleichtert. Fechner benutzte einfach die sprungweise Änderung des h, versuchte aber dafür auch mit nur zwei Werten auszukommen, indem er bei der Aufstellung seines sogen. „zweiteiligen“ oder „zweispaltigen“ Gaußschen Gesetzes die beiden bei Asymmetrie ungleichen Kurvenzweige oberhalb und unterhalb des Maximums $\mathfrak{D}$ einfach als je einen ganzen „Flügel“ einer Gesamtkurve des einfachen E.-G. auffaßte, dessen Präzisionsmaß h in beiden Flügeln verschieden sei. Damit aber auf diese Weise eine asymmetrische Kurve herauskommt, deren einer Flügel mehr Fälle repräsentiert, also bei stetigem K.-G. eine größere Kurvenfläche besitzt, müssen zu den Formeln des einfachen E.-G. außer der Verschiedenheit der Parameter h_0 und h_u des oberen und unteren Zweiges offenbar noch besondere Reduktionsfaktoren hinzutreten. Denn beim einfachen E.-G. bleibt natürlich bei der Variation des h doch die Summe aller relativen Häufigkeiten Σz stets gleich der Einheit, also auch der Wert jedes Flügels gleich $\frac{1}{2}$, weil eben das Maximum $\mathfrak{D}$ zugleich der Zentralwert $\mathfrak{C}$ ist. Außerdem passen aber diese Hälften zweier Kurven dieses einfachen Gesetzes mit verschiedenen h bei gleicher Maßeinheit gar nicht zusammen, weil ja die Halbierungsordinate $w_0 = \varphi(0) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$ nur von dem Parameter h dieser Verteilungsfunktion abhängt. Der Flügel mit dem größeren h setzt also beim Mittelwert mit einem höheren φ (0) ein, um dann nach außen hin rascher abzufallen als bei geringerer Präzision (vgl. S. 109). Gerade diese Verlaufsform nutzt aber nun Fechner zur Darstellung der Asymmetrie aus, indem er jene engere Anlagerung der halben Gesamtmasse an $\mathfrak{D}$ bei größerem h durch einen reduzierenden Faktor, der ohne Änderung der Abszissen x zur Abhängigen φ (v) hinzutritt, zur Repräsentation einer relativ geringeren Masse von Einzelfällen werden läßt, während umgekehrt der weiter ausladende, aber niedriger angesetzte Flügel bei kleinem h nach Hinzutritt eines vergrößernden Faktors mehr als die Hälfte aller Fälle in sich schließt.

Die Reduktionsfaktoren α_u und α_0 des unteren und oberen Flügels, die hiernach einfach die Formeln

$$\alpha_u \varphi_u(v) = \frac{h_u \alpha_u}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2}$$

$$\alpha_0 \varphi_0(v) = \frac{h_0 \alpha_0}{\sqrt{\pi}} e^{-h_0^2 v^2} \qquad [125]$$

befolgen, haben also zwei Aufgaben zugleich zu erfüllen. Einerseits sollen sie die Stetigkeit an der Übergangsstelle $x = \mathfrak{D}$ bzw. $v = 0$ herstellen, weshalb

$$\varphi_u(\mathfrak{D}) = \frac{h_u \alpha_u}{\sqrt{\pi}} = \varphi_0(\mathfrak{D}) = \frac{h_0 \alpha_0}{\sqrt{\pi}},$$

oder einfach die umgekehrte Proportionalität

$$h_u : h_0 = \alpha_0 : \alpha_u \qquad [126]$$

gelten muß. Andererseits soll aber doch auch die untere und obere Masse der Einzelfälle ΣZ_u und ΣZ_0 aus [125] richtig abgeleitet werden können, so daß auch (nach Einführung der rel. H. durch Division mit ΣZ)

$$\alpha_u \int_{-\infty}^{\mathfrak{D}} \varphi_u(x)\, dx : \alpha_0 \int_{\mathfrak{D}}^{+\infty} \varphi_0(x)\, dx = \Sigma z_u : \Sigma z_0$$

gelten muß. Hierdurch wäre also die einfache direkte Proportionalität

$$\Sigma z_u : \Sigma z_0 = \alpha_u : \alpha_0 \qquad [127]$$

festgelegt, da eben beide Integrale gleich $\frac{1}{2}$ sind.

Aus [126] und [127] folgt somit als Voraussetzung für die gleichzeitige Lösung beider Aufgaben eine erste Definitionsgleichung für die Auswahl der Grenzscheide

$$h_0 : h_u = \Sigma z_u : \Sigma z_0 \qquad [128]$$

oder: Die untere und obere Masse der Einzelfälle muß sich umgekehrt verhalten wie die Präzisionsmaße der entsprechenden Flügel der Verteilungsfunktion.

Nun ist das Präzisionsmaß h des einfachen E.-G. mit der Größe Σz andererseits durch Gl. [116] und [117] $h = \frac{1}{D\sqrt{\pi}} = \frac{1}{M\sqrt{2}}$ und durch [17] und [18] (S. 48) verbunden, von denen Fechner hier nur die einfachere zur mittleren Variation D benutzt. Da dieser Wert D nach dem einfachen E.-G. auch schon aus der Hälfte der symmetrischen Verteilung $\varphi(v)$, die zum Aufbau einer zweiseitigen Verteilung für sich herausgenommen wird, eindeutig berechnet werden kann, so ist also in [126], wenn die Anzahl der oberen Ordinaten z mit p, die der unteren mit q bezeichnet wird,

$$h_0 = \frac{1}{D_0\sqrt{\pi}} = \frac{\Sigma z_0}{(v_{0.1} z_{01} + \cdots v_{0p} z_{0p})\sqrt{\pi}}$$

$$h_u = \frac{1}{D_u\sqrt{\pi}} = \frac{\Sigma z_u}{(v_{u1} z_{u1} + \cdots v_{uq} z_{uq})\sqrt{\pi}}.$$

Diese beiden Formeln für h_0 und h_u sind also von der Abteilung der Gesamtmasse und der Wahl der Reduktionsfaktoren α noch ganz unabhängig, da sich ja ein allen z gemeinsamer Faktor α im Zähler und Nenner rechts heraushebt, und könnten somit für beliebige Abteilungen verschiedene h bestimmen lassen. Da aber auch [128] gelten soll, so muß die Grenzscheide $\mathfrak{D}$ schließlich die endgültige Bedingung erfüllen, daß

$$\frac{\Sigma z_0}{\Sigma v_0 z_0} : \frac{\Sigma z_u}{\Sigma v_u z_u} = \Sigma z_u : \Sigma z_0$$

oder

$$\frac{\Sigma v_u z_u}{(\Sigma z_u)^2} = \frac{\Sigma v_0 z_0}{(\Sigma z_0)^2}. \qquad [128a]$$

Bei einer stetigen Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$ aber würde die Bedingung für die Grenzscheide $\mathfrak{D}$ nach diesem sog. „Proportionalitätssatze" lauten:

$$\frac{\int\limits_{E_u}^{\mathfrak{D}} (\mathfrak{D} - x)\, \mathfrak{V}(x)\, dx}{\left[\int\limits_{E_u}^{\mathfrak{D}} \mathfrak{V}(x)\, dx\right]^2} = \frac{\int\limits_{\mathfrak{D}}^{E_o} (x - \mathfrak{D})\, \mathfrak{V}(x)\, dx}{\left[\int\limits_{\mathfrak{D}}^{E_o} \mathfrak{V}(x)\, dx\right]^2}. \qquad [128b]$$

Bei einer idealen Subsumierbarkeit des gegebenen K.-G. unter dieses zweispaltige E.-G. müßte nun gerade das Maximum $\mathfrak{D}$ der Verteilung diese Gleichungen [128] erfüllen, weil eben der ganze Flügel nach dem E.-G. bei jeder Präzision am Ausgangspunkte sein Maximum hat. Aber natürlich müßte auch der sonstige Verlauf dem E.-G. entsprechen. Wie man jedoch bei empirischen K.-G. in beliebigen Punkten des Verlaufes Abweichungen von dem einfachen E.-G. als zufällige Fehler mit in Kauf nimmt, so durfte Fechner auch bei seinem zweispaltigen zugestehen, daß außer beliebigen sonstigen Abweichungen vor allem auch das beobachtete Maximum $\mathfrak{D}$, wie es nach § 17 ff. aus den beobachteten z-Ordinaten interpolatorisch bestimmt wird, nicht genau nach Gleichung 128a einteile. Der „Proportionalitätssatz" [128a] läßt jedoch im allgemeinen [1]) für jeden empirischen K.-G. ganz unabhängig davon noch ein „theoretisches", wegen dieser entscheidenden Proportionalität von Fechner mit dem Index p bezeichnetes „Dichtigkeitsmittel" $\mathfrak{D}_p$ berechnen, das dann eine Art von Ausgleichung nach dem zweiseitigen E.-G. vom Maximum der Kurve aus festlegt. Die von $\mathfrak{D}_p$ abgeteilten Partialsummen Σz_u und Σz_0 bzw. die entsprechenden Integrale lassen somit aus [125] bis [128b] folgende Darstellungen des K.-G. hervorgehen:

$$\mathfrak{V}_0(x) = \frac{h_0 \cdot \Sigma z_0}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_0^2 v_0^2}$$

$$\mathfrak{V}_u(x) = \frac{h_u \cdot \Sigma z_u}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_u^2 v_u^2}. \qquad [129$$

1) Die Kriterien hierfür werden von Fechner in seiner Kollektivmaßlehre (vgl. S. 188 ff.) näher erläutert werden. Das beobachtete, bzw. interpolierte Dichtigkeitsmittel bezeichnet er mit dem Index i ($\mathfrak{D}_i$).

Die genaue Anwendung dieser Voraussetzungen auf die Praxis ist aber freilich deshalb besonders schwierig, weil der Ausgangswert $\mathfrak{D}_p$ der v_o und v_u selbst erst von der hieraus resultierenden Bestimmung der Σz_o und $\Sigma z - \Sigma z_o = \Sigma z_u$, bzw. der h_o und h_u abhängig ist[1]). (Auch die Auflösung der Integralgleichung [128b] nach den in den beiden folgenden Kapiteln angegebenen Gesichtspunkten gaben mir bisher keine wesentliche Erleichterung dieser Bestimmung von $\mathfrak{D}_p$ für stetige $\mathfrak{V}(x)$ an die Hand, da sogar in dem auch hierfür einfacheren Falle der Herstellung oder Beobachtung der Summenfunktion zu der Verteilung, für die $\mathfrak{D}_p$ bestimmt werden soll, selbst bei dem Mindestmaß des für die mittleren Variationen D_o und D_u einzuhaltenden Genauigkeitsgrades Gleichungen von höherem als zweitem Grad zu lösen bleiben, auf die wir aber bei der geringen praktischen Bedeutung dieser Berechnungen nicht weiter eingehen wollen.) In der psychophysischen Methodik kam denn auch im allgemeinen nur die gesonderte Bestimmung eines oberen und unteren Präzisionsmaßes überhaupt zur Anwendung, ohne Rücksicht auf den speziellen Ausgangswert. Ja, G. E. Müller verwendet ausdrücklich sogar den Zentralwert $\mathfrak{C}$ als Grenzscheide, der seiner Definition nach Σz_o und Σz_u gerade gleich macht. Die hieraus resultierenden Unstetigkeiten an der Übergangsstelle sind aber wohl ebenso leicht in Kauf zu nehmen wie jene Vernachlässigung des wirklich beobachteten $\mathfrak{D}$ bei Fechner. Zudem erweist sich diese stückweise Interpolation mit verschiedenen h für beliebige Abteilungen vor allem auch wiederum bei der Beobachtung der Integralkurven (der Größer- und Kleinerurteile) zweckmäßig. In der Funktion $\Phi(h,v)$ tritt aber die Unstetigkeit von $\varphi(v)$ an der Übergangsstelle relativ noch mehr zurück, so daß man hier von der stückweisen Interpolation mittels der einfachen E.-G. sogar leicht noch einen umfangreicheren Gebrauch machen könnte als bei der bloßen Zweiteilung[2]), zumal sich dann auch andererseits wiederum der Übergang zwischen dem $\Phi_g(x)$ der Größerurteile und dem $\Phi_k(x)$ der Kleinerurteile stetiger gestalten ließe.

24. Die Brunssche Reihe.

Während in der zuletzt beschriebenen Weise ganz beliebige Verteilungsfunktionen durch stückweise Interpolation des einfachen E.-G. selbst dargestellt werden können, gibt die Brunssche Reihe wenigstens für die ganze Summenfunktion wieder einen einheitlichen analytischen Ausdruck. Wie bei der Fourierschen Reihe (vgl. § 18) wird diese Darstellung willkürlicher Funktionen freilich nur mittels einer eventuell unendlichen Reihe von Gliedern mit transzendenten Funktionen erreicht. Wie aber jene durch die Verwendung relativ einfacher Sinus- und Kosinusfunktionen bestimmte Gegenstände, z. B. Klangkurven, mit einer besonders geringen Gliederzahl hinreichend genau wiedergeben kann, so leistet dies die Brunssche Reihe durch die Verwendung der Exponentialfunktion eben speziell für Kollektivgegenstände,

1) Vgl. Fechner, ebenda S. 189 ff. Es sind sogar Verteilungen denkbar, in denen überhaupt kein $\mathfrak{D}_p$ oder auch mehrere vorhanden sind. Bei den dem einfachen E.-G. bereits nahestehenden Fällen ist jedoch $\mathfrak{D}_p$ eindeutig bestimmbar.

2) Vgl. G. E. Müller, Gesichtspunkte usw., S. 63 u. S. 91 f.

und zwar um so leichter, je näher das $\mathfrak{V}(x)$, das dieser Summenfunktion zugrunde liegt, dem einfachen E.-G. selbst verwandt ist.

Dabei sind nun auch die bekannten Hauptfaktoren dieser Reihe, nach denen sie auch benannt ist, nicht $\varphi(x - A)$ selbst, wobei A im allgemeinen ein beliebiger Ausgangswert ist, sondern die Summen- bzw. Integralfunktion über das einfache E.-G.:

$$\Phi(t) = \Phi(h(x - A)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

und ihre Abgeleiteten Φ_1, $\Phi_2 \ldots \Phi_q$ nach $t = h(x - A)$. Daher werden auch bei einem beobachteten einfachen K.-G., wenn die Brunssche Reihe auf ihn angewandt werden soll, erst die Summen

$$\mathfrak{S}(x) = z_1 + z_2 + \ldots z_u \qquad [130]$$

bzw. nach Interpolation eines stetigen $\mathfrak{V}(x)$ die bestimmten Integrale

$$\mathfrak{S}(x) = \int_{Eu}^{x} \mathfrak{V}(x) dx$$

zu berechnen sein. Gerade in der Psychophysik kommen aber, wie schon erwähnt, wichtige Fälle vor, in denen die beobachteten Werte selbst als Summenfunktionen eines hypothetischen einfachen K.-G. zu betrachten sind. Die Koeffizienten der eben genannten Φ-Faktoren, die zu dem konkreten Ausdruck im ganzen natürlich ebenso hinzugehören, sind aber freilich doch wiederum nur aus den Werten des einfachen K.-G. selbst, die nach $\varphi(v)$ hin tendieren, direkt zu berechnen, da diese Koeffizienten ihrerseits „Durchschnitte“ über die der Summenfunktion $\mathfrak{S}(x)$ zugrunde liegende Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$ sind. Für die Ableitung der Reihe und den Beweis ihrer Konvergenz in den für die K.-L. in Betracht kommenden Fällen muß hier natürlich wieder auf die Lehrbücher der K.-L. verwiesen werden[1]. Nur so viel sei mehr in mnemotechnischer Absicht hinzugefügt, daß, rein äußerlich betrachtet, eine Verwandtschaft mit der Darstellung vorhanden ist, die einer Funktion, die an sich das einfache E.-G. in ihrer Summenfunktion $\mathfrak{S}(x)$ genau einhält, mittels Annäherungen A_0 und h_0 an die wahren Werte $A = A_0 + \xi$, und $h = h_0 + \eta$ nach der Taylorschen Reihe zuteil werden könnte. Es sei also

$$\mathfrak{S}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t = h(x-A)} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi(t). \qquad [131]$$

Dieser Wert könnte dann bekanntlich durch die Taylorsche Reihe mittels

1) Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung usw. S. 39ff. und 112ff. Czuber, a. a. O. 1908, S. 356ff.

der Annäherung $t_0 = t - \tau = h_0(x - A_0)$ entwickelt werden. Weil dann die Funktion des „wahren“ Wertes nach [131]

$$\mathfrak{S}(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\Phi(t_0 + \tau)$$

ist, so wird

$$2\,\mathfrak{S}(x) - 1 = \Phi(t_0) + \tau\,\Phi_1(t_0) + \frac{\tau^2}{1\cdot 2}\,\Phi_2(t_0)\ldots \qquad [132]$$

Ist aber nun [131] nicht genau erfüllt und ein so einfacher Ansatz zur Berechnung der wahren $\mathfrak{S}(x)$ überhaupt unmöglich, so lassen sich doch wenigstens gewissermaßen die Fehler der zu einfach angesetzten Form der Funktion $\Phi(t)$ selbst durch Hinzufügung der Glieder einer analogen Reihenentwicklung mit den Ableitungen der angenäherten Funktion kompensieren, wenn man nur die $\frac{\tau^q}{q!}$ durch passende Koeffizienten $D(t)_q$ ersetzt. Die Brunssche Reihe für die Summenfunktion beliebiger K.-G. lautet nämlich

$$2\,\mathfrak{S}(x) - 1 = \Phi(t) + \Sigma D(t)_q\,\Phi_q(t), \qquad [133]$$

wobei der Index $q = 1, 2, 3$ usw. und Φ_q die Abgeleiteten verschiedener Ordnung nach t bezeichnet.

Auf Grund der Brunsschen Entwicklungen lassen sich aber nun die Koeffizienten $D(t)_q$ zunächst, wie schon gesagt, direkt aus dem gegebenen einfachen K.-G. mit seiner Verteilung $\mathfrak{V}(x)$ berechnen, dessen Extreme E_u und E_o hier überall wie beim einfachen E.-G. als $-\infty$ und $+\infty$ vorausgesetzt sind. Es ist

$$D(t)_q = \int_{E_u}^{E_o} \mathfrak{R}(t)_q\,\mathfrak{V}(x)\,dx, \qquad [133\,a]$$

wobei für gerade q [1])

$$2^2\mathfrak{R}(t)_2 = \frac{(2t)^2}{0!\,2!} - \frac{1}{1!\,0!} \qquad [134\,a]$$

$$2^4\mathfrak{R}(t)_4 = \frac{(2t)^4}{0!\,4!} - \frac{(2t)^2}{1!\,2!} - \frac{1}{2!\,0!} \qquad [b]$$

und für ungerade q

$$2^1\mathfrak{R}(t)_1 = \frac{-2t}{0!\,1!} \qquad [135\,a]$$

$$2^3\mathfrak{R}(t)_3 = \frac{-(2t)^3}{0!\,3!} + \frac{2t}{1!\,1!} \qquad [b]$$

$$2^5\mathfrak{R}(t)_5 = \frac{-(2t)^5}{0!\,5!} + \frac{(2t)^3}{1!\,3!} - \frac{2t}{2!\,1!} \text{ usw.} \qquad [c]$$

Für die praktische Durchführung der Berechnungen dieser Koeffizienten aus einer gegebenen unstetigen Verteilung $z_0, z_1 \ldots z_s$ sind von Bruns zwei

1) Mittels der $\mathfrak{R}$ findet man auch die Abgeleiteten $\Phi_{p+1} = 2^p p!\,\mathfrak{R}(t)_p\,\Phi_1$.

Verfahren ausführlich erläutert, auf die wieder nur verwiesen werden kann. Hierbei ist aber vor allem noch die Wahl der für $t = h(x - A)$ entscheidenden Werte A und h wichtig: Der Koeffizient für Φ_1 ist nach [133a] und [135a]

$$D(t)_1 = -2\int_{E_u}^{E_o} h(x-A)\mathfrak{V}(x)\,dx = -2h\int_{E_u}^{E_o} x\cdot\mathfrak{V}(x)\,dx + 2hA\int_{E_u}^{E_o}\mathfrak{V}(x)\,dx.$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes wird aber bei stetigem $\mathfrak{V}(x)$ nach [21]

$$-2h\int_{E_u}^{E_o} x\cdot\mathfrak{V}(x)\,dx = -2h\mathfrak{A}.$$

Das zweite Glied aber ist nach [9] einfach $2hA$. Also verschwindet der ganze Koeffizient, falls wir das arithmetische Mittel $\mathfrak{A}$ über die Verteilung $\mathfrak{V}(x)$ als A wählen, weil dann

$$D(t)_1 = -2h\mathfrak{A} + 2h\mathfrak{A} = 0. \qquad [136]$$

Der Koeffizient von $\Phi_2(t)$ aber ist nach [133a] und [134a] allgemein:

$$D(t)_2 = \int_{E_u}^{E_o}(2t^2-1)\,\mathfrak{V}(x)\,dx = \int_{E_u}^{E_o}[2h^2(x-A)^2-1]\,\mathfrak{V}(x)\,dx. \qquad [137]$$

Dieser Koeffizient wird aber nun ebenfalls 0, wenn man hierin den Parameter h analog, wie es bei der strengen Gültigkeit des einfachen E.-G. in [117] geschah,

$$h = \frac{1}{M\sqrt{2}} \qquad [138]$$

setzt. Hierbei bedeutet M das nach Analogie zum sog. mittleren Fehler M nach Gl. [18] bzw. [23] gebildete mittlere Quadrat der Abweichungen $v = (x - A)$, die auf einen zunächst beliebig gewählten Ausgangswert A bezogen sind, so daß

$$M^2 = (x_1 - A)^2 z_1 + \ldots (x_s - A)^2 z_s = \int_{E_u}^{E_o}(x-A)^2\mathfrak{V}(x)\,dx. \qquad [139]$$

Dann wird offenbar nach [137] und [139] zunächst

$$D(t)_2 = 2h^2\int_{E_u}^{E_o}(x-A)^2\mathfrak{V}(x)\,dx - \int_{E_u}^{E_o}\mathfrak{V}(x)\,dx = 2h^2M^2 - 1$$

und nach [138]

$$D(t)_2 = 1 - 1 = 0. \qquad [140]$$

Setzt man also $A = \mathfrak{A}$ und $h = \frac{1}{M\sqrt{2}}$, wobei nun in [139] der zunächst beliebige Ausgangswert wiederum $\mathfrak{A}$ selbst ist, so folgt hieraus die sog. „Normalform" der Brunsschen Reihe

$$2\,\mathfrak{S}(x) - 1 = \Phi(t) + D(t)_3\,\Phi_3(t) + D(t)_4\,\Phi_4(t)\ldots \qquad [141]$$

Hierin kommen die beiden ersten Abgeleiteten überhaupt nicht mehr vor. Geht man nun von der Beobachtung eines einfachen K.-G. aus, z. B. der Verteilung Tabelle 1, S. 63, so wird man A und h ohne weiteres im Sinne der Normalform ansetzen können. Aber auch da, wo nicht der einfache K.-G. selbst, sondern seine Integralfunktion beobachtet ist (vgl. S. 49 und Kap. 7), wird man sogleich auf die Normalform ausgehen können. Hierauf werden wir aber erst unten (§ 31) im Zusammenhange zurückkommen.

Trotzdem die korrekte Ableitung der Brunsschen Reihe auf jede Weise ziemlich komplizierte Rechnungen erfordert, bleibt sie doch vorläufig der einfachste analytische Ausdruck für einen beliebigen K.-G., bei dem man auch den interpolierten Stellen, also der Funktion im ganzen eine größere Wahrscheinlichkeit zuschreiben kann. Für die psychophysischen Anwendungen braucht man im allgemeinen wohl höchstens 4 Glieder zu berücksichtigen. Da die Tabelle bis Φ_6 geführt ist[1]), reicht sie also auch bei der Normalform für unsere Zwecke vollkommen aus.

Kapitel 6.

Hauptwerte und Streuungsmaße im allgemeinen.

25. Das arithmetische Mittel und der mittlere Fehler.

1. Da die speziellen Verteilungsgesetze einen gegebenen K.-G. mit einer möglichst geringen Zahl von Konstanten, und zwar nach dem einfachen E.-G. sogar mit nur zwei Größen a und h wiedergeben sollen, so fielen bei ihrer Annahme die beiden in § 14 und § 15 unterschiedenen Aufgaben, d. h. die Darstellung der Funktion überhaupt und die Angabe einiger weniger vergleichbarer Repräsentanten, vollständig zusammen. Jene Konstanten der Verteilungsfunktion standen eben zu den Hauptwerten bzw. Streuungsmaßen in einer besonders einfachen Beziehung. Die nämlichen Durchschnitte über die Verteilungsfunktion behalten aber nun ihre repräsentative Bedeutung ganz allgemein auch dann bei, wenn diese Funktion keiner so einfachen Formel folgt. Hierbei wird man sich dann womöglich auch sogleich an die stetige Funktion halten[2]), die nach dem 4. Kapitel interpolatorisch zu ergänzen ist und bei dem Dichtigkeitsmittel $\mathfrak{D}$ ohnehin bereits überall vorausgesetzt war.

---

1) Bei der Anwendung der Brunsschen Tabellen darf niemals vergessen werden, daß in die Werte bereits je ein an der Reihe stets beteiligter Koeffizient hineingenommen ist. Sie enthält also Φ_1, $\frac{1}{2}\Phi_2$, $\frac{1}{4}\Phi_3$, $\frac{1}{8}\Phi_4$, $\frac{1}{16}\Phi_5$ und $\frac{1}{32}\Phi_6$.

2) Auch der Ansatz S. 107 ff. für die Näherungswerte der Parameter der speziellen Verteilungsgesetze ließe sich natürlich von diesem Gesichtspunkte aus noch korrigieren.

Vor allem sind aber nunmehr die ebenso allgemeinen Beziehungen hervorzuheben, die bei jeder beliebigen Verteilungsform zwischen bestimmten Hauptwerten und Streuungsmaßen bestehen. Lassen diese Beziehungen zunächst schon im allgemeinen die Bedeutung der gewählten Repräsentanten unter einem besonderen Gesichtspunkt verstehen, so können sie in gewissen Fällen, in denen eine direkte Berechnung der Hauptwerte nicht möglich ist, zur indirekten Bestimmung derselben verwendet werden, wie im nächsten Paragraphen bei der sog. Methode der kleinsten Quadrate näher auszuführen sein wird.

2. So unterstützen sich besonders der Hauptwert des arithmetischen Mittels $\mathfrak{A}$ und das Streuungsmaß des mittleren Fehlers M gegenseitig in ihrer besonders unbestrittenen Geltung als Repräsentanten dieser Art durch die wichtige, schon von Gauß später unabhängig von seinem E.-G. verwertete[1]) Beziehung, daß für jede beliebige Verteilungsfunktion der mittlere Fehler M ein Minimum wird, wenn man die Abweichungen auf das arithmetische Mittel $\mathfrak{A}$ als Ausgangswert bezieht, wie leicht zu beweisen ist:

Schon in der Diskussion des einfachen E.-G. (S. 107) wurde ja eine Eigenschaft des arithmet. Mittels $\mathfrak{A}$ hervorgehoben, die ihm ganz allgemein zukommt, also insbesondere auch unabhängig davon, ob die Verteilung eine symmetrische ist. Nach [115] verschwindet der sog. „resultierende Fehler" R, d. h. die Summe der mit ihrem Vorzeichen angesetzten Abweichungen $(x - a)$, wenn der Ausgangswert $a = \mathfrak{A}$ ist. Dieser Ausgangswert, der $R = 0$ werden läßt, erweist sich aber nun auch als diejenige Größe des a, die M zu einem Minimum macht. Dies läßt sich zunächst wieder am einfachsten bei einem unstetigen K.-G. überschauen, bei dem nach [18]

$$M^2 = v_1{}^2 z_1 + v_2{}^2 z_2 + \ldots v_n{}^2 z_n,$$

wobei also die z wieder die relativen Häufigkeiten bedeuten und die v_ν nach [102] die Abweichungen $(a - x_\nu)$ sind. Zur Auffindung unserer Beziehung haben wir nun wiederum ebenso wie bei der Ableitung des einfachen E.-G. S. 105 f. den Ausgangswert a als die Variable zu betrachten, nach der dann auch der Ausdruck für M^2 zur Berechnung des Minimums differenziert werden muß. Es wird also M^2 und daher auch M für dasjenige a ein Minimum, das sich aus der Gleichung

$$\frac{dM^2}{da} = 2 v_1 z_1 \cdot \frac{dv_1}{da} + 2 v_2 z_2 \cdot \frac{dv_2}{da} + \ldots 2 v_n z_n \cdot \frac{dv_n}{da} = 0, \quad [142]$$

bzw., da sämtliche

$$\frac{dv_\nu}{da} = \frac{d(a - x_\nu)}{da} = 1, \text{ aus}$$

$$0 = v_1 z_1 + v_2 z_2 + \ldots v_n z_n \quad [143]$$

berechnen läßt. Denn daß es sich nur um ein Minimum handeln kann, er-

1) Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Commentationes soc. reg. Sc. Gótting. rec. V, 1823.

gibt der durchweg konstante positive Wert des zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2M^2}{da^2} = 2(z_1 + z_2 + \ldots z_n) = 2. \qquad [143a]$$

Mit [143] sind wir aber zu der Bedingung, daß R verschwindet, zurückgekehrt, woraus sich aus [102] und [16] eben das arithmetische Mittel

$$\mathfrak{A} = x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots x_n z_n \qquad [143b]$$

als Voraussetzung des kleinsten mittleren Fehlerquadrates ergibt.

3. Interpolieren wir nun eine stetige Verteilung $\mathfrak{V}(x)$, so hat dies zunächst für den Hauptwert $\mathfrak{A}$ die geringste Bedeutung. Bei einer symmetrischen Streuung, gleichgültig von welcher Form im einzelnen, müßten die beiden Hauptwerte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ hiervon sogar unberührt bleiben. Aber auch bei einem beliebigen asymmetrischen $\mathfrak{V}(x)$ ändert sich $\mathfrak{A}$ z. B. durch die Interpolation nach § 19 mittels der Funktionsdifferenzen nur um einen ganz kleinen, völlig zu vernachlässigenden Betrag. Wir führen daher den für

$$\mathfrak{A} = \int_{E_u}^{E_o} x \cdot \mathfrak{V}(x)\,dx \qquad [Gl. 21]$$

zu gewinnenden Ausdruck nur ein, weil wir von ihm im nächsten Kapitel, bei der Berechnung des $\mathfrak{A}$ für hypothetische, nur in ihrer Summenfunktion beobachtete K.-G. einen wichtigen Gebrauch machen können. Zudem wird diese Formel, nach Ableitung derjenigen für

$$M^2 = \int_{E_u}^{E_o} (a - x)^2\,\mathfrak{V}(x)\,dx \qquad [23]$$

die fundamentale Beziehung zwischen M^2 und $\mathfrak{A}$ auch bei stetigem $\mathfrak{V}(x)$ unmittelbar aus den Integralausdrücken erschließen lassen, was freilich bei der Unbegrenztheit der Gliederzahl in der Reihe [142] an und für sich nicht erst noch besonders bewiesen zu werden brauchte.

Der soeben wieder aufgenommene Ausdruck [21] für $\mathfrak{A}$ bei stetiger Verteilung

$$\mathfrak{A} = \int_{E_u}^{E_o} x \cdot \mathfrak{V}(x)\,dx$$

läßt sich nun durch eine einfache partielle Integration auswerten[1]). Da nämlich

$$\frac{d[x \int \mathfrak{V}(x)\,dx]}{dx} = x \cdot \mathfrak{V}(x) + \int \mathfrak{V}(x)\,dx, \qquad [144]$$

1) Alle hierhergehörigen Durchschnittsberechnungen behandelte ich ausführlicher in Wundt, Psychol. Studien VI, 1910. H. 1 u. 2, S. 141, H. 3 u. 4, S. 252 u. H. 5 u. 6, S. 430. (Die mathematischen Grundlagen der sogenannten unmittelbaren Behandlung psychophysischer Resultate.)

so ist

$$\int_{E_u}^{E_o} x \cdot \mathfrak{V}(x)\,dx = \Big[x \int \mathfrak{V}(x)\,dx\Big]_{E_u}^{E_o} - \int_{E_u}^{E_o}\!\!\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx.$$

Zur Vereinfachung des letzten Ausdruckes denkt man sich nun die bei der Auswertung unseres bestimmten Integrales beliebig anzusetzende Integrationskonstante C in $\int \mathfrak{V}(x)\,dx$ so gewählt, daß

$$\int \mathfrak{V}(x)\,dx = \int_{E_u}^{x} \mathfrak{V}(x)\,dx, \quad \text{also}$$

$$C = -\int_{x=E_u} \mathfrak{V}(x)\,dx. \qquad [144\,a]$$

Dadurch wird dieses Integral im ersten Gliede rechts für $x = E_u$ zu Null, während es für $x = E_0$ zu $\int_{E_u}^{E_o} \mathfrak{V}(x)\,dx$, also nach [9] der Einheit gleich wird. Somit ist im ganzen

$$\mathfrak{A} = \int_{E_u}^{E_o} x \cdot \mathfrak{V}(x)\,dx = E_0 \cdot 1 - E_u \cdot 0 - \int_{E_u}^{E_o}\!\!\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx$$

$$= E_0 - \int_{E_u}^{E_o}\!\!\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx, \qquad [145]$$

oder: Das arithmetische Mittel $\mathfrak{A}$ ist gleich dem oberen Extrem E_0 der Verteilung des K.-G., vermindert um das zwischen den Extremen genommene Doppelintegral über die Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$, falls die hierbei inbegriffene Konstante C des einfachen Integrales, über die hierbei immer erst noch zu entscheiden ist, in der genannten Weise als

$$C = -\int_{x=E_u} \mathfrak{V}(x)\,dx$$

gewählt wird. Auf diesem wichtigen Hilfssatze werden wir vor allem im nächsten Kapitel von einem anderen Gesichtspunkte aus weiterbauen. Hier verwenden wir ihn nur zur Auswertung von $\mathfrak{A}$ unter der gewöhnlichen Voraussetzung, daß $\mathfrak{V}(x)$ selbst in einer endlichen Anzahl von relativen Häufigkeiten $z_0, z_1 \ldots z_p$ beobachtet worden sei, wobei $z_0 = z_p = 0$. In diesem Falle ist also dann das Doppelintegral in [145] nach der Annäherung [85a] S. 94 f. zu berechnen, wobei allerdings noch zu berücksichtigen ist, daß dort die Summe der Ordinaten noch nicht auf die Einheit reduziert ist, wie es in dem $\mathfrak{V}(x)$ von Gleichung [145] vorausgesetzt ist. Es müssen also sämtliche z von dort, die in dem Rechenbeispiele auf S. 94 nur in dem bei § 14, 3 erläuterten Sinne als rel. H. anzusehen waren, noch durch

$$\int_{E_u}^{E_o} \mathfrak{V}(x)\,dx = i \cdot \Sigma z$$

dividiert werden, um auch im Verhältnis zur Summe aller Fälle, die in der Verteilung $\mathfrak{V}(x)$ nach S. 85 ff. einbezogen sind, relative H. auszudrücken. Setzt man dann für diese $\frac{z_x}{\Sigma z}$ wieder einfach z_x, so wird also unser Doppelintegral, da z_p hier verschwindet,

$$\int_{E_u}^{E_o}\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx = i\,(p-1)\,z_1 + (p-2)\,z_2 \ldots + 1 \cdot z_{p-1}). \qquad [146]$$

Es ist somit bis auf den S. 90 als irrelevant erwiesenen Restbetrag, also mit der völlig ausreichenden Annäherung der Formel [85a]:

$$\mathfrak{A} = E_0 - i\,[(p-1)\,z_1 + (p-2)\,z_2 + \ldots z_{p-1}]. \qquad [147]$$

Dies ist aber genau der nämliche Ausdruck, den man nach der Formel [16] ohne Interpolation direkt aus dem beobachteten unstetigen K.-G. ableitet[1]). Die Form ist nur insofern etwas verändert, als man die Abszissen zunächst alle von dem oberen Extrem $E_0 = x_p$ aus rechnet, so daß auch das arithmetische Mittel schließlich selbst in dieser Form erscheint. (Dieses Verfahren besitzt bekanntlich sogar eine praktische Bedeutung, wenn die betrachteten Abszissen sämtlich große, unter sich aber wenig differierende Werte sind. In diesem Falle läßt uns diese Reduktion der Abszissen bequemer mit kleineren Zahlen weiter operieren.) Subtrahiert man nämlich in dem Ausdrucke [16] S. 45 für $\mathfrak{A}$ von den Abszissenwerten $\mathfrak{A}$ und x_ν das obere Extrem E_0, so ergibt sich bei äquidistantem Intervall i

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= E_0 - (E_0 - x_1)\,z_1 + (E_0 - x_2)\,z_2 \ldots + (E_0 - x_{p-1})\,z_{p-1}\\ &= E_0 - i\,[(p-1)\,z_1 + (p-2)\,z_2 \ldots + z_{p-1}],\end{aligned}$$

also in der Tat ein mit [147] identischer Ausdruck.

4. Auch der Ausdruck für M^2 bei stetigem $\mathfrak{V}(x)$ läßt sich durch partielle Integration so weit auswerten, daß er aus einer gegebenen Reihe von Ordinaten $z_0, z_1, \ldots z_p$ der Verteilung mittels der numerischen Integration mit genügender Annäherung zu berechnen wäre. Indessen geben wir hier nur die allgemeinen analytischen Formeln, die zur Ableitung der Beziehung zum arithmetischen Mittel $\mathfrak{A}$ ausreichen. Die numerische Berechnung von M^2 an der Hand der hier gewonnenen Formeln soll uns dagegen erst wieder in

1) Vgl. Wundt, Psychol. Studien VI, S. 312.

§ 30 unter der praktisch besonders wichtigen Voraussetzung beschäftigen, daß nicht der einfache K.-G. selbst, über dessen $\mathfrak{V}(x)$ der Durchschnitt [23]

$$\int_{E_u}^{E_o} (a-x)^2 \mathfrak{V}(x)\,dx$$

gebildet ist, sondern seine Summenfunktion beobachtet ist.

Multipliziert man unter dem Integralzeichen für M^2 aus, so erhält man, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der Abweichung

$$M^2 = a^2\int_{E_u}^{E_o} \mathfrak{V}(x)\,dx - 2a\int_{E_u}^{E_o} x\cdot\mathfrak{V}(x)\,dx + \int_{E_u}^{E_o} x^2\mathfrak{V}(x)\,dx. \qquad [148]$$

Es ist nun nach Gleichung [9]

$$a^2\int_{E_u}^{E_o} \mathfrak{V}(x)\,dx = a^2, \qquad [149]$$

ferner nach [145], wenn wir bezüglich der Integrationskonstanten die nämliche Voraussetzung wie dort machen,

$$2a\int_{E_u}^{E_o} x\cdot\mathfrak{V}(x)\,dx = 2aE_0 - 2a\int_{E_u}^{E_o}\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx. \qquad [150]$$

Das dritte Glied aber erfordert eine zweimalige Anwendung der partiellen Integration, die zu [145] führte. Zunächst ergibt sich, da

$$\frac{dx^2 \int \mathfrak{V}(x)\,dx}{dx} = x^2\mathfrak{V}(x) + 2x\int \mathfrak{V}(x)\,dx, \qquad [151]$$

$$\int_{E_u}^{E_o} x^2\mathfrak{V}(x)\,dx = \Big[x^2 \int \mathfrak{V}(x)\,dx\Big]_{E_u}^{E_o} - 2\int_{E_u}^{E_o} \left(x\int \mathfrak{V}(x)\,dx\right)dx. \qquad [152]$$

Das erste Glied rechts ist nun gemäß der nämlichen Überlegung wie bei [145]

$$E_o{}^2\cdot 1 - E_u{}^2\cdot 0 = E_o{}^2.$$

Denkt man sich aber nun auch im zweiten Gliede das Integral $\int \mathfrak{V}(x)\,dx$ wieder durch die schon bei [145] verwendete Funktion $\int_{E_u}^{x} \mathfrak{V}(x)\,dx = F(x)$ ersetzt, so erhält man einen Ausdruck, der wie [145] bzw. [150] behandelt werden kann. Es ist also

$$\int_{E_u}^{E_o} x F(x)\,dx = \Big[x\int F(x)\,dx\Big]_{E_u}^{E_o} - \int_{E_u}^{E_o}\int F(x)\,dx\,dx. \qquad [153]$$

Nun kann bei $\int F(x)\,dx$ wieder eine Integrationskonstante vorausgesetzt werden, die das Integral für $x = E_u$ verschwinden läßt. Man braucht nur wieder ganz analog wie bei [145] zu setzen:

$$\int F(x)\,dx = \int_{E_u}^{x} F(x)\,dx = \int_{E_u}^{x}\int \mathfrak{B}(x)\,dx\,dx.$$

Für $x = E_o$ wird dann das Integral einfach zu

$$\int_{E_u}^{E_o}\int \mathfrak{B}(x)\,dx\,dx.$$

Somit wird das erste Glied in [153] zu

$$E_o\int_{E_u}^{E_o}\int \mathfrak{B}(x)\,dx\,dx,$$

und das zweite bleibt, nachdem $\mathfrak{B}(x)$ wieder eingeführt ist,

$$\int_{E_u}^{E_o}\int\int \mathfrak{B}(x)\,[dx]^3.$$

Der ganze Ausdruck [152] wird daher:

$$\int_{E_u}^{E_o} x^2\mathfrak{B}(x)\,dx = E_o{}^2 - 2\,E_o\int_{E_u}^{E_o}\int \mathfrak{B}(x)\,dx\,dx + 2\int_{E_u}^{E_o}\int\int \mathfrak{B}(x)\,[dx]^3 \qquad [154]$$

und somit endlich der ganze Wert von M^2 nach [148]:

$$\begin{aligned} M^2 = {} & a^2 - 2\,a E_o + 2a\int_{E_u}^{E_o}\int \mathfrak{B}(x)\,dx\,dx + E_o{}^2 \\ & - 2\,E_o\int_{E_u}^{E_o}\int \mathfrak{B}(x)\,dx\,dx + 2\int_{E_u}^{E_o}\int\int \mathfrak{B}(x)\,[dx]^3 \qquad [155] \\ = {} & (E_o - a)^2 - 2\int_{E_u}^{E_o}\int \mathfrak{B}(x)\,dx\,dx\,(E_o - a) + 2\int_{E_u}^{E_o}\int\int \mathfrak{B}(x)\,[dx]^3 \\ = {} & (E_o - a)\left(E_o - a - 2\int_{E_u}^{E_o}\int \mathfrak{B}(x)\,dx\,dx\right) + 2\int_{E_u}^{E_o}\int\int \mathfrak{B}(x)\,[dx]^3. \qquad [156] \end{aligned}$$

5. Aus diesen Formeln läßt sich nun eine doppelte Bedeutung des arithmetischen Mittels $\mathfrak{A}$ als Ausgangswert für M^2 nachweisen. Zunächst

vereinfacht sich nämlich bei dieser speziellen Wahl des Ausgangswertes die allgemeine Formel ganz bedeutend, wie am unmittelbarsten aus der Umformung [156] zu entnehmen ist. Erinnern wir uns, daß das arithmetische Mittel $\mathfrak{A}$ bei stetigem $\mathfrak{V}(x)$ nach Gleichung [145]

$$\mathfrak{A} = E_0 - \int_{E_u}^{E_0}\!\!\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx,$$

also

$$E_0 - \mathfrak{A} = \int_{E_u}^{E_0}\!\!\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx$$

ist, wobei wir für das einfache Integral die nämliche Konstante wie in [156] voraussetzen, so wird aus [156], wenn wir $\mathfrak{A}$ für a setzen, einfach

$$M^2 = 2\int_{E_u}^{E_0}\!\!\int\!\!\int \mathfrak{V}(x)\,[dx]^3 - \left\{\int_{E_u}^{E_0}\!\!\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx\right\}^2, \qquad [157]$$

d. h.: der mittlere Fehler M ist bei seiner Beziehung auf das arithmetische Mittel als Ausgangswert gleich dem doppelten Wert des dreifachen Integrales über die Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$, genommen zwischen den Extremen E_0 und E_u des K.-G., vermindert um das Quadrat des Doppelintegrales über diese Funktion zwischen den nämlichen Grenzen, wenn für die nicht zwischen bestimmten Grenzen genommenen Integrale die Konstanten in der genannten Weise so gewählt werden, daß die Ausdrücke für $x = E_u$ verschwinden.

6. Die Beziehung zwischen $\mathfrak{A}$ und M, wonach M bei Wahl des $a = \mathfrak{A}$ ein Minimum wird, ist natürlich aus der ersten allgemeinen Form [155] der Gleichung für M^2 abzuleiten. Betrachtet man in ihr wiederum a als die Variable, nach welcher der Differentialquotient bei der Berechnung des Minimums zu nehmen ist, so wird, da die drei letzten Glieder bei dieser Variation konstant bleiben,

$$\frac{dM^2}{da} = 2a - 2\left(E_0 - \int_{E_u}^{E_0}\!\!\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx\right). \qquad [158]$$

Dieser Ausdruck kann nur verschwinden, wenn

$$a = E_0 - \int_{E_u}^{E_0}\!\!\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx.$$

Hiermit sind wir aber in der Tat zur Gleichung [145] für $\mathfrak{A}$ zurückgekehrt. Daß es sich um ein Minimum bei $\mathfrak{A}$ handelt, folgt wieder aus dem positiven Wert des zweiten Differentialquotienten an dieser Stelle, der in Übereinstimmung mit [143a] nicht nur hier, sondern konstant

$$\frac{d^2M}{da^2} = 2.$$

Zu einer numerischen Berechnung des mittleren Fehlers aus einer Reihe beobachteter (äquidistanter) Ordinaten $z_0, z_1, \ldots z_n$ von $\mathfrak{V}(x)$ wäre aber natürlich sowohl nach der allgemeinen Gleichung [156], als auch, bei der Wahl von $\mathfrak{A}$ als Ausgangswert, nach [157] die Auswertung des dreifachen Integrales über $\mathfrak{V}(x)$ erforderlich. Der praktische Vorteil der Substitution einer stetigen Funktion erscheint aber in diesem Falle doch mit einem zu großen Rechenaufwand erkauft, zumal bei der direkten Beobachtung des einfachen K.-G. die Berechnung des M^2 nach Formel [18] [1]) mittels einer Quadrattafel noch sehr bequem ist. Wir können daher auf die Auswertung des dreifachen Integrales verzichten.

26. Die Methode der Fehlerausgleichung nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate.

a) Ableitung und Auflösung der Gaußschen Normalgleichungen für lineare Beobachtungsfunktionen mit zwei oder drei Unbekannten.

1. Schon bei der analytischen Darstellung einer gegebenen Verteilung von beliebiger Form wurden wir in § 17c auf die spezielle Aufgabe hingeführt, für die zunächst nur ihrer allgemeinen Form nach bekannte Funktion $z = a_0 + a_1 x + \ldots a_{s-1} x^{s-1}$ gewissermaßen „Hauptwerte" der s Konstanten $a_0, a_1 \ldots a_{s-1}$ aus einem Bereich von Möglichkeiten ausfindig zu machen, bei deren Einsetzung die für die Beobachtungsabszissen $x_1, x_2 \ldots x^n$ berechneten Größen z den tatsächlich beobachteten, vom Zufall beeinflußten Funktionswerten z_1 bis z_n ähnlich gegenüberstehen, wie sich der „Hauptwert" im bisherigen Fechnerschen Sinne bei der wiederholten direkten Beobachtung einer einzelnen Größe a zu den einzelnen zufällig schwankenden Messungen $a_1 \ldots a_n$ verhält. Damit eine solche Unterscheidung zwischen dem berechneten idealen z und dem tatsächlich beobachteten möglich sei, ist natürlich vorausgesetzt, daß die Zahl n der Beobachtungen diejenige der s Unbekannten mehr oder weniger übertreffe, während für den Fall $s = n$ die Konstanten aus den Beobachtungsgleichungen eindeutig berechnet werden könnten, so daß jedem x das hierbei beobachtete z auch durch die hypostasierte Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$ wie eine nur einmal gemessene Größe eindeutig zugeordnet wäre. Auch bei allen übrigen Formen dieser Funktion $\mathfrak{V}(x)$, die man auf ihre Übereinstimmung mit einem beobachteten K.-G. prüfen kann, kehrte dann bezüglich der passenden Wahl der Parameter das nämliche Problem dieser sog. „Ausgleichung" wieder. Doch hat diese Aufgabe natürlich auch in der psychophysischen Praxis eine ganz allgemeine Bedeutung, die über den mehr formalen Spezialfall der konkreten Aufstellung einer Verteilungsfunktion beliebig weit in die materiale Ableitung der psychologischen Gesetzmäßigkeiten selbst hineinreicht. Denn auch bei diesen wird ebenso wie bei den naturwissenschaftlichen Gesetzen häufig eine variable Größe beobachtet, die nach einer ihrer allgemeinen Form nach genügend bekannten Funktion von mehreren hypothetischen Konstanten

1) Die Korrektur, die an dieser Berechnung wegen der stetigen Verteilung noch vorgenommen werden kann, gibt G. F. Lipps, Theorie der Kollektivgegenstände, 1902, S. 197 ff., wobei er von seinen speziellen Formeln für die unstetigen K.-G. ausgeht.

abhängt, die bei der Verfügbarkeit „überschüssiger" Beobachtungen (d. h. bei $n > s$) durch Ausgleichung berechnet werden können. Das allgemeine Prinzip dieser beliebig weit anwendbaren Methode gehört aber natürlich in die kollektivmaßtheoretischen Vorbetrachtungen, wie freilich auch die tatsächlichen Anwendungen derselben in unserer Disziplin bisher fast sämtlich ebenfalls nur der Konkretisierung von Verteilungsfunktionen gedient haben.

Um nunmehr mit den gewöhnlichen Symbolen möglichst konkret weiter zu operieren, nehmen wir an, x, y, z seien die unbekannten Konstanten. Über diese Dreizahl werden wir nämlich in unserer Praxis kaum jemals hinausgeführt werden. Sie sind dann in der hypostasierten Funktion, über deren allgemeine Form man hierbei natürlich durch irgend welche Vorbetrachtungen ins klare gekommen sein muß, mit den von Beobachtung zu Beobachtung variablen, aber jeweils bekannten Größen a, b, c usw. verbunden, die somit in den n Beobachtungen das System a_i, b_i, $c_i \ldots (i = 1 \text{ bis } n)$ bilden. In § 17c waren dies eben die Potenzen der (bekannten) Beobachtungsabszisse x_i^0, x_i^1, $x_i^2 \ldots x_i^{s-1}$. Die unter den n verschiedenen Bedingungen beobachtete Abhängige (also das z von damals) wird in diesem Zusammenhange meistens als l eingeführt, und so ergibt sich als Darstellung der beobachteten Abhängigkeitsbeziehung ein System von Gleichungen

$$l_i = f(x, y, z, a_i, b_i, c_i), \qquad [159]$$

die man gewöhnlich als Beobachtungsgleichungen (B.-Gl.) bezeichnet. Denkt man sich nun für x, y, z bestimmte Werte gewonnen, so können für die n verschiedenen Bedingungen bzw. Bedingungsgruppen a_i, b_i, c_i jene oben als „Hauptwerte" bezeichneten Größen l_i' berechnet werden, die bei $n > s$ voneinander unabhängigen, vom Zufall beeinflußten Beobachtungen mit den l_i im allgemeinen nicht übereinstimmen, sondern Abweichungen oder eben „Fehler"

$$v_i = f(x, y, z, a_i, b_i, c_i) - l_i \qquad [160]$$

übriglassen müssen, die positiv oder negativ sein können.

2. Zur Ermittlung dieser Größen x, y, z kann nun eine direkte Bestimmung von Mittelwerten, z. B. von arithmetischen Mitteln x(𝔄), y(𝔄) usw. nicht in Frage kommen, weil die verschiedenen beobachteten l_i allen drei Unbekannten zugleich erst durch [159] zugeordnet sind. Man kann aber wenigstens x, y, z so zu bestimmen suchen, daß unter Voraussetzung der angesetzten Funktion ähnliche Eigentümlichkeiten des Systemes der Fehler v_i [160] sich ergeben. Denn dieses ändert sich mit der Variation von x, y, z ganz analog, wie das System der $v = a - x$ einer einzigen Beobachtungsgröße von der Wahl des Ausgangswertes a abhängig ist. Nur sind hier natürlich immer so viele Variationsrichtungen zu berücksichtigen, als es Unbekannte gibt. Zu einer solchen indirekten Bestimmung der entscheidenden Hauptwerte x, y, z empfiehlt sich aber nun vor allem die schon oben § 25,6 bei mehrfachen Messungen einer einzelnen Größe hervorgehobene Eigenschaft des Fehlersystemes, die bei der Beziehung der Abweichungen auf das arithmetische Mittel 𝔄 als Ausgangswert resultierte, daß nämlich das mittlere Fehlerquadrat hierbei den kleinsten Betrag annimmt, den es bei Variation des Ausgangswertes überhaupt erlangen

kann. Denn es führt wenigstens für den Fall, daß die vorausgesetzte Funktion in allen Unbekannten linear ist, daß also das System der B.-Gl. [159] die Form

$$l_i = a_i x + b_i y + c_i z \qquad [161]$$

und das System der Fehlergleichungen die Form

$$v_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i \qquad [161a]$$

annimmt, sogleich zu bequemen Rechenvorschriften für die Unbekannten x, y, z. Dies ist aber eben das Prinzip der sogen. „Methode der kleinsten Quadrate“, die Gauß zunächst im Anschluß an das einfache E.-G., dann aber auch unabhängig hiervon in dieser allgemeinen Weise begründete: Man suche x, y und z so zu bestimmen, daß das mittlere Fehlerquadrat der in Gl. [160] definierten Fehler v_i

$$M^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \cdots v_n^2}{n}$$

nach allen drei möglichen Variationsrichtungen der Abstufung des x, y oder z ein Minimum darstellt. Die so gefundenen Werte haben also dann innerhalb der sämtlichen Möglichkeiten, aus denen sich andere Fehlersysteme ergeben würden, eine analoge Stellung, wie das arithmetische Mittel einer einzelnen Beobachtungsgröße.

Aus der soeben formulierten Bedingung für M^2 ergeben sich ohne weiteres die sogen. Gaußschen „Normalgleichungen“ für die „Ausgleichungen“ nach dieser Methode. Es wurde soeben zunächst festgesetzt, daß

$$\begin{aligned}
\frac{\delta M^2}{\delta x} &= \frac{\delta \alpha (v_1^2 + v_2^2 + \cdots v_n^2)}{\delta x} = \frac{\delta \alpha \Sigma v_i^2}{\delta x} = 0 \\
\frac{\delta M^2}{\delta y} &= \frac{\delta \alpha \Sigma v_i^2}{\delta y} = 0 \\
\frac{\delta M^2}{d z} &= \frac{\delta \alpha \Sigma v_i^2}{\delta z} = 0
\end{aligned} \qquad [162]$$

sein soll, wenn $\alpha = \frac{1}{n}$ gesetzt wird. Das System [162] umfaßt also so viele Gleichungen, als Unbekannte zu bestimmen sind. Läßt man in allen Gliedern den Faktor 2 und α weg, so wird hieraus

$$\begin{aligned}
0 &= v_1 \frac{\delta v_1}{\delta x} + v_2 \frac{\delta v_2}{\delta x} + \cdots v_n \frac{\delta v_n}{\delta x} \\
0 &= v_1 \frac{\delta v_1}{\delta y} + v_2 \frac{\delta v_2}{\delta y} + \cdots v_n \frac{\delta v_n}{\delta y} \\
0 &= v_1 \frac{\delta v_1}{\delta z} + v_2 \frac{\delta v_2}{\delta z} + \cdots v_n \frac{\delta v_n}{\delta z}.
\end{aligned} \qquad [163]$$

Setzt man nun die v_i aus [160] bzw. [161a] ein, so wird

$$\frac{\delta v_i}{\delta x} = a_i \qquad \frac{\delta v_i}{\delta y} = b_i \qquad \frac{\delta v_i}{\delta z} = c_i\,,$$

und das System [163] geht dadurch über in

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1 x + b_1 y + c_1 z - l_1)\, a_1 + \cdots (a_n x + b_n y + c_n z - l_n)\, a_n \\ 0 &= (a_1 x + b_1 y + c_1 z - l_1)\, b_1 + \cdots\cdots \\ 0 &= (a_1 x + b_1 y + c_1 z - l_1)\, c_1 + \cdots\cdots \end{aligned} \qquad [164]$$

Multipliziert man hierin aus und bezeichnet die Summen, welche die Koeffizienten der x, y, z bilden, mit dem Gaußschen Summensymbol, wonach

$$\begin{aligned} [aa] &= a_1\, a_1 + a_2\, a_2 + \cdots a_n\, a_n = \Sigma a_i\, a_i \\ [ab] &= a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + \cdots a_n\, b_n = \Sigma a_i\, b_i \end{aligned} \qquad [165]$$

usw.,

so ergibt sich schließlich die geläufige Endform der Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} [aa]\, x + [ab]\, y + [ac]\, z &= [al] \\ [ab]\, x + [bb]\, y + [bc]\, z &= [bl] \\ [ac]\, x + [bc]\, y + [cc]\, z &= [cl]\,. \end{aligned} \qquad [166]$$

Hieraus sind dann x, y, und z nach Einsetzung der gegebenen Werte a_i, b_i, c_i zahlenmäßig zu berechnen.

3. Für die praktische Lösung eines solchen Systems linearer Gleichungen durch sukzessive Reduktion der Unbekannten und für die Rechnungskontrollen ist natürlich im allgemeinen auf die fachmännischen Darstellungen zu verweisen.[1]) Da es jedoch einer wünschenswerten größeren Verbreitung der Anwendung dieser Methode in der Psychophysik dienlich sein dürfte, die fertige Lösung für mindestens zwei oder drei Unbekannte schnell zur Hand zu haben, so gebe ich sie hier für die beiden, unten in § 31a und b erforderlichen Fälle mit 2 und 3 Unbekannten, wobei also im ersteren Falle einfach $c = 0$ zu setzen ist. Bei 2 Unbekannten x und y ist alles symmetrisch:

$$x = \frac{A}{N}\,, \quad y = \frac{B}{N}$$

$$\begin{aligned} A &= [al]\,[bb] - [ab]\,[bl] \\ B &= [bl]\,[aa] - [ab]\,[al] \\ N &= [aa]\,[bb] - [ab]^2\,. \end{aligned} \qquad [167]$$

Bei drei Unbekannten x, y, z ergibt sich durch sukzessive Reduktion, die z. B. zuerst z, dann y und endlich x finden läßt:

$$z = \frac{NC - BD}{NE - D^2} \qquad [168]$$

$$\begin{aligned} N &= [aa]\,[bb] - [ab]^2 \text{ wie vorhin} \\ B &= [aa]\,[bl] - [ab]\,[al] \text{ wie vorhin} \\ C &= [aa]\,[cl] - [ac]\,[al] \\ D &= [aa]\,[bc] - [ac]\,[ab] \\ E &= [aa]\,[cc] - [ac]^2 \end{aligned}$$

1) Bruns, Grundlinien des wissensch. Rechnens 1903, S. 153f. — Czuber, a. a. O., S. 308ff.

$$y = \frac{B - z \cdot D}{N} \tag{169}$$

$$x = \frac{[al] - [ab]\,y - [ac]\,z}{[aa]}. \tag{170}$$

Auch von den Kontrollen der Rechnung sei hier wenigstens die einfachste und selbstverständlichste erwähnt, daß man die so gefundenen Werte für x, y und z in das System der Gleichungen [164] einsetzt und zusieht, ob sich die Glieder der dort rechts stehenden Summen wirklich zu Null aufheben.

Das System der „Beobachtungsgleichungen“ [159] bzw. [161] muß natürlich im ganzen unverändert bleiben, wenn die Unbekannten eindeutig dadurch bestimmt sein sollen. Es geht also insbesondere nicht an, zur bloßen rechnerischen Vereinfachung, z. B. zur Beseitigung von Brüchen, die einzelnen Beobachtungsgleichungen mit verschiedenen Faktoren zu multiplizieren, wie man es bei jedem System von n Gleichungen für n Unbekannte ungehindert tun könnte. Denn die Resultate der Normalgleichung würden durch die Hinzufügung solcher verschiedener Faktoren in den einzelnen Gliedern der Summen [aa] usw. natürlich deshalb verändert, weil sich diese in den Ausdrücken [167] bis [170] für x, y und z nicht wieder herausheben. Es ist also höchstens zulässig, daß sämtliche n Beobachtungsgleichungen mit dem nämlichen Faktor multipliziert werden, wodurch die Endformeln unverändert bleiben.

4. Sind nun die wahrscheinlichsten Werte x, y, z selbst gefunden, so lassen sich durch ihre Einsetzung in [160], bzw. in [161a], auch die wahrscheinlichsten Fehler v_i bestimmen, deren mittleres Fehlerquadrat

$$M = \sqrt{\frac{v_1{}^2 + v_2{}^2 + \cdots v_n{}^2}{n}},$$

das hierbei also kleiner ist als bei irgend einem anderen x, y oder z, wieder als vergleichbares Streuungsmaß der Untersuchung betrachtet werden kann.[1]) Unter der speziellen Voraussetzung des E.-G. aber läßt es dann weiterhin auch wieder das Präzisionsmaß $h = \frac{1}{M\sqrt{2}}$ angeben (vgl. S. 108). Auch kann man die Abhängigkeit der übrig bleibenden Widersprüche von der in a_i, b_i usw. ausgedrückten Abstufung der Versuchsbedingungen in Kurvenform dar-

1) Im nächsten Paragraphen (§ 27 b,1) wird übrigens zur Sprache kommen, daß das am allgemeinsten vergleichbare, sogen. „wahre“ Streuungsmaß M nicht der Quadratwurzel aller n verwendeten Beobachtungen überhaupt, sondern nur derjenigen der überschüssigen umgekehrt proportional zu denken ist. Hiernach müßte also in obiger Formel für M der Nenner n unter dem Wurzelzeichen durch n — m ersetzt werden, wenn m die Zahl der zu bestimmenden Unbekannten, hier also 3, und somit n — m die Zahl der überschüssigen Beobachtungsgleichungen bedeutet. (Vgl. Weinstein, a. a. O. S. 97 f.) Es wäre also dann nach der Berechnung von x, y und z das vergleichbarste Streuungsmaß

$$M = \sqrt{\frac{v_1{}^2 + v_2{}^2 + \cdots v_n{}^2}{n - 3}}.$$

stellen.[1] Bei wirklich zufälligen Fehlern ist auch hier zu erwarten, daß positive und negative Fehler in zufälliger Reihenfolge abwechseln. Ein ruhigerer Verlauf der Fehler bei Ordnung der B.-Gl. nach a_i usw., insbesondere das Fehlen von Vorzeichenwechseln überhaupt, weist dagegen gewöhnlich darauf hin, daß die Widersprüche v_i nicht rein zufälliger Natur sind, sondern auf einem einseitig wirkenden Fehler im Ansatz [159] der Funktion $f(x, y, z)$ selbst beruhen, die wir bisher als richtig voraussetzten. Dabei werden natürlich auf dem einseitigen Hauptzug der Fehlerkurve trotzdem noch kleinere Oszillationen aufgesetzt sein, die auf wirklich nur zufällige Schwankungen hinweisen. Bei richtiger Auswahl der Funktion $f(x, y, z)$ müßten aber eben diese Oszillationen der v_i die Nulllinie selbst mehrfach durchkreuzen, und mit zunehmender Präzision der Beobachtungen gegen diese konvergieren. Nun läßt sich freilich nicht direkt angeben, wie die Widersprüche v_i im einzelnen bei einer Verbesserung der Funktion ausfallen würden, da die übrigbleibenden v_i zunächst einmal mit den unter der Voraussetzung dieser Funktion berechneten x, y, z gewonnen sind. Daher kann man von hier aus nicht anders weiter kommen, als daß man nunmehr zunächst einmal die zuerst ausgeglichenen x, y, z neben den nicht angezweifelten Stücken der n Beobachtungsgleichungen als wahre Werte betrachtet und die zu $f(x, y, z)$ erforderlichen q Zusätze als neue Unbekannte aus q Normalgleichungen so bestimmt, daß das neue M' womöglich noch kleiner ausfällt, und daß die Vorzeichen der ihm zugrunde liegenden v'_i einen zufälligen Wechsel einschließen. Obgleich also die „Fehler der Funktion" von den zufälligen „Beobachtungsfehlern" scharf zu trennen sind, denen sie gewissermaßen als die einem bestimmten Beobachtungsobjekt viel konstanter zugeordneten „Begriffsfehler" gegenübertreten, so sind sie doch überall im konkreten Ansatze der Beob.-Gl. aufs engste mit ihnen verknüpft und können daher nur mit ihnen zugleich schrittweise durch die Methode der kleinsten Quadrate[2]) eliminiert werden, solange man über sie nichts weiter weiß, als daß der Ansatz durch sie verfälscht wird. Nach der Berechnung der neuen Zusätze kann man natürlich sachgemäß auch die x, y, z nochmals einem neuen Ausgleichungsverfahren mittels der n verbesserten Beobachtungsgleichungen von der Form $\underline{f}(x, y, z)$

---

1) Vgl. E. Mosch, Zur Methode der richtigen und falschen Fälle im Gebiete der Schallempfindungen, in Wundt, Phil. Stud. XIV, 1898, S. 491 ff.

2) Wenn man über das Zusammenwirken der zufälligen Beobachtungsfehler und des Ansatzes der Funktion $f(x, y, z)$ gar keine weiteren Voraussetzungen machen will, so sucht man bei Bestimmung der q neuen Bestandstücke der Funktion bisweilen aus den n Beobachtungsgleichungen $f(x, y, z)$ an Stelle des Systems [162] der Methode der kleinsten Quadrate eben nur überhaupt q Kombinationen, also „Normalgleichungen" im übertragenden Sinne, in einer solchen Form abzuleiten, daß selbst eine größere Anzahl von Unbekannten möglichst bequem berechnet werden kann. Dies leistet das sogen. Cauchysche Interpolationsverfahren, das z. B. von Mosch in der S. 134, A. 2 genannten Arbeit nach Bruns' Grundl. des wissensch. Rechnens S. 155 angewandt wurde. Man braucht sich hierzu bei $s = 3$ Unbekannten in den Gleichungen [164] die Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d. h. die $\frac{\delta v_i}{\delta t_{(t=x,y,z)}}$ nur durch 3 Reihen von je n beliebigen Koeffizienten A_i, B_i, C_i ersetzt zu denken, so daß

$$v_1 A_1 + v_2 A_2 \text{ usw.} = 0,$$
$$v_1 B_1 + v_2 B_2 \text{ usw.} = 0,$$
$$v_1 C_1 + v_2 C_2 \text{ usw.} = 0,$$

unterwerfen, um sie noch genauer zu berechnen, bis man die Fehlerkurve von systematischen Einflüssen hinreichend befreit zu haben glaubt.

b) Das allgemeine Schema für die Ausgleichung bei nicht linearen Beobachtungsfunktionen (das sogen. Korrektionsverfahren).

Die Funktionen, die im nächsten Kapitel nach diesem Ausgleichungsverfahren zu behandeln sein werden, sind jedoch teilweise nicht von so einfacher Form wie die lineare Gleichung [161], auf die sich die Ableitung der Gaußschen „Normalgleichungen" [166] allein bezieht. Hat man es also mit algebraischen Gleichungen höherer Ordnung oder, wie unten, mit transzendenten zu tun, so muß man aus diesen zunächst erst einmal lineare Gleichungen ableiten. Das einfachste und bei endlichen und stetigen Funktionen ganz allgemein anwendbare Hilfsmittel hierzu ist die teilweise Entwicklung der Taylorschen Reihe, d. h. des Satzes

$$f(x+h)-f(x)=h\cdot f_1(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f_2(x)+\cdots\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f_n(x+\alpha h), \qquad [171]$$

wobei $f_n(x)$ den n ten Differentialquotienten von $f(x)$ nach x bedeutet. Dieser Satz gilt bei Weglassung höherer Potenzen von h wenigstens mit einer gewissen Annäherung. Zur Erzielung von linearen Hilfsgleichungen hat man sich freilich auf die weitgehendste Abkürzung

$$f(x+h)-f(x)=h\cdot\frac{dy}{dx} \qquad [172]$$

zu beschränken. Bei unendlich kleinem h wäre dies natürlich einfach die Definitionsgleichung des Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

die aber auch bei kleinem endlichen h ebenfalls noch annäherungsweise zutrifft, und zwar um so besser, je weniger und je ruhiger sich $\frac{dy}{dx}$ mit x ändert, je kleiner also hiermit die höheren Ableitungen $f_2(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$ usw. ausfallen. (Am vollständigsten träfe dies natürlich bei einer geraden Linie zu, bei der alle höheren Ableitungen ganz verschwinden, die aber eben andererseits dieses Umweges für die Normalgleichungen gar nicht bedarf.)

---

und zwar beschränkt man sich bei dem Cauchyschen Verfahren auf die Koeffizienten $+1, 0, -1$. Allerdings kann von diesen Voraussetzungen aus das Resultat kein minimales Fehlerquadrat garantieren. Es können höchstens die zufälligen Abweichungen der $+1, 0$ und -1 von den zu jenem Erfolge wirklich befähigten a_i, b_i usw. wiederum eine Art von Kompensation einseitiger Verschiebungen herbeiführen. Man wird daher in allen Fällen, wo über die Fehler nichts Bestimmtes bekannt ist, besser von der Methode der kleinsten Quadrate Gebrauch machen, wie es auch bei unseren Ausgleichungen in § 31 geschehen wird. Beiläufig bemerkt, wäre bei dem Cauchyschen Verfahren natürlich wegen der prinzipiellen Freiheit hinsichtlich der A_i, usw. die bei der Methode der kleinsten Quadrate unzulässige Multiplikation einzelner B.-Gleichungen mit verschiedenen Faktoren nicht zu tadeln, falls sie eben nur bequemeres Rechnen erlaubt als die Beschränkung auf $+1, 0$ und -1.

In unseren Beobachtungsgleichungen kommen freilich meistens sogleich mehrere Unbekannte vor, so daß die Verallgemeinerung dieser Annäherung

$$f(x+\xi, y+\eta, z+\zeta \cdots) = f(x, y, z \cdots) + \xi \cdot \frac{\delta f}{\delta x} + \eta \frac{\delta f}{\delta y} + \xi \cdot \frac{\delta f}{\delta z} \cdots \quad [173]$$

notwendig wird, in der außer den endlichen kleinen Zuwüchsen ξ, η und ζ zu den x, y, z noch die partiellen Ableitungen der Funktion nach jeder der drei Unbekannten vorkommen, und die sich ganz entsprechend auch für beliebig viele Unbekannte entwickeln läßt.

Zur Anwendung auf unsern Fall ist daher zunächst erforderlich, daß man sich auf irgend eine Weise Annäherungswerte x_0, y_0, z_0 verschafft, die sich von den wahren Unbekannten x, y, z nur noch um die endlich kleinen unbekannten Fehler ξ, η, ζ entfernen, die positiv oder negativ sein können, so daß

$$\begin{aligned} x &= x_0 \pm \xi \\ y &= y_0 \pm \eta \\ z &= z_0 \pm \zeta \end{aligned} \quad [174]$$

zu setzen ist. Nach Einführung dieser Werte $x_0 + \xi$ usw. in die n Beobachtungsgleichungen für x, y, z wendet man Gleichung [173] an, d. h. man entwickelt die nunmehr von x_0, y_0, z_0 abhängig gedachte Funktion $f(x_0 \pm \xi, y_0 \pm \eta, z_0 \pm \zeta)$ nach Potenzen der ξ, η, ζ bis zur ersten Potenz und erlangt dadurch eben die zu Gl. [161] analogen n neuen B.-Gleichungen. Bei ihnen ist also die beobachtete Größe l_i als Funktion der wahren, durch die Unbekannten ξ, η, ζ verbesserten x, y, z gedacht, so daß sie in der Taylorschen Reihe an die Stelle von $f(x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta)$ tritt. Es ist daher

$$l_i - f_i(x_0, y_0, z_0) = \xi \cdot \frac{\delta f_i(x_0, y_0, z_0)}{\delta x_0} + \eta \cdot \frac{\delta f_i(x_0, y_0, z_0)}{\delta y_0} + \zeta \cdot \frac{\delta f_i(x_0, y_0, z_0)}{\delta z_0}. \quad [175]$$

In diesen n B.-Gleichungen ist nach Einsetzung der Annäherungswerte x_0, y_0, z_0 alles bekannt, bis auf die nunmehr wirklich nur in der ersten Potenz vorkommenden Größen ξ, η, ζ. Nach der Substitution

$$\begin{aligned} \lambda_i &= l_i - f_i(x_0, y_0, z_0) \\ a'_i &= \frac{\delta f_i(x_0, y_0, z_0)}{\delta x_0} \\ b'_i &= \frac{\delta f_i(x_0, y_0, z_0)}{\delta y_0} \\ c'_i &= \frac{\delta f_i(x_0, y_0, z_0)}{\delta z_0} \end{aligned} \quad [176]$$

für die Größen der l_i, a_i, b_i und c_i der Normalgleichungen [166] bzw. ihrer Auflösungen [167] bis [170] erhält man also ξ, η, ζ als positive oder negative Größen, woraus sich die wahrscheinlichsten x, y, z sogleich nach

[174] ergeben. Da aber hierbei die nur annähernd gültige Gleichung [173] verwendet wurde, so werden auch die endlich nach Einsetzung der x, y, z selbst übrigbleibenden Widersprüche v_i nur ein angenähertes Minimum ergeben. Bisweilen empfiehlt es sich daher, die so gewonnenen x, y, z als neue Annäherungen x'_0, y'_0, z'_0 aufzufassen und hiermit auch zur Berechnung passender ξ', η', ζ' das Glück von neuem zu versuchen, bis man mit dem resultierenden M zufrieden sein zu können glaubt. Die Einzelheiten der Anwendung dieses Näherungsverfahrens werden aus den Beispielen des nächsten Kapitels am besten zu ersehen ein.

Als eine allgemeine Regel zur Erzielung von Näherungswerten sei schon hier auf die mehrfache Berechnung der m Unbekannten aus je m Beobachtungsgleichungen hingewiesen. Bei $n \geqq pm$ B.-Gleichungen kann man dann schließlich ein Mittel aus p Einzelwerten jeder Größe gewinnen, z. B. bei $p = 3$ aus je drei $f_i(x, y, z)$ mit den kleinsten, mittleren und größten Werten eines der Koeffizienten, z. B. a_i. In § 31 wird insbesondere auch Fechners „Summationsverfahren" erwähnt werden. Doch kann die speziellere Kenntnis der Funktion, wie wir sehen werden, auch noch einfachere Näherungsmethoden an die Hand geben.

27. Die Unterscheidung der auszugleichenden Beobachtungen nach ihrem „Gewicht".

a) Die unmittelbare Ableitung der Gewichtsmodifikation der Ausgleichungsrechnung aus dem Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate.

1. Bei der soeben betrachteten Kombination mehrerer Beobachtungen l_i zur ausgleichenden Berechnung der Konstanten x, y, z darf häufig den einzelnen l_i nicht der nämliche Einfluß auf diese Bestimmung eingeräumt werden, der ihnen zugestanden wäre, wenn man einfach das mittlere Quadrat der von ihnen abhängigen v_i selbst zu einem Minimum machen würde. Man bestimmt in solchen Fällen die x, y, z vielmehr so, daß erst das Mittel der mit besonderen Faktoren p_i multiplizierten Fehlerquadrate, d. h.

$$M^2 = \frac{v_1^2 p_1 + v_2^2 p_2 \cdots + v^2 p_s}{p_1 + p_2 \cdots + p_s} \qquad [177]$$

ein Minimum wird. Diese Formel ist also eine ganz analoge, wie man sie nach dem allgemeinen Prinzip der Methode erhalten würde, wenn man statt jedes einzelnen l_i immer eine ganze Reihe von p_i unter sich numerisch gleichen Werten l_i beobachtet hätte. Denn die p_i haben ja in Formel [177] ganz die nämliche Funktion wie die absoluten Häufigkeitszahlen Z_i in den früheren Formeln für die repräsentativen Durchschnitte im Sinne des § 15. Wo man aber nun bei irgend einer dieser Durchschnittsberechnungen, also z. B. auch bei Ableitung des Hauptwertes $\mathfrak{A}$ selbst, die Einzelwerte nicht deshalb mit verschiedenen Verhältniszahlen p_i versieht, weil sie wirklich so oft in der nämlichen Weise beobachtet worden wären, sondern weil man ihnen aus anderen Gründen nicht den nämlichen Einfluß auf den Durchschnitt zukommen lassen will, da bezeichnet man diese Faktoren als „Gewichte", mit denen man die einzelnen Werte gewissermaßen wie numerische Qualitäten zur resultierenden Qualität des Durchschnittes mischt.

2. Bevor wir uns nun zu der speziellen Gewichtsmodifikation des vorhin beschriebenen Ausgleichungsverfahrens wenden, auf die es uns hier vor allem ankommt, sei hier zunächst noch kurz eine ganz elementare Verwendung des Gewichtsbegriffes erwähnt, die übrigens unter der Voraussetzung des Gaußschen Gesetzes auch in der Ableitung jener Gewichtsmodifikation der Methode der kleinsten Quadrate vorkommt[1]), nämlich die stufenweise Berechnung von höheren Generalmitteln $\mathfrak{A}$, M^2 usw. aus Partialmitteln $\mathfrak{A}_i$, $M_i{}^2$ ($i = 1$ bis s). Hierbei repräsentieren die letzteren ihrerseits bereits eine verschiedene Anzahl p_i tatsächlich gemachter Elementarbeobachtungen, die unter sich allerdings nicht mehr, wie in Absatz 1, gleichlautende, sondern beliebig verschiedene Zahlenwerte sind, aber dabei doch im Endresultat völlig gleichmäßig berücksichtigt werden sollen. In diesem Falle gilt offenbar der einfache Satz, daß das Generalmittel unter Berücksichtigung der „Gewichte" p_i aus den Partialmitteln ebenso gefunden wird, als ob man es unmittelbar aus den Elementarbeobachtungen berechnet hätte. Wenn also z. B

$$\mathfrak{A}_i = \frac{a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots a_{i,p_i}}{p_i},$$

so daß

$$\mathfrak{A}_i p_i = a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots a_{i,p_i},$$

so ist auch

$$\mathfrak{A} = \frac{\Sigma(a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots a_{i,p_i})}{\Sigma p_i} = \frac{\Sigma \mathfrak{A}_i p_i}{\Sigma p_i}. \qquad [178]$$

Ebenso gilt dann natürlich auch für M^2 ein ganz analoger Satz, der mit der Formel [177] bis auf die Ersetzung der dortigen $v_i{}^2$ durch die $M_i{}^2$, d. h. durch die partiellen „mittleren Fehler", völlig übereinstimmt, indem

$$M^2 = \frac{\Sigma M^2{}_i p_i}{\Sigma p_i}. \qquad [179]$$

Bei einer einfachen Durchschnittsberechnung haben diese Sätze allerdings höchstens als Rechnungskontrollen Bedeutung, da man natürlich einen Durchschnitt aus $n = \Sigma p_i$ unter sich gleichwertigen Beobachtungen stets am einfachsten aus diesen selbst finden wird, ohne überhaupt eine Gruppenbildung vorzunehmen. In der Methode der kleinsten Quadrate kann indessen wenigstens für die Berechnung der Unbekannten x, y, z von einem analogen Gewichtsverfahren Gebrauch gemacht werden, falls für die einzelnen Kombinationen a_i, b_i, c_i der systematisch variierten Unabhängigen der Beobachtungsgleichung [159] mehrere, und zwar für jedes a_i, b_i, c_i wiederum verschieden viele (p_i) Beobachtungen $l_{i,1}$, $l_{i,2} \cdots l_{i,p_i}$ vorliegen, denen man sämtlich den gleichen Einfluß auf die Ausgleichung zugestehen will. Denn da die mehrfach beobachtete Größe l nur in der ersten Potenz vorkommt, so bleibt es sich offenbar ganz gleich, ob man bei Bildung der Summenwerte für die Endformeln [166] für jede Elementarbeobachtung $l_{i,r}$

1) Vgl. z. B. Weinstein, a. a. O.

($r = 1$ bis p_i) einen besonderen Summande $n a_i^2$, b_i^2, $c_i^2 \cdots a_i l_{i,r}$, $b_i l_{i,r}$, $c_i l_{i,r}$ ansetzt, oder ob man zunächst das arithmetische Mittel der Beobachtungen $L_i = \frac{\Sigma l_{i,r}}{p_i}$ ableitet und dann für die Kombination a_i, b_i, c_i immer nur einen einzigen mit p_i multiplizierten Summanden $p_i a_i^2$, $p_i b_i^2$, usw.: $p_i a_i L_i = p_i a_i \frac{\Sigma l_{i,r}}{p_i}$ usw. ansetzt. Die p_i Beobachtungsgleichungen können somit durch die einzige mittlere Gleichung

$$L_i = \frac{\Sigma l_{i,r} (r = 1 \text{ bis } p_i)}{p_i} = a_i x + b_i y + c_i z \tag{180}$$

vom „Gewicht" p_i, und das System der früheren Normalgleichungen durch

$$\begin{aligned} [aap]\,x + [abp]\,y + [acp]\,z &= [alp] \\ [bap]\,x + [bbp]\,y + [bcp]\,z &= [blp] \\ \text{usw.} \end{aligned} \tag{181}$$

ersetzt werden, ohne daß die Resultate x, y, z der Ausgleichung sich ändern. Will man aber dann das mittlere Quadrat der Fehler bestimmen, die von den so berechneten l'_i übriggelassen werden, also

$$n \cdot M^2 = \Sigma[(l_i' - l_{i,1})^2 + (l_i' - l_{i,2})^2 + \cdots (l_i' - l_{i,p_i})^2], \tag{182}$$

so kann das arithmethische Mittel der Beobachtungen L_i nicht mehr erleichternd beigezogen werden, da die l in dem Ausdruck [182] in der zweiten Potenz vorkommen und daher $\Sigma(l_i' - L_i)^2 p_i$ etwas ganz anderes ergibt. Die den M_i der Gl. [179] entsprechenden Werte sind eben nur aus den Elementarfehlern $l_i' - l_{i,r}$ der Gl. [182] selbst abzuleiten.

3. Die Sachlage, welche die hier weiterhin vor allem wichtige Gewichtsmodifikation dieser Ausgleichungsmethode notwendig macht, besteht aber nun darin, daß den Elementarbeobachtungen l_i, von denen wir zunächst wieder nur eine einzige für jeden Wert der gegebenen Unabhängigen a_i usw. voraussetzen, nicht mehr die gleiche Bedeutung zuerkannt werden kann, sondern daß sich die Präzision, mit der man l_i beobachtet, mit diesen systematisch abgestuften Wertkombinationen a_i, b_i, c_i der Gleichung [159] in mehr oder weniger genau bekannter Weise ändert. Nehmen wir z. B. den später allein vorkommenden Fall an, daß der beobachtete Wert l_i nur von einer einzigen systematisch variierten Größe a_i und den gesuchten Konstanten x, y, z abhängig sei, d. h. daß $l_i = f(a_i, x, y, z)$, so setzen wir nunmehr weiterhin noch voraus, daß auch die „Präzision" der Beobachtung von l trotz möglichst gleicher kontrollierbarer Bedingungen eine bekannte Funktion jener gegebenen Variablen a_i bilde. Dabei bedeutet die „Präzision" wieder, wie bisher, die Reziproke zu einem Durchschnitt der Abweichungen der p_i-fach wiederholten Beobachtungen $l_{i,r}$ ($r = 1$ bis p_i) von irgend einem Hauptwerte, also vor allem von $L_i = \frac{\Sigma l_{i,r}}{p_i}$. Es ist für das Folgende allerdings über die spezielle Form der Verteilung dieser Einzelfälle $l_{i,r}$ gar keine weitere Voraussetzung notwendig, insbesondere sind die folgenden

Betrachtungen wieder ebenso wie alle unsere bisherigen Überlegungen über die Methode der kleinsten Quadrate, von der Annahme des einfachen E.-G. ganz unabhängig. Doch ist natürlich eine Differenzierung der Genauigkeit unserer Beobachtungen an den verschiedenen Stellen a_i nur dadurch möglich, daß man erstens überhaupt an die Möglichkeit einer mehrfachen Beobachtung der Größe l an dieser Stelle, also an eine ganze Mannigfaltigkeit $l_{i,r}$ denkt, und daß man dieser dabei zweitens nach irgend welchen Anhaltspunkten wenigstens ein bestimmtes „Streuungsmaß" als Funktion von a_i zuzuschreiben vermag, wie wir es schon immer vor allem in dem mittleren Fehler $M_i^2 = \frac{\Sigma(l_i - L_{ir})}{p_i}$ gefunden haben.

Die voraussetzungsloseste Methode, über die Veränderung dieses Wertes M_i bei Variation des a_i ins klare zu kommen, bleibt natürlich auch hier seine rein empirische Ermittlung durch eine vielfach wiederholte Beobachtung unter möglichst konstanten Versuchsbedingungen. Der äußere Prospekt dieses Verfahrens wäre also der nämliche, wie wir es im vorigen Absatz 2) voraussetzten, als es sich um die Ausgleichung einer Reihe mehrfacher Beobachtungen l_{ir} handelte. Nur waren eben dort diese l_{ir} an allen Stellen a_i als gleich „scharf" gedacht. Die Unbekannten x, y, z hätten also dort auch unmittelbar aus den Mittelwerten L_i ohne weiteren Gewichtszusatz ermittelt werden können, wenn die der Wiederholungszahl entsprechenden „Gewichte" $p_i = p$ für sämtliche a_i gleich groß gewesen wären, so daß man das System [181], wie S. 134 erwähnt, im ganzen mit p hätte dividieren dürfen. Ist aber das Streuungsmaß M_i^2 dieser p Wiederholungen jeder Beobachtung $f(a_i)$ ebenfalls von a_i abhängig, so müssen die einzelnen Mittelwerte L_i bei der Ermittlung der Unbekannten x, y, z eben trotz der gleichen Zahl p der Elementarbeobachtungen l_{ir} mit verschiedenen „Gewichten" in diesem neuen, hier erst zu entwickelnden Sinne in die Ausgleichung einbezogen werden, und ebenso muß dann bei der Berechnung des Ausgleichungskriteriums M^2 aus den übrig bleibenden Elementarfehlern $l_i' - l_{i,r}$, auf die man auch hier wenn möglich stets zurückgehen wird, jede Gruppe l_{ir} mit diesem besonderen Gewichten versehen werden.

Außer diesem rein empirischen Verfahren, das die Genauigkeit innerhalb der auszugleichenden Mannigfaltigkeit der Beobachtungen selbst zu differenzieren gestattet, ist natürlich auch wieder der Weg der empirischen Verallgemeinerung auf Grund früherer ähnlicher Versuchsreihen möglich. Hat man also einmal unter ganz ähnlichen Umständen einen gesetzmäßigen Einfluß der Stelle a_i auf die Präzision von l_i erkannt, so wird man in einer späteren Reihe von Beobachtungsgleichungen $f(a_i)$ auch vereinzelte Werte l_i immer nur so viel Vertrauen entgegenbringen, als es der speziellen Stelle der Funktion entspricht. Weiterhin läßt sich aber bisweilen auch wieder bereits a priori etwas über die Streuung aussagen, die man bei Beobachtungsgegenständen bestimmter Art für die einzelnen l_i zu erwarten hat. Dieser Fall wird uns sogar gerade in dem Hauptbeispiele begegnen, in welchem diese Gewichtsmodifikation in unseren psychophysischen Resultaten vorkommt, bei der Ausgleichung der Verteilungsfunktion beobachteter relativer Häufigkeiten. Doch werden wir auch in diesem

Falle die Verbindung des theoretischen Wahrscheinlichkeitskalküls mit der empirischen K.-L. als den sichersten Weg erkennen. Jedenfalls ist es aber wieder besonders wertvoll, daß jene apriorischen Überlegungen hier speziell über den „mittleren Fehler" M, den wir als Streuungsmaß benutzen, allgemeinere Erwartungen ermöglichen. Auch abgesehen davon erscheint es aber wohl nur konsequent, wenn man in einem Verfahren, das, wie die Methode der kleinsten Quadrate, durchaus auf die generelle Bedeutung des mittleren Fehlers als eines von speziellen Verteilungsgesetzen unabhängigen Streuungsmaßes gegründet ist, dieses Kriterium der Genauigkeit nicht nur da anwendet, wo es sich um die Einschätzung der übrigbleibenden Fehler v_i innerhalb der gesamten Mannigfaltigkeit der Beobachtungen $f(a_1)$, $f(a_2) \cdots f(a_s)$, handelt, sondern schon da, wo zunächst einmal die mögliche Präzision an den einzelnen Stellen a_i überhaupt einzuschätzen ist.

Erweisen sich also die Beobachtungen der Funktion aus irgend einem Grunde für die einzelnen l_i nicht als gleich genau, so wird man auch die Konstanten x, y, z der Funktion $f(a_i, x, y, z)$ aus den a_i und l_i nicht in der Weise ableiten, daß man sämtliche übrigbleibenden Fehler $v_i = l_i' - f_i$ völlig gleichmäßig möglichst klein zu machen sucht. Bei denjenigen Werten von a_i, bei denen eine gegebene Beobachtung l_i wegen ihrer größeren Streuung durchschnittlich größere Abweichungen von irgend einer „Norm" zeigen muß, gleichgültig, wie man dieselbe im einzelnen ansetzen mag, wird man vielmehr auch einen größeren übrigbleibenden Fehler v_i mit in Kauf nehmen, als an den Stellen, an denen nach den sonstigen Erfahrungen und Überlegungen nur ganz geringe Abweichungen der tatsächlichen Beobachtung l_i von dem Werte l_i', den man für a_i mittels der versuchsweise angesetzten Funktion $f(a_i, x, y, z)$ bestimmt hat, auf Rechnung des Zufalles gesetzt werden dürfen. Denn man hat ja doch bei jeder solchen Ausgleichung auch bei gleichem Gewichte der l_i ganz allgemein die Funktion $f(a_i, b_i, \cdots x, y \cdots)$ so zu wählen, daß sich die übrigbleibenden Fehler auch ihrem absoluten Werte nach möglichst innerhalb der Grenzen halten, denen man empirisch oder a priori eine hinreichende Wahrscheinlichkeit zugestehen kann. Wenn also auch einzelne Beobachtungen bei einem bestimmten System von Werten x, y, z einmal relativ sehr fehlerhaft erscheinen dürfen, im Mittel sollen sie den empirischen, durch Wiederholung der Beobachtungen l_i nachweisbaren Fehlerrepräsentanten, genau genommen, nicht überschreiten. Bei einer verschiedenen Genauigkeit an den einzelnen Stellen wird man aber dann offenbar auch überall einen verschiedenen Spielraum zu gewähren haben. Auch hier kann also, so wenig wie bei gleicher Präzision an allen Stellen, über den einzelnen, als zufällig betrachteten Fehler als solchen aus dem Streuungsmaß etwas gefolgert werden. Daher wird auch an den ungenaueren Stellen tatsächlich oft eine kleinere Abweichung von der bei einer tatsächlichen Wiederholung feststellbaren Norm vorliegen als an anderen Stellen, so daß diese Einzelbeobachtung, um die Funktion an ihrer Stelle a_i nahe genug an diese Norm heranzuziehen, in diesem speziellen Falle eigentlich gerade einmal mit einem besonders hohen Gewicht eingerechnet werden müßte. Aber durchschnittlich kommt man eben doch der Norm des gesamten Verlaufes der Funktion, wenigstens bei der Berücksichtigung einer hinreichenden Zahl von Stellen a_i, dann am nächsten, wenn man überall den von bestimmten Werten x, y, z zu erwartenden Fehler v_i nur im Verhältnis zu der normalen Streuung an dieser Stelle a_i auffaßt, d. h. also ihn bei dem weiteren Kalkül überhaupt nur noch als $\frac{v_i}{M_i}$ in Betracht zieht. Somit läßt sich also auch das Prinzip dieser Gewichtsmodifikation des Ausgleichungsverfahrens kurz in der Weise formulieren, daß man die übrigbleibenden Fehler v_i der Funktion von vorne herein nicht in den gleichen Maßeinheiten, sondern gemessen in den Einheiten des Streuungsmaßes M_i ihrer Stelle a_i in Anschlag bringt, wobei sie eben als $\frac{v_1}{M_1}, \frac{v_2}{M_2} \cdots \frac{v_n}{M_n}$ erscheinen. Dies heißt aber nun keineswegs etwa auch schon so viel, daß man $\frac{1}{M_i}$ als das „Gewicht" der einzelnen l_i in der Ausgleichung betrachten würde. Dieser Wert ergibt sich vielmehr erst aus dem speziellen Ausgleichungsmodus, bei dem man eben nicht die Summe der einfachen Fehler selbst, sondern ihrer Quadrate durch geeignete Bestimmung der x, y, z zu einem Minimum zu machen sucht, d. h. es soll, unter Berücksichtigung unserer neuen Maßeinheiten der übrigbleibenden Fehler v_i,

$$\frac{v_1^2}{M_1^2} + \frac{v_2^2}{M_2^2} + \cdots \frac{v_n^2}{M_n^2} \text{ ein Minimum}$$

werden. Die Bedingung hierfür ist aber

$$\frac{\delta \frac{\Sigma v_i^2}{M_i^2}}{\delta x} = \frac{\delta \frac{\Sigma v_i^2}{M_i^2}}{\delta y} = \frac{\delta \frac{\Sigma v_i^2}{M_i^2}}{\delta y} = 0. \qquad [183]$$

Nun sind die Streuungsmaße M_i von der Wahl der Konstanten x, y, z völlig unabhängig, da sie ja gewöhnlich entweder aus einem ganz anderen Beobachtungsmaterial verallgemeinert oder aus apriorischen Überlegungen entnommen sind und selbst in dem Falle, wo das neue Material selbst in der oben genannten Weise zu ihrer rein immanenten Bestimmung ausreicht, zunächst ganz unabhängig von der Ausgleichung berechnet werden müssen. Somit gehen also die obigen Gleichungen wie bei [163] einfach über in

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{M_1^2} \cdot v_1 \cdot \frac{\delta v_1}{\delta x} + \frac{1}{M_2^2} v_2 \frac{\delta v_2}{\delta x} + \cdots \frac{1}{M_n^2} v_n \frac{\delta v_n}{\delta x} = 0 \\
&\frac{1}{M_1^2}\, v_1\, \frac{\delta v_1}{\delta y} + \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \\
&\frac{1}{M_1^2}\, v_1\, \frac{\delta v_1}{\delta z} + \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad = 0. \qquad [184]
\end{aligned}$$

Nach Einsetzung der v_i aus den linearen Gleichungen [161 a] unterscheiden sich also die neuen Normalgleichungen von den früheren nur durch die Faktoren $\frac{1}{M_i^2}$, indem

$$0 = (a_1 x + b_1 y + c_1 z - l_1)\, a_1 \frac{1}{M_1{}^2} + \cdots (a_n x + b_n y + c_n z - l_n)\, a_n \frac{1}{M_n{}^2}$$

usw.

Nach der Gaußschen Schreibweise lauten diese also schließlich, wenn $\frac{1}{M^2}$ im Summenzeichen allgemein verwendet wird,

$$\left[aa \frac{1}{M^2}\right] x + \left[ab \frac{1}{M^2}\right] y + \left[ac \frac{1}{M^2}\right] z = \left[al \frac{1}{M^2}\right], \qquad [185]$$

usw.

d. h. es hat $\frac{1}{M^2}$ hierin völlig die Stellung des p, das wir im vorigen Absatze als „Gewicht" in dem elementaren Sinne kennen lernten, daß es der Zahl gleichwertiger Beobachtungen entsprach, die wenigstens bei der Berechnung von x, y, z von ihrem Mittel L_i repräsentiert werden konnten. Nicht $\frac{1}{M_i}$, sondern $\frac{1}{M_i{}^2}$ hat also auch als das „Gewicht" der Einzelbeobachtung l_i zu gelten, insofern sie aus einer Mannigfaltigkeit mit dem Streuungsmaß M_i entnommen erscheint.

Für die Auflösungen dieser Gleichungen sind dann ebenso wie bei [166] ohne weiteres wieder die Formeln [167] bis [170] zu verwenden, nachdem man nur in allen Klammern den Faktor p bzw. $\frac{1}{M^2}$ hinzugefügt hat.

Setzt man nun für die Mannigfaltigkeit der l_{ir} an jeder einzelnen Stelle a_i das Gaußsche Gesetz voraus, so sind die Verhältniszahlen des Gewichtes $\frac{1}{M_i{}^2}$ natürlich wegen [117] auch durch

$$\frac{1}{2} p_i = \frac{1}{2 M_i{}^2} = h_i{}^2,$$

zu ersetzen, da ja alle Beobachtungsgleichungen mit dem nämlichen Faktor $\frac{1}{2}$ multipliziert werden dürfen, d. h. die Gewichte sind in diesem Falle dem Quadrate des Präzisionsmaßes h_i der Beobachtungen an der Stelle a_i direkt proportional, ein Satz, der sich natürlich, allerdings ohne etwas Neues zu sagen, verallgemeinern läßt, wenn man das Präzisionsmaß h unabhängig vom einfachen E.-G. einfach durch die Gleichung $h = \frac{1}{M\sqrt{2}}$ definiert. Beim Gaußschen Gesetz stehen aber nach der Formel [118] und [121] auch die beiden anderen charakteristischen Fehler D und P zu M in einem konstanten Verhältnis, so daß die vergleichbaren Gewichte hier auch noch durch $\frac{1}{D^2}$ oder $\frac{1}{P^2}$ zu ersetzen sind. Außerdem können dann unter der nämlichen Voraussetzung die Einflüsse, die nach § 20 bzw. Formel [95a] von gewissen mit a_i zusammenhängenden Konstanten des Beobachtungsgegenstandes auf die Präzision h ausgeübt werden, ohne weiteres auch auf die Quadratwurzel des Gewichtes bei Anwendung der Methode der kleinsten

Quadrate übertragen werden. Doch wollen wir diese speziellen Einflüsse, auf denen insbesondere auch die konkrete Bedeutung dieses Paragraphen für unsere psychophysischen Probleme beruht, weiterhin ebenfalls völlig unabhängig vom einfachen E.-G. ins Auge fassen.

b) Die wichtigsten Anwendungen des Gewichtskalküles in der Psychophysik.

1. Der Einfluß der Versuchszahl.

1. Daß auch in den Anwendungen der Ausgleichung nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate auf psychophysische Probleme die eben entwickelte Gewichtsmodifikation am Platze ist, wurde von H. Bruns bereits in seiner grundlegenden Abhandlung „Über die Ausgleichung statistischer Zählungen in der Psychophysik“ [1]) hervorgehoben. In der Praxis hat jedoch erst F. M. Urban in seiner schon erwähnten Abhandlung [2]) hiervon systematisch Gebrauch gemacht. Dabei hat er aber insbesondere auch in einem sehr homogenen und sorgfältig fraktionierten Versuchsmaterial über die nunmehr schon oft erwähnten Urteilsfunktionen $F_g(x)$, $F_u(x)$ und $F_k(x)$ von insgesamt 17850 auf 7 Versuchspersonen verteilten Einzelvergleichungen gehobener Gewichte die uns hier besonders erwünschte Gelegenheit gegeben, auch einmal rein empirisch die theoretischen Überlegungen nachzuprüfen, die auch bei diesen Urteilsfunktionen von Anfang an von seiten der Konstanten des Beobachtungsgegenstandes einen ganz bestimmten Einfluß auf die Präzision erwarten ließen. Da hier relative Häufigkeiten $l_i = z_i = F(x_i)$ beobachtet sind, so ist ja die Mannigfaltigkeit, die man bei wiederholter Beobachtung der Werte z_i bei dem gegebenen Werte der Unabhängigen a_i erhalten würde, gerade jener K.-G., für welchen die prinzipiellen apriorischen Erörterungen in § 20 aus den Sätzen der Kombinatorik ganz allgemein bestimmte Erwartungen ableiten ließen. Unter den speziellen Voraussetzungen, unter denen Laplace von dem einfachen Bernoullischen Theorem zum einfachen E.-G. fortschritt, könnte als Präzision der Beobachtung einer bestimmten r. H. $z_i = \frac{Z_i}{m}$ nach [95a] der Wert

$$h_i = \sqrt{\frac{m}{2 z_i (1 - z_i)}},$$

d. h. also als „Gewicht“ bei den Ausgleichungen der Funktion $F(a_i, x, y)$, die uns in § 31 weiter beschäftigen werden, der Wert

$$h_i^2 = \frac{m}{2 z_i (1 - z_i)} \qquad [186]$$

angenommen werden. Nach unserer Ableitung des Gewichtskalküles handelt es sich aber ja hierbei immer nur um den mittleren Fehler M_i, nicht aber auch zugleich um die spezielle Form der Streuung der einzelnen Möglichkeiten

1) In Wundts Phil. Stud. IX, 1894, S. 1 ff.

2) „Die psychophysischen Maßmethoden“ usw., Archiv f. d. ges. Psychologie XV, S. 256, 1909.

$\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots \frac{m}{m}$, die bei der kombinatorischen Ableitung einer bestimmten Wahrscheinlichkeit alle ins Auge gefaßt werden und deren Verteilung erst bei sehr hohem, in der Psychophysik niemals erreichtem m dem einfachen E.-G. folgt, während sie bei kleinem m viel unregelmäßiger ausfällt. Daher genügen zur Ableitung des nämlichen Gewichtes der beobachteten r. H. z_i auch schon die elementareren Überlegungen von Bernoulli bezüglich der Abhängigkeit des mittleren Fehlers von der mittleren (wahren) relativen Häufigkeit $\frac{Z_i}{m}$ für ein beliebig kleines m. Denn, wie schon in § 21 erwähnt wurde, ist das mittlere Quadrat der Abweichungen aller relativen Häufigkeiten, die bei einer unbegrenzten Fortsetzung von Gruppen zu je m Gliedern zu beobachten sind, von ihrem arithmetischen Mittel z_i ganz allgemein

$$M_i^2 = \frac{z_i(1 - z_i)}{m}, \qquad [187]$$

woraus sich das Gewicht somit ebenso wie vorhin als

$$\frac{1}{M_i^2} = \frac{m}{z_i(1 - z_i)} \qquad [188]$$

ergibt.

2. Hierin ist also zunächst eine direkte Proportionalität des Gewichtes zu der Anzahl m sämtlicher Fälle enthalten, die zur Beobachtung einer relativen H. stets vorausgesetzt ist und bei jenen Urteilsfunktionen in der Zahl m_i der Darbietungen einer bestimmten Stufe des Vergleichsreizes x_i besteht. Diese Zahl ist somit hier bereits notwendig, um überhaupt eine einzige Beobachtung $l_i = \frac{Z_i}{m_i}$ zu konstituieren. Aber insofern schließlich alle Beobachtungsgrößen A_x, falls überhaupt ihre Wahrscheinlichkeit im Verlaufe zufälliger Schwankungen auf die Kombinatorik zurückgeführt werden soll, zu relativen H. in Analogie gesetzt werden müssen, hat man schließlich, unterstützt von der tatsächlichen Erfahrung, jenen Satz über die Abhängigkeit des mittleren Fehlers von der Zahl der Fälle, die bei einer r. H. schon in einer einzigen Beobachtung enthalten sind, zu einem Satze über seine Abhängigkeit von der Zahl n der Beobachtungen verallgemeinern können, wenn er aus diesen nach der Formel $M = \frac{\Sigma v_i^2}{n}$ berechnet wurde, wobei also jeder einzelne Beobachtungsfehler v_i in Wirklichkeit nur einen einzigen Fall darstellt. Denn man braucht sich ja nur jede einzelne dieser n Beobachtungen ihrem „Gewichte" nach als ein Äquivalent von je m Einzelfällen zu denken, dann entspricht der Variation von n diejenige eines Vielfachen ϱm solcher Einzelgruppen. Bei einer derartigen gleichmäßigen Fraktionierung von Beobachtungen über relative Häufigkeiten bleibt aber dann M^2 natürlich auch zu $\varrho m = n$ reziprok.

Außerdem erschien ja auch in Absatz 2 die Zahl p_i der Einzelbeobachtungen, die in einem Partialmittel M_i enthalten war, unmittelbar als „Gewicht" für die Ausgleichung der Konstanten x, y, z, falls die Beobachtungen sämtlich gleich scharf waren, so daß nunmehr auch alle Gewichtsunterschiede, die sich zwischen den einzelnen l_i auf Grund einer verschiedenen Präzision ergeben, wenigstens zunächst bei der Bestimmung der Unbekannten x, y, z einer verschiedenen Anzahl unter sich gleichwertiger Beobachtungen äquivalent erachtet werden können.

Dieser einfache Einfluß der Versuchszahl m auf das Gewicht der rel. H. kommt indessen in der Praxis deshalb weniger in Betracht[1]), weil man sich von ihm wenigstens überall da, wo die ausgleichende Berechnung der Konstanten für die Verteilungsfunktion innerhalb einer gegebenen Beobachtung $F_g(x_i)$, $F_u(x_i)$ oder $F_k(x_i)$ notwendig wird, einfach dadurch frei machen kann, daß man die Anzahl m, wie schon S. 41 dringend anempfohlen wurde, von vornherein gleich macht.

2. Der Einfluß der beobachteten relativen Häufigkeit.

1. In dem Ausdruck [188]: $\frac{m}{z_i(1-z_i)}$ für das Gewicht rel. Häufigkeiten ist nun außerdem vor allem das Mittel z_i der beobachteten r. H. selbst enthalten. Sein spezieller Einfluß auf die Präzision ist aber natürlich

---

1) Eine sehr allgemeine theoretische Bedeutung erlangte dieser Satz, daß die Gewichte bzw. die Reziproken der Quadrate des mittleren Fehlers der meistens mit n bezeichneten Zahl der Beobachtungen direkt proportional sind, in der Abschätzung des Abstandes, welchen der „wahrscheinlichste“ Wert des mittleren Fehlers, d. h. das mittlere Quadrat der Abweichungen von dem arithmetischen Mittel

$$\mathfrak{A} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n}$$

der tatsächlich beobachteten Größen a_x, von dem wahren mittleren Quadrat der Abweichungen einhält, die man auf das wahre Mittel $\mathfrak{A}'$ bezieht, das man höchstens bei unbegrenzter Versuchszahl unter völlig konstanten Umständen erreichen würde. Diese Differenz $\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}$ wird hierbei selbst wiederum wie ein charakteristischer Fehler der ganzen Messung aus n Einzelbeobachtungen angesehen. Dann kann sich der Gewichtskalkül auf ihn allein und sein Verhältnis zu dem wahren mittleren Fehler M der n Einzelmessungen beziehen, mit dem er bei einer einzigen Messung natürlich identisch wäre, während man ihn bei deren Häufung so abnehmend denkt, wie sich eben M bzw. $\frac{1}{h\sqrt{2}}$ selbst mit der Vermehrung der Versuchszahl nach Gleichung [187] mindert*).

Bezeichnet man also die wahren Fehler der $\mathfrak{A}_i$ mit $V_i = \mathfrak{A}' - a_i$ und die auf das in der gewöhnlichen Weise abgeleitete $\mathfrak{A}$ bezogenen mit v_i, so gilt für das gesuchte wahre M einerseits, wie leicht auszurechnen ist:

$$M^2 = \frac{1}{n} \Sigma V^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots v_n^2}{n} + (\mathfrak{A}' - \mathfrak{A})^2 \qquad [189]$$

und andererseits, wegen der genannten Gewichtsüberlegung und nach dem oben genannten Satz [187]:

$$M : (\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}) = \sqrt{n} : 1,$$

woraus sich zur Berechnung des wahren mittleren Fehlers M einer einzelnen n-fach gemessenen Größe aus den natürlich allein bestimmbaren wahrscheinlichsten Fehlern v die Formel ergibt:

$$M = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots v_n^2}{n-1}}, \qquad [190]$$

---

*) Vgl. Weinstein, a. a. O. S. 97 b.

als im Wesen des Gegenstandes selbst liegend hierbei niemals experimentell auszuschalten. Wenn man also z. B. die Schwankungen der einzelnen rel. H. $z_{i\nu} = F(a_i)$ eines Urteiles, die bei r-fach wiederholter Absolvierung der Gruppen zu je m Darbietungen für die nämliche Reizstufe a_i zu konstatieren sind, wirklich als rein zufällige Effekte einer konstanten Mannigfaltigkeit unkontrollierbarer Nebenbedingungen im Sinne des § 20 soll auffassen können, so muß ihr mittleres Fehlerquadrat, bezogen auf das arithmetische Mittel $z_i = \frac{\Sigma z_{i\nu}}{r}$, zu $z_i(1 - z_i)$ proportional sein. Da nun in der Praxis diese Annahme jedenfalls am nächsten liegt, solange weder über die spezielle Verteilung noch über die Ursachen der Variation der $z_{i\nu}$ unter möglichst konstanten systematischen Bedingungen etwas Näheres bekannt ist, und da außerdem die strikte Widerlegung ihrer annähernden Gültigkeit immer nur an der Hand eines sehr ausgedehnten, nach großen Vielfachen ganzer Versuchsgruppen zu zählenden Materiales möglich wäre, so wird bei Ausgleichungen einer Urteilsfunktion F(a) nach § 30 und 31 diese spezielle Gewichtskorrektur, wie sie Urban in seinem dort näher erläuterten Verfahren vorgenommen hat, in Ermanglung anderer positiver Regeln vorläufig wohl angewendet werden können. Dabei sind freilich die Gewichtsunterschiede, die bei einer von 0 bis 1 aufsteigenden Kurve der Urteilshäufigkeit (vgl. § 14,3) durchlaufen werden, keineswegs unbeträchtlich. Da $z_i(1 - z_i)$ für $z_i = 0$ und $= 1$ verschwindet, so daß bei konstantem m das Gewicht

$$p_i = \frac{1}{z_i(1 - z_i)} \qquad [192]$$

an den Extremen E und E', wo eben F(a) = 0 bzw. 1 ist, unendlich groß werden würde, so muß man natürlich auch hier, wie beim einfachen E.-G. überhaupt, auf eine strenge Deckung der beobachteten und der theoretischen Verhältnisse in der Nähe der Extreme von vornherein verzichten. Denn man wird den in einer oder in einigen wenigen Reihen beobachteten Extremen nicht für alle beliebigen Reihen genau den nämlichen Wert 0 bzw. 1 zu-

d. h. der mittlere Fehler ist in Wirklichkeit bei endlichem n etwas größer, als er bei der einfachen Anwendung der Formel [18] ausfallen würde, und ähnliches gilt für die übrigen charakteristischen Fehler. Da indessen bei genügend großem n dieser Fehler $(\mathfrak{A}' - \mathfrak{A})$ für uns kaum in Betracht kommt und außerdem bei der stets erreichbaren Gleichheit des n der verglichenen Mittelwerte vollständig zu vernachlässigen ist, so werden wir im folgenden von dieser ohnehin ziemlich komplizierten Überlegung keinen Gebrauch machen und D und M überall einfach nach [17] und [18] bestimmen. Aus einer Verallgemeinerung dieser Betrachtung, welche in dem Nenner n — 1 bei der Messung einer einzigen Größe a die Zahl der überschüssigen Beobachtungen sieht, läßt sich dann auch die oben S. 134, A. 1 gegebene Korrektur des vergleichbaren mittleren Fehlers einer Bestimmung nach der Methode der kleinsten Quadrate ableiten. Da mindestens m Gleichungen zur Bestimmung von m Unbekannten ohne Ausgleichung nötig sind, so wird dort die Präzision der Ausgleichung mit der Quadratwurzel der Zahl n — m der überschüssigen Beobachtungsgleichungen fortschreiten, so daß bei sonst gleichem Gewicht der einzelnen l_i

$$M = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots v_n^2}{n - m}}. \qquad [191]$$

schreiben, bei dem M^2 wirklich zu Null würde. Dennoch zeigt der Verlauf von p_i auch schon z. B. zwischen $z_i = 0{,}1$ und $0{,}9$ ein hinreichend großes Gefälle. Hierbei sinkt das Gewicht mit wachsendem z_i zunächst fortgesetzt, erreicht bei $z_i = 0{,}5$ ein Minimum und steigt von da genau symmetrisch wieder an, so daß man immer nur die eine Hälfte des Verlaufs zwischen $z_i = 0$ oder 1 einerseits und 0,5 andererseits zu betrachten braucht. So ist also für

z_i =	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
p_i nach [192] =	11,1	6,25	4,76	4,16	4	4,16	4,76	6,25	11,1.

Eine genauere Tabellierung können wir uns indessen ersparen, da wir unten (§ 31a) Urbans eigene Tabelle für die hauptsächlichste Anwendung dieser Gewichtsmodifikation bringen, in der die p-Werte allerdings sogleich mit anderen, ganz speziellen Faktoren multipliziert sind. Jedenfalls zeigt aber auch schon diese kleine Tabelle, daß man den Beobachtungen in der Nähe der Extreme nur mit Unrecht manchmal eine geringere Bedeutung beimessen zu müssen glaubte. Übrigens bleibt die obige Reihe, nachdem sie zunächst sehr rasch abfiel, gegen die Mitte hin zwischen 0,4 und 0,6 fast konstant, so daß wenigstens in Versuchen, deren z sich enger um 0,5 gruppiert, von dieser Korrektur völlig abgesehen werden kann.

2. Das reiche empirische Material, das Urban selbst, wie gesagt, zum ersten Male zur Kontrolle der Voraussetzungen dieser ganzen Gewichtskorrektur beigebracht hat und an das man sich zunächst zu halten hat, wenn man von speziellen Verteilungsgesetzen absehen will, zeigt indessen bereits deutlich, daß die tatsächlichen Verhältnisse bei längeren Versuchsreihen über Urteilshäufigkeiten viel komplizierter liegen, und daß man, wie Urban selbst hervorhebt, kaum jemals mit einer solchen Konstanz des Ursachenkomplexes der Schwankungen rechnen darf, wie sie die einfache Anwendung des Bernoullischen Theorems gestatten würde. Wir wählen als Beispiel Urbans Vp. II, für welche dieses Theorem unter allen sieben Beobachtern noch relativ am besten erfüllt war, und hier wiederum die Funktion $F_k(a)$ der „Kleinerurteile", die hier etwas typischer verläuft als die g- bzw. u-Kurve. Es wurden 7 Reizstufen a_i (84 bis 108) dargeboten, und zwar jede Stufe in 9 Gruppen zu je 50 Einzelversuchen. Die folgende Tabelle enthält unter den mittleren rel. H. $z_i(\mathfrak{A})$ jeder Stufe a_i zunächst den nach Bernoulli berechneten mittleren Fehler

$$M_i' = \sqrt{\frac{z_i(1 - z_i)}{50}}$$

der einzelnen rel. H., sodann darunter den „beobachteten" mittleren Fehler, und zwar den „wahrscheinlichsten" nach [190], der mit $(n-1)$ statt mit n gebildet ist, also

$$M_i = \sqrt{\frac{\Sigma(z_i - z_{i\nu})}{8}}.$$

Darunter ist der sog. „Divergenz-Koeffizient" Q für Vp. II und sodann das für alle sieben Beobachter bestimmte Mittel dieses Koeffizienten angegeben, den Urban nach Lexis[1]) als Maß der Abweichung der Beobachtung von dem einfachen Bernoullischen Theorem berechnete[2]). In den Werten jener mittleren Fehler M′ und M ausgedrückt[3]), ist

$$Q_i = \frac{M_i}{M_i'}.$$

Tabelle 8.

Stufe des Vergleichsreizes a_i	108	104	100	96	92	88	84
Arithmetisches Mittel der $z_{i\nu}$ aus 9 Gruppen zu je 50 Versuchen	0,0156	0,0956	0,2311	0,4489	0,7000	0,8622	0,9333
Berechneter mittlerer Fehler M_i'	0,0175	0,0415	0,0596	0,0703	0,0648	0,0488	0,0353
Beobachteter mittlerer Fehler M_i	0,0240	0,0924	0,0770	0,0633	0,0616	0,0307	0,0387
Divergenzkoeffizient	1,372	2,222	1,322	0,900	0,951	0,630	1,097
Mittel der entsprechenden D.-Koeffizienten aller 7 Vp.	1,151	1,314	1,513	1,788	2,088	1,422	1,301

Zur besseren Veranschaulichung der Streuung der einzelnen Gruppenwerte sind dann in Fig. 5 sämtliche beobachtete rel. H. je einer der 63 Gruppen zu je 50 Versuchen durch einen Punkt markiert. Bei wiederholter Beobachtung des nämlichen Wertes reihen sich die neuen Punkte nach rechts an den ersten. Um 90° nach links gedreht, gibt also Fig. 5 über einander die Streuung der Einzelbeobachtungen $z_{i\nu}$ in sieben (unstetigen) K.-G. Außerdem ist die mittlere Kurve $z_i = F_k(x_i)$ nach Urbans Interpolationen von je 3 Punkten mittels der Lagrangeschen Methode graphisch ziemlich genau entworfen, die somit der Fig. 4 nach Kellers Versuchen entspricht.

Tabelle und Kurve zeigen zunächst, daß bei den verschiedenen z_i in der Tat ein deutlicher Unterschied der Präzision ungefähr in der Richtung des Bernoullischen Theorems besteht, wenngleich die mittleren Fehler durchschnittlich zu groß gefunden wurden. Letzteres tritt bei Vp. II noch relativ am wenigsten hervor, ist jedoch an den Gesamtmitteln deutlich zu erkennen. Als Mittel der Divergenzkoeffizienten aus sämtlichen Beobachtungen aller Vp. überhaupt gibt Urban für die g-Urteile 1,616, für u: 1,513, für k: 1,511 an. Der kleinste Koeffizient überhaupt ist 0,559, der größte 3,487. Wenn diese Werte für alle Urteilsarten und Stufen übereinstimmen würden,

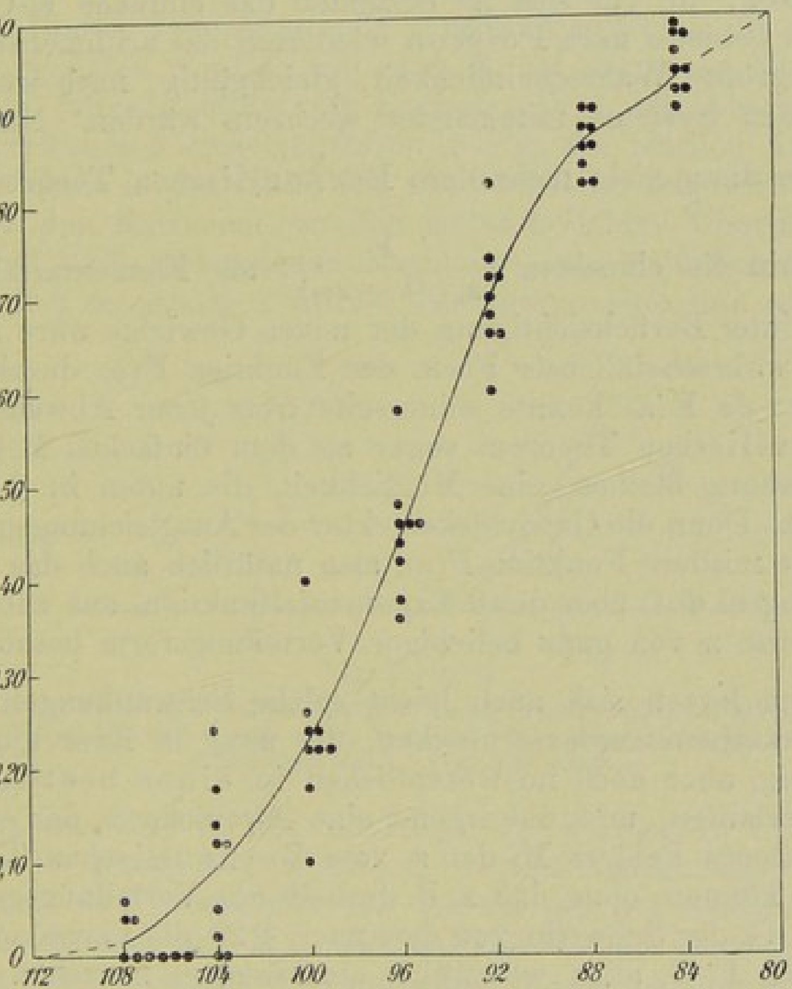
1) Jahrbuch für Nationalökonomie und Statistik 1876, Bd. 27, S. 209 und 1879, Bd. 32, S. 60 u. a.

2) Da Urban die Werte M_i und M'_i nicht gesondert angibt, so bestimmte ich M_i direkt aus den angegebenen z_i und berechnete M_i' an der Hand der Urbanschen Divergenzkoeffizienten (a. a. O. Bd. XV, Tabelle 9, S. 280).

3) Urban gibt das Verhältnis der aus den M berechneten Präzisionsmaße

$$h = \frac{1}{M\sqrt{2}}, \quad \text{also} \quad \frac{h'_i}{h_i}.$$

so ergäbe natürlich eine Ausgleichung mittels des Gewichtsfaktors $\frac{1}{z_i(1-z_i)}$ noch kein falsches Resultat, da ja alle Gewichte mit dem gleichen Faktor multipliziert werden dürfen. Doch weist dies jedenfalls darauf hin, daß die Voraussetzungen zu jener einfachen apriorischen Gewichtsbestimmung nur ungenügend erfüllt sind, insofern diese eben auch für den absoluten Wert des mittleren Fehlers der z_i ganz feste Angaben zulassen. Auch würde die für statistische Deduktionen immerhin noch geringe Zahl von nur 50 Ver-



Figur 5.
Die Streuung der Beobachtungen relativer Häufigkeiten von Vergleichsurteilen. (Nach Versuchen von F. W. Urban, vgl. Archiv f. d. ges. Psychologie XV. 1909, S. 268.)

suchen zunächst bei den von 0,5 wesentlich verschiedenen Mittelwerten z_i nach den strengen Voraussetzungen Bernoullis noch keine so gleichmäßige Streuung ergeben können, wie sie Fig. 5 wenigstens bei $a_i = 100$, 96 und 84 aufzeigt. Diese Annäherung an die Symmetrie des einfachen E.-G. ergibt sich ja, wie schon § 20 erwähnt wurde, erst bei einer sehr hohen Zahl m, welche die Stirlingsche Formel anzuwenden gestattet. Außerdem zeigt sich aber nun vor allem bei den meisten Vp., die noch nicht diejenige Übung und Konstanz bewiesen, wie Vp. II, die Steigerung der Ungenauigkeit über das erwartete Maß hinaus in der Mitte der Funktion, in der Nähe von $z_i = 0,5$, also gewissermaßen noch eine Übertreibung der theoretisch geforderten Differenzierung der Präzisionsmaße.

Durch diese Abweichungen von den einfachsten Erwartungen auf Grund der Kombinatorik des § 20 verliert aber natürlich keineswegs etwa auch die ausgleichende Berechnung der Konstanten einer mittleren Funktion $F(x)$ ihren Sinn. Denn bei jeder Gruppe z_{ir} kann nach einem Repräsentanten z_i gefragt werden, gleichgültig, wie die in Fig. 5 veranschaulichten Streuungen beschaffen sind. Es wäre sogar zunächst nicht einmal die Möglichkeit genommen, die einzelnen Beobachtungen z_{ir} auf ein System mehrerer in sich konstanter Mannigfaltigkeiten von unkontrollierbaren Nebenbedingungen zurückzuführen, die für sich im einzelnen das einfache E.-G. befolgen. In diesem Falle behielte nach Poisson wiederum das arithmetische Mittel z ($\mathfrak{A}$) jeweils die größte Wahrscheinlichkeit, gleichgültig, nach welchem Prinzipe diese einzelnen Systeme miteinander wechseln würden. Nur die Präzision $\frac{1}{M_i\sqrt{2}}$ folgte dann nicht mehr dem Bernoullischen Theorem, würde aber doch immerhin die einzelnen $\frac{1}{z_{i,r}(1-z_{ir})}$ als Elementarfaktoren in sich schließen. Unter Berücksichtigung der neuen Gewichte wäre also dann auch wieder eine wahrscheinlichste Form der Funktion $F(a)$ durch Ausgleichung zu ermitteln. Ja $F(a)$ könnte seinerseits trotz jener Abweichungen der M vom Bernoullischen Theorem sogar zu dem einfachen E.-G. in unmittelbarster Beziehung bleiben, eine Möglichkeit, die unten in § 31 ausführlich entwickelt ist. Denn die Gewichtskorrektur der Ausgleichungsmethode vermag jede beliebige mittlere Funktion $F(a)$, also natürlich auch das einfache E.-G., bzw. das Integral $\Phi(t)$ über diese Exponentialfunktion, aus zufälligen Fehlern der Einzelwerte z_i von ganz beliebiger Verteilungsform herauszulösen.

3. Zudem lassen sich auch leicht solche Schwankungen des zugrunde liegenden Ursachenkomplexes denken, die zwar in ihrer Quantität im einzelnen zufällig, aber doch im wesentlichen in einer bestimmten Hauptrichtung verlaufen, und die irgend eine Abweichung des empirisch beobachteten mittleren Fehlers M_i der z_i vom Bernoullischen Theorem erklärlich machen können, ohne daß z. B. deshalb das Verteilungsgesetz des hypothetischen K.-G. der Schwelle, von dem nach § 29 die Form von $F(a)$ abhängt, vom einfachen E.-G. allzu wesentlich abzuweichen brauchte. So weit dem Abszissenwerte x selbst eine reale Bedeutung innerhalb des Ursachenkomplexes zukommt, wie es in dem Begriffe der in Reizmaßen gemessenen „Schwelle“ und des sog. „Schätzungswertes“ (des Mittels zwischen den ebenmerklichen Unterschieden) der Fall ist, könnten z. B. rein zufällige Schwankungen dieses Wertes a (bzw. einer linearen Transformation von ihm), die bei völliger Konstanz der anderen Parameter der gesuchten Verteilungsfunktion von einer Versuchsgruppe zur anderen auftreten, den einfachen, in Fig. 6a veranschaulichten Effekt haben, daß sich die Funktion $F(a)$ parallel zur Abszissenachse hin und her verschiebt. Wenn der hypothetische K.-G. dem einfachen E.-G. folgt, bedeutet dies also einfach ganz entsprechende Schwankungen seines Hauptwertes x_m (vgl. § 31). Die Schwankungen der z_i werden dadurch an den einzelnen Stellen $a_i = x$ ihrem absoluten Werte nach wesentlich verschieden ausfallen, indem sie offenbar zu $\frac{dF(x)}{dx}$ annähernd proportional

wären, wenigstens falls sie klein genug blieben, um zu gestatten, die höheren Glieder der Taylorschen Reihe zu vernachlässigen. Das Gewicht der einzelnen z_i erschiene also hierdurch als

$$p_i = \frac{1}{\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^2}. \quad [193]$$

Dieser Vorgang gewinnt vor allem dann an Wahrscheinlichkeit, wenn die verschiedenen Stufen x nicht zufällig vermischt auftreten, sondern sukzessive wiederholt dargeboten werden, wie es z. B. bei der alten Methode der sog. „richtigen und falschen Fälle“ oft geschah. (Vgl. III. Abschnitt.) Bei der mit Fig. 5 verwandten Streuungsform in Fig. 6a würden dann vor allem wieder die z-Werte in der Nähe von 0,5 bedeutend unzuverlässiger sein als diejenigen bei den Extremen, so daß selbst beliebige Übertreibungen ihres auch schon bei [188] vorhandenen Nachteiles, der natürlich auch hier fortbestände, ähnlich zu erklären wären. Es könnte aber nun auch bei ungeführer Konstanz der mittleren Lage der Funktion F(x) im ganzen zur X-Achse der Parameter schwanken, der die Ausdehnung der ganzen Unsicherheit von E bis E′ beeinflußt, und den wir mit h bezeichnen wollen, weil er bei der Auffassung von F(x) als Integral $\Phi(t)$ der einfachen E.-Funktion das bekannte Präzisionsmaß ist. Dann wären die Beobachtungsfehler der z_i zu $\frac{F(x)}{\delta h}$ proportional. Dieser Fall ist durch Fig. 6b veranschaulicht und zeigt im direkten Gegensatz zu 6a eine bedeutende Konzentration der z-Beobachtungen in der Nähe des Symmetriepunktes der Kurve, also bei $z = 0{,}5$. Eine gewisse Mischung aus beiden Komponenten könnte also so ziemlich jeden beliebigen Grad der Übereinstimmung der einzelnen M_i mit der theoretisch einfachsten Formel plausibel erscheinen lassen, zumal jede der beiden hier genannten Veränderungsrichtungen zwei sachlich einigermaßen selbständige Grundlagen zufälliger Schwankungen oder systematischer Verschiebungen repräsentiert, wie sie z. B. durch Übung oder Ermüdung von einer Gruppe zur anderen bei derartigen Vergleichsversuchen eintreten können. Je größer die Versuchszahl jeder Einzelgruppe für je ein z_{ir} wird, um so mehr könnten dann diese Abweichungen zwischen den M_i über die obigen „normalen“ die Oberhand gewinnen.

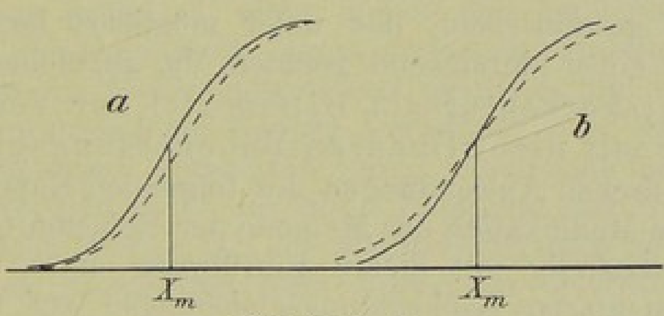


Fig. 6a u. b.
Die Variation der beobachteten relativen Häufigkeiten, die als Summenfunktionen eines einfachen K.-G. nach dem Gaußschen Gesetz aufzufassen sind a) bei Variation seines Hauptwertes x_m b) bei Variation seines Präzisionsmaßes h. (Vgl. § 29 und 31.)

Bei dieser relativen Unbestimmtheit des Ergebnisses rein apriorischer Erwägungen bleibt also schließlich doch wiederum die rein empirische Ermittlung der mittleren Fehler M_i für jedes z_i ohne Voraussetzung eines speziellen Verteilungsgesetzes der direkteste Weg zu einer zweckmäßigen Anwendung der Ausgleichungsrechnung, der z. B. für das Urbansche Material bei dem hohen und gleichen Gewichte aller Fraktionen wohl gangbar wäre. Dies gilt natürlich erst recht, wenn bezüglich der wahrscheinlichsten Form der Verteilung, die dem System der Beobachtungsgleichungen [159] einstweilen zugrunde gelegt wird, nicht mehr speziell das einfache E.-G. vorausgesetzt wird. Übrigens hat H. Bruns bereits bei seinem ersten Hinweis auf die Bedeutung dieses schwierigen Gewichtskalküles auch im Gebiete der Psychophysik mit Recht wie zum Troste hinzugefügt (a. a. O. S. 37): „Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate wäre eine überflüssige und daher schädliche Spielerei, wenn sie eine genaue Kenntnis der Gewichte voraussetzte", ein Satz, der natürlich in um so höherem Maße gilt, je mehr der absolute Betrag der Schwankungen überhaupt vernachlässigt werden kann. Dies wird aber wohl stets am ehesten durch ein reiches Material gewährleistet, das unter möglichst konstanten Versuchsbedingungen mit einer hinreichend geübten Vp. abgeleitet wird.

3. Die Gewichtskorrektur als Hilfsmittel zur Vereinfachung der Rechnung mit nicht linearen Beobachtungsgleichungen.

In den praktischen Anwendungen des folgenden Kapitels wird uns aber noch eine weitere Modifikation der Methode der kleinsten Quadrate begegnen, die äußerlich vollständig mit dieser Einführung eines verschiedenen Gewichtes der elementaren Beobachtungsgleichungen auf Grund der realen Verhältnisse übereinstimmt. Sie bedeutet aber in Wirklichkeit weiter nichts als die Korrektur einer Ungleichheit des Fehlermaßes, die sich zunächst einmal rein analytisch dadurch ergeben hat, daß an sich nicht lineare Beobachtungsgleichungen durch andere, von ihnen eindeutig abhängige lineare Gleichungen ersetzt wurden, deren übrigbleibende Fehler v_i' nicht mehr in dem nämlichen Verhältnisse zueinander stehen wie die v_i der Beobachtungsgleichungen selbst. Dieses „Gewichtsverfahren" ist von G. E. Müller in die Psychophysik schon 1879 als Ersatz der bisweilen komplizierten Methode eingeführt worden, die oben S. 136 als das gewöhnliche Hilfsmittel zur Ableitung gleichwertiger linearer Gleichungen aus nicht linearen Beobachtungsgleichungen angegeben wurde. Man hat also hierbei einerseits nicht lineare Beobachtungsgleichungen von der Form

$$l_i = f(x, y, z, a_i, b_i, c_i) \qquad [159]$$

und kennt außerdem eine neue Beziehung der l_i zu einem t_i, das mit den gesuchten Konstanten x, y, z durch den linearen Ausdruck

$$t_i = \alpha_i x + \beta_i y + \zeta_i z \qquad [194]$$

verbunden ist. Die nach Einsetzung bestimmter Werte x, y, z übrigbleibenden Fehler

$$v_i = l_i - f(x, y, z \text{ usw.}) \text{ und } v_i' = t_i - (\alpha_i x \text{ usw.})$$

aber sind beiderseits verschiedene Systeme. Die Methode der kleinsten Quadrate wird sich aber nun doch wieder mit einem ähnlichen Ergebnis auch auf die neuen Gleichungen [194] anwenden lassen, wenn es gelingt, ein System von Faktoren p_i ausfindig zu machen, das die Gleichung

$$nM^2 = v_1{}^2 + v_2{}^2 + \ldots v_n{}^2 = v'_1{}^2 \cdot p_1 + v'_2{}^2 \cdot p_2 + \ldots v'_n{}^2 \cdot p_n \qquad [195]$$

erfüllt. Die Lösung dieser Aufgabe kann natürlich von Fall zu Fall variieren, so daß wir auf die Einzelheiten des Müllerschen Gewichtsverfahrens erst im Anschluß an die spezielle Formulierung der Beobachtungsgleichungen in § 31a näher eingehen können.

28. Die mittlere Variation (der sog. durchschnittliche Fehler) D und ihre Beziehung zum Zentralwert $\mathfrak{C}$ und zum arithmetischen Mittel $\mathfrak{A}$.

a) D und $\mathfrak{C}$ bei einem unstetigen K.-G.

Der mittlere Fehler M ist nun trotz seiner wichtigen Beziehung zum arithmetischen Mittel und seiner grundlegenden Bedeutung für die Ausgleichungsrechnung praktisch nicht immer das bequemste Streuungsmaß. Denn bei seiner Berechnung für einen einfachen, unmittelbar beobachteten K.-G. müssen eben die Abweichungen erst quadriert und ihre Summe wieder radiziert werden, während bei stetiger Verteilung $\mathfrak{B}(x)$ nach [157] ein dreifaches Integral numerisch aufzulösen wäre. Analytisch liegt daher jedenfalls die erste Mittelwertpotenz D der ohne Rücksicht auf das Vorzeichen genommenen Abweichungen (s. Gl [17]) als Streuungsmaß am nächsten. Wenn auch Gauß diese Abstraktion vom Vorzeichen gewissermaßen als einen unmathematischen Gewaltakt, der dem unmittelbar gegebenen Rechnungsmaterial widerfahre, verschmähte und in seiner Theoria combinationis als wissenschaftliches Streuungsmaß nur die rein analytische Befreiung vom Vorzeichenunterschied in M gelten lassen wollte, so wies doch schon Laplace[1]) darauf hin, daß die einfache Summation der absoluten Werte der v hier völlig sachgemäß sei. Hierin wurde er dann von Fechner[2]) nachdrücklich unterstützt. Dieser hob aber neben der praktisch allerdings auch nicht unwichtigen Bequemlichkeit vor allem noch eine wichtige neue Eigenschaft von D hervor, die der Beziehung von M zu $\mathfrak{A}$ analog ist, und die er eben durch eine Verallgemeinerung der Betrachtung gefunden hatte, durch die Gauß seinerzeit M als Minimum bei seiner Beziehung auf $\mathfrak{A}$ erkannt hatte: Jede beliebige Mittelwertpotenz der Abweichungen $\Sigma(a-x)^n$ könne zu einem speziellen Ausgangswerte a_m in Beziehung gesetzt werden, auf den bezogen sie zu einem Minimum werde. Ihn bezeichnete Fechner daher als mit diesem Streuungsmaß „solidarisch“. Aus der allgemeinen Formulierung der Minimumsbedingung

$$\frac{d\,\Sigma(a-x)^n}{da} = 0 \qquad [196]$$

folgt

$$\Sigma(a-x)^{n-1} = 0. \qquad [197]$$

1) Théorie analytique des probabilités. 1812.
2) a. S. 43. A. 1. angeg. Orte, S. 54f.

Daher ergibt sich speziell für $n = 1$, d. h. also für die erste Mittelwertpotenz D, zur Berechnung des mit ihr „solidarischen" Ausgangswertes die Formel

$$\frac{d\Sigma(a-x)}{da} = \Sigma(a-x)^0 = 0, \qquad [198]$$

oder, mehr ins einzelne ausgeführt:

$$0 = \frac{d[(a-a_1)\cdots + (a-a_\mu) + (a_{\mu+1}-a)\cdots + (a_n-a)]}{da}. \qquad [198a]$$

Denn da hier alle Abweichungen $(a - a_x)$ mit positiven Vorzeichen zu addieren sind, so muß bis zu einem allerdings erst aus der Gl. [198a] selbst zu bestimmenden Beobachtungswerte a_μ das bis dahin kleinere a_x von a, darüber hinaus aber a von a_x abgezogen werden. Hieraus findet man aber durch Ausführung der Differentiation nach a:

$$0 = 1_1 + 1_2 + \cdots 1_\mu - 1_{\mu+1} \cdots - 1_n. \qquad [198b]$$

Der mit D solidarische Ausgangswert a ist also derjenige Wert, unterhalb und oberhalb dessen gleich viele Werte, gleichgültig von welcher speziellen Größe, beobachtet worden sind. Dies ist aber der schon S. 46 so definierte Zentralwert $\mathfrak{C}$, der dann auch von Fechner gerade wegen dieser Beziehung zu dem einfachsten Streuungsmaß als „Hauptwert" proklamiert wurde, zumal schon früher die analoge Stellung des sog. „wahrscheinlichen" Fehlers P in der Reihe der absoluten Fehlerwerte als eine besonders repräsentative anerkannt worden war (s. S. 109). Über die Berechnung des $\mathfrak{C}$ für einen unstetigen K.-G. wurde nun schon S. 46f. alles Wichtige gesagt. Völlig eindeutig wird aber der Zentralwert bzw. die Lösung von Gl. [198] erst wieder für eine stetige Verteilung $\mathfrak{V}(x)$. Daher sollen hier zunächst diese Verallgemeinerungen von $\mathfrak{C}$ und D gegeben werden, die dann auch die Beziehung zwischen beiden wieder ganz allgemein aus ihren Integraldefinitionen abzuleiten gestatten. Endlich zeigt die besondere Vereinfachung, welche auch die Formel für D bei der speziellen Beziehung der Abweichungen auf das a. Mittel $\mathfrak{A}$ zuläßt, sowohl die besonders universelle Bedeutung von $\mathfrak{A}$ als auch eine noch etwas allgemeinere von D selbst, als wenn es nur mit dem Zentralwert $\mathfrak{C}$ „solidarisch" wäre.

b) Die numerische Berechnung des Zentralwertes $\mathfrak{C}$ eines stetigen K.-G.

Was zunächst die numerische Berechnung des Zentralwertes selbst für ein stetiges $\mathfrak{V}(x)$ angeht, die sich natürlich wieder nur bei asymmetrischen Verteilungen, bei denen $\mathfrak{C} \gtrless \mathfrak{A}$ ist, von der interpolatorischen unterscheiden kann, so ist sie rasch mit dem Hinweis auf unser zweites Beispiel der numerischen Integration zu erledigen. Denn die Einführung der Definitionsformel [20] S. 48 verlangt zur Bestimmung der Integrationsgrenze $\mathfrak{C}$, die das einfache bestimmte Integral zwischen den Extremen des K.-G. E_0 und E_u gerade halbiert, einfach die Berechnung derjenigen Größe des Faktors α, die den für die Grenzen $E_u = E'$ und $\mathfrak{C} = x_m$ berechneten Ausdruck [77] dem analogen für die Grenzen E_0 und $\mathfrak{C}$ gleich werden läßt. Hierbei müssen natürlich in diesem zweiten Ausdruck die Ordinaten spiegelbildlich zum ersten, d. h. von E_0 aus, numeriert werden, während der Faktor α durch $(1-\alpha)$ zu ersetzen ist.

Betrachten wir also z. B. wieder den auf S. 47 nach Fechners Vorschrift für $\mathfrak{C}$ behandelten K.-G. mit den 9 von E_u nach E_0 geordneten Ordinaten:

$$0 \quad 5 \quad 11 \quad 20 \quad 21 \quad 15 \quad 6 \quad 2 \quad 0.$$

Für die linke Hälfte, d. h. für das Integral bis zum Zentralwert, der nach den früheren Erörterungen zwischen den Ordinaten 20 und 21 liegt, ist dann

$$z_\varrho = 20, \text{ also } \sum_{s=1 \text{ bis } \varrho-1} z_s = 5 + 11 = 16,$$

und für die rechte Hälfte, von rechts her gezählt,

$$z_\varrho = 21, \text{ also } \sum_{s=1 \text{ bis } \varrho-1} z_s = 2 + 6 + 15 = 23.$$

Die Gleichung zur Berechnung von α mit der in [77] eingehaltenen Genauigkeit wäre somit:

$$16 + 0{,}5 \cdot 20 + 20\alpha + \text{ usw.} = 23 + 0{,}5 \cdot 21 + 21(1-\alpha) + \text{ usw.}$$

Wenn man mit einer quadratischen Gleichung für α auskommen will, wäre allerdings beiderseits das letzte Glied der Formel [77] wegzulassen. Indessen wollten wir uns ja für die psychophysische Praxis überhaupt mit der Annäherung [78] begnügen. Bezeichnet x_ϱ von E_u aus gezählt die dem Zentralwert nächstliegende kleinere Abszisse, so berechnet man somit aus $z_0 = 0, z_1, \cdots z_{p-1}, z_p = 0$ den Interpolationsfaktor α in

$$\mathfrak{C} = x_\varrho + \alpha i$$

aus der Gleichung

$$\sum_{x=1 \text{ bis } \varrho-1} z_x + (0{,}5+\alpha) z_\varrho + \frac{\alpha^2}{4}(z_{\varrho+1} - z_{\varrho-1}) =$$

$$= \sum_{y=\varrho+2 \text{ bis } p-1} z_y + (1{,}5-\alpha) z_{\varrho+1} + \frac{(1-\alpha)^2}{4}(z_\varrho - z_{\varrho+2}). \qquad [199]$$

Hieraus findet man also

$$\alpha(\mathfrak{C}) = -\frac{A}{N} + \sqrt{\frac{A^2}{N^2} + \frac{B}{N}},$$

wobei

$$A = 3z_\varrho + 2z_{\varrho+1} - z_{\varrho+2}$$

$$B = 4\sum_{(y=\varrho+2 \text{ bis } p-1)} z_y - 4\sum_{(x=1 \text{ bis } \varrho-1)} z_x - z_\varrho + 6z_{\varrho+1} - z_{\varrho+2}$$

$$N = z_{\varrho+2} + z_{\varrho+1} - z_\varrho - z_{\varrho-1}. \qquad [200]$$

In unserem früheren, nach Fechner berechneten Beispiele ist die Asymmetrie, wie wir auch S. 47 festgestellt haben, viel zu gering, als daß sich ein wesentlicher Unterschied der neuen von der alten Berechnungsweise zeigen könnte. Ich finde nach [200] $\mathfrak{C} = 54{,}01$ statt des früheren Wertes 54,07.

Berechnet man dagegen z. B. für die starke Asymmetrie der Beobachtungsreihe:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z:	0	5	4	2	2	0,

$\mathfrak{C} = x_1 + \alpha \cdot i$ auf beide Arten, so wäre nach der früheren Art

$$\alpha(\mathfrak{C}) = 0{,}375,$$

nach [200] dagegen, wobei $x_\varrho = x_1$,

$$\alpha'(\mathfrak{C}) = -\frac{21}{1} + \sqrt{\frac{21^2}{1} + \frac{33}{1}} = 0{,}74.$$

Immerhin werden in der psychophysischen Praxis die Asymmetrien kaum jemals so große werden. Daher wird man schließlich auch bei $\mathfrak{C}$, ebenso wie bei $\mathfrak{A}$, mit der Ableitung S. 46 für die unstetige Reihe zufrieden sein können, soweit es sich wenigstens um unmittelbar beobachtete einfache K.-G. handelt.

c) Analytische und numerische Berechnung der mittleren Variation D eines stetigen K.-G.

1. Für die mittlere Variation D ist nun zunächst die allgemeine analytische Formel bei stetiger Funktion zu entwickeln, und zwar zuerst für einen beliebigen Ausgangswert a, wie sie also den Gl. [154] und [155] für M^2 entspricht. Dabei ist hier wie in [198a] zwischen der Abweichungssumme unterhalb und oberhalb des Ausgangswertes a zu trennen, so daß der Integralausdruck für D lautet:

$$D = \int_{E_u}^{a} (a - x)\,\mathfrak{B}(x)\,dx + \int_{a}^{E_o} (x - a)\,\mathfrak{B}(x)\,dx \qquad [201]$$

oder ausmultipliziert und zerlegt:

$$D = a\int_{E_u}^{a} \mathfrak{B}(x)\,dx - \int_{E_u}^{a} x \cdot \mathfrak{B}(x)\,dx + \int_{a}^{E_o} x \cdot \mathfrak{B}(x)\,dx - a\int_{a}^{E_o} \mathfrak{B}(x)\,dx. \qquad [202]$$

Bei der Umformung dieses Ausdruckes suchen wir nun, genau wie bei der Auswertung von Gl. [144] für $\mathfrak{A}$, auf bestimmte Integrale zu kommen, deren untere Grenze stets E_u ist. Faßt man zunächst das erste und letzte Glied von [202] besonders zusammen, so folgt zugleich mit Rücksicht auf [9]:

$$a\int_{E_u}^{a} \mathfrak{B}(x)\,dx - a\left[\int_{E_u}^{E_o} \mathfrak{B}(x)\,dx - \int_{E_u}^{a} \mathfrak{B}(x)\,dx\right] =$$

$$= 2a\int_{E_u}^{a} \mathfrak{B}(x)\,dx - a. \qquad [203]$$

Das zweite und dritte Glied von [202] aber wird nach [144] partiell integriert. Hiernach ist das zweite Glied

$$\int_{E_u}^{a} x \cdot \mathfrak{V}(x)\,dx = \Big[x \int \mathfrak{V}(x)\,dx\Big]_{E_u}^{a} - \int_{E_u}^{a}\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx. \qquad [204]$$

Bestimmt man die Konstante in $\int \mathfrak{V}(x)\,dx$ wieder so, daß es zu $\int_{E_u}^{x} \mathfrak{V}(x)\,dx$, also $\int_{E_u}^{E_u} \mathfrak{V}(x)\,dx = 0$ wird, so ist

$$\Big[x \cdot \int \mathfrak{V}(x)\,dx\Big]_{E_u}^{a} = a\int_{E_u}^{a} \mathfrak{V}(x)\,dx - a \cdot 0, \qquad [205]$$

und analog wird das dritte Glied von [202], da $\int_{E_u}^{E_o} \mathfrak{V}(x)\,dx = 1$,

$$\int_{a}^{E_o} x\,\mathfrak{V}(x)\,dx = E_o - a\int_{E_u}^{a} \mathfrak{V}(x)\,dx - \int_{a}^{E_o}\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx. \qquad [206]$$

Summiert man nunmehr [203], [205] und [206], so erhält man schließlich nach gegenseitiger Aufhebung der Glieder mit $\int_{E_u}^{a} \mathfrak{V}(x)\,dx$:

$$D = E_o - a + \int_{E_u}^{a}\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx - \int_{a}^{E_o}\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx. \qquad [207]$$

Für die folgenden Ableitungen ist vor allem die Form wichtig, auf die sich [207] bringen läßt, wenn man die Doppelintegrale, wie es schon einmal zur Berechnung von M^2 bei Gl. [153] geschah, durchweg auf solche mit der unteren Grenze E_u reduziert. Man setzt also

$$\int_{a}^{E_o}\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx = \int_{E_u}^{E_o}\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx - \int_{E_u}^{a}\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx.$$

Dadurch wird dann

$$D = E_o - a - \int_{E_u}^{E_o}\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx + 2\int_{E_u}^{a}\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx. \qquad [208]$$

Hieraus aber findet man schließlich nach Einsetzung des arithmetischen Mittels $\mathfrak{A}$ aus [145]:

$$D = \mathfrak{A} - a + 2\int_{E_u}^{a}\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx. \qquad [209]$$

Bei dieser nunmehr offenbar überaus einfachen Formel ist aber, wie gesagt, vorausgesetzt, daß die Konstante C der erstmaligen Integration von $\mathfrak{B}(x)$ nach dx, über die ja beim bestimmten Doppelintegral stets erst noch nähere Angaben hinzutreten müssen, genau wie bei $\mathfrak{A}$ nach [144a], den Wert

$$C = -\int \mathfrak{B}(E_u)\, dE_u$$

besitzt. Bei den numerischen Integrationen nach § 19, c kommt übrigens C wieder nicht weiter in Betracht, da es für das erste Partialintegral wegen $E_u = 0$ einfach verschwindet.

Die numerische Berechnung der mittleren Variation D für einen unmittelbar beobachteten K.-G., bezogen auf einen beliebigen Ausgangswert, erfordert also nach [208], wenn $\mathfrak{A}$ noch nicht als bekannt vorausgesetzt wird, nur die Auswertung zweier Doppelintegrale, von denen das erste, zwischen E_o und E_u genommen, mit demjenigen bei $\mathfrak{A}$ in [145] identisch ist, und somit nach § 19, c, 6 (S. 93ff) berechnet, für einen einfachen K.-G. wieder zu [146] führt. Das zweite Integral aber, dessen obere Grenze der beliebige Wert a ist, muß nach § 19, c, 7 (S. 95f) berechnet werden. Da wiederum das einfache Integral

$$\int_{E_u}^{E_o} \mathfrak{B}(x)\, dx = i \int_{E_u}^{E_o} \mathfrak{B}(x)\, dn = i$$

sein soll, so müssen natürlich die z der Formeln aus § 19 wieder relative H. bedeuten, d. h. es muß wie S. 125f. sowohl [84a] als auch [87] mit i dividiert, also i^2 durch i ersetzt werden. Auf ein Rechenbeispiel für dieses zweite Doppelintegral werden wir erst bei der einfacheren Formel für $a = \mathfrak{A}$ zurückkommen, wonach dann auch dieser kompliziertere Fall der mittleren Variation für ein beliebiges a leicht zu erledigen sein wird, da für dessen erstes, dort nicht wiederkehrendes Integral bereits S. 90 ein Beispiel gerechnet wurde.

2. Um die „Solidarität“ zwischen D und $\mathfrak{C}$, nach welcher D für $a = \mathfrak{C}$ ein Minimum wird, auch für einen stetigen K.-G. zu beweisen, brauchen wir nunmehr nur den Differentialquotienten des Ausdruckes [208] nach a gleich Null zu setzen. Da das erste Doppelintegral zwischen den Extremen eine Konstante ist, so wird unter der schon mehrmals betonten Voraussetzung, daß das erste (innere) Integral bei dem Doppelintegral gleich

$$\int_{E_u}^{x} \mathfrak{B}(x)\, dx$$

sei, die Bedingung für das Minimum

$$0 = \frac{dD}{da} = -1 + 2 \int_{E_u}^{a} \mathfrak{B}(x)\, dx,$$

$$\int_{E_u}^{a} \mathfrak{V}(x)\, dx = \frac{1}{2}. \qquad [210]$$

Hiermit sind wir aber in der Tat zur Definitionsgleichung [20] des Zentralwertes für ein stetiges $\mathfrak{V}(x)$ zurückgekehrt. Daß es sich hierbei nur um ein Minimum handeln kann, zeigt das Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2 D}{da^2} = 2\,\mathfrak{V}(x), \qquad [211]$$

der überhaupt niemals negativ wird, da natürlich $\mathfrak{V}(x)$ als rel. H. stets eine positive Größe zwischen 0 und 1 ist.

3. Eine größere praktische Bedeutung erlangt aber diese Berechnungsweise wohl in ihrer noch weitergehenden Vereinfachung, die bei der Beziehung der Abweichungen auf das arithmetische Mittel $\mathfrak{A}$ als Ausgangswert a eintritt. Wir sehen dies ohne weiteres schon an der Schlußformel [209] voraus, die durch Einsetzung von $\mathfrak{A}$ für a die Form annimmt

$$D(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} - \mathfrak{A} + 2\int_{E_u}^{a}\!\!\int \mathfrak{V}(x)\, dx\, dx =$$

$$= 2\int_{E_u}^{a}\!\!\int \mathfrak{V}(x)\, dx\, dx. \qquad [212]$$

Die mittlere Variation D ist also bei ihrer Beziehung auf das arithmetische Mittel $\mathfrak{A}$ einfach gleich dem zweifachen Doppelintegral der Verteilung $\mathfrak{V}(x)$ nach x zwischen dem arithmetischen Mittel $\mathfrak{A}$ als oberer und dem unteren Extrem als unterer Grenze (unter der hier stets gemachten Voraussetzung, daß das erste (innere) Integral durch die Wahl der Konstanten $C = \int_{x=E_u} \mathfrak{V}(x)\, dx$ verschwinde, was bei der numerischen Integration nach § 19, c tatsächlich erfüllt ist.)

Da nun unsere Annäherungsformel [87] nach § 19, c, 7 in der Tat eine sehr bequeme numerische Berechnung des Doppelintegrals in [212] gestattet, und da außerdem bei ihrer Anwendung die wissenschaftlich an sich allgemeingültigere Interpolation eines stetigen K.-G. zugleich mit erledigt ist, so wird man dieser Bestimmung der mittleren Variation für zukünftige Berechnungen in der Tat vor der gewöhnlichen Berechnung nach Gl. [17], die erst die Bildung aller Abweichungsglieder erforderlich macht, den Vorzug geben dürfen. Sind die beobachteten relativen Häufigkeiten eines K.-G. vom unteren Extrem $x_0 = E_u$ bis zum oberen $x_p = E_o$ wieder mit

$$z_0 = 0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots z_{p-1},\ z_p = 0$$

bezeichnet, so ist bei äquidistantem Intervall i nach [87] mit genügender

Annäherung die mittlere Variation (unter gleichzeitiger Interpolation einer stetigen Verteilung $\mathfrak{V}(x)$) bei Beziehung auf das arithmetische Mittel $\mathfrak{A}$:

$$\mathbf{D}(\mathfrak{A}) = 2i\Big\{(\varrho-1)z_1 + (\varrho-2)z_2 \cdots + 1\cdot z_{\varrho-1} + \frac{1}{2}(0{,}5+\alpha)^2 z_\varrho + \alpha \sum_{x=1 \text{ bis } \varrho-1} z_x + \frac{\alpha}{16}(z_1 - z_{\varrho+1} + z_{\varrho-1})\Big\}. \qquad [213]$$

Hierin ist $\mathfrak{A} = x_\varrho + \alpha i$, wobei α positiv oder negativ ist, je nachdem die dem $\mathfrak{A}$ nächstliegende Beobachtungsabszisse $x_\varrho <$ oder $> \mathfrak{A}$. Das Restglied $\frac{\alpha}{16}$ (z_1 usw.) kann eventuell auch noch vernachlässigt werden.

4. Als **Rechenbeispiel**, das uns zugleich den Grad der Abweichung von der gewöhnlichen Berechnungsweise nach [19] erkennen läßt, bestimmen wir die mittlere Variation für eine Verteilungskurve von Reaktionszeiten, für die in der Literatur dieses Streuungsmaß bisher mit Recht das fast allein übliche zu sein pflegte. Sie stammt aus Alechsieffs[1]) „Reaktionszeiten bei Durchgangsbeobachtungen". Die von Null verschiedenen absoluten Häufigkeitswerte Z sind für die äquidistanten Abszissen x_1 bis x_{15}, deren Intervall $i = 10\sigma$ hier als Einheit betrachtet werden soll:

	(7,45)						(14,45)	(15,45)			
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
Z:	1	0	0	3	3	8	18	30	37	20	11

	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
Z:	7	4	2	2

Um die relativen Häufigkeiten $z = \mathfrak{V}(x)$ zu bestimmen, sind also diese Werte zunächst mit $\Sigma Z = 146$ zu dividieren. Das arithmetische Mittel $\mathfrak{A}$ selbst wird natürlich nach dem S. 126 Gesagten auch für ein stetiges $\mathfrak{V}(x)$ stets auf die einfache Art berechnet. So finden wir, da $x_0 = E_u = 6{,}45$ ist,

$$\mathfrak{A} = \Sigma x_i z_i = 15{,}3.$$

Berechnet man nun die mittlere Variation D auf die gewöhnliche Art, so sind immer erst alle Abweichungen $v_i = \mathfrak{A} - x_i$ zu bilden und mit ihren absoluten H. Z_i zu multiplizieren, worauf die Summe $\Sigma v_i Z_i$ noch mit 146 zu dividieren ist. So findet man hier

$$D(\mathfrak{A}) = 227 \cdot \frac{1}{146} = 1{,}548.$$

Nach unserer Formel ist zunächst x_ϱ, d. h. die dem Ausgangswert $a = \mathfrak{A}$ nächstliegende Beobachtungsabszisse zu suchen. Da $\mathfrak{A} = 15{,}3$, und $x_0 = E_u = 6{,}45$, so ist $x_\varrho = x_8$, wenn man die nächst niedrigere Beobachtungsabszisse wählt. Hierbei wäre $\alpha = 0{,}85$, also

$$\mathfrak{A} = x_\varrho + 0{,}85i.$$

1) Wundt, Phil. Stud. 16. 1900, S. 53. (Tabelle II, 1. Reihe), auch benutzt von G. F. Lipps, Psychische Maßmethoden, S. 132f. Vgl. auch meine Abh. über „die mathem. Grundlagen usw." in Wundts Psychol. Stud. VI, 5 u. 6, S. 442ff.

Dagegen wird α bedeutend kleiner, wenn man bis zur nächst höheren Abszisse geht und $x_{\varrho'} = x_9$ setzt, wobei $\alpha = -0{,}15$ oder

$$\mathfrak{A} = x_{\varrho'} - 0{,}15\,i$$

wird. Nach der früheren Regel ziehen wir also diese letztere Konstruktion des Integrales vor. Da wir vorhin $i = 1$ setzten, wird nach unserer Formel [87] für die numerische Auswertung des Doppelintegrales:

$$D'(\mathfrak{A}) = 2\int_{E_u}^{\mathfrak{A}}\int \mathfrak{V}(x)\,dx\,dx = \frac{2}{146}\Big\{1\cdot 8 + 0\cdot 7 + 0\cdot 6 + 3\cdot 5 + 3\cdot 4 + 8\cdot 3$$
$$+ 18\cdot 2 + 30\cdot 1 + 37\cdot\frac{0{,}35^2}{2} - 0{,}15\cdot 63\Big\}.$$

Nehmen wir auch noch das Restglied

$$-\frac{0{,}15}{16}(z_1 - z_{\varrho'+1} + z_{\varrho'-1}) = 0{,}084$$

in die Klammer { } hinein, so wird schließlich

$$D'(\mathfrak{A}) = \frac{2\,(125 + 2{,}12 - 9{,}45 + 0{,}084)}{146} = 1{,}606.$$

Das Restglied hat hier nur den Wert 0,0011 und könnte leicht auch noch vernachlässigt werden. Jedenfalls weicht der gefundene Wert $D'(\mathfrak{A})$ von dem gewöhnlichen um $+0{,}058\,i = 0{,}58\,\sigma$ ab, eine immerhin ziemlich kleine Differenz, die indessen nicht etwa nur einen „Fehler" unserer Berechnung darstellt, sondern vor allem auf Rechnung davon zu setzen ist, daß durch [87] eine stetige Funktion interpoliert wird, die schon durch die Werte zwischen x_0 und x_1 einerseits und x_{15} und x_{16} andererseits eine etwas größere Streuung einführt.

Der Wert würde sich übrigens nur sehr wenig ändern, wenn wir seiner Berechnung $x_\varrho = x_8$ bzw. $\alpha = +0{,}85\,i$ zugrunde legen würden. Es wäre dann (unter Hinzunahme des Restgliedes):

$$D(\mathfrak{A}) = \frac{2}{146}\Big\{1\cdot 7 + 0\cdot 6 + 0\cdot 5 + 3\cdot 4 + 3\cdot 3 + 8\cdot 2 + 18\cdot 1 + 30\cdot\frac{1{,}35^2}{2}$$
$$+ 0{,}85\cdot 33 + \frac{0{,}85}{8}(-9)\Big\} = 1{,}594,$$

also nur eine Verkleinerung um 0,012 gegen $D'(\mathfrak{A})$. Das Restglied bedeutet auch hier im ganzen nur $-0{,}013$.

Bei der Beziehung der mittleren Variation auf einen beliebigen Ausgangswert a wäre nach [209] noch die Differenz desselben vom arithmetischen Mittel, auf die gewöhnliche Art berechnet, also $\mathfrak{A} - a$, hinzuzufügen. Dabei wäre dann natürlich x_ϱ und α nach a zu bestimmen, so daß $a = x_\varrho + \alpha i$. Alles übrige ist, wie gesagt, aus dem soeben entwickelten Beispiele zu entnehmen.

Nachdem die Bestimmung des dritten Hauptwertes, des sog. Dichtigkeitsmittels $\mathfrak{D}$, schon von § 17b, 3 an ausführlich für eine stetige Verteilung $\mathfrak{V}(x)$ entwickelt wurde und diesem Repräsentanten, abgesehen von dem ebenso äußerlich hervortretenden Abstand $E_0 - E_u$ der Extreme, kein Streuungsmaß gleich unmittelbar zugeordnet werden kann, wie M und D dem 𝔄 und ℭ, so sind hiermit alle unsere praktisch wichtigen Aufgaben der K.-L. für die Psychophysik erledigt, wenigstens so weit unmittelbar beobachtete einfache K.-G. in Frage kommen.

Kapitel 7.

Die Bestimmung eines hypothetischen Kollektivgegenstandes aus der Beobachtung seiner Summenfunktion.

29. Die Beziehungen zwischen dem hypothetischen K.-G. der Schwelle und dem beobachteten K.-G. des Schwelleneffektes im allgemeinen.

a) Der K.-G. der Grenzkurve als empirischer Ausgangspunkt bei der Bestimmung einer Schwelle (Grenzabszisse).

1. Von Ableitungen komplizierter K.-G. aus „einfachen" im Sinne des § 14,2 soll hier nur der analytisch besonders elementare, in der Psychophysik aber weitaus wichtigste Spezialfall behandelt werden, der uns bei der Berechnung der Unterschiedsschwelle ausführlich beschäftigen wird. Der beobachtete K.-G., der hierbei auf den einfachen K.-G. der zufällig variablen Schwelle zurückgeführt werden soll, ist die bisher schon mehrfach genannte Funktion, nach welcher die relativen Häufigkeiten mehrerer Vergleichsurteile (z. B. größer, kleiner, gleich) von einem sog. „Vergleichsreize" x abhängig sind, dessen einzelne Größenstufen $x_1, x_2 \ldots x_s$ je n_x mal mit einem konstanten „Haupt-" oder „Normalreiz" verglichen werden. Nachdem schon im 3. Kapitel § 14,3 S. 38ff. der allgemeine formale Charakter dieser Urteilsfunktionen als komplexer K.-G. erläutert worden war, folgten im 4. Kapitel mehrfache Beispiele der interpolatorischen Ergänzung einer solchen Beobachtungsreihe zu einer stetigen Verteilung $\mathfrak{V}(x)$. Insbesondere wurden § 19 c (S. 83ff.) an dem Beispiele Fig. 4 einer Kurve von Verschiedenheits-(Kleiner-)Urteilen die numerischen Integrationen über die beobachtete Funktion erläutert, von denen wir nunmehr hier bei der Berechnung der Hauptwerte und Streuungsmaße des hypothetischen K.-G. der Schwelle Gebrauch zu machen haben. An sich ist die „Schwelle" ein viel allgemeinerer Begriff. Denn jedes „Extrem" (Maximum oder Minimum) einer abstufbaren Auslösungsbedingung für einen Vorgang, der jenseits desselben eben nicht mehr eintreten kann, läßt sich so bezeichnen, und die „Unterschiedsschwelle" ist eben die Differenz zwischen Vergleichs- und Normalreiz, die das Bedingungsextrem für deren Unterscheidung darstellt. Daher bildet aber natürlich auch die gewöhnliche Form der beobachteten Funktionen, die als Effekt der zufälligen Größenschwankungen der Unterschiedsschwelle gedeutet werden kann, an sich eine viel allgemeinere Erscheinung. Sie findet sich, wenn der Effekt der quantitativ abstufbaren Auslösungsursache x eines Ereignisses wiederholt bei den nämlichen Stufen x beobachtet wird, und dabei gleichzeitig jene weitere Teilbedingung, die als „Schwelle" in dem Sinne einer Minimal- oder Maximalbedingung zu betrachten ist, nach Zufall variiert. Bei solchen

zufälligen Schwankungen einer an sich eventuell rein hypothetischen Teilbedingung wird eben dann das Ereignis innerhalb eines bestimmten Unsicherheitsbereiches bald auftreten, bald unterbleiben, bzw. durch eine andere oder eine von mehreren anderen Möglichkeiten ersetzt werden. Von diesem allgemeinen Gesichtspunkte aus sollen also hier einstweilen die rein mathematischen Beziehungen zwischen dem beobachteten Totaleffekt und dem hypothetischen K.-G. der Schwelle vorausgenommen werden, um aus ihnen die Methoden zur Berechnung der Repräsentanten des K.-G. der Schwelle zu entwickeln, wobei wiederum zwischen einem unmittelbaren Verfahren und den Voraussetzungen spezieller Verteilungsgesetze für diesen hypothetischen K.-G. zu unterscheiden sein wird.

2. Die einfachste Zurückführung dieser Art gestatten aber nun speziell diejenigen K.-G. des § 14,3, deren Exemplare sich nicht wie bei den einfachen K.-G. auf den Bereich zwischen zwei Extremen E_u und E_o beschränken, sondern vielmehr von einem Extrem E' beginnend nach einer Seite hin, also entweder mit steigendem oder fallendem Werte der als Abszisse von $\mathfrak{W}(x)$ systematisch variierten Beobachtungsbedingung x, ununterbrochen an Häufigkeit zunehmen, bis ihre rel. H. an einem weiteren charakteristischen Punkte, der im folgenden kurz E heißen möge, den größtmöglichen Wert 1 erreicht und von da an fortgesetzt beibehält. Unter den Urteilskurven sind nur die extremen Kurven der Verschiedenheitsurteile von dieser Art, also bei nur drei Urteilsmöglichkeiten „größer" (g), „gleich" (u), „kleiner" (k) die Funktionen $F_g(x)$ und $F_k(x)$, und bei fünf Fällen **g**, g, u, k, **k** (vgl. § 14,1 S. 34) nur $F_{\mathbf{g}}(x)$ und $F_{\mathbf{k}}(x)$. Die Kurve $F_u(x)$ der Gleichheitsurteile (und bei fünf Fällen auch $F_g(x)$ und $F_k(x)$) kehren dagegen nach Passierung eines von 1 beliebig verschiedenen Maximums $\mathfrak{D}$ wie ein gewöhnlicher K.-G. bei einem zweiten Extrem zur Abszissenachse zurück. Gerade jene einseitig bis zur r. H. 1 ansteigenden K.-G. stehen aber nun offenbar dem Tatbestand am nächsten, in dem der schon genannte Begriff der Schwelle am einfachsten und gewissermaßen am anschaulichsten zu erfassen ist, nämlich dem Effekte der Abstufung der Auslösungsbedingung x (z. B. des Vergleichsreizes) bei konstanter Größe der Schwelle. Handelt es sich dabei um ein Bedingungsminimum, d. h. eine Schwelle für eine bei Zunahme des x hervortretende Erscheinung oder eine „obere Schwelle" in diesem Sinne, so fehlt bei ihrer Konstanz der Effekt bis zu einem bestimmten, weiterhin als „obere Grenzabszisse" r_o bezeichneten[1]) Werte

1) Dieser Ausdruck der „Grenzabszisse" ist insbesondere im Zusammenhange der analytischen Darstellung der Urteilsfunktionen F(x) unmittelbar als einzelner absoluter Abszissenwert wohl verständlich, während man bei der „Unterschiedsschwelle" meistens an die Differenz der Abszissen des Normalreizes N einerseits und des Vergleichsreizes $V = x$ denkt. Indessen kann man an und für sich auch bei der Bestimmung der Unterschiedsempfindlichkeit den Begriff der „Schwelle" schlechthin ähnlich absolut gebrauchen, wie bei der sog. „absoluten Reizschwelle" (d. h. für den minimalen absoluten Reizwert x, der eben eine Empfindung herbeiführt). Nur muß man eben zum Effekte des g- bzw. k-Urteiles nach Überschreitung der oberen bzw. der unteren Unterschiedsschwelle stets den Normalreiz und den Vergleichsakt als notwendige Teilbedingungen hinzunehmen. Im folgenden werden wir jedenfalls, soweit der Zusammenhang Mißverständnisse verhindert, die „obere" und „untere" Schwelle im Sinne der absoluten Grenzabszissen r_o und r_u gebrauchen.

vollständig, um von da an dann bei allen Einwirkungen von $x > r_0$ bis zu einer entfernten, hier nicht weiter in Betracht gezogenen Grenze durchweg einzutreten. Bei einem konstanten Bedingungsmaximum aber wäre die rel. H. des Ereignisses mit Abnahme des x bis zu einer „unteren Schwelle" oder „unteren Grenzabszisse" r_u gleich Null, um von da an für $x < r_u$ bis auf weiteres [1]) gleich 1 zu bleiben. Der in dem Wesen des Schwellenbegriffes begründete Effekt der einseitigen Entwicklung einer rel. H. von 0 zu 1 wäre hiernach in diesem einfachsten, empirisch natürlich niemals genau verwirklichten Falle gewissermaßen am reinsten zu erfassen. Das Besondere, was in den empirischen Urteilskurven mit gleichem Grundcharakter noch hinzutritt und den hypothetischen Schwellenbegriff speziell als Kollektivgegenstand aufzufassen nötigt, ist also nur die Ausdehnung des Überganges von 0 zu 1 über eine ganze Strecke $E - E'$ an Stelle des plötzlichen Emporschnellens bei völlig konstantem Schwellenwert. Diese soll eben dann weiterhin auf die zufälligen Schwankungen der Schwelle nach Art eines gewöhnlichen K.-G. zurückgeführt werden. Dabei gelten die Bezeichnungen des „oben" und „unten" wie des Minimums und Maximums natürlich immer nur für das spezielle Ereignis, für das die Schwelle gesucht wird, und sind daher immer nur relative, wie es eben im Wesen jeder Grenze liegt [2]). Die Kurve des einseitig ansteigenden K.-G. des gerade betrachteten Ereignisses ist ja, um 180^0 gedreht, die Kurve des K.-G., der kontradiktorisch aus allen sonstigen Möglichkeiten, eventuell auch nur einer einzigen, kombiniert wird und der in der nämlichen Richtung um gleichviel abfällt. Wir wollen diesen K.-G. im folgenden kurz als „kontradiktorisches Komplement" des ersten K.-G. bezeichnen. Bei konstanten Bedingungen spränge also der „komplementäre" K.-G. $F_{u+k}(x)$ bei der nämlichen Grenzabszisse r_0 von 0 auf 1, an der $F_g(x)$ seinerseits aufhörte; bei einem allmählichen Übergang aber herrscht zwischen beiden Komponenten überall wenigstens die vollständigste gegenseitige Abhängigkeit wegen der bereits S. 40 genannten Grundrelation [15]

$$F_{u+k}(x) = 1 - F_g(x). \qquad [214]$$

1) Natürlich hören die Ereignisse, die einerseits erst von diesen Grenzabszissen an auftreten, bei noch weiterer Zunahme bzw. Abnahme des Abszissenwertes auch wiederum einmal auf, weil es auch nach der anderen Seite Grenzbedingungen für ihr Zustandekommen gibt. Bei fortgesetzter Steigerung oder Schwächung des Vergleichsreizes hört also z. B. dessen adäquate Wahrnehmung und damit natürlich auch seine Beurteilung schließlich überhaupt auf. Indessen handelt es sich hier nur darum, daß diese anderweitige Einschränkung, die ihrerseits natürlich ebenfalls unter den Schwellenbegriff in diesem allgemeinen Sinne subsumiert werden kann, von den Abszissen r_0 bzw. r_u weit genug entfernt ist, um die dann bei inkonstanten Bedingungen noch hinzutretende Unsicherheitsregion durch einen hinreichend breiten Bezirk voller Sicherheit, d. h. mit der r. H. = 1, entschieden abgrenzen zu lassen. Denn nur unter dieser Voraussetzung besitzt dann weiterhin auch der hypothetische einfache K.-G. der Schwelle zwei sichere Extreme, die eine bestimmte Wertangabe speziell für ihn ermöglichen. Auf die sekundären Fragen, die in dieser Hinsicht an der unteren und oberen Grenze bestimmter Reizwirkungen, bei den sog. „absoluten" Schwellen, hinzutreten, können wir natürlich erst bei den speziellen Vergleichsmethoden eingehen. Die hier gemeinte obere Grenze bezeichnet Wundt bekanntlich als „Reizhöhe". (Vgl. Grundzüge der physiol. Psychologie I[6], 1908, S. 559.)

2) Auf konventionelle absolute Bedeutungen dieser Art werden wir erst unten zurückkommen.

3. An und für sich gestatten aber natürlich auch die mit der X-Achse geschlossenen Verteilungskurven eine analoge Ableitung aus Schwellen. Indessen sind hierbei wegen der beiderseitigen Begrenzung stets mindestens zwei Schwellen im Spiele, von denen die eine dabei als Minimum, die andere als Maximum eines Effektes zu betrachten ist, der außerhalb dieser Grenzen jeweils von anderen Effekten abgelöst wird. Im einfachsten Falle einer vollständigen Konstanz dieser beiden Grenzen würde also die Geschlossenheit der beobachteten Effektkurve mit der X-Achse in beiden Extremen durch einen zweimaligen plötzlichen Wechsel der rel. H. von 0 zu 1 und umgekehrt erreicht, wie er jene einseitigen K.-G. unter der nämlichen Voraussetzung einzeln für sich charakterisierte. Und so hätte denn auch jeder mit der X-Achse geschlossene, also äußerlich „einfache" K.-G. bei völlig konstanten Bedingungen je eine Grenzabszisse mit einem einseitig ansteigenden K.-G. gemeinsam, E_u wäre mit einem r_u, E_o mit einem r_o identisch. Bei zufälligen Schwankungen der beiden Schwellen überschneiden sich freilich bisweilen die Unsicherheitsregionen der beiden äußeren K.-G., ja bei Urteilskurven der genannten Art ist dies sogar im allgemeinen der Fall, so daß für den mittleren K.-G. (also $F_u(x)$) kein Bezirk mit der vollen Höhe der rel. H. = 1 übrig bleibt. Auch in diesem Falle hat aber natürlich der mittlere K.-G. das gesamte Beobachtungsmaterial, aus dem dann bei diesen Schwankungen „Hauptwerte" der Schwellen (Grenzabszissen) zu berechnen sind, mit den beiden nach außen ansteigenden K.-G. gemeinsam, wie es in der soeben wiederholten Grundrelation [15] zwischen den rel. H. der verschiedenen Möglichkeiten:

$$F_k(x) + F_u(x) + F_g(x) = 1$$

zum Ausdrucke kommt. Um dessentwillen ist aber freilich auch aus den u-Urteilen hinsichtlich der K.-G. der Schwellen nichts Neues zu entnehmen, das nicht schon aus $F_k(x)$ und $F_g(x)$ zu berechnen wäre.

Zu einer klaren Analyse des Tatbestandes der Schwelle wird man also stets von der Betrachtung der einseitig zur rel. H. 1 ansteigenden K.-G. ausgehen, die im folgenden bisweilen einfach als beobachtete „Grenzkurven" bezeichnet sein werden. Bei der Bestimmung der sog. „absoluten" Schwellen, d. h. der minimalen Reize, die eben noch, und der maximalen, die eben nicht mehr eine bestimmte Empfindung auslösen, wird ja auch ohnedies eine untere bzw. eine obere Grenzkurve allein für sich abgeleitet.

4. Mit der Beobachtung des beiderseits begrenzten K.-G. ist aber natürlich jedenfalls im Vergleich zur Beschränkung auf die Betrachtung der einzelnen Grenzkurven ein neuer realer Gegenstand in die Betrachtung eingeführt, ähnlich wie wenn man die einseitig ansteigenden K.-G. über ihre Region mit der rel. H. 1 hinaus bis zu der jenseitigen, in unserer vorigen Überlegung ausdrücklich ausgeschalteten Grenze verfolgen würde. Während also bei der Einschränkung der Analyse auf eine einzelne Grenzkurve die Schwelle immer nur als Grenzabszisse angegeben werden kann, ist bei der Zurückführung eines gewöhnlichen mit der x-Achse geschlossenen K.-G. auf zwei derartige Grenzabszissen stets noch der absolute Wert der Distanz zwischen beiden Grenzen bestimmbar. Da hier die weitere Deutung

der jeweiligen Maximal- und Minimalbedingungen noch nicht in Frage kommt, die uns speziell bei den Urteilskurven im nächsten Abschnitte ausführlicher beschäftigen soll (s. § 32ff.), so soll auch diese absolute Distanz, die bei jenen psychophysischen Beispielen von einem bestimmten Gesichtspunkte aus als (doppelte) Unterschiedsschwelle im engeren Sinne aufzufassen ist, hier nur als rein formale Resultante der Kombination von mindestens drei K.-G. nach Gl. [15] bzw. [214] in Betracht gezogen werden. Sie ist jedenfalls an das Vorkommen mittlerer Hauptfälle gebunden und verschwindet, wenn innerhalb des kritischen Bereiches nur zweierlei Möglichkeiten bestehen. Denn da in diesem Falle, der auch empirisch bisweilen durch das völlige Fehlen von u-Urteilen neben den g- und k-Fällen realisiert ist, nur noch die Relation

$$F_g(x) + F_k(x) = 1 \qquad [215]$$

übrig bleibt, so sind eben beide Kurven nur noch kontradiktorische Komplemente im Sinne der Gleichung [214], die keinen Abstand zwischen sich lassen.

Bei mindestens drei Hauptfällen würde nun diese Distanz unter völlig konstanten Bedingungen als der ganz bestimmte Abstand $r_o - r_u$ der Grenzabszissen bzw. der Extreme E_o und E_u des mittleren Falles aus den Beobachtungen unmittelbar zu entnehmen sein. Weil aber die drei Kurven infolge der zufälligen Schwankungen allmählich ansteigen, so ist auch dieser mit dem mittleren K.-G. gesetzte Abstand ein K.-G. und daher höchstens in Hauptwerten der Grenzabszissen im Sinne der K.-L. anzugeben. Seine Bestimmung wird somit erst durch diejenige dieser beiden Hauptwerte vermittelt werden, die einzeln für sich aus ihren K.-G., in unserem Falle also aus $F_g(x)$ und $F_k(x)$, zu berechnen sind. Obgleich also diese beiden Grenzkurven auf Grund der tatsächlichen Faktoren, die von dem Abstand der Hauptwerte r_o und r_u so gut als möglich repräsentiert werden, realiter nicht voneinander unabhängig sein können, so ist doch diese Abhängigkeit innerhalb des Beobachtungsmateriales nicht anders enthalten, als in der nunmehr schon öfters genannten Gleichung [15] bzw. [214]. Diese läßt aber eben den beiden extremen Kurven, rein analytisch betrachtet, die volle beiderseitige Unabhängigkeit, die ihnen das Dazwischentreten des zufällig schwankenden Mittelfalles gewährleistet. In jedem Einzelversuche liefert eben ein einzelner Vergleichsreiz x immer nur einen einzigen Fall der Mannigfaltigkeit des ganzen komplexen K.-G. aus den drei Kurven. Man weiß also zwar im allgemeinen, daß bei einem g-Fall in dem nämlichen Augenblicke ein etwas kleinerer Reiz mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein u-Urteil und ein noch kleinerer ein k-Urteil herbeiführen würde, und Analoges gilt umgekehrt für den Augenblick der Ableitung eines k-Falles für die u- und g-Fälle. Es ist also keine Inversion der gleichzeitig gültigen Werte der beiden Grenzabszissen r_o und r_u möglich. Denn da r_o das Minimum für die g-Fälle, r_u aber das Maximum für die k-Fälle bedeutet, so müßte, falls im Laufe der zufälligen Variationen beider Schwellen auch einmal $r_o < r_u$ werden könnte, in dem Bereich zwischen r_u und r_o gleichzeitig ein (sicheres) Größer- und ein (sicheres) Kleinerurteil auftreten, was natürlich eine contradictio in adjecto wäre. Wieviel im einzelnen indessen die Reize verschieden sein müßten, um in einem gegebenen Augenblicke g, u oder k herbeizuführen, darüber wird uns bei sukzessiver Beurteilung einzelner x gar nichts bekannt. Wenn also dem System der drei beobachteten Urteilskurven zwei hypothetische einfache K.-G. der Schwellen für die g- und k-Fälle zugrunde gelegt werden, so wird zwar jedem Einzelfalle des einen K.-G. de facto ein ganz bestimmter des anderen K.-G. als gleichzeitig zugeordnet sein. Diese ganz allgemeine Abhängigkeitsbeziehung läßt aber der Zuordnung im einzelnen noch so viel Freiheit, daß die Repräsentanten der K.-G. unabhängig voneinander zu berechnen sind. Wir können daher im folgenden die Ableitung des K.-G. für eine einzelne Grenzabszisse gesondert betrachten und haben dabei nur die beiden Hauptfälle der mit steigendem Abszissenwerte x steigenden und fallenden Grenzkurve (Beobachtungskurve) zu unterscheiden, die aber natürlich auch in der Beziehung zu den abgeleiteten hypothetischen K.-G. nur Unterschiede der Vorzeichen mit sich bringen werden.

5. Nun könnte man vielleicht von einem ganz allgemein hypothesenfeindlichen Standpunkte aus bezweifeln, ob zur Angabe allgemeingültiger Repräsentanten eines einseitig ansteigenden K.-G., also zur Bestimmung einer mittleren Grenzabszisse und ihres Streuungsmaßes, überhaupt erst ein besonderer K.-G. der Schwelle, auch nur in dem ganz abstrakten Sinne des Bedingungsextremes, hypostasiert zu werden brauche. Man könnte also etwa daran denken, den variablen Teil der Grenzkurve, d. h. den Bereich E′E des Anstieges von 0 bis 1 (s. S. 165), zu verselbständigen und für ihn unmittelbar Hauptwerte und Streuungsmaße wie für einen einfachen K.-G. mit den Ordinaten $z_0 = F(E')$, z_1, $z_2 \ldots z_p = F(E)$ zu berechnen. Wenn man sich auf diese spezielle Kategorie von K.-G. beschränkt, dürfte einem solchen Verfahren wohl auch in der Tat ein gewisser Grad von Vergleichbarkeit zukommen. Indessen würden diese Werte doch im gesamten Begriffssystem der sonstigen K.-L. zusammenhangslos dastehen. Und doch weist die Zusammensetzung des ganzen Systemes der Urteilskurven aus Ordinaten, die für sich je eine Mannigfaltigkeit von n_x auf $F(x)$ und seinen kontradiktorischen Gegensatz verteilten Einzelfällen repräsentieren, ganz von selbst auf eine Elementarkonstruktion aus einem einfachen K.-G. hin. Dieser besteht aber eben in der allen Ordinaten gemeinsamen Bedingung für das Auftreten des speziellen Hauptfalles (z. B. g oder k), wie sie oben in dem Begriff seiner „Schwelle" als eines Bedingungsextremes angedeutet und im folgenden weiter ausgeführt ist. Zur Allgemeingültigkeit der beobachteten Kurve $F(x)$ ist dann freilich vorausgesetzt, daß die n_x Einwirkungen jeder Stufe x der Auslösungsursache (z. B. des Vergleichsreizes bei Urteilskurven) zahlreich genug sind, um alle Möglichkeiten dieses K.-G. bei jedem beobachteten Werte hinreichend erschöpfen zu können. Auch erscheint es zunächst wenigstens möglich, daß die spezielle Größe der n_x-mal einwirkenden Reizstufe x den K.-G. der im Schwellenbegriff zusammengefaßten Teilbedingungen unberührt läßt. Wir werden allerdings sehen, daß speziell diese letztere Voraussetzung von der Erfahrung wesentliche Einschränkungen erleidet, die dann eben die Zurückführung sämtlicher Ordinaten des beobachteten K.-G. auf einen konstanten K.-G. dieser Art überhaupt illusorisch machen. Dennoch handelt es sich dabei immer nur um sekundäre Fragen. Wird doch hierdurch

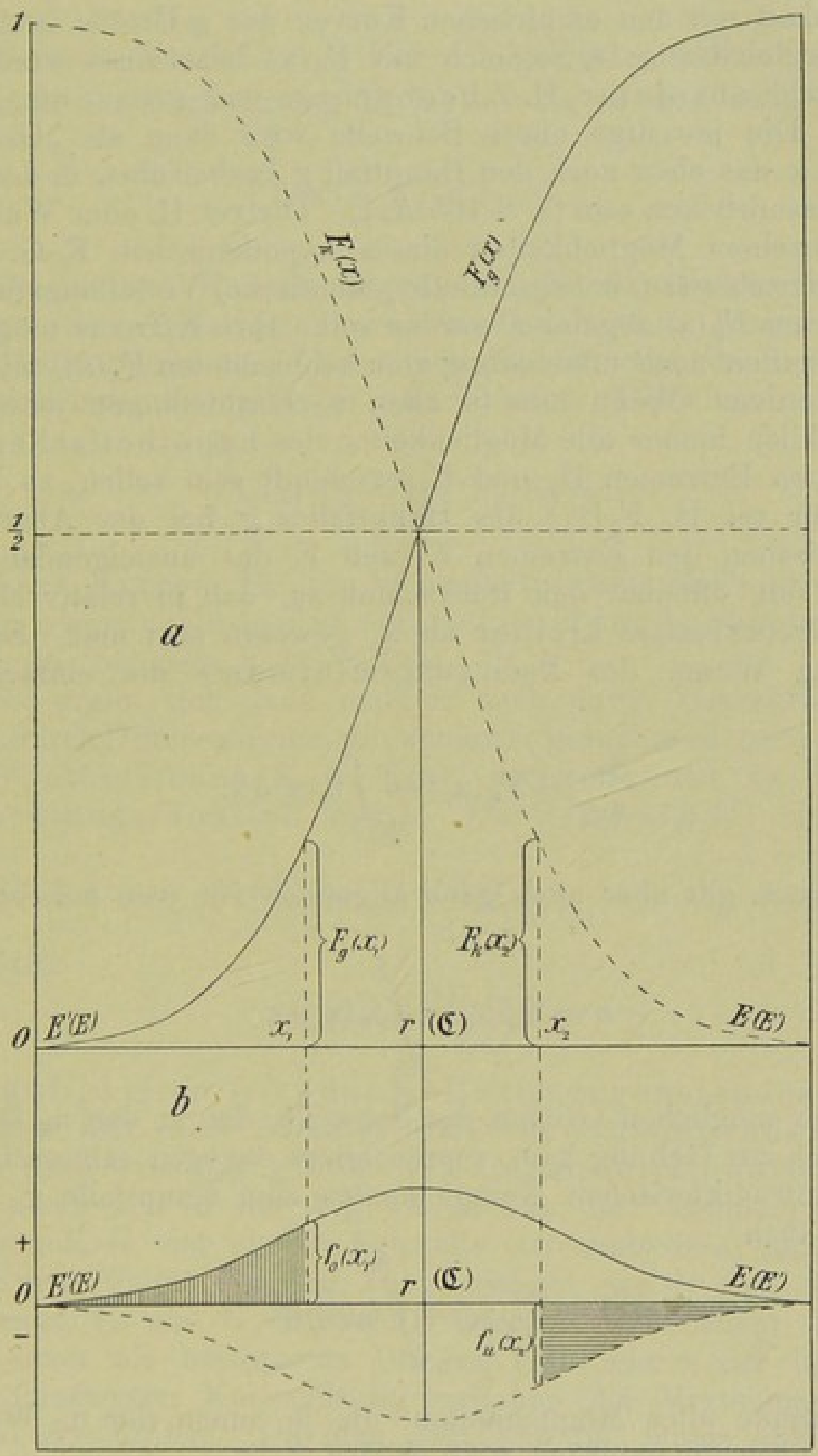
nicht etwa die Zurückführung der beobachteten K.-G. auf den K.-G. der Schwelle überhaupt sinnlos, sondern es erscheint nur die Angabe relativ einfacher Repräsentanten dieses hypothetischen K.-G. je nach dem Grade dieser Inkonstanz hierbei mehr oder weniger erschwert. Im übrigen hat der bekannteste Versuch, aus der Betrachtung der beobachteten K.-G. im ganzen ohne weitere Hypothesen unmittelbar Repräsentanten abzuleiten, der schon 1858 von A. W. Volkmann[1]) mit seiner Statuierung der Grenzabszisse bei $F(x) = 50\%$ unternommen wurde, sich nachträglich doch nur als Bestimmung eines geläufigen Hauptwertes des hypothetischen K.-G. der Grenzabszisse erwiesen, der zunächst nur der Beweis für ihre mehr gefühlsmäßig erfaßte Repräsentationsfähigkeit fehlte.

In neuester Zeit versuchte insbesondere F. M. Urban[2]) den hypothetischen Schwellenbegriff ausdrücklich durch den konkreten anschaulichen Tatbestand des Urteilswechsels von „gleich" zu „größer" oder „kleiner" bzw. umgekehrt in geschlossenen Versuchsreihen zu ersetzen, in denen jede der benutzten Stufen x des Vergleichsreizes immer je einmal vorkommt. Die „Grenze des Unsicherheitsgebietes" soll dann durch den Mittelwert aus den Lagen dieser Urteilswechsel in vielen Reihen repräsentiert werden. Hierauf wollen wir aber erst bei der sog. „Methode der Minimaländerungen" im nächsten Hauptabschnitte etwas ausführlicher eingehen, aus der sich Urbans spezieller Versuch herausentwickelt hat. Hier sei einstweilen nur so viel hervorgehoben, daß von dem Augenblick an, wo wir eine zufällige Veränderung des Schwellenwertes von einem Versuch zum anderen zugeben müssen, die Urteilswechsel in solchen Reihen für uns nur noch scheinbare Lagen des gesuchten Bedingungsextremes bedeuten können. Zu dem K.-G. aller unter den gegebenen Versuchsbedingungen möglichen Lagen der wirklichen Bedingungsextreme aber stehen sie in einem sehr komplizierten Abhängigkeitsverhältnis. Obgleich man nämlich infolge der Möglichkeit einer fortwährenden Variation von r_o und r_u niemals deren augenblickliche wahre Lage im einzelnen anzugeben vermag, läßt sich, wie im folgenden ausführlich gezeigt ist, aus der gesamten Mannigfaltigkeit der beobachteten Urteile wenigstens der K.-G. aller möglichen Lagen nach ganz klaren Prinzipien erschließen, so daß seine Hauptwerte und Streuungsmaße aus den „Grenzkurven" sehr bequem zu berechnen sind. Aus den konkreten Urteilswechseln in jenen Einzelreihen würden sich aber selbst besten Falles höchstens Annäherungen an diese Mittelwerte der wirklichen Lagen von r_o und r_u und auch diese nur mit einer unverhältnismäßig großen Zahl von Einzelversuchen berechnen lassen, da eben die Urbanschen Mittelwerte das gesamte Beobachtungsmaterial nur einseitig wiedergeben und mehr oder weniger Einzelversuche gar nicht berücksichtigen[3]).

1) A. W. Volkmann, Über den Einfluß der Übung auf das Erkennen räumlicher Distanzen. Ber. der K. Sächs. Ges. d. Wissensch. Math. Phys. Cl. Bd. X 1858, S. 38 (bes. S. 49).

2) Archiv f. d. ges. Psychologie XV, 1909, S. 318 und XX, 1911, Lit. S. 7.

3) Vgl. auch meine Abhandlung: „Zur erkenntnistheoretischen und mathematischen Begründung der Maßmethoden für die Unterschiedsschwelle", Arch. f. d. ges. Psychologie XX, 1. 1911, S. 52 ff.



Figur 7.

a) Schema der beobachteten rel. Häufigkeiten der extremen Fälle (g- und k.-Urteile) in Abhängigkeit vom Vergleichsreiz. (u-Fälle fehlen.)
b) Die zugehörigen hypothetischen K.-G. der oberen und unteren Schwelle (Grenzabszisse).

b) Die analytische Grundrelation zwischen der beobachteten Grenzkurve und dem hypothetischen K.-G. der Schwelle.

1. Die Grundbeziehung zwischen der beobachteten von E′ bis E ansteigenden Funktion F(x) und der hypothetischen Funktion f(x) der „Grenzabszisse" ist nun im einzelnen direkt aus dem Wesen des Bedingungsextremes zu entnehmen. Die ausgezogene Kurve in Fig. 7a, die wegen

ihrer Ähnlichkeit mit den empirischen Kurven der g-Urteile in Abhängigkeit von dem Vergleichsreize x sogleich mit $F_g(x)$ bezeichnet werden soll, sei in einer Anzahl absoluter H. Z beobachtet und genau wie Fig. 4 stetig interpoliert. Die jeweilige obere Schwelle wird dann als „Grenzabszisse" des kleinsten x, das eben noch den Hauptfall g herbeiführt, in den nämlichen Abszissen auszudrücken sein (s. S. 165 A. 1). Die rel. H. oder Wahrscheinlichkeit aller einzelnen Möglichkeiten dieses hypothetischen K.-G. der oberen Schwelle (Grenzabszisse) befolge die (hypothetische) Verteilungsfunktion $f_0(x)$, die also jetzt aus $F_g(x)$ abgeleitet werden soll. Ihre Extreme mögen zunächst wieder, einstweilen noch unabhängig vom beobachteten $F_g(x)$, mit E_u und E_o bezeichnet werden. Wenn nun in allen n_x Darbietungen jedes Abszissenwertes x wirklich immer alle Möglichkeiten des hypothetischen K.-G. $f_0(x)$ zwischen seinen Extremen E_u und E_o erschöpft sein sollen, so läßt die Beobachtung der rel. H. $F_g(x_1)$ des Hauptfalles g bei der Abszisse x_1, die irgendwo zwischen den Extremen E′ und E des ansteigenden Astes von $F_g(x)$ liegen soll, offenbar den Rückschluß zu, daß in relativ ebenso vielen Fällen jene Grenzabszisse kleiner als x_1 gewesen sein muß. Es ergibt sich also aus dem Wesen des Bedingungsminimums die einfache Grundrelation:

$$\frac{Z_1}{n_x} = F_g(x_1) = \int_{E_u}^{x_1} f_0(x)\,dx.$$

Dieser Ausdruck gilt aber auch ganz allgemein für jede beliebige Abszisse, d. h. es ist:

$$z = F_g(x) = \int_{E_u}^{x} f_0(x)\,dx. \qquad [216]$$

Der Rest aller möglichen Größen der Schwelle, der in den n_x Darbietungen außerdem noch zur Geltung kam, repräsentiert dagegen seinerseits sämtliche Fälle des kontradiktorischen Komplementes zum Hauptfalle g, d. h. es ist ganz analog auch

$$1 - F_g(x) = \int_{x}^{E_o} f_0(x)\,dx. \qquad [217]$$

Denn die Summe aller Möglichkeiten, die je einem der n_x Versuche entsprechen, ist nach [9] natürlich stets wieder

$$\frac{n_x}{n_x} = 1 = \int_{E_u}^{E_o} f_0(x)\,dx.$$

Das bestimmte Integral der Definitionsgleichung [216] ist nun von der Wahl einer Integrationskonstanten bei $\int f_0(x)\,dx$ unabhängig; denn wenn

$$\int f_0(x)\,dx = \mathfrak{F}(x) + C_0, \qquad [218]$$

so wird

$$F_g(x) = \mathfrak{F}(x) + C_0 - \mathfrak{F}(E_u) - C_0 = \mathfrak{F}(x) - \mathfrak{F}(E_u). \qquad [219]$$

Da ferner nach der Beobachtung $F_g(E') = 0$ ist, so muß auch

$$\int_{E_u}^{E'} f_0(x) = F_g(E') = 0 \qquad [220]$$

sein, d. h. das untere Extrem E_u des K.-G. der Schwelle fällt mit dem Beginn des Anstieges der beobachteten Kurve $F_g(x)$ zusammen. Andererseits muß dann auch $E_0 = E$ sein, da in E umgekehrt das kontradiktorische Komplement verschwindet. Denn nach [217] gilt

$$\int_{E}^{E_0} f_0(x)\,dx = 1 - F_g(E) = 0 \qquad [221]$$

d. h. das obere Extrem E_0 des hypothetischen K.-G. der Schwelle ist mit dem oberen Ende des Anstieges E der beobachteten Funktion identisch, bei dem $F_g(x) = 1$ ist.

Aus [219] ergibt sich dann endlich auch durch Umkehrung der Integration, also durch Differentiation, die zunächst gesuchte allgemeine Formel für den hypothetischen K.-G. $f_0(x)$, ausgedrückt in den Werten der Beobachtungsfunktion $F_g(x)$. Da $\mathfrak{F}(E_u) = \mathfrak{F}(E')$ eine Konstante ist, so wird

$$\frac{dF_g(x)}{dx} = \frac{d\mathfrak{F}(x)}{dx} + 0,$$

also nach [218]:

$$f_0(x) = \frac{dF_g(x)}{dx}. \qquad [222]$$

Die rel. Häufigkeiten $f_0(x)$ des Kollektivgegenstandes der Grenzabszisse der mit den Abszissenwerten ansteigenden Funktion $F_g(x)$ sind also einfach gleich den Differentialquotienten dieser Funktion nach x. In der Fig. 7b ist nun die Verteilungskurve dieses hypothetischen K.-G. der oberen Schwelle (Grenzabszisse) $f_0(x)$ unmittelbar unter die Kurve $F_g(x)$ der Fig. 7a gezeichnet, wobei sich die Abszissenwerte, also auch E_u und E', E_0 und E lotrecht entsprechen. Die Ordinate $F_g(x_1)$ ist somit als bestimmtes Integral [216] gleich der in der Fig. 7b vertikal schraffierten Kurvenfläche zwischen der Verteilungskurve $f_0(x)$ und ihrer Abszissenachse. Da man aber nun bei jenem unbestimmten Integral [218] die beliebige Integrationskonstante C_0 hinzuzudenken hat, so kann man schließlich die Grundrelation zwischen dem beobachteten und dem hypothetischen K.-G. auch einfach durch die Gleichung

$$F_g(x) = \int f_0(x)\,dx \qquad [223]$$

ausdrücken, falls man sich bei diesem Integral den Wert

$$C_0 = -\mathfrak{F}(E_u), \qquad [223a]$$

der dem Integral $\int f_0(x)\,dx_{\,x=E_u}$ ohne Konstante entspricht, als Integrationskonstante hinzudenkt. Betrachtet man dieses Integral als durch die Aufsummierung der rel. H. in $f_o(x)$ von unten her entstanden, so kann die beobachtete Funktion somit als die „Summenfunktion" (s. S. 49 u. 113) des hypothetischen K.-G. der Schwelle aufgefaßt werden.

2. Die ganz analoge Grundrelation zwischen einer mit fortschreitendem Abszissenwerte von (E) bis (E′) abfallenden Beobachtungsfunktion einerseits und ihrer hypothetischen Schwellenfunktion andererseits läßt sich an dem nämlichen Beispiele demonstrieren, wenn man nunmehr das kontradiktorische Komplement $1 - F_g(x)$ ins Auge faßt, da eben sein Wert bei E′ von 1 abzufallen beginnt und bei E verschwindet. Wegen dieser Ähnlichkeit mit der Abhängigkeit der Kleiner-Urteile vom Vergleichsreiz bezeichnen wir dieses in Fig. 5a in der gestrichelten Linie selbständig eingetragene Komplement mit $F_k(x) = 1 - F_g(x)$. (Als System von Urteilskurven würde Fig. 7a also dem bisweilen beobachteten Falle ohne jegliche Gleichheitsfälle (u) entsprechen.) Nach [217] wäre dann hier

$$F_k(x) = \int_x^{E_o} f_o(x)\,dx.$$

In der Tat entspricht dies auch dem Wesen der unteren Grenzabszisse, die das jeweilige Maximum des Wertes x bedeutet, der eben noch den Erfolg k herbeiführen kann. Da wir aber die Verteilungsfunktion der unteren Grenzabszisse, die hier diese Funktion speziell mit Bezug auf den kontradiktorischen Fall non-g ausübt, doch auch ganz unabhängig von der ansteigenden Kurve $F_g(x)$ betrachten wollen, von der sie ja auch beim Dazwischentreten eines mittleren Hauptfalles u nach [215] analytisch völlig unabhängig wird, so bezeichnen wir diese Verteilung der hypothetischen unteren Schwelle mit $f_u(x)$, so daß

$$F_k(x) = \int_x^{E_o} f_u(x)\,dx \qquad [224]$$

oder, wie bei [219]

$$F_k(x) = \mathfrak{F}(E_o) - \mathfrak{F}(x),$$

wobei nun

$$\mathfrak{F}(x) = \int f_u(x) + C_u. \qquad [225]$$

Durch Differentiation nach x findet man dann wieder die Beziehung der hypothetischen zur beobachteten Funktion. Da $\mathfrak{F}(E_o)$ wieder eine Konstante, so ist

$$\frac{dF_k(x)}{dx} = 0 - f_u(x).$$

Der jederzeit positive Wert der rel. H. der Größe x der unteren Grenzabszisse ist also

$$f_u(x) = -\frac{dF_k(x)}{dx}. \qquad [226]$$

Bei einer mit der Zunahme des x von 1 bis 0 abfallenden Beobachtungsfunktion ist also die Verteilungsfunktion der hypothetischen (unteren) Grenzabszisse gleich dem negativen Wer des Differentialquotienten der beobachteten Funktion. In Fig. 7b ist auch die Kurve dieses Differentialquotienten der abfallenden Kurve F_k punktiert eingezeichnet und entspricht natürlich einfach einer Umklappung von $f_o(x)$ um die x-Achse. Die dem Integral [224] entsprechende Kurvenfläche ist hierbei durch horizontale Schraffierung herausgehoben.

Auch hier läßt sich die Beziehung wieder allgemein mit einem unbestimmten Integral ausdrücken, wenn man sich bei der Umkehrung von [226] in der Relation

$$\mathfrak{F}_k(x) = -\int f_u(x)\,dx \qquad [227]$$

die Integrationskonstante

$$C_u = +\mathfrak{F}(E_o) \qquad [227\,a]$$

hinzudenkt. Bei der Herstellung der Summenfunktion zur theoretischen Ableitung der beobachteten aus der hypothetischen Funktion ist also hier von dem oberen Extrem der letzteren aus aufzusummieren, wie es eben im Wesen der unteren Schwelle (Grenzabszisse) liegt.

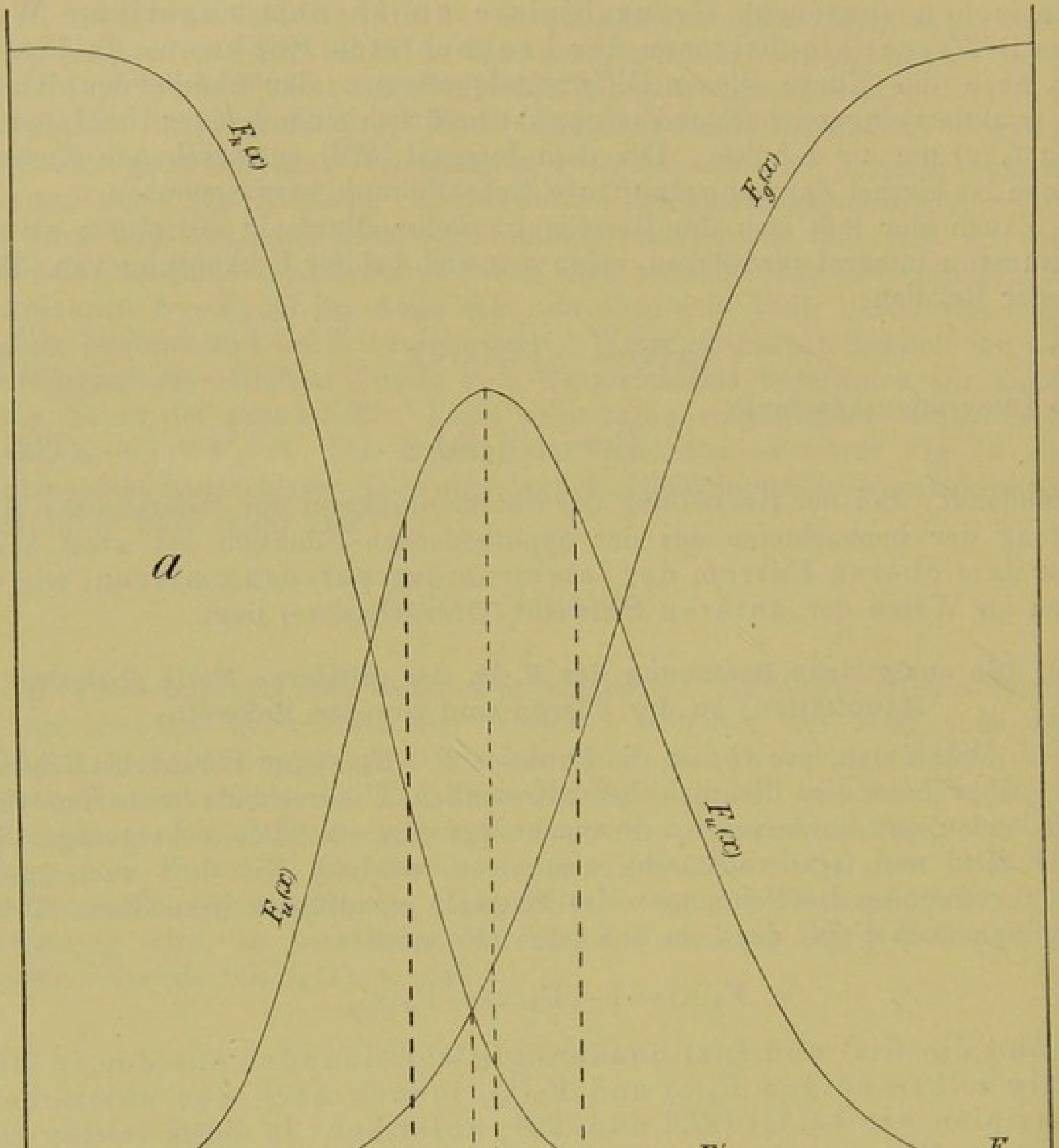
c) Die analytische Beziehung des K.-G. der mittleren Fälle (bei drei Hauptfällen) zu der oberen und unteren Schwelle.

1. Wählt man, wie vorhin, die Funktion $1 - F_g(x)$ zur Veranschaulichung der dabei besonders deutlich hervortretenden Unterschiede zwischen der abfallenden und aufsteigenden Beobachtungsreihe, so fallen, wie gesagt, die K.-G. $f_o(x)$ und $f_u(x)$ vollständig zusammen, weshalb wir dort auch noch keine getrennten Bezeichnungen der Extreme einzuführen brauchten. Tritt aber nun noch $F_u(x)$ dazu, so daß nach [15] wieder

$$F_u(x) = 1 - F_k(x) - F_g(x),$$

so sind die $f_o(x)$ und $f_u(x)$ unabhängig voneinander aus den in [15] völlig selbständigen $F_g(x)$ und $F_k(x)$, jedoch nach den nämlichen Prinzipien wie bei Gl. [222] und [226], ableitbar. In einem solchen beobachteten System von drei Hauptfällen, wie es in Fig. 8a schematisch dargestellt ist[1]), werden wir künftig immer das untere Extrem der ganzen Unsicherheitsregion, also den Punkt, wo $F_k(x)$ von 1 abzufallen beginnt, mit E_u, und das obere Extrem, wo $F_g(x)$ den Wert 1 erreicht hat, mit E_o bezeichnen. Das innere Extrem jener abfallenden Kurve aber nennen wir E_u', dasjenige dieser ansteigenden E_o'. Dann hat nach dem Bisherigen natürlich auch wieder der aus $F_k(x)$ abgeleitete K.-G. $f_u(x)$ die Extreme E_u und E_u' und der zu $F_g(x)$ zugehörige K.-G. $f_o(x)$ die Extreme E_o' und E_o. In diesem System sind nun die Kollektivgegenstände der Grenzabszissen für die mittlere beobachtete Kurve $F_u(x)$ mit den K.-G. $f_u(x)$ und $f_o(x)$ der

1) Nur zur Erleichterung einer möglichst exakten Konstruktion des Kurvensystemes an der Hand von Tabellen wurde in Fig. 7a und b und 8a und b für f(x) stets das einfache E.-G. zugrunde gelegt. Zur schematischen Darstellung der gegenseitigen Unabhängigkeit von $F_g(x)$ und $F_k(x)$, bzw. von $f_o(x)$ und $f_u(x)$ brauchten dann in Fig. 8 nur die Präzisionsmaße h_o und h_u verschieden angesetzt zu werden, und zwar ist in $f_o(x)$ $h_o = 0{,}2$ und in $f_u(x)$ $h_u = 0{,}3$ gewählt.



Figur 8.
a) Schema der Beobachtungsfunktionen bei drei Hauptfällen.
b) Die hypothetische K.-G. der oberen und unteren Schwelle.

beobachteten Grenzkurven ebenso identisch, wie nach dem S. 167 Gesagten bei völlig konstanten Bedingungen die (hierbei konstanten) Grenzabszissen r_o und r_u dem $F_u(x)$ und je einem extremen Fall gemeinsam wären. Der mittlere Fall (u) wird nämlich bei allen n_x Einwirkungen des Abszissenwertes x offenbar so oft eintreten, als einerseits das Maximum für den unteren Fall (k) augenblicklich niedriger liegt als x (also kein k-Fall auftreten kann) und doch andererseits nicht etwa gleichzeitig eine der tieferen Lagen des Minimums für den oberen Fall g verwirklicht ist, die bei Einwirkung der Stufe x diesen letzteren Fall herbeiführen müßte. Denn sämtliche Möglichkeiten hinsichtlich der Schwelle für den einen extremen Fall müssen ja nach S. 168 mit je einer entsprechenden des anderen zeitlich zusammenfallen, wobei nur die ganz allgemeine, analytisch nicht weiter formulierbare Einschränkung hinzutritt, daß diese wechselseitig koordinierten Einzelfälle aus den Kurvenflächen von $f_o(x)$ und $f_u(x)$ womöglich einen gewissen Abstand einhalten und daß zum mindesten keine Inversion von oben und unten eintritt. Die Wahrscheinlichkeit der für u günstigen Lage des Bedingungsmaximums für k ist nun, nach [224] und [9] und mit Berücksichtigung der neuen Extreme,

$$1-\int_{x}^{E'_u} f_u(x)\,dx=\int_{E_u}^{x} f_u(x)\,dx.$$

Um die rel. H. $F_u(x)$ zu erlangen, ist also dann hiervon erst noch die Wahrscheinlichkeit

$$F_g(x)=\int_{E_o'}^{x} f_o(x)\,dx$$

des Auftretens eines g-Falles bei x wieder abzuziehen, so daß schließlich

$$F_u(x)=\int_{E_u}^{x} f_u(x)\,dx-\int_{E_o'}^{x} f_o(x)\,dx. \tag{228}$$

Die diesem Wert entsprechende Kurvenfläche ist in Fig. 8b wieder senkrecht schraffiert. Oberhalb des Schnittpunktes der beiden Kurven $f_o(x)$ und $f_u(x)$ (P in Fig. 8b) ist jedoch dieser Ausdruck [228] nicht mehr unmittelbar geometrisch in dieser Weise zu veranschaulichen. Durch abermalige Anwendung von Gl. [9] erweist sich aber ja $F_u(x)$ auch als

$$\begin{aligned}F_u(x)&=1-\int_{x}^{E_u'} f_u(x)\,dx-\left(1-\int_{x}^{E_o} f_o(x)\,dx\right)\\&=\int_{x}^{E_o} f_o(x)\,dx-\int_{x}^{E_u'} f_u(x)\,dx,\end{aligned} \tag{229}$$

eine Form, die ganz analog in Worte zu kleiden wäre, wie die Ableitung von [228], wobei man nur von dem kontradiktorischen Komplement für g auszugehen, und dann die Bedingung für ein k noch auszuschließen hätte. Dieses letztere Äquivalent von $F_u(x)$ wird nun seinerseits oberhalb des Schnittpunktes P geometrisch eben so einfach aufzeigbar und ist dort in Fig. 8b für ein x′ horizontal schraffiert.

Unterhalb E_0' verschwindet natürlich das zweite Glied des Ausdruckes [228], da ja dann $F_u(x)$ einfach kontradiktorisches Komplement zu $F_k(x)$ ist, bzw. bleibt in [229] das erste Glied bis dahin konstant der Einheit gleich. Oberhalb E_u' aber ist in [228] das erste Glied stets gleich 1 und es verschwindet dafür in Gl. [229] rechts das zweite Glied, so daß diese mit dem Ausdruck [217] für das kontradiktorische Komplement von $F_g(x)$ identisch wird.

2. Für den empirisch natürlich niemals genau verwirklichten Fall, daß $f_o(x)$ und $f_u(x)$ die nämliche Verlaufsform einhielten, so daß

$$f_u(x-(E_o'-E_u)) = f_o(x), \qquad [230]$$

würden sich die Ausdrücke [228] bzw. [229], beiläufig bemerkt, in je ein einziges Integral zusammenziehen lassen:

$$F_u(x) = \int\limits_{x-(E_o'-E_u)}^{x} f_u(x)\,dx = \int\limits_{x}^{x+(E_o'-E_u)} f_o(x)\,dx. \qquad [231]$$

3. Eine interessante ganz allgemeine Beziehung zwischen $F_u(x)$ und den beiden K.-G. $f_o(x)$ und $f_u(x)$, die bei der Konstruktion dieser beiden hypothetischen Kurven $f_o(x)$ und $f_u(x)$ eine Kontrolle bildet, ergibt sich endlich noch, wenn man [228] oder [229] nach x differenziert. Da $\int f(x)\,dx$ für alle Indizes bei $x = E$ eine Konstante bildet, deren Differentialquotient nach x verschwindet, so folgt aus der Differenzierung der bestimmten Integrale in [228] oder [229] unmittelbar die Gleichung

$$\frac{dF_u(x)}{dx} = f_u(x) - f_o(x), \qquad [232]$$

d. h. die Tangente an die Kurve des mittleren Hauptfalles ist unterhalb des Schnittpunktes P der beiden Kurven in Fig. 8b, also von E_u bis P, positiv, oberhalb desselben aber, d. h. von P bis E_o, negativ. Im Punkte P selbst aber ist der Differentialquotient von $F_u(x)$ nach x gleich Null, d. h. diese mittlere Beobachtungsfunktion hat ein Maximum bei demjenigen Werte x, den die untere Grenzabszisse (Schwelle) eben so oft erreicht wie die obere. In der Figur ist dieses Dichtigkeitsmittel des mittleren u-Falles mit Rücksicht darauf, daß in der Psychophysik dieser Fall der Gleichheitsfall ist, durch den Zusatz $P = \mathfrak{D}gl$ angedeutet[1]). Da nun gerade die mittlere Funktion $F_u(x)$ äußerlich vollständig die Form eines mit der x-Achse geschlossenen einfachen K.-G. darbietet, so scheint diese Feststellung für die hypothetische Zurückführung des Dichtigkeitsmittels $\mathfrak{D}$ aller K.-G. überhaupt von einiger Bedeutung zu sein, ohne daß wir hier dieser mehr theoretischen Frage weiter nachgehen könnten.

d) Die Reduktion mehrerer Hauptfälle auf das Schema der drei Hauptfälle.

1. Ähnliche, wenn auch etwas kompliziertere Beziehungen ließen sich natürlich auch aus dem Systeme von 5 Beobachtungskurven ableiten, wie sie in der Methode der 5 Hauptfälle (vgl. § 14,1 und S. 165) für **k**, k, u, g

1) ($\mathfrak{D}_u$ ist vermieden, da r_u ($\mathfrak{D}$) als Dichtigkeitsmittel der unteren Schwellenfunktion $f_u(x)$ vorkommt).

und g gewonnen werden. Indessen brauchen wir hier nur ganz kurz darauf einzugehen, da ein solches System, wenigstens was die Ableitung von Schwellenwerten anlangt, rein rechnerisch stets auf die zwei Systeme mit je 3 Hauptfällen: **g**, ($_g$ + u + $_k$), **k** und (**g** + $_g$), u, ($_k$ + **k**) zurückgeführt werden kann. Denn der Begriff der Schwelle bzw. der Grenzabszisse in dem oben erläuterten Sinne ist natürlich so allgemein, daß er auf beliebig viele Stufen eines quantitativ noch weiterhin differenzierbaren Effektes der Auslösungsursache x getrennt angewandt werden kann. Das gesamte Beobachtungsmaterial ist dann je nach dem Effekte höherer oder niedrigerer Ordnung, für welchen die Grenzabszisse abgeleitet werden soll, verschieden zusammenzufassen. Die **k**-Kurve sinke z. B. von $\mathbf{E_u}$ bis $\mathbf{E_u'}$ ab, die **g**-Kurve steige von $\mathbf{E_o'}$ bis $\mathbf{E_o}$ an, E_u und E_o seien die Extreme von $F_u(x)$, und endlich $\mathbf{E_u}$ und E_u', E_o' und $\mathbf{E_o}$ die Extreme der hierbei ebenfalls mit der X-Achse geschlossenen Kurven für $_k$ und $_g$. Dann tritt bei dem ersten Reduktionsschema in den bisher abgeleiteten Formeln an die Stelle der früheren Extreme E_u, E_u', E_o' und E_o nunmehr einfach $\mathbf{E_u}$, $\mathbf{E_u'}$, $\mathbf{E_o'}$, $\mathbf{E_o}$, während bei der zweiten alles unverändert bleibt. Die reale Bedeutung der so gewonnenen Schwellen der Grenzabszissen erster und zweiter Ordnung ist aber natürlich bei besonderen Bedingungen für die Entstehung von 5 statt 3 Hauptfällen, wie sie z. B. bei der Urteilsabgabe jedenfalls vorliegen werden, mit der einfachen Schwelle bei der primären Beobachtung von nur 3 Hauptfällen nicht unmittelbar zu vergleichen.

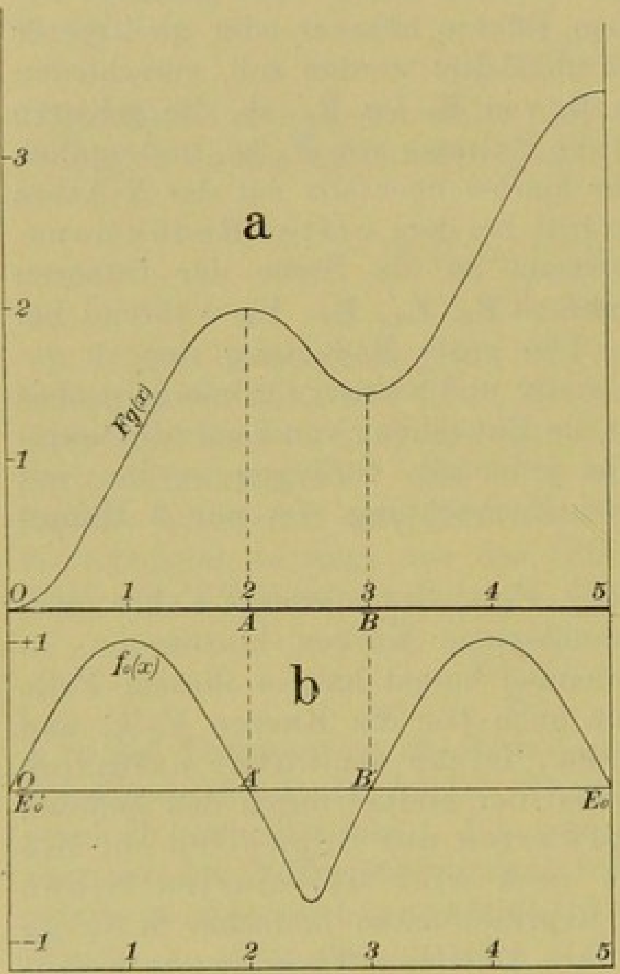
2. Da nun hier zu den einfachen K.-G. $F_u(x)$ des mittleren Falles auch noch zwei weitere mit der x-Achse geschlossene Kurven hinzutreten, so kann man, wie Ebbinghaus[1]) zum erstenmal betont hat, in diesem Falle Hauptwerte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ und Streuungsmaße auch für die Kurven $F_g(x)$ und $F_k(x)$ ebenso direkt wie für $F_u(x)$ ableiten. Diese sind aber natürlich als Mittelwerte des niederen Effektes, der hierbei durch den höheren begrenzt gedacht wird, von den Hauptwerten der Schwellen für die niederen und höheren Effekte in dem hier definierten Sinne wohl zu unterscheiden. Da sie als Repräsentanten einfacher K.-G. zu betrachten sind, so ist übrigens alles für ihre Ableitung Wissenswerte bereits früher gesagt worden.

e) Die Beobachtung sog. „Verkehrtheiten" erster und zweiter Ordnung in ihrer theoretischen und praktischen Bedeutung.

1. In allen bisherigen Ableitungen über die Beziehungen zwischen den F(x) und den f(x) ist aber nun zunächst eigentlich überall die Voraussetzung inbegriffen, daß die Kurven der extremen Fälle (k und g) von ihren inneren Grenzen E_u' und E_o' an nach außen hin auch wirklich ununterbrochen ansteigen oder wenigstens nicht wieder zurücksinken. Denn wenn alle Ordinaten von F(x) jeweils einfach aus der Summierung aller weiter innen gelegenen rel. H. des K.-G. f(x) entstanden sein sollen, so muß natürlich die weiter nach außen gelegene Ordinate von F(x) immer mindestens eben so groß sein wie die nächst benachbarte innere. Tatsächlich

1) Grundzüge der Psychologie, 1902, S. 493 f.

kommt aber doch in der Erfahrung, wie schon S. 169 zugestanden wurde, auch das Gegenteil vor. Ein solches Zurücksinken ist in Fig. 9a an unserem Schema $F_g(x)$ in möglichst großem Maßstab zwischen den Abszissen A und B dargestellt. Es wird von G. E. Müller[1]) als „Verkehrtheit erster Ordnung" bezeichnet, womit eben die Paradoxie gegenüber der Ableitung aus einem für alle Abszissen konstanten f(x) zum Ausdruck kommen soll. Solange aber ein solcher Verlauf, wie es bei stärkerer Ausgeprägtheit wohl stets der Fall ist, zunächst nur von der relativen Kleinheit der Versuchszahl n_x für die einzelnen Abszissen herrührt, steht er wenigstens mit dem Prinzip der Herleitung aller vollwertigen Beobachtungskurven F(x) aus einem einheitlichen f(x) insofern nicht in Widerspruch, als die gleichmäßige Erschöpfung sämtlicher in Betracht kommender Möglichkeiten eines zufällig schwankenden Faktors überhaupt immer nur von einer relativ größeren Zahl n_x zu erwarten ist. Man wird also in einem solchen Falle unter Umständen einfach noch mehr Versuche für jede Abszisse anzustellen haben, ja man darf sich vielleicht sogar auf die kritische Stelle selbst beschränken, wenn die Vermutung einer Ausnahme hinsichtlich der gleichmäßigen Abwicklung aller Möglichkeiten des f(x) bei ihr berechtigt ist, hat aber dann natürlich in diesem Falle weiterhin auch die verschiedenen Gewichte der einzelnen Ordinaten in Rechnung zu ziehen. Daneben steht aber immer auch die rein rechnerische Ausgleichung zur Verfügung. Diese kann sich an irgend eine Voraussetzung hinsichtlich der wahrscheinlichsten Form des K.-G. der Schwelle halten, die man hierbei bei genügender Versuchszahl für alle beobachteten Ordinaten F(x) als erfüllbar annimmt.



Figur 9.
a) Schema einer sog. „Verkehrtheit erster Ordnung" in der Beobachtungsfunktion.
b) Die Bedeutung dieser Erscheinung für den hypothetischen K.-G. der Schwelle.

2. Wenn es jedoch nicht auf den Verlauf der Kurve im einzelnen, sondern nur auf die konventionellen Repräsentanten derselben ankommt, wird man der Berechnung dieses Mittelwertes unter Umständen die Kurve sogar trotz der „Verkehrtheiten" genau so zugrunde legen können, wie man sie aus der Beobachtung interpoliert hat. Wenn der gesuchte Hauptwert der Grenzabszissen allerdings ausschließlich gerade dem kritischen

1) Die Gesichtspunkte usw. S. 37.

Bezirke von F(x) selbst zu entnehmen wäre, wie es nach dem Folgenden z. B. vor allem für das Dichtigkeitsmittel 𝔇, und bis zu einem gewissen Grade auch für den Zentralwert ℭ des hypothetischen K.-G. eintreten kann, so wären an dieser einflußreichsten Stelle von F(x) allzu spezielle Zufälligkeiten wohl zunächst zu korrigieren. Je mehr indessen der Mittelwert sämtliche Punkte gleichmäßig in Rechnung zieht, um so unmittelbarer kann man verfahren. Leitet ja doch auch der Anhänger des Gaußschen Gesetzes z. B. das arithmetische Mittel und den mittleren Fehler selbst bei relativ wenig Einzelversuchen, die die Verteilung im ganzen hinter der Idealform des E.-G. beliebig weit zurückbleiben lassen, ohne weiteres aus den beobachteten r. H. ab, in der Meinung, hiermit schon einen relativ sehr guten Repräsentanten zu erhalten. Die Forderung der Freiheit von „Verkehrtheiten" ist aber natürlich ebenfalls eine Art von Voraussetzung eines „Verteilungsgesetzes", und zwar von so allgemeiner Art, daß es schon aus der bloßen Annahme der Gültigkeit eines gleichartigen Schwankungsgesetzes der Schwelle für alle Beobachtungswerte F(x) allein ebenso deduziert werden kann wie das einfache E.-G. aus seinen früher erwähnten Voraussetzungen. So kann also vielleicht auch hier eine ganz analoge äußere Form der Berechnung von Repräsentanten des f(x) aus F(x) auch da noch ihren Wert behalten, wo das „Verteilungsgesetz" nicht genau erfüllt ist. Natürlich kann schließlich nur die Erfahrung selbst darüber entscheiden, ob diese Verallgemeinerung nach dem einfachen Stetigkeitsprinzip auch wirklich generell vergleichbare Werte gewinnen läßt.

Wenn man aber nun diese Formeln wirklich unabhängig von Verkehrtheiten allgemein anwendbar erklärt, hat man offenbar — was zunächst absurd erscheinen könnte — als eine rein analytische Konsequenz die Möglichkeit negativer Häufigkeitswerte des hypothetischen K.-G. mit in Kauf genommen. Dies ergibt sich unmittelbar aus unseren Grundrelationen [222] und [226], die ohne Rücksicht auf das Vorzeichen des Differentialquotienten der F(x), also sowohl für ein wieder abfallendes $F_g(x)$ als auch für ein wiederaufsteigendes $F_k(x)$, gültig bleiben. Sie lassen als Grenzfall der rel. H. von f(x) nicht etwa den Wert 0 finden, der dem Stillstand des Anstieges von F(x) zugeordnet ist, wobei man allenfalls noch mit dem nämlichen K.-G., allerdings in der ungewohnten Form einer mittleren Einsenkung, auskommen könnte. Vielmehr ist nach Gl. [222], wie Fig. 9b verdeutlicht, selbstverständlich auch der ganzen Verkehrtheit des $F_g(x)$ von A bis B ein negatives $f_0(x)$ eindeutig zugeordnet. An diesem Begriff einer negativen Häufigkeitsordinate wird man sich aber eben wenigstens bei der Ableitung von Mittelwerten nicht weiter stoßen, wenn man berücksichtigt, daß wegen der Ableitung des einfachen K.-G. $f_0(x)$ aus $F_g(x)$ dessen einzelne Ordinaten doch nicht etwa konkret für sich zu beobachten sind. Sie beteiligen sich also an der Fundierung von $F_g(x)$ nur als vertretbare Summanden, insofern ja jede von ihnen stets durch weiter innen liegende Häufigkeitswerte des nämlichen K.-G. in ihrem Effekt für $F_g(x)$ ersetzt werden könnte. Die Ansetzung eines negativen Wertes an einer Stelle gleicht also nur rein rechnerisch einen Überschuß an Möglichkeiten anderer beliebiger innerer Lagen der Grenzabszissen, die offenbar nicht für sämtliche Abszissen gleichmäßig zur Geltung gekommen sind, auf die einfachste Weise wieder aus. Ob dann freilich ein solcher K.-G., den man bei der Imaginärheit einer direkten Beobachtung negativer Häufigkeiten in einem ganz speziellen Sinne als einen „komplexen" bezeichnen könnte, wirklich typische Verschiedenheiten der zufälligen Schwellenschwankungen je nach der Stufe x der Auslösungsursache zur Geltung bringt, kann, wie gesagt, erst durch die Erfahrung bei Wiederholungen der nämlichen Systeme unter ähnlichen Bedingungen festgestellt werden.

3. Übrigens werden wir zu dieser Inkaufnahme von Verkehrtheiten erster Ordnung bei der Ableitung der Schwellenrepräsentanten auch noch durch Zwischenstufen völlig stetig hinübergeleitet, die äußerlich dem Ideal der einheitlichen Fundiertheit des F(x) insofern nicht direkt widersprechen, als wenigstens keine Rückläufigkeiten im Anstieg von E′ nach E vorkommen. G. E. Müller hat hervorgehoben, daß schon die bloße Annäherung an das einfache E.-G., die wir für die psychophysische Schwelle wohl voraussetzen dürfen, der in F(x) beobachteten Summenfunktion doch auch noch eine etwas speziellere Verlaufsform vorschreibt, als daß sie überhaupt ansteigt: Sie hat am Anfang und am Ende langsamer, und nur in der Mitte mit einem Wendepunkt rascher zuzunehmen. Abweichungen des Differentialquotienten der Kurve von diesem Verlaufe, der in Fig. 7 und 8 genau (vgl. S. 175, A. 1) eingehalten ist, werden von ihm als „Verkehrtheiten zweiter Ordnung" bezeichnet. Natürlich ist aber hier bei der Beschränkung auf die gegebenen Beobachtungsreihen keine scharfe Grenze mehr zwischen zwei Möglichkeiten zu ziehen, wie man sich solche Komplikationen zweiter Ordnung des an sich hierbei ununterbrochenen Anstieges der Kurve F(x) erklären kann: diese können einerseits daher rühren, daß zwar bei allen Abszissen wirklich stets der nämliche K.-G. f(x) gleichmäßig zur Geltung kommt, aber eben überall mit einer vom einfachen E.-G. mehr oder weniger abweichenden Form. Andererseits kann aber in der Tat ein K.-G. von einfacher Form im Spiele sein, der vielleicht bei mehr Einzelversuchen genau realisierbar wäre und nur einstweilen noch nicht gleichmäßig genug bei allen Stufen der Auslösungsursache x mitgewirkt hat. Jene erste Möglichkeit besteht hier deshalb, weil der nach [222] bzw. [226] berechnete hypothetische K.-G. hier jedenfalls durchweg positiv ist, so daß er wie ein einheitlicher direkt beobachtbarer K.-G. betrachtet werden kann. Würde jedoch der zweite, hier nicht direkt kontrollierte, aber wahrscheinliche Fall vorliegen, so wären offenbar die nach unseren Formeln berechneten rel. H. des hypothetischen K.-G. aus den wahren Werten ebenfalls erst durch eine Vergrößerung der einen und eine kompensierende Verkleinerung der anderen entstanden zu denken, nur daß hier eben dieser Prozeß die modifizierten Werte von f(x) nirgends unter die Abszissenachse selbst herabdrückt. Solche „Verkehrtheiten zweiter Ordnung" bilden aber bei der im allgemeinen zu Gebote stehenden Versuchszahl keineswegs nur eine Anomalie, sondern müssen ähnlich wie die Asymmetrien von K.-G. überhaupt geradezu als der Normalfall betrachtet werden. Unten zeigen wir übrigens noch konkreter, wie die Repräsentanten der hypothetischen K.-G. der Grenzabszissen ohne Rücksicht auf die spezielle Form des Anstieges von F(x) aus den Formeln [216] und [224] bzw. ihren Umkehrungen [222] und [226] ableitbar zu denken sind.

30. Die Berechnung der Hauptwerte und Streuungsmaße der Schwellen im unmittelbaren Verfahren.

Ein Hauptvorteil des unmittelbaren Verfahrens, das die im 6. Kapitel gewonnenen Formeln für die Repräsentanten einer Verteilung $\mathfrak{V}(x)$ auf die hypothetischen K.-G. $f_o(x)$ und $f_u(x)$ der Grenzabszisse r_o und r_u anwendet, beruht offenbar darauf, daß immer die erste der Integrationen über $\mathfrak{V}(x)$, die in diesen Formeln vorkommt, nicht erst ausgerechnet zu werden braucht, sondern in den Ordinaten der Funktionen $F_g(x)$ und $F_k(x)$ unmittelbar beobachtet wird.

a) Das Dichtigkeitsmittel.

Bei dem Dichtigkeitsmittel $\mathfrak{D}$ kann dieser Vorteil allerdings noch nicht zur Geltung kommen, weil dieses eben seinerseits überhaupt kein Durchschnitt der genannten Art ist, sondern eine individuelle Charakterisierung einer einzelnen Stelle der Verteilungskurve, so daß zu seiner Berechnung nicht integriert, sondern umgekehrt differenziert werden muß. Bei der Beobachtung der Integralkurve $F(x) = \int f(x)\,dx$ haben wir uns also von dem Kriterium $\frac{df(x)}{dx} = 0$ sogar um eine Stufe entfernt, und müssen daher zur Ableitung von $\mathfrak{D}$ für $f(x)$ erst wieder bis zum zweiten Differentialquotienten von $F(x)$ in der Gleichung

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \frac{df(x)}{dx} = 0 \qquad [233]$$

zurückgehen, durch die in der beobachteten Funktion $F(x)$ offenbar ein Wendepunkt bestimmt ist. Über das Prinzip, nach welchem diese zweite Abgeleitete aus der Reihe diskreter Einzelwerte $F(x_1), \ldots F(x_p)$ für einen beliebigen Punkt interpolatorisch berechnet werden kann, wurde bereits in § 19,b S. 82 f. das Wesentlichste gesagt. Auch hier würde man aber wohl ähnlich wie bei der direkten Bestimmung von $\mathfrak{D}$ für einen beobachteten K.-G. am genauesten verfahren, wenn man nach einer vorläufigen Abgrenzung der Region, in der das $\mathfrak{D}$ liegen muß, zunächst erst wieder eine so enge Reihe neuer äquidistanter Punkte interpolierte, daß eine Kurve vierter Ordnung hindurchgelegt werden kann (wobei also die Funktionsdifferenzen fünfter Ordnung verschwinden müßten). Dies ergibt dann für die Abszisse, bei welcher der zweite Differentialquotient verschwindet, eine quadratische Gleichung. Da indessen, wie schon seinerzeit erwähnt, diese Lösung von der speziellen Interpolationsmethode abhängt, so ist einem so indirekt bestimmten Dichtigkeitsmittel im allgemeinen wohl keine besondere Bedeutung beizulegen, weshalb wir nicht weiter darauf eingehen, ebensowenig wie wir unten bei der Operation mit speziellen Verteilungsgesetzen auf die Bestimmung des theoretischen Dichtigkeitsmittels $\mathfrak{D}_p$ für das Fechnersche zweispaltige Gaußsche Gesetz zurückkommen wollen, obgleich dessen Ableitung hier wegen der Verwertbarkeit des Durchschnittes D nach Gl. [128] sich gegenüber seiner Bestimmung für einen direkt beobachteten K.-G. wenigstens um einen Grad vereinfachen würde.

b) Der Zentralwert.

Um so wirkungsvoller ist dagegen die längst geläufige Ausnützung des am Anfang dieses Paragraphen hervorgehobenen Vorteils bei der Bestimmung der Zentralwerte $\mathfrak{C}$ der Grenzabszissen $r_o(\mathfrak{C})$ und $r_u(\mathfrak{C})$. Da nach der Definitionsformel [20]

$$\int_{E'}^{r(\mathfrak{C})} f(x)\,dx = \int_{r(\mathfrak{C})}^{E} f(x)\,dx = \frac{1}{2}, \qquad [234]$$

so gilt also für $r_o(\mathfrak{C})$, bei dem $E' = E_o'$, $E = E_o$ und $f(x) = f_o(x)$ ist, mit Rücksicht auf Gl. [216] und [217] einfach:

$$F_g(r_o(\mathfrak{C})) = 1 - F_g(r_o(\mathfrak{C})) = \frac{1}{2}, \qquad [235]$$

und analog für den Zentralwert der Verteilung $f_u(x)$ mit den Extremen $E' = E_u$ und $E = E_u'$ nach [224]:

$$1 - F_k(r_u(\mathfrak{C})) = F_k(r_u(\mathfrak{C})) = \frac{1}{2}. \qquad [236]$$

Der Zentralwert des hypothetischen K.-G. der Grenzabszisse ist also diejenige Größe x, bei der die beobachtete Häufigkeitszahl des extremen Falles (g bzw. k) gerade die Hälfte aller n_x auf eine Abszisse entfallenden Versuche oder 50% erreicht. Er ist also mit dem zum ersten Male von A. W. Volkmann für diesen K.-G. gewählten Repräsentanten identisch (vgl. S. 170).

Da aber nun die rel. H. $\frac{1}{2}$ nicht immer gerade selbst beobachtet ist, so wird zur genaueren Ermittlung von $r(\mathfrak{C})$ im allgemeinen eine Interpolation des Abszissenwertes zur Ordinate $F(x) = \frac{1}{2}$ erforderlich, wie sie bereits § 17b, 2 nach der Lagrangeschen Methode angegeben wurde. Doch würde man zum mindesten bei der Beschränkung auf diesen Repräsentanten, also auch von Streuungsmaßen abgesehen, immerhin mit der Beobachtung von so wenig Ordinaten F(x) auskommen können, als eben zu dieser Interpolation erforderlich sind. Unter der Voraussetzung eines ununterbrochenen Anstieges von F(x) bei der gewählten Versuchszahl n_x und der gleichzeitigen annähernden Gültigkeit des einfachen E.-G. für f(x), bei der die Kurve in der Nähe der rel. H. $\frac{1}{2}$ ziemlich linear ist, würde man sich insbesondere mit wenigen mittleren Abszissen begnügen können. Es wäre etwas Ähnliches, wie wenn man unter gleichen Voraussetzungen für einen direkt beobachteten einfachen K.-G., z. B. von $F_u(x)$, nur das Dichtigkeitsmittel $\mathfrak{D}$ verlangte, während man zur Abzählung seines Zentralwertes die ganze Verteilung ebenso beobachtet haben müßte wie zur Berechnung seines arithmetischen Mittels. Freilich ist dafür andererseits wiederum eine entsprechend größere Anzahl von Beobachtungen dieser wenigen Anhaltspunkte notwendig, um dem Resultate ein entsprechendes Gewicht zu verleihen. Man wird also bisweilen doch ein auf Interpolation gegründetes Ausgleichungsverfahren vorziehen, wie es z. B. in § 17,c im Anschluß an die

Lagrangesche Interpolation beschrieben wurde. Hierbei wäre dann freilich wieder eine umfassendere Reihe beobachteter Ordinaten $F(x)$ erforderlich, die aber eben zugleich die Grundlage zur gleichzeitigen Bestimmung anderer Durchschnittswerte von $f(x)$ an die Hand gibt. Schon bei der einfachen Interpolation mit einem etwas größeren Intervall i wird aber für $r(\mathfrak{C})$ stets ein gewisser Spielraum übrig bleiben, der sich natürlich noch vergrößert, wenn dann auch noch irgend eine Ausgleichung hinzutritt. Er übersteigt häufig denjenigen bei dem Zentralwert eines direkt beobachteten K.-G. (vgl. S. 157 f.) und erinnert eher wieder an denjenigen eines Dichtigkeitsmittels. Dieser Mangel an Eindeutigkeit zeigt sich denn auch bei unserem Zahlenbeispiel einer beobachteten Funktion $F_k(x)$ nach Tab. 5, S. 57 f. und Fig. 4, für das wir ja wenigstens eine Lösungsgruppe dieser speziellen Aufgabe bereits in § 17 b, 2 als spezielles Interpolationsbeispiel behandelten. Dort wurde eben gerade die Abszisse zur rel. H. $\frac{1}{2}$ nach Lagrange interpoliert, die wir jetzt als $r(\mathfrak{C})$ kennen, und zwar zunächst linear und dann mittels einer einfachen Parabel. Der gesuchte Wert für $F_k(x) = \frac{1}{2} = 25 \cdot \frac{1}{50}$ lag zwischen x_4 mit $z_4 = 13 \cdot \frac{1}{50}$ und x_5 mit $z_5 = 33 \cdot \frac{1}{50}$ also näher an x_5. Schreiben wir

$$r(\mathfrak{C}) = x_4 + \alpha \cdot i = x_5 - \beta i, \qquad [237]$$

so soll das positive Vorzeichen und ebenso die Numerierung der Indizes, wie es in unserem Beispiele schon früher geschah (vgl. Fig. 4 und Tab. 5), in derjenigen Richtung genommen sein, in der die relative H. des extremen Falles (g oder k) von 0 nach 1 hin ansteigt, d. h. von E' nach E. Dann können also in allen diesen Fällen die analogen Werte für $f_u(x)$ nach der nämlichen Formel abgeleitet werden wie für $f_o(x)$, wenn man sich nur die ganze Kurve $F_k(x)$ um die Y-Achse umgelegt denkt, so daß sie nun ebenfalls mit den Abszissenwerten ansteigt. Man braucht daher nur die Beobachtungsordinaten von $F_k(x)$ zu ihrer ursprünglichen Reihenfolge spiegelbildlich neu zu numerieren, wobei der Index 0 bei $F_k(x_o) = F_k(E_u') = 0$ die Reihe eröffnet und ein zu p bei $F_g(x_p)$ analoges q in $F_k(x_q) = F(E_u) = 1$ sie abschließt. Natürlich ist dann auch das Vorzeichen der gefundenen Koeffizienten α und β nachträglich wieder umzukehren. Zur Berücksichtigung dieses einfachen Verfahrens, das Vorzeichenfehler kaum möglich werden läßt und besondere Formeln für $F_k(x)$ neben denen für $F_g(x)$ erspart, haben wir denn auch sogleich eine Kurve von $F_k(x)$ gewählt. Es ist in dieser neuen Numerierung $x_4 = 52$, $x_5 = 49$, wobei $i = 3$. Seinerzeit fanden wir nach der für $r(\mathfrak{C})$ bisher am meisten verwendeten rein linearen Verbindung der beiden benachbarten Ordinatengipfel z_4 und z_5

$$r_u(\mathfrak{C}) = 50{,}200$$

und bei der schon viel seltener benutzten Hindurchlegung einer Parabel (arithm. Mittel aus zwei symmetrisch gelagerten)

$$r_u(\mathfrak{C})' = 50{,}149.$$

Wir wollen aber nunmehr auch die Methode der Funktionsdifferenzen in der Art und Weise anwenden, wie wir sie der numerischen Integration zugrunde legten und deshalb auch unten für r($\mathfrak{A}$), D und M^2 wieder benutzen werden, also nach der symmetrischen Formel [54] mit Zeilendifferenzen, die für unser Beispiel in dem Differenzenschema Tab. 7, S. 90 enthalten sind. Dabei ist von dem näher an dem gesuchten Wert vermuteten $x_5 = 49$ auszugehen, und $n = -\beta$ [in 237] zu bestimmen und nach Vertauschung des Vorzeichens als $+\beta$ zur Interpolation zu verwenden. Ferner soll n nur die Werte zwischen $\pm 0{,}5$ annehmen. Gehen wir in [54] nur bis $n \cdot \Delta_{5,1}$, so wird

$$25 = 33 + n \cdot 16$$
$$-n = \beta = 0{,}5$$
$$r(\mathfrak{C}) = 49 + 3 \cdot 0{,}5 = 50{,}5.$$

Berücksichtigt man dagegen noch $\frac{n^2}{2} \cdot \Delta_{5,2}$, so wird

$$25 = 33 + n \cdot 16 + \frac{n^2}{2} \cdot (-8)$$
$$-n = \beta = 0{,}45$$
$$r(\mathfrak{C})' = 49 + 3 \cdot 0{,}45 = 50{,}35.$$

Beide Werte weichen voneinander und vor allem von den früheren ab. Wieder andere Größen, und zwar etwas näher den ersten, erhielte man, wenn man, allerdings entgegen der soeben wiederholten Einschränkung für n, von x_4 ausgehen wollte. Hier folgt aus

$$25 = 13 + n \cdot 13$$
$$n = -\alpha = -0{,}922$$
$$r(\mathfrak{C})'' = 52 - 3 \cdot 0{,}922 = 49{,}23$$

und aus

$$25 = 13 + n \cdot 13 + \frac{n^2}{2} \cdot 14$$
$$n = -\alpha = -0{,}676$$
$$r(\mathfrak{C})''' = 52 - 3 \cdot 0{,}676 = 49{,}97.$$

c) Das arithmetische Mittel.

1. Immerhin war das Verfahren zur Berechnung des $\mathfrak{C}$ für den hypothetischen K.-G. f(x), insbesondere bei der gewöhnlichen Beschränkung auf den ersten, rein linearen Wert (im Beispiel 50,2) bereits eindeutig genug, um den Vorteil hinreichend würdigen zu lehren, einen vollwertigen Repräsentanten unseres K.-G. relativ einfach ermitteln zu können, ohne hierbei für ihn ein spezielles Verteilungsgesetz voraussetzen zu müssen, zumal man hierbei nicht einmal eine über den ganzen Anstieg von F(x) ausgedehnte Ordinatenreihe zu beobachten brauchte. Ja man hat diesen Zentralwert r($\mathfrak{C}$) (abgesehen von dem nur schwierig bestimmbaren Dichtigkeitsmittel $\mathfrak{D}$) noch bis vor kurzem geradezu für den einzigen Repräsentanten gehalten, der im sog. „unmittelbaren Verfahren“ für die Grenzabszissen r_o und r_u mit dem Anspruch auf wissenschaftliche Exaktheit zu gewinnen wäre. Wie aber

nun Ch. Spearman[1]) in jüngster Zeit gezeigt hat, läßt sich natürlich auch das arithmetische Mittel $r(\mathfrak{A})$ für den hypothetischen K.-G. $f(x)$ aufsuchen. Ja es gelang ihm, einen Satz zu finden, der die Berechnung von $r(\mathfrak{A})$ aus den beobachteten Urteilskurven $F(x)$ sogar zu der einfachsten und zugleich eindeutigsten überhaupt gestaltet. Dies ist um so wichtiger, als das arithmetische Mittel nun doch einmal der anerkannteste Repräsentant eines K.-G. ist, in welchem sämtliche Beobachtungen der ganzen Unsicherheitsregion von E' bis E am gleichmäßigsten zur Geltung kommen können.

Wir werden nun diesen Satz über $r(\mathfrak{A})$ sehr leicht und dabei sogleich wieder ganz allgemein für eine stetige Verteilung $f(x)$ bzw. $F(x)$ beweisen können, indem wir einfach die Formeln anwenden, nach denen im vorigen Kapitel die Repräsentanten für einen direkt beobachteten K.-G. $\mathfrak{V}(x)$ bestimmt wurden.

Wir brauchen ja dabei nur für $\int \mathfrak{V}(x)\,dx$, dem jetzt das Integral über die Verteilung $f(x)$ des hypothetischen K.-G. entspricht, die in der Funktion $F(x)$ bereits beobachtete Größe einzusetzen. Denn nach [145] ist

$$r_0(\mathfrak{A}) = \int_{E'_0}^{E_0} x \cdot f_0(x)\,dx = E_0 - \int_{E'_0}^{E_0}\!\!\int f_0(x)\,dx\,dx,$$

falls in dem ersten (inneren) Integral über $f_0(x)$ die Konstante

$$C_0 = -\int f_0(x)\,dx \Big|_{x=E_0'}$$

(ohne Konstante), also nach [218] $C_0 = -\mathfrak{F}_g(E_0')$ gewählt wurde. Diese Konstante ist aber nun in der Tat nach [223a] gerade dann vorausgesetzt, wenn wir nach [223] $F_g(x)$ allgemein als Integral $\int f_0(x)\,dx$ auffassen. Somit finden wir in der Tat aus [145], das nach Lage der Extreme direkt auf $r_0(\mathfrak{A})$ übertragen werden kann, unmittelbar den Satz:

$$r_0(\mathfrak{A}) = E_0 - \int_{E'_0}^{E_0} F_g(x)\,dx \qquad [238]$$

oder: Das arithm. Mittel der oberen Schwelle (Grenzabszisse) ist gleich dem äußeren Extrem E_0 der zugehörigen Beobachtungsfunktion $F_g(x)$ des oberen extremen Falles g, vermindert um das Integral über diese Funktion zwischen den Grenzen ihres Anstieges. Dies ist nun der auf eine stetige Verteilung übertragene Spearmansche Satz für die obere Schwelle, dem mutatis mutandis natürlich auch ein solcher für das arithm. Mittel der unteren Grenzabszisse $r_u(\mathfrak{A})$ entspricht. Denn wenn man nach [227] und [227a] $-F_k(x)$ für $\int \mathfrak{V}(x)\,dx$ in [144] bis [145] einsetzt, so findet man

1) The method of right and wrong cases („constant stimuli") without Gauß' Formulae. British Journal of Psychology, Vol. II, 3. 1908, S. 227 ff.

$$r_u(\mathfrak{A}) = \int_{E_u}^{E'_u} x \cdot f_u(x)\,dx = E_u + \int_{E_u}^{E'_u} F_k(x)\,dx. \qquad [239]$$

$r_u(\mathfrak{A})$ muß natürlich größer sein als das äußere Extrem E_u, von dem an $F_k(x)$ abfällt, und die Grenzabszisse ist auch hier nach innen um das bestimmte Integral von der äußeren Grenze des Abfalles der Funktion entfernt. Somit lassen sich also auch beide Sätze für die Grenzabszissen in den einzigen allgemeinen zusammenziehen: Die arithmet. Mittel der Grenzabszissen entfernen sich von dem äußeren Extrem der Grenzkurve nach innen um das Integral über diese Funktion zwischen den Grenzen der Unsicherheitsregion. Da nun diese bestimmten Integrale bekanntlich der Fläche zwischen der Grenzkurve F(x) und der Abszissenachse äquivalent sind, so kann man sich die Entstehung der ganzen Verteilung bei zufälligen Schwankungen der Schwellenwerte aus denjenigen bei konstanten Verhältnissen in der Weise veranschaulichen, daß man zunächst die S. 165f. genannte Begrenzung bei dieser vollen Konstanz gewissermaßen als den „wahren" Wert der Grenzabszisse in die Abszisse des arithmetischen Mittels $r(\mathfrak{A})$ verlegt. Die Verwandlung des senkrechten Verlaufes der Kurve in einer einzigen Ordinate $F(r(\mathfrak{A}))$ in die beobachtete Grenzkurve F(x) bei Schwankungen der Schwelle wäre dann sozusagen dem Herabgleiten einer losen Masse nach Entfernung einer schützenden Mauer vergleichbar: Die Masse breitet sich hierbei über eine gewisse Region aus, und so rückt das Extrem E weiter in die Hauptmasse der g- bzw. k-Fälle hinein, das Extrem E′ aber verschiebt sich in entgegengesetzter Richtung, während die Masse dabei konstant bleibt.

2. Zur Anwendung dieser Formeln ist allerdings nunmehr vorausgesetzt, daß wirklich eine über die ganze Unsicherheitsregion möglichst gleichmäßig verteilte Reihe von r. H. F(x) beobachtet ist. Eine solche wird von G. E. Müller als eine „vollständige" oder kurz „Vollreihe" bezeichnet. Dann sind aber die hier gesuchten Hauptwerte der f(x) aus den F(x) nach [238] und [239] vor allem auch sehr bequem numerisch zu berechnen. Denn man braucht nur für die Integrale, die der ganzen Fläche der Anstiegskurven äquivalent sind, wieder die bereits im 4. Kapitel, § 19 c gewonnenen Formeln einzuführen. Das bestimmte einfache Integral zwischen E und E′ war sogar die leichteste Aufgabe jenes Abschnittes, über die § 19 c, 4, S. 87f. alles Notwendige für äquidistante und andere Beobachtungsreihen zu finden ist. Berechnet man also z. B. ein $r_o(\mathfrak{A})$ aus der äquidistanten Reihe

$$g_0 = F_g(E_o') = 0,\ g_1,\ g_2,\ \ldots\ g_{p-1},\ g_p = F_g(E_o) = 1$$

mit dem Abszissenintervall i, wie es gewöhnlich bei solchen Aufgaben geschehen wird, so kommt man nach Gl. [72] vollständig mit der auch von Spearman benutzten Annäherung aus:

$$r_o(\mathfrak{A}) = E_o - i \cdot \Sigma g + \frac{i}{2}, \qquad [240]$$

wobei in Σg sämtliche Ordinaten einschließlich $g_p = F_g(E_o) = 1$ enthalten sind. Natürlich könnte man hier nach [72b] auch sogleich schreiben

$$r_o(\mathfrak{A}) = E_o - i \cdot \sum_{x=1 \text{ bis } p-1} g_x - \frac{i}{2}. \qquad [241]$$

Sind andererseits

$$k_0 = 0,\ k_1, \ldots k_{q-1},\ k_q = 1$$

die wiederum nach S. 185 spiegelbildlich zu $F_g(x)$ von innen nach außen numerierten Beobachtungsordinaten des unteren extremen Falles, so ist nach [72] und [239]

$$\mathbf{r_u(\mathfrak{A}) = E_u + i \Sigma k - \frac{i}{2}}. \qquad [242]$$

Die letztere Formel können wir also sogleich wieder auf unser Zahlenbeispiel Tabelle 5, S. 83 f. und Fig. 4 anwenden, für das wir vorhin $r_u(\mathfrak{C})$ bestimmten, und für das wir in § 19 c, 4 das für $r_u(\mathfrak{A})$ erforderliche Integral in Gl. [75] und [76] sogar bereits fertig berechnet haben, und zwar sowohl mit dieser praktisch allein in Betracht kommenden Annäherung als auch mit verschwindend kleinen, von der speziellen Integrationsweise abhängenden Restgliedern. Dabei fanden wir S. 90

$$\int_{E_u}^{E'_u} F_k(x)\,dx = 7{,}62, \text{ bzw. } = 7{,}62 - 0{,}00625.$$

E_u ist hier $x_7 = 43$. Daher wird nach [239] bzw. [242]:

$$r_u(\mathfrak{A}) = 43 + 7{,}62 = 50{,}62,$$

ein Wert, der also dabei zugleich so eindeutig ist, daß er durch die genannte Verfeinerung höchstens um $-0{,}00625$ verändert würde.

d) Das sog. Idealgebiet der Gleichheitsfälle (mittleren Fälle) und seine Beziehung zur oberen und unteren Schwelle.

Diesen einfachen praktischen Konsequenzen der Spearmanschen Sätze für die Berechnung der oberen und unteren Unterschiedsschwellen im einzelnen steht nun in einem System aus g-, u- und k-Fällen noch die nicht minder wichtige und einfache Beziehung zur Seite, die sie zwischen diesen arithmetischen Mitteln $r_o(\mathfrak{A})$ und $r_u(\mathfrak{A})$ einerseits und dem bestimmten Integral über die gesamte Beobachtungsfunktion $F_u(x)$ des mittleren Falles andererseits vermitteln. Bildet man nämlich aus [238] und [239] den Ausdruck für den Abstand der arithm. Mittel beider Grenzabszissen voneinander, so findet man, daß dieser dem eben genannten Integral über die ganze Funktion $F_u(x)$ gleich ist. Es ist nämlich zunächst

$$r_o(\mathfrak{A}) - r_u(\mathfrak{A}) = E_o - E_u - \left(\int_{E'_o}^{E_o} F_g(x)\,dx + \int_{E_u}^{E'_u} F_k(x)\,dx\right).$$

Da aber außerdem aus [16] doch auch folgt, daß

$$(E_o - E_u) \cdot 1 = \int_{E'_o}^{E_o} F_k(x)\,dx + \int_{E'_u}^{E_o} F_u(x)\,dx + \int_{E_u}^{E'_u} F_k(x)\,dx, \qquad [243]$$

so ist auch

$$r_o(\mathfrak{A}) - r_u(\mathfrak{A}) = \int_{E_u}^{E_o} F_u(x)\,dx, \text{ w. z. bew.} \qquad [244]$$

Berechnen wir nach [72] den numerischen Wert dieses Integrales über $F_u(x)$ aus den von Null verschiedenen Ordinaten der mittleren Fälle u_1, $u_2 \ldots u_s$, so wird schließlich einfach

$$\mathbf{r_o(\mathfrak{A}) - r_u(\mathfrak{A}) = i \cdot \Sigma u.} \qquad [245]$$

Dieser zweite Spearmansche Satz enthält aber nun in $i \cdot \Sigma u$ eine Größe, deren repräsentative Bedeutung innerhalb eines solchen Systems von drei Hauptfällen bereits von G. E. Müller, allerdings noch ohne allgemeinen Beweis, prinzipiell hervorgehoben worden ist. Es ist sein sog. „Idealgebiet der Gleichheitsfälle“ Iu, das er bereits in seinen „Gesichtspunkten“[1]) der Unterschiedsschwelle, d. h. also in der Tat der Differenz zwischen der oberen und unteren Grenzabszisse, proportional erachtete[2]). Freilich läßt die Kenntnis dieses „Idealgebietes“ Iu allein noch nichts über die absolute Lage der Grenzabszissen, d. h. eben über r_o und r_u im einzelnen aussagen, die uns weiterhin noch besonders interessieren wird, und ebensowenig über die Streuungen bzw. über die Verteilungsfunktionen überhaupt, die in den K.-G. der beiden Grenzabszissen unabhängig voneinander und damit auch unabhängig von $F_u(x)$ beobachtet worden sind.

e) Der mittlere Fehler M der Schwellenbestimmung.

1. Die Einführung von $F_g(x)$ bzw. $-F_k(x)$ statt $\int \mathfrak{W}(x)\,dx$ in [148] bis [157] und in [201] bis [212] läßt dann weiterhin auch die als Streuungsmaße M^2 und D anerkannten Durchschnitte über unsere hypothetischen K.-G. aus „Vollreihen“ (s. S. 188) mit der nämlichen Genauigkeit, Eindeutigkeit und Leichtigkeit wie den Hauptwert $r(\mathfrak{A})$ selbst berechnen. Erst dadurch wird aber das sog. „unmittelbare“ Verfahren wirklich wissenschaftlich vollwertig und demjenigen bei Voraussetzung spezieller Verteilungsgesetze mindestens äquivalent, das z. B. beim einfachen E.-G. in dem Parameter h des Präzisionsmaßes stets einen zu M oder D reziproken Wert an-

1) S. 148.

2) Je ähnlicher die beiden K.-G. $f_o(x)$ und $f_u(x)$ unter sich sind, und je weniger daher die Abstände zwischen den entsprechenden Hauptwerten $r_o(\mathfrak{C})$ und $r_u(\mathfrak{C})$ sowie $r_o(\mathfrak{D})$ und $r_u(\mathfrak{D})$, von dem Abstand der beiderseitigen Hauptwerte des arithmetischen Mittels $r_o(\mathfrak{A})$ und $r_u(\mathfrak{A})$ verschieden sind, um so allgemeiner wird die Gleichung [245]. Unter der Voraussetzung des völligen Parallelismus nach [230] würde also Gl. [245] z. B. für $r_o(\mathfrak{C}) - r_u(\mathfrak{C})$ genau in der nämlichen Weise gelten, wofür sie von G. E. Müller auch unter dieser speziellen Voraussetzung gesondert bewiesen worden ist (a. a. O. S. 151 f.). Auch hat G. F. Lipps bereits in seinem „Grundriß der Psychophysik“ (1899) gefunden, daß eine unter ganz analogen, ebenfalls sehr speziellen Voraussetzungen mit Iu identische Größe dem Abstande zwischen beiden Grenzabszissen gleich ist, worauf wir im nächsten Hauptabschnitte bei der sog. Methode der „mittleren Fehler“ zurückkommen werden.

gibt. Hat doch das Streuungsmaß insbesondere auch in psychophysischen Untersuchungen dieser Art eine von $r_o(\mathfrak{A})$ und $r_u(\mathfrak{A})$ unabhängige, selbständige psychologische Bedeutung. Dabei ergibt sich aber hier nunmehr auch für das anerkannteste Maß dieser Art, nämlich für die mittleren Fehler der beiden Grenzabszissen,

$$M_o{}^2 = \int_{E'_o}^{E_o} (r_{mo} - x)^2 f_o(x)\,dx \qquad [246]$$

$$M_u{}^2 = \int_{E_u}^{E'_u} (r_{mu} - x)^2 f_u(x)\,dx \qquad [247]$$

infolge der Einsparung einer Integrationsstufe eine sehr bequeme Endformel, die seine Berechnung für stetige $\mathfrak{B}(x)$ erst recht praktisch gestaltet. Denn sie ist vor allem auch in ihrer überaus einfachen ersten Annäherung für die psychophysische Praxis noch völlig ausreichend, ja sogar noch etwas präziser als die ungefähr gleich stark vereinfachte, aber dabei noch nicht einmal so bequeme Endformel für die mittlere Variation D unseres K.-G., die wir daher auch erst an zweiter Stelle nennen werden.

Was zunächst die Beziehung der Abweichungen auf einen beliebigen Mittelwert r_m der Grenzabszisse anlangt, so gestattet die Formel [156], ebenso wie [145] bei [238], infolge der speziellen Lage der Extreme wieder eine unmittelbare Anwendung auf $M_o{}^2$. Es wird also durch die genannte Substitution von $F_g(x)$

$$M_o{}^2 = (E_o - r_{mo})\,(E_o - r_{mo} - 2\int_{E'_o}^{E_o} F_g(x)\,dx) + 2\int_{E'_o}^{E_o}\!\!\int F_g(x)\,dx\,dx. \qquad [248]$$

Aus [247] aber wird durch eine analoge Entwicklung wie bei [239], bei der man in [148] bis [156] $-F_k(x)$ für $\int \mathfrak{B}(x)\,dx$, bzw. für $\int f_u(x)\,dx$ substituiert[1]):

$$M_u{}^2 = (r_{mu} - E_u)\;(r_{mu} - E_u - 2\int_{E_u}^{E'_u} F_k(x)\,dx) - 2\int_{E_u}^{E'_u}\!\!\int F_k(x)\,dx. \qquad [249]$$

Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß innerhalb des Doppelintegrales über F(x), das an die Stelle des dreifachen Integrales über f(x) tritt, die erste Integration in [248] bzw. [249] die Integrationskonstante

$$C_o^{I} = -\int F_g(E'_o)\,dE_o \qquad [250]$$

$$\text{bzw.} \qquad C_u^{I} = +\int F_k(E_u')\,dE_u \qquad [251]$$

1) Ausführlich dargestellt in meiner S. 87 genannten Abhandlung die „Mathem. Grundlagen usw.“ in Wundts Psychol. Stud. VI, 3. u. 4. H. 1910. S. 252 ff.

enthält. Bei der numerischen Integration nach dem § 19 c, 6, S. 93f. entwickelten Prinzip ist jedoch die Frage dieser Konstanten durch [83] und [84] bereits wieder in diesem Sinne erledigt.

2. In der Praxis wird man übrigens M^2 **meistens nur auf die Hauptwerte** $r_o(\mathfrak{A})$ bzw. $r_u(\mathfrak{A})$ **beziehen**, mit denen ja dieses Streuungsmaß auch nach Fechner speziell „solidarisch" ist. Dadurch werden aber die Formeln nach [157] noch wesentlich einfacher. Es ergibt sich mit Rücksicht auf [238] und [239] aus [248] und [249] für $r_m = r(\mathfrak{A})$

$$[M_o(\mathfrak{A})]^2 = 2\int_{E'_o}^{E_o}\int F_g(x)\,dx\,dx - [\int_{E'_o}^{E_o} F_g(x)\,dx]^2 \qquad [252]$$

$$[M_u{}^2(\mathfrak{A})]^2 = -2\int_{E_u}^{E'_u}\int F_k(x)\,dx\,dx - [\int_{E_u}^{E'_u} F_k(x)\,dx]^2. \qquad [253]$$

Das erste Glied von [253] mit dem Doppelintegral wird mit Rücksicht auf die in seinem ersten (inneren) Integral wieder vorausgesetzte Konstante

$$C_u^I = +\int F_g(x)\,dx_{\,x = E_o'}$$

trotz des negativen Vorzeichens in der Tat positiv und größer als das stets negative zweite Glied, wie es natürlich bei dem stets positiven Streuungsmaß der Fall sein muß. Doch brauchen wir die Vorzeichen dieser Formel hier wieder nicht weiter zu diskutieren, da ja bei der numerischen Berechnung für $f_u(x)$ die k_x der Kurve $F_k(x)$ nach S. 185 wieder spiegelbildlich numeriert werden, worauf der Fall ganz analog behandelt wird wie $F_g(x)$. Denn auch die bestimmten Doppelintegrale über $F_g(x)$ und $F_k(x)$ sind unter Voraussetzung der Konstanten C_o^I und C_u^I Flächen von Kurven, die in der nämlichen Richtung ansteigen wie die Beobachtungsfunktionen $F_g(x)$ und $F_k(x)$ selbst, so daß sie bei symmetrischem Verlaufe beider Kurven und gleichen Extremdistanzen $E - E'$ einander gleich sein müssen.

Nun haben wir in § 19 c, 6 auch für diese Doppelintegrale in [252] und [253] bereits die genauen und angenäherten Formeln zur numerischen Berechnung aus der g- bzw. der k-Reihe kennen gelernt, nach deren Ermittlung übrigens auch in den Formeln [248] und [249] für die Beziehung auf beliebige Ausgangswerte r_m nichts mehr unbekannt ist. Denn das zweite Glied war uns außerdem auch schon in der Formel für den Hauptwert $r(\mathfrak{A})$ selbst wieder begegnet. Nach [85a] und [72] wird also insbesondere die **praktisch völlig ausreichende Annäherung** für den auf $r(\mathfrak{A})$ bezogenen mittleren Fehler der Grenzabszisse, da $g_p = k_q = 1$,

$$\frac{1}{i^2}[M_o(\mathfrak{A})]^2 = 2\left[(p-1)g_1 + (p-2)g_2 + \ldots 1 \cdot g_{p-1} + \frac{1}{8}\right] - \left(\Sigma g - \frac{1}{2}\right)^2, \qquad [254]$$

$$\frac{1}{i^2}[M_u(\mathfrak{A})]^2 = 2\left[(q-1)k_1 + (q-2)k_2 \ldots + 1 \cdot k_{q-1} + \frac{1}{8}\right] - \left(\Sigma k - \frac{1}{2}\right)^2. \qquad [255]$$

3. Für unser Zahlenbeispiel aus Tabelle 5 und Fig. 4 berechneten wir nun bereits auf S. 95 mit der in [85a] gegebenen Annäherung das hier erst noch mit 2 zu multiplizierende Doppelintegral. Es beträgt 36,9450. Das ins Quadrat zu erhebende einfache Integral des zweiten Gliedes aber war nach [75], wie schon vorhin S. 189 wiederholt wurde, mit größter Annäherung 7,614. Daher wird im ganzen in genügender Annäherung:

$$[M_u(\mathfrak{A})]^2 = 73{,}890 - 57{,}973 = 15{,}917.$$

Nähme man noch die Restglieder aus [85] im Betrage von $+0{,}28545$ zum Doppelintegral hinzu, so würde der genauere Wert schließlich

$$[M_u'(\mathfrak{A})]^2 = 16{,}4879.$$

Dadurch wären also die mittleren Fehler selbst:

$$M_u(\mathfrak{A}) = 3{,}9896 \text{ und } M_u'(\mathfrak{A}) = 4{,}0605.$$

Beide Werte sind somit nur noch um $1{,}74\,^0\!/_0$ des genaueren Wertes voneinander verschieden, also eine bei einem Streuungsmaß wohl meistens zu vernachlässigende Differenz.

f) Die mittlere Variation D der Schwellenbestimmung.

1. Für die mittlere Variation D zu f(x) braucht man wieder nur ein einfaches Integral über die Beobachtungsfunktion F(x) auszuwerten, da [209] und [212] nur je ein Doppelintegral über die hier hypothetische Verteilung enthalten. Doch ist die Formel hierfür im allgemeinen etwas komplizierter als bei der ebenfalls auf ein einfaches Integral beschränkten Formel für $r(\mathfrak{A})$, weil die obere Grenze dieses Integrales nicht von einer beobachteten Ordinate F(x), sondern von der interpolierten des Ausgangswertes r_m gebildet wird. Setzt man für $\int \mathfrak{B}(x)\,dx$ wieder $F_g(x)$ bzw. $-F_k(x)$, so wird für einen beliebigen Ausgangswert r_{mo} die mittlere Variation der oberen Grenzabszisse nach Gleichung [209], die sich nach Lage der Extreme wieder direkt auf D_o übertragen läßt:

$$D_o = r_o(\mathfrak{A}) - r_{mo} + 2\int_{E'_o}^{r_{mo}} F_g(x)\,dx, \qquad [256]$$

und nach einer analogen Entwicklung wie in [201] bis [209] ist bei Beziehung der Abweichungen auf den beliebigen Ausgangswert r_{mu} der unteren Schwelle deren mittlere Variation

$$D_u = \int_{E_u}^{r_{mu}} (r_{mu} - x)\,f_u(x)\,dx + \int_{r_{mu}}^{E'_u} (x - r_{mu})\,f_u(x)\,dx$$

$$= r_{mu} - r_u(\mathfrak{A}) + 2\int_{r_{mu}}^{E'_u} F_k(x)\,dx. \qquad [257]$$

Da die mittlere Variation nach Fechner vor allem mit dem Zentralwert solidarisch ist, so wird man also in der Praxis für D gerade diese allgemeinere Formel brauchen können. Doch wird auch diese bei der Beziehung der Abweichungen auf das arithmetische Mittel $r_o(\mathfrak{A})$ bzw. $r_u(\mathfrak{A})$ noch einfacher, da ja dann die Differenz vor dem Integral verschwindet und nur noch übrigbleibt:

$$D_o(\mathfrak{A}) = 2\int_{E'_o}^{r_o(\mathfrak{A})} F_g(x)\,dx \qquad [258]$$

$$D_u(\mathfrak{A}) = 2\int_{r_u(\mathfrak{A})}^{E'_u} F_k(x)\,dx. \qquad [259]$$

Diese Formeln gestatten nun offenbar auch wieder eine sehr einfache geometrische Veranschaulichung: Die mittlere Variation der Grenzabszisse, bezogen auf deren arith. Mittel, ist der doppelten Kurvenfläche von $F_g(x)$ bzw. $F_k(x)$ von dem inneren Extrem bis zur Ordinate dieses Mittels äquivalent.

2. Die numerische Auswertung geschieht nach § 19, c, 5 (S. 91f.), wobei $F_k(x)$ wieder einfach symmetrisch zu $F_g(x)$ zu behandeln ist. Man braucht die dortigen Formeln ja nur mit 2 zu multiplizieren und bei einem beliebigen Ausgangswert den absoluten Wert der Differenz zwischen ihm und dem arithmetischen Mittel hinzuzuaddieren. Es ist also, wenn der beliebige Ausgangswert $r_{mo} = x_\varrho + i\mu_o$, nach [78] und [256] in genügender Annäherung:

$$\mathbf{D_o = r_o(\mathfrak{A}) - r_{mo} + 2i\Big(\sum_{x=1 \text{ bis } \varrho-1} g_x + g_\varrho(0{,}5+\mu_o) + \frac{\mu_o^2}{4}(g_{\varrho+1} - g_{\varrho-1})\Big)} \qquad [260]$$

und, wenn $r_{mu} = x_\pi\, i\mu_u$:

$$D_u = r_{mu} - r_u(\mathfrak{A}) + 2i\Big(\sum_{x=1 \text{ bis } \pi-1} k_x + k_\pi(0{,}5+\mu_u) + \frac{\mu_u^2}{4} k_{\pi+1} - k_{\pi-1})\Big). \qquad [261]$$

Auch unser Zahlenbeispiel nach Tab. 5 und Fig. 4 ist somit in § 19c, 5 schon im wesentlichen erledigt, da dort in Voraussicht dieser speziellen Anwendung gerade die Ableitung des Integrales bis zu der Ordinate gewählt wurde, die vorhin S. 189 als arithmetisches Mittel $r_u(\mathfrak{A})$ ermittelt wurde. Der doppelte Wert dieses Integrals ist aber ja dann nach [259] ohne weiteres bereits das auf $r_u(\mathfrak{A})$ bezogene D. Nur waren dort zur Vereinfachung des Beispieles die Abszissen einstweilen von $x_o = E_u'$ aufsteigend gerechnet und $x_o = 0$ gesetzt, so daß an Stelle des vorhin gefundenen $r_u(\mathfrak{A}) = 50{,}62$ nur sein Abstand von $x_o = 64$ stand, also $64 - 50{,}62 = 13{,}38$. Der Wert des bestimmten Integrals bleibt aber natürlich von dieser einfachen Translation unberührt, so daß der nach [261] angenäherte Wert

$$D_u(\mathfrak{A}) = 2 \cdot 1{,}49135 = 2{,}9827$$

wird. Nimmt man auch die Restglieder aus [77] hinzu, deren Berechnung allerdings die Anlage des Differenzenschemas Tab. 7 erfordert, die bei lauter ganzen Zahlen übrigens sehr einfach ist, so wird der Wert nach S. 92 noch um $2 \cdot 0{,}05046$ kleiner, so daß der genaue Wert $D_u'(\mathfrak{A}) = 2{,}8818$ ist. Die Abweichung der Annäherung beträgt daher hier immerhin 3,5% des genaueren Wertes und ist doppelt so groß als bei der ungefähr gleich stark vereinfachten Darstellung von M, worin keinesfalls eine rein zufällige Eigenschaft unseres Beispieles zu sehen ist.

3. Hat man nun M oder D berechnet, so ist hierin zugleich die Reziproke eines „Präzisionsmaßes" gegeben, das man durch Bildung der Ausdrücke $\frac{1}{M\sqrt{2}}$ und $\frac{1}{D\sqrt{\pi}}$ speziell auch wieder an den Parameter h des einfachen Exponentialgesetzes angleichen kann. Aus dem anerkannteren Repräsentanten M würde sich also in unserem Zahlenbeispiele

$$h = \frac{1}{4{,}0605\sqrt{2}} = 0{,}17414$$

ergeben. Die Ableitung des beiderseitigen Verhältnisses $\frac{M(\mathfrak{A})}{D(\mathfrak{A})}$ kann ferner neben dem Abstand $r(\mathfrak{A}) - r(\mathfrak{C})$, der eine Art Asymmetrie-Maß darstellt, zugleich wiederum zu einer einfachsten Prüfung der Annäherung von $f_o(x)$ bzw. $f_u(x)$ an das Gaußsche Gesetz benutzt werden. In unserem Zahlenbeispiele ist das Verhältnis der genauen Werte

$$\frac{M_u'(\mathfrak{A})}{D_u'(\mathfrak{A})} = \frac{4{,}0605}{2{,}8818} = 1{,}409,$$

also von dem nach Gl. [118] für das einfache E.-G. geforderten Verhältnis 1,25331 immerhin bereits ziemlich verschieden, wenn auch $r_u(\mathfrak{A})$ und $r_u(\mathfrak{C})$ nicht sehr viel voneinander abweichen.

g) Die Anwendung der Formeln für das arithmetische Mittel und die Streuungsmaße M und D der Schwelle bei sog. Verkehrtheiten der Grenzkurven.

Ein vollständiger empirischer Überblick über die K.-G. der oberen und unteren Schwelle (Grenzabszisse) ist also überhaupt niemals anders zu gewinnen als durch Ableitung einer sog. „Vollreihe" für $F_g(x)$ und $F_k(x)$, die in einem System von drei Hauptfällen somit mindestens die Abszissen E_u und E_o einschließen muß, in denen die rel. H. der extremen Fälle (k und g) die Einheit vollständig erreicht oder der Sicherheit gleichkommt. Erst auf Grund dieser Beobachtungen kann ohne Voraussetzung einer speziellen Verteilungsfunktion etwas über die wichtigsten Repräsentanten jener hypothetischen K.-G., nämlich das arithmetische Mittel $r(\mathfrak{A})$ und die Streuungsmaße M und D, ausgesagt werden. Dagegen ist es dabei keineswegs erforderlich, daß auf jede einzelne Beobachtungsabszisse eine sehr große Anzahl n_x von Einzelversuchen entfällt. Man wird bei einigermaßen konstanten Bedingungen in der psychophysischen Praxis oft schon mit ca. 3 bis 5 Versuchen für jedes x brauchbare Werte ableiten können, wenn nur das Interval i nicht zu groß und die Reihe wirklich bis zu den genannten Extremen ausgedehnt ist. Dies garantiert einerseits, daß nunmehr das ganze System wirklich unter konstanteren Bedingungen beobachtet wird, als es bei einer sehr langen Reihe der Fall ist. Andererseits läßt sich aber bei einer solchen Beschränkung auf eine kleinere Versuchszahl n_x für jede Abszisse die Beobachtung über um so mehr Stufen ausdehnen, ohne daß man an einen praktisch unmöglichen Gesamtumfang von Einzelversuchen herankommt. Gerade eine solche weitere Anlage der Abszissen ist aber häufig im voraus unerläßlich, wenn man über die Größe der Schwelle vorläufig noch nichts weiß, oder wenn man, wie es doch eine wissenschaftliche Analyse stets verlangt, größere Veränderungen dieser Schwellen durch eine systematische Variation der allgemeinen Beobachtungsbedingungen in verschiedenen Reihen untersuchen will. In § 29, e haben wir aber nun ferner auch schon gesehen, daß die Ableitung unserer Repräsentanten selbst dann in der nämlichen Weise geschehen kann, wenn eine etwas geringere Versuchszahl n_x für die einzelnen Ordinaten zu sog. „Verkehrtheiten" führt. Man brauchte hierbei noch gar nicht einmal an ein besonderes Ausgleichungsverfahren zu denken. Faßt man aber nun z. B. die wichtigsten und zugleich einfachsten Formeln [238] und [239] dieses Paragraphen für $r(\mathfrak{A})$ näher ins Auge, so erkennt man, daß ihre unveränderte Anwendung auf solche Funktionen $F_g(x)$ und $F_k(x)$, die „Verkehrtheiten" erster oder auch nur zweiter Ordnung in sich schließen, sogar einem besonders plausiblen Ausgleichungsverfahren im eigentlichen Sinne entsprechen würde. Denn da jene Formeln außer den äußeren Extremen E_o und E_u nur noch die Integrale enthalten, die dem Flächeninhalt des ganzen von 0 bis 1 ansteigenden Kurvenzweiges der Beobachtungsfunktionen äquivalent sind, so würde offenbar der Wert des arithmetischen Mittels der Grenzabszisse der nämliche bleiben, wenn man sich die Verkehrtheiten der Kurve durch eine Vermehrung oder Verbesserung der Versuche beseitigt denkt, bei welcher sowohl das äußere Extrem als auch der Flächeninhalt der Kurve erhalten bleibt. Die positiven und negativen Fehler der zunächst bei geringer Versuchszahl beobachteten Kurve $F(x)$ müßten sich also gerade gegenseitig aufheben. Hierbei ist nicht etwa den Extremen E_o und E_u eine ihnen nicht zukommende Bedeutung eingeräumt. Kleine Verschiebungen der Extreme E_u, E_o usw., die z. B. bei Vergleichsversuchen infolge vereinzelter Aufmerksamkeitsschwankungen bisweilen auch nach ihrer anscheinend schon ganz sicheren Ermittlung durch einen einzigen „Fehler" auf einmal wieder hinausgerückt werden, verändern ja den resultierenden Wert $r(\mathfrak{A})$ doch immer nur ganz wenig, wenn nur die nächstbenachbarten Werte g_{p-1}, $g_{p-2}\ldots$ bzw. k_{q-1}, $k_{q-2},\ldots$ der Einheit sehr nahe bleiben. Daß gerade diesen Werten nach dem Bernoulli-Laplaceschen Theorem (vgl. S. 147 f.) ein besonders hohes Gewicht zukommt, bürgt ja auch in der Tat dafür, daß sie de facto schon mit relativ weniger Versuchen ziemlich gut getroffen werden. Im Inneren der Kurve aber läßt ja das Ausgleichungsprinzip der Flächengleichheit der Grenzkurven noch Freiheit genug, um keiner plausiblen Gewichtsüberlegung direkt zu widersprechen. Selbst die spezielle Forderung, daß auch wenigstens die beiden Streuungsmaße M und D bei der Ausgleichung erhalten bleiben möchten, könnte mit dieser Bedingung der Flächenkonstanz im allgemeinen, insbesondere bei einer größeren Zahl von Beobachtungsordinaten, noch nicht in Widerspruch geraten. Dadurch würde also auch unseren Formeln für diese psychophysisch eben so wichtigen Größen vom Standpunkte eines Ausgleichungskalküls eine von „Verkehrtheiten" unabhängige Verallgemeinerung zuerkannt werden können.

31. Die Annahme spezieller Verteilungsgesetze für den hypothetischen K.-G. der Schwelle.

a) Die Voraussetzung des einfachen Exponentialgesetzes.

1. Wenn auch die Statistik als solche bei quantitativen Angaben über Schwellen in ihren ersten Anfängen eigentlich schon auf E. H. Weber selbst zurückgeht[1]), und A. W. Volkmann, wie S. 170 und S. 184 erwähnt, hierbei sogar schon mit einem tatsächlich wertvollen Repräsentanten dieses K.-G. operierte, so hat doch erst Fechner zum ersten Male die beobachtete rel. H. kontradiktorischer Vergleichsurteile als Summenfunktion eines einfachen K.-G. aufgefaßt, als er in seinen „Elementen der Psychophysik"[2]) 1860 die sog. „Methode der richtigen und falschen Fälle" begründete. Dabei setzte er aber nun für den hypothetischen K.-G. sogleich das damals noch als allgemeingültig anerkannte einfache Gaußsche Gesetz voraus. Allerdings ließ er sich durch eine ungerechtfertigte Schematisierung des Beobachtungsmateriales der drei Hauptfälle, die er durch Halbierung der Zahl des mittleren Falles $F_u(x)$ auf nur zwei kontradiktorische nach Gl. [214] reduzierte, und außerdem auch noch durch eine gewisse Eigentümlichkeit seines Demonstrationsbeispieles zunächst zu einer keineswegs einwandfreien Darstellung der Abhängigkeitsbeziehung zwischen der Beobachtung und jenen hypothetischen K.-G. verleiten. Erst G. E. Müller gab dann auf Grund von Überlegungen, wie sie im wesentlichen bei den Definitionen in § 29 festgehalten sind, eine klare Ableitung der Hauptwerte und Streuungsmaße von r_o und r_u[3]) aus den beobachteten r. H. der drei Hauptfälle $F_g(x)$, $F_u(x)$ und $F_k(x)$ unter Voraussetzung des einfachen E.-G., an dessen Stelle er dann außerdem überall sogleich die Möglichkeit anderer ähnlicher Verteilungsgesetze in Betracht zog, und zwar vor allem eine besonders einfache Form des zweiseitigen Gaußschen Gesetzes, die S. 118 erwähnt wurde.

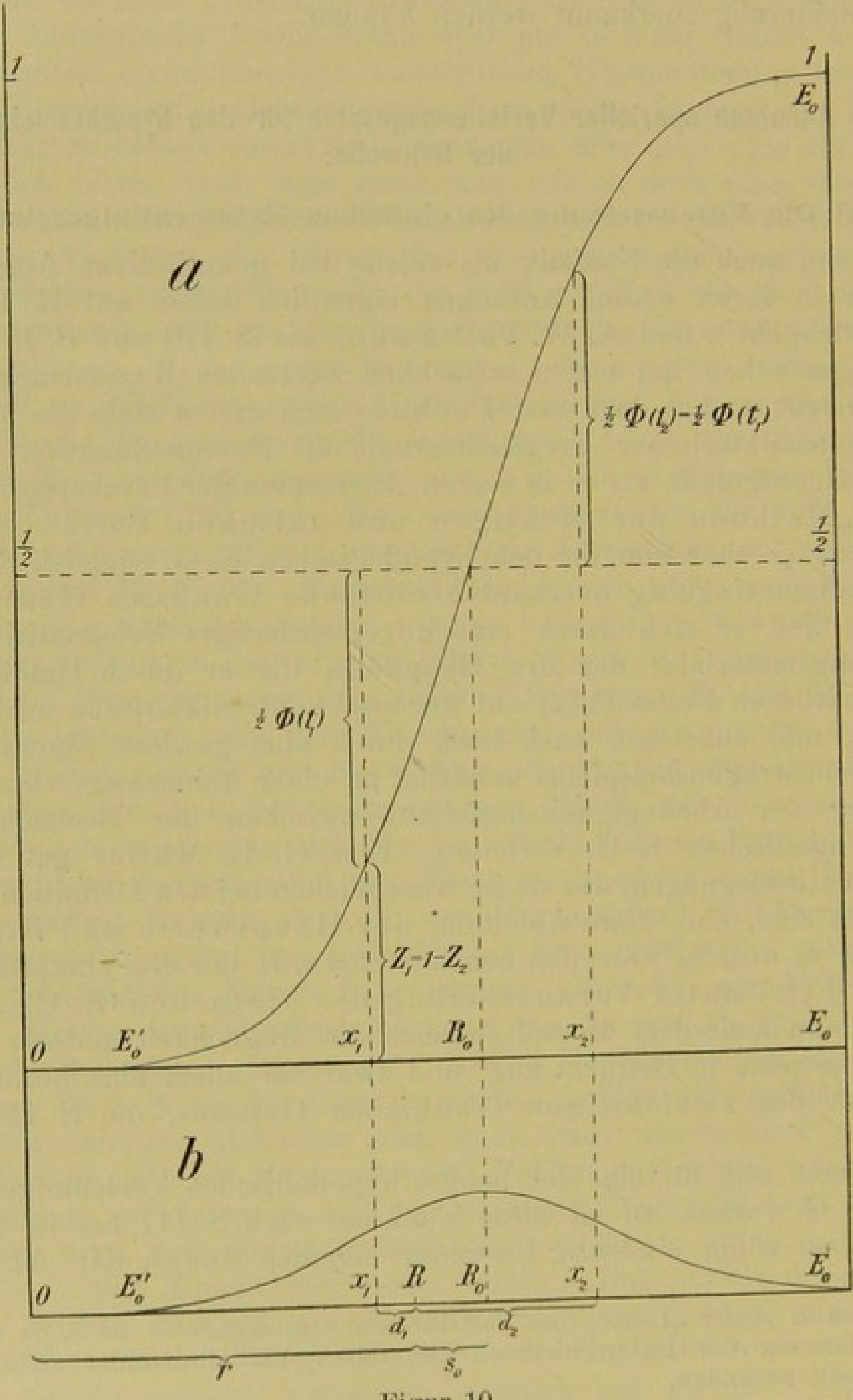
Setzt man nun für eine der beiden hypothetischen Verteilungen f(x) das einfache E.-G. voraus, so ist diese Funktion nach S. 111 bereits durch nur zwei Angaben völlig eindeutig bestimmt, nämlich durch die Abszisse r_o

1) Schon in seiner „Lehre vom Tastsinn und Gemeingefühl" ist S. 88 die quantitative Bestimmung der Unterschiedsschwelle durch Verhältniszahlen richtiger, bzw. falscher Urteile zu finden.

2) S. 94.

3) Nachdem schon in seinem Buche „Zur Grundlegung der Psychophysik" 1878 die entscheidenden Korrekturen der Fechnerschen Ableitung gegeben waren, brachten dann seine schon oft erwähnten „Gesichtspunkte usw." 1904 die auch oben bevorzugte einfachste Ableitung der Variation des Totaleffektes, bei der man zwischen einem oberen und unteren K.-G. der beiden „Schwellen" unterscheidet und die unabhängige Variable x der Auslösungsbedingung des Vergleichsurteiles für sämtliche n_x Einwirkungen einer Stufe als konstant ansieht. Vgl. unten Kap. 9, § 35, d.

des Symmetriepunktes, von dem aus die Abszissen von f(x) als Abweichungen $v = x - r_0$ zu rechnen sind, und durch den Para-



Figur 10.
Die beobachtete Verteilungsfunktion des oberen extremen Falles (der Größer-Urteile) und der hypothetische K.-G. der oberen Schwelle unter Voraussetzung des einfachen Exponentialgesetzes.

meter h des „Präzisionsmaßes". Da sich die Verhältnisse für $f_u(r_u - x)$ wieder völlig symmetrisch zu denen von $f_o(x - r_o)$ gestalten, so brauchen wir sie wieder nur für letzteres genauer zu analysieren, wie es in Fig. 10a und b auch graphisch erläutert ist. Hier sind einfach aus Fig. 7 (s. S. 171) die dort ausgezogenen Kurven $F_g(x)$ und $f_o(x)$ herübergenommen, da ja dort $f(x)$ zur Vereinfachung auch bereits dem Gaußschen Gesetz entsprach. O sei der Anfangspunkt der ursprünglich gegebenen Maße der Abszissen (der Vergleichsreize) und R_o der Symmetriepunkt von $f_o(x)$, so daß also in Fig. 10 die Strecke $\overline{OR_o} = r_o$ ist. Dann ist, wenn wir die Bezeichnung der Funktion beibehalten:

$$f_o(x - \overline{OR_o}) = \frac{h_o}{\sqrt{\pi}} e^{-h_o^2(x - \overline{OR_o})^2}, \qquad [262]$$

wobei natürlich auch der Parameter h wegen der Unabhängigkeit des $f_o(x)$ von $f_u(x)$ einen Index erhält. Fassen wir um der üblichen Bezeichnungsweise willen sogleich das spezielle Beispiel der Unterschiedsschwelle ins Auge, so lassen sich die Abszissen auch zunächst in Abweichungen von einem „Normalreiz" $OR = r$ ausdrücken, also als

$$d_x = x - r, \qquad [263]$$

und dann erst auf den Symmetriepunkt R_o transformieren. Dadurch wird

$$x - r_o = d_x + r - r_o, \qquad [264]$$

und wenn man weiterhin die Abweichung der oberen Grenzabszisse r_o selbst von r mit s_o (obere Unterschiedsschwelle) bezeichnet, so daß

$$r_o - r = s_o, \qquad [265]$$

so folgt hieraus die in diesem Zusammenhang geläufigste Form der Abweichungen v_x

$$v_x = x - r_o = d_x - (r_o - r) = d_x - s_o, \qquad [266]$$

deren Ableitung man in Fig. 10b auch mit einem Blicke übersehen kann. Somit schreibt sich [262] nunmehr als

$$f_o(x - r_o) = f_o(d_x - s_o) = \frac{h_o}{\sqrt{\pi}} e^{-h_o^2(d_x - s_o)^2}. \qquad [267]$$

Die beobachtete Funktion $F_g(x - r_o)$ in Fig. 10a erscheint also jetzt nach [216] (vgl. S. 172) und [267] als

$$F_g(d_x - s_o) = \frac{h_o}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{d_x - s_o} e^{-h_o^2(d_x - s_o)^2} dx, \qquad [268]$$

wobei das Integral wegen der linearen Beziehung [264] noch nach dx genommen werden darf. Da aber wegen der Symmetrie (vgl. S. 106f.)

$$\int_{-\infty}^{0} \varphi(v)\, dv = \frac{1}{2}$$

wird, so ist dies auch gleichbedeutend mit

$$F_g(d_x - s_o) = \frac{1}{2} + \frac{h_o}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{d_x - s_o} e^{-h_o^2(d_x - s_o)^2} dx. \qquad [269]$$

Führt man nun im Integral noch die oft genannte Substitution

$$t_0 = h_0(d_x - s_0) \qquad [270]$$

durch (s. S. 107 und S. 119), so erhält man schließlich als Ausgangspunkt der numerischen Berechnung von h_0 und s_0 aus den Beobachtungen $F_g(x)$ die Müllersche Endformel:

$$F_g(x - r_0) = F_g(d_x - s_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h_0(d_x - s_0) = t_0} e^{-t_0^2} dt_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(t_0). \qquad [271]$$

Hierin ist also $\Phi(t_0)$ wieder die bekannte Funktion, die am ausführlichsten in der Bruns-Kaempfeschen Tabelle dargestellt ist.

Genau genommen würden hiernach wie schon S. 106 erwähnt, weder der einfache K.-G. $f_0(x - r_0)$ noch $F_g(x)$ endliche Extreme E_0' und E_0 haben können. Indessen kommt ja $\pm\Phi(t)$ etwa schon bei $t = \pm 2{,}8$ bis auf einen in der Tabelle nicht mehr zu berücksichtigenden Abstand seinem Grenzwert ± 1 nahe, so daß also nach [271] auch $F_g(d_x - s_0)$ für diejenige Entfernung d_{E_0} vom Normalreiz, bei der

$$t_0 = h_0(d_{E_0} - s_0) = + 2{,}8$$

ist, praktisch bereits seine größte Höhe 1 erreicht, während es andererseits bei einem d_{E_0}', wo

$$t_0 = h_0(d_{E_0}' - s_0) = - 2{,}8,$$

empirisch bereits verschwinden darf.

Wenn ferner der Vergleichsreiz x gerade der mittleren Grenzabszisse r_0 selbst entspricht, so daß die Differenz zwischen Normal- und Vergleichsreiz gerade der Unterschiedsschwelle gleich, d. h. $d_x = s_0$ ist, so muß der Wert t_0 und mit ihm auch $\Phi(t_0)$ verschwinden. Dann nimmt aber die beobachtete Funktion $F_g(x)$ nach [271] gerade den Wert $\frac{1}{2}$ oder 50% an, wie es ja auch aus § 30, b folgt, da die Abzisse r_0 des Symmetriepunktes beim einfachen E.-G. eben zugleich der Zentralwert ($\mathfrak{C}$) des K.-G. $f_0(x)$ ist, bei dem $F_g(x) = \frac{1}{2}$ wird.

Nur wäre eben hier mit $r_0(\mathfrak{C})$ zugleich der einzige Hauptwert r_0 bzw. $r_0 - r = s_0$ schlechthin gefunden. Da aber im allgemeinen nicht gerade der Wert $\frac{1}{2}$ beobachtet wird, für die Berechnung von s_0 und h_0 unter Voraussetzung des einfachen E.-G. aber zwei beliebige als korrekt betrachtete Werte ausreichen werden, so hat diese Feststellung für sie keine speziellere Bedeutung, außer wenn es sich eben wieder um die Verbindung des unmittelbaren Verfahrens mit dieser Annahme eines spezielleren Verteilungsgesetzes handelt, um für die Berechnung der Konstanten des letzteren Annäherungswerte zu gewinnen, wie wir unten ausführlicher darzulegen haben.

Bei $d_x > s_0$, also $x > r_0$, wird dann, wie in Fig. 10 an d_2 zu ersehen ist, $t > 0$ und dadurch auch $\Phi > 0$, wodurch also nach [271] auch $F_g(x) > \frac{1}{2}$, während für $d_x < s_0$, also z. B. für d_1 in der Figur, wo $x < r_0$ ist, t und Φ negativ und $F_g(x) < \frac{1}{2}$ wird.

1a. Analog zu [271] läßt sich dann auch die andere Extremkurve als Abhängige von $v = (x - r_u)$ unter Voraussetzung des einfachen E.-G. darstellen, da nach [224] (vgl. S. 174)

$$F_k(x - r_u) = \int_{x-r_u}^{+\infty} f_u(x - r_u)\,dx = \frac{1}{2} + \int_{x-r_u}^{0} f_u(x - r_u)\,dx = \frac{1}{2} - \int_{0}^{(x-r_u)} f_u(x - r_u)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi(t'_u),$$

wenn $t'_u = h_u(x - r_u)$. Weil nun $\Phi(-t) = -\Phi(t)$, so wird auch

$$F_k(x - r_u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(t_u), \tag{271a}$$

wobei $t_{u,x} = h_u(r_u - x)$ ist. Wenn man nun x wieder durch $r + d_x$ und r durch $r_u + s_u$ ersetzt, wobei s_u die untere Unterschiedsschwelle bedeutet, so wird schließlich

$$F_k(x - r_u) = F_k(s_u + d_x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(t_u). \tag{272}$$

Dieser Wert ist also für Vergleichsreize $x > r_u$, bei denen $d_x > -s_u$ kleiner als $\frac{1}{2}$, für alle kleineren x aber größer als $\frac{1}{2}$. Das Extrem E'_u liegt da, wo $t_u = h_u(r_u - x) = -h_u(s_u + d_x)$ dem Wert $-2{,}8$ nahekommt, während E_u etwa bei $-h_u(s_u + d_x) = +2{,}8$ zu erwarten ist.

1b. Wie schon aus Fig. 8a zu ersehen ist, nähert sich die beobachtete Verteilungsfunktion des mittleren Falles $F_u(x)$ dem einfachen E.-G. selbst, wenn die beobachteten Grenzkurven $F_g(x)$ und $F_k(x)$ ihrerseits nach [271] und [271a] Summenfunktionen des einfachen E.-G. sind. In diesem Falle ist also die Form von $F_u(x)$ derjenigen der hypothetischen K.-G. $f_0(x)$ und $f_u(x)$ verwandt. In der Tat haben wir auch bereits S. 111 eine solche Verteilung eines K.-G. $F_u(x)$ nach § 14,3, für die die Gl. [15] gilt, sogar als Zahlenbeispiel für die Annäherung eines empirischen K.-G. an das einfache E.-G. benutzt. Es war dies die in Fig. 3 dargestellte Verteilung der Gleichheitsurteile nach Tab. 1, S. 63[1]. Obgleich nun über den Grad dieser Annäherung bei derartigen empirischen K.-G. von Gl. [95] bzw. [114] von vorne herein gar nichts auszumachen ist, so daß er gelegentlich auch noch größer als in jenem Beispiele befunden werden könnte, soll hier nur noch kurz darauf hingewiesen werden, daß dieses Gesetz für $F_u(x)$ keinesfalls

1) In der Untersuchung H. Kellers, der dieses Beispiel entnommen ist (a. a. O.), wurden auch alle anderen Gleichheitskurven der nämlichen Kategorie auf ihre Verwandtschaft mit dem einfachen E.-G. hin geprüft.

ganz genau zutreffen könnte, falls es gleichzeitig für die beiden hypothetischen K.-G. $f_o(x)$ und $f_u(x)$ der Schwellen gültig wäre, zu denen $F_u(x)$ durch [271] und [271a] und durch die Gl. [15]:

$$F_u(x) = 1 - F_g(x) - F_k(x)$$

in Beziehung steht. Natürlich ist zur Symmetrie der Verteilung $F_u(x)$ außerdem auch noch vorauszusetzen, daß die Kurven $f_o(x)$ und $f_u(x)$ wie bei Gl. [231] völlig kongruent sind, was in Fig. 8b nicht angenommen ist. In diesem Falle wäre also $h_o = h_u = h$. Setzt man den Abstand zwischen den beiderseitigen Symmetriepunkten

$$r_o - r_u = 2s$$

und wählt den Mittelpunkt ihrer Verbindungsstrecke als Nullpunkt der Abszissen, so daß

$$x - \frac{r_o + r_u}{2} = x',$$

so wird

$$x - r_o = x' - s,$$
$$x - r_u = x' + s,$$

und die beiden hypothetischen K.-G. folgen den Formeln:

$$f_o(x') = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x'-s)^2}$$
$$f_u(x') = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x'+s)^2}.$$

Setzt man dann für $F_g(x')$ und $F_k(x')$ wieder die aus diesen $f(x')$ berechneten Integrale ein, so ergibt sich für die beobachtete Ordinate der u-Kurve aus Gl. [15] bzw. [232]:

$$F_u(x') = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t=h(x'-s)}^{t=h(x'+s)} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\Big(\Phi(x'+s) - \Phi(x'-s)\Big). \qquad [271\text{b}]$$

Diese Formel für $F_u(x')$ ist nun durch Einführung der Potenzreihe für Φ unter Anwendung der Gl. [90] für die vorkommenden Binomialausdrücke $(x'+s)^n$ zu entwickeln und mit der Potenzreihe für das einfache E.-G. selbst zu vergleichen[1]). Würde nun die Verteilung [271b] wirklich auf die Form [114] zu bringen sein, so müßte insbesondere für die beiden Streuungsmaße M und D dieses beobachteten K.-G. $F_u(x)$ die Relation [118] gelten. Wie aber

1) Setzt man $h = 1$, so erkennt man wenigstens so viel sehr leicht, daß die Einführung der Reihe für $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{0!1} - \frac{x^3}{1!3} + \cdots\right)$ nach Abspaltung der 2s-fachen Reihe für $e^{-t^2} = \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} \cdots\right)$ noch komplizierte Restglieder übrig läßt.

nun G. F. Lipps durch die genannten Hilfsmittel abgeleitet hat[1]), gilt für das Verhältnis $\frac{D}{M}$ nur die Ungleichung:

$$1 < \frac{D\sqrt{\pi}}{M\sqrt{2}} < 1{,}085.$$

Dies sagt also nur so viel, daß die Abweichung von der beim einfachen E.-G. gültigen Einheit unter solchen Voraussetzungen niemals ein gewisses Maß überschreitet. Die volle Übereinstimmung mit Gl. [118], also die untere Grenze 1 der Ungleichung, entspricht jedoch dem Zusammenfallen von r_o und r_u, wobei also $2s = r_o - r_u = 0$ und nach S. 168 überhaupt kein u-Fall mehr zu beobachten wäre. Die größte Abweichung um 0,085 von der Einheit wird zwar selbst bei unendlich großem s nicht überschritten, dagegen schon bald annähernd erreicht. In unserem Beispiel S. 112 ist denn auch zufällig D im Verhältnis zu M wirklich zu groß, wie es bei der tatsächlichen Übereinstimmung der beiden anderen K.-G. $F_g(x)$ und $F_k(x)$ dieser Reihe mit Summenfunktionen kongruenter Schwellen-Verteilungen nach dem hier Gesagten zu erwarten wäre. Eine solche vollständige Kongruenz besitzt freilich nach den tatsächlichen Erfahrungen nur eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit, wodurch dann auch die theoretischen Beziehungen von $F_u(x)$ zum einfachen E.-G. noch mehr gelockert werden.

2. Bleiben wir nun im folgenden nur noch bei dem ersten Schema für $F_g(x)$, auf das wir ja unser Zahlenbeispiel $F_k(x)$ durch die spiegelbildliche Anordnung bereits reduziert haben (vgl. S. 185), und operieren nur noch mit $z = F_g(x)$, s, h und t ohne Index, so reichen zur eindeutigen Berechnung der beiden Konstanten h und s der Verteilungsfunktion des hypothetischen K.-G. offenbar bereits zwei als fehlerfrei betrachtete Beobachtungen z_1 und z_2 hin. Hierzu ist die von Fechner angegebene „Fundamentaltabelle" besonders bequem, in welcher zu dem beobachteten

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\Phi(t) \qquad [271]$$

das zugehörige $t = h(d_x - s)$ unmittelbar abzulesen ist. Wegen der schon vorhin genannten Beziehung

$$\frac{1}{2}\,\Phi(t) = -\frac{1}{2}\,\Phi(-t)$$

genügte die Tabellierung von $\frac{1}{2}$ bis 1, in der dann, wie auch aus Figur 10 wegen $\overline{R_0X_1} = \overline{R_0X_2}$ und $z_1 = 1 - z_2$ ohne weiteres zu ersehen ist, für jedes $z < \frac{1}{2}$ das zugehörige negative t bei $z' = 1 - z$ zu finden ist. Auch ist die Tabelle für unsere Praxis in Prozentwerten genügend fein abgestuft.

1) Grundriß der Psychophysik 1899 und Psychische Maßmethoden 1906, S. 65f.

Tabelle 8.

Fundamental-Tabelle der Methode der richtigen und falschen Fälle[1]).

z	t = hv	Diff.	z	t = hv	Diff.	z	t = hv	Diff.
0,50	0,0000	177	0,71	0,3913	208	0,91	0,9481	455
0,51	0,0177	178	0,72	0,4121	212	0,92	0,9936	500
0,52	0,0355	177	0,73	0,4333	216	0,93	1,0436	558
0,53	0,0532	178	0,74	0,4549	220	0,94	1,0994	637
0,54	0,0710	180	0,75	0,4769	225	0,95	1,1631	748
0,55	0,0890	178	0,76	0,4994	230	0,96	1,2379	918
0,56	0,1068	179	0,77	0,5224	236	0,97	1,3297	1223
0,57	0,1247	181	0,78	0,5460	242	0,98	1,4520	1928
0 58	0,1428	181	0,79	0,5702	249	0,99	1,6450	∞
0,59	0,1609	182	0,80	0,5951	257	1,00	∞	
0,60	0,1791	185	0,81	0,6208	265			
0,61	0,1976	185	0,82	0,6473	274			
0,62	0,2160	187	0,83	0,6747	285			
0,63	0,2347	188	0,84	0,7032	297			
0,64	0,2535	190	0,85	0,7329	310			
0,65	0,2725	192	0,86	0,7639	326			
0,66	0,2917	194	0,87	0,7965	343			
0,67	0,3111	196	0,88	0,8308	365			
0,68	0,3307	199	0,89	0,8673	389			
0,69	0,3506	202	0,90	0,9062	419			
0,70	0,3708	205						

Zwei bei d_1 und d_2 beobachtete r. H. z_1 und z_2 lassen also dann mittels dieser Fundamentaltabelle ohne weiteres auch zwei Gleichungen von der Form

$$t_1 = h(d_1 - s)$$
$$t_2 = h(d_2 - s) \qquad [273]$$

ansetzen, aus denen die beiden Unbekannten h und s eindeutig zu berechnen sind.

3. Da aber nun die einzelnen Beobachtungen mit „Fehlern" behaftet sind, so werden die aus diesem h und s für beliebige d_x berechneten z' mit den dort beobachteten nicht genau übereinstimmen, oder es werden die aus zwei anderen z berechneten h und s von jenen ersteren verschieden sein, so daß also diese Konstanten erst durch Ausgleichung genauer zu ermitteln sind. Nun sind allerdings wenigstens die Gleichungen [273] in den Unbekannten h und k = sh linear, so daß auf eine gegebene Reihe derselben anscheinend ohne weiteres die Methode der kleinsten Quadrate

1) Fechner, Elemente der Psychophysik, Bd. I, S. 108. Revision, S. 66 und Wundt, Physiol. Psychologie I⁵, S. 484. (I⁶, S. 605). Die Werte t für $\frac{r}{n} = 0{,}61$, 0,98 und 0,99 sind nach der neuen Tabelle von Kämpfe (vgl. S. 103, Am. 1) verbessert.

anwendbar wäre. Indessen würde man hiermit keineswegs, wie es der Zweck dieser Methode ist, das mittlere Quadrat der in den unmittelbar beobachteten z enthaltenen „Fehler" zu einem Minimum machen, sondern dasjenige der Abweichungen der nicht unmittelbar beobachteten t. Diese sind aber zu jenen „wahren" Fehlern keineswegs proportional, sondern stehen eben erst nach [271] durch die transzendente Funktion $\Phi(t)$ zu ihnen in Beziehung. Die wirklichen Beobachtungsgleichungen für den gewöhnlichen Ansatz dieser Ausgleichungsmethode wären also vielmehr die Gleichungen von der Form [271] selbst, also das System:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\Phi(h(d_1 - s)) \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ z_p &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\Phi(h(d_p - s)). \end{aligned} \tag{274}$$

Da diese Gleichungen aber nun nicht linear sind, so sind sie, falls man nicht speziellere Beziehungen auffindet, nach dem viel komplizierteren allgemeinen Schema § 26, b, S. 136 ff zu behandeln. Nach Einführung von Näherungswerten h' und s' sind also erst mittels der Taylorschen Reihe die Beobachtungsgleichungen [175] mit den Koeffizienten nach [176] zu gewinnen, die in den noch erforderlichen Verbesserungen $\xi = h - h'$ und $\eta = s - s'$ linear sind. Freilich müssen die Näherungswerte hierbei schon hinreichend genau sein, damit die höheren Potenzen von ξ und η der Taylorschen Reihe wirklich außer Betracht bleiben dürfen. Fechner hat nun gezeigt[1]), daß ein System von p Gleichungen von der Form [273] immerhin wenigstens zu einer sehr bequemen Berechnung brauchbarer Annäherungen h' und s' verwendet werden kann, die er als Summationsverfahren bezeichnet. Er teilt das System [273] nach der Größe von t in zwei Gruppen (bei einem ungeraden p wird die mittlere Gleichung einfach weggelassen) und summiert die $\frac{p}{2}$ bzw. $\frac{p-1}{2}$ Gleichungen jeder Gruppe, woraus sich zwei neue, alle Beobachtungen äußerlich gleichmäßig berücksichtigende Gleichungen für h' und s' ergeben. Dabei kommt es nun bereits darauf an, ob man nur einen analytisch möglichst genauen Ausdruck für sämtliche Beobachtungen z sucht, oder den unter den tatsächlichen Verhältnissen wahrscheinlichsten Wert von s und h ermitteln will. Im letzteren Falle könnten dann natürlich auch hier den einzelnen Gleichungen bereits Gewichtsfaktoren hinzugefügt werden (vgl. S. 145 f.). Da aber doch noch nicht genaue Werte, sondern nur Annäherungen und zwar auf möglichst einfache Weise gewonnen werden sollen, sehen wir in unserem Beispiele von dieser letzteren Operation noch völlig ab.

In unserem Zahlenbeispiele aus Tab. 5, Fig. 4 sind zunächst alle z auf Prozente zu bringen, weshalb wir die absoluten Häufigkeiten in je $n_x = 50$

---

1) Über die Methoden der richtigen und falschen Fälle in Anwendung auf die Maßbestimmungen der Feinheit oder extensiven Empfindlichkeit des Raumsinnes. Abh. der math.-phys. Kl. der K. sächs. Ges. d. Wiss. Bd. XIII. 1884. S. 213 ff.

Versuchen mit $\frac{2}{100}$ multiplizieren. Die d_x der Gleichung [273] sind von dem Normalreiz der Kellerschen Beobachtungsreihe $r = x_3 = 55$ aus zu rechnen, wobei wir zur Vereinfachung innerhalb der Klammer $(d_x - s)$ mit dem Intervall $i = 3$ dividieren, also 3 zu h hinzunehmen, das infolgedessen dafür in allen folgenden Berechnungen verdreifacht erscheint. Zum Vergleich mit dem unmittelbaren Verfahren ist also das neue $s' = r_0 - 55$ immer erst mit 3 zu multiplizieren, das neue h dagegen mit 3 zu dividieren. Wir benützen nur die 6 Beobachtungen z_{p-1}, $z_{p-2}, \ldots z_1$, d. h., wir schließen die rel. H. 1 und 0 aus, die ja ohnehin nie ganz genau mit dem einfachen E.-G. in Einklang zu bringen und in einem weiteren Verfahren (§ 31, a, 5) überhaupt nicht verwendbar sind. Setzt man wieder

$$h's' = k', \qquad [275]$$

so haben wir dann nach Tabelle 5, S. 83 zwei Gruppen zu je 3 Gleichungen [273] für $d_x = 3$, 2 und 1 und für $d_x = 0$, -1 und -2, für die wir der „Fundamentaltabelle" (Tab. 8, S. 204) unmittelbar die „beobachteten" t entnehmen:

Beobachtetes z:	t:
0,90	$0{,}9062 = 3h' - k'$
0,66	$0{,}2917 = 2h' - k'$
$0{,}26 = 1 - 0{,}74$	$-0{,}4549 = h' - k'$
Summe I:	$0{,}7430 = 6h' - 3k'$ oder:
	$0{,}2477 = 2h' - k'$.
$0{,}14 = 1 - 0{,}86$	$-0{,}7639 = \quad - k'$
$0{,}06 = 1 - 0{,}94$	$-1{,}0994 = - h' - k'$
$0{,}02 = 1 - 0{,}98$	$-1{,}4520 = -2h' - k'$
Summe II:	$-3{,}3153 = -3h' - 3k'$ oder
	$-1{,}1051 = - h' - k'$

Die Subtraktion der Summe II von I ergibt:

$$3h' = 1{,}3528$$
$$\mathbf{h' = 0{,}4509},$$

das in Summe II eingesetzt, zunächst

$k' = 0{,}6542$ und nach [275] endlich auch
$\mathbf{s' = 1{,}450}$

finden läßt.

Man kann nunmehr auch prüfen, wie weit die tatsächlich beobachteten Extreme $z_7 = 1$ und $z_0 = 0$ mit den aus diesen Annäherungen rückläufig berechneten z'_7 und z'_0 übereinstimmen.

Für $d_7 = 4$ wäre $t_7 = \ \ 4h' - k' = \ \ 1{,}1494$
und für $d_0 = -3$ $\quad t_0 = -3h' - k' = -2{,}0069$.

Die zugehörigen z'-Werte ließen sich annähernd ebenfalls aus der Fundamentaltabelle unter Benutzung der beigefügten Differenzen erster Ordnung unmittelbar interpolieren. Doch ist die Bestimmung des zu t gehörigen $\Phi(t)$ in der Nähe der Extreme, wo zu $1-z_0$ und z_p ein der Einheit sehr nahes $\Phi(t)$ zugehört, nach der Bruns-Kämpfeschen Tabelle viel genauer. Diese ergibt $\Phi(t_7)=0{,}8959$ und $\Phi(t_0)=-0{,}9955$, woraus dann $z'_7=F(E)=0{,}5+0{,}4480=\mathbf{0{,}9980}$ und $1-z'_0=1-F(E')=0{,}5+0{,}4977=0{,}9977$, also $z_0=F(E')=\mathbf{0{,}0023}$ berechnet werden. Beide Werte stimmen daher bis auf entgegengesetzt gleiche Fehler von einem in der Tat praktisch zu vernachlässigenden Betrage von nur $\pm 0{,}002$ mit der Beobachtung 1 und 0 überein.

Vergleicht man nun diese Annäherungswerte aus dem Summationsverfahren mit unseren Bestimmungen des $s(\mathfrak{A})=3\cdot 1{,}46$ und des aus $M(\mathfrak{A})$ gefundenen $h=\frac{1}{3}\cdot 0{,}522$ nach dem unmittelbaren Verfahren in § 30, so kommt man durch die beim Hauptwerte besonders gute Übereinstimmung zu der Überzeugung, daß vor allem auch schon jenes natürlich noch weit einfachere „unmittelbare Verfahren“, insbesondere die Berechnung des arithmetischen Mittels, im allgemeinen ebenfalls gute Annäherungen für ein Ausgleichungsverfahren nach dem Schema § 26, b unter Voraussetzung des einfachen E.-G. abgeben kann.

4. Nach Ableitung guter Annäherungen h' und s' werden nun die neuen Beobachtungsgleichungen nach jenem Schema [175] und [176], das zum ersten Male von G. E. Müller[1]) als sog. „Verfahren I“ auf unser Problem angewandt und von Fechner später als „Korrektionsverfahren“ bezeichnet wurde[2]), aus dem ursprünglichen System [274] hergestellt. Setzt man h' für x_0 und s' für y_0, $h-h'=\xi$ und $s-s'=\eta$, $t_i'=h'(d_i-s')$, so werden die neuen Koeffizienten der Normalgleichungen nach [176]

$$l_i'=z_i-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\Phi_1\,(h'(d_i-s'))$$

$$a_i'=\frac{\delta\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\Phi(t_i')\right]}{\delta h'}=\frac{1}{2}\,\frac{d\,\Phi(t')}{dt}\cdot\frac{\delta t}{\delta h'}=\frac{1}{2}\,\Phi_1\,(t_i')\,(d_i-s')$$

$$b_i'=\frac{\delta\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\Phi(t_i')\right]}{\delta s'}=\frac{1}{2}\,\frac{d\,\Phi(t_i')}{dt}\cdot\frac{\delta t}{\delta s'}=-\frac{1}{2}\,\Phi_1\,(t_i')\cdot h'. \quad [276]$$

Dabei kommt also die Bruns-Kämpfesche Tabelle für die Ableiteten der Φ-Funktion nunmehr als bedeutende Erleichterung dieses Ansatzes in Betracht. Auch können sämtliche Beobachtungsgleichungen natürlich auch noch mit 2 multipliziert werden, damit die Brunssche Tabelle ohne weiteres anwendbar ist. Sie haben daher schließlich die einfache Gestalt:

$$\{2z_i-\Phi(t_i')\}=\Phi_1\,(t_i')\,(d_i-s')\,\xi-\Phi_1\,(t_i')\,h'\cdot\eta. \qquad [277]$$

1) Pflügers Archiv, Bd. 19, 1879, S. 197 ff.
2) a. S. 205, Am. a. O.

Endlich kann noch $h' \cdot \eta$ sogleich als neue Unbekannte ζ eingeführt werden.

Jedenfalls wird durch dieses Verfahren außer $h = h' + \xi$ auch $s = s' + \eta$ direkt gefunden und nicht in der Kombination $k = h \cdot s$, was für die theoretische Korrektheit dieses Ausgleichungsmodus ebenfalls vorteilhaft in Betracht kommt.

Ein besonderes Zahlenbeispiel erübrigt sich wohl, zumal wir die Methode der kleinsten Quadrate im Folgenden noch einige Male unter komplizierteren Bedingungen (bis zu 3 Unbekannten) anwenden wollen, diese Berechnungen aber natürlich nach dem nämlichen Schema auszuführen sind.

4a. Fechner empfahl seinerseits a. a. O. als „Korrektionsverfahren" eine Variante dieses Schemas, die wir jedoch in einer etwas anschaulicheren und zugleich wieder auf die Anwendung der Brunsschen Tabelle für Φ_1 berechneten Form ableiten wollen. Man kann sich nämlich die wahre Funktion

$$F(h' + \xi, s' + \eta) = F(t_i' + \tau_i),$$

nicht nur mittels ihrer Abgeleiteten nach h' und s' in Potenzen von ξ und η, sondern zunächst auch schon einfach mittels der Abgeleiteten nach t in Potenzen von τ entwickelt denken. So erlangt man bei Beschränkung auf die erste Potenz, wenn wieder $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(x)$ ist,

$$2F(h' + \xi, s' + \eta) - 2F(h', s') = 2\tau_i \cdot \frac{dF(t')}{dt} = \tau_i \Phi_1(t_i'). \qquad [278]$$

Da also die rechte Seite dieser Gleichung ebenfalls ein Äquivalent des Fehlers ist, der zwischen dem tatsächlich beobachteten z und dem mittels der Annäherungen h_0 und s_0 berechneten z' übrig bleibt und der vorhin nach Potenzen der Korrektionen ξ und η entwickelt wurde, so kann man die beiden rechten Seiten von [277] und [278] einander gleich setzen, und hat dann

$$\tau_i \Phi_1(t_i') = \Phi_1(t_i')(d_i - s')\xi - \Phi_1(t_i')\zeta, \qquad [279]$$

worin wieder $\zeta = h'\eta$. Hierbei ist also τ_i die Differenz zwischen dem „wahren" t_i, das dem beobachteten z nach Gleichung [271] zugeordnet ist, und dem aus den Annäherungen h' und s' berechneten t_i'. $\Phi_1(t_i')$ aber hat als ein allen Gliedern gemeinsamer Faktor offenbar analytisch vollständig die S. 144 erläuterte Bedeutung eines Gewichtsfaktors p_i. Bei Fechner selbst tritt freilich die Eigentümlichkeit dieses Verfahrens nicht recht hervor, daß es die ersten Glieder zweier Entwicklungen nach der Taylorschen Reihe, also zwei durch Weglassen der höheren Potenzen entstandene Annäherungen einander gleich setzt, nicht aber, wie [277], den vollen Wert und eine Annäherung.

Fechner selbst trennt aber ferner auch vor allem nicht s und h voneinander ab, wie es hier im Anschluß an das konsequentere Verfahren I bei Müller sogleich geschah, sondern benutzt wieder h' und k' [1]), also statt Gleichung [277] einfach

1) Dabei sucht Fechner, was keine weitere Bedeutung mehr hat, das Vorzeichen $+k$ statt $-k$ zu verteidigen.

$$2F(h'+\xi, k'+\varkappa) - 2F(h', k') = 2\frac{dF(h', k')}{dt} \cdot \frac{\delta t}{\delta h'} + 2\frac{dF(h', k')}{dt} \cdot \frac{\delta t}{\delta k'}$$
$$= \Phi_1(t_i')\, d_i - \Phi_1(t_i'). \qquad [280]$$

Somit tritt an die Stelle von [279] einfach [1])

$$\tau_i \cdot \Phi_1(t_i') = \Phi_1(t_i')\, d_i \xi - \Phi_1(t_i') \cdot \varkappa. \qquad [281]$$

Fechners eigenes Rechenbeispiel nach dieser Methode lieferte jedenfalls eine ganz brauchbare Ausgleichung. Bei dem Ansatz zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte hätten dann freilich auch hier erst noch die spezielleren Gewichtsfaktoren $\frac{1}{z_i(1-z_i)}$ zu den einzelnen Gleichungen hinzuzutreten.

5. In der zuletzt genannten Fechnerschen Form [281] stimmt nun der Ansatz nach dem „Korrektionsverfahren" zur Berechnung der Verbesserungen ξ und $\varkappa$ äußerlich bis auf den Gewichtsfaktor $\Phi_1(t_i')$ statt $\Phi_1(t_i')^2$ und die berechnete Abweichung τ_i statt des „beobachteten" t mit dem „Gewichtsverfahren" zur direkten Berechnung von h und k selbst überein, das G. E. Müller in der schon genannten Abhandlung 1879 angab, um einerseits die Bequemlichkeit eines direkten Ansatzes linearer Beobachtungsgleichungen aus der Fundamentaltabelle wie bei [273] zu retten und doch andererseits den ebenfalls auf S. 205 genannten Fehler zu vermeiden, daß die Fehler der t, nicht aber der z selbst nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen würden. Die entscheidende Korrektur des Systemes [273] fand nun Müller mittels der schon erwähnten Entwicklung des übrig bleibenden Fehlers der z nach Potenzen des entsprechenden Fehlers der t, auf deren Vorteil wohl auch Fechner erst durch dieses auch von ihm geschätzte „Gewichtsverfahren" Müllers aufmerksam geworden sein dürfte. Nur ist eben bei Müller nicht erst die Kenntnis von Annäherungswerten h' und k' vorausgesetzt, sondern es handelt sich für ihn sogleich um die Fehler τ, welche von den erst zu bestimmenden plausibelsten Konstanten h und k übrig gelassen werden. Die einfache Anwendung des Systemes [273] würde diese Konstanten so bestimmen, daß das mittlere Quadrat jener τ statt dasjenige der $(z-z')$ zu einem Minimum wird. Daher kann diese Inkorrektheit nach S. 154 offenbar einfach durch Gewichtsfaktoren p ausgeglichen werden, welche dem System [273] beizufügen sind und die τ^2 zu den $(z-z')^2$ selbst ergänzen, so daß $\tau^2 p = (z-z')^2$ wird. Da nun nach [271] das aus den (gesuchten) Werten h und k berechnete

$$z' = F(h, k) = F_g(t-\tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t'=hd_i-k} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(t-\tau)$$

und das beobachtete

$$z = F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(t),$$

1) Bei der Fechnerschen Formel (a. a. O. S. 226) ging man ferner durch Division mit $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ der Möglichkeit verlustig, die Tabelle für Φ_1 direkt anzuwenden.

so ist

$$(z' - z) = F(t - \tau) - F(t) = -\frac{1}{2}\tau \cdot \Phi_1(t). \qquad [282]$$

Die Quadrate $(z' - z)^2$, die eigentlich ein minimales Mittel ergeben sollten, können also durch $\frac{1}{4}[\Phi_1(t)]^2\tau^2$ mit einer nur durch den Wegfall der höheren Glieder der Taylorschen Reihe begrenzten[1]) Genauigkeit ersetzt werden. $\frac{1}{4}[\Phi_1(t)]^2 = \frac{1}{\pi}e^{-2t^2}$ bzw. e^{-2t^2} allein sind also die von Müller gesuchten Gewichte p_i, die zum System [273] hinzutreten müssen. Da bei der unmittelbaren Verwendung der Tabelle für Φ_1 erst die Quadrierung hinzutreten müßte, gebe ich beifolgend Müllers eigene Tabelle, in der e^{-2t^2} sogleich den beobachteten z-Werten zugeordnet ist. Da die Zuordnung nach Gleichung [271] durch $\Phi(t)$ vermittelt ist, so ist auch hier wie bei der Fundamentaltabelle die Tabelle von 0,5 bis 1 ausreichend. Für $z < \frac{1}{2}$ ist also das zugehörige e^{-2t^2} bei $1 - z$ zu finden[2]).

5a. Das Müllersche Gewichtsverfahren ist nun von Urban mit seiner § 27, b (S. 147 ff.) ausführlich diskutierten Gewichtskorrektur $\frac{1}{4z(1-z)}$ auf Grund des Bernoulli-Laplaceschen Theorems kombiniert worden, wie es auch stets erforderlich ist, wenn die Methode der kleinsten Quadrate nicht einfach dazu angewendet werden soll, alle beobachteten Ordinaten z durch die gefundenen Größen rein analytisch nach einem konventionellen Modus möglichst gleichmäßig zu treffen, sondern die realiter plausibelsten

1) Diese Einschränkung käme natürlich um so mehr in Betracht, je größere übrig bleibende Fehler zu erwarten sind, je weniger also die Beobachtungsreihe als solche dem einfachen E.-G. entspricht.

2) Nachdem man einmal weiß, daß bei der direkten Verwendung des Systemes [273] zu Beobachtungsgleichungen ein Gewichtsunterschied von e^{+2t^2} eingeführt wäre, der eben durch e^{-2t^2} ausgeglichen wird, erscheint übrigens jenes frühere, rechnerisch einfachste Verfahren nach [273] doch nicht mehr völlig sinnlos. Denn wie oben (vgl. Fig. 6a) dargelegt wurde, müßte dann, wenn die Schwankungen der z_i von einer Versuchsgruppe zur anderen ausschließlich in solchen Variationen bestünden, daß sich nur die Kurve F(x) im ganzen parallel zur x-Achse hin- und herbewegte, der mittlere Fehler M_i der z_i zu $\frac{dF(x)}{dx}$ proportional sein (vgl. S. 153). Für

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$$

wäre daher

$$M^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-2t^2},$$

und die zugehörige Gewichtskorrektur wäre also in der Tat:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{M_i^2} = e^{2t^2}.$$

Doch bleibt natürlich die Annahme einer solchen Variation mit vollständiger Konstanz des Präzisionsmaßes h immerhin einseitig.

Konstanten aufzufinden. Doch erlaubt eben das ursprüngliche Müllersche Verfahren zunächst einmal diese Aufgabe allein für sich in besonders bequemer Form zu lösen, die um so reiner heraustritt, je genauer die einzelnen z-Werte bereits beobachtet sind, und die außerdem ganz unabhängig von der Anerkennung des speziellen Präzisionsmaßes der z gestellt werden kann. Deshalb gebe ich doch nicht nur die Urbanschen Werte, sondern stelle beide Gewichtssysteme in einer gemeinsamen Tabelle nebeneinander.

Tabelle 9.

Gewichte der Beobachtungsgleichungen nach dem G. E. Müllerschen[1]) und dem Müller- F. M. Urbanschen Verfahren[2]).

Z	Gewicht		Z	Gewicht	
	nach Müller	nach Müller-Urban		nach Müller	nach Müller-Urban
0,50	1,000	1,000	0,76	0,606	0,832
0,51	0,999	1,000	0,77	0,578	0,818
0,52	0,997	0,999	0,78	0,550	0,803
0,53	0,994	0,998	0,79	0,521	0,787
0,54	0,990	0,996	0,80	0,492	0,770
0,55	0,984	0,995	0,81	0,463	0,752
0,56	0,977	0,992	0,82	0,433	0,733
0,57	0,969	0,989	0,83	0,403	0,713
0,58	0,960	0,985	0,84	0,373	0,694
0,59	0,950	0,981	0,85	0,342	0,670
0,60	0,938	0,977	0,86	0,311	0,646
0,61	0,925	0,972	0,87	0,281	0,621
0,62	0,911	0,967	0,88	0,251	0,595
0,63	0,896	0,960	0,89	0,222	0,567
0,64	0,880	0,954	0,90	0,193	0,538
0,65	0,862	0,947	0,91	0,166	0,506
0,66	0,843	0,940	0,92	0,139	0,472
0,67	0,824	0,932	0,93	0,114	0,435
0,68	0,803	0,923	0,94	0,089	0,396
0,69	0,782	0,914	0,95	0,067	0,352
0,70	0,760	0,904	0,96	0,0463	0,304
0,71	0,737	0,894	0,97	0,029	0,246
0,72	0,712	0,883	0,98	0,0147	0,187
0,73	0,687	0,871	0,99	0,004	0,112
0,74	0,661	0,859	100	0,000	0,000
0,75	0,634	0,846			

Wie man sieht, bleibt in der Müller-Urbanschen Tabelle für

$$\frac{e^{-2t^2}}{4z(1-z)},$$

1) Pflügers Archiv f. d. ges. Physiologie. XIX. 1879, S. 204.
2) Archiv f. d. ges. Psychologie. XVI. 1. u. 2. H, 1909, S. 183.

trotz der entgegengesetzten Gewichtsverteilung auf Grund des Nenners, die größere Bedeutung der nahe an 0,5 gelegenen z-Beobachtungen für die Ausgleichung bestehen, wie sie, allerdings noch bedeutend verstärkt und viel rascher abfallend, in der Müllerschen Tabelle bereits vorhanden war. Bei den Gewichtsfaktoren nach Fechners Korrektionsverfahren [281] würde dagegen die Urbansche Korrektur dieses Verhältnis schon wesentlich anders gestalten. Bei einer Einführung des Faktors $\frac{1}{z(1-z)}$ in die Ausgleichung nach der Summationsmethode oder nach Verfahren I von Müller aber würden umgekehrt sogar die den Extremen näherliegenden Werte weitaus bevorzugt sein (vgl. S. 153). Ein prinzipieller Unterschied der Gewichtskorrektur nach Urban, also auch der ausschließlichen Verwendung von $\frac{1}{z(1-z)}$, von der gleichmäßigen Berücksichtigung der Beobachtungen (oder von einer eventuellen anderen, empirischen Korrektur statt nach dem Bernoullischen Theorem) besteht endlich darin, daß die Beobachtungen der Extreme $F_g(E')$ und $F_g(E)$ nicht in Rechnung gestellt werden können, während dies bei dem einfachen Summations- und Korrektionsverfahren sehr wohl möglich ist. An dieser Stelle macht sich eben die störende Konsequenz der Voraussetzung des einfachen E.-G. bezüglich der Extreme in potenziertem Maße fühlbar.

Um den Ansatz nach dem Müller-Urbanschen Gewichtsverfahren zu erlangen, brauchen wir also nur zu dem Ansatz des Summationsverfahrens S. 206 die Gewichte Γ_i aus der zweiten Kolumne der Tab. 9 hinzuzufügen. So erlangen wir folgende Äquivalente der Beobachtungsgleichungen:

$$\Gamma_i t_i = d_i \Gamma_i h - \Gamma_i k; \qquad [283]$$

die Γ_i sind also die Gewichte p_i bzw. $\frac{1}{M^2}$ in [181] und [185]. In die Auflösung der Normalgleichungen [167] eingeführt, ergibt dies, wenn wieder $h = \frac{A}{N}$ und $k = \frac{B}{N}$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} A &= \quad [\Gamma t d][\Gamma] - [\Gamma d][\Gamma t] \\ B &= -[\Gamma t][\Gamma d^2] + [\Gamma d][\Gamma t d] \\ N &= \quad [\Gamma d^2][\Gamma] - [\Gamma d]^2. \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Auflösung der Normalgleichungen dadurch erleichtert, daß in [283] die Koeffizienten b_i von $y = k$ durchweg -1 sind, und daß bei äquidistanten Reihen nach Division der d mit i auch die a_i nur kleine ganze Zahlen einschließlich der 0 sind, mit denen man, ebenso wie mit ihren Quadraten, $d_i \cdot \Gamma_i$, $d_i^2 \cdot \Gamma_i$ und $d \cdot \Gamma t$ leicht direkt ausmultipliziert. Man braucht also die Logarithmen oder Rechentafeln wohl nur zur Berechnung der $\Gamma_i t_i$ sowie zu den Schlußrechnungen nach Bildung der Summen $[\Gamma t d]$ usw. Wer nur einzelne Beobachtungsreihen über Unterschiedsschwellen auszuwerten hat, wird dabei, falls er nicht berufsmäßiger Rechner ist, vorläufig wohl meistens noch mit Logarithmen rechnen; daher gebe ich folgendes einfache Schema, das sehr sicher zu rechnen gestattet. Auch kann es einen mit dem sonstigen Zweck der Untersuchung nicht vertrauten Hilfsarbeiter wenigstens über das Wesen der Rechenaufgabe leicht orientientieren, gleichgültig, welche Hilfsmittel der Rechnung ihm dann im einzelnen am bequemsten sind.

Rechen-Schema zur Anwendung des Müller-Urbanschen Gewichtsverfahrens.

Beob. z	Gewicht Γ nach Müller-Urban	Unkorrigierte Gl. [273] $t_i = d_i h - k$	Γd	Γd^2
0,90	0,538	0,9062 = 3h — k	1,614	4,842
0,66	0,940	0,2917 = 2h — k	1,880	3,760
0,26 = 1 — 0,74	0,859	— 0,4549 = h — k	0,859	0,859
0,14 = 1 — 0,86	0,646	— 0,7639 = — k	0	0
0,06 = 1 — 0,94	0,396	— 1,0994 = — h — k	— 0,396	0,396
0,02 = 1 — 0,98	0,187	— 1,4520 = — 2h — k	— 0,374	0,748
	$[\Gamma]$ 3,566 log: 0,55218		$[\Gamma d]$ 3,583 log: 0,55425	$[\Gamma d^2]$ 10,605 log: 1,02551

	log	Γt	d	$\Gamma t d$
Γ_6	0,73078 — 1			
t_6	0,95722 — 1			
n. l.	0,68800 — 1 =	0,4876	+ 3	1,4628
Γ_5	0,97313 — 1			
t_5	0,46494 — 1			
n. l.	0,43807 — 1 =	0,2742	+ 2	0,5484
Γ_4	0,93399 — 1			
t_4(—)	0,65792 — 1			
n. l.	0,59191 — 1 =	— 0,3908	+ 1	— 0,3908
Γ_3	0,81023 — 1			
t_3(—)	0,88304 — 1			
n. l.	0,69327 — 1 =	— 0,4935	0	0
Γ_2	0,59770 — 1			
t_2(—)	0,04100			
n. l.	0,63870 — 1 =	— 0,4352	— 1	0,4352
Γ_1	0,27184 — 1			
t_1(—)	0,16197			
n. l.	0,43381 — 1 =	— 0,2715	— 2	0,5430
		$[\Gamma t]$ = — 0,8292		$[\Gamma t d]$ = 2,5986
		log = 0,91866 — 1		log = 0,41474

A
$$\begin{array}{ll}
\log[\Gamma td]\ 0{,}41474 & \log\ [\Gamma d]\ \ 0{,}55425 \\
\log\ [\Gamma]\ \ 0{,}55218 & \log[\Gamma t]\ (-)0{,}91866-1 \\
\text{n. l. } \overline{0{,}96692} = 9{,}2666 & \text{n. l. } \overline{0{,}47291} \quad = -2{,}971 \\
\end{array}$$
$$A = 9{,}2666 + 2{,}971 = 12{,}2376$$
$$\log A = 1{,}08769$$

B
$$\begin{array}{ll}
\log[\Gamma t]\ (-)\ 0{,}91866-1 & \log\ [\Gamma d]\ \ 0{,}55425 \\
\log\ [\Gamma d^2]\ \ 1{,}02551 & \log[\Gamma td]\ 0{,}41474 \\
\text{n. l. } \overline{0{,}94417} \quad = -8{,}7936 & \text{n. l. } \overline{0{,}96899} = 9{,}3108 \\
\end{array}$$
$$B = -(-8{,}7936) + 9{,}3108 = 18{,}1044$$
$$\log B = 1{,}25778$$

N
$$\begin{array}{ll}
\log[\Gamma d^2]\ 1{,}02551 & \log[\Gamma d^2] = 1{,}10850 \\
\log\ [\Gamma]\ \ 0{,}55218 & \\
\text{n. l. } \overline{1{,}57769} = 37{,}818 & \text{n. l.} = 12{,}838 \\
\end{array}$$
$$N = 37{,}818 - 12{,}838 = 24{,}98$$
$$\log N = 1{,}39759$$

$$\begin{array}{ll}
\log\ A = 1{,}08769 & \log\ B = 1{,}25778 \\
\log\ N = 1{,}39759 & \log\ N = 1{,}39759 \\
\hline
\log\ h = 0{,}69010-1 & \log\ h = 0{,}86019-1 \\
h = 0{,}4899 & \log\ h = 0{,}69010-1 \\
 & \log\ s = 0{,}17009 \\
 & s = 1{,}4794 \\
\end{array}$$

Hieraus ergeben sich also schließlich die wahren Werte für i = 3 durch Division, bzw. Multiplikation mit 3 (vgl. S. 206) als

$$\mathbf{h = 0{,}1633}$$
$$\mathbf{s = 4{,}4382.}$$

Mit Recht empfiehlt Urban[1]) dem Geübten an Stelle der logarithmischen Berechnung Crelles Rechentafeln[2]). Die Müllerschen und Urbanschen Gewichte sind nur in 3 Dezimalen angegeben, während t in der Fundamentaltabelle und bei Bruns-Kämpfe vierstellig ist. Bei dieser Tafel läßt

1) Archiv f. d. ges. Psychologie, Bd. XVI, 1. u. 2. H., 1909, S. 187. Urban hat übrigens inzwischen eine Bearbeitung des gesamten Kellerschen Materiales nach diesem Gewichtsverfahren veröffentlicht, bei der er sich der Unterstützung von Herrn Schönfeld, Rechner des k. preuß. geodätischen Instituts und des Zentralbureaus der internationalen geodätischen Vereinigung zu erfreuen hatte*). Hierbei erforderte jede der Aufgaben der hier erläuterten Art, die hinsichtlich ihrer Schwierigkeit mit dieser ziemlich übereinstimmen, im Durchschnitt einschließlich der Kontrollen etwa 1½ Stunden. Sehr viel mehr als 2 Stunden wird auch das obige Schema nicht verlangen, das bei einiger Achtsamkeit grobe Fehler kaum aufkommen läßt. Urban fand für h bei dieser Kurve, 0,1639 und für s = 55 — 50,6 = 4,4, womit also unser eigenes Resultat wohl genügend übereinstimmt.

2) Crelles Rechentafeln, Neue Ausgabe von O. Seeliger 1907. (Mit Quadrat- und Kubiktafeln.)

*) Archiv f. d. ges. Psychologie XVIII, 3 u. 4. H., 1910, S. 400ff.

sich aber wenigstens die Multiplikation einer 3- mit einer 4-stelligen Zahl mit einmaligem Aufschlagen der Tabelle erledigen. Würde man jedoch bei dem oben genannten Fechnerschen Korrektionsverfahren die 4-stellige Größe Φ_1 aus der Brunsschen Tabelle benützen, so käme schon der Vorteil der Petersschen Tafeln[1]) zur Geltung, bei denen man zwei vierstellige Zahlen mit einmaligem Aufschlagen multiplizieren kann. — Es darf wohl noch besonders darauf hingewiesen werden, wie gut auch der hier gewonnene Wert für s mit $s(\mathfrak{A}) = 4{,}38$ nach dem unmittelbaren Verfahren (und nach der Summationsmethode) übereinstimmt. Aber auch das Präzisionsmaß $h = 1{,}633$ ist von dem analogen Wert $\frac{1}{M'\sqrt{2}}$ nach § 30 nur um $-0{,}011$ verschieden.

Zur Vollständigkeit des Ausgleichungsverfahrens wären nun schließlich noch die nach irgendeiner dieser Varianten 2 bis 5a gewonnenen Werte für h und s mit den verschiedenen d_i zur Ableitung einer neuen Reihe t_i' nach Gl. [273] zu kombinieren, aus der unter Hinzunahme der Bruns-Kämpfeschen Tabelle für Φ nach [271] neue z' zu berechnen sind. Das Mittel der eventuell wiederum mit den Gewichten $\frac{1}{z(1-z)}$ multiplizierten Quadrate der Abweichungen dieser berechneten z' von den beobachteten z, also

$$M^2 = \frac{1}{n} \Sigma p_i (z_i - z'_i)^2$$

oder auch nach S. 134, A. 1

$$M'^2 = \frac{1}{n-2} \Sigma p_i (z_i - z_i')^2$$

repräsentiert dann das vergleichbare Maß der Übereinstimmung der tatsächlichen Beobachtungen mit dem unter Voraussetzung des einfachen E.-G. berechneten Schwellen- und Präzisionsmaße. Bei der Bildung der Quadrate bedient man sich natürlich womöglich einer Quadrattafel, wie sie für die Zahlen von 1 bis 1000 z. B. den Tafeln von A. Greve, den Crelleschen Tafeln u. a. beigefügt ist.

b) Die Darstellung der beobachteten Summenfunktion mittels der Brunsschen Reihe.

1. Wie schon bei der Beschreibung der Brunsschen Reihe als Abbildung eines einfachen K.-G. in § 24, S. 118ff. ausdrücklich betont wurde, steht diese dem Ansatze von Beobachtungsgleichungen mittels einer unmittelbar beobachteten Summenfunktion deshalb besonders nahe, weil sie nach [131] und [132] geradezu als eine Fortsetzung des Ansatzes [278] betrachtet werden kann, welche den „Fehler" der Beobachtung, der unter Voraussetzung bestimmter Werte h und s und der Funktion [271] übrigbleiben würde, durch Hinzufügung weiterer, mit geeigneten Koeffizienten verbundener Abgeleiteter von Φ nach t zu verringern sucht. Eben deshalb wird man

1) Neue Rechentafeln, herausgeg. von I. Peters. (Im nämlichen Verlage von G. Reimer, Berlin.)

aber auch nach der Beobachtung der Summenfunktion die Koeffizienten nicht etwa, wie es an sich wohl möglich wäre, auf dem Umwege bestimmen, daß man erst einzelne Ordinaten des einfachen K.-G. f(x), auf den sich ja r(𝔄) und h beziehen sollen, an der Hand der Relation [222] und [226] mittels der numerischen Differentiation (vgl. § 19) rekonstruiert und dann nach [133] bis [135] operiert. Da die endliche Reihe mit wenigen Gliedern doch immer nur eine angenäherte Darstellung des K.-G. bieten kann, so setzt man nach Bruns[1]) in einem solchen Falle vielmehr lieber zunächst mittels eines angenäherten Wertes der Grenzabszisse (bzw. s) und h eine bestimmte Reihe von Abgeleiteten (und zwar höchstens bis zur sechsten Ordnung) fest und ermittelt dann unmittelbar durch Ausgleichung diejenigen Koeffizienten, die mit ihnen zusammen möglichst kleine und gleichmäßig verteilte Fehler ergeben. Sollten diese Koeffizienten noch nicht genügend konvergieren, so kann man entweder jeweils noch eine weitere Ordnung der Abgeleiteten hinzunehmen und dann von neuem ausgleichen, oder man kann durch ein Korrektionsverfahren wie S. 207 neue Konstante s und h, bzw. t — (dh — k) berechnen, die bei Beschränkung auf die nämliche Ordnung der Abgeleiteten noch kleinere und besser verteilte Fehler übrig lassen.

2. Hat man nun keinerlei Anhaltspunkt dafür, wie sich die zunächst gewählten Werte s und h zu dem arithmetischen Mittel s(𝔄) und dem aus dem „mittleren Fehler" M(𝔄) als $\frac{1}{M\sqrt{2}}$ berechneten Präzisionsmaße verhalten, so wird man dem System der p Beobachtungsgleichungen die Reihe in ihrer einfachen allgemeinen Form [133] zugrunde legen, in der die Abgeleiteten der Reihe nach von der ersten an vorkommen. Unser unmittelbares Verfahren nach § 30 gibt aber ja in Gl. [240] und [254] einschl. [72] und [85] sichere und bequeme Mittel an die Hand, um unter Voraussetzung der stetigen Verteilung, wie sie durch die Brunssche Reihe doch zunächst repräsentiert wird, die Werte r_0(𝔄), bzw. s_0(𝔄) = r_0(𝔄) — r, und M_0(𝔄) sowie die analogen Repräsentanten r_u(𝔄) von $f_u(x)$ ohne weiteres mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Setzen wir aber diese Größen s(𝔄) und $h = \frac{1}{M(\mathfrak{A})\sqrt{2}}$ als bekannt voraus, so muß die Brunssche Reihe mit ihren aus der nämlichen stetigen Verteilung berechneten Koeffizienten in ihrer Normalform [141] erscheinen, in der die erste und zweite Abgeleitete fehlt und nach Φ sogleich Φ_3, Φ_4 usw. folgt. Es ist also zur praktischen Zweckmäßigkeit dieses Verfahrens, dessen Ansatz bis auf die minimalen Schwankungen von s und h je nach der Auswahl der Interpolationsmethode völlig eindeutig aus den Beobachtungen selbst abzuleiten ist, nur noch erforderlich, daß die hypothetische Funktion f(x) dem einfachen E.-G. wenigstens so nahe steht, daß die Koeffizienten etwa von demjenigen der 5. oder höchstens der 6. Abgeleiteten an vernachlässigt werden dürfen. An und für sich muß ja die Reihe bei einer unbegrenzten Gliederzahl für jede beliebige Verteilung zum Ziele führen, und die praktische Einschränkung

1) Wahrscheinlichkeitsrechnung usw. (s. S. 33, A. 1), S. 284 ff. Vgl. auch Bruns Darstellung in Wundt, Phil. Stud. XIV, 1898, S. 339 ff. und Mosch, a. S. 134, A. 2 a. O.

rührt deshalb ausschließlich von der Schwierigkeit der Verwertung eines Beobachtungssystemes her, das gleichzeitig so viele Koeffizienten in einheitlicher Weise nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen läßt. (Vgl. übrigens S. 135, A 2.) Bis zu drei Koeffizienten reichen aber bereits unsere Vorbereitungen in Kap. 26 aus, so daß wir also bei der Möglichkeit der Verwertung der „Normalreihe" [141] sehr leicht D_3 und D_4 und eventuell auch D_3, D_4 und D_5 bestimmen können. Somit wird durch unsere Einsparung der ausgleichenden Berechnung zweier Koeffizienten, die bei diesem Ansatz ohne weiteres mit dem ganz bestimmten Wert Null für den Aufbau der Reihe zur Geltung kommen, die Brunssche Reihe sogleich besonders vollständig ausgenützt. Unser praktisches Beispiel wird uns auch zeigen, daß wir hiermit in der Tat eine gut konvergierende Darstellung der Beobachtungsfunktion erlangen, und so gewinnen wir hiermit einen schönen naturgemäßen Abschluß unserer gesamten Betrachtungen über die Methoden der Kollektivmaßlehre auf dem Gebiete der Psychophysik, in dem gewissermaßen noch einmal die entscheidenden Ergebnisse einheitlich zusammengefaßt sind: Unsere neuen Werte, die auch schon ohne Voraussetzung eines speziellen Verteilungsgesetzes einen K.-G. in anerkannten Hauptwerten und Streuungsmaßen, besonders durch $\mathfrak{A}'$ und M, nach allgemeinsten Voraussetzungen für die Interpolation zu repräsentieren geeignet waren und dabei nach Beobachtung der Summenfunktion des hypothetischen K.-G. der Schwelle mit besonders einfachen Formeln berechnet werden konnten, vermitteln schließlich auch den günstigsten Ansatz zur Konkretisierung derjenigen Funktion, die unter den tatsächlichen Verhältnissen als endgültige analytische Darstellung eines jeden K.-G. betrachtet werden darf.

3. Da die Brunssche Reihe die Aufgabe zu erfüllen hat, einer beliebigen Verteilungsfunktion, die bei dem einfachen Ansatz der Beobachtungsgleichungen [274] durchweg zu große Fehler übrig ließ, möglichst genau gerecht zu werden, so würde die Einführung so großer Gewichtsunterschiede, wie sie aus dem Bernoulli-Laplaceschen Theorem nach § 27, b, 2 abzuleiten wären, die rein analytische Hauptleistung einer ausgleichenden Bestimmung der Koeffizienten D_q dieser Funktion gar nicht zur Geltung kommen lassen. Die Anwendung eines so feinen Apparates ist also wohl immer erst bei einer relativ großen und gleichmäßigen Präzision der einzelnen z-Beobachtungen angebracht, deren mittlerer Fehler hinter dem bei [274] übrig bleibenden mittleren Fehlerquadrat zurücksteht. Obgleich dies nun von psychophysischen Resultaten wenigstens unter den bisherigen Voraussetzungen kaum behauptet werden kann, wollen wir doch auch in der Aufstellung der „Normalreihe" für unser bisheriges Zahlenbeispiel nach Tab. 5, Fig. 4 keine besonderen Gewichtsfaktoren nach § 27 einführen, sondern die gegebene Reihe einfach wieder als die „wahre" betrachten und daher, wie es bisher in diesem Zusammenhange stets geschah, allen 6 Beobachtungen z_1 bis z_6 einen gleichmäßigen Einfluß auf die Koeffizienten einräumen.

Da nach § 30, c) und e, bzw. S. 207

$$s(\mathfrak{A}) = 4{,}38 = 3 \cdot 1{,}46 \quad \text{und} \quad h = \frac{1}{M'\sqrt{2}} = 0{,}1741 = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5223$$

war, so haben wir also zum Ansatz der neuen Beobachtungsgleichungen (B.-Gl.) zunächst die sechs t-Werte zu den 6 Abszissen $3d_1$ bis $3d_6$, also

$$t_i = 0{,}5223\,(d_i - 1{,}46)_{i=1 \text{ bis } 6}$$

zu berechnen. Hierzu sind in den Brunsschen Tabellen im Anhange seiner „Wahrscheinlichkeitsrechnung usw." die Größen

$$\Phi(t_i),\ \frac{1}{4}\Phi_3(t_i) \text{ und } \frac{1}{8}\Phi_4(t_i), \text{ eventuell auch sogleich } \frac{1}{16}\Phi_5(t_i)$$

aufzuschlagen. Der Ansatz der B.-Gl. in Form der „Normalreihe" lautet dann bis einschließlich Φ_5:

$$2z_i = 1 + \Phi(t_i) + x\cdot\frac{\Phi_3(t_i)}{4} + y\,\frac{\Phi_4(t_i)}{8} + w\,\frac{\Phi_5(t_i)}{16}, \qquad [284]$$

wobei

$$\begin{aligned} x &= 4D_3 \\ y &= 8D_4 \\ w &= 16D_5\,. \end{aligned} \qquad [285]$$

Um das Schema der Normalgleichungen [166] unmittelbar anwenden zu können, faßt man nunmehr noch das Gros der durchweg bekannten Glieder als l_i zusammen, während $\frac{\Phi_3}{4}$ dem a_i, $\frac{\Phi_4}{8}$ dem b_i und $\frac{\Phi_5}{16}$ dem c_i entspricht [1]):

$$2z - 1 - \Phi = \frac{\Phi_3}{4}x + \frac{\Phi_4}{8}y + \frac{\Phi_5}{16}w\,. \qquad [286]$$

Im folgenden Rechenschema, das wiederum einer häufigeren Anwendung dieser Darstellung psychophysischer Resultate durch eine auch für den ungeübten Rechner geläufige und sichere Form vorarbeiten möchte und von Geübten wieder beliebig durch Operationen mit der Rechentafel zu ersetzen ist (s. S. 214f.), sind zunächst sämtliche Operationen zur ausschließlichen Berechnung von nur zwei Koeffizienten D_3 und D_4 nach [167] durchgeführt. Wenn man von unserem unmittelbaren Verfahren für die Ableitung von $s(\mathfrak{A})$ und M^2 ausgeht, dürfte man auch im allgemeinen mit dieser Ausdehnung der Normalreihe auskommen. Dann erfordert die Aufstellung der Brunsschen Reihe auch keine wesentlich größere Rechenarbeit als die Durchführung des oben beschriebenen Korrektions- oder Gewichtsverfahrens unter Voraussetzung des einfachen E.-G. Der Ansatz ist sub 1) sogleich für alle 3 Koeffizienten erledigt, da ja hierzu nur noch $\frac{1}{16}\Phi_5$ hinzutritt.

Die berechneten Werte fallen aber natürlich bei der einheitlichen Ausgleichung mit 3 Unbekannten auch für die ersten beiden etwas anders aus, weshalb die 3 Unbekannten in der „Ergänzung" auch mit x', y', w bezeichnet sind. Bei dieser Berechnung von 3 Koeffizienten ist nur die Kombination

1) Das z der Gleichung [166] ist wegen der in l enthaltenen r. H. z durch w ersetzt.

der Summen [168] bis [170] zur endgültigen Bestimmung von x', y' und w von Absatz 5) an völlig neu durchzuführen, während die Summen selbst nur, soweit sie c enthalten, sub 4) neu zu bilden sind, also [ac], [bc], [cc], [lc]. Der ganze Ansatz 1) sowie die Berechnung von [aa], [ab], [bb], [al] und [bl] sub 2) gehört also auch zu dieser zweiten, bis D_5 ausgedehnten Ausgleichung.

Auch bei diesen Operationen habe ich nur die jedermann geläufige logarithmische Berechnung der Produkte und Quotienten mit einer völlig ausreichenden 5-stelligen Tafel durchgeführt. Doch bieten dem Geübten natürlich auch hier die schon genannten Crelleschen Tafeln manche Erleichterung.

Berechnung der Koeffizienten D_q zur Brunsschen Normalreihe bis Φ_5.

1. Der Ansatz der Beobachtungsgleichungen[1]).

$h = 0{,}5223 \quad s = 1{,}46 \quad t_i = h(d_i - s).$

$2z_i$	$2z_i - 1$	t_i	$\Phi(t_i)$	$2z_i - 1 - \Phi(t_i) = l_i$	$a_i = \frac{1}{4}\Phi_3(t_i)$	$b_i = \frac{1}{8}\Phi_4(t_i)$	$c_i = \frac{1}{16}\Phi_5(t_i)$
0,90	0,80	0,8043	0,7447	+ 0,0553	+ 0,0867	+ 0,4054	— 0,4562
0,66	0,32	0,2820	0,3100	+ 0,0100	— 0,4382	+ 0,4174	+ 0,5395
0,26	— 0,48	— 0,2403	— 0,2660	— 0,2140	— 0,4711	— 0,3692	+ 0,6179
0,14	— 0,72	— 0,7626	— 0,7192	— 0,0008	+ 0,0513	— 0,4419	— 0,4139
0,06	— 0,88	— 1,2849	— 0,9307	+ 0,0507	+ 0,2491	+ 0,0420	— 0,3198
0,02	— 0,96	— 1,8072	— 0,9894	+ 0,0294	+ 0,1191	+ 0,1374	+ 0,0697
					$x = 4D_3$	$y = 8D_4$	$w = 16D_5$

2. Die Summen [aa], [bb] usw. der Normalgleichungen [166] für x und y.

(Mit logarithmischer Berechnung der einzelnen $a_i a_i$, $b_i b_i$ usw.)

log $a_i a_i$	$a_i a_i$		log $b_i b_i$	$b_i b_i$		log $a_i b_i$	$a_i b_i$
0,93802 — 2		b_1	0,60788 — 1		a_1	0,93802 — 2	
0,87604 — 3	+ 0,00752	b^2_1	0,21576 — 1	+ 0,16435	b_1	0,60788 — 1	
					a_1b_1	0,54590 — 2	+ 0,03515
0,64167 — 1		b_2	0,62055 — 1		a_2	0,64167 — 1	
0,28334 — 1	+ 0,19201	b^2_2	0,24110 — 1	+ 0,17422	b_2	0,62055 — 1	
					a_2b_2	0,26222 — 1	— 0,18290
0,67311 — 1		b_3	0,56726 — 1		a_3	0,67311 — 1	
0,34622 — 1	+ 0,22193	$b_3{}^2$	0,13452 — 1	+ 0,13631	b_3	0,56726 — 1	
					a_3b_3	0,24037 — 1	+ 0,17393

1) Aus der Formel S. 120. A. 1 für die Abgeleiteten verschiedener Ordnung $\Phi_{p+1}(t)$ und den zugehörigen ℜ-Werten (ebenda) ist zu ersehen, daß die ungeraden Ordnungen gerade Funktionen von t sind und die geraden Ordnungen ungerade Funktionen. Bei negativem t ist also $\Phi_1(-t) = \Phi_1(t)$, $\Phi_3(-t) = \Phi_3(t)$ usw., dagegen $\Phi_2(-t) = -\Phi_2(t)$ usw.

a_4	0,71012 — 2		b_4	0,64532 — 1		a_4	0,71012 — 2	
a_4^2	0,42024 — 3	+ 0,00263	b_4^2	0,29064 — 1	+ 0,19527	b_4	0,64532 — 1	
						$a_3 b_4$	0,35544 — 2	— 0,02267
a_5	0,39637 — 1		b_5	0,62325 — 2		a_5	0,39637 — 1	
a_5^2	0,79274 — 2	+ 0,06205	b_5^2	0,24650 — 3	+ 0,00176	b_5	0,62325 — 2	
						$a_5 b_5$	0,01962 — 2	+ 0,01046
a_6	0,07591 — 1		b_6	0,13799 — 1		a_6	0,07591 — 1	
a_6^2	0,15182 — 2	+ 0,01418	b_6^2	0,27598 — 2	+ 0,01888	b_6	0,13799 — 1	
						$a_6 b_6$	0,21390 — 2	+ 0,01636

[aa] = + 0,50032 [bb] = + 0,69079 [ab] = + 0,03032
log [aa] = 0,69925 — 1 log [bb] = 0,83934 — 1 log [ab] = 0,48173 —

	log $a_i l_i$	$a_i l_i$		log $b_i l_i$	$b_i l_i$
a_1	0,93802 — 2		b_1	0,60788 — 1	
l_1	0,74273 — 2		l_1	0,74273 — 2	
	0,68075 — 3	+ 0,004795		0,35061 — 2	+ 0,022418
a_2	0,64167 — 1		b_2	0,62055 — 1	
l_2	0,00000 — 2		l_2	0,00000 — 2	
	0,64167 — 3	— 0,004382		0,62055 — 3	+ 0,004174
a_3	0,67311 — 1		b_3	0,56726 — 1	
l_3	0,33041 — 1		l_3	0,33041 — 1	
	0.00352 — 1	+ 0,100814		0,89767 — 2	+ 0,079010
a_4	0,71012 — 2		b_4	0,64532 — 1	
l_4	0,90309 — 4		l_4	0,90309 — 4	
	0,61321 — 5	— 0,000041		0,54841 — 4	+ 0,000353
a_5	0,39637 — 1		b_5	0,62325 — 2	
l_5	0,70501 — 2		l_5	0,70501 — 2	
	0,10138 — 2	+ 0,012629		0,32826 — 3	+ 0,002129
a_6	0,07591 — 1		b_6	0,13799 — 1	
l_6	0,46835 — 2		l_6	0,46835 — 2	
	0,54426 — 3	+ 0,003501		0,60634 — 3	+ 0,004039
	[al] =	+ 0,11732		[bl] =	+ 0,11212
	log [al] =	0,06937 — 1		log [bl] =	0,04969 — 1

3. Berechnung der Koeffizienten D_3 und D_4 **ohne** Hinzunahme von $D_5 \cdot \Phi_5$ (

A [167]

log [al]	0,06937 — 1	log [bl]	0,04969 — 1
log [bb]	0,83934 — 1	log [ab]	0,48173 — 2
n. l. [al] [bb]	0,90871 — 2 = + 0,081042	n. l. [bl] [ab]	0,53142 — 3 = + 0,0034

A = 0,081042 — 0,003400 = + 0,077642
log A = 0,89009 — 2

B [167] bis [169]

log [bl]	0,04969 — 1	log [al]	0,06937 — 1
log [aa]	0,69925 — 1	log [ab]	0,48173 — 2
n. l. [bl] [aa]	0,74894 — 2 = + 0,056097	n. l. [al] [ab]	0,55110 — 3 = + 0,0035

B = 0,056097 — 0,003557 = + 0,05254
log B = 0,72049 — 2

N [167] bis [169]

log [aa] 0,69925 — 1
log [bb] 0,83934 — 1
n. l. [aa] [bb] 0,53859 — 1 = + 0,34561

log $[ab]^2$ 0,96346 — 4
n. l. $[ab]^2$ = 0,000919

N = 0,34561 — 0,00092 = + 0,34469
log N = 0,53743 — 1

log A 0,89009 — 2
log N 0,53743 — 1
log x 0,25266 — 1
log 4 0,60206

$\log \frac{x}{4} = \log D_3 = 0{,}65060 - 2$

$\underline{\underline{D_3 = + 0{,}04473}}$

log B 0,72049 — 2
log N 0,53743 — 1
log y 0,18306 — 1
log 8 0,90309

$\log \frac{y}{8} = \log D_4 = 0{,}27997 - 2$

$\underline{\underline{D_4 = + 0{,}01905}}$

4. Ergänzung der Summen durch [ac], [bc] usw. zur gleichzeitigen Berechnung der Koeffizienten von Φ_3 bis Φ_5.

log $a_i c_i$ $a_i c_i$

a_1 0,93802 — 2
c_1 0,65916 — 1
n. l. 0,59718 — 2 = — 0,039553
a_2 0,64167 — 1
c_2 0,73199 — 1
n. l. 0,37366 — 1 = — 0,23640
a_3 0,67311 — 1
c_3 0,79092 — 1
n. l. 0,46403 — 1 = — 0,29110
a_4 0,71012 — 2
c_4 0,61690 — 1
n. l. 0,32702 — 2 = — 0,02123
a_5 0,39637 — 1
c_5 0,50488 — 1
n. l. 0,90125 — 2 = — 0,079662
a_6 0,07591 — 1
c_6 0,84323 — 2
n. l. 0,91914 — 3 = + 0,00830
[ac] = — 0,65964
log [ac] = 0,81931 — 1

log $b_i c_i$ $b_i c$

b_1 0,60788 — 1
c_1 0,65916 — 1
n. l. 0,26704 — 1 = — 0,18494
b_2 0,62055 — 1
c_2 0,73199 — 1
n. l. 0,35254 — 1 = + 0,22518
b_3 0,56726 — 1
c_3 0,79092 — 1
n. l. 0,35818 — 1 = — 0,22813
b_4 0,64532 — 1
c_4 0,61690 — 1
n. l. 0,26222 — 1 = 0,18290
b_5 0,62325 — 2
c_5 0,50488 — 1
n. l. 0,12813 — 2 = — 0,01343
b_6 0,13799 — 1
c_6 0,84323 — 2
n. l. 0,98122 — 3 = + 0,00958
[bc] = 0,00884
log [bc] = 0,94645 — 3

log $c_i c_i$ $c_i c_i$

n. l. c_1^2 0,31832 — 1 = 0,20812

n. l. c_2^2 0,46398 — 1 = 0,29106

n. l. c_3^2 0,58184 — 1 = 0,38180

log $c_i l_i$ $c_i l_i$

l_1 0,74273 — 2
c_1 0,65916 — 1
n. l. 0,40189 — 2 = — 0,025228

l_2 0,00000 — 2
c_2 0,73199 — 1
n. l. 0,73199 — 3 = 0,005395

n.l. c_4^2 0,23380 — 1 = 0,17131

n.l. c_5^2 0,00976 — 1 = 0,10227

n.l. c_6^2 0,68646 — 3 = 0,00486

[cc] = 1,15942

log [cc] = 0,06424

l_3 0,33041 — 1
c_3 0,79092 — 1
n.l. 0,12133 — 1 = — 0,132230

l_4 0,90309 — 4
c_4 0,61690 — 1
n.l. 0,51999 — 4 = + 0,000331

l_5 0,70501 — 2
c_5 0,50488 — 1
n.l. 0,20989 — 2 = — 0,016214

l_6 0,46835 — 2
c_6 0,84323 — 2
n.l. 0,31158 — 3 = + 0,002049

[cl] = 0,12623

log [cl] = 0,21985 — 1

5. Berechnung der Koeffizienten D'_3, D'_4 nnd D_5.

C [168]

log [aa] 0,69925 — 1
log [cl] 0,21985 — 1
n.l. [aa][cl] 0,91910 — 2 = — 0,083004

log [al] 0,06937 — 1
log [ac] 0,81931 — 1
n.l. [al][ac] 0,88868 — 2 = — 0,077390

C = — 0,083004 + 0,077390 = — 0,005614

log C = 0,74927 — 3

D [168] u. [169]

log [aa] 0,69925 — 1
log [bc] 0,94645 — 3
n.l. [aa][bc] 0,64570 — 3 = — 0,004422

log [ab] 0,48173 — 2
log [ac] 0,81931 — 1
n.l. [ab][bc] 0,30104 — 2 = — 0,02000

D = — 0,004422 + 0,020000 = + 0,015578

log D = 0,19257 — 2

E [168]

log [aa] 0,69925 — 1
log [cc] 0,06424
n.l. [aa][cc] 0,76349 — 1 = 0,58009

log $[ac]^2$ = 0,63862 — 1
$[ac]^2$ = 0,43513

E = 0,580090 — 0,43513 = + 0,14496

log E = 0,16125 — 1

log N 0,53743 — 1
log C 0,74927 — 3
n.l. NC 0,28670 — 3 = — 0,001935

log B 0,72049 — 2
log D 0,19257 — 2
n.l. BD 0,91306 — 4 = + 0,0008186

log N 0,53743 — 1
log E 0,16125 — 1
n.l. NE 0,69868 — 2 = + 0,04996

$$
\begin{aligned}
NC - BD &= -\,0{,}002754 \\
\log \text{Zähler}\,[168] = \log(NC - BD) &= 0{,}43996 - 3 \\
NE - D^2 &= 0{,}04972 \\
\log \text{Nenner}\,[168] = \log(NE - D^2) &= 0{,}69653 - 2 \\
\hline
\log w &= 0{,}74343 - 2 \\
\log 16 &= 1{,}20412 \\
\hline
\log \frac{w}{16} = \log D_5 &= 0{,}53931 - 3 \\
D_5 &= -\,0{,}003462
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log D^2 &= 0{,}38514 - 4 \\
D^2 &= 0{,}000243
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log w &= 0{,}74343 - 2 \\
\log D &= 0{,}19257 - 2 \\
\text{n.l.}\; wD &= 0{,}93600 - 4 = -\,0{,}000863
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Zähler}\,[169] = B - wD &= 0{,}05340 \\
\log(B - wD) &= 0{,}72754 - 2 \\
\log \text{Nenner}\,[169] = \log N &= 0{,}53743 - 1 \\
\hline
\log y' &= 0{,}19011 - 1 \\
\log 8 &= 0{,}90309 \\
\hline
\log \frac{y'}{8} = \log D'_4 &= 0{,}28702 - 2 \\
D'_4 &= +\,0{,}019352
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log w &= 0{,}74343 - 2 \\
\log [ac] &= 0{,}81931 - 1 \\
\hline
\text{n.l.}\; w[ac] &\quad 0{,}56274 - 2 = +\,0{,}03653
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log y' &= 0{,}19911 - 1 \\
\log [ab] &= 0{,}48173 - 2 \\
\hline
\text{n.l.}\; y' \cdot [ab] &\quad 0{,}67184 - 3 = +\,0{,}004697
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Zähler}\,[170] = [al] - [ab]y' - [ac]w &= +\,0{,}07609 \\
\log \text{Zähler}\,[170] &= 0{,}88133 - 2 \\
\log \text{Nenner}\,[170] = \log [aa] &= 0{,}69925 - 1 \\
\hline
\log x' &\quad 0{,}18208 - 1 \\
\log 4 &\quad 0{,}60206 \\
\hline
\log \frac{x'}{4} = \log D_3' &= 0{,}58002 - 2 \\
D_3' &= 0{,}03802
\end{aligned}
$$

Setzt man x und y bzw. x', y' und w in die einzelnen Beobachtungsgleichungen von der Form [286] ein, so erhält man die **neuen übrigbleibenden Fehler** v_i **und** v_i', die man unter sich und mit dem Zweifachen der ursprünglichen Werte $2z_i - 1 - \Phi(t_i) = l_i$, die bei ausschließlicher Annahme des einfachen E.-G. und den nämlichen s und h übrigbleiben würden, bezüglich ihrer Größe und Verteilung im einzelnen, sowie ihres mittleren Quadrats M^2 und M'^2 vergleichen kann:

$l_i = 2\left(z_i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi(t_i)\right)$	l_i^2	v_i	v_i^2	v'_i	v'^2_i
+ 0,0553	0,0030	− 0,022	0,000484	− 0,046	0,002116
+ 0,0100	0,0001	+ 0,025	0,000625	+ 0,042	0,001764
− 0,2140	0,0457	− 0,073	0,005329	− 0,051	0,002601
− 0,0008	0,0000	+ 0,057	0,003249	+ 0,037	0,001369
+ 0,0507	0,0025	− 0,000	0,000000	− 0,011	0,000121
+ 0,0294	0,0009	− 0,013	0,000169	− 0,006	0,000000
	$\Sigma l_i^2 = 0{,}0522$		$\Sigma v_i^2 = 0{,}0098$		$\Sigma v_i'^2 = 0{,}0080$

Die mittleren Fehler von z selbst, also

$$M_l = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\Sigma l^2}{6}} = \pm 0{,}046$$

$$M = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{6}} = \pm 0{,}020$$

$$M' = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\Sigma v'^2}{6}} = \pm 0{,}018$$

können schließlich noch als allgemein vergleichbares Maß dafür bestimmt werden, wie sich unsere spezielle Beobachtungsreihe bei dieser Ableitungsweise an die Brunssche „Normalreihe" anpassen läßt.

Wie man innerhalb der nämlichen Reihe natürlich schon aus Σl^2 usw., also nicht erst aus den M, ersieht, ist die Anpassung in der Tat wesentlich besser als bei dem einfachen E.-G., sowohl bezüglich der absoluten Größe der übrigbleibenden Fehler, als auch deren Verteilung (Zerlegung des großen Fehlers l_3) und besonders auch der Vorzeichenwechsel (viermalig statt zweimalig). Vor allem zeigt sich aber nun auch der sofortige Ansatz der Normalreihe vom unmittelbaren Verfahren aus dadurch als berechtigt, daß die Reihe besonders bei ihrer erweiterten Ableitung bis D_5, aber auch schon in der ersten, praktisch wohl meist allein in Frage kommenden Annäherung bis D_4 gut konvergiert.

Sie lautet entweder

$$2z = 1 + \Phi(t) + 0{,}047\, \Phi_3(t) + 0{,}0190\, \Phi_4(t)$$

oder

$$2z' = 1 + \Phi(t) + 0{,}0380\, \Phi_3(t) + 0{,}0193\, \Phi_4(t) - 0{,}00346\, \Phi_5(t).$$

Man kann also annehmen, daß die im unmittelbaren Verfahren gewonnenen Repräsentanten der Beobachtungsreihe den entsprechenden Größen, wie sie bei der bestmöglichen Anpassung der Brunsschen Normalreihe an die gegebenen Beobachtungswerte z_1 bis z_l in deren t's enthalten sind, zum mindesten sehr nahe kommen. Eine merkliche Verbesserung des mittleren Fehlerquadrates durch die Hinzunahme des dritten Koeffizienten D_5 ist allerdings hier nicht mehr zu konstatieren.

4. Bruns hat für diese Bestimmung der Koeffizienten durch Ausgleichung auch noch die sekundäre Korrektion der ursprünglich in den t_l angesetzten Annäherungswerte s und h empfohlen, die von E. Mosch dann auch bei seinen psychophysischen Beispielen durchgeführt wurde[1]. Das Prinzip dieser sekundären Verbesserung der erstmals eingeführten Werte, die wir als bloße Annäherungen weiterhin wieder mit s' und h' bezeichnen wollen, stimmt mit dem Verfahren, wie es schon bei dem einfachen E.-G. § 31, a ausführlich dargelegt wurde, vollständig überein. Nur tritt eben jetzt an die Stelle der dortigen einfachen Funktion

$$2z' = 1 + \Phi(h'(d - s')) = F(h', s') \qquad [274]$$

1) a. S. 134, A. 2 a. O.

die Brunssche Reihe, bzw. „Normalreihe“ [286]

$$2z' = 1 + \Phi(h'(d - s')) + D_3\,\Phi_3\,(h'(d - s'))\ \text{usw.} = \Psi(h', s')\,. \qquad [287]$$

Die Taylorsche Reihe, die bis zur ersten Potenz der Verbesserungen $\xi = h - h'$ und $\eta = s - s'$ anzusetzen ist, lautet also jetzt, wenn wir wieder nicht erst den von Mosch benutzten Umweg über $k = hs$ nehmen,

$$\Psi(h' + \xi, s' + \eta) - \Psi(h', s') = \frac{d\,\Psi(h', s')}{d\ \ t}\,\frac{\delta t}{\delta h'}\,\xi + \frac{d\,\Psi(h', s')}{dt}\,\frac{\delta t}{\delta s'}\,\eta. \qquad [288]$$

Dabei sind die gesuchten Verbesserungen ξ und η die neuen Unbekannten. Natürlich sind die

$$\Psi(h, s,) = \Psi(h' + \xi,\ s' + \eta) = \Psi(t) = z_i, \qquad [289]$$

also wiederum die beobachteten z-Werte selbst. Dagegen bedeuten die $\Psi(h', s') = \Psi(t')$ die unter Einsetzung der zunächst gewonnenen Koeffizienten bis D_4, bzw. bis D_5 berechneten Werte, d. h. es ist die linke Seite der Gl. [288] unter Einführung der S. 223 berechneten Werte v_i bezw. v_i'

$$\Psi(t) - \Psi(t') = v_i\ \text{bzw.} = v_i'.$$

Die übrigbleibenden Fehler der erstmaligen Ausgleichung sind also wiederum die l_i der neuen Beobachtungsgleichungen nach dem Schema [175] und [176]. Die neuen Koeffizienten der Normalgleichungen findet man nun durch Differenzierung von [287] nach h und s. Es ist

$$a_i = \frac{d\,\Psi(t')}{dt}\cdot\frac{\delta t}{\delta h'} = \Big\{\,\Phi_1(t') + x'\,\frac{\Phi_4}{4}\,(t') + {}$$
$$+ y'\,\frac{\Phi_5}{8}\,(t') + w\,\frac{\Phi_6}{16}\,(t')\,\Big\}(d_i - s') \qquad [290]$$

$$b_i = \frac{d\,\Psi(t')}{dt}\cdot\frac{\delta t}{\delta s'} = -\Big\{\,\Phi_1(t') + x'\,\frac{\Phi_4}{4}(t')\ \cdots\ \Big\}\,h'. \qquad [291]$$

Wir führen dabei für die Klammer $\{\}$ eine neue Hilfsgröße α_i ein und fügen wegen der Koeffizienten der Abgeleiteten in der Tabelle noch geeignete Faktoren zu den Konstanten der Reihe hinzu, wobei wir für die letzteren am einfachsten die soeben berechneten x, y, w verwenden. Wir setzen also

$$\alpha_i = \Phi_1\,(t') + 2x\,\frac{\Phi_4(t')}{8} + 2\,y\,\frac{\Phi_5(t')}{16}. \qquad [292]$$

Dies entspricht also der Berechnung der Korrektionen für die „Normalreihe“ bis D_4. Dagegen bedeutet α'_i den genaueren Wert

$$\alpha_i' = \Phi_1(t') + 2x'\,\frac{\Phi_4}{8}(t') + 2y'\,\frac{\Phi_5}{16}(t') + 2w\,\frac{\Phi_6}{16}\,(t'). \qquad [292a]$$

Ferner nehmen wir den in allen B.-Gl. wiederkehrenden Faktor h' in [291] wieder in die neue Unbekannte

$$\zeta = h'\eta \qquad [293]$$

mit hinein. Dann lauten diese neuen Beobachtungsgleichungen zur Berechnung der Verbesserungen ξ und $\frac{\zeta}{h'}$, die an h' und s' vorzunehmen sind, entweder einfach

$$v_i = \alpha_i (d_i - s')\xi - \alpha_i \zeta, \qquad [294]$$

wenn wir [292] mit dem Gliede $2y \frac{\Phi_5}{16}(t')$ abschließen lassen, oder, bei Einbeziehung von D_5,

$$v_i' = \alpha_i'(d_i' - s')\xi - \alpha_i'\zeta. \qquad [294\,a]$$

Bei psychophysischen Anwendungen würde man sich aber wohl meistens mit dem Anschluß dieses Verfahrens an die Berechnung zweier Koeffizienten begnügen, was man dann auch als eine Art von Ersatz der Berechnung eines dritten Koeffizienten betrachten kann. Allerdings ist die Bildung der α_i und der Ansatz der neuen Summen [aa] usw. viel komplizierter als die bloße Ergänzung zur Berechnung von D_5, doch dafür wohl bisweilen lohnender, was die weitere Verminderung des mittleren Quadrates der übrig bleibenden Fehler anbetrifft. Die Berechnung der α_i hat nun einfach mit elementaren Hilfsmitteln nach Gl. [292] zu geschehen, wobei die Multiplikationen der zwei mindestens vierstelligen Größen x und Φ_4, y und Φ_5, w und Φ_6 wiederum vor allem durch Einübung auf die S. 215 genannten Petersschen Tafeln sehr erleichtert werden kann. Die Behandlung von [294] aber hat wieder nach dem nunmehr schon zweimal durchgeführten Rechenschema für die Normalgleichungen mit nur zwei Unbekannten zu erfolgen, und so erübrigt sich wohl die zahlenmäßige Durchführung unseres Beispieles nach dieser Seite hin. Natürlich könnte eine solche Modifikation unserer Ausgangswerte s' und h', bzw. $\frac{1}{h'\sqrt{2}} = M'$ bei der Begrenztheit der angesetzten Normalreihe keineswegs etwa als eine Korrektur betrachtet werden, die uns den wahren repräsentativen Einzelgrößen s und M der als stetig betrachteten Verteilung f(x) näher führte, als wir es zunächst im unmittelbaren Verfahren mittels einer ganz bestimmten, wenn auch sehr allgemeinen Form der Interpolation erreichten. Diese Korrektur würde vielmehr zunächst eben nur eine Verbesserung der einheitlichen Darstellung aller Beobachtungen durch eine bestimmte Verteilungsfunktion bedeuten.

Hiermit schließen wir die Betrachtungen aus dem Gebiet der Kollektivmaßlehre, die in ihrem letzten Teile schon eine sehr konkrete Gestalt angenommen und dadurch ihren Anwendungen auf psychophysische Probleme ausführlich vorgearbeitet haben. Noch manche andere Gesichtspunkte sind aus ihr für psychologische Probleme beigezogen worden, in neuester Zeit vor allem auch die ganz allgemeine quantitative Diskussion des Grades, in welchem zwei Ereignisse überhaupt voneinander abhängig erscheinen, oder die Berechnung der sog. „Korrelation“. Diese an sich sehr interessanten Betrachtungsweisen sind jedoch noch zu sehr im Flusse, als daß sie schon jetzt in den Zusammenhang der doch in allen wichtigen Punkten allgemein anerkannten physiologischen Methodik eingefügt werden könnten. Auch würden sie zu einer klaren Darstellung wiederum neue, ausführliche mathematische Erörterungen notwendig machen und dadurch die Methodik der konkreten Analyse schließlich doch zu weit hinausschieben.

III. Die Reproduktionsmethoden.

Kapitel 8.

Die subjektiven Äquivalente und die Unterschiedsschwellen bei der Vergleichung.

32. Die elementare Bedeutung der sogenannten Vergleichsmethode.

a) Die Definition der Reproduktionsmethoden.

1. Gehen wir nun zu den psychologischen Experimentalmethoden im einzelnen über, so knüpfen wir zunächst wieder an Wundts Unterscheidung von Reiz- und Reaktionsmethoden an, die uns bereits in § 7 bei der Betrachtung des Gemeinsamen in allen psychologischen Experimenten entgegengetreten war. Sie ist aus der speziellen Gegenüberstellung von „Eindrucks-“ und „Ausdrucksmethoden“ bei der Analyse der Gefühle verallgemeinert, weshalb auch wenigstens die Bezeichnung „Eindrucksmethode“ von Wundt noch mit „Reizmethode“ synonym angewendet wird. Die experimentelle Beeinflussung des Bewußtseins durch eine bestimmte äußere Reizlage, um derentwillen offenbar der neue Name „Reizmethode“ gewählt wurde, bildet aber freilich auch einen integrierenden Bestandteil der Reaktionsmethoden, und außerdem tritt bei diesen letzteren natürlich im allgemeinen auch eine Aussage der Versuchsperson über das Erlebte hinzu, mit der die Experimente der anderen Hauptgruppe ihrerseits abgeschlossen sind. Daher betrachtet Wundt die Reaktionsmethoden als eine bloße Ergänzung[1]) der Reiz- oder Eindrucksmethoden, die ihrem Wesen nach bei jeder psychologischen Untersuchung hinzutreten kann. Diese tatsächliche Verbindung der Methoden in der Praxis, die infolge entsprechender sachlicher Zusammenhänge zu einer möglichst vollständigen Analyse eines Gegenstandes erforderlich werden kann, braucht nun an sich mit der Präzision einer Klassifikation von Methoden noch nicht im Widerspruch zu stehen. Nur darf dann eben wenigstens nicht die Möglichkeit ausgeschlossen sein, daß die bei der Koordination der verschiedenen Hauptarten entscheidenden Momente gelegentlich auch getrennt zur Anwendung gelangen. Wollte man jedoch wirklich die Beeinflussung des Bewußtseins durch den äußeren Reiz als das Wesen der „Reizmethoden“ betrachten, so könnte man ihnen nicht die das nämliche Hilfs-

1) a. S. 16 a. O.

mittel anwendenden Reaktionsmethoden im ganzen, sondern höchstens die Untersuchung der motorischen Äußerungen als solcher koordinieren, die aber eben nur eine einzige, allerdings unerläßliche Seite an den Reaktionsmethoden ausmachen. Denn diese Äußerungen sind nur dann psychologisch zu deuten, die ganze Methode hat also überhaupt nur dann einen psychologischen Sinn, wenn von Anfang an durch die ganze Anlage des Versuches die Beziehung der objektiven Symptome auf experimentell ausgelöste Bewußtseinsinhalte ins Auge gefaßt wurde. Deshalb scheint denn auch Wundt bei der anderen Hauptgruppe noch nach einem weiteren, in dieser Hinsicht weniger mißverständlichen Namen gesucht zu haben, wobei freilich der von der Reizlage zunächst abhängige „Eindruck", bezw. allgemeiner ein bestimmter Bewußtseinszustand überhaupt, ebenfalls noch keine genügende Handhabe bieten dürfte. Denn er ist ja auch bei den Reaktionsversuchen aus den soeben genannten Gründen gerade dasjenige, was hier womöglich ebenso eindeutig wie bei irgendeinem anderen psychologischen Experimente objektiv beherrscht werden soll. Was also die erste einfachere Hauptgruppe, die den Reaktionsmethoden koordiniert werden soll, allein zu einem wirklich in sich abgeschlossenen Verfahren der psychologischen Analyse werden läßt, und was andererseits bei Reaktionsversuchen (im weiteren Sinne), z. B. aus den in § 8 angegebenen Gründen, gelegentlich in der Tat in Wegfall kommen könnte, ohne deren psychologische Bedeutung bei klaren objektiven Reiz- und Einstellungsbedingungen aufzuheben, das ist offenbar nur die Wiedergabe des Erlebten seitens der Versuchsperson, sofern es ausschließlich auf deren Sinn, auf die begriffliche Rekonstruktion des Erlebten in irgendeiner Hinsicht ankommt, nicht aber etwa zugleich auf die sprachliche „Reaktion" als solche, die schon in § 7 hiervon ausdrücklich unterschieden wurde. Man kann diese Wiedergabe, die bei einer großen Klasse psychologischer Versuche einen in sich vollkommenen Abschluß herbeiführt, ziemlich unmißverständlich als „Reproduktion" im allgemeinsten Sinne bezeichnen, während für das entscheidende Moment der zweiten Hauptgruppe der Wundtsche Begriff der „Reaktion" im weiteren Sinne bereits hinreichend charakteristisch ist. Wir wollen also die beiden hier gemeinten Hauptgruppen relativ selbständig anwendbarer Methoden im folgenden kurz als „Reproduktions- und Reaktionsmethoden" einander gegenüberstellen. Bei jeder von beiden entnimmt man dem experimentell regulierten Verlaufe des Bewußtseins mehr oder weniger mittelbar objektive Äußerungen, aus denen er sich wissenschaftlich teilweise rekonstruieren läßt. Dabei ist der Kausalzusammenhang dieser Äußerungen mit dem rekonstruierten Bewußtseinsbestande sogar gerade bei der Reproduktionsmethode ein besonders komplizierter, da hier Urteile der V.-P. über außenweltliche Tatsachen oder ihr eigenes Bewußtsein zustande kommen müssen, die den hochentwickelten Mechanismus der „verständlichen" sprachlichen Symbolik auslösen können. Dafür darf aber eben diese Methode das Studium dieses psychophysischen Mechanismus im allgemeinen auch völlig umgehen, soweit er seine für das Wesen dieser Methode entscheidende Funktion der Mitteilung des Urteils wirklich ausgeübt hat, durch die das Bewußtsein für jeden der Sprache Kundigen in gewissem Sinne doch auch zugleich so „unmittelbar" als möglich, d. h. durch eine besonders sicher und eindeutig wirkende

Vermittelung dargestellt ist. Die Reaktionsmethoden betrachten dagegen irgendeine registrierbare Äußerung des Bewußtseins als solche, um die Abhängigkeit ihrer Einzelheiten, wie Qualität, Intensität, Zeitverlauf und Koordination, von bestimmten Bewußtseinszuständen zunächst überhaupt erst einmal kennen zu lernen. Die Reproduktionsmethode würde also gewissermaßen in ihrem Wesen bestehen bleiben, wenn man sein eigenes Bewußtsein ohne sprachliche Äußerung durch rein sachliche Begriffsbildungen bzw. eine rein individuelle oder unartikulierte Symbolik zu analysieren vermöchte. Die Reaktionsmethoden entnehmen dagegen der zentrifugalen Seite des psychophysischen Zusammenhanges eine erste wesentliche Aufgabe, wenn auch wegen der großen technischen Bedeutung des zentripetalen Zusammenhanges für deren experimentelle Lösung nach dem früher Gesagten hieraus kein Gegensatz der „Reiz- und Reaktionsmethoden" werden kann. Während also die Reproduktionsmethoden die sprachlichen Äußerungen, wie gesagt, zunächst nur als Symbole verwerten, die nicht als solche im einzelnen psychologisch eindeutig zurückgeführt, sondern nur eindeutig „verstanden" werden sollen, hierzu aber natürlich auch bereits verständlich sein müssen, besteht das erste Problem der anderen Gruppe darin, daß die registrierten Veränderungen als Symptome, d. h. als Vorgänge, die vom Bewußtseinsverlauf im einzelnen eindeutig abhängen, erst neu verständlich zu machen sind.

2. Allerdings ist auch der Begriff der Reproduktion in dieser Einteilung ebenso, wie es früher schon mit demjenigen der Reaktion geschah (vgl. S. 15 f.), erst noch gegen geläufige speziellere Terminologieen abzugrenzen, wozu er aber auch sachlich wohl befähigt erscheint. Seinerzeit habe ich z. B. selbst die „unmittelbare Wiedergabe" der „Vergleichsmethode" gegenübergestellt[1]), im Anschluß an Wundts Versuch, die Bestimmung des sogenannten „Apperzeptionsumfanges" oder des Umfanges der Neuauffassung eines kurzdauernd dargebotenen Komplexes durch unmittelbare „Wiedergabe" von der Messung des sogenannten „Bewußtseinsumfanges" durch die Vergleichung mit einem besonders dargebotenen Vergleichsobjekte zu unterscheiden. Hierauf werden wir erst im zwölften Kapitel im einzelnen einzugehen haben. Für die Definition der methodischen Hauptgruppen ist jedoch schon hier wenigstens so viel hervorzuheben, daß von dem hier genannten allgemeinen Gesichtspunkte aus natürlich auch der seinerzeit gemachte Unterschied zwischen der direkten Mitteilung eines einzelnen Wahrnehmungsinhaltes einerseits und der indirekten Erschließung desselben aus dem Ausfall eines Vergleichsurteils beim Vergleich mit einem zweiten Objekte andererseits nur ein relativer sein kann. Denn auch bei der Vergleichsmethode ist natürlich höchstens das Dasein eines inhaltlichen Elementes, welches das Urteil fundiert, aus dem Relationsurteil „gleich", „ähnlich", „verschieden" indirekt erschlossen. Dagegen wird die inhaltliche Relation bei diesen Versuchen ebenfalls unmittelbar „wiedergegeben", wie bei der anderen Methode die neu aufgefaßten gegenständlichen Elemente, also z. B. die Zahlen, Buchstaben, selbst. Im Anschluß an diese Überlegungen hat denn auch A. A. Grünbaum[2]) der einfachen Methode der „unmittelbaren Reproduk-

1) Zur Theorie des Bewußtseinsumfanges und seiner Messung. Wundt, Phil. Stud. 20. 1902 (Festschrift) S. 502.

2) Über die Abstraktion der Gleichheit. Archiv f. d. ges. Psychologie XII, 1908, S. 356.

tion" die „Methode der Reproduktion und Wiedererkennung" gegenübergestellt, zu der jene durch die Mithilfe von Vergleichsobjekten ergänzt werde. In diesem allgemeinsten Sinne nehmen wir also hier nunmehr die „Reproduktionsmethoden" schlechthin, wenn wir sie von den Reaktionsmethoden als einer zweiten Hauptgruppe unterscheiden.

In gewissem Sinne enthält freilich auch die unmittelbare Wiedergabe eines wahrgenommenen oder gedachten Elementes oder einer Relation eine „Angleichung" an entsprechende frühere Erlebnisse, von denen die bei der Wiedergabe benützten Begriffe herstammen, insofern eben auch hier stets Wiedererkennungen beteiligt sind. Diese gehören also zu dem ganzen Vorgange der Wiedergabe in jener Allgemeinheit bereits als notwendiger Bestandteil hinzu. Dagegen würden sie noch nicht dazu berechtigen, die gesamten Reproduktionsmethoden etwa von vornherein unter die „Vergleichsmethoden" zu subsummieren. Denn unter „Vergleichen" versteht man immer nur eine Vergegenwärtigung von mindestens zwei relativ selbständig wahrgenommenen oder gedachten Gegenständen, die wir vergleichen und an denen wir dann eine Relation der Gleichheit oder Verschiedenheit usw. ähnlich erkennen bzw. wiedererkennen, wie einzelne Elemente oder Merkmale. Dagegen läßt sich von der einfachen Wiedererkennung von Objekten, wie sie uns schon früher begegnet sind, z. B. von der als „Lesen" bezeichneten unmittelbaren Wiedergabe neu aufgefaßter Buchstabenkombinationen u. ä., wenigstens im allgemeinen nicht sagen, daß bei ihr der neuen Wahrnehmung Erinnerungen an frühere Buchstabenbilder von gleicher Art als selbständige Vergleichsinhalte an die Seite treten würden. Und wenn man auch nach Analogie zu anderen Prozessen annehmen darf, daß auch hier die Bekanntheitsqualität mit irgendwelchen bewußten Repräsentanten der früheren Kenntnis von gleichartigen Objekten zusammenhängt, so darf sich doch die Schilderung von Methoden nicht von vornherein von Hypothesen über die Struktur des dunkleren Bewußtseins leiten lassen, die durch ihre Ergebnisse nahegelegt werden. Aber auch die Bezeichnung aller Reproduktionsmethoden als „Wiedererkennungsmethoden" wäre natürlich noch zu speziell, insofern doch die bekannten Symbole bei der Wiedergabe seitens der V.-P. so und so oft nur zur Reproduktion an sich neuer Tatbestände verwendet werden. Dagegen werden allerdings die experimentellen Hilfsmittel bei den Reproduktionsmethoden überhaupt in ihren exakteren Anwendungen stets das nämliche objektive Reizschema einhalten, wie die exakte Analyse der eigentlichen Vergleichsprozesse. Denn auch die bloße Wiedererkennung geläufiger Qualitäten und Formen auf Grund bestimmter Begriffe läßt sich um so genauer analysieren, je besser die wiederzuerkennenden Gegenstände und Vorgänge mit ähnlicher Eindeutigkeit experimentell abgestuft werden können, wie es bei gleichzeitig oder sukzessiv erfaßten Vergleichsobjekten beiderseits möglich ist und zur Ableitung von Fehlern und Schwellen in der hier ausführlich behandelten Weise führt.

Weiterhin ist aber wohl auch klar, daß keine „Reiz- oder Eindrucksmethode" denkbar ist, bei welcher der durch den Reiz ausgelöste Bewußtseinsvorgang noch unmittelbarer als durch den hier als „Reproduktion" bezeichneten Akt der wissenschaftlichen Analyse zugänglich werden könnte. Denn selbst wenn sich diese Bearbeitung direkt an die eigene Selbstbeobachtung anschließen kann, weil der Untersuchende zugleich selbst Versuchsperson ist, muß zunächst einmal das unmittelbar Erlebte irgendwie gedanklich erfaßt werden, um auch noch nachträglich gegenwärtig zu bleiben. Immerhin soll aber unser Begriff der Reproduktion vor allem einen elementareren Akt bedeuten als die sogenannte „Reflexion", die bereits mehrere Einzelinhalte der Reproduktion begrifflich zu verarbeiten sucht und die gerade durch die Trennung der Funktionen der V.-P. und des Untersuchenden aus der bloßen Reproduktion möglichst ausgeschaltet werden sollte, falls der letztere in ihrer Sonderung noch nicht hinreichend geübt sein sollte.

Selbstverständlich sind von der Reproduktion in dieser allgemeinen Bedeutung auch die speziellen Anwendungen dieser Bezeichnung auf Erinnerungen und Phantasievorstellungen zu unterscheiden. Manchmal denkt man bei der Reproduktion in diesem engeren Sinne sogar noch die weitere Einschränkung hinzu, daß zwischen dem primären Erlebnis und dem Akte der Erinnerung ein Stadium liege, in welchem man sich den betreffenden Gegenstand überhaupt nicht vergegenwärtigte. Doch werden wir selbst unter einer „reproduktiven Vorstellung" in diesem engeren Sinne im folgenden einfach die nachträgliche Vergegenwärtigung direkt wahrgenommener Objekte oder unmittelbarer Erlebnisse überhaupt verstehen, die sich von den direkten Sinneswahrnehmungen auch meistens durch ihre geringere Lebhaftigkeit und Frische abgrenzen läßt, was allerdings erst nach Einschiebung unbewußter Stadien deutlicher hervortritt. Dagegen soll bei dem Worte „Reproduktion" als Namen unserer ersten Hauptgruppe der Methoden, ähnlich wie bei seiner Bedeutung als „Abbildung" überhaupt, mit der Vorsilbe Re-, ebenso wie mit dem „Wieder" in dem gleichbedeutenden Worte „Wiedergabe", nur die symbolische Beziehung des Denk- und Darstellungsaktes auf ein unmittelbar Wahrgenommenes oder Erlebtes überhaupt ausgedrückt werden. Dies entspricht also auch der nämlichen Vorsilbe in dem Namen der anderen Hauptgruppe, bei der wenigstens die Reaktionsversuche im engeren Sinne des 18. Kapitels eine gedankliche Zuordnung der Handlung zum verabredeten Reaktionsmotiv einschließen.

Wie aber diese speziellen Versuche ihre besondere Exaktheit vor allem der klaren Beziehung der motorischen Äußerungen zum äußeren Reize ververdanken, so sind auch die „Reproduktionsmethoden" wissenschaflich um so wertvoller, je weniger sie auf rein reproduktive Vorstellungen in jenem engeren Sinne angewiesen sind, wenn auch freilich die Mehrleistung der begrifflichen Erfassung, bzw. deren sprachlicher Formulierung, die jedem derartigen Versuche erst seinen eigentlichen Abschluß verleiht, mit der zunehmenden Schwierigkeit der Aufgabe erst in immer späteren Stadien des Erlebnisses fertig vorliegt. Die Eindeutigkeit der experimentellen Analyse nach der Reproduktionsmethode wird also um so sicherer garantiert sein, je mehr von allen an dem Resultat beteiligten Bewußtseinsinhalten relativ einfache unmittelbare Sinneswahrnehmungen sind, die direkt von äußeren Reizen ausgelöst sind. Wo es nur irgend möglich ist, wird man daher von einer Form der zu untersuchenden Prozesse auszugehen haben, bei der sie sich möglichst enge an Sinneswahrnehmungen anschließen. Wenn aber auch solche Aufgaben stets die dankbarsten bleiben werden, was exakte quantitative Resultate anlangt, so erscheinen sie innerhalb der großen Gruppe der Probleme, die mit Reproduktionsmethoden überhaupt in Angriff genommen werden können, doch nur graduell von der Analyse der wirklich nachträglichen Vergegenwärtigungen und der von äußeren Reizen höchstens indirekt beeinflußten Gefühle und Willensakte verschieden [1]).

In dieser Allgemeinheit ist also die Reproduktion geradezu das Korrelat der „Apperzeption“ in dem schon § 3 (S. 7 ff.) eingeführten Sinne, die beim Hinzutreten symbolischer Hilfsmittel zu der hier gemeinten Wiedergabe führen kann und die hierzu andererseits auch wiederum unerläßlich ist. Da wir aber a. a. O. auch bereits ausführlich erörtert haben, daß diese Apperzeption im psychologischen Experimente stets auch von wichtigen und großenteils willkürlichen Tätigkeitsmomenten oder Impulsen getragen sein muß, so stehen die Reproduktionsmethoden natürlich auch den Reaktionsmethoden nicht etwa wie die Passivität der Aktivität gegenüber, sondern erinnern höchstens an die mit dem Gegensatz der Apperzeption und der äußeren Willenshandlung identische Gegenüberstellung einer „inneren“ und „äußeren“ Willenstätigkeit (vgl. S. 99). Würde man also die vorwiegend motorische Äußerung dieser letzteren als „Aktion“ schlechthin bezeichnen, so könnte unsere Haupteinteilung der Methoden auch als eine solche in „Apperzeptions- und Aktionsmethoden“ erscheinen. Die Intensität und Aktualität der Leistung nach diesen beiden Richtungen, ihr Umfang und ihre Dauer, werden dagegen natürlich nur als beiderseits ganz gleichmäßig durchführbare Gesichtspunkte der Untereinteilung betrachtet werden können. Die isolierte Betrachtung einzelner Prozesse als solcher und die begriffliche Verbindung zahlreicher Beobachtungen zur Ableitung eines umfassenderen Bildes der psychologischen Zusammenhänge, die dann auch zu bestimmten Dispositionsbegriffen führt, endlich vor allem die Analyse zusammenhängender Leistungen, die als „Arbeit“ im engeren Sinne bezeichnet werden können, werden daher bei den verschiedenen Reproduktions- und Reaktionsmethoden in ganz analoger Weise wiederkehren.

b) Die Stellung der Vergleichsmethode innerhalb der Reproduktionsmethoden.

Innerhalb der Reproduktionsmethoden, mit denen sich dieser dritte Hauptabschnitt weiterhin allein beschäftigt, könnte nun zunächst die unmittelbare Beschreibung einzelner Reize oder Reizkomplexe (bei bekannten Einzelobjekten also deren Benennung, bzw. bei Buchstaben, Worten oder Zahlen deren „Ablesung“) den einfachsten Fall darzustellen scheinen. Ab-

1) Innerhalb der Gefühlsanalyse, u. z. besonders auch nach Reaktionsmethoden, bezeichnet man es ferner, wie schon § 4, b, S. 10 erwähnt wurde, kurz als „Reproduktionsmethode“ in einem engeren Sinne, wenn man einen Gemütszustand dadurch künstlich herbeizuführen sucht, daß sich die V.-P. in der Phantasie in eine besonders gefühlsbetonte Situation willkürlich hineinversetzt. Derartig spezielle Bedeutungen sind aber wohl meistens schon durch den Zusammenhang gegen Verwechslungen mit unserer Haupteinteilung gesichert.

gesehen von der rein qualitativen Analyse einfacher Sinneseindrücke oder deren räumlichen Beziehungen, die hier bei der Sinnesphysiologie behandelt sind, würde also dieses äußerlich einfachste Schema eines psychologischen Experimentes etwa bei den schon S. 11 u. 230 genannten Versuchen über die Neuauffassung oder über die Merkfähigkeit für einfache oder komplexe Reizqualitäten und für sinnvolle Zeichen vorliegen, die hierbei der direkten Sinneswahrnehmung ein oder mehrmals dargeboten werden und sofort darnach oder nach bestimmten Zwischenzeiten wiederzugeben sind. Der Einfachheit der äußeren Reizlage des Experimentes in allen diesen Versuchen entspricht aber hierbei natürlich keineswegs ein gleich einfacher psychischer Prozeß bis zur Aussage der V.-P. Die Auffassung des Sinnes der äußeren Erscheinungsform des bekannten Objektes oder Symbolkomplexes bildet vielmehr einen unter Umständen sogar ziemlich komplizierten Akt. Die Einfachheit der äußeren Versuchsumstände wird hier somit nur dadurch möglich, daß die hierbei entscheidenden Bedeutungsvorstellungen (wenigstens bei einem so einfachen Versuchsschema ohne experimentelle Vorbereitungen von bestimmter Art) nicht auch ihrerseits selbst unter experimentellen, kontrollierbaren Bedingungen entstanden, sondern wesentlich reproduktiver Natur (in jenem engeren Sinne von S. 232) sind. Sie bleiben aber daher eben auch vollständig dem zunächst mehr oder weniger zufälligen Entwicklungsgang der V.-P. überlassen, die aus ihrem alltäglichen Leben ein fertiges System psychischer Dispositionen für die Wiedererkennung jenes speziellen Auffassungsmateriales mitbringt, so daß ihm gegenüber die experimentellen Reize nur noch eine mehr auslösende Funktion zu erfüllen haben. Solche Versuche sind also hinsichtlich eines großen Teiles der bei ihnen entscheidenden Faktoren noch gar nicht experimentell, sondern eine einfache Beobachtung eines fertig Gegebenen. Wenn man dagegen durch eine entsprechende experimentelle Vorbereitung auch die Entstehung der hierbei aktualisierten Dispositionen selbst kontrollierbar beeinflussen wollte, so würde eben auch der äußere Anschein der größtmöglichen Einfachheit solcher Versuche sofort verschwunden sein.

Nun entwickelt sich aber das ganze System unserer Begriffe von den sachlichen Qualitäten der Gegenstände als solcher und ihren Bedeutungen aus fortwährenden Urteilen über die qualitativen (einschließlich der quantitativen) Beziehungen zwischen den einzelnen Sinneswahrnehmungen, die im Bewußtsein ihrer Gleichheit oder Verschiedenheit hinsichtlich bestimmter Merkmale bestehen. Vergleichsurteile können also als elementare Faktoren aller intellektuellen Leistungen betrachtet werden, wobei die entscheidenden Merkmale teilweise schon vorher geläufig sind, teilweise aber auch durch eine Übereinstimmung bei sonstiger Verschiedenheit begrifflich neu abstrahiert werden. So bestehen denn auch die einfachsten Grundversuche der Reproduktionsmethode offenbar darin, daß man mindestens zwei exakt abstufbare Reize oder Reizkomplexe unter möglichst genau kontrollierbaren Bedingungen zur Vergleichung in einer mit der V.-P. (als bekannt) verabredeten Richtung darbietet und dem zunächst einfach aus dem alltäglichen Leben zu übernehmenden Begriffssystem der V.-P. keine andere Leistung anheimgibt als die Fällung eines einzelnen Vergleichsurteiles nach den geläufigsten Kategorien „gleich" und „verschieden", bzw. „in dieser oder jener (geläufigen) Richtung verschieden".

33. Allgemeine methodische Gesichtspunkte bei der Untersuchung der subjektiven Äquivalente bzw. des Totalfehlers.

a) Die Zugehörigkeit des Totalfehlers zu der Relation im ganzen.

Durch die Vergleichsmethode läßt sich nun quantitativ bestimmen, wie weit die Sinneswahrnehmungen und vergleichbaren Erinnerungen die Reize „richtig" repräsentieren, bezw. in welcher Weise sie unter bestimmten psychophysischen Bedingungen von dem Ideal einer völlig korrekten Abbildung abweichen. Da die Wahrnehmungen und reproduktiven Vorstellungen nicht mit den Dingen identisch, sondern nur auf Grund sehr komplizierter Schaltprozesse von ihnen abhängig sind, so wird natürlich die Abbildung sogar im allgemeinen mehr oder weniger abgelenkt sein, und die tatsächliche Kongruenz bildet nur einen relativ seltenen Grenzfall. Jede Beobachtung schließt also gewisse „Fehler" in sich, die es zu ermitteln gilt und die gelegentlich auch einmal verschwindend klein sein können. Solche Fehler treten rein empirisch schon in einzelnen Urteilen in der Weise zutage, daß z. B. zwei objektiv gleiche Reize verschieden erscheinen, oder zwei subjektiv gleiche objektiv verschieden sind. So weit die (übermerklichen) Unterschiede der Bewußtseinsinhalte selbst quantitativ abzuschätzen sind (vgl. § 10), läßt sich außerdem bisweilen auch unmittelbar erkennen, daß die subjektiven Relationen zwischen zwei oder mehreren Empfindungsqualitäten von den objektiven Reizverhältnissen abweichen. In solchen Einzelbeobachtungen sind aber eben die Fehler zunächst entweder nur subjektiv zu schätzen, wie auch bei jenem ersten Falle der objektiven Gleichheit, oder es werden höchstens, wie im zweiten Falle, mögliche Einzelwerte derselben bezeichnet, von denen aber die augenblicklich tatsächlich vorhandenen mehr oder weniger abweichen können. Ein exakteres quantitatives Maß derselben kann daher erst dadurch erlangt werden, daß man den einen von beiden Reizen, der speziell als „Vergleichsreiz" V bezeichnet wird, hinsichtlich des zu beurteilenden Merkmales abstuft und den Bereich seiner subjektiven Gleichheit und Verschiedenheit mit dem anderen, hierbei konstant bleibenden Reiz, dem sog. Normal- oder Hauptreiz N (oder H) im einzelnen genauer feststellt.

Bei einer solchen ausschließlichen Vergleichung zweier Reize kann aber natürlich überhaupt niemals die Auffassung des einen von beiden für schlechthin oder auch nur vorwiegend „falsch" erklärt werden, wenn z. B. die subjektive Gleichheit nicht mit der objektiven zusammentrifft. Da vielmehr die einzelnen Bewußtseinsinhalte als solche nicht selbst vergleichbare Maßstäbe der von ihnen repräsentierten Reize, sondern ihnen nur gesetzmäßig zugeordnet sind, so können höchstens ihre allgemeinsten wechselseitigen Beziehungen, die sie mit allen quantitativ abstufbaren Denkgegenständen überhaupt, also insbesondere auch mit den Reizen gemein haben, mit solchen analogen Beziehungen der Reize unter sich verglichen werden. Solche allgemeinste Beziehungen sind dabei, wie nunmehr schon öfters betont wurde, nicht nur die Gleichheit oder Verschiedenheit überhaupt, sondern auch die speziellen Grade der Verschiedenheit zweier oder mehrerer quantitativ abstufbarer Wahrnehmungsinhalte. So kann z. B. bei einer Reihe von Extensionen oder Intensitäten die Proportion, in der die entsprechenden Bewußtseinsinhalte der Wahrnehmungen als solcher zu einander stehen, unmittelbar mit derjenigen der äußeren Reize verglichen werden. Aber hieraus kann sich noch keine eindeutige logische Wertung der einen oder anderen Reihe im ganzen als „richtig" oder „falsch" ergeben, da nicht nur eine einzige Reihe möglich ist, deren innere Verhältnisse mit den objektiven widerspruchslos zusammenstimmen. Es sind vielmehr die verschiedensten Systeme der subjektiven Auffassungen jedes einzelnen Reihengliedes A, B, C; A′, B′, C′ usw. denkbar, die sämtlich den ihnen „zugrunde liegenden" Reizen „richtig" proportional sein können, trotzdem die einzelnen A, A′, A″ usw., die dem gleichen Reizquantum zugeordnet sind, unter sich beliebig differieren. Solange man sich auf zwei einzelne Vergleichsreize beschränkt, könnten also auch jene sog. „Fehler", d. h. die objektiven Reizdifferenzen bei subjektiver Gleichheit, zunächst immer widerspruchslos so gedeutet werden, daß eine Auffassung A aus dem einen Abbildungssystem auf diejenige A′ aus einem anderen System bezogen wird.

In diesem Falle kann also der „Fehler" zunächst immer nur dem Ganzen der Beziehung zwischen diesen Sinneswahrnehmungen zugeschrieben werden, die den beiden unter sich verschiedenen Auffassungsweisen des nämlichen Quantums irgendeiner abstufbaren Reizqualität entstammen, und diese Beziehung muß natürlich notwendig immer absolut „falsch" werden, falls ihre Fundamente aus verschiedenen, wenn auch in sich widerspruchslosen Abbildungssystemen entnommen sind. Dieser Fehler, der hiermit noch in in keiner Weise analysiert, d. h. weder in Komponenten zerlegt noch unter die beiden Vergleichsinhalte aufgeteilt wird, soll im folgenden der „Totalfehler" [1]) einer Vergleichung heißen.

b) Die Unabhängigkeit des Totalfehlers von der Vertauschung der Lage des Haupt- und Vergleichsreizes.

Der Totalfehler einer Vergleichsrelation kann nun offenbar von jedem der beiden subjektiv äquivalenten Inhalte wie von einer rein relativen Norm aus betrachtet werden, wobei er dann beide Male mit verschiedenem Vorzeichen anzusetzen ist; d. h. der Totalfehler erscheint jederzeit genau umkehrbar, sofern man ihn zunächst wirklich nur auf die beiden subjektiven Äquivalente bezogen denkt, an denen er durch eine Abstufung des einen der beiden Vergleichsreize festgestellt werden soll. Es seien a und b zwei solche Äquivalente, z. B. zwei bei fixierendem Blick subjektiv gleiche Raumstrecken, von denen etwa die eine auf der Stelle des deutlichsten

1) Dieser rein induktive Begriff ist mit dem des „Gesamtfehlers" nach G. E. Müller (Gesichtspunkte usw. S. 65) nicht völlig identisch, da er zunächst ausdrücklich ohne jede Beziehung zu bestimmten Komponenten gebraucht wird, wobei Müller seinerseits einfach vom „Fehler" spricht. Den Terminus des „Gesamtfehlers" verwendet er dagegen a. a. O. speziell für die vier Kombinationen des Raum- und Zeitfehlers nach Fechner in einer bereits mehr deduktiven Betrachtung.

Sehens und die andere auf der Peripherie der Netzhaut abgebildet ist. Außerdem mögen die Reihen A und B

$$\begin{array}{ll} A: & a_{-m},\ a_{-(m-1)}, \ldots a_{-1},\ a\ \ a_{+1} \ldots a_{+n} \\ B: & b_{-m}, \ldots\ldots\ldots b_{-1},\ b\ \ b_{+1} \ldots b_{+n} \end{array}$$

irgendwelche in der nämlichen Richtung fortschreitende Abstufungen der direkt und der indirekt gesehenen Strecke darstellen, deren sämtliche Kombinationsmöglichkeiten A, B in beliebiger konkreter Reihenfolge realisierbar sein sollen, gleichgültig, wieviel dieser $(m+n+1)^2$ Paare A, B in der Praxis wirklich zur Beurteilung ihrer Relation dargeboten werden müssen, um die Äquivalente a, b herauszufinden. Mag sich nun der Experimentator in der nachträglichen Betrachtung den Reiz unter den als „Lage" bezeichneten Wahrnehmungsbedingungen des a oder unter denen in der „Lage" des b als variablen „Vergleichsreiz" V denken, je nachdem er zu b oder zu a (als „Normalreiz" N) die äquivalente Stufe herausfinden will, so gilt doch jene Umkehrbarkeit strikte nur dann, wenn im **Bewußtsein der V.-P. bei den Versuchen selbst dieser Unterschied der Betrachtungsweise des Experimentators nicht als eine besondere Charakterisierung der Lage A oder B zur Geltung kommt**, die für die mögliche Beurteilung der $(m+n+1)^2$ Kombinationsmöglichkeiten A, B von Bedeutung ist. In der Praxis wird sich dies natürlich stets am einfachsten durch völlige Unwissentlichkeit hinsichtlich der für V und N auszuwählenden Lage erreichen lassen. Die als sogenannte „**Umkehrung der Lage**" (scilicet des V bzw. des N) bezeichnete Änderung der Betrachtungsweise, die in der Praxis bisher allerdings meistens mit der ausschließlichen Ableitung der Kombinationen $\underset{x=-m \text{ bis } +n}{a_x N_b}$ und $\underset{x=-m \text{ bis } +n}{N_a b_x}$ verbunden war[1]), ist also hier als eine rein theoretische Auswahl aus einer einheitlichen Mannigfaltigkeit gedacht, die von diesem Gegensatz sachlich völlig unabhängig sein soll. Unter dieser Voraussetzung müssen aber dann die zu sämtlichen Kombinationsmöglichkeiten gehörigen Relationsurteile und somit auch insbesondere die zur Kombination der Äquivalente a, b zugehörige subjektive Gleichheit in der Tat unverändert wieder aufgefunden werden können, wenn man sie bei wirklich konstanten Versuchsbedingungen zweimal nacheinander ableitet, zuerst, um aus der Reihe $a_x b$ das a als Äquivalent von b herauszufinden, und das zweite Mal, um aus der Reihe $a\,b_x$ umgekehrt das b dem a zuzuordnen[2]). Der „Fehler" erscheint also, relativ betrachtet, im ersten Falle als

$$f = +(a-b) \qquad [295]$$

und im zweiten als

$$+(b-a) = -(a-b) = -f. \qquad [295a]$$

1) Da man bei der Umkehrung der Lage nicht gerade von dem subjektiven Äquivalent als neuem Normalreiz ausging, war also im allgemeinen hierbei

$$N_b \gtreqless N_a.$$

2) Ob in den beiden „Umkehrungen" der Lage von N und V zur Erreichung dieser Konstanz der Auffassungsbedingungen für A und B sämtliche $(m+n+1)^2$ Einzelkombinationen zur Beurteilung darzubieten sind, falls beide Male $(m+n+1)$ Reizstufen zur Ableitung in Betracht kommen, ist eine Spezialfrage, die in diesen allgemeinen Vorüberlegungen noch nicht zu beantworten ist.

c) Die Unterscheidung der Umkehrbarkeit des Äquivalentes zum Hauptreiz von spezielleren Annahmen auf diesem Gebiete.

Die bisherige, noch ganz allgemein gehaltene Vorüberlegung[1]) über die Unabhängigkeit der Äquivalenzbeziehung von der Lage des N und V, bei der wir noch vollständig von der Tatsache der Unterschiedsschwelle und der zufälligen Schwankungen von einem Versuch zum anderen abstrahieren, pflegt in den Darstellungen der psychophysischen Fehlertheorie völlig zu fehlen, vielleicht weil sie als eine bloße Tautologie erscheinen könnte. G. E. Müller[2]) nimmt z. B. sogleich wenigstens die Ausdehnung des Totalfehlers auf die Nachbarstufen der Äquivalente a und b als eine mindestens annähernd gültige Tatsache hinzu, was wir hier einstweilen nur dem Sinne nach wiedergeben, weil die spezielle Formulierung Müllers a. a. O. bereits die relativen Häufigkeiten der Urteile bei allen diesen zu a, b benachbarten Stufen in Betracht zieht, die wegen der Schwellen und ihrer Schwankungen bei der empirischen Bestimmung des Äquivalents zu berücksichtigen sein werden. Doch kommen die Schwankungen, falls wirklich die unkontrollierbaren Mannigfaltigkeiten konstant bleiben, für diese Fragen ebenfalls nur dadurch zur Geltung, daß sie einen noch größeren Stufenbereich einzubeziehen nötigen. Müller nimmt also an, daß beim tatsächlichen Wegfall des Einflusses einer Kenntnis der Lage des N bezw. V nach der Umkehrung der Lage und Beibehaltung der nämlichen Stufe des Normalreizes N die relativen Häuf. g, u und k bei denjenigen Reizstufen des neuen V unverändert wieder aufgefunden werden, die von den alten um eine konstante kleine Differenz 2 f verschieden sind, wie es auch Fechner allgemein voraussetzte. Das bedeutet aber offenbar, daß auch alle Stufen in der Lage A oder B, die sich von den Äquivalenten a und b um gleiche und dabei relativ nur kleine Schritte $\pm$ d entfernen, unter sich äquivalent bleiben, wobei also auch

$$(a \pm d) - (b \pm d) = f.$$

Auch für A. Lehmann[3]) kommt es sogleich auf die „Elimination" des umkehrbaren Gesamtfehlers an, die bei der Gültigkeit dieser soeben genannten neuen Voraussetzung möglich wäre und mit der hier noch zurückgestellten Erklärung der Fehler durch eine Analyse zusammenhängt. Lehmann denkt sich hierzu außer dem Falle a, b die eben genannte allgemeine Müllersche Voraussetzung nur noch für das B-Äquivalent zu dem Normalreiz b in der Lage des A realisiert, der somit wie bei Müller wieder objektiv konstant bleibt. In dieser zweiten Lage soll also dann der von

1) Hierbei sage ich ausdrücklich nicht „rein logische" Vorüberlegung, da natürlich in der Psychologie, wie in jeder Wissenschaft, auch die speziellsten Überlegungen an der Hand des konkreten Versuchsmaterials „logisch" sein müssen. Es ist für einen exakten Gedankengang in jenen Spezialuntersuchungen nicht vorteilhaft, wenn man den Begriff des „Logischen" auf die allgemeineren Überlegungen einschränken will, die ihrerseits, falls sie wissenschaftlich wertvoll bleiben sollen, ja ebenfalls aus Eigenschaften des konkreten Versuchsmaterials abstrahiert sein müssen und daher mit diesem im engsten gegenständlichen Zusammenhange stehen.

2) Gesichtspunkte usw. S. 66.

3) Lehrbuch der psychologischen Methodik, S. 9.

a um f verschiedene Reiz $a-f=b$ mit dem auch von b um f, von a also um $2f$ entfernten Reiz $a-2f$ äquivalent befunden werden. Lehmann betrachtet nun die hieraus rein analytisch folgende Notwendigkeit, daß die Gleichung

$$\frac{a+(a-2f)}{2}=b$$

wieder auf den in beiden Lagen gleichen Normalreiz $b=N=a-f$ zurückführt, als „Elimination" des Fehlers durch die Bildung des arithmetischen Mittels aus den äquivalenten Vergleichsreizen V_a und V_b in den beiden entgegengesetzten Versuchslagen, die nach [295] und [295 a] einzeln für sich mit dem Fehler $+f$ und $-f$ behaftet wären. Doch erachtet Lehmann die genannte Voraussetzung nur bei dem sog. „Raumfehler" (Fechner) erfüllt, der etwa in unserem obigen Beispiel allein vorhanden wäre, wenn die direkt und die indirekt gesehene Strecke nur in verschiedener „Raumlage", aber gleichzeitig zum Vergleich dargeboten würden. Die Herkunft des „Totalfehlers" ist jedoch eine andere, wenn zu der Verschiedenheit der Raumlage noch eine solche der „Zeitlage" hinzutritt, zwei Fehlerquellen, mit denen Fechner bei der passiven Beurteilung fertig dargebotener Reizstufen die Elementarkonstruktion des Totalfehlers für erschöpft ansah. Sie vereinigen sich, wenn z. B. die foveal gesehene Strecke zuerst und die peripher abgebildete darnach allein für sich dargeboten wird, also ein Sukzessivvergleich vorliegt. Zunächst kann aber natürlich auch nur ein reiner „Zeitfehler" ohne gleichzeitigen „Raumfehler" zustande kommen, wenn die beiden Vergleichsstrecken A und B sukzessiv in der nämlichen Lage auftreten. Allerdings wird auch bei der simultanen Darbietung und der Vorschrift zu simultaner Auffassung zweier Strecken die psychologische Stellung der beiden Bewußtseinsinhalte bei der geistigen Verarbeitung bis zur Reproduktion des Urteils nicht immer gleichzeitig die nämliche sein. Aber diese „Zeitlagen" der für das Resultat entscheidenden Zuständlichkeiten jedes der beiden Bewußtseinsfundamente der Relation sind hierbei unter Umständen nicht weiter kontrollierbar und können dann nicht wie sog. „systematische" Fehler in Betracht gezogen werden. Auch bringt die Simultanwahrnehmung keineswegs etwa immer einen geringeren Fehler mit sich, da die Sukzession ihrerseits doch auch wiederum manche gegenseitige Störungen bei gleichzeitigen direkten Sinneswahrnehmungen beseitigt. Die von Fechner hierbei sogleich in Erwägung gezogene Frage nach der Kombination der einzelnen Komponenten kommt aber hier bei dem Begriff des Totalfehlers und seiner Umkehrbarkeit noch nicht in Betracht, bei der sowohl die Lage A als auch die Lage B immer eine ganz bestimmte Verbindung aller gleichzeitig wirksamen Fehlerquellen bedeutet. An jener „Umkehrbarkeit" der Lage des N und V ohne Verschiebung des absoluten Fehlerbetrages für das äquivalente Reizpaar a, b kann also auch durch die Einführung des „Zeitfehlers" gar nichts geändert werden.

Müller faßt jedoch auch seinen Satz so allgemein, da er bei kleinem d die Verschiedenheit der Nachwirkung vernachlässigen zu können glaubt. Doch erkennt auch er bereits die besonderen Schwierigkeiten der genannten Verallgemeinerung für die Umkehrung der Zeitlage wohl an, z. B. bezüglich der Ermüdungseinflüsse. Für unseren Satz kommt aber eben auch bezüglich des Wechsels der Zeitlage vorläufig nur die äquivalente Stufe selbst in Betracht, die wir auch in der zweiten Lage als neuen Normalreiz gewählt denken. Diese aber muß erhalten bleiben, wenn sich die ganze Mannigfaltigkeit der Reizpaare beim zweiten Male auch ungefähr in der nämlichen Reihenfolge abwickelt, so daß nicht nur die von Müller und Lehmann hier vor allem berücksichtigten Nachwirkungen innerhalb der einzelnen Paare, sondern sogar diejenigen innerhalb der ganzen Untersuchung überhaupt unverändert bleiben. Dadurch, daß man seit Fechner bei der Umkehrung den Normalreiz objektiv konstant läßt, wird natürlich eine noch größere Spannweite der von uns hier zunächst ausgeschalteten Erweiterung erforderlich. Bei großen Fehlern f, bei denen der Normalreiz aus dem Unsicherheitsbereich überhaupt vollständig herausfällt, wird aber freilich auch Müller genötigt, zu einer anderen, dem Äquivalenzwerte näher liegenden Stufe bezw. zu diesem selbst als neuem Normalreiz zu greifen, falls die Umkehrung überhaupt noch die Unsicherheitsregion in sich enthalten soll. Auch hierbei kommt es Müller aber eben nicht etwa auf die begriffliche Sonderstellung des Äquivalenzwertes als solchen an, da ja ein ihm nur näher als N liegender Wert die nämlichen Dienste täte, sondern er operiert hier sinngemäß wiederum mit der ganzen Erweiterung auf alle ihm benachbarten Stufen.

Hat nun unser erster allgemeinster Satz, wonach man bei einer exakten Umkehrung der „Lage" des V das Äquivalent des früheren N der nämlichen Reizstufe wieder äquivalent finden müsse, mit einer Variation der Fehlerquellen und der Herstellung neuer Totalfehler gar nichts zu tun, so hat dagegen Fechner diesen Effekt der vollständigen Umkehrung der Lage des V sogleich mit demjenigen der einseitigen Umkehrung der Raumlage oder der Zeitlage in eine viel zu einfache Gesetzmäßigkeit zusammenfassen wollen, indem er eine Raumfehler- und eine Zeitfehlerkomponente $\pm q$ und $\pm p$, deren Vorzeichen der einseitig variierbaren Lage entsprechen, rein additiv kombinierbar dachte. Hieraus ergaben sich also vier Kombinationsmöglichkeiten $+q+p$, $+q-p$, $-q+p$ und $-q-p$.

Wie aber bereits G. E. Müller a. a. O. deutlich gezeigt hat, bilden zunächst je zwei von diesen vier Fällen einfach eine vollständige Umkehrung in dem soeben von uns gesondert behandelten Sinne. Hier ist deshalb in der Tat der Totalfehler, der hierbei als ein aus p und q zusammengesetzter „Gesamtfehler" erscheint, in beiden Lagen entgegengesetzt gleich. Setzt man also z. B. bei jenen Vergleichungen einer direkt und einer indirekt gesehenen Strecke zunächst für

$$\text{V direkt, zuerst: } f = +q + p,$$

so ist nach [295a] für

$$\text{V indirekt, darnach: } -f = -(q + p).$$

Eine analoge Umkehrung gilt aber dann auch für V indirekt, zuerst und V direkt, darnach. Indessen involviert die hierbei konstante Darbietung der indirekt gesehenen Strecke an erster Stelle (als Wahrnehmungsbedingung A) natürlich auch einen ganz anderen Vergleichsprozeß, bei dem auch das Resultat bezüglich der Äquivalenz im allgemeinen anders ausfallen wird, wie man z. B. eine direkt gesehene Strecke auch noch in einem späteren Zeitpunkte, als er hier beim Vergleich mit einer sogleich daraufffolgenden Strecke in Frage kommt, anders im Gedächtnis behält wie eine indirekt gesehene. Dem veränderten Prozesse entspricht also hier auch ein anderer Totalfehler $\pm f'$, der dann auch bei jener hypothetischen Zurückführung mit einer Raum- und Zeitkomponente anzusetzen ist, die nicht nur hinsichtlich des absoluten Wertes sondern auch hinsichtlich des Vorzeichens von den Komponenten q und p der beiden anderen Hauptfälle unabhängig ist. Nur so viel läßt sich nach [295a] unter den früher genannten Voraussetzungen mit Sicherheit behaupten, daß, wenn für

$$V \text{ indirekt, zuerst: } f' = + q' + p'$$

gesetzt worden ist, auch für

$$V \text{ direkt, darnach: } - f' = - q' - p'$$

genau gelten muß. Mit einer gewissen Annäherung aber gilt dann auch hier wiederum die S. 238 genannte Müllersche Erweiterung der neu gefundenen Äquivalenzbeziehung zwischen a und $b' = (a - f')$, wonach auch $(a \pm d)$, $(b' \pm d)$ für relativ kleine d äquivalent bleiben.

Der Vorteil unserer Voranstellung jener strengen Umkehrbarkeit des Totalfehlers, deren Selbstverständlichkeit immerhin von Voraussetzungen abhängig ist, die bisher noch niemals genau erfüllt waren, besteht also zunächst einmal darin, daß sie das Falsche an der eben genannten Fechnerschen Auffassung des gegenseitigen Verhältnisses der sog. „vier Hauptfälle“ noch klarer überschauen läßt. Außerdem wird aber vor allem speziell dadurch, daß wir diese Umkehrbarkeit der Äquivalente zunächst auch von der Tatsache der Unterschiedsschwelle und der zufälligen Schwankungen abtrennen, einer scharfen Problemstellung bezüglich des Fehlermaßes nach Einbeziehung dieser beiden Komplikationen vorgearbeitet. Denn wenn es sich später nur noch darum handeln kann, einen „Hauptwert“ des Äquivalents im Sinne der Kollektivmaßlehre aus dem Schwellenbereiche herauszuheben, so wird uns die Forderung, daß eine vollständige Umkehrung die nämlichen Äquivalente zu Tage fördern muß, eine exakte empirsche Kontrolle der apriorischen Voraussetzungen für die Berechnung des Äquivalenzwertes aus den Verteilungskurven der Urteile an die Hand geben können, die von allen weiteren Hypothesen unabhängig ist. Auch können wir drittens durch die Abtrennung der höchstens annähernd gültigen Müllerschen Erweiterung jenes „Äquivalenzsatzes“ die Forderung, daß unser Postulat trotz Schwellen und Schwankungen wenigstens in geeigneten Hauptwerten erfüllt sei, von der Erwartung unabhängig machen, daß wir auch die speziellen Verteilungsfunktionen $F_g(x)$ usw. der Urteile in Abhängigkeit von den Stufen A bzw. B im einzelnen bei der Umkehrung genau wieder so auffinden.

d) Die Prinzipien der experimentellen Analyse des Totalfehlers.

Wenn aber nun hiermit auch die Analyse des Totalfehlers noch weiter zurückgestellt ist als seine Berechnung aus dem Unsicherheitsbereiche, so wird doch diese Analyse dann auch um so exakter erledigt werden können. Nur darf man sich natürlich zur Lösung dieser neuen Fragen nicht auf die Aufsuchung eines bestimmten einzelnen Äquivalenzpaares, bezw. auf den unmittelbar hinzugehörigen Abstufungsbereich (a_{-m} bis a_{+n}) beschränken, ja man darf sich auch nicht mit einem einzigen Gegensatze der Lage der über den ganzen Quantitätsbereich verteilten Hauptstufen begnügen, wie er oben mit A und B gekennzeichnet sein sollte. Vielmehr sind die für A und B charakteristischen Merkmale, wie auch A. Lehmann a. a. O. hervorhebt, nach möglichst vielen Richtungen zu variiren, (bei jenem Unterschiede der Streckenschätzung wäre also z. B. die Lage auf der Netzhaut u. ä. mehrfach abzuändern), wobei man natürlich einfache und mehrfache Variationen empirisch sorgfältig zu trennen hat, wenn man die tatsächliche Abhängigkeit des komplizierter bedingten Totalfehlers von den Totalfehlern bei einfacheren Unterschieden zwischen A und B herausfinden und sich nicht in falschen Verallgemeinerungen ergehen will. Der Fortschritt vom Einfacheren zum Komplizierteren wird aber natürlich auch hier die meiste Aussicht auf eine deduktive Elementarkonstruktion des Totalfehlers aus den beiderseitigen Wahrnehmungsinhalten eröffnen. Freilich darf man niemals auf eine einfache Superposition der elementaren inhaltlichen Einflüsse rechnen. Nach dem allgemeinsten Prinzipe der sog. „Resultanten" birgt vielmehr die spezielle Form eines Komplexes wieder besondere Bedingungen für den Betrag eines Fehlers in sich. Doch wird natürlich auch dieser Einfluß in dem Maße einer quantitativen Analyse zugänglich, als man auch die strukturellen Merkmale der Komplexe einer systematischen Variation in paarweise verglichenen Objekten zu unterwerfen vermag.

Die speziellste Erklärung des Totalfehlers, nämlich die bei der Beschränkung auf ein einziges Äquivalenzpaar nach S. 236 stets mögliche Annahme, daß beide Vergleichsobjekte nur in verschiedene, in sich widerspruchslose Abbildungssysteme hineingehören, wird jedoch von hier aus nur noch als ein kaum jemals erreichter Grenzfall erscheinen. Am nächsten kommen ihm vielleicht noch die Empfindungsunterschiede, die von einer Verschiedenheit der Erregbarkeit der mit einander verglichenen Stellen des nämlichen Sinnesorganes herrühren, wie sie z. B. durch die Einwirkung verschiedener Lichtintensitäten auf benachbarte Sehfeldstellen entsteht. Denn der Begriff der Erregbarkeit entspricht in der Tat einem Faktor, mit dem man sämtliche Reizintensitäten multiplizieren muß, um ihre physiologische Wirkung bei dem jeweiligen Zustande des betreffenden Organ-Elementes vergleichbar auszudrücken. Zu einer idealen Anwendbarkeit dieses einfachen Schemas müßte aber eben für einen gegebenen Unterschied der Erregbarkeiten jene ideale Proportionalität[1]) zu einer ganzen Reihe von Äquivalenzen führen, indem sich in den Lagen A und B

$$\begin{array}{llll} a & 2a & 3a & \ldots\ldots na \\ b & 2b & 3b \ldots & nb \end{array}$$

durch eine n-malige vollständige Untersuchung der oben genannten Art als paarweise äquivalent erweisen müßten. Wie man sieht, widerspräche ein solcher Tatbestand, der auf optischem Gebiete mit einer gewissen Annäherung in den sog. „negativen Nachbildern" zur Erscheinung kommt, genau genommen, jener Müllerschen Erweiterung der Umkehrbarkeit des Totalfehlers, selbst wenn diese Ursache bei der Umkehrung genau in der nämlichen Weise wirksam wäre, da hierbei nicht absolut, sondern relativ gleich weit von a, b entfernte Reizstufen äquivalent wären. Dagegen entspräche z. B. das sog. „positive Nachbild" nach Helmholtz' Auffassung dem Müllerschen Satze sogar genau, da eben diese Nachwirkung hiernach, von sonstigen Fehlerquellen abgesehen, in verschiedenen „reagierenden" Intensitätsstufen die Äquivalenzreihe

$$\begin{array}{lll} a & 2a \ldots\ldots & na \\ a \pm d & 2a \pm d \ldots\ldots & na \pm d \end{array}$$

herbeiführen müßte. In Wirklichkeit sind aber alle Fehler viel komplizierter zu erklären, da meistens in allen Zonen des psychophysischen Zusammenhanges, wenn dieser auch in der Peripherie mit einer zum Reiz proportionalen Aufnahme einsetzen sollte, allerlei Modifikationen hinzutreten, welche die endgültigen Fundamente der bewußten Relation von dem Ideal einer proportionalen Abbildung schließlich ziemlich regellos abweichen lassen, wobei infolge des Verlaufes der aktuellen Erregung vor allem auch die absoluten Reizzeiten als sehr wesentlich in Betracht kommen. Insbesondere werden die einzelnen Zonen auch je nach der Vergleichsaufgabe und der Einstellung der V.-P. zu ihrer Lösung in ganz verschiedenem Maße beteiligt sein. Eine spezielle Methodik der Fehleranalyse müßte daher sogleich fast sämtliche Probleme der experimentellen Psychologie überhaupt unter diesen Gesichtspunkt stellen, so daß hierfür an dieser Stelle nur auf die zusammenhängenden Darstellungen der psychologischen Tatsachen verwiesen werden kann. Dagegen muß zunächst noch ausführlicher erörtert werden, wie für eine ganz bestimmte Reizkombination N, V_x der Tatbestand des Fehlers so exakt als möglich festgestellt werden kann, da ja nur dadurch jene Aufteilungsversuche mit hinreichend festen Werten zu operieren vermögen, eine Bestimmung, die nur im engsten Zusammenhange mit derjenigen der Schwellen und ihrer Streuungsmaße geschehen kann.

1) Mit der Gültigkeit der oben genannten Äquivalenzreihe ist aber natürlich noch nichts darüber entschieden, ob nun die paarweise äquivalenten Empfindungen in den in verschiedenen Stufen als Bewußtseinsquantitäten im Sinne des § 10 zu den äußeren Reizen proportional sind, was nur durch die besondere Vergleichung der „übermerklichen" Unterschiede der Empfindungen zu a/2a, 2a/3a, denen dann natürlich diejenigen zu b/2b usw. entsprechen müßten, empirisch zu prüfen wäre. Vgl. unten § 41.

34. Die konkrete Bestimmung eines Hauptwertes des Äquivalentes bzw. des Fehlers aus den beobachteten Vergleichsurteilen.

a) Die korrekte Anlage sogenannter vollständiger Reihen (Vollreihen).

Die quantitative Bestimmung eines „Totalfehlers" wäre nun freilich einfacher, als es tatsächlich der Fall ist, wenn man bereits mit einigen wenigen Abstufungen V_x eine eindeutige subjektive Gleichung zwischen dem Normalreiz und einer bestimmten Stufe des Vergleichsreizes gewinnen könnte. Indessen haben wir eben einerseits mit der teilweise bereits erörterten Tatsache der Schwelle zu rechnen, die selbst bei völlig konstanten Beobachtungsbedingungen stets einen ganzen Bereich möglicher Werte des V dem N subjektiv gleich erscheinen läßt, bis der Unterschied in einer von beiden Richtungen der Abstufung das Bedingungsextrem für ein Verschiedenheitsurteil erreicht. Andererseits treten aber ja auch noch die zufälligen Schwankungen aller beteiligten Faktoren hinzu, die uns nötigen, statt einzelner Schwellenwerte zunächst wiederum ganze „Grenzkurven" zu registrieren. Hiermit münden also unsere Betrachtungen wieder in das Hauptschema des empirischen Befundes der Schwellen aus dem vorigen Kapitel ein, das wir jetzt nur noch psychologisch etwas weiter zu konkretisieren haben. Denn auch dort haben wir die allgemeinen Gesichtspunkte bereits überall an der Beurteilung der Stufen x eines variablen Reizes V im Vergleich zu einem konstanten Normalreiz N erläutert (S. 164 ff.). Bezeichnen wir im folgenden den Grad der Eigenschaft, hinsichtlich deren man die beiden Reize vergleichen läßt, selbst mit V und N, so kann man die Ausdrücke „N bzw. V kleiner" und „größer" nicht nur bei der Beurteilung von Quantitäten, sondern auch ganz allgemein bei Qualitäten anwenden. Bei der Messung von Fehlern und Schwellen haben wir uns natürlich allein an den gegenständlichen Sinn der fertigen Urteile zu halten, der davon unberührt bleibt, ob die V.-P. z. B. V als „größer" oder N als „kleiner" erklärt, wenn auch ihre Entstehung von der Gedankenrichtung der V.-P. bei der primären Auffassung der Relation und bei der Reproduktion beeinflußt worden sein mag. Wir haben also bei der Ableitung der Verteilungsfunktionen $F_g(x)$ usw., welche die nächste Grundlage der Berechnungen bilden, von der sog. „Urteilsrichtung" zunächst ebenso zu abstrahieren, wie etwa von der Reihenfolge der Einzelversuche uud ähnlichen speziellen methodischen Gesichtspunkten bei der konkreten Ableitung des Rohmateriales. Nur muß natürlich innerhalb sämtlicher Vollreihen, die auf irgend einen Einfluß hin, also z. B. auch seitens der primären Urteilsrichtung, mit einander verglichen werden sollen, eine und die nämliche Urteilsrichtung der Darstellung eindeutig festgehalten bleiben. Dabei erscheint es wohl als das Natürlichste, das Urteil überall auf den Vergleichsreiz V zu beziehen[1]), der dem Leser stets als das variable Moment vorschwebt. Auch stimmt diese Auffassung mit der allgemein anerkannten Bedeutung des „oben" und „unten" bei den Grenzreizen (Schwellen) r_o und r_u (vgl. S. 165 f.) ohne weiteres überein. Wie aber schon bei der Ableitung

1) G. E. Müller bezieht dagegen das Urteil in der Darstellung der rel. H. g usw. stets auf den Haupt- oder Normalreiz N, so daß g und k bei ihm gerade den entgegengesetzten Sinn haben als hier.

der Konstanz des Fehlermaßes bei einer vollständigen Umkehrung der „Lage“ des V klar geworden sein dürfte, bedeuten für uns V und N nicht Reize, die während der Versuche objektiv oder gar subjektiv als der variable oder konstante schlechthin ausgezeichnet gewesen zu sein brauchten, sondern die V_x sind nur eben eine Stufenreihe von Reizen, die durch die Übereinstimmung aller Merkmale außer der Abszissengröße x, also z. B. Qualität, Raumlage, zeitliches Verhältnis zu dem hiermit verglichenen Reiz usw., und durch die tatsächliche Angleichung an einen und den nämlichen Reiz begrifflich zusammengehören; diesen letzteren, für diesen Zusammenschluß entscheidenden Reiz aber bezeichnen wir mit N, gleichgültig, ob er während der Reihe selbst konstant blieb, oder durch die gleichzeitige Ableitung des Rohmaterials für verschiedene Vollreihen zu N_1, N_2, ... N_r ebenfalls variiert wurde. Schon durch die bloße Einschiebung einzelner Elemente aus anderen Reihen kann die als N ausersehene, d. h. in einer ganz bestimmten Stufe an ein V-System angeglichene Qualität, auch in ebensoviel verschiedenen Stufen wie diese V vorgebracht werden. Es hängt ganz von dem speziellen Zwecke der Untersuchung ab, ob der Experimentator die Versuche zu einer einzelnen Vollreihe für sich allein absolvieren darf, wobei dann wenigstens die ungefähre Stufenlage des N der V.-P. kaum verborgen bleiben kann, oder ob er zur ausdrücklichen Vermeidung dieses Nebeneinflusses einer solchen Halbwissentlichkeit, der gegenüber die vollständige Wissentlichkeit unter Umständen sogar die einfachere, konstantere Versuchsbedingung bilden kann, eine systematische Untermischung der Vollreihe mit anderen Systemen für notwendig erachten muß. Die Wiederauffindung der nämlichen Äquivalenzwerte bei der Umkehrung der Lage, die nach dem Bisherigen als Kontrolle der Fehlermessung entscheidend sein wird, dürfte diese Unwissentlichkeit unbedingt erfordern, während sie bei manchen Fragen bezüglich der Unterschiedsschwelle weniger erforderlich sein mag.

Auch eine andere Fehlerquelle kann durch eine geeignete Kombination von Vollreihen mit entsprechender Unwissentlichkeit so vollständig als möglich beseitigt werden, nämlich die Schätzung der Stufen des V aneinander, welche die Schwelle zu fein erscheinen lassen kann. Sobald immer nur ein N und eine Serie von Vs vorkommt, kann man in allen Gebieten, in denen ein sog. absolutes Gedächtnis bereits besteht oder durch Übung sich neu ausbilden läßt, die extremeren Stufen des V einfach voneinander unterscheiden, wobei dann diese Urteile, ähnlich wie andere, unten genannte Schätzungsweisen, sich an Stelle des eigentlich gewollten Ergebnisses der Vergleichung mit N eindrängen.[1]) Diese Fehlerquelle kommt bei der genannten Mischung der Reihen für eine weite mittlere Region in Wegfall.

Auch besteht natürlich keine eindeutige Beziehung der von der V.-P. tatsächlich erlebten oder ihr vorgeschriebenen Urteilsrichtung zu N oder V, wenn auch individuell oder dispositionell schwankende Tendenzen vorliegen können, das Urteil auf N oder V zu beziehen, falls deren Bedeutung für die zukünftigen Konstruktionen der F(x) der V.-P. schon während der

1) Der Versuch, solche Wechselwirkungen durch eine größere Pause zwischen den einzelnen Versuchen zu schwächen, findet natürlich praktisch sehr bald eine Grenze. Vgl. Müller, Gesichtspunkte § 7 S. 24.

Versuche bekannt ist. Da übrigens die Urteilsrichtung, wie schon gesagt, zu den wirksamen Momenten jedes der beiden Vergleichsobjekte hinzugehört, so müßte sie zur Umkehrbarkeit des Totalfeldes in beiden Lagen von N und V konstant bleiben, was freilich nur durch eine andererseits auch oft wieder ungünstig beengende Vorschrift erreichbar ist.

b) Ein Korrespondenzsatz zur Kontrolle der Berechnung des Äquivalentes aus den Verteilungen der Urteile.

Bei jenen allgemeinen Erörterungen des 7. Kapitels ist nun der Begriff des „Fehlers" neben demjenigen der Schwelle überhaupt noch nicht in Betracht gezogen worden, da ja die Ableitung einer „Schwelle" im allgemeinsten Sinne, d. h. eines Bedingungsextremes für irgend welchen Effekt der Abstufung eines x überhaupt, noch nicht die spezielle innere Beziehung dieses Effektes auf eine konstante Norm N einzuschließen braucht, die bei der vergleichenden Beurteilung des x eingeführt wird. Suchen wir also an der Hand des Schemas der Verteilungsfunktionen $F_k(x)$, $F_u(x)$ und $F_g(x)$ der drei Hauptfälle (s. Fig. 8a, S. 176) nunmehr zunächst dem „Totalfehler" seinen konkreten Wert beizulegen, so scheint sich als natürlichster, unmittelbarster Anhaltspunkt hierzu vorerst die Zuordnung des K.-G. der Gleichheitsurteile zu den Stufen des Vergleichsreizes darzubieten. Die Verteilungskurve $F_u(x)$ markiert ja auf der X-Achse gewissermaßen wie der variable Schieber eines Maßstabes den objektiven Unterschied bei subjektiver Gleichheit, der eben die objektive Äußerung des Totalfehlers in der bewußten Relation zwischen N und V ist. Dabei denken wir hier vor allem an die reinen, glatten Gleichheitsurteile, die allein gestatten, den Fehler durch die Beziehung eines eindeutigen Relationserlebnisses auf einen exakt meßbaren physikalischen Tatbestand psychophysisch klar zu definieren. Auch dürfte die geläufige Hypothese sehr plausibel erscheinen, daß die Ergänzung dieses K.-G. durch die Fälle der Unentschiedenheit zwischen den extremen Urteilen, die der subjektiven Gleichheit in der Reihenfolge der Effekte bei Abstufung des V beiderseits am nächsten stehen, keine wesentliche Verschiebung der Fehlermessung herbeiführen würde. Doch nimmt man diese Zusammenfassung zu der von G. E. Müller mit u bezeichneten Mittelgruppe nur vor, um bei der Reduktion auf drei Hauptfälle, deren Extreme sichere Verschiedenheitsurteile sein sollen, keine Versuche unberücksichtigt zu lassen, zumal die reinen Gleichheitsfälle bei dieser Methode bisher meistens nur spärlich verteten waren.

Wenn nun in jedem einzelnen Augenblicke wirklich nur eine einzige Stufe dem N gleich erscheinen könnte, so daß sie als das zufällig wechselnde „Exemplar" eines einfachen K.-G. zu den in § 20 erläuterten Varianten eines bestimmten Einzelwertes in Analogie zu bringen wäre, so dürfte man auch ohne weiteres nach den dort erläuterten Prinzipien ein mittleres subjektives Äquivalent r_{gl} berechnen, das die Fehler in der Auffassung der Relation zwischen N und V als $r_{gl}—N$ ansetzen ließe. Wenn wir aber auch als Rechenbeispiele für solche psychophysische K.-G. $F_u(x)$ früher in der Tat die gewöhnlichen Hauptwerte r_{gl} ($\mathfrak{D}$), r_{gl} ($\mathfrak{A}$) usw. bestimmt haben, weil sie in der

Literatur gegenwärtig noch in Betracht kommen[1]) und bei dem Stande der Probleme als mögliche Ausgangspunkte einer erfolgreichen empirischen Fehleranalyse wenigsten noch nicht ausgeschlossen werden dürfen, so waren doch gemäß unseres allgemeineren Begriffes des K.-G. auch die Formulierungen über die repräsentative Funktion in § 15, S. 44 bereits so allgemein gehalten, daß unter Umständen noch ganz andere sachliche Gesichtspunkte für die Wahl der Hauptwerte in Betracht kommen sollten, falls das Wesen des in jedem Augenblick verwirklichten „Exemplares" des K.-G. es erforderlich machen würde. Dieses suchten wir uns nun bereits in den Vorüberlegungen S. 167 ff rein theoretisch an der Annahme völlig konstanter Bedingungen klar zu machen, die das Äquivalent in einer Form zur Geltung kommen lassen, in der es dann auch in einem gegebenen Augenblicke der Schwankungen wirksam sein wird. Hierbei erschien uns aber eben dieses Äquivalent gerade nicht als punktuell, sondern als ein ganzes Urteilsgebiet, das von der einen hierbei als konstant betrachteten Grenzabszisse r_o bis zur anderen r_u reicht, so daß die Verteilungsfunktion dieses K.-G. $F_u(x)$, falls man bei jener absoluten Konstanz noch von einem solchen sprechen darf, ein Rechteck zwischen diesen beiden Ordinaten r_o und r_u darstellen würde. Dabei ist also zunächst noch vorausgesetzt, daß die Urteile innerhalb dieses ganzen Gebietes unter sich wirklich so homogen sind, daß sie durch die Reproduktionsmethode nicht noch weiter in exakter Weise differenziert werden könnten, d. h. es soll entweder der Unterschied zwischen jenen glatten Gleichheitsurteilen und den sonstigen u-Fällen als ein rein zufälliger angesehen oder überhaupt nur noch der K.-G. der reinen Gleichheitsfälle in Betracht gezogen werden. Vielleicht könnte sich nun jemand vom Standpunkte der reinen experimentellen Bewußtseinsanalyse aus damit begnügen wollen, dieses Urteilsgebiet einfach festzustellen, das dann höchstens noch, wegen der tatsächlichen zufälligen Schwankungen, durch die Differenz bloßer Hauptwerte der Schwellen, z. B. $r_o(\mathfrak{A}) - r_u(\mathfrak{A})$ auszudrücken wäre. Man würde also dann auch die Fehler nur innerhalb gewisser Grenzen x und $x + (r_o - r_u)$ anzugeben haben.

Nach den obigen Forderungen S. 241 soll aber ja die Vergleichsmethode viel mehr leisten und ein Verfahren an die Hand geben, das aus den Daten einer Vollreihe einen Äquivalenzwert A zu einem Normalreiz N berechnen läßt, der jene vollständige Umkehrbarkeit des aus ihm berechneten Fehlers A—N auch trotz der Unsicherheitsregion empirisch realisierbar macht. Dieses Äquivalent muß aber dann natürlich ebenso wie die Abszisse des Normalreizes N ein punktueller Wert sein, weil eben der Nachweis jener Umkehrbarkeit darin besteht, daß der Äquivalenzwert der einen Versuchslage A_1, als Normalreiz der anderen Versuchslage N_2 eingeführt, ein mit N_1 übereinstimmendes A_2 liefert. Somit kann die Erfüllung der Relation

$$A_1 = N_2 \qquad A_2 = N_1, \tag{296}$$

die ich als „Korrespondenz der Äquivalente bei Umkehrung der

1) Vgl. A. Lehmann, Beiträge zur Psychodynamik der Gewichtempfindungen, Arch. f. d. ges. Psychologie, VI, 1906, S. 484 ff.

Versuchslage" bezeichnen möchte, eine rein objektive Kontrolle für die Brauchbarkeit des gewählten Repräsentanten A abgeben.

Dieser Korrespondenz-Satz [296] wird nun tatsächlich eine Handhabe bieten, um zunächst rein empirisch die auf verschiedene Weise berechneten Werte des A auf die genannte Umkehrbarkeit hin zu prüfen und dadurch ohne alle weiteren konkreteren Überlegungen über die psychologische Stellung des Äquivalentes innerhalb des Unsicherheitsbereiches zum Ziele zu kommen. Die Empfindlichkeit dieser Kontrolle der jeweiligen Auswahl ist keine geringe, da ein Verstoß gegen das Prinzip hierbei immer sogleich verdoppelt zur Geltung kommt, wie aus den einfachen Schema Fig. 11 deutlich werden kann:

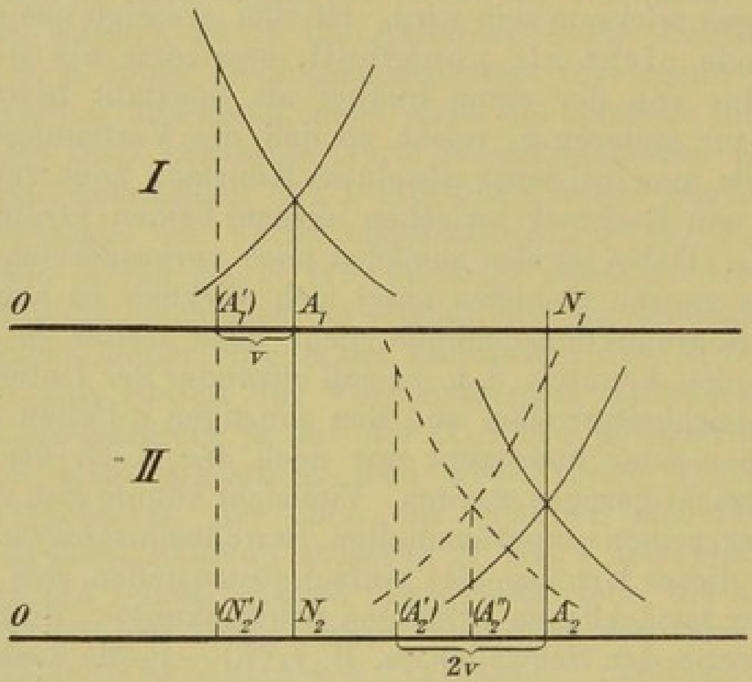


Fig. 11.
Schema zur Erläuterung des Korrespondenzsatzes [296] für die vollständige Umkehrung der Reizlage des V und N als Kontrolle der Berechnung des Äquivalenz-Hauptwertes A (I erste, II zweite Reizlage).

Es seien in Schema I und II für die beiden entgegengesetzten Lagen von N und V nur je ein Stück der beiden Verteilungskurven $F_g(x)$ und $F_k(x)$ durch krumme Linien angedeutet. Nach unserem Beispiel S. 236 sei also etwa in I ON_1 das Maß der indirekt gesehenen, in II ON_2 das der direkt gesehenen Normal-Strecke, wenn O der Nullpunkt der Abszissen ist. Betrachtet man nun die Abszisse irgend eines charakteristischen Punktes des Systemes I dieser Urteilskurven, z. B. den Schnittpunkt A_1 der beiden, auf den wir unten noch zurückkommen werden, als Maß des richtig berechneten Äquivalenzwertes OA_1 der ersten Raumlage, wonach

$$OA_1 - ON_1 = f_1$$

erscheint, so müßte nach dem Korrespondenzsatze [296] in Schema II, wenn der Normalreiz $ON_2 = OA_1$ d. h. gleich dem soeben gefundenen Äquivalenzwert gewählt wird, der Schnittpunkt A_2 der neuen Urteilskurven genau auf N_1 treffen. Denn OA_1 entspricht dem direkt und dabei nach obiger Annahme relativ zu groß gesehenen V_1, OA_2 dem indirekt gesehenen, um ebensoviel unterschätzten V_2.

Dabei bleibt es aber von unserem Korrespondenzsatze aus, wie gesagt, noch ganz unentschieden, wie sich die Verteilungskurven der beiden Lagen im einzelnen zu einander verhalten. Denn die Argumente der beiden K.-G. I und II haben ja eine ganz verschiedene psychologische Bedeutung, und man muß eben erst die spezielle Müllersche Erweiterung der Äquivalenz S. 238 hinzunehmen, um darauf zu kommen, daß die Kurven in II durch eine bloße Parallelverschiebung gegen die X-Achse um $2(OA_1 - ON_1) = 2f$ aus denen in I abzuleiten sind. Damit die Kurven F(x) II zu F(x) I vollständig kongruent werden, wäre diese Erweiterung der Äquivalenz für Stufen, die von den Hauptäquivalenten absolut gleich weit abstehen, einerseits sogar bis auf E_u (I) und andererseits bis E_o (II) auszudehnen. Noch unwahrscheinlicher aber wird diese Kongruenz natürlich bei der gewöhnlichen Art der Umkehrung mit konstantem Normalreiz, die Müller wegen der tatsächlichen Anlage seiner Versuche auch noch bei der speziellen Diskussion der Frage a. a. O. S. 113 ff beibehalten hat, wie weit die Umkehrbarkeit durch die Schätzung nach dem sog. „absoluten Eindruck“ beeinflußt worden sei (vgl. S. 261). Für uns kommt es dagegen nur noch darauf an, daß die genannte Beziehung für einen „Hauptwert“ des Systems im Sinne der K.-L. zutrifft. Auch der exakte Nachweis irgend einer Störung der genauen Umkehrbarkeit bestünde dann natürlich ebenfalls vor allem darin, daß die nämliche Berechnungsweise eines Hauptwertes A_1 unter diesen gestörten Bedingungen des Lage-Wechsels, z. B. bei Wissentlichkeit der Lage des V u. ä., von $N_2 = A_1$ aus nicht mehr zu $A_2 = N_1$ zurückführt.

In dem Schema der Fig. 11 haben wir die Kongruenz zwischen den Kurven in I und II nur deshalb beibehalten, weil sie die im allgemeinen nur der Dimension nach zutreffende Verdoppelung eines bei der Berechnung von A'_1 begangenen Fehlers v in der schließlichen Differenz $ON_1 - OA'_2$ am einfachsten an einer genauen Verdoppelung veranschaulicht, die nur bei jener Kongruenz der Kurven von I und II möglich würde. Wäre A_1 z. B. um den Fehler v nach links, d. h. nach A'_1 gerückt, so würde die Verwendung dieser Stufe als Normalreiz N in der zweiten Lage zunächst das Kurvensystem im ganzen ebenfalls um v zu weit nach links verschieben, wie in Fig. 11 am neuen Schnittpunkt A_2'' zutage tritt. Berechnet man aber nun A'_2 ebenfalls nach der falschen Formel, so begeht man (unter der eben genannten Voraussetzung kongruenter Häufigkeitskurven bei der neuen Lage der V) den nämlichen Fehler v nochmals in der gleichen Richtung, so daß schließlich die bei richtiger Berechnung verschwindende Differenz $ON_1 - OA'_2 = 2v$ wird. Genau genommen, enthält natürlich die von der Lage in I ausgehende Kontrolle noch eine Einseitigkeit in sich, die nur dadurch ausgeglichen werden kann, daß mehrere Vollreihen mit verschiedenen Stufen N_1 und N_2, die als A_1 bzw. A_2 in Frage kommen können und deren Intervalle eine leichte Interpolation gestatten, gleichzeitig abgeleitet werden. Eine solche Untermischung wird ja auch das Postulat der Unwissentlichkeit bezüglich der Lage des N noch leichter erfüllen lassen.

Würde man nun noch gar keinen Anhaltspunkt dafür haben, welcher Wert als Äquivalent in Frage kommen kann, so würde die erstmalige Ermittelung der Berechnungsweise des A natürlich ziemlich umständlich sein, da ja so viele „Umkehrungen“ mit je einem neuen N_2 abzuleiten wären, als Möglichkeiten des A_1 in Betracht kommen. Praktisch liegt es also wohl vorläufig näher, den Korrespondenzsatz [296] nur zur Kontrolle ganz bestimmter Möglichkeiten zu benützen, die bereits aus dem sonstigen psychophysischen Charakter des Äquivalenzwertes plausibel erscheinen.

c) Die wichtigsten Kriterien für eine vorläufige Auswahl der Berechnungsweise des Äquivalentes.

1. Der Äquivalenzwert als Grenze zwischen den wahren (inneren) Unterschiedsschwellen S_0 und S_u und die formale Beziehung zwischen dem Fehlerhauptwerte (dem sog. konstanten Fehler) und den Schwellen.

Die methodische Bedeutung des Korrespondenzsatzes besteht nach dem Gesagten vor allem darin, daß er an der Hand eines genügenden Beobachtungsmaterials eine besondere Art der Berechnung des Äquivalenzwertes empfehlen und somit schließlich dahin führen kann, daß man die Totalfehler ohne weitere Umkehrung der Lage aus einer einzigen Vollreihe berechnen kann, so daß man eine Umkehrung der Lage mit einem beliebigen N_2 des Unsicherheitsbereiches höchstens noch zur weiteren Ausgleichung von Zufälligkeiten vornehmen wird.

Als Kriterium für die Auswahl des Äquivalenzwertes kommt nun zunächst in Betracht, daß er, wie vorhin erwähnt, ein Optimum der Gleichheitsrelation sein muß, gleichgültig ob man ihm nur rein begriffliche, dispositionell hypothetische Bedeutung im psychophysischen Zusammenhange zuschreiben will, oder ob man auch dem ihm jeweils entsprechenden Gleichheitsurteile irgendwelche Auszeichnung zuerkennt. Da das allgemeine Stetigkeitsprinzip in seiner Weise auch für die Bewußtseinserscheinungen zutrifft, so liegt wohl die Annahme nahe, daß innerhalb des Urteilsgebietes der u-Fälle nach den Grenzen zu in der Tat dunkler bewußte Unterschiede vorhanden sind, die durch geeignete Methoden auch wenigstens qualitativ nachzuweisen wären. Dieses rein hypothetische oder dunkel bewußte Optimum der Gleichheitsrelation, das mit dem Maximum der rel. H. der u-Fälle nicht zu verwechseln ist, zerlegt nun das gesamte „Idealgebiet der u-Fälle“ (vgl. S. 190) zwischen den Hauptwerten r_0 und r_u offenbar in zwei Strecken, die in einem besonderen Sinne als „obere“ und „untere“ Unterschiedsschwelle bezeichnet werden können. Wir meinen aber hiermit weder die absoluten Unterschiedsschwellen (Grenzabszissen) r_0 und r_u in dem S. 165, A. 1 definierten Sinne, noch die von G. E. Müller so genannten und schon oben S. 199 u. Fig. 10 eingeführten Abstände s_0 und s_u zwischen diesen Grenzen und dem Normalreiz N, die keine neue Unbekannte einführen und die wir, zur Unterscheidung von der neuen Einteilung, als „physikalische obere und untere U.-S.“ bezeichnen wollen. Da die Unterschiede des Äquivalenzwertes, dessen Lage wir in der Skizze des gegenseitigen Verhältnisses dieser Begriffe in Fig. 12 wieder mit A andeuten, von den jeweiligen Grenzreizen das Maß der jeweiligen Bedingungsminima für die Unterscheidung darstellen, so können wir die beiden Teilstrecken $r_o - A$ und $A - r_u$ auch als „wahre“ oder „innere Schwellen“ bezeichnen und durch große Buchstaben S_o und S_u ausdrücken. In Fig. 12 ist dann auch die einfache lineare Beziehung zwischen den S und s leicht zu übersehen, die durch das gesuchte Fehlermaß f vermittelt wird. Solange wir der Fehlerbestimmung nicht einfach einen gewöhnlichen Hauptwert r_{gl} der empirischen Verteilung $F_u(x)$ zugrunde legen wollen, was immer nur einen mittleren Wert dieser Art definieren ließe, sondern eben das eigentliche Äquivalent A zu N

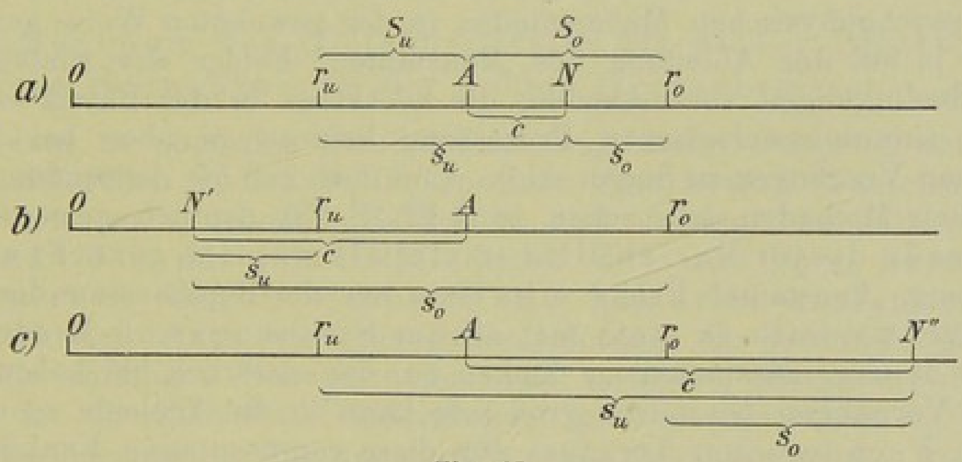


Fig. 12.
Die formalen Beziehungen zwischen verschiedenen Schwellenbegriffen u. dem sog. konstanten Fehler.

innerhalb der V-Reihe, das für jeden beliebigen Zustand im Verlauf der Schwankungen realiter einen konkreten Wert bedeutet, hat auch der Fehler

$$f = A - N \qquad [297]$$

zunächst bei jedem dieser Zustände einen bestimmten Wert f, der aber nun von einem Versuch zum andern seine eigenen Schwankungen durchmachen wird. Dieses f ist zugleich die Differenz zwischen den physikalischen und den wahren Schwellen. Denn da (vgl. auch S. 198, Fig. 10b)

$$s_o = r_o - N \qquad s_u = N - r_u \qquad [265]$$

und nach der obigen Definition

$$S_o = r_o - A \qquad S_u = A - r_u, \qquad [298]$$

so ist, wie in Fig. 12 wieder leicht mit einem Blicke zu übersehen ist, auch

$$S_o - s_o = \pm f = s_u - S_u, \qquad [299]$$

je nachdem $N \gtrless A$. Da es indessen schließlich doch nur auf die Repräsentanten der mittleren Verhältnisse ankommen kann, für ihre Berechnung aus den Vollreihen aber nur zwei voneinander unabhängige Verteilungen (diejenige der beiden Grenzreize r_o und r_u) als unmittelbare Anhaltspunkte gegeben sind, so besteht das nächste Problem, wie schon gesagt, darin, aus diesen Kurven, bezw. eventuell einfach aus r_o (𝔄) und r_u (𝔄) usw. auf den mittleren Wert des A bezw. auf das gewöhnlich mit $\pm c$ bezeichnete Mittel der jeweiligen Fehler f zu schließen [1]).

Das Symbol c für den Hauptwert der jeweiligen Fehler f rührt daher, daß man diese Größe nach Fechner, der hiermit vor allem einen Begriff der unten betrachteten „Herstellungsmethode" verallgemeinerte, nunmehr allgemein als „konstanten Fehler" bezeichnet. So sehr sich aber auch dieser Terminus inzwischen für unseren Grundbegriff der statistischen Vergleichsanalyse eingebürgert hat, ist er doch noch immer Mißverständnissen ausgesetzt. Begegnete mir doch gelegentlich sogar die Auffassung, man dürfe auf gewisse Probleme der experimentellen Psychologie überhaupt keine exakten psychophysischen Maßmethoden in der gewohnten Weise anwenden, da diese ja bei der Ableitung des „konstanten" Fehler eine Stabilität der Versuchsbedingungen voraussetzten, die höchstens in der Physik oder bei niederen sinnesphysiologischen Prozessen, keineswegs aber bei höheren psychischen Vorgängen zu finden sei [2]). Und doch soll die Anwendung dieser statistischen Methoden, wie schon in § 12 (S. 28) deutlich geworden sein wird, gerade dieser Variabilität so viel als möglich gerecht werden, und der sog. „konstante" Fehler c ist eben nur der Repräsentant der Einzeläquivalente, weshalb er stets mit einem Streuungsmaß M oder dergl. als $\pm c \pm M$ usw. zusammen zu denken ist, das natürlich bei höheren psychischen Vorgängen besonders groß sein kann [3]). In Analogie zu dem allgemeinen Fechnerschen Terminus für diese repräsentative Funktion (vgl. § 15, S. 44) könnte man daher die Größe c wohl auch als „Fehlerhauptwert" [4]) bezeichnen, da der Name des „mittleren Fehlers" schon für das Streuungsmaß M festgelegt ist.

1) Die Abstraktheit des Begriffs der „physikalischen" Schwelle s ersieht man auch daraus, daß sie bei größeren konstanten Fehlern auch in ihren Mittelwerten negative Werte annehmen kann, wie s_u in Fig. 12 b oder s_o in Fig. 12 c. Bei den „wahren" Schwellen ist dies höchstens für einzelne (extreme) zufällige Werte möglich und auch hier nur durch die Beziehung auf den mittleren Äquivalenzwert A, nicht aber auf das jeweilige zufällige (hypothetische) Einzeläquivalent, das seinem Wesen nach stets zwischen den zufälligen Einzelwerten des r_o und r_u bleiben muß.

2) Vgl. Wundt, Grundz. der Physiol. Psychol. III⁶, 1911, S. 77.

3) In einer ganz ähnlichen Richtung wie das oben erwähnte Mißverständnis liegt der Versuch A. Lehmanns, den „zufälligen Fehlern" außer den „konstanten" noch „variable Fehler" gegenüberzustellen (Lehrbuch der psychologischen Methodik, S. 6 und 28ff.). Seine Gruppe der „konstanten" oder „fast konstanten" Fehler kann von den „gesetzmäßig" variablen Fehlern methodisch auf keinen Fall getrennt werden, und wenn Lehmann außerdem auch noch von seiten seiner Auffassung der zufälligen Fehler, wonach diese ebenso leicht positiv wie negativ sollen ausfallen können, ein weiteres Motiv gewinnt, um auch ihnen die „variablen Fehler" als besonders regellos schwankende in einer speziellen Gruppe gegenüberzustellen, so ist eben auch sein Begriff der „zufälligen Fehler" zu enge gefaßt. Der einzige Hauptgegensatz muß immer derjenige der zufällig schwankenden Einzelwerte und des Hauptwertes bleiben, unter den dann nach S. 32f natürlich auch alle möglichen Bewegungen des Hauptwertes in der Zeit subsummierbar bleiben.

4) Dagegen ist der Name „Hauptfehler" von Fechner bereits für eine bloße Komponente des „konstanten" Totalfehlers verwendet, die er bei der Herstellungsmethode abgesehen von dem sog. „Raum- und Zeitfehler" vorfindet und auf die wir S. 274 zurückkommen. Vgl. G. E. Müller, Gesichtspunkte, S. 194 f.

Nach der Zurückführung der beobachteten Verteilungskurve auf die hypothetischen K.-G. $f_o(x)$ und $f_u(x)$ der Grenzreize ist aus ihnen bezüglich der Schwellenhauptwerte jedenfalls nur die ganze Strecke $r_o - r_u$ zu entnehmen, die ihrer Dimension nach im Verhältnis zu s_o, s_u und S_o, S_u als Doppelschwelle erscheint. Die mittlere Schwelle, für die der Gegensatz der physikalischen und inneren ja ohnehin verschwinden würde, gleichgültig, ob diesem Wert auch eine repräsentative Bedeutung zuerkannt werden kann, wäre also

$$s = \frac{s_o + s_u}{2} = S = \frac{S_o + S_u}{2} = \frac{r_o - r_u}{2}. \qquad [300]$$

2. Das Maximum der Gleichheitsfälle als bloßer Effekt der zufälligen Schwankungen der beiden Grenzabszissen r_o und r_u.

Hieraus ist aber nun für die Einteilung dieser Doppelschwelle in die wahren Schwellen S_o und S_u im einzelnen ohne neue Voraussetzungen gar nichts weiter zu entnehmen. Es besteht also insbesondere auch zwischen ihnen und dem aus den Urteilsdaten, d. h. aus $F_u(x)$, berechneten Hauptwert r_{gl} der Gleichheitsfälle keinerlei analytischer Zusammenhang. Auch wäre die Differenzierung, die jedenfalls wenigstens durch die zufälligen Schwankungen von r_o und r_u in das beobachtete Gebiet der Gleichheitsfälle hineinkommt und im Maximum $r_{gl}(\mathfrak{D})$ ihrer Kurve am meisten in die Augen fällt, eben deshalb für die Bestimmung jenes oben genannten „Optimums", das auch bei der Abstraktion von den Schwankungen im Gebiete zwischen den Grenzreizen anzunehmen ist, praktisch nur dann zu gebrauchen, wenn das Verhältnis zwischen den wahren Schwellen und dasjenige zwischen den beiden Schwankungsformen von $f_o(x)$ und $f_u(x)$ durch eine bekannte Beziehung verbunden wären, die außerdem auch jene aus diesen leicht genug abzuleiten gestattete. Denn r_{gl} sagt nichts Neues aus, sobald die Distanz $r_o - r_u$ (in beliebigen Hauptwerten) und die $f(x)$ gegeben sind. Nun haben wir schon S. 178 Gl. [232] gesehen, daß $r_{gl}(\mathfrak{D})$ stets analytisch notwendig mit dem Schnittpunkt von $f_o(x)$ und $f_u(x)$ zusammenfällt. Bei Symmetrie der beiden letzteren ist sogar, wie übrigens auch ohne jenen Satz klar ist, jeder Hauptwert $r_{gl} = \frac{r_o + r_u}{2}$. Im allgemeinen weichen diese Werte r_{gl} von dem a. Mittel der r_o und r_u auch in der Tat nur wenig ab, wie man vor allem bei Ableitung der Werte M_o und M_u, bzw. h_o und h_u nach § 30 oder § 31a erkennt. Auch könnte, bei gegebener Doppelschwelle, $f_o(x)$ zu $f_u(x)$ sich natürlich jederzeit so verhalten, daß r_{gl} dem gesuchten A selbst nahe bleibt, gleichgültig, wie sich dieses zu $\frac{r_o + r_u}{2}$ verhält. Indessen haben wir vorläufig kaum einen Anhaltspunkt für eine Annahme, aus der so etwas abzuleiten wäre, so daß man also auch mit jener Kontrolle nach dem Korrespondenzsatz [296] bei $r_{gl}(\mathfrak{D})$ oder $r_{gl}(\mathfrak{A})$ usw. zum mindesten nicht den Anfang machen wird.

3. Die konkrete Bedeutung der ausschließlichen Abgabe von Urteilen „größer“ und „kleiner“ für die Bestimmung des Äquivalentes.

Obgleich wir nun bei dem Versuch einer möglichst einfachen Definition eines Maßes für den Fehler und die wahren Schwellen S_o und S_u zunächst von dem hierfür entscheidenden Begriffe des subjektiven Äquivalentes A auf das Gleichheitsurteil geführt wurden, wäre doch die punktuelle Bestimmung dieses A dann am einfachsten und bei völlig konstanten Verteilungsgesetzen mit jener von Schwellen und Schwankungen noch völlig abstrahierenden Vorüberlegung S. 237 geradezu identisch, wenn überhaupt keine u-Fälle, sondern nur extreme Unterschiedsurteile vorkämen. (Nachdem dieses mittlere Urteilsgebiet überhaupt einmal ein K.-G. ist, würde die hier nicht weiter berücksichtigte empirische Einschränkung desselben auf ein einziges Abszissenintervall höchstens als eine für die allgemeine Methodik belanglose Zufälligkeit anzusehen sein.) Mit dieser Vereinfachung unseres Schemas meinen wir aber natürlich nicht etwa die willkürliche künstliche Aufteilung der u-Fälle nach Fechner, die schon S. 197 erwähnt wurde und zu einer Brauchbarkeit für die Fehlermessung doch wiederum die Lösung unseres Problemes voraussetzt, so daß sie dieses nur hinausschiebt. Es handelt sich vielmehr nur um die durch Jastrow, Kraepelin [1]) u. a. empirisch nachgewiesene Möglichkeit, daß viele V.-P. durch eine besondere Instruktion und Einübung dazu gebracht werden können, sich in jedem auch im übrigen vollwertigen Einzelversuch der Vollreihe für eines der beiden Verschiedenheitsurteile zu entscheiden, so daß bereits das natürliche Schema der Urteilskurven in die beiden kontradiktorischen Komplemente $F_g(x)$ und $F_k(x)$ zerfällt, das S. 171 ff. (Fig. 7) zuerst analysiert wurde. Durch diese besondere Einstellung wird also wahrscheinlich eine zunächst unklare Verschiedenheit des Auffassungszustandes der einzelnen Stufen des mittleren Urteilsgebietes vollends geklärt, falls diese schon S. 250 genannte Bewußtseinshypothese im Rechte ist, oder die jedenfalls vorhandene dispositionelle Differenzierung durch besondere Auffassungsbedingungen zu dem nämlichen Endeffekte neu aktualisiert. Die Bewußtseinsvorgänge, die bei der Auffassung und Wiedergabe der entscheidenden Relation beteiligt sind, enthalten eben vor allem bei den geringeren Unterschieden zwischen N und V, die bei normaler Aufmerksamkeitsspannung für die Unsicherheitsregion allein in Frage kommen, selbst bei den einfachsten Vergleichswahrnehmungen ein sehr kompliziertes Ineinander übereinstimmender und differierender Momente. Ihre völlig gleichmäßige Apperzeption würde wohl vor allem nur ein ziemlich indifferentes Ähnlichkeitsbewußtsein herbeiführen, das der Unentschiedenheit zwischen g und k verwandt ist und daher das u-Gebiet sogar noch bedeutend über das gewöhnlich bereits ziemlich beschränkte Maß der tatsächlich beobachteten u-Fälle hinaus erweiterte. Sowohl das ausgesprochene Gleichheits- als auch das als g oder k bestimmte Verschiedenheits-Bewußtsein setzt dann besondere Apperzeptionsprozesse voraus, bei denen die subjektive Tendenz zur Vergegenwärtigung einer genau bestimmten Relation offenbar auch dispositionelle Momente, die

1) Vgl. G. E. Müller, Gesichtspunkte S. 14 u. 84.

bei indifferenterer Einstellung zur sicheren Vergegenwärtigung der einen oder anderen Relation noch nicht ausreichen, zu einem solchen Effekte zu ergänzen vermag. Auch sind doch schon bei den allgemein als normal anerkannten Versuchen neben dieser Wirkung der Konzentration auf die spezielle Aufgabe überhaupt stets wenigstens noch die besonderen hierher gehörigen Verschiebungen der Relationsauffassung im Spiele, die durch die Einübung im allgemeinen sowie durch die spezielle Adaptation an eine bestimmte Feinheit der Abstufung herbeigeführt werden. Natürlich ist der logische Prozeß bei dieser Tendenz, niemals bei einem unentschiedenen Urteil stehen zu bleiben, ein sehr komplizierter. Von einer ganz allgemeinen Forderung aus, nur Urteile ohne solche spezielle Beeinflussung und mit dem Sicherheitsgrad, der bei der Zulassung von drei Hauptfällen für g und k im allgemeinen erreicht wird, in der Psychophysik zuzulassen, hat man sich daher prinzipiell gegen die Brauchbarkeit eines solchen Verfahrens ausgesprochen. Indessen reicht eben hier die Unwissentlichkeit hinsichtlich der Richtung der Verschiedenheit schon allein dazu aus, um aus der immerhin mit einem gewissen Minimum der Sicherheit gefällten Unterscheidung von g und k theoretisch mit Sicherheit auf unklare Relationsmomente oder wenigstens psychische Dispositionen dieser Art zurückzuschließen, die für die Angabe des subjektiven Äquivalentes von Bedeutung sein können und durch eine andere Methode, die nur mit höheren Sicherheitsgraden und ohne jene spezielle Pointierung der Verschiedenheitsapperzeption arbeitet, überhaupt nicht zu fassen wären. Denn der gewöhnliche Effekt einer solchen Instruktion ist ja nicht der, daß das u-Gebiet einseitig der g- oder k-Seite zufiele, sondern es findet wirklich eine Aufteilung statt, bei der allerdings zufällige Momente im Spiele sind, die aber im wesentlichen doch aus solchen psychischen Dispositionen bestehen dürften, wie sie auch schon oben bei der Annahme, daß der Äquivalenzwert A ein Optimum der Gleichheitsrelation darstelle, in Betracht gezogen wurden. Solche Versuche sind aber auch natürlich an sich von hohem psychologischen Interesse, und es erscheint kaum zweifelhaft, daß man durch eine andersartige Einstellung, die derjenigen bei der Methode der Herstellung (s. unten) verwandt sein dürfte, umgekehrt auch einmal die Geichheitsauffassung apperzeptiv begünstigen könnte, die bei den gewöhnlichen Versuchen vielleicht schon durch den Gedanken an die Unterschiedsempfindlichkeit, der bereits eine der eben behandelten Instruktion verwandte Einseitigkeit enthält, gegenüber den g- und k-Fällen benachteiligt sein wird. Für die Praxis der Fehlermessung wäre dies nach dem Gesagten allerdings von ganz sekundärer Bedeutung, könnte aber vielleicht durch die Vergrößerung der Schwellen manche später zu nennende Einflüsse auf die Schwelle deutlicher herausarbeiten lassen. Bei einer speziellen Untersuchung aller dieser Einflüsse der Relationsapperzeption überhaupt durch die Vergleichsmethode, bei der natürlich noch mehrere Möglichkeiten systematisch zu variieren wären, würde aber freilich die Ableitung der Verteilungsfunktion bei möglichst freier und indifferenter Einstellung den natürlichsten Ausgangspunkt bilden.

Bei zwei kontradiktorisch komplementären Verteilungen $F_g(x)$ und $F_k(x) = 1 - F_g(x)$ ist nun $r_o - r_u = 0$, d. h. es verschwinden die Schwellen vollständig, und das Urteilsgebiet zwischen den Hauptwerten r_o und r_u, das von dem punktuellen Äquivalenzwert A geteilt werden sollte, wird selbst die punktuelle mittlere Grenzscheide zwischen den g- und k-Urteilen, d. h. es ist

$$r_o = r_u = r_{gl} = A. \qquad [301]$$

Je nach der Wahl des Hauptwertes werden also hierbei direkt A($\mathfrak{A}$), A($\mathfrak{C}$) oder A($\mathfrak{D}$) gefunden, die dem einzigen hypothetischen K.-G. $f_o(x) = f_u(x) = f(x)$ zugehören, der hierbei aus der Beobachtung abzuleiten ist, und die bei dessen Symmetrie zusammenfallen. Der Zentralwert A($\mathfrak{C}$) ist zugleich nach dem früher Gesagten mit dem Schnittpunkte der beiden Urteilskurven $F_g(x)$ und $F_k(x)$, dessen Ordinate $z = \frac{1}{2}$ ist, identisch. Derartige Versuchsresultate ohne u-Fälle stellen aber nun offenbar bezüglich der Umkehrbarkeit nach dem Korrespondenzsatze eine besonders interessante Frage. Denn wenn die Bedingungen bei einer Untersuchung, die nach S. 249 eine hinreichende Anzahl von Vollreihen enthält, um das wahre Äquivalent A als neues N mit zu umfassen, die Umkehrbarkeit des so berechneten Wertes ermöglichten, würde natürlich auch die ganze Instruktion eine größere psychologische Bedeutung erlangen, als ihr z. B. von G. E. Müller zugestanden wird.

4. Der Schnittpunkt der Verteilungskurven $F_g(x)$ und $F_k(x)$ als Äquivalenzwert.

Ähnlich wie aber nun die Reizstufe mit der rel. H. $\frac{1}{2}$ der Unterschiedsurteile schon Volkmann für die Schwelle unmittelbar als repräsentativ erschien, ist in letzter Zeit F. M. Urban für den schon S. 248 und soeben zuletzt wieder genannten Schnittpunkt der g- und k-Kurve als Hauptwert der Äquivalenz ganz allgemein, also auch für den gewöhnlichen Fall eingetreten, daß nicht nur extreme Urteile, sondern alle drei Hauptfälle vorkommen.[1]) Er suchte freilich diese Auswahl der Reizstufe, für welche die Wahrscheinlichkeit eines g-Urteiles gleich der eines k-Urteiles ist, seinerseits a. a. O. durch den empirischen Nachweis zu begründen, daß dieser Schnittpunkt in Wirklichkeit dem arithmetischen Mittel der Zentralwerte der Grenzreize, also dem Werte

$$\frac{r_o(\mathfrak{C}) + r_u(\mathfrak{C})}{2}$$

sehr nahe komme. Wollte man aber den letzteren als den idealen Äquivalenzwert A betrachtet, so wäre dies mit der Voraussetzung identisch, daß die obere und untere Schwelle S_o und S_u einander gleich wären, was im allgemeinen wenigstens nicht genau zutrifft. Trotzdem dürfte aber wohl dem Urbanschen Schnittpunkts-Äquivalent eine besondere Wichtigkeit zukommen. Denn zunächst erscheint es nach der vorigen Analyse der Relationsauffassung ganz plausibel, daß die Abszisse x zu $F_g(x) = F_k(x)$

1) Archiv f. d. ges. Psychologie, Bd. 15, S. 353.

bei jener ausdrücklichen Differenzierung aller u-Fälle von dem analogen Werte bei der normalen Einstellung mit drei Hauptfällen nicht abweichen wird. Denn die Disposition zur Assimilation der mittleren Fälle nach beiden Seiten dürfte bei jeder Reizstufe im wesentlichen der Wahrscheinlichkeit der sicheren Verschiedenheitsurteile dieser Stufe proportional sein, wodurch also der Schnittpunkt der Kurven $F_g(x)$ und $F_k(x)$ erhalten bleiben muß. Das gesuchte Optimum selbst erscheint hiernach im Punkte des Gleichgewichtes dieser beiderseitigen Attraktion, d. h. eben im Schnittpunkt der k- und g-Kurve mit seiner gleichen Wahrscheinlichkeit für beide Unterschiedsurteile gelegen. Dieser Schnittpunkt, für den wir im folgenden das einfache Symbol $r(><)$ einführen wollen, ist ohne spezielle Voraussetzung von demjenigen der hypothetischen K.-G. $f_o(x)$ und $f_u(x)$, also z. B. von $r_{gl}(\mathfrak{D})$, wie überhaupt von jedem anerkannten Hauptwerte analytisch völlig unabhängig, was somit auch für das von ihm abhängige Teilungsverhältnis $S_o : S_u$ gelten würde. Macht man aber nun die spezielle Voraussetzung der Gültigkeit der Φ-Funktion für die Urteilskurven nach § 31a, so gilt für $r(><)$ eine überaus einfache Gesetzmäßigkeit die schon F. M. Urban später selbst hervorhebt[1]), aber neben seiner oben genannten rein empirischen Beziehung zu $\frac{r_o(\mathfrak{C}) + r_u(\mathfrak{C})}{2}$ noch nicht weiter als Begründung der Repräsentationsfähigkeit von $r(><)$ verwertet, wahrscheinlich, weil sie jener Beziehung im allgemeinen, genau genommen, widerspricht und daher gerade für die Abweichung des $r(><)$ von dem einfachen arithmetischen Mittel der Schwellen-Zentralwerte $r_o(\mathfrak{C})$ und $r_u(\mathfrak{C})$ in Betracht kommt. Es ist nämlich dann[2])

$$(r_o - r(><)) : (r(><) - r_u) = h_u : h_o. \qquad [302]$$

Die aus $r(><)$ berechneten wahren Schwellen, die wir analog durch $S(><)$ kennzeichnen wollen, sind also einfach der Präzision ihrer Bestimmung indirekt proportional, oder es gilt

$$S_o(><) : S_u(><) = h_u : h_o \qquad [302a]$$

Hiermit ist der vorgeschlagene Äquivalenzwert $r(><)$ allerdings zunächst wieder nur ebenso, wie es oben auch für r_{gl} unter Voraussetzung spezieller Verteilungsgesetze für möglich erklärt wurde, zu der Streuungsform der Verteilungsfunktion der hypothetischen K.-G. $f_o(x)$ und $f_u(x)$, noch nicht aber zu einem bereits bekannten Verhältnisse der Hauptwerte der wahren Schwellen selbst in Beziehung gesetzt. Schon Fechner hat aber seinerzeit den Satz, daß die Unterschiedsempfindlichkeit dem Präzisionsmaße des einzigen K.-G. $f(x)$, der bei seiner S. 197 genannten Aufteilung noch übrig blieb, umgekehrt proportional sei, sogar zur einzigen Grundlage der Schwellen-

1) a. a. O. XVI, S. 202.

2) Dieser Satz folgt unmittelbar aus Gl. [271] und [272] S. 200f., da unter Voraussetzung der Φ-Funktion für $F_g(x)$ und $F_k(x)$ hiernach für $x = r(><)$ einfach

$$\Phi\, h_0(x - r_0) = -\Phi\,(h_u(x - r_u)) = \Phi\,(h_u(r_u - x))$$
$$h_0(x - r_0) = h_u(r_u - x)$$
$$(x - r_0) : (r_u - x) = h_u : h_0.$$

bestimmung überhaupt machen wollen (s. auch unten S. 273f.), und G. E. Müller hat trotz seiner Polemik gegen diese künstliche Beseitigung der eigentlichen Schwelle $r_o - r_u$ bereits in seiner Grundlegung wenigstens die ungefähre empirische Gültigkeit der indirekten Proportionalität der richtig berechneten Schwellen zum Präzisionsmaße anerkannt. Hiermit steht aber gerade die Auffassung des Urbanschen Wertes r(><) als Teilungspunkt A des Gebietes r_o—r_u unter Voraussetzung des einfachen E.-G. für die Schwellenschwankungen im besten Einklang. Daß dann Urban gleichzeitig auch eine gute Übereinstimmung seines Wertes mit

$$\frac{r_o(\mathfrak{S}) + r_u(\mathfrak{S})}{2}$$

fand, beruhte nur auf der zufälligen mittleren Gleichheit der von ihm für seine sieben V.-P. abgeleiteten oberen und unteren Präzisionsmaße bei Gewichtsversuchen (vgl. S. 145). Es war nämlich (a. a. O. XVI, S. 192) zufällig das Mittel von $h_o = 0{,}121$ und von $h_u = 0{,}120$.[1] Er hat sich aber später auch noch aus dem gesamten hier schon öfters zitierten Kellerschen Material über Vergleichungen von Schallintensitäten nach der Methode der mehrfachen (fünf) Fälle für die zwei S. 179 genannten Reduktionen die beiden Präzisionsmaße nach der Φ-Hypothese berechnen lassen.[2] Hier wurde das Mittel aus vier Beobachtern und drei verschiedenen Reizstufen bei der ersten Reduktionsform

$$h_o = 0{,}131 \text{ und } h_u = 0{,}142$$

und bei der zweiten Form

$$h_o = 0{,}143 \text{ und } h_u = 0{,}156,$$

woraus sich an der Hand des Urbanschen Äquivalenzwertes r(><) einerseits eine geradezu überraschend gute Übereinstimmung der beiderseitigen Verhältnisse der von Müller als „Überschwellen" bezeichneten Werte für **g** und **k** und derjenigen für die einfachen Schwellen für g und k ergibt, nämlich

$$\mathbf{S}_o(><) : \mathbf{S}_u(><) = 1{,}084 : 1$$
$$S_o(><) : S_u(><) = 1{,}09 \;\; : 1,$$

andererseits aber nunmehr in der Tat auch eine kleine Abweichung der r(><) von $\frac{r_o + r_u}{2}$ im Sinne des Weberschen Gesetzes. Da der Schnittpunkt zweier Kurven von Zufälligkeiten in verstärktem Maße abhängig ist, wird für den Urbanschen Äquivalenzwert r (><) noch mehr wie für die anderen Hauptwerte der Vorteil der Ausgleichung nach einem speziellen Verteilungsgesetze zur Geltung kommen. Doch kann man auch für ihn, falls die empirischen Kurven bereits regelmäßig genug aussehen, das unmittel-

1) Über die Berechnung von h_o und h_u nach dem Müller-Urbanschen Verfahren vgl. S. 210ff.

2) Archiv f. d. ges. Psychologie, XVII, 1910, S. 383.

bare Interpolationsverfahren nach S. 58 anwenden. Die allgemeine theoretische Bedeutung der Sätze, die aus der Φ-Hypothese bei gegenseitiger Unabhängigkeit von h_0 und h_u abzuleiten sind, läßt dabei den Wert r ($\times$) auch nach dem unmittelbaren Verfahren noch wichtig genug erscheinen. Bei der schon S. 215 angedeuteten häufigen Übereinstimmung der Präzisionsmaße $h(\mathfrak{A}) = \frac{1}{M(\mathfrak{A})\sqrt{2}}$ nach dem unmittelbaren Verfahren mit dem h nach dem Müller-Urbanschen Verfahren läßt sich schließlich auch noch der sehr bequeme Mittelweg empfehlen, unter Einbeziehung von [240], [242], [254] und [255] aus der Gleichung

$$(r_0(\mathfrak{A}) - r'(\times)) : (r'(\times) - r_u(\mathfrak{A})) = M_0(\mathfrak{A}) : M_u(\mathfrak{A})$$

den leicht dem Gedächtnis einzuprägenden Wert

$$r'(\times) = \frac{r_0(\mathfrak{A}) \cdot M_u(\mathfrak{A}) + r_u(\mathfrak{A}) \cdot M_0(\mathfrak{A})}{M_0(\mathfrak{A}) + M_u(\mathfrak{A})} \qquad [303]$$

zu berechnen, der nur bei Gleichheit der beiden mittleren Fehler zu $\frac{r_0(\mathfrak{A}) + r_u(\mathfrak{A})}{2}$ wird. Es werden also einfach die beiden nach dem Prinzip des a. Mittels bestimmten Grenzreize mit Gewichten gemischt, die dem Streuungsmaße der Gegenseite gleich sind.

5. Die Verwertung der Abhängigkeitsbeziehung zwischen Schwelle und Reizstufe (des Weberschen Gesetzes u. ä.) zur Bestimmung des Äquivalentes und die korrekte Ableitung solcher Beziehungen.

Manchmal nahm man auch ohne weiteres an, daß auf Gebieten, auf denen man das Webersche Gesetz für die Abhängigkeit der Unterschiedsschwelle s von der Reizstufe voraussetzen könne, auch stets das geometrische Mittel der Grenzreize $\sqrt{r_o \cdot r_u}$ als der gesuchte Äquivalenzwert (Schätzungswert) anzusehen sei. Wo dagegen die absolute Konstanz der Unterschiedsschwelle gelte, da sei auch das einfache arithmetische Mittel $\frac{r_0 + r_u}{2}$ der gegebene Schätzungswert. Obgleich aber diese Berechnung der neuen Unbekannten A, bzw. S_0 und S_u mit Recht direkt auf Gesetzmäßigkeiten über die Schwellen selbst, nicht nur über die Streuungsform ihrer K.-G. zu fußen bestrebt ist, wäre eine so einfache Übertragung von Beobachtungen über Abhängigkeiten, bei der man sehr spezielle, entscheidende Nebenumstände der Ableitung nicht mit in Betracht zieht, unter Umständen weniger richtig als jene indirekten Bestimmungen des Äquivalenzwertes an der Hand einer Gesetzmäßigkeit, der wirklich eine große Allgemeingültigkeit zuzuschreiben ist. Das Webersche Gesetz gilt aber längst nicht mehr als eine Formel, nach der man bei gegebenen Intensitäten und Extensionen aus den physikalischen Reizmaßen die Unterschiedsschwellen sicher berechnen könnte. Es ist vielmehr ein hypothetisches Prinzip, das aus häufig sehr unregelmäßigen Steigerungen der Schwelle beim Anwachsen der beurteilten

Reizquantitäten immer nur dadurch herausgelesen werden kann, daß man die überall zugleich beobachteten Störungen der einfachen Proportionalität der Schwelle zur Reizstufe auf allerlei Nebenumstände zurückführt, von denen hier nur die Abweichungen der Maßverhältnisse der Sinneswahrnehmung von den objektiven Reizmaßen, die Einflüsse der Aufmerksamkeit und Merkfähigkeit und vor allem die Eigentümlichkeit der speziellen Messungsmethode hervorgehoben seien. Insbesondere ist eine irgendwie einfachere Abhängigkeit der Schwellen von der Reizstufe, sei es nun nach dem Weberschen oder irgend einem anderen Gesetze, immer nur dann zu erwarten, wenn die zu einer empirischen Abhängigkeitsfunktion geordneten Schwellen wirklich unter genau den nämlichen subjektiven Bedingungen abgeleitet wurden. Dies ist aber gerade dann immer nur sehr bedingt zuzugeben, wenn die Schwelle der einen Stufe eine „obere", diejenige der anderen eine „untere" in dem Sinne ist, daß sie in verschiedenen Regionen einer auf den nämlichen Normalreiz N bezogenen Vollreihe vorkam. S_0 und S_u sind in dieser Hinsicht nämlich nur dann wirklich vergleichbar, wenn durch entsprechende Variation des Normalreizes N die hier stets als Ideal vorausgesetzte Unwissentlichkeit bezüglich der Reizstufe erreicht war, welche bei der Ableitung von $F_g(x)$ und $F_k(x)$ als Normalreiz festgehalten werden soll. Bei den bisher üblichen Vollreihen aber, bei denen der Normalreiz meistens innerhalb der ganzen Reihe konstant gehalten wurde oder der V.-P. sogar ausdrücklich bekannt gegeben war, ist einerseits das Sinnesorgan an diese mittlere Reizstufe N besonders angepaßt, und außerdem schleicht sich allmählich eine „absolute" Schätzung des V gemäß einer Vorstellung vom Normalreize N ein, die von allen früheren Wahrnehmungen herstammt und zugleich durch allerlei Assoziationen und dergl. modifiziert ist. Das Resultat dieser Schätzung wird also von der jeweiligen Neu-Auffassung der unmittelbar vorhergehenden Reizstufe teilweise unabhängig. Am stärksten ist diese eigenartige perzeptive und apperzeptive Adaptation wohl bei der Ableitung oberer und unterer Veränderungsschwellen ausgeprägt, bei denen der Normalreiz die konstante Erregung ist, die dann einfach vorübergehend vermehrt oder vermindert wird. Gerade hier läßt sich aber bei Intensitäten und Extensionen im allgemeinen feststellen, daß die Vermehrung leichter auffällt als die Verminderung.

Die spezielle Prüfung des Weberschen Gesetzes geschah aber ja auch mit Recht in der Weise, daß der Normalreiz selbst in verschiedenen Reihen variiert wurde, wobei die Schwelle stets nach dem nämlichen Schema abgeleitet wurde. Am unmittelbarsten und frei von allen Hypothesen über die Lage des Äquivalenzwertes A erkennt man also diese Abhängigkeit aus der ganzen Doppelschwelle $s_0 + s_u = S_0 + S_u = r_0 - r_u$ für verschiedene Normalreize $N_I, N_{II} \ldots N_r$. Hat man aber dann die Versuche hiezu in der oben genannten Weise so kombiniert, daß diejenigen, die in dem nachträglichen Schema der Verteilungsfunktionen für den Normalreiz N_I zur Kurve der g-Urteile $F_g(x)_I$ hinzugehören, in einem anderen Schema für einen entsprechend größeren Normalreiz N_{II} dagegen bei der Verteilungsfunktion des k-Urteile $F_k(x)_{II}$ in Betracht kommen, so kann in solchen Schematen bezüglich des Verhältnisses zwischen S_0 und S_u kein Widerspruch zu der allgemeinen Gesetzmäßigkeit über die Abhängigkeit der Schwelle von der Reizstufe mehr enthalten sein. Bei geringer Ausdehnung des gesamten Unsicherheitsbereiches $E_0 - E_u$ wäre allerdings selbst bei der Gültigkeit des Weberschen Gesetzes keine große Differenz zwischen S_0 und S_u zu erwarten. Bisher waren indessen auch auf Gebieten, auf denen S_0 unter sonst gleichen Bedingungen S_u in der Tat überwiegen müßte, beim Wegfall besonderer Fehler s_0 und s_u oft nur deshalb annähernd gleich, weil die Differenz durch die apperzeptive Anpassung an den Normalreiz kompensiert wurde. In der genannten Weise wäre aber dann eben nicht nur diese spezielle Abhängigkeit der Schwelle von der Reizstufe, sondern jede sonstige funktionelle Beziehung der Schwellen zu anderen Größen, also z. B. auch zu den oben genannten Präzisionsmaßen, erst noch genauer zu prüfen, als dies bisher geschehen war. Dabei ist die relativ geringe Zahl von Einzelversuchen, die insbesondere bei der Verwertung der arithmetischen Mittel r_0 ($\mathfrak{A}$) usw. fernerhin für jede Vergleichsbedingung genügen wird, eine wesentliche Voraussetzung dazu, daß die bedeutend größere Zahl verschiedenartiger Einzelversuche, die zu diesen systematisch bedingten Variationen in den verschiedenen Richtungen notwendig werden, immerhin wenigstens schneller und daher auch unter konstanteren Bedingungen erledigt werden können, als wenn man auch noch jede Vergleichsbedingung sehr oft wiederholen müßte. Daneben wirkt aber doch auch oft der Umstand vereinfachend, daß viele psychologische Einflüsse, z. B. im Gebiete der sog. optischen Täuschungen, so kräftige sind, daß der resultierende Totalfehler c den Unsicherheitsbereich weit überschreitet[1]) und die Frage nach dessen Untereinteilung durch den Äquivalenzwert nur noch eine sekundäre Bedeutung besitzt. Die Einflüsse von Variationen, die zur Analyse der Komponenten so deutlicher Wirkungen vorgenommen werden, können dann mittelst der Annahme des einfachen a. Mittels $\frac{r_0 + r_u}{2}$ als Äquivalenzwert wohl hinreichend genau verfolgt werden.

d) Die Berücksichtigung der Schätzung nach dem absoluten Eindruck.

Durch die Voraussetzung, daß die Stellung einer Reizstufe als Haupt- oder als Vergleichsreiz bei ihrer Einbeziehung in eine Vollreihe an den mit der „Lage“ gesetzten Auffassungsbedingungen eigentlich gar nichts in kontrollierbarer Weise ändern darf, wollte diese Theorie der Fehlermessung insbesondere auch einen ganz speziellen Einfluß ausschalten, der Müller zum ersten Male bei seiner mit Martin angestellten Untersuchung über Hebung von Gewichten aufgefallen war, und von ihm als eine Verschiedenheit der sog. „Schätzung nach dem absoluten Eindrucke“ bei dem jeweiligen N und V gedeutet wurde[2]). Es ist bekannt, daß wir Dinge als

1) Wie aus Fig. 12, S. 251 und Gl. [265] und [296] zu ersehen ist, wird, je nachdem der Fehler $A - N'$ oder $A - N''$ positiv oder negativ ist, die eine der beiden Schwellen s_u oder s_0, bzw. S_u oder S_0 negativ.

2) Martin und Müller, Zur Analyse der Unterschiedsempfindlichkeit, 1899, und Müller, Gesichtspunkte usw. S. 113ff. Vgl. auch meine Dissertation „Vorstellungs- und Gefühlskontrast“, Zeitschr. für Psych. u. Physiol. d. Sinnesorg., Bd. 18, 1898, S. 59ff. und Experimentelle Analyse der Bewußtseinsphänomene 1908, S. 164.

schwer oder leicht, groß oder klein schlechthin bezeichnen, offenbar auf Grund von Erwartungen, die von unseren Erfahrungen an ähnlichen oder aus irgend welchen Gründen für uns gerade „maßgebenden" Gegenständen der gleichen Dimension überhaupt herstammen. Bei Vergleichung einer gegebenen Größe mit einer ganz bestimmten anderen, mit der wir sie „eigentlich" vergleichen wollen, mischt sich nun diese Angleichung an jene schwer kontrollierbaren Maßstäbe des absoluten Eindruckes jederzeit in die Beurteilung der beiderseitigen Relation mit ein, oder diese wird gewissermaßen durch die Komponenten des absoluten Eindruckes mitbestimmt. Geschähe nun die Angleichung von N und V an den fremden Maßstab als sekundären „Normalreiz" beiderseits völlig gleichmäßig, so könnte das Endresultat offenbar keine wesentliche Verschiebung des Fehlers ergeben. G. E. Müller hat denn auch bei einer willkürlichen Einstellung in dieser Richtung wirklich keine deutlichere Störung der (nach S. 238 erweiterten) Umkehrbarkeit des Lagefehlers finden können. Im allgemeinen ist aber vor allem dann, wenn N und V als solche bekannt sind, eine unwillkürliche Bevorzugung dieses absoluten Eindruckes des Vergleichsreizes V vorhanden, besonders bei den größeren Differenzen zwischen N und V. Müller geht bei seiner Formulierung dieser Tatsachen wieder von der speziellen Voraussetzung der Kongruenz der Verteilungskurven bei idealer Umkehrbarkeit des Fehlers aus (vgl. S. 249), die er eben durch die besondere Vergleichsweise gestört fand. Dabei zeigte sich die sog. „generelle Urteilstendenz", bei gleicher wirksamer Differenz mehr richtige Fälle zu ergeben, wenn V an zweiter Stelle kam, als wenn es vorausging. Hieraus kann man allerdings zunächst bezüglich des Fehlerhauptwertes noch keine notwendige Veränderung beim Wechsel der Lage von N und V ableiten, sondern nur eine Veränderung der Doppelschwelle $r_0 - r_u$ und des mittleren Präzisionsmaßes.

Erst bei den einseitigen „positiven" oder „negativen" Typen der Urteilstendenz, bei denen auch die Richtung der Verschiedenheit für diese Bevorzugung der absoluten Schätzung des V maßgebend wird, verschiebt sich mit dem Lagewechsel notwendig auch das Verhältnis der physikalischen Schwellen s_0 und s_u, woraus sich eine Änderung des konstanten Fehlers c (vgl. S. 251 f.) und des Verhältnisses von h_0 und h_u ergibt. Offenbar gehören aber diese Einzelheiten, welche durch die von Whipple[1]) bereits begonnene Variation des N in größerem Umfange in der S. 245 genannten Weise noch allgemeiner zu untersuchen wären, nicht mehr zu den allgemeinen methodischen Erörterungen, die sich mit dem Hinweis auf diesen wichtigen Faktor und die empirisch nachgewiesene Hauptrichtung seines Einflusses begnügen müssen.

1) An analytic study of the memory image und the process of judgment in the discrimination of clangs and tones. Am. Journ. of Psych. XII, 1900, S. 409 u. XIII, 1901, S. 219.

Kapitel 9.

Die historischen Hauptmethoden der Schwellen- und Fehlermessung.

35. Die Herstellungsmethode.

a) Die Notwendigkeit der Ersetzung der verschiedenen früheren Methoden durch ein einziges vollkommeneres Verfahren.

Nimmt man die früheren Ausführungen des siebenten Kapitels zum letzten Paragraphen hinzu, so sind darin nunmehr alle wesentlichen methodischen Gesichtspunkte entwickelt, die zur exakten Bestimmung von Schwellen und Fehlern notwendig werden. Man kann hiernach offenbar, genau genommen, nur von einer exakten Methode hierfür sprechen. Sie besteht eben in der Ableitung von „vollständigen Reihen" (Vollreihen) der schon S. 188 und 244 beschriebenen Art, deren Abstufungen sich möglichst von E_u bis E_0 des Schemas Fig. 8a zu erstrecken haben. Will man nur die Doppelschwelle $r_0 - r_u = s_0 + s_u = S_0 + S_u$ kennen, so ist alles Erforderliche schon im 7. Kapitel zu finden. Auch wenn es aber nur auf die Schwelle, nicht auch auf den Fehler (Totalfehler) ankommt, ist es am besten, wenn man die Vollreihe nach den S. 245 angegebenen Gesichtspunkten, insbesondere durch eine geeignete Anzahl von Zusatzversuchen, so ableitet, daß der V.-P. hierbei die Lage des N und V unbekannt bleibt. Denn dann ist sie auch dem Totalfehler, mit dem sie bisweilen in psychologischer Beziehung steht, richtig zuzuordnen, der seinerseits nur unter dieser Bedingung allgemeingültig genug abzuleiten ist, vorausgesetzt, daß die zuletzt diskutierte Frage nach dem Fehlerhauptwerte entschieden ist. Die Notwendigkeit einer empirischen Kontrole seiner Berechnungsweise an der Hand des Korrespondenzsatzes [296] dürfte vorläufig allerdings noch eine größere Anzahl von Vollreihen erforderlich machen. Dabei wird es dann auch wieder von besonderem Vorteil sein, daß unser unmittelbares Verfahren durch Einbeziehung des arithmetischen Mittels die Vollreihen bezüglich der erforderlichen Zahl von Einzelversuchen wesentlich entlastet.

Falls daher diese Methodik nur den zukünftigen Untersuchungen von Fehlern und Schwellen als solchen dienen sollte, könnte man auf eine spezielle Darstellung der historischen „Maßmethoden" Verzicht leisten, da keine derselben allen bisher für richtig erkannten Gesichtspunkten Rechnung trägt. Sonst würden sie ja nach dem Gesagten vor allem auch keine Mehrzahl bilden, die nur dadurch möglich wurde, daß sie immer nur einzelne Hauptmomente der einen genauen Methode für sich herausgriffen und mitunter auch mit neuen eigenartigen Faktoren verbanden, die für den Ausfall des Resultates irrelevant oder bisweilen sogar nachteilig sind. Da sie aber trotzdem wenigstens vielfach brauchbare Näherungswerte ergaben und dadurch einen vorläufigen Überblick über wichtige Gesetzmäßigkeiten ermöglichten, so sollen sie im folgendem zunächst zur Orientierung über die Literatur in den wesentlichsten Punkten skizziert und zu der einen vollkommenen Methode ins Verhältnis gesetzt werden. Aus dieser Angleichung entspringen aber dann doch auch wiederum Gesichtspunkte, deren Verfolgung die Resultate dieser historischen Methoden als Effekte bestimmter Einstellungen und Wahrnehmungsbedingungen psychologisch verständlich machen kann. Ja vielleicht gewinnen manche derselben dadurch sekundär sogar noch einmal eine neue aktuelle Bedeutung auf rein empirischer Grundlage.

b) Das Wesen der Herstellungsmethode.

Am ehesten könnte man noch dem von G. E. Müller als „Herstellungsmethode" bezeichneten Verfahren einen selbständigen Wert zuerkennen, bei dem das ganz neue Moment hinzukommt, daß die V.-P. selbst ein variables Vergleichsobjekt in den einzelnen Versuchen immer wieder von neuem so einstellt, daß es zu einem gegebenen Normalreiz in einer vorgeschriebenen Relation steht. An und für sich wäre diese Aufgabe also zunächst allgemein genug, um z. B. die Herstellung eines beliebig verschiedenen Reizes unter sich zu befassen. Doch gewinnt sie natürlich erst dadurch eine bestimmtere Gestalt, daß die inhaltliche Grundlage der vorgeschriebenen Beziehung eine enger begrenzte ist. Im Gebiete der Verschiedenheitsrelationen aber gilt dies höchstens für den Grenzzustand der sog. „ebenmerklichen Verschiedenheit", deren Bewußtsein schon E. H. Weber für eindeutig genug erachtete, um eine Untersuchung der Abhängigkeit der hierzu erforderlichen Reizdifferenz von der Quantität der Vergleichsreize mit der Ableitung der nach ihm benannten Gesetzmäßigkeit zu identifizieren. Sobald nun eine solche auf bestimmte Stufen des V beschränkte Relation als Ziel der Einstellung vorgeschrieben ist, bilden die Endergebnisse der einzelnen Versuche einen einfachen K.-G., wie es schon S. 34 an einem derartigen Beispiele erläutert wurde. Die Verteilungskurve eines solchen K.-G. ist dann auch den mit der X-Achse geschlossenen Kurven der Methode der Vollreihen verwandt. So steht z. B. der K.-G. der eben genannten Einstellung auf ebenmerkliche Verschiedenheit zu den S. 165 und 179 genannten Häufigkeitskurven der passiven Beurteilung gegebener Reizstufen als „ebenmerklich größer" bzw. „ebenm. kleiner" bei fünf Hauptfällen **g**, $_{g}$, u, $_{k}$, **k** in Beziehung, die ebenfalls mit der X-Achse geschlossen sind.

Die natürlichste Anwendung dieser Methode besteht aber wohl in der wiederholten Einstellung auf subjektive Gleichheit, die von Wundt einfach als „Methode der Gleicheinstellung"[1]) bezeichnet wird, und an die auch in jenem Beispiel S. 34 zunächst allein gedacht war. Sie wurde vor allem in der physikalischen Photometrie angewandt, wobei sie als das einfachste Hilfsmittel erschien, um trotz der Unterschiedsschwelle, deren Bedeutung gerade auf diesem Gebiete von Bouguer[2]) und Lambert[3]) zuerst erkannt wurde, bzw. trotz der Unsicherheit jedes einzelnen Angleichungs-

1) Grundzüge der Physiol. Psychologie I[6], S. 595.
2) Traité d'optique sur la gradation de la lumière. 1760.
3) Photometrie, deutsch von Anding, Ostwalds Klassiker der ex. Wiss. Nr. 31 bis 33.

versuches überhaupt, in dem Mittelwerte der oft wiederholten Einstellung ein brauchbares Äquivalent des Normalreizes zu liefern. Steinheil[1]) erkannte aber auch bereits eine zweifellose Beziehung des Streuungsbereiches der zufällig wechselnden Endstellungen der Einzelversuche, ausgedrückt durch den wahrsch. Fehler P (s. S. 109), zu der Unterschiedsschwelle s, die freilich zunächst im wesentlichen nur indirekt in der beiderseitigen Proportionalität zur Intensität des Normalreizes gefunden wurde. Jedenfalls nahm dann Fechner um dessentwillen dieses Verfahren ganz allgemein unter die psychophysischen Maßmethoden zur Bestimmung der Unterschiedsempfindlichkeit auf, der er den seit Gauß als genauestes Streuungsmaß anerkannten „mittleren Fehler“ M des K.-G. der Gleicheinstellungen reziprok setzte. Deshalb bezeichnete er dann auch diese ganze Methode überhaupt als diejenige des „mittleren Fehlers“. Doch verwendete er selbst und viele Psychophysiker nach ihm neben dem Werte M vielfach die bequemere „mittlere Variation“ D. Denn diese bleibt ja bei genauer Gültigkeit des einfachen E.-G. für diesen K.-G. ohnehin zu M proportional, und es kam eben zunächst nur auf diese Proportionalität an, da man sich lange Zeit mit der U.-S. fast nur zur Kontrolle des Weberschen Gesetzes befaßte. Außerdem scheint aber der Hauptwert der Endstellungen selbst wieder den nächstliegenden Äquivalenzwert A in dem S. 250 definierten Sinne und die Differenz dieses Mittels vom Normalreize dementsprechend wieder ein besonders bequemes Maß des Fehlerhauptwertes abgeben zu können, soweit überhaupt der Vergleichsgegenstand eine derartige Selbsteinstellung ermöglicht. Dabei bezeichnet Fechner die Abweichungen der einzelnen Einstellungen a_1, a_2 . . . a_n von dem Hauptwerte (arithm. Mittel) als „(rohe) variable Fehler“ und den Abstand des Mittels A von N demgegenüber als „konstanten Fehler“, so daß sich diese nach S. 252 nicht unmißverständliche Terminologie für den Fehlerhauptwert wohl speziell von hier aus in Fechners erstmaliger systematischer Statistik der Psychophysik überhaupt eingebürgert hat.

c) Die Einwände gegen die Vergleichbarkeit des K.-G. der Herstellungsmethode mit dem K.-G. $F_u(x)$ der Gleichheitsfälle aus Vollreihen.

G. E. Müller hat nun die Bestimmung der Unterschiedsschwelle und des Totalfehlers nach dieser Methode der „mittleren Fehler“ einer einschneidenden Kritik unterzogen, bei der vor allem ihre Schwäche bezüglich der Schwellenmessung deutlich hervortrat. Nachdem einmal das Wesen der Schwelle als ein oberes und unteres Bedingungsextrem definiert ist, kann offenbar kein Verfahren als Messung einer solchen Schwelle anerkannt werden, das nicht zu dem in § 29 dargelegten Grundschema der in diesem Begriffe zusammengefaßten Erfahrungen in eine klare Beziehung gebracht ist. Denn der induktive Beweis dafür, daß ein auf irgend eine Art abgeleiteter Wert zu einem aus jenem Schema bereits genügend verständlichen Maße der Unterschiedsschwelle s proportional und somit als rein empirisches Schwellen-

1) Elemente der Helligkeitsmessungen am Sternhimmel. 1837. (Vgl. auch G. F. Lipps, Psychische Maßmethoden 1906, S. 42.)

maß verwendbar sei, könnte der Herstellungsmethode bei der methodischen Unvollkommenheit der früheren direkten Bestimmungen noch keinesfalls eine sichere Stütze verleihen. Nun erlebt aber doch die V.-P. bei dieser selbsttätigen Angleichung des V an N fürs erste schon eine ganz andere Einstellung, als sie in § 29 bei jener Ableitung der rel. Häuf. passiver Beurteilungen fertig gegebener Reizstufen zunächst vorausgesetzt worden war. Ebbinghaus hat diesen Gegensatz ebenso kurz als anschaulich in der Weise charakterisiert, daß er die Methode der Selbsteinstellung als „Reizfindung", jene bisher von uns allein betrachtete aber als solche der „Urteilsfindung" bezeichnete. Abgesehen davon, daß die eigene Einstellungstätigkeit den Beobachter bei der „Reizfindung" noch besonders belastet, selbst wenn diese bei stetig und leicht zu verändernden Gegenständen noch so einfach ist, übt die Vorschrift, zu einer bestimmten Relation die passende Reizstufe zu finden, offenbar auch auf die Apperzeption der Relationen, auf deren Variabilität schon S. 254f. hingewiesen wurde, einen einseitigen Einfluß aus. Immerhin stellen diese Momente nur Nebenbedingungen dar, über deren Einfluß leicht eine Untersuchung nach der Urteilsfindung parallel gehen könnte[1]). Störender kann dagegen nach S. 245 schon die weitere Einseitigkeit werden, daß die V.-P. über die Reizlage, die in dem K.-G. als Normal- und Vergleichslage funktioniert, hier naturgemäß niemals im ungewissen bleiben kann, wenngleich dies vor allem nur für das Verhältnis der oberen zur unteren „wahren" Schwelle $S_0 : S_u$ oder den Fehlerhauptwert von Bedeutung ist. In dieser Beziehung hat man ferner mit Recht auch noch von der Einstellungstätigkeit als solcher eine einseitige Ablenkung befürchtet, da zunächst einmal schon ihre eigenen Empfindungs- und Impulselemente Anhaltspunkte für Assoziationen abgeben, die vom Urteilseffekt unabhänig rein gewohnheitsmäßige Einstellungstendenzen herbeiführen können[2]). Der prinzipiellste von Müller erhobene Einwand aber gründet sich darauf, daß bei diesem K.-G. der Selbsteinstellungen nur die rel. Häufigkeiten z der Gleicheinstellungen im Verhältnis zur Summe aller Einstellungen auf irgend eine Stufe, d. h. also im Verhältnis zur Anzahl aller Einzelversuche überhaupt, gewonnen werden, nicht aber die rel. H., wie oft jeder einzelne Abszissenwert im Verhältnis zu allen seinen Darbietungen für gleich geschätzt wurde.

1) Auch bei jener Methode kann z. B. die bloße Unterscheidung zwischen „gleich" und „verschieden" ohne nähere Angabe vorkommen, welcher von beiden Reizen „größer" und welcher „kleiner" ist. Im Gegensatz zu der anderen S. 254 genannten Reduktion auf ebenfalls nur zwei kontradiktorische Komplemente g und k, bei der die Unterscheidungsleistung besonders groß ausfallen soll, bildete eine solche Form umgekehrt eine Art Vorstufe der Methode der drei Hauptfälle. Man kann sie vor allem beobachten, wenn man musikalisch Ungeübte Tonhöhen, z. B. von Stimmgabeln, vergleichen läßt. Bei kleinen Differenzen der Schwingungszahlen kann von ihnen nur angegeben werden, daß die eine Gabel überhaupt gegen die andere verstimmt, nicht aber zugleich, ob sie höher oder tiefer ist.

2) In einer jüngst erschienenen Untersuchung von W. Brown, The judgment of difference with special reference to the doctrine of the threshold, in the case of lifted weights (University of California publications in Psychology I, 1, 1910, S. 1 ff.) zeigt sich z. B. auch schon bei der andern Methode mit Beurteilung bestimmter Stufen das Verhältnis zwischen g und k verschieden, je nachdem der Beobachter sein Urteil mündlich mitteilte oder durch eine bestimmte Behandlung der Gewichte kundgab.

Gerade diese zuletzt genannte rel. H. aber, welche zuerst in § 14,3 erläutert wurde, ist der Beobachtungswert F(x) jener Verteilungsfunktionen bei der Urteilsfindung, insbesondere also auch bei $F_u(x)$, der allein zu den Bedingungsextremen der Schwelle in § 29 in eine feste Beziehung gebracht werden konnte. Während bei der Methode der Vollreihen jede einzelne Stufe womöglich gleich oft, jedenfalls aber in einer bekannten Zahl von Wiederholungen und womöglich auch während einer bekannten Expositionszeit zur Beurteilung dargeboten ist, fehlt bei der Herstellungsmethode bisher jede Kenntnis davon, wie oft und wie lange jede einzelne Reizstufe als g oder k beurteilt wird, bevor man von ihr aus zu einer dem Normalreiz N ähnlicher erscheinenden Stufe weiter schreitet. Man konnte nun bisher allerdings auch nichts Entscheidendes gegen die vor allem von G. F. Lipps vertretene Annahme einwenden, daß, wenigstens bei vielen Versuchen, auf jede Stufe ungefähr gleich viel Urteilsakte entfallen. Denn wenn auch die V.-P. bei ihrer Absicht zur Gleicheinstellung möglichst schnell in den jeweiligen Schwellenbereich $r_0 - r_u$ zu gelangen sucht, um dann hier langsamer fortzuschreiten oder vielleicht sogar noch etwas hin- und herzugehen, so könnte sich diese Bevorzugung wegen der relativen Größe der Schwankungen des jeweiligen wahren Bereiches $r_0 - r_u$ doch wenigstens innerhalb des Hauptgebietes der Unsicherheit wieder einigermaßen ausgleichen. Indessen ist diese Frage dazu angetan, rein empirisch durch eine objektive Registrierung der gesamten Einstellungsbewegung beantwortet zu werden, wie ja die Herstellungsmethode überhaupt in der manuellen Tätigkeit des Beobachters auch für die Reaktionsmethoden ein interessantes Problem abgibt. Da freilich bei einer stetigen Einstellungsbewegung den einzelnen Reizstufen nicht leicht bestimmte Urteilsakte zuzuordnen sind, so kann es sich wohl nur um den Nachweis handeln, daß keines der als Abszisseneinheit gewählten Intervalle zwischen den Extremen E_0 und E_u weder hinsichtlich der Gesamtdauer seiner Einstellung noch durch eine besondere, auf eine andere zeitliche Gliederung der Urteilsakte hindeutende Bewegungsform bevorzugt ist. Wegen der Kontrollierbarkeit der Konzentration auf die Aufgabe dürfte das Resultat wohl auch von der mit dem Übergang zu den Reaktionsmethoden zusammenhängenden Nebenwirkung wenig beeinflußt werden, die von dem auch hier kaum vermeidlichen Wissen der V.-P. ausgeht, daß ihre Einstellungsbewegung in allen ihren Einzelheiten gleichzeitig registriert wird. Die Resultate, die mit einem von mir angegebenen einfachen Apparate zur Registrierung der Einstellungsbewegung bei Augenmaßversuchen dieser Art von Stephanowitsch bisher gewonnen wurden, sprechen nun durchaus für die Müllersche Auffassung über den Verlauf der Einstellungsbewegung, wonach auch im Mittel aus sehr vielen Versuchen eine prinzipielle weitgehende Verschiedenheit bezüglich der Beschäftigung mit den einzelnen Reizstufen übrig bleibt.[1])

---

1) Ob die Differenzen zwischen den einzelnen Reizstufen in dieser Hinsicht irgend eine Gesetzmäßigkeit enthalten, die wenigstens bei einer entsprechenden Gewichtskorrektur eine Angleichung an die Methode der Vollreihen ermöglichte, ist bisher noch nicht zu entscheiden.

Selbst wenn man es aber einstweilen noch als zugestanden betrachten wollte, daß während der Einstellung die Ablehnung jeder Stufe, die dem g oder k der Vollreihen entspricht, im Mittel gleich häufig erfolgt, so wäre dadurch immer noch keine konkrete Angleichung an einen K.-G. der mittleren Urteile $F_u(x)$ nach der Methode der drei Hauptfälle möglich, da man ja die absolute Häufigkeit der von der Endstellung jedes Versuches repräsentierten u-Fälle nicht in der nämlichen Einheit ausdrücken kann, wie die als g- und k-Fälle betrachteten Bewegungsstadien. Auch ließe sich nicht etwa gar umgekehrt aus den (objektiv registrierten) g- und k-Stadien allein Kapital schlagen, da sie wegen der tatsächlich vorhandenen u-Fälle doch auch wiederum keine kontradiktorische Komplemente sind (s. S. 254f.). Ohne jede Kenntnis der Gesamtzahl aller Beurteilungen der einzelnen Stufe, zu der die Häufigkeit ihrer endgültigen Anerkennung als „gleich" ins Verhältnis zu setzen wäre, ist aber nicht einmal der allgemeinste Satz [245] S. 190 aus der Methode der Vollreihen für eine Schwellenbestimmung nach der Herstellungsmethode nutzbar zu machen. Denn hiernach entspricht die Doppelschwelle $r_0(\mathfrak{A}) - r_u(\mathfrak{A})$ dem sog. Idealgebiet der u-Fälle $i \cdot \Sigma u$, d. h. ihrer mit dem Abszissenintervall i multiplizierten absoluten Summe, dividiert durch die hier gerade unbekannte Zahl m der sämtlichen Beurteilungen jeder Stufe. Die Konstanz der Anzahl n aller u-Fälle überhaupt bei allen unter sich zu vergleichenden Anwendungen der Herstellungsmethode ist für diese Bestimmung völlig irrelevant, da sie nach dem Gesagten keinen neuen Anhaltspunkt dafür hinzufügt, wieviele Versuche im ganzen unter sonst gleichen Umständen nach der Methode der Vollreihen bei gleichem Extrembereiche $E_0 - E_u$ jedesmal zu diesen n u-Fällen hinzugehören würden, d. h. wie groß $\frac{m}{i}(E_0 - E_u)$ wäre.

d) Die Versuche einer Schwellenbestimmung bei bloßer Kenntnis der Verteilung der Gleichheitsfälle durch Hinzunahme spezieller Hypothesen.

Nach Anerkennung dieser Unkontrollierbarkeit des Verhältnisses zwischen den g, u und k erscheint aber nunmehr wohl auch der tatsächlich unternommene Versuch ziemlich wertlos, durch Einführung neuer, ganz spezieller und unwahrscheinlich einfacher Voraussetzungen über die Verteilungsfunktionen der zufälligen Schwankungen der oberen und unteren Schwelle doch noch eine Art Rekonstruktion eines zu dem K.-G. $F_u(x)$ hinzugehörigen Systemes $F_g(x)$ und $F_k(x)$ zu ermöglichen. Ich erwähne diesen Versuch von G. F. Lipps[1]) hier auch nur deshalb, weil er uns noch Gelegenheit gibt, auf eine besonders einfache Annahme bezüglich der aus den beobachteten Urteilsfunktionen F(x) abgeleiteten hypothetischen K.-G. f(x) kurz hinzuweisen, die von G. E. Müller seinerzeit in der „Grundlegung" zuerst vertreten wurde, in seinen „Gesichtspunkten" aber ausdrücklich zugunsten der in § 29 nur noch allein berücksichtigten Auffassung aufgegeben ist. Diese Vereinfachung der Theorie der Methode der drei Hauptfälle, welche die Behandlung des K.-G. der Herstellungsmethode nach G. F. Lipps vermittelte, läßt

1) a. S. 203, A. 1 a. O.

sich aus der Definition der beiden hypothetischen K.-G. der oberen und unteren Schwelle $f_0(x)$ und $f_u(x)$ dadurch ableiten, daß man beide Verteilungsfunktionen genau kongruent setzt, wie es schon § 29, c, 2 (S. 178) bei der Behandlung der beobachteten Verteilung des mittleren Falles $F_u(x)$ erwähnt wurde. Diese Hypothese widerspricht also ganz direkt der Unabhängigkeit, die nach Gl. [15] zwischen $F_g(x)$ und $F_k(x)$ besteht, und wäre nach Gl. [216] und [224] nur erfüllbar, wenn beide extreme Urteilskurven durch eine Verschiebung parallel zur X-Achse (um $E_0 - E'_u = E'_0 - E_u = r_0 - r_u$) in kontradiktorische Komplemente (nach Gl. [215], S. 168) übergeführt werden könnten, wie sie in § 29, b und Fig. 7a und b (S. 171) in der Tat aus zwei kongruenten Schwellenverteilungen abgeleitet wurden [1]). Nachdem man aber nun einmal die Unabhängigkeit der beiden K.-G. $f_0(x)$ und $f_u(x)$ von einander aufgegeben hat, läßt sich natürlich auch das ganze System der Beobachtungskurven trotz des Hinzutretens der mittleren Fälle überhaupt auf einen einzigen K.-G. f(x) wie in Fig. 7b zurückführen. Man braucht sich hierzu nur die beiden unter sich kongruenten K.-G. $f_0(x)$ und $f_u(x)$ der Grenzreize r_0 und r_u durch einen einzigen, zwischen ihnen angesetzten K.-G. mit einer ebenfalls hierzu kongruenten Verteilungsfunktion

$$f(x) = \frac{F_g(x + S_0)}{dx} = -\frac{F_k(x - S_u)}{dx} \qquad [304]$$

ersetzt zu denken, der die Schwankungen des jeweiligen subjektiven Äquivalentes A zum Normalreiz N (s. S. 250), bzw. des jeweiligen Totalfehlers $f = A - N$ zur Darstellung bringt. Die jeweilige Lage des oberen und unteren „Grenzreizes" ist dann hieraus völlig eindeutig in der schon aus Gl. [304] ersichtlichen Form abzuleiten, daß man sie von dem jeweiligen Äquivalenzwert [2]) um die nunmehr konstant erachtete wahre obere bzw. untere Schwelle S_0 und S_u entfernt annimmt (s. S. 251). Die S. 168 f. betrachtete Unmöglichkeit, über den jeweiligen Einzelwert der Doppelschwelle $r_0 - r_u$ genauere Angaben zu machen, ist also zugleich mit der Annahme einer genauen Kongruenz der beiden hypothetischen K.-G. $f_0(x)$ und $f_u(x)$ sinngemäß in Wegfall gekommen [3]).

1) Damit die Kurven $F_g(x)$ und $F_k(x)$ einen symmetrischen Verlauf zeigen, wie es im allgemeinen noch eher als jene Ableitung aus der Form [215] zu beobachten sein dürfte, wäre nicht nur erforderlich, daß die Verteilungen $f_0(x)$ und $f_u(x)$ unter sich kongruent, sondern auch in sich selbst symmetrisch sind.

2) Dieser, bzw. der Totalfehler f, sind also hier als zufällig variable Einzelwerte und nicht als Hauptwerte gedacht.

3) Doch ist hiermit natürlich über die jeweilige Lage des Äquivalenzwertes selbst und somit auch über dessen Hauptwert A noch gar nichts präjudiziert, da ja die Größe der beiden Abschnitte S_0 und S_u der Doppelschwelle dahingestellt bleibt. Nur ihre Summe $S_0 + S_u$ ist zunächst als der Abstand $r_0 - r_u$ homogener Stücken der beiden kongruenten K.-G. $f_0(x)$ und $f_u(x)$ gegeben, die ihrerseits durch die Beobachtungen $F_g(x)$ und $F_k(x)$ festgelegt sind, so daß wir auch bei der Ableitung des einzigen hypothetischen K.-G. f(x) hiervon auszugehen haben. Nach einer Entscheidung über die Berechnung des Äquivalenzhauptwertes läßt sich dann natürlich auch die Lage des mittleren K.-G. f(x) und daher auch jeder der beiden Schwellenabschnitte S_0 und S_u im einzelnen ganz angeben.

Diese Zurückführung der Beobachtungen bei der Methode der Urteils- oder der Reizfindung auf das Zusammenwirken konstanter Unterschiedsschwellen mit einem hypothetischen K.-G. der Äquivalente von N läßt sich nun nach G. E. Müllers inzwischen aufgegebener Anwendung auf die Urteilsfindung so veranschaulichen, daß man nur die Wahrnehmung des Normalreizes in jedem Augenblicke von einem zufälligen (Total-)Fehler f abgelenkt werden läßt, dessen Verteilungsfunktion eben die von f (x) ist. An und für sich wird man natürlich nach S. 235 ff. derartige Modifikationen nicht auf eine der beiden Vergleichswahrnehmungen allein beschränkt denken. Vielmehr werden die Wahrnehmungen beider Reize N und V stets gleichzeitig mit je einem zufälligen „Fehler" $\pm \delta_N$ und $\pm \delta_V$ behaftet sein, wobei die Verteilungen $\mathfrak{V}_N$ und $\mathfrak{V}_V$ voneinander nicht in kontrollierbarer Weise abhängig sind. Wenn aber, wie hier, nur das „größer" oder „kleiner" überhaupt herausgefunden und durch Selbsteinstellung beseitigt werden soll, ohne daß das spezielle Größenverhältnis $\frac{N \pm \delta_N}{V \pm \delta_V}$ in Frage kommt, läßt sich ja der nämliche Effekt dieser gleichzeitigen Schwankungen ohnehin auch aus der einfacheren Annahme ableiten, daß der eine von beiden Wahrnehmungsinhalten, also z. B. V, ungestört bleibe und der andere Vergleichsinhalt N mit dem Totalfehler

$$\pm \delta_R = \pm \delta_N \mp \delta_V \qquad [305]$$

belastet sei. Da nun aus den beobachteten Urteilen sogar der resultierende Totalfehler δ_R selbst nur hypothetisch erschlossen ist, so wäre natürlich die Zurückführung seines K.-G. mit der Verteilung $\mathfrak{V}_R$ auf die Verteilungen $\mathfrak{V}_N$ und $\mathfrak{V}_R$ der beiden Elementarfehler gewissermaßen erst eine Hypothese zweiter Ordnung, die ohne Voraussetzung spezieller Verteilungsgesetze eine ganz willkürliche Sache bleiben müßte. Nimmt man aber z. B. an, daß für die beiden elementaren $\mathfrak{V}$ (x) das einfache E.-G. mit den Präzisionsmaßen h_N und h_V zutreffe, so müßte dies jedenfalls auch für die Verteilung $\mathfrak{V}_R$ gelten, da die Schwankungen der δ_N und δ_V voneinander unabhängig erfolgen sollen und δ_R nach [305] eine lineare Funktion von ihnen darstellt, und zwar die denkbar einfachste. Dabei ist dann das resultierende Präzisionsmaß h_R mit den beiden elementaren durch die Formel

$$h_R = \frac{h_N \cdot h_V}{\sqrt{h_N^2 + h_V^2}} \qquad [306]$$

verbunden[1]). Wäre also $h_N = h_V = h$, was bei sehr ähnlichen Reizen N

1) Es ist dies der einfachste Grenzfall der Formel für die resultierende Präzision einer linearen Funktion R von n unabhängigen, nach dem einfachen E.-G. schwankenden Beobachtungsgrößen X_ν ($\nu = 1$ bis n)

$$R = k + \alpha_1 X_I + \alpha_2 X_{II} + \cdots \alpha_n X_n, \qquad [308]$$

worin k und α_ν Konstante bedeuten. Der resultierende Fehler

$$\delta_R = \alpha_1 \delta_I + \alpha_2 d_{II} + \cdots \alpha_n \delta_n \qquad [309]$$

befolgt dann ebenfalls das einfache E.-G. mit der Präzision h_R, wobei

$$\frac{1}{h^2_R} = \sum \frac{\alpha^2_\nu}{h^2_\nu}. \qquad [310]$$

und V plausibel erscheinen kann, so wäre einfach

$$h_R = \frac{h}{\sqrt{2}}. \qquad [307]$$

Der beobachtete K.-G. F_u (x) der Gleichheitsfälle ist dann aus diesem hypothetischen K.-G. f (x) des jeweiligen subjektiven N-Wertes nach dem Schema Fig. 13 abzuleiten, das jedoch auf den K.-G. der Herstellungsmethode wieder nur bei der oben als unzulässig erkannten Annahme einer Konstanz der Darbietungszahl m für alle Stufen von E_u bis E_o anzuwenden wäre. Ist x die variable Stufe des Vergleichsreizes V, und S_o die obere, bzw. S_u die untere Schwelle[1]) in dem bisher (S. 244) gebrauchten Sinn des oben und

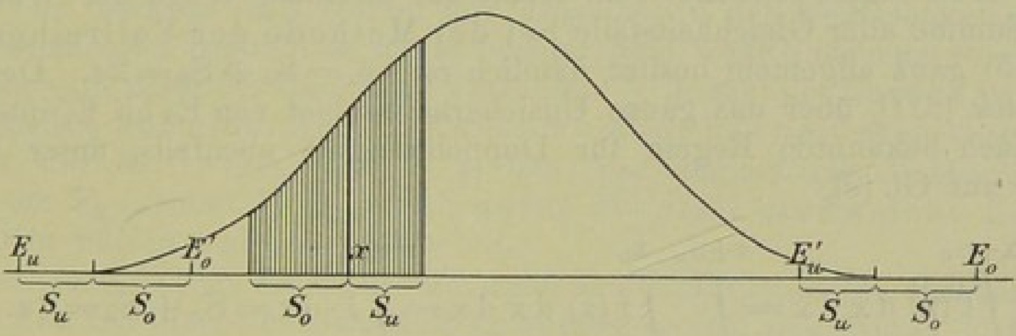


Fig. 13.

Die Ableitung des beobachteten K.-G. F_u (x) der Gleichheitsfälle aus einem **einzigen** hypothetischen K.-G. f(x) der Beobachtungsfehler und einer **konstanten** Doppelschwelle $S_o + S_u = 2s$.

unten, je nach der Lage des $V = x$ zu dem scheinbaren N, so ist nach einer ganz analogen Überlegung wie S. 176 ff.

$$F_u(x) = \int_{x - S_o}^{x + S_u} f(x)\, dx. \qquad [311]$$

Der Beweis wird durch den bekannten allgemeinen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung vermittelt, wonach das gleichzeitige Eintreten der r Fälle $\delta_1, \ldots \delta_n$ mit den rel. H. $\mathfrak{W}_1, \ldots \mathfrak{W}_n$ die Wahrscheinlichkeit

$$\mathfrak{W}_R = \mathfrak{W}_1 \cdot \mathfrak{W}_2 \ldots \mathfrak{W}_r$$

besitzt, ein Satz, nach dem auch die Genauigkeit von linearen Funktionen einzeln beobachteter Werte aus deren Einzelpräzisionen berechnet wird. Da indessen die weitere Umformung unter der Voraussetzung

$$\mathfrak{W}_\nu = \frac{h_\nu}{\sqrt{\pi}} e^{-h_\nu^2 \delta_\nu^2}$$

einigermaßen kompliziert ist, so haben wir diese Ableitung oben nicht weiter erwähnt. Vgl. im übrigen Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung etc. S. 132 ff., Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung I, 2. Aufl. S. 260 ff. (1. Aufl. S. 219 ff.). Diese Überlegung wurde für die Psychophysik zum ersten Male von G. E. Müller, Grundlegung, S. 13 ff. durchgeführt.

1) In diesem älteren Müllerschen Schema wäre also in der Tat seine auch jetzt noch beibehaltene entgegengesetzte Verwendung des „oben" und „unten" für die Schwellen die natürlichere, wie auch aus dem schraffierten Stück der Figur 13 direkt zu ersehen ist.

Das untere Extrem der u-Fälle E_u liegt dabei offenbar um die untere Schwelle S_u unterhalb des unteren Extrems des hypothetischen K.-G. der möglichen subjektiven Werte des Normalreizes N, da $V = x$ bei noch tieferen Lagen stets kleiner erscheint. Das obere Extrem E_u' der k-Fälle liegt dann ebensoviel unterhalb des oberen Extrems der hypothetischen K.-G. Andererseits ist das obere Extrem E_o der u-Fälle um S_o größer als dasjenige von f (x), während das untere Extrem E_o' der g-Fälle um ebensoviel höher liegt als das untere Extrem von f (x).

Die rel. H. der Einstellung des x bei der Herstellungsmethode im Verhältnis zu allen Einstellungen überhaupt erhielte man natürlich erst durch Division des Wertes $F_u(x)$ durch sämtliche Möglichkeiten, wie oft ein x dem N, unter Voraussetzungen dieses Fehler-K.-G. f (x) nach Fig. 13 gleich erscheinen kann. Nun ergibt sich hier sehr leicht auf direktem Wege der Wert, den diese Summe aller Gleichheitsfälle bei der Methode der Vollreihen nach Gl. (245) ganz allgemein besitzt, nämlich $r_o - r_u = S_o + S_u = 2s$. Denn der Ausdruck [311], über das ganze Unsicherheitsgebiet von E_o bis E_u integriert, wird nach bekannten Regeln für Doppelintegrale ebenfalls, unter Bezugnahme auf Gl. [9],

$$\int_{E_u}^{E_o} \int_{x-S_o}^{x+S_u} f(x)\,dx\,dx = \int_{x-S_o}^{x+S_u} \int_{E_u}^{E_o} f(x)\,dx\,dx = \int_{x-S_o}^{x+S_u} 1 \cdot dx = S_u + S_o = 2s. \quad [312]$$

So hatte denn auch schon G. F. Lipps die Gültigkeit des Satzes [245] wenigstens unter dieser speziellen Voraussetzung der Kongruenz von f_o (x) und f_u (x) erkannt, als er den mit $\frac{1}{2s}$ dividierten Ausdruck [311] der rel. H. z des einfachen K.-G. der Herstellungsmethode (unter seiner Voraussetzung der Möglichkeit einer Analogie zu der Urteilsfunktion F_u (x) der Vollreihen) gleich setzte.

Obgleich aber bei der genannten Kongruenz der beiden K.-G. der Schwellen eine solche Zurückführung der beobachteten rel. H. der Urteile auf einen einzigen K.-G. der variablen Beobachtungsfehler bei der Auffassung des N möglich ist, — ein Schema, dessen sich G. F. Lipps in diesem Zusammenhange stets bedient — ist die Umkehrung, d. h. die nunmehr ermöglichte Rekonstruktion von Verteilungen F_g (x) und F_k (x) bzw. f (x) aus dem in der Herstellungsmethode ja allein gegebenen F_u (x) nach der anderen Auffassungsweise des § 29 bzw. Fig. 8a und b mit dem Ansatz zweier hypothetischer K.-G. f_o (x) und f_u (x) (s. S. 176) wohl noch anschaulicher: Nach Gl. [228] und [229] ist das beobachtete F_u (x) bzw. F_u (x') dem in der Figur 8b senkrecht bzw. horizontal schraffierten Flächenstück gleich. Dieses ist aber zwischen E_u und E_o' bzw. E_u' und E_o offenbar bereits eindeutig aus F_u (x) allein rekonstruierbar und bestimmt hiermit auch wiederum eindeutig ein gleich breites, nach innen benachbartes Stück des hier als kongruent vorausgesetzten K.-G. der anderen Schwelle, aus dem dann, unter Hinzunahme des zugehörigen Stückes von F_u (x) selbst, auch ein zweiter gleich breiter Streifen des hypothetischen K.-G. f_o(x) zu berechnen ist usw. Setzt man aber bei diesem Verfahren, das von beiden Seiten her symmetrisch durchführbar ist, mit dem richtigen Abstand

$$E_o' - E_u = E_o - E_u'$$

ein, so muß man von beiden Seiten her das nämliche System der kongruenten f (x) erlangen. Jener Abstand $E_o' - E_u$ wäre wegen der Kongruenz der Verteilungsfunktionen der Schwellen nach S. 190, A. 2 gleich der Differenz aller entsprechenden Hauptwerte, d. h. also gleich der Doppelschwelle $r_o - r_u = S_o + S_u$. Eine derartige Berechnung läuft aber freilich auf ein sehr umständliches Probieren mit allen möglichen Distanzen $E'_o - E_u$ bzw. $E_o - E_u'$ hinaus, auf dessen nähere Ausführung im einzelnen wir hier bei der rein theoretischen Bedeutung dieser Frage wohl verzichten dürfen. Je weniger man hierbei alle Einzelheiten der beobachteten Kurve F_u (x) festzuhalten bestrebt ist, um so leichter, aber freilich auch um so weniger eindeutig wird natürlich das ganze Verfahren.[1]) Jedenfalls beruht es aber vollständig auf einer festen Annahme über das beiderseitige Verhältnis der K.-G. f_o (x) und f_u (x) bzw. der zugehörigen Beobachtungsfunktionen F_g (x) und F_k (x), nach deren Wegfall eine solche Rekonstruktion völlig unbestimmt wird.

Setzt man jedoch für die beiden unter sich kongruenten K.-G. auch noch speziell das Gaußsche einfache E.-G. voraus, so läßt sich, wie G. F. Lipps bei seinen erstmaligen Versuchen in dieser Richtung gezeigt hat, zwischen $(r_o - r_u) = (S_o + S_u) = 2s$ und dem Präzisionsmaß $h_o = h_u$ des zugehörigen hypothetischen K.-G. f (x) einerseits und den Mittelwertpotenzen M und D des beobachteten K.-G. F_u (x) andererseits eine Beziehung ableiten, die schon in § 31, a, 1b (S. 201) bei der Angleichung des beobachteten K.-G. F_u (x) selbst an das einfache E.-G. erwähnt wurde. Müller hat darauf hingewiesen, daß die hierbei gewonnene Formel[2]) für die mittlere Variation D des K.-G. F_u (x) nach der Methode der Vollreihen

$$D_{gl} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} + \frac{2S}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{hS}{3\cdot 2\cdot 1} - \frac{h^3 S^3}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 1!} + \cdots\cdots\right) \qquad [313]$$

wenigstens bei Konstanz der Größe hS zu S direkt und zu deren Präzisionsmaß h indirekt proportional sei. Dies ist aber die nämliche Voraussetzung, auf die wir schon bei der Diskussion des Schnittpunktes von F_g (x) und F_k (x) als eines möglichen Äquivalenzwertes r (><) (nach F. M. Urban) geführt wurden. Die Wahrscheinlichkeit dieser Annahme dürfte mindestens

1) Diese Schwierigkeiten der Rekonstruktion kongruenter K.-G. f (x) aus dem allein für sich betrachteten K.-G. F_u (x) treten auch bei G. F. Lipps' eigenem neuerem Versuch in dieser Richtung, den er ebenfalls ohne Voraussetzung einer speziellen Verteilungsfunktion unternimmt, deutlich hervor. Dabei muß er wegen seiner Darstellung der hypothetischen Verteilungen durch ihre Mittelwertpotenzen sogar erst noch mehrere K.-G. F_u (x) unter etwas verschiedenen Bedingungen beobachten und dabei die noch weniger plausible Hypothese einführen, daß die hypothetischen K.-G. dieser verschiedenen Reihen sämtlich von der nämlichen Form seien. Vgl. Psychische Maßmethoden, 1906, S. 133f.

2) Über deren Ableitung durch Reihenentwicklung vgl. G. F. Lipps a. S. 203, A. 1. a. O. und Müller, Gesichtspunkte S. 216f.

nicht viel geringer sein, als die Voraussetzung des einfachen E.-G. für f (x) und die Gleichheit des oberen und unteren Präzisionsmaßes. Obgleich aber nun die letztere nach S. 260 gerade bei der Herstellungsmethode trotz einer eventuellen Gültigkeit des Weberschen Gesetzes für das spezielle Beobachtungsmaterial als solches dadurch begünstigt wäre, daß hier der Normalreiz für die V.-P. stets als solcher charakterisiert sein muß, ist die genannte Proportionalität für die Mittelwertpotenzen D und M eines K.-G. der Herstellungsmethode hiermit noch keineswegs erklärt, da eben bei ihr die oft genannte Hauptvoraussetzung für die Übertragung des für Vollreihen abgeleiteten Satzes [313] nicht erfüllt ist.

Die Unkontrollierbarkeit der Urteilsvorgänge, denen der K.-G. der Herstellungsmethode eigentlich entspricht, beeinträchtigt natürlich auch die theoretische Bedeutung seines Hauptwertes als eines mittleren Äquivalentes A zu N. Immerhin dürfte es hiermit zum mindesten nicht schlechter bestellt sein, wie mit der Verwendung des D_{g1} als Schwellenmaß, zumal die spezielle Tendenz, stets die bestmögliche subjektive Gleichheit herzustellen, den Hauptwert des K.-G. dem Optimum, als das wir den Äquivalenzwert auf S. 250 einführten, besonders nahe bringen könnte. Die Einseitigkeit der Einstellung des V auf N, der nur durch mehr oder weniger künstliche Modifikationen der Methode abzuhelfen wäre, hielt allerdings auch schon Fechner für die Ursache einer besonderen Fehlerkomponente, des sog. „Hauptfehlers“, die hier noch außer dem Fehler der Raum- und Zeitlage hinzukomme. Fechners Annahme ihrer Konstanz in den vier verschiedenen Hauptlagen (vgl. S. 240) konnte jedoch Müller wieder leicht widerlegen.[1])

Im übrigen bildet auch hier der Korrespondenzsatz Gl. [296] ein sicheres Hilfsmittel, um, bei hinreichend konstanten Bedingungen der Gleicheinstellung im allgemeinen, die Brauchbarkeit irgend eines Hauptwertes des K.-G. als Äquivalent rein empirisch zu kontrollieren. Wo aber der Fehler den Unsicherheitsbereich weit überwiegt, wird die Herstellungsmethode auch jetzt schon zu einer ersten Orientierung besonders zu empfehlen sein, falls nur die Reize leicht und stetig genug abgestuft werden können.

Erst nach Entscheidung dieser Frage bezüglich des Hauptwertes wären dann auch die Punkte der ebenmerklichen Verschiedenheit nach oben und unten (oder auch der von oben oder unten her eben erreichten Gleichheit) nach der Herstellungsmethode zu bestimmen, deren Abstände vom Normalreiz N bzw. von einem eventuell durch die Gleicheinstellungsmethode bestimmten Äquivalente A ebenfalls als obere und untere Schwelle bezeichnet werden können. Dabei würde auch jede von beiden mit einem besonderen Präzisionsmaße $h_o = \frac{1}{M_o\sqrt{2}}$ und $h_u = \frac{1}{M_u\sqrt{2}}$ versehen. Die so ermittelten Grenzreize entsprächen, wie schon erwähnt, den Hauptwerten der Kurve F_g (x) und F_k (x) bei der Methode „der mehrfachen Fälle“ (fünf Hauptfälle) nach S. 179, die somit immerhin noch relativ die klarste Beziehung zur Herstellungsmethode ermöglicht.

1) Gesichtspunkte, S. 194 ff.

36. Die Methode der konstanten Reize oder die Konstanzmethode.

(Fechners Methode „der richtigen und falschen Fälle").

So umfangreich die Darstellung der Herstellungsmethode ausgefallen ist, da sie gegenüber der Methode der Vollreihen wirklich neue Momente einführte, so kurz können wir uns bezüglich der sog. „Konstanzmethode" nach Müller fassen. Da nämlich das Grundprinzip der einen, allgemeinen Methode, für bestimmte, dem Beobachter wiederholt konstant dargebotene Reizstufen die rel. Häufigkeit der Urteile zu ermitteln, um hieraus den hypothetischen K.-G. der Schwelle zu berechnen, für die Müllersche Definition der „Konstanzmethode" entscheidend ist, so ist die Methode der Vollreihen selbst unter sie zu subsumieren. Mit Recht hat Müller die Fechnersche Benennung als „Methode der richtigen und falschen Fälle" aufgegeben; denn falsche Urteile treten bei einer Reizstufe zwar häufig, aber keineswegs notwendig auf, insofern ja z. B. auch nur objektiv richtige und mittlere (u-)Fälle vorkommen können. Daher weist jener Name nur auf Fechners längst aufgegebene künstliche Aufteilung dieser mittleren Fälle in die beiden extremen Fälle hin, die schon S. 197 und 254 erwähnt wurde. Obgleich aber nun die „Konstanzmethode" die „Methode der Vollreihen" gewissermaßen als einen Spezialfall mit unter sich begreift, so wurde sie keineswegs immer in dieser vollkommenen Form angewendet. Wie bereits aus § 31 zu ersehen ist, wurden hier die statistischen Methoden vielmehr zunächst unter der Voraussetzung der Gültigkeit des einfachen E.-G. für die hypothetischen K.-G. f(x) weiter ausgebildet, woraus eine besondere Häufung von Wiederholungen einiger weniger Reizstufen entsprang, aus denen die Schwelle S und das Präzisionsmaß h eben berechnet werden konnten. Auch werden diese in § 31 dargelegten Berechnungen, insbesondere das relativ bequeme Müller-Urbansche Gewichtsverfahren, auch in Zukunft ihre Bedeutung behalten, sobald man nur einige wenige Stufen des Vergleichsreizes V verwendet hat, die bei der Inter- und Extrapolation stetiger Verteilungen mittelst algebraischer Funktionen von den wahrscheinlichsten Werten unter Umständen weiter ablenken würden als die Behandlung mittelst der Φ-Funktion. Erst die Kritik solcher spezieller Voraussetzungen und vor allem das sog. „unmittelbare Verfahren" nach § 30 ließen dann auch aus rein rechnerischen Gründen eine größere Anzahl womöglich äquidistanter Reizstufen beiziehen, worauf man nach § 37 auch schon von einer anderen Seite her unmittelbar hingeführt worden war. Dabei ging man dann auch bald dazu über, die Häufigkeitszahlen g, u und k für die einzelnen Stufen des Vergleichsreizes dadurch unter sich immer vergleichbarer zu machen, daß man die erforderlichen Wiederholungen nicht bei einer und der nämlichen Stufe in geschlossener Reihenfolge ganz oder teilweise absolvierte, bevor man zu einer anderen Stufe weiterging, sondern die Reizstufen in möglichst zufälliger Reihenfolge von Versuch zu Versuch abwechseln ließ. Denn abgesehen von der geringeren Vergleichbarkeit der unkontrollierbaren Bedingungen ohne diese Mischung der verschiedenen Reizstufen, hätte man bei zu langer Beschäftigung mit einer und der nämlichen Reizdifferenz auch jeweils besondere systematische Fehler zu gewärtigen, vor allem, wenn diese Konstanz noch dazu bekannt ist. Eine häufigere Darbietung der großen Differenzen läßt z. B. die Aufmerksamkeit weniger anspannen, während die zu seltene Erkennung des Unterschiedes trotz großer Anstrengung bei sehr kleinen Stufen schließlich abstumpfend wirkt. Auch mit der wechselseitigen Untermischung mehrerer Vollreihen, auf deren Bedeutung oben mehrfach hingewiesen wurde, hat man bereits den Anfang gemacht.

37. Die Methode der Minimaländerungen.

(Methode der ebenmerklichen Unterschiede (Fechner, Müller, F. M. Urban) oder Grenzmethode (Kraepelin, Müller).)

a) Die Entwicklung bis zur Methode der Minimaländerungen mit unregelmäßiger Variation der Reizstufen.

Während fast alle bisher geschilderten Methoden die Schwelle nur mehr oder weniger indirekt zu erschließen gestatten, versuchte man sie von Anfang an doch auch möglichst direkt zu bestimmen, d. h. man wollte das Bedingungsextrem für die Erkennung des Unterschiedes beim Durchlaufen einer geschlossenen Reihe von Abstufungen unmittelbar als eine entsprechend ausgezeichnete Stelle herausfinden. Fechner hat in seiner Darstellung der Maßmethoden bei der Behandlung dieses Verfahrens, das er als „Methode der ebenmerklichen Unterschiede" bezeichnete, vor allem die Versuche E. H. Webers in dieser Richtung vor Augen, während seine spezielle Auffassung von ihr durch eigene: „nicht sehr ausgedehnte Versuche im Felde der intensiven Lichtempfindung, des Augenmaßes und des Temperaturmaßes" begründet war.[1]) Hierbei war der „Grenzreiz" r_o, bzw. r_u so definiert gedacht, daß er selbst in der Auffassung der V.-P. durch eine besondere Qualität der „Ebenmerklichkeit" seiner Verschiedenheit (das „Gefühl eines kleinen, doch noch sicher genug empfundenen Unterschiedes") ausgezeichnet sei, wie sie etwa die Vorstufe der Verschiedenheitsurteile in der Methode der fünf Hauptfälle charakterisiert. Deshalb begegneten wir auch der direkten Bestimmung der Schwelle wenigstens in diesem Sinne bereits bei der Herstellungsmethode, da eben diese, freilich etwas unbestimmte subjektive Auszeichnung der Wahrnehmung auch ein Ziel der Selbsteinstellung bilden kann. G. E. Müller und Wundt stellten aber nun dieser Definition den rein objektiven Begriff der „Ebenmerklichkeit" bzw. „Ebenunmerklichkeit" gegenüber, bei dem das „Eben" auch bei der direkten Bestimmung nicht notwendig eine von der V.-P. selbst beobachtete Qualität des erkannten Unterschiedes bedeutet. Es weist vielmehr objektiv nur noch darauf hin, daß man eine neue Urteilsart erstmalig vorfindet, wenn man (nachträglich) die Reihenfolge der Stufen $x_1, x_2 \ldots x_n$ des Vergleichsreizes mit den hierbei protokollierten Urteilen in einer bestimmten Richtung

1) Elemente der Psychophysik, I, 2. Aufl., S. 74. Während früher die Abstufungsweise noch nicht systematisch vorgeschrieben, sondern dem Takte des Experimentators überlassen war, empfiehlt Fechner als endgültiges Maß den Mittelwert aus den beiden im allgemeinen verschiedenen Stufen, die eben merklich verschieden erscheinen, wenn man den Reiz entweder „herauf-" oder „herabbringt".

durchmustert, ein Begriff, der seine volle Allgemeinheit freilich erst dadurch erreichte, daß man auch noch die ursprüngliche Verwendung der Stufen des V in dieser Größenfolge aufgab. Es ist also das nämliche objektive Moment, das nach § 29 die als „Grenzreize" bezeichneten Stufen r_o und r_u unter Voraussetzung völlig konstanter Bedingungen während der ganzen Reihe kennzeichnet, wie wir denn auch unseren Ausdruck „Grenzreiz" nach der Kraepelinschen Bezeichnung „Grenzmethode"[1]) gebildet haben, die G. E. Müller nunmehr in seinen „Gesichtspunkten" für die Methode der ebenmerklichen Unterschiede übernommen hat. Während aber Müller hierbei seinerzeit in der von ihm als „Methode der kleinsten Unterschiede" bezeichneten Form[2]) vor allem noch an eine mehr stetige oder wenigstens bis zur Grenze unkontrolliert fortschreitende Änderung gedacht zu haben scheint, die höchstens das Urteil an der Grenze selbst zu markieren gestattet, systematisierte Wundt auch die Form der Abstufung noch weiterhin dadurch, daß er seinerseits ganz bestimmte diskrete Reizstufen, u. z. wieder in auf- und absteigender Reihenfolge darbot, und nannte dieses Verfahren „Methode der Minimaländerungen".[3]) Hierbei kamen dann meistens äquidistante Stufen zur Anwendung. Obgleich nun diese systematische Abstufung vor allem nur der allgemeinen experimentellen Forderung einer größtmöglichen Eindeutigkeit und Konstanz der Bedingungen überhaupt gerecht werden sollte, so daß man sich bei der ursprünglichen Form der Versuche, bei der die Stufen der Größe nach aufeinander folgten, zunächst sogar bisweilen mit einer bloßen Protokollierung des Grenzreizes begnügen konnte, so war doch in den Stufen nunmehr eine feste Abszissenreihe gegeben, die bei wiederholter Darbietung und bei Protokollierung aller Einzelurteile ohne weiteres in die Ableitung richtiger Vollreihen überging, wie dies schon bei Volkmanns Kombination der Methode der ebenmerklichen Unterschiede mit derjenigen der r. u. f. Fälle angebahnt wurde. Für die historische Entwickelung der vollkommensten Methode muß daher dieser Wundtschen Methode der Minimaländerungen eine ganz ähnliche Bedeutung zuerkannt werden, wie den früheren Anwendungen der Konstanzmethode, zumal sie wegen des Wechsels der Größe des Grenzreizes bei Wiederholung der nämlichen Stufenreihe auch schon von sich aus ganz selbständig auf die Anwendung statistischer Methoden hindrängte.

Während aber bei der Konstanzmethode die Wiederholung einer Stufe durch viele unmittelbar aufeinanderfolgende Versuche aufzugeben war, mußten bei der Methode der Minimaländerungen vor allem die systematischen Einflüsse der konstanten Richtung der Abstufung beseitigt werden: Nach dem ursprünglichen Versuchsschema sollte man den Vergleichsreiz V zunächst von einer dem Normalreiz N subjektiv gleichen Stufe[4]) aus solange wachsen bzw. abnehmen lassen, bis $V > N$, bzw. $V < N$ erscheint, Reizstufen, die wir

1) Kraepelin, Zur Kenntnis der psychophysischen Methoden, in Wundt, Phil. Stud. Bd. VI, 1891. S. 493.

2) Zur Grundlegung der Psychophysik, 1879, S. 64.

3) Über die Methode der Minimaländerungen, Phil. Stud. Bd. 1, 1883, 556ff.

4) Ob ein größerer Totalfehler c vorliegt, der die subjektive Gleichheit von V und N von der objektiven wesentlich entfernt, mußte aus den Versuchen selbst ersehen werden.

als Grenzreize nach der „Methode der ebenmerklichen Unterschiede" mit r_o (E. M.) bzw. r_u (E. M.) bezeichnen wollen. Hierbei ist aber nun auch noch die besondere Richtung der Abstufung durch Indizes zu markieren. Denn man erhält nach der Versuchsregel auch noch zwei andere Grenzreize, wenn man mit einer zunächst deutlich verschiedenen Stufe beginnt und die Differenz von N solange vermindert, bis sie eben unmerklich ist. Es wird wohl aus dem Schema der Urteilsfunktionen Fig. 8a ohne weiteres verständlich sein, wenn wir jene Abstufung als eine zentrifugale, diese aber als eine zentripetale auffassen und jenen oberen und unteren Grenzreiz als „von innen her" erreicht durch den Index i, diesen „von außen her" gefundenen mit a kennzeichnen. Somit liefert diese Methode im ganzen die vier Grenzreize r_o (E. $M._i$) und r_o (E. $M._a$), bzw. r_u (E. $M._i$) und r_u (E. $M._a$). Bei der ursprünglichen Anwendung variierte nun, wie gesagt, mit jedem dieser Werte in systematischer Weise ein spezieller Nebeneinfluß, der von der Konstanz der Richtung ausging, gleichgültig, ob die V.-P. durch eine mehr oder weniger sichere Kenntnis vom Wesen dieser Methode hierbei zugleich einen bestimmten Unterschied voraussah, oder ob nur eben der Verlauf als solcher, ohne irgendwie klarer bewußte Erwartungen, eine an sich stets gefährliche systematisch variierte Nebenbedingung bildete, z. B. der Umstand, daß längere Zeit überhaupt kein Unterschied oder stets ein solcher von bestimmter Art aufgefaßt wurde. Dabei ist aber keinesfalls ohne weiteres vorauszusetzen, daß das arithmetische Mittel aus den entgegengesetzten Richtungen

$$\frac{r\,(\text{E. M.}_i) + r\,(\text{E. M.}_a)}{2} = r\,(\text{E. M.}), \qquad [314]$$

das dann als Grenzreiz schlechthin betrachtet wurde, diese Nebeneinflüsse vollständig eliminiere.

Daher schaltete Kraepel in diese Einflüsse der Abstufungsrichtung sinngemäß durch die unregelmäßige Absolvierung der ganzen Stufenreihe $x_1, x_2 \ldots . x_n$ bereits rein experimentell vollständig aus. Hierbei können aber ebenfalls wieder vier paarweise mit i und a gekennzeichnete Werte den S. 276 genannten neuen, aber ebenso eindeutigen Sinn erhalten, wenn man die Beurteilungen der regellos sich folgenden Stufen in einer nach der Größe geordneten Liste der Reizstufen sämtlich einzeln an ihrer Stelle protokolliert und diese Liste nach Absolvierung sämtlicher Stufen in der nachträglichen Betrachtung „von innen" bzw. „von außen" durchläuft, um, genau wie früher bei jener tatsächlichen Darbietung der Stufen in dieser Größenfolge, den „erstmaligen" Urteilswechsel „von innen her" nach oben als r_0 (E. M. $_i$), den von innen nach unten als r_u (E. M. $_i$) usw. zu behandeln. Während aber früher in jeder konkreten Reihe definitionsgemäß immer nur ein der Abstufungsrichtung entsprechender Wert abgeleitet werden sollte, also z. B. beim zentripetalen Fortschritt von oben her entweder nur r_0 (E. M $_a$) oder, bei Fortsetzung jenseits des Äquivalenzwertes, höchstens auch noch r_u (E. M. $_i$), weil eben eine bestimmte „Richtung" zum Wesen der Versuchsreihe selbst hinzugehörte, liefert von diesem neuen, von F. M. Urban systematisierten Standpunkte aus jede Reihe mit je einmaliger Darbietung aller Stufen immer alle vier Werte zugleich, je nach der Betrachtungsrichtung. Dadurch ist aber eben auch der Gegensatz innerhalb der Wertepaare r_i und r_a ein ganz anderer geworden. Früher waren systematische Einflüsse der Abstufungsrichtung und der zufällige Wechsel von einer Reihe zur anderen daran beteiligt. Als Werte aus der nämlichen Reihe können dagegen r_i und r_a überhaupt nur noch bei zufälligen Schwankungen von einem Einzelversuch zum anderen auseinanderfallen, von denen man damals gerade völlig abstrahierte. Denn wenn seinerzeit der Urteilswechsel erreicht war, hatte man in der Reihe überhaupt nicht weiter zu gehen. Wäre dies aber z. B. bei zentripetaler Bewegung von oben her nach Erreichung von r_0 (E. M.$_a$) dennoch geschehen und hätte dabei der entgegengesetzte Urteilswechsel, von der anderen Seite her betrachtet, also nach der neuen Auffassung, ein von r_0 (E. M.$_a$) verschiedenes r_0 (E. M.$_i$) ergeben, so hätten ja vorher erst wieder g-Urteile noch unterhalb r_0 (E. M.$_a$) auftreten müssen. Hierdurch hätte aber eben das Resultat der alten, mit konstanter Richtung arbeitenden Methode seine Eindeutigkeit verloren, bzw. es wäre mit zwei Wertepaaren nach der alten Definition gar nicht mehr darzustellen gewesen.

b) Die Beziehung zwischen der Methode der Minimaländerungen und derjenigen der vollständigen Reihen.

Nach einer genügenden Zahl von Wiederholungen der Reihe aus den n regellos sich folgenden Stufen hat man aber dann offenbar auch das Material einer „vollständigen Reihe" (Vollreihe) gewonnen, das sich nur durch die besondere Eigenschaft auszeichnet, daß es in systematischen Gruppen abgeleitet ist. Da aber hierbei gerade jede Bevorzugung irgend einer Stufe sorgfältig vermieden ist, so wird man eine solche Reihenfolge der Versuche bei einer hinreichend großen Stufenzahl n, die ohne besondere Absicht der V.-P. keinen Rückschluß auf die innerhalb jeder Reihe restierenden Stufen zuläßt, auch für die Vollreihen immer dann bevorzugen, wenn man sich über die Zahl der Wiederholungen jeder einzelnen Stufe noch nicht im klaren ist. Sobald freilich bei Vollreihen, wie es sogar im allgemeinen der Fall sein wird, jede Stufe in einer Hauptgruppe mehr als einmal in regelloser Reihenfolge vorkommt[1]), hört die Möglichkeit auf, aus der Liste jene vier „Grenzreize" der Methode der ebenmerklichen Unterschiede in jener eindeutigen Weise zu entnehmen. Es ist also keineswegs etwa auch umgekehrt die Methode der Vollreihen in ihrer allgemeinen Anwendungsform auf diejenige der Minimaländerungen zurückzuführen.

Da aber nun die wiederholte Durchnahme sämtlicher n Reizstufen, wie gesagt, eine Vollreihe liefert, aus der die Hauptwerte der Grenzreize r_0 und r_u und ihre Streuungsmaße nach den in § 29 dargelegten statistischen Prin-

1) Zur Erreichung dieser völlig zufälligen Untermischung pflegt der Experimentator am besten eine der Zahl sämtlicher Einzelvergleichungen gleiche Anzahl von Karten herzustellen, bei m-maliger Darbietung von je n Stufen also m n Karten, und aus diesen nach gründlicher Mischung die jeweilige Stufe des V zu ziehen. Wenn mehrere Vollreihen gleichzeitig mit einander abgeleitet werden sollen, sind dann mehrere Kartengruppen dieser Art zu mischen.

zipien völlig eindeutig zu berechnen sind, so könnte der Ableitung der vier Werte r_0 (E. M. i), r_u (E. M. i) usw. in allen m Wiederholungen und der Bildung des arithmetischen Mittels aus je m mittleren Grenzreizen

$$r\,(E.\,M.) = \frac{r\,(E.\,M._i) + r\,(E.\,M._a)}{2},$$

nach der Methode der Minimaländerungen ein wissenschaftlicher Wert höchstens noch unter der Bedingung zugestanden werden, daß diese Resultate mit einem der in § 30 und 31 berechneten Hauptwerte $r_0(\mathfrak{A})$, $r_0(C)$, $r_0(\mathfrak{D})$; $r_u(\mathfrak{A})$ usw. übereinstimmen sollten.

Urban glaubte dies nun speziell für die Werte $r_0(C)$ und $r_u(C)$ ganz allgemein nachweisen zu können, bei denen also $F_g(x) = F_k(x) = \frac{1}{2}$ wird[1]). Dabei fixierte er zum erstenmale die Beziehung zwischen jedem der oben genannten vier Einzelwerte r (E. M.) und den in den Vollreihen gegebenen rel. Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Urteile, deren Umschlag innerhalb der nach Reizstufen geordneten Urteile jeder konkreten Einzelreihe uns vorhin die vier verschiedenen Grenzreize r_0 (E. M. i) usw. definieren ließ: Es bedeute P die Wahrscheinlichkeit dafür, daß einer jener vier Werte, z. B. r_0 (E. M i), wirklich bei einer ganz bestimmten Stufe x_ν gefunden wird, wenn eine sehr große Zahl m konkreter Einzelreihen in Betracht gezogen wird, welche sämtliche Kombinationsmöglichkeiten der drei Urteile g, u und f in einer Reihe zu n Gliedern entsprechend der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit dieser Urteile gleichmäßig zu erschöpfen gestattet. Dann läßt sich offenbar das wahrscheinliche Resultat r_0 (E. M. i) der m Reihen, in denen r_0 (E. M. i) immer einen ganz bestimmten Wert besitzt, gemäß der alten rechnerischen Behandlung nach der Methode der Minimaländerungen als das arithmetische Mittel aus allen diesen Einzelwerten berechnen, wozu man nur die P_ν für sämtliche n Stufen zu kennen braucht. Denn es wird, wenn wir die Grenzreize r_0 (E. M. i)$_\nu$ für x_ν kurz mit r_ν bezeichnen,

$$r_0\,(E.\,M._i) = r_1 \cdot P_1 + r_2 \cdot P_2 + \ldots .\, r_m\, P_m. \qquad [315]$$

Ganz analog lassen sich dann auch die anderen r (E. M.) mit den Indizes o, a; u, i; u, a finden, deren Wahrscheinlichkeit, auf die Stufe x_ν zu treffen, Urban mit P'_ν; Q_ν, Q'_ν bezeichnet. Nun ist P die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man in der Urteilsliste von innen her, in der Richtung von E'_0 nach E_0, die für die Definition von x_ν als r_0 (E. M. i) entscheidende Reihenfolge vorfindet, also zunächst keine g- (d. h. nur u- oder k-Urteile), bei x_ν aber zum erstenmal ein g-Urteil. Daher ist P bei der völligen Unabhängigkeit, die bei der regellosen Darbietung der Stufen zwischen den Wahrscheinlichkeiten F(x) eines Urteiles bei den einzelnen Stufen besteht, gleich dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten der für jede der bis x_ν durchlaufenen Stufen vorausgesetzten Urteile, d. h. es ist

$$P_\nu = (1 - F_g(x_1)) \cdot (1 - F_g(x_2)) \ldots . (1 - F_g(x_{\nu-1})) \cdot F_g(x_\nu). \qquad [316]$$

1) A. S. 270, A. 2 a. O.

Ebenso erhält man aber die Wahrscheinlichkeit P'_ν dafür, daß x_ν als r_0 (E. M.$_a$) befunden werde, als

$$P'_\nu = F_g(x_n) \cdot F_g(x_{n-1}) \ldots F_g(x_{\nu+1}) \cdot (1 - F_g(x_\nu)), \qquad [317]$$

und analog berechnen sich Q_ν und Q_ν' aus den rel. H. $F_k(x)$.

Entgegen der Urbanschen Annahme ist aber der resultierende Wert

$$r\,(\text{E. M.}) = \frac{r\,(\text{E. M.}_i) + r\,(\text{E. M.}_a)}{2}$$

im allgemeinen, d. h. ohne Einführung einer zu r(C) symmetrischen Änderung der Urteilshäufigkeiten und ohne gleichzeitige symmetrische Anordnung der Reizstufen, durch diese Überlegungen mit r(C) analytisch nicht in Übereinstimmung zu bringen, wie auch schon Müller angenommen hat. Wenn also Urban bei der vergleichenden Behandlung seines S. 145ff. genannten umfangreichen Materiales nach den alten Rechenvorschriften der Minimaländerungen rein empirisch eine gute Übereinstimmung seiner Werte r (E. M.) mit den gleichzeitig nach Lagrange (vgl. § 30,b) interpolierten Werten r(C) fand, so hängt dies nur damit zusammen, daß seine Urteilskurven in der Tat von der Φ-Funktion meistens nur rein zufällige Abweichungen zeigten und daß seine Abstufung der Reize glücklich gewählt war.

Daß die Berechnung der Werte r (E. M.) die tatsächlichen Urteilsverhältnisse, die von bestimmten mittleren Bedingungsextremen r_0 und r_u und deren Streuungsmaßen repräsentiert sein sollen, ohne jene im allgemeinen nicht vorhandene Symmetrie nur ungenügend wiedergeben kann, ersieht man auch schon daraus, daß manche Einzelversuche bei der Ableitung dieser Werte völlig unberücksichtigt bleiben, während bei unserer Behandlung der Vollreihen nach dem Prinzipe des a. Mittels, also in den r($\mathfrak{A}$) und ihren Streuungsmaßen D und M, jeder Einzelversuch zur Geltung gebracht wird. Es seien z. B. zwei konkrete Reihen von Urteilen nach der Minimaländerung bei regelloser Stufenfolge abgeleitet, deren oberes, r_0 enthaltendes Stück folgendermaßen laute, wobei wir die Einzelurteile kleiner, gleich, größer mit deutschen Buchstaben $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{g}$ und dem Index der Stufe x_ν markieren:

1) $\mathfrak{u}_1\,(\mathfrak{k}_1),\ \mathfrak{u}_2\,(\mathfrak{k}_2),\ \mathfrak{g}_3,\ \mathfrak{u}_4\,(\mathfrak{k}_4),\ \mathfrak{u}_5\,(\mathfrak{k}_5),\ \mathfrak{g}_6$

2) $\mathfrak{u}_1\,(\mathfrak{k}_1),\ \mathfrak{u}_2\,(\mathfrak{k}_2),\ \mathfrak{g}_3,\ \ \mathfrak{g}_4,\ \ \mathfrak{u}_5\,(\mathfrak{k}_5),\ \mathfrak{g}_6$

In beiden Reihen liegt r_0 (E. M.$_i$) bei x_3 und r_0 (E. M.$_a$) bei x_5. Der Versuch mit x_4, der in beiden verschieden ausfiel, kommt also überhaupt nicht zur Geltung, und das nämliche würde für eine beliebig größere Zahl von Stufen gelten, die man sich in sonst analogen Reihen an die Stelle von x_4 gesetzt denkt. Wenn man sich freilich, wie bei der früheren Anwendung der Minimaländerungen angenommen war, die Lage des Grenzreizes innerhalb der nämlichen Reihe konstant denken dürfte, käme ein solches Intervall zwischen r_a und r_i, wie oben gesagt, überhaupt nicht in Betracht. Man könnte eben dann in einer konkreten Reihe die augenblickliche wahre Lage des Grenzreizes wirklich unmittelbar beobachten.

Bei Schwankungen von einer Reihe zur anderen aber wäre dann in der Tat einfach das Mittel der in den Einzelreihen gefundenen Lagen der sinngemäße Hauptwert des Grenzreizes. Nachdem man aber einmal weiß, daß die Lage der Urteilsextreme von einem Versuch zum anderen wechselt, wodurch ja überhaupt erst der Gegensatz von r_a und r_i möglich wird, bedeuten die nach der alten Art beobachteten Einzelwerte r(E. M.) nur noch scheinbare Lagen der Grenzreize, wie schon S. 170 erwähnt wurde. Die einfache Mittelbildung allein kann aber natürlich aus dem Durchschnitt der scheinbaren im allgemeinen keinen solchen der wahren Werte machen. Vielmehr findet man den Weg zu diesem nur durch rein sachliche Überlegungen über den realen Zusammenhang der Begriffe, hier also über das Wesen der Bedingungsextreme, wie sie in § 29 angestellt wurden. Somit kann der Methode der Minimaländerungen neben derjenigen der Vollreihen bezüglich der Sammlung des Materiales nur noch eine beschränkte, bezüglich dessen Verrechnung aber überhaupt keine Bedeutung mehr zuerkannt werden. Und wenn man sich auch früher wegen der Einseitigkeiten und Unbequemlichkeiten der üblichen Anwendungsform der Konstanzmethode noch eher mit den an sich zwar inkorrekten, aber wenigstens angenäherten und vor allem schnell ableitbaren Werten r (E. M.) begnügen mochte, so kommt nach der Ausbildung des bequemen unmittelbaren Verfahrens für r(𝔄), M usw. nach § 30 nunmehr auch dieser letzte Grund zur Berechnung der Werte r(E. M.) in Wegfall[1]).

Kapitel 10.

Die Bestimmung von Reiz- und Veränderungsschwellen.

38. Die Reizschwelle.

a) Die speziellen Gesichtspunkte bei der Ableitung der sog. absoluten Schwellen.

1. Da nach den allgemeinen Angaben über die Messung einer Schwelle überhaupt sogleich zur Bestimmung der Unterschiedsschwelle und des Totalfehlers übergegangen wurde, könnte man vielleicht meinen, es sei bei der psychologischen Konkretisierung jener allgemeinen Gesichtspunkte das einfachste Problem dieser Art, die Untersuchnng der sog. „Reizschwelle“ oder „absoluten Schwelle“, zu Unrecht übersprungen worden. Mit diesem Namen bezeichnet man bekanntlich seit Fechner das Mindestmaß eines Reizes, das auf ein Sinnesorgan einwirken muß, „damit ein bestimmtes auf den an sich genommenen Reiz bezügliches Urteil eintrete“ (Müller). Bei der Unterschiedsschwelle handelt es sich dagegen immer bereits um das

1) Vgl. a. u. S. 170 A. a. S.

Mindestmaß des Unterschiedes zweier Reize, das diesen Unterschied entweder als solchen oder seiner Richtung nach erkennen läßt. Die Fragestellung bei der Ableitung einer Reizschwelle gehört aber hiernach offenbar zu der Gruppe von Aufgaben, bei denen einzelne experimentell dargebotene Reize oder Reizkomplexe zu beschreiben sind. Diese haben wir schon vor dem Eingehen auf die Vergleichsmethode S. 233 genannt, aber auch sogleich als nur scheinbar einfachere Probleme hinter die Analyse der Vergleichsprozesse zurückgestellt. Allerdings bildet die Ableitung einer Reizschwelle nur einen Grenzfall unter ihnen, da sich bei ihr die unmittelbare Beschreibung auf die bloße Konstatierung eines ebenmerklichen Reizes überhaupt reduziert. Doch ist jedenfalls auch bei ihr die Norm der Beurteilung, deren Funktion hierbei derjenigen der Wahrnehmung eines konstanten Normalreizes N bei den Vergleichsversuchen verwandt ist, ebenso wie bei allen Beschreibungen einzelner, für sich betrachteter Reize eine reproduktive Vorstellung, die von den früheren Wahrnehmungen der übermerklichen Stufen des Reizes herstammt, dessen absolute Schwelle bestimmt werden soll. Nun wurde bei jener vorläufigen Erwähnung dieser ganzen Kategorie von Experimenten S. 234 bereits darauf hingewiesen, daß die Vieldeutigkeit, die sich aus dem rein reproduktiven Charakter der hierbei wirksamen Norm ergibt, ihrerseits selbst durch eine geeignete experimentelle Vorbereitung der V.-P. tunlichst reduziert werden kann. Die entscheidenden Begriffe müssen also selbst bereits an der Hand eines geeigneten Wahrnehmungsmateriales systematisch eingeübt werden. Dies wird aber bei der Ableitung der Reizschwelle besonders einfach. Denn hier ergibt sich diese klare Vergegenwärtigung der Norm in besonders natürlicher Weise aus der Darbietung übermerklicher, aber immerhin minimaler Reizstufen, wie sie ja bei der Ableitung der Schwellen durch Vollreihen ohnedies vorkommen müssen. Die V.-P. lernt also unterdessen die entscheidende Qualität genau kennen; auch hat sie sich eventuell durch besondere, völlig wissentlich angestellte Versuche mit etwaigen Unterschieden der Nuancierung bei den verschiedenen Intensitätsstufen vertraut zu machen. Denn deren Inhalt kann sich hierbei bisweilen so sehr verändern, daß die V.-P. schwache Reize überhaupt nicht mehr als Stufen der zu konstatierenden Qualität wiedererkennen würde, falls sie sich nach ihrer landläufigen Bekanntschaft mit den deutlich übermerklichen Stufen sogleich in dem Unsicherheitsbereich zurechtfinden sollte. Durch eine solche systematische Einführung wird aber wohl schließlich jeder Beobachter, sofern er überhaupt die allgemeinen Voraussetzungen für wertvolle quantitative Versuche dieser Art erfüllt, der Schwierigkeiten überhoben werden, die vor allem Binet bei seinen Versuchen über die Raumschwelle des Tastsinnes in so ausgiebigem Maße entgegengetreten sind[1]), daß er an der Ableitbarkeit brauchbarer Schwellenmaße auf diesem Gebiete bei bestimmten „Typen" von V.-P. überhaupt verzweifeln zu müssen glaubte. Zunächst ist natürlich die absolute Schwelle für den komplexen Tatbestand einer räumlichen Extension schon an und für sich mit noch größeren Schwierigkeiten in dieser Hinsicht umgeben, als die Ableitung der Reizschwelle für einen einfachen Sinnesreiz, z. B. einen einfachen Tasteindruck

1) La mesure de la sensibilité. Année psychologique. 1903. IX, S. 89.

überhaupt. Trotzdem wird man sich aber mit der V.-P. über die Einheitlichkeit oder Zwiespältigkeit des Eindruckes, über die sie in jedem Versuche allein zu urteilen hat, und über die Abstraktion von bloßen Intensitätsänderungen u. ä. an der Hand stufenweiser wissentlicher Verminderungen übermerklicher Distanzen und wirklich einheitlicher punktueller Eindrücke verständigen können. Dadurch wird also wohl zunächst wenigstens Binets „Typus" der sog. Simplistes zu kurieren sein, die bis zu sehr großen objektiven Distanzen keine Extension oder Zweiheit herausfinden. Denn bei ihnen dürften eben nur diese Voraussetzungen für die Wiedererkennung minimaler Grade an sich bekannter Qualitäten noch nicht erfüllt sein.

In der reproduktiven Norm für die Urteilsabgabe bei solchen Versuchen ist natürlich neben dem rein Inhaltlichen auch noch das besondere formale Moment der Objektivierung enthalten, das in der Ableitung der Extensionsschwelle bei an sich bereits übermerklichen Gesichts- oder Tasteindrücken nicht so deutlich hervortritt, als etwa bei der Konstatierung ebenmerklicher einzelner Sinneseindrücke, vor allem auf Gebieten, die so starke subjektive Erregungen aufzuweisen haben, wie das Tast- und Sehfeld. Denn die V.-P. soll ja hierbei keineswegs das Vorhandensein einer Empfindung überhaupt konstatieren. Ihr Urteil hat sich vielmehr eben auf das Dasein eines äußeren Reizes zu beziehen, das freilich durch einen bestimmten Empfindungsverlauf repräsentiert wird. Die Frage nach den Kriterien der Objektivierung und der Quantität eventueller Fehler in dieser Hinsicht ist aber natürlich keine Domäne der Reizschwellen-Untersuchung; vielmehr kommt die eigenartige Abgrenzung zwischen Objektivem und Subjektivem bei allen psychologischen Versuchen in Frage, bei denen die spezielle Leistung in einer Erkennung von objektiven Vorgängen besteht oder durch sie bedingt ist, also insbesondere auch bei den Vergleichungen übermerklicher Reize unter sich. Allerdings bringt der längere Ausschluß stärkerer Reize bei der Beschäftigung mit minimalen Reizstufen eine besondere Steigerung der Erregbarkeit mit sich, welche die subjektiven Erscheinungen den objektiv bedingten Empfindungen besonders selbständig gegenübertreten läßt. Doch sind sowohl die hieraus entspringenden Fehler als auch die Prozesse, durch die wir bei der Auffassung der Objekte von ihnen zu abstrahieren vermögen, von analogen Vorgängen bei der Beschäftigung mit deutlich übermerklichen Reizen, deren stärkere Erregung trotz der geringeren Reizbarkeit störende Nachwirkungen zeitigt, nicht prinzipiell verschieden.

Zur Ableitung des unteren Bedingungsextremes für die Wiedererkennung einer bestimmten Qualität werden nun nach § 29 verschiedene minimale Reizstufen einschließlich der Stufe Null in „Vollreihen" dargeboten und die relativen Häufigkeiten der beiden Urteile: „Reiz bemerkt" und „Reiz nicht bemerkt" ermittelt, der beiden Hauptfälle, auf die sich hier die Möglichkeiten reduzieren, wenn man, wie bei der Methode der drei Hauptfälle für die Bestimmung von Unterschiedsschwellen, die Fälle der Unbemerktheit und der Unsicherheit in eine Gruppe zusammenfaßt. Man hat also hier dann gewissermaßen nur u- und g-Fälle, die überall kontradiktorische Komplemente[1]) sind, so daß

1) Der Methode der fünf Hauptfälle für Unterschiedsschwellen entspräche eine weitere Zerlegung der Kurve $F_g(x)$ in eine mit der X-Achse geschlossene Kurve der

$$F_g(x) + F_u(x) = 1. \qquad [318]$$

Man kann daher auch die Verteilungskurven in dem früheren Schema Fig. 7a S. 171 als Veranschaulichung des Materiales von Vollreihen zur Ableitung einer absoluten Reizschwelle betrachten, wenn man nur die gestrichelte Kurve nicht als $F_k(x)$, sondern als die Kurve $F_u(x)$ der rel. H. der Unbemerkheit des Reizes auffaßt. Sobald sich ein unteres Extrem E' mit $F_g(x) = 0$ ableiten läßt, kann jederzeit ein bestimmter Hauptwert des Grenzreizes angegeben werden, den wir auch hier mit r_0 bezeichnen wollen. Falls jedoch, wie es bei der Objektivierung rein subjektiver Vorgänge sein muß, bei der Reizstufe 0 auch nur gelegentlich noch positive Urteile vorkommen, wird die mittlere Schwelle unbestimmt.[1]) Es besteht eben in diesem Falle im Verlauf der Beobachtung so und so oft gar kein Grenzreiz; denn dieser soll doch ein Minimum darstellen, so daß er bestimmte kleinere Reizmöglichkeiten als Bedingungen der Wahrnehmung ausschließen müßte, während diese hier bis zum Reiz 0 herabreichen. Man könnte also in diesem Falle immer nur sagen, welches der mittlere Grenzreiz wäre, wenn man von diesen sogar beim Reiz Null möglichen subjektiven Empfindungen entweder völlig absieht oder bei ihrem Auftreten die Reizstufe 0 als Grenzreiz gelten läßt.

Auf jeden Fall ist aber der Schwellenwert, der bei dieser absoluten Verwendung des Begriffes mit r_0 identisch ist (vgl. S. 165, A. 1), auch bei $E' \gtreqless 0$ immer nur ein völlig unanalysierter Wert des Bedingungsextremes, ähnlich wie die sog. „physikalische" Unterschiedsschwelle $s_0 = r_0 - N$ nach S. 250, die einfach den Abstand des Grenzreizes vom Normalreiz bedeutet, mit dem hier die Stufe 0, zunächst schon rein äußerlich betrachtet, eine gewisse Analogie aufweist.

Die einfache Reizschwellenbestimmung gleicht übrigens auch schon hinsichtlich der subjektiven Urteilsbedingungen, die mit dieser Einseitigkeit der Ableitung einer einzigen Grenzkurve $F_g(x)$ zusammenhängen, Versuchen mit alleiniger Ableitung einer oberen oder einer unteren Unterschiedsschwelle, bei denen der Beobachter zugleich nicht nur genau weiß, daß es sich nur um diese eine U.-schwelle handelt, sondern sich auch über die Reizlage des V völlig im klaren ist. Hieraus kann aber bekanntlich ein starker Erwartungsfehler resultieren, wenn außerdem auch noch, wie bei der früheren Methode der Minimaländerungen, eine bestimmte Abstufungsrichtung eingehalten wird, oder wenn die Stufen auch nur so gewählt sind, daß sie auch bei regelloser Darbietung den Reiz sehr häufig erkennen lassen. Ähnliche Ursachen mögen sich wohl auch bei dem zweiten „Typus" Binets

---

Ebenmerklichkeit $F_g(x)$ und eine solche der deutlichen Merklichkeit $F_{\mathbf{g}}(x)$, die bei einem neuen Extrem **E** zur Höhe 1 aufsteigt.

1) Hierbei steigt also $F_u(x)$ überhaupt nicht bis zur vollen Höhe 1 auf, wie wenn Schema Fig. 7a vor dem linken Rand abgeschnitten würde. — Bei drei Fällen u, g, **g**, bei denen natürlich außer den Extremen E′ und E für g auch noch die neuen Extreme **E**′ und **E** für **g** in Frage kommen, kann unter Umständen nur die Kurve für g von dieser unteren Verkürzung betroffen werden, so daß nur die „Vorschwelle" s′ unbestimmt wird, die entweder direkt als Mittel des K.-G. $F_g(x)$ oder aus der Reduktion auf zwei Fälle u und g + **g** (S. 179) zu berechnen wäre; dagegen kann dann eine Hauptschwelle der deutlichen Merklichkeit aus der Reduktion auf u + g und **g** sicher berechnet werden.

geltend gemacht haben, bei den sog. „Interprétateurs", die bei bestimmten Reihen seiner Messungen der Raumschwelle sogar bei der Distanz 0 stets eine Zweiheit wahrnahmen und dadurch die Angabe einer Schwelle überhaupt unmöglich machten. Da aber gerade bei dieser Stufe 0 der Erwartungsfehler als solcher rein heraustritt, so läßt sich eine so wenig objektive V.-P. leicht seiner überführen, wenn man nur eine genügende Anzahl von „Nullversuchen", oft auch „Vexierversuche" genannt, in den Vollreihen vorbringt. Durch sofortige nachträgliche Mitteilung der Verfehlung dieser Kontrolen wird sich dann meistenteils auch eine objektivere Einstellung erzielen lassen, falls der V.-P. selbst überhaupt daran gelegen ist.

Bei geübteren V.-P. wird aber sowohl bei jener einseitigen Ableitung von s_o oder s_u als auch hier bereits eine passende Größe der Stufen hierzu ausreichen, die auch bei durchweg gleich häufiger Darbietung (in zufälliger Reihenfolge), eben infolge der Schwelle für wirklich objektiv bedingte Wahrnehmungen, den Reiz oft genug unmerklich werden läßt, so daß man nicht allzu sicher erwarten muß, daß er bei besonderer Aufmerksamkeit bemerkt werden könne. Derartige Versuchsbedingungen bieten jedenfalls die an sich nicht uninteressante Möglichkeit, ein Optimum der sog. „Empfindlichkeit" $\frac{1}{s_0}$ bzw. „Unterschiedsempfindlichkeit" experimentell eindeutig aufzufinden, das bei der Hinzunahme jeder weiteren Unwissentlichkeit in einer der hier als bekannt vorausgesetzten Richtungen gestört würde. Wenn es sich natürlich nur um die Bestimmung eines Fehlerhauptwertes oder der „wahren", vom Äquivalenzwert aus gerechneten Schwellen S, z. B. bei Prüfungen des Weberschen Gesetzes, handelt, wird die getrennte Ableitung einer oberen oder einer unteren Schwelle nicht nur unnötig, sondern nach dem früher Gesagten sogar untunlich erscheinen. Wo jedoch der energetische Gesichtspunkt der Auffindung physikalischer Äquivalente für möglichst genau umschriebene Leistungen vorwaltet, wird die Ableitung einer Schwelle bei wissentlicher Konzentration auf eine einzige Variationsrichtung als solche immer ihren Wert behalten. — Wollte man dagegen bei der Bestimmung der einfachen Reizschwelle den Erwartungsfehler, weil man ihn hier nicht durch eine negative Abstufungsrichtung unter Null beseitigen kann, wenigstens durch einen unregelmäßigen und unwissentlichen Wechsel der Lage und Art innerhalb eines gewissen Bereiches herabsetzen, so würden hiermit natürlich auch für die Wiedererkennung ganz andere psychologische Bedingungen eingeführt sein, an die bei dieser absoluten Reizschwelle zunächst nicht gedacht ist. Ja man kann sagen, daß bei jenen Versuchen, bei denen es vom energetischen Gesichtspunkt aus eben nicht nur auf die Vergleichbarkeit mit anderen Schwellen, sondern auf das absolute Minimum als solches ankommt, Resultate eines geübten zuverlässigen Beobachters, dem außerdem auch die jeweilige Abstufungsrichtung bekannt war, von besonderem Wert sein können.

b) Die Untrennbarkeit eines Fehlers der subjektiven Nulllage von dem Schwellenmaß.

Wenn aber nun auch bei solchen Bestimmungen die absolute Reizschwelle ein völlig unanalysiertes Ganzes bildet, so weist doch schon die

Möglichkeit einer gelegentlichen Verfehlung des Nullversuches darauf hin, daß von der bloßen Latenz einer objektiven Reizwirkung unterhalb eines bestimmten Minimums zunächst wenigstens ganz im allgemeinen eigentliche Fehler der Urteilsnorm zu unterscheiden sind, die natürlich auch in der entgegengesetzten Richtung liegen können, wenn z. B. eine bewußte übermerkliche Veränderung, die tatsächlich eine adäquate Reizwirkung darstellt, aus irgend welchen Gründen, z. B. nach früheren Enttäuschungen des Beobachters bezüglich der Zuverlässigkeit seiner Wahrnehmungen, für subjektiv gehalten wird. Es fragt sich nun, ob durch irgend ein Verfahren auch ein Fehlerhauptwert dieser Art ähnlich aus der physikalischen Reizschwelle herausgelöst werden könne, wie der Totalfehler bei der Vergleichung zweier übermerklicher Reize. Sehen wir auch hier zunächst für einen Moment von der Tatsache der Schwelle ab, so würde zu einer bestimmten Definition eines empirischen Maßes dieses Fehlers offenbar wieder vorausgesetzt sein, daß wir uns auf seiten der zu beurteilenden Wahrnehmungszustände genaue Äquivalente zum anschaulichen Inhalte des Begriffes herstellbar denken, den wir uns bei der Wirksamkeit eines bestimmten „konstanten Fehlers" der Urteilsnorm von dem speziellen Zustand des Wahrnehmungsfeldes bei völliger Reizlosigkeit machen. Dieser Inhalt der begrifflichen Norm müßte also bei dem Übergang von einem (negativen) Fehler der vermeintlichen objektiven Nulllage, mit dem Effekte der Objektivierung eines subjektiven Eindruckes, zu dem entgegengesetzten (positiven), also zu einer Subjektivierung eines bewußten Korrelates des äußeren Reizes, durch die korrekte Vorstellung von dem wirklichen Korrelate der Reizlosigkeit unter den augenblicklichen, hier als konstant betrachteten psychophysischen Bedingungen hindurchgehen. Der jeweilige „Fehler" aber entspräche dem Abstand des augenblicklich gültigen Äquivalentes von der objektiven Nulllage.[1]) Diese

1) Bei der Einschränkung des Begriffes der „wahren" Reizschwelle auf den Fall, daß das Wahrnehmungsfeld von inneren Erregungen vollständig frei ist, gleichgültig, ob diese Erregungen von der anschaulichen Begriffsnorm der augenblicklichen Nulllage aus wirklich als positive Vorgänge erscheinen oder nicht, würde die ebenmerkliche Erhöhung einer bereits von der subjektiven Nulllage verschiedenen Empfindung psychologisch bereits eine „innere" Unterschiedsschwelle zwischen zwei übermerklichen Empfindungen bedeuten und daher einer anderen Stelle in der psychophysischen Abhängigkeitsfunktion zwischen Reiz und ebenmerklichem Empfindungszuwachs entsprechen. So weit man nun die „wahre" Reizschwelle in dem soeben bezeichneten Sinne, d. h. den Reiz, der bei rein objektiver Bedingtheit der Empfindung ebenmerklich wäre, trotz solcher subjektiver Zuthaten angeben will, ist man im allgemeinen auf sehr prekäre Extrapolationen von Funktionen angewiesen, die man bezüglich der Unterschiedsschwelle bei etwas höheren Intensitätsstufen abgeleitet hat, bei denen man den Anteil der eventuell auch hier unvermeidlichen Eigenerregung relativ immer geringer veranschlagen bzw. vollständig vernachlässigen kann. Mittelst einer Verallgemeinerung der bei höheren Stufen gefundenen Abhängigkeitsbeziehung zwischen Reiz und Schwelle (als welche natürlich allein schon wegen der Tatsache der Reizschwelle nicht einfach das Webersche Gesetz in Frage kommen könnte), hat man in der Tat schon versucht*), die den subjektiven Erregungen äquivalente Reizwirkung aus der Erhöhung der tatsächlich beobachteten Reizschwelle über jene Extrapolation hinaus abzuschätzen.

*) Helmholtz, Die Störungen der Wahrnehmung kleinster Helligkeitsunterschiede durch das Eigenlicht der Netzhaut. Zeitschr. f. Psychol. u. Phys. d. S. I, 1890, S. 5. Physiologische Optik. 2. Aufl. 1896, S. 415.

Reihe der beiderseitigen Äquivalente, die derjenigen in der Vorüberlegung zur Messung von Vergleichsfehlern S. 237 völlig analog konstruiert ist, hat aber auf Seiten der Wahrnehmung des abgestuften Minimalreizes offenbar nur bis zur Stufe 0 eine reale Bedeutung. Ein Äquivalent zum augenblicklichen „Begriff" von der Nulllage wäre daher experimentell durch eine Abstufung des Reizes selbstverständlich nur erreichbar, solange ein „positiver" Fehler in dem oben genannten Sinne vorläge, also tatsächlich bewußte Reizwirkungen subjektiviert würden, wobei wir aber wohlgemerkt von der Schwelle noch absehen. Bei negativen Fehlern finden sich somit in der Äquivalenzreihe höchstens zu den Begriffen, die man sich augenblicklich von entsprechend höheren Stufen macht, Äquivalente auf seiten des variablen Prüfungsreizes. Wenn wir aber den Fehler wirklich aus einer Reizschwelle herauslösen wollen[1], müssen wir eben auf seiten der Norm bei dem Begriffe von der augenblicklichen Nulllage bleiben.

Durch diese Überlegung ist also der ganze Fall wieder vollständig auf den früheren des Vergleiches zwischen zwei Inhalten reduziert, von denen hier nur eben der dem Normalreiz N entsprechende Inhalt prinzipiell durch die spezielle begriffliche Funktion charakterisiert ist, daß er uns die augenblickliche objektive Nulllage repräsentiere. Zu einer empirischen Messung, wie sie hiernach bei Abstraktion von der Schwelle wenigstens für den positiven Fehler möglich erschien, müßte aber dann offenbar außerdem auf Seiten des Vergleichsinhaltes V auch wieder erst eine Unterschiedsschwelle nach oben und nach unten von der dem Normalnull äquivalent gedachten Stufe aus überwunden werden, aus der dann das gesuchte Äquivalent A des Normal-Null durch irgend eine Mittelbildung aus den beiden Grenzreizen zu berechnen wäre. Hiermit ist aber etwas Unmögliches verlangt. Denn es löst allerdings die mit der Reizschwelle identische Stufe des variablen Prüfungsreizes, der hier als V erscheint, das Bewußtsein der Objektivität aus, was als Überschreitung der oberen Schwelle beim „Vergleich" mit der Norm der Nulllage betrachtet werden kann. Dagegen kann natürlich die V.-P. unterhalb dieser Reizschwelle, falls wirklich diese selbst und der zu messende Fehler der Norm konstant bleibt, auf die Vergleichswahrnehmung überhaupt kein Urteil beziehen, da sie ihr eben in diesem ganzen Stufenbereiche einfach nirgends vorhanden zu sein scheint, und die Aufgabe der Ableitung eines unteren Grenzreizes, von der Normalnull aus gerechnet, erscheint somit überhaupt undenkbar.

c) Die Beziehung der Reizschwelle zur Unterschiedsschwelle.

Alle diese Überlegungen gelten nun ganz allgemein, gleichgültig, in welcher Weise man sich die Norm vergegenwärtigt. Nicht immer sind allerdings die Schwierigkeiten so groß, wie in dem extremen Falle, bei dem das

1) Die Fehler, die auf höheren, übermerklichen Reizstufen in der früher ausführlich dargelegten Weise meßbar werden, wenn die Norm selbst durch einen Normalreiz im früheren Sinne vertreten ist, sind natürlich diesen Fehlern auf der untersten Stufe des Kontinuums niemals ohne weiteres als gleich zu erachten.

Kriterium der objektiven Nulllage jeweils wirklich ein rein reproduktives ist. Dies träfe allerdings zu, wenn der zu beurteilende Minimalreiz nicht in einem ganz bestimmten, dem Beobachter bekannten Zeitpunkte, sondern um eine unbestimmte Zeitstrecke vor der Entscheidung einsetzte, bzw. allmählich anstiege, und wenn er außerdem, falls das Wahrnehmungsfeld des untersuchten Sinnesorganes ausgedehnt ist, dieses ganz ausfüllte. Etwas ähnliches kommt höchstens bei der unten erwähnten Untersuchung der sog. Aufmerksamkeitsschwankungen mit konstanten minimalen Sinnesreizen vor, bei denen aber nicht die Reizschwelle als solche unter optimalen Bedingungen, sondern ihre mitunter bedeutende Erhöhung bei längerer Beobachtungsdauer gemessen werden soll, und auch hier gilt dies höchstens bei akustischen Versuchen, bei denen es die eigentümliche Einheitlichkeit der gesamten Schallwahrnehmung eines Augenblickes mit sich bringt, daß die Nulllage der „Stille" auch schon beim Dasein einer einzigen Schallempfindung nicht mehr unmittelbar wahrgenommen ist. Dabei läßt sich aber dann sogar bisweilen ein Vorgang beobachten, dem eine gewisse Beziehung zur vorhin als undenkbar erklärten Unterbietung der subjektiven Nulllage nicht ganz abzusprechen ist. Natürlich kann eine solche Analogie nur bei stärkeren positiven Fehlern dieser Norm vorkommen, also bei der Subjektivierung einer gewissen Minimalstufe des Prüfungsreizes. Solche Fehler dürften nun in den Remissionsstadien der Aufmerksamkeit in der Tat auftreten, in denen die konstante Minimalstufe des Reizes zunächst nicht mehr vorhanden zu sein scheint. Wird nun in diesem Stadium der Reiz plötzlich völlig abgebrochen, so hat man nachträglich den Eindruck, als ob doch etwas dagewesen sei, so daß also nicht einfach die Sinneserregung vermindert war[1]) Natürlich ist dies aber nicht ein Urteil, das dem k-Fall nach Überschreitung des unteren Grenzreizes r_u bei Konstanz des Fehlers und der mittleren Schwelle vergleichbar sein könnte. Auch wird hierbei überhaupt kein anderes Urteil über den Prüfungsreiz 0 gefällt, als es bei den höheren Stufen bis zur (oberen) Schwelle abgegeben werden würde. Vielmehr verschiebt sich hierbei nur die Norm, u. z. vermindert sich ihr Fehler auf Grund des Kontrastes zwischen einer tatsächlichen Sinneswahrnehmung, die man von der fehlerhaften Normvorstellung aus als Repräsentanten der Nulllage betrachtete, einerseits und der längere Zeit nicht mehr dargebotenen Reizstufe 0, deren längeres Ausbleiben eben die Ursache des Fehlers war, andererseits. Jedenfalls wäre die Stufe, die diesen Effekt eben herbeiführt, eine untere Schwelle r_u in einem ganz anderen Sinne. Auch wäre sie natürlich nur durch eine stufenweise Verringerung des Reizes, nicht aber durch eine regellose Reihenfolge der Abstufungen „meßbar". Endlich hätte man, falls man wirklich $\frac{r_o + r_u}{2}$ als mittlere Objektivierungsgrenze (subjektive Nullage) und daher $r_o - \frac{r_o + r_u}{2}$ als die vom positiven Fehler gereinigte, „wahre" Reizschwelle des Remissionsstadiums auffassen wollte, einfach eine Art von Unterschiedsschwelle aus einem etwas höheren Niveau auf ähnliche Art wie früher bestimmt, die eben nur subjektiv in diesem Stadium als unterster

1) Vgl. Experim. Analyse der Bewußtseinsphäre S. 249.

Empfindungsschritt der direkten Sinneswahrnehmung (von der vermeintlichen Nullage aus) erschien.

Bei den gewöhnlichen Messungen der Reizschwelle, bei denen es auf deren Minimum ankam, suchte man jedoch ganz von selbst die Nullage in möglichst unmittelbarer zeitlicher und räumlicher Nähe des abgestuften Prüfungsreizes unmittelbar „wahrnehmen" zu lassen. Hierbei muß natürlich zugleich der Beobachter wissen, daß ein möglichst reizloses Gebiet vorliegt, damit es ihn überhaupt in seinem Urteil unterstützen kann, das wegen der Fragestellung im letzten Grunde doch immer „absolut" ist, oder, besser gesagt, auf einer „Auffassung" der wahrgenommenen Leere als objektiver Nullage ruht, die im letzten Grunde rein gedanklich begründet sein muß. Eben deshalb können solche Versuche auch in diesem gewöhnlichen Falle nicht als einfache Messungen einer Unterschiedsschwelle auf der untersten Reizstufe betrachtet werden. Ja im allgemeinen geht dies auch schon deshalb nicht an, weil die simultane Umgebung extensiver Sinnesgebiete, z. B. das völlig dunkle Sehfeld oder das reizlose Tastfeld, mit allen zur objektiven Orientierung in ihm gehörigen Inhalten und der zeitlich unmittelbar vorhergehende Zustand der kritischen Stelle, der bei Gehörsschwellen im wesentlichen allein in Frage kommt, ohne besondere Instruktion hierbei in der Auffassung der Sachlage keine so koordinierte apperzeptive Stellung besitzen, wie sie bei der Messung eigentlicher Unterschiedsschwellen dem im übrigen der Nulllage entsprechenden Normalreiz N zukommen muß. Doch trägt natürlich auch schon diese Stellung der sinnlich wahrgenommenen Norm, bei der sie als bloßer „Hintergrund" figuriert, wesentlich zur Verfeinerung der Schwelle bei. Besonders der zeitlich unmittelbar vorhergehende Zustand der kritischen Stelle selbst steht zu deren Neuwahrnehmung in einer sehr engen Beziehung, die bei plötzlichen Änderungen einen lebhaften Kontrast mit sich bringt. Auch ist die kritische Stelle vorher in der Voraussicht der Veränderung schon so beachtet, daß in dieser Richtung der Tatbestand der gewöhnlichen Ableitung einer Unterschiedsschwelle am nächsten kommt. Bei allen Formen dieser sinnlichen Unterstützung der Norm werden wesentliche Fehler von vorne herein vermieden, da alle dem kritischen Bereiche und der Umgebung gemeinsamen subjektiven Erregungen in der wissentlichen Nullregion als solche erkannt werden.

Allerdings gehen auch hier zufällige konstante Differenzen zwischen dem kritischen Bereiche und seiner Umgebung bzw. ihren am meisten berücksichtigten Gebiete bezüglich der Objektivierungstendenz in die Schwelle ein. Diese können aber nur ganz indirekt in Anschlag gebracht werden, indem man, in besonderen Versuchen, wie bei der exakten Bestimmung von Fehlern beim Vergleiche zweier übermerklicher Reize, wiederum Unwissentlichkeit bezüglich der Lage des Prüfungsreizes einführt. Es wird nur so viel verabredet, daß der Reiz entweder in dem einen oder in dem anderen der konstant und wissentlich abgegrenzten Gebiete auftritt, während das andere reizlos bleibt. Für Schallreize kommt wiederum nur der Wechsel der Zeitlage in Frage; denn sobald mehrere Tonqualitäten gegeben sind, handelt es sich nicht mehr um eine eigentliche Reizschwelle, sondern um eine Verdrängungsschwelle, falls das einzelne Element als solches ins Auge gefaßt wird, wobei es allerdings mancherlei

Analogieen zu den Spezialfragen bei einfachen Reizschwellen gibt. Bei Berücksichtigung des Unterschiedes der Zeitlage läßt man natürlich, ganz entsprechend wie bei dem der Raumlage, in einer im ganzen deutlich markierten und eventuell von dem Beobachter selbst auszuwählenden und abzuteilenden Zeitstrecke unwissentlich bald im ersten, bald im zweiten Abschnitt den Reiz einwirken. Eine Vollreihe, die für jede Reizlage die oberen Extreme E enthält, ergibt dann bei allen derartigen Versuchen für jede der beiden Reizlagen ein System von drei Kurven, da nun zu den u- und richtigen g-Fällen jeder Seite auch noch „falsche" g-Fälle (falsche Lokalisationen) hinzutreten,, die äußerlich den k-Fällen des Schemas Fig. 8a analog sind, wobei man sich natürlich das Ganze mehr oder weniger weit vor dem linken Rand durch die Ordinate zu $x = 0$ abgeschnitten zu denken hat. Bei normalem, der Φ-Funktion nahestehenden Verlauf ist zu erwarten, daß bei keinem allzu großen Vorsprung einer von beiden Seiten bezüglich der Objektivierungen jedes der beiden Systeme einen Schnittpunkt r (><) der g- und k-Kurve enthält, der nach S. 256 als „Äquivalenzwert" betrachtet werden kann, während bei einer relativ viel mehr zur Subjektivierung neigenden Seite die g- und k-Kurven vor dem Schnittpunkt auf die 0-Ordinate treffen können. An dem Schema Fig. 8a S. 176 kann man sich diese beiden Fälle also einfach dadurch veranschaulichen, daß man das System durch eine Null-Ordinate links bzw. rechts von der Ordinate Q abgeschnitten denkt. In dieser Weise lassen sich zwischen allen möglichen Gebietsteilen solche Relationen ableiten, wobei die „Totalfehler" offenbar den Differenzen zwischen den absoluten Werten der beiderseitigen Äquivalente, z. B. r_2 (><) — r_1 (><), entsprechen. Doch sind diese Werte nicht direkt auf die einfachen Reizschwellen zu übertragen, da diese Unwissentlichkeit bezüglich der Reizlage und die Verteilung der Aufmerksamkeit die Schwelle und den Fehler beeinflussen wird. Solche Versuche liegen auch schon auf dem Wege zu einer mehrfachen Disjunktion in dieser Hinsicht, wie sie z. B. O. Külpe bei seiner erstmaligen, anregenden Spezialuntersuchung über die Objektivierung und Subjektivierung von Sinneseindrücken eingeführt hat.[1])

d) Die Unterscheidung der zweiten Reizschwelle eines beiderseits begrenzten Qualitätskontinuums von der sog. „Reizhöhe" der intensiven Abstufung.

Sobald nun die adäquate Wahrnehmung eines bestimmten Reizmerkmales beiderseits so gleichartig begrenzt ist, wie z. B. diejenige des Farbentons und der Tonhöhe, sind offenbar beide Grenzen einfach als „Reizschwellen" aufzufassen und nach den hier entwickelten Gesichtspunkten völlig gleichmäßig zu behandeln.[2]) Natürlich sind die

1) Phil. Stud. XIX (Festschrift), 1902, S. 508.

2) Bei allen derartigen Versuchen ist natürlich vor allem darauf zu achten, daß wirklich nur die Reizqualität einwirkt, für welche die Schwelle abgeleitet werden soll, oder wenigstens keine Reizart, die unter den gegebenen Umständen, z. B. bei geringer Intensität, mit jener verwechselt werden kann. Daher kommen z. B. bei der Bestimmung der Tonhöhen-Schwellen Obertöne und sekundäre Differenztöne als Fehlerquellen in Frage.

Qualitätsschwellen immer nur für eine bestimmte Reizintensität gültig [1]), was bei Verallgemeinerungen der gefundenen Werte nicht immer genügend berücksichtigt worden ist. Die obere Begrenzung bei Steigerung der Intensität, die man im wesentlichen als eine untere Grenze der Schädigung des Organes aufzufassen hat und die von Wundt mit jenen oberen [2]) Qualitätsschwellen unter den einen Begriff der „Reizhöhe" zusammengefaßt wird, ist etwas wesentlich anderes und auch methodisch bei weitem nicht so präzis abzugrenzen wie die beiderseitigen Qualitätsschwellen. Dagegen können räumliche Bedingungsextreme oder „Schwellen" bei allen nur in bestimmten Bezirken des Sinnesorganes auslösbaren Qualitäten nach allen Seiten hin mit ähnlicher Genauigkeit abgegrenzt werden wie die wahrnehmbaren Reizstufen eines Empfindungskontinuums für ein und die nämliche Reizlage. So wären also z. B. auch die sog. „Isochromen", d. h. die Grenzen der Wahrnehmbarkeit bestimmter Farbentöne in der Peripherie des Sehfeldes, genau genommen auch immer nur aus „Vollreihen" abzuleiten, bei denen die Wellenlänge und Lichtintensität konstante Versuchsbedingungen bilden, und die Breitengrade eines bestimmten Meridians als Reizstufen und somit auch als Abszissen nach Schema Fig. 8a verwendet werden. Eben deshalb sind wir ja auch in § 29 von dem ganz allgemeinen Begriff der Schwelle als eines Bedingungsextremes überhaupt ausgegangen, weil die dort abgeleiteten Berechnungen für alle Abstufungsrichtungen Gültigkeit besitzen, die bei einer gewissen Stufe irgend welche Effekte neu auftreten lassen, also z. B. auch für die sog. Zeitschwellen mit der Zeit als Abzisse, sei es, daß man die kürzeste Reizzeit sucht, bei der ein Reiz eben merklich wird, oder Minima für speziellere Empfindungsqualitäten, die erst bei längeren Reizzeiten möglich werden, wie z. B. der Farbenton bei Licht- oder der Toncharakter bei Schallreizen.

39. Die Veränderungsschwellen.

a) Die Eigentümlichkeiten der Bestimmung von Schwellen für stetige Veränderungen.

Die vorhin in 38,c erwähnte, überall anwendbare Form der Reizschwellenbestimmung, bei der man zunächst den Zustand der Reizlosigkeit während einer reizfreien Zeitstrecke wissentlich wahrnimmt und dann einfach die Abhebung eines ebenmerklichen Reizes von diesem Zustand konstatiert, ist offenbar nur ein Grenzfall aus dem großen Gebiete der sog. Veränderungsschwellen (V.-S.). Diese bedeuten ganz allgemein das ebenmerkliche Maß der Veränderung eines beliebig gelagerten Reizes in irgend einer Richtung, wobei der Übergang von der Ausgangslage zu dem als etwas Neues erscheinenden Endzustande wiederum durch die verschiedensten Formen einer stetigen oder unstetigen Änderung erreicht werden kann. Durch die Er-

1) Vgl. M. Wien, Über die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres für Töne verschiedener Höhe. Pflüger's Arch. f. Physiol. Bd. 97, 1903, S. 2.

2) Der Sondername der „Reizhöhe", den Wundt für alle zweiten Extreme in Richtung der Zunahme des physikalischen Reizmaßes vorschlug, dürfte daher für Qualitäten überhaupt unnötig sein.

hebung des Ausgangsreizes über die Nullage wird hierbei natürlich im allgemeinen auch wieder eine obere und eine untere Schwelle möglich.

1. Bei dem allgemeinen Fall einer stetigen Änderung lassen sich jedoch keine bestimmten Reizstufen einander eindeutig als N und V gegenüberstellen, wie bei der Vergleichung zweier getrennt vergegenwärtigter Reize oder bei der Auffassung einer plötzlichen Änderung. Es schließen sich vielmehr die Wahrnehmungen sämtlicher Phasen, die bis zur Auslösung der Veränderungsauffassung ablaufen, unter sich und mit den nachfolgenden Phasen zu einem Komplexe zusammen, auf den auch das Urteil, daß eine Veränderung stattgefunden habe, zunächst ohne weitere Analyse bezogen wird. Der Gesamtprozeß, nach dessen Ablauf die Veränderung ebenmerklich wurde, kann daher ähnlich absolut als „Reiz" für die V.-Wahrnehmung betrachtet werden, wie ein einzelner Reiz für die Wahrnehmung seiner Qualität bei der Bestimmung einer absoluten Reizschwelle. Da aber doch jeder einzelne Moment durch eine spezielle Beachtung mit seinem neuen objektiven Zustand relativ am besten zur Geltung gebracht werden kann, so besteht hier natürlich eine besondere Vieldeutigkeit der allgemeinen Fragestellung bezüglich der apperzeptiven Bedingungen, die denjenigen bei Beobachtung länger dauernder konstanter Reize, z. B. beim Studium der Aufmerksamkeitsschwankungen, nahe stehen.

2. Bei der Messung der V.-S. für eine stetige Variation, die nach ihrer Erkennung mit konstanter Geschwindigkeit weiterläuft, besteht nun die einzige Möglichkeit zur Abgrenzung der Erkennungsbedingungen darin, daß man die V.-P. diese Auffassung in möglichst konstanter Weise registrieren läßt. Die V.-P. „reagiert" also auf die Veränderung, weshalb W. Stern hier von einer „Reaktions- oder Bestimmungsmethode" spricht[1]). Dieses Verfahren ist somit methodisch auch noch dadurch besonders kompliziert, daß der Experimentator nicht unmittelbar diejenige Veränderungsgröße feststellt, die zur Auslösung des positiven Urteiles der V.-P. eben hinreichte, sondern immer erst eine spätere Phase, bei der der ganze, schon S. 232 erwähnte Prozeß bis zur Wiedergabe des Urteiles fertig abgelaufen ist. Bei großer Geschwindigkeit der Änderung kann in dieser Zwischenzeit eine bedeutende Verschiebung der ursprünglich wirksamen Reizlage stattgefunden haben. Auch ist anzunehmen, daß diese Zeit von der Art der Änderung selbst wesentlich beeinflußt wird. Wollte man aber diese „schädliche" Zeit, die bei allen Resultaten dieser Versuche von dem irgendwie registrierten Augenblicke des Urteiles abgezogen zu denken ist, als eine sog. „Reaktionszeit" unmittelbar bei der nämlichen objektiven Motivation ableiten, so müßte man natürlich die V.-S. wiederum bereits kennen. Man kann daher nur durch Analogieen zum Ziele kommen, weshalb sich z. B. W. Stern bei seinen Bestimmungen einfach an die direkt ermittelte Zeit der Reaktion auf eine plötzliche ebenmerkliche Veränderung gehalten hat, die er z. B. bei optischen und akustischen Reizen auf za. 500 σ ansetzt.[2]) Die Eigentümlich-

1) Psychologie der Veränderungsauffassung, 1898, S. 90. Die Wahrnehmung von Tonveränderungen, Zeitschr. f. Psychol. 21. 1899. S. 364. Ebenda, Bd. 22, 1900, S. 2.

2) Zeitschr. f. Psychologie u. Physiologie der Sinnesorg. 7, 1894, S. 270ff. u. Bd. 22, 1900, S. 5.

keit des Prozesses, daß die zunehmende Vergrößerung der Abweichung von der Ausgangslage auch noch während der Verarbeitung der ersten Anregung zum Urteile mit einer gewissen Beschleunigung nachhilft, würde aber natürlich auch nach Abzug der Zeit einer „Reaktion" im engeren Sinne, d. h. der Willkürbewegung auf ein bestimmt verabredetes Reizmotiv, niemals zu eliminieren sein.

Da übrigens auch die Auffassung von Bewegungen nur ein spezieller Fall der Veränderungswahrnehmung ist, so könnten offenbar alle Gesichtspunkte, die z. B. bei der Ermittelung des Zeitpunktes eines sog. Durchgangsprozesses[1]) in Frage kommen, auch zur Bestimmung dieser „schädlichen" Zeit bei der Veränderungsauffassung beigezogen werden. Außer der direkten Reaktion auf eine einzelne Veränderung, die der astronomischen Registriermethode entspricht, läßt sich also auch, in Analogie zu der sog. „Augen- und Ohrmethode"[2]), der Zeitpunkt ihrer Merklichkeit mit einem anderen, die Zeit markierenden Vorgang vergleichen. Doch kann diese Analogie auch zugleich lehren, daß der Zeitfehler hiermit nicht etwa eliminiert, sondern unter Umständen sogar in besonders großem Maßstab beibehalten ist, ganz abgesehen davon, daß bei der Vergleichung mit einem Zeitmaß die Verhältnisse der V.-S. selbst modifiziert sein werden, und daß insbesondere die objektive Zeitmarke, die natürlich etwas Diskontinuierliches sein müßte, auch den zu analysierenden Hauptprozeß leicht durch Miterregung oder Assimilation beeinflussen könnte. Jedenfalls gäbe sie aber wenigstens die Möglichkeit an die Hand, auch bei der Messung der Schwelle für solche Veränderungen, die nach der Erkennung gleichmäßig fortlaufen, die Methode der Vollreihen anzuwenden. W. Stern verwendete die „Konstanzmethode", die er als „Beurteilungsmethode" bezeichnet (s. S. 294 A. 1.), bei Veränderungen von Tonhöhen nur in der Form, daß die stetige Veränderung eine bestimmt abgestufte Dauer besaß und von zwei konstanten Stadien à 1 Sek. eingerahmt wurde. Auch kamen höchstens 3 Zeitlängen mit konstanter Geschwindigkeit der Veränderung vor (die Geschwindigkeit der Änderung um $1/2$ Schw. in 2 Sek. wurde z. B. in 3 Zeitstufen à 2, 4 und 8 Sek. dargeboten). Hier verläuft aber natürlich auch die Verarbeitung der V.-Wahrnehmung bei jeder Stufe unter anderen Bedingungen.

b) Die exakte Ableitung einer Schwelle für stetige Veränderungen.

Die Einheitlichkeit des Prozesses der Wahrnehmung stetiger Veränderungen, bei denen ein zeitliches Minimum als V.-S. ableitbar ist, ließ nun auch bei der Berechnung eines Hauptwertes dieser V.-S. aus mehreren Versuchen vorläufig jede weitere Analyse vom Standpunkte der K.-L. aus zurücktreten. Man betrachtete also die V.-S. innerhalb jedes einzelnen Versuches in ähnlicher Weise als konstant, wie es früher bei der Bestimmung von Unterschiedsschwellen nach der Methode der Minimaländerungen mit konstanter Variationsrichtung (s. S. 277) bezüglich einer ganzen Reihe geschah. Bei Anwendung der Reaktions- oder Bestimmungsmethode in dem soeben S. 293

1) Vgl. § 78,c und 79.
2) Vgl. § 64,a.

definierten Sinne auf eine fortgesetzte Änderung konnte dann jeder einzelne Versuch bereits einen Schwellenwert ergeben, ähnlich wie eine ganze Reihe bei der Methode der Minimaländerungen mit wissentlich konstanter Variationsrichtung, die vor allem in ihrer Form der Müllerschen Methode der kleinsten Unterschiede (s. S. 277) auf die Ableitung dieser V.-S. unmittelbar zu übertragen ist, wobei einfach der zweite konstante Normalreiz N in Wegfall kommt. Unter der genannten Voraussetzung dieses Verfahrens könnte wohl auch einfach wieder das arithmetische Mittel der in den einzelnen Versuchen gefundenen V.-S. als nächstliegender Hauptwert der gesuchten Veränderungsschwelle gelten. Nimmt man dagegen die Tatsache hinzu, daß die Schwelle, die also hierbei eine Zeitschwelle bei gegebener Änderungsgeschwindigkeit darstellen würde, in jedem Momente des einzelnen Versuches selbst in ganz beliebiger, unstetiger Weise schwanken kann, und daß erst eine große Zahl von Versuchen alle Möglichkeiten dieser Art erschöpft, so läßt sich daran denken, die Überlegung, die bei der Methode der Minimaländerungen mit unregelmäßiger Variation maßgebend war, auf die V.-S. zu übertragen, deren Berechnung dann wiederum erst durch die Ableitung von Vollreihen vermittelt wird. Zur Unwissentlichkeit hinsichtlich der jeweils vorliegenden Stufe dürfte hierbei der V.-P. der Beginn der Veränderung nicht genau bekannt sein. Sie ist also zunächst gewärtig, daß nach dem Beginn der Beobachtung überhaupt der Reiz eventuell erst eine beliebige Zeit lang völlig konstant bleibt. Doch sind die Bedingungen für die einzelnen Versuche wohl um so konstantere, je mehr es durch Häufung der Versuche u. ä. gelingt, ohne Aufhebung jener Unwissentlichkeit eine zur Konstruktion von Vollreihen ausreichende Zahl von Zeitstufen zusammenzubringen, bei denen die Veränderung jedesmal im nämlichen Abstande vom Beginn jeder Einzelbeobachtung eingesetzt hat. Die Abstufung vollzöge sich bei fortgesetzter Veränderung nur an der erwähnten objektiven Zeitmarke. Theoretisch würde sich jedoch bezüglich der exakten Bestimmung der Schwelle alles natürlich genau so gestalten müssen, wenn die zeitliche Abstufung, wie bei W. Sterns akustischen Versuchen, durch einen Stillstand der Veränderung selbst herbeigeführt würde. Stern hat freilich einstweilen nur eine ungefähre Charakterisierung der V.-Empfindlichkeit unter diesen Umständen durch die rel. H. der Erkennungen (mit Unterscheidung von Sicherheitsgraden) für ein paar Stufen vorgenommen. Die Resultate, die er in einem einstweilen natürlich ganz zweckmäßig nur angenäherten Verfahren fand, dürften jedoch eine Fortsetzung nach genaueren Methoden sehr wohl lohnen.

c) Die Schwellen für plötzliche Änderungen, ihre Verwandtschaft mit einigen Formen der Unterschiedsschwellen und ihre besondere methodische Bedeutung.

Die von Stern bei seinen akustischen Versuchen eingeführte Veränderungsart, bei der ein konstantes Anfangs-Stadium durch eine stetige Veränderung mit einem konstanten Endstadium zusammenhängt[1]), geht unmittelbar

[1]) Stern verglich die Beurteilung dieser Veränderung und die Vergleichung ihres Ausgangsstadiums mit dem durch eine leere Zeit getrennten Endstadium.

in die Bedingungen bei der Ableitung von Reizschwellen unter den in § 38,c genannten Bedingungen über, wenn der Ausgangsreiz und die Veränderungszeit zu Null werden, so daß eine plötzliche Veränderung von der Nullage aus vorliegt. Obgleich nun bei der plötzlichen Veränderung wiederum ein N und ein V einander gegenübergestellt werden können, bleibt der Urteilsprozeß demjenigen bei stetiger Variation doch noch nahe verwandt, weil die Änderung als ein Moment an einem sonst einheitlichen Gegenstande oder Vorgange in einem einzigen Auffassungsakte erkannt wird. Auch rein inhaltlich ist aber natürlich die unmittelbare zeitliche Nachbarschaft von N und V von ähnlicher Wirkung wie bei den einzelnen Phasen eines stetigen Vorganges, deren psychologischer Effekt im einzelnen immer erst aus den oft sehr komplizierten Gesetzen für die Abhängigkeit der Sinneserregung von den Zeitverhältnissen der Reize einigermaßen zu rekonstruieren ist, soweit überhaupt aus den übermerklichen auf untermerkliche Erregungsverhältnisse unter ähnlichen Ablaufsbedingungen zurückgeschlossen werden kann.

Bei der Unterschiedsschwelle, die sich auf die Vergleichung zweier selbständig vergegenwärtigter Reize N und V bezieht, kann man dagegen auch die zentral und peripher bedingten Wechselwirkungen zwischen beiden Vergleichsqualitäten durch eine gewisse Isolierung der beiden Sinneswahrnehmungen zu vermeiden suchen. Doch hat man z. B. die U.-S. für Lichtreize seit Bouguer und Lambert ausdrücklich immer in der speziellen Verfeinerung gemessen, die nur dann gefunden wird, wenn die zu vergleichenden Felder unmittelbar aneinander grenzen, also nicht einmal durch eine Linie getrennt sind, und mit freiem, nicht mit starr fixierendem Blick beobachtet werden. Hierbei ist nicht nur die Auffassung des räumlichen Grenzgebietes zwischen N und V eine ähnlich einheitliche wie die Beobachtung des zeitlichen Überganges bei einer plötzlichen Veränderung, sondern es tritt die spezielle Wechselwirkung des sog. Randkontrastes hinzu. Man hat also hier ganz analoge, nur auf ein höheres Niveau übertragene Versuchsbedingungen wie bei der Ableitung einer Reizschwelle, bei der der ebenmerkliche Reiz das nämliche Feld einnimmt wie V bei Bestimmung der U.-S.

Bei starrer Fixation oder auch im indirekten Sehen wären dies dagegen keineswegs die günstigsten Bedingungen, da hierbei die Assimilation durch die sog. gleichsinnige Induktion feine Unterschiede schnell verschwinden läßt. Auch die taktile Unterschiedsschwelle für passiv beurteilte Druckreize, die auf einen bestimmten Bezirk der Körperoberfläche konstant appliziert werden und daher der optischen Beobachtung mit fixierendem Blick ähnlich wirken, erfordert beim Simultanvergleich jederzeit einen gewissen Abstand, der die beiden Eindrücke überhaupt zu sondern gestattet, und bei Vergleichung sukzessiver kürzer dauernder Eindrücke, z. B. zweier Fallgeräusche, hat man von jeher einen gewissen Abstand einführen müssen, um überhaupt zwei getrennte Vergleichsobjekte zu erlangen. Ist aber einmal eine Zwischenzeit eingeführt, so verlangt die natürliche zeitliche Gliederung der Apperzeptionsakte auch ganz von selbst eine gewisse, zwischen 1 und 2 sec. gelegene Distanz, wenn man optimale Vergleichsbedingungen anstrebt.

Jedenfalls kommt aber mit diesem Abstand eine Vieldeutigkeit bezüglich der Unterschiedsschwelle herein, bei der nur eine sorgfältige Berücksichtigung der jeweiligen Nebenumstände falsche Verallgemeinerungen verhüten kann. Von hier aus betrachtet erscheint daher wohl gerade die auf jedem Sinnesgebiet ableitbare Veränderungsschwelle für eine plötzliche Veränderung als ein besonders eindeutig bestimmter Grenzfall, an welchem sich spezielle psychische Einflüsse auf die Schwelle am vergleichbarsten untersuchen lassen. Weil aber sowohl für die Sinneserregungen selbst als auch für ihren psychologischen Effekt die Veränderung zeitlich bestimmt abgegrenzt sein muß, so wird speziell die Schwelle für kurzdauernde Veränderungen, die den Reiz nur für eine kurze Zeit von einer konstanten Ausgangslage abweichen lassen, für solche Untersuchungen der symptomatischen Bedeutung der Schwelle das vergleichbarste Reagens abgeben können, worauf wir § 42ff. noch ausführlicher zurückkommen werden. Auf einem Sinnesgebiete, auf dem innerhalb bestimmter Grenzen die Erregung bei konstanter Einwirkung des Reizes ungefähr proportional zur Reizzeit ansteigt, wie bei der Intensität der Lichterregungen, wird man dann auch zugleich die Intensitätsabstufung der subjektiven Veränderung durch eine Variation der Reizzeit vornehmen können[1]). Äußerlich fällt also dann die Ableitung einer solchen V.-S. völlig mit derjenigen der Veränderungs-Zeitschwelle bei einer stetigen Variation nach S. 294f. zusammen; nur ist hier natürlich keine unwissentlich variable Zwischenzeit vom Beginn der Beobachtung an erforderlich, da sich die ganze Beobachtung stets auf einen einzigen psychischen Akt zusammendrängt.

Kapitel 11.

Die Vergleichung von Unterschieden.

40. Die Vergleichung nur teilweise vergleichbarer Gegenstände im allgemeinen.

In den bisherigen Beispielen der Vergleichsmethode setzten wir im allgemeinen stets voraus, daß die beiden Gegenstände, die miteinander verglichen werden, bei V = N objektiv und bei V = A (Äquivalenzwert) subjektiv vollständig gleich seien, abgesehen von ihrer numerischen Verschiedenheit mit ihrem Unterschied der Raum- und Zeitlage. Auch im alltäglichen Leben macht man bei der Aufgabe, etwaige Unterschiede zwischen zwei Gegenständen festzustellen, alle mit diesen enger verbundenen Nebenumstände möglichst gleich, und die Raum- und Zeitlage, bei öfterer Umkehrung, wenigstens möglichst ähnlich. Vor allem die soeben bei der Veränderungsschwelle erwähnte Sukzession an der nämlichen subjektiven Stelle des Wahrnehmungsfeldes in einem angemessenen Tempo läßt zwei auch sonst

1) Vgl. unten § 44.

gleichartige Wahrnehmungen besonders „vergleichbar“ erscheinen. Denn es liegt im Wesen der durch Willkürimpulse nur teilweise regulierbaren Apperzeption von Relationen, daß sie sich stets auf die Beziehung zwischen umfassenderen Gebieten des jeweiligen Bewußtseinsbestandes erstreckt und von der Umgebung auch bei angestrengtester Konzentration der Aufmerksamkeit niemals völlig zu „abstrahieren“ vermag. Dies fällt uns nur bei tatsächlich gleicher „Umgebung“ der Vergleichsobjekte nicht so auf, weil hier eine resultierende Beziehung der Verschiedenheit durch die gleichen Elemente des Hintergrundes in ihrem entscheidenden Charakter nicht beeinflußt wird. Sobald jedoch beiderseits verschiedenartige und auffällige Zusätze mit den eigentlich zu vergleichenden Gegenständen untrennbar und enge verbunden sind, ist der Vergleichsprozeß zunächst einmal schon als solcher erschwert; außerdem erwecken aber nun objektiv gleiche Quantitäten der eigentlichen Vergleichsobjekte nicht mehr das Bewußtsein der Gleichheit, und der „Fehler“ der Äquivalente entspricht der Einmischung der hier beiderseits verschiedenen Umgebungsbestandteile in die Relationsauffassung. Willkürliche Einstellungen der Apperzeption in Richtung einer größeren Konzentration oder Ausweitung, die durch geeignete Variationen der Objekte unterstützt werden können, pflegen dabei den Fehler und die im allgemeinen ebenfalls veränderte Unterschiedsschwelle der Hauptinhalte naturgemäß mehr oder weniger zu beeinflussen. Besonders lehrreiche Beispiele dieser Art sind viele der bekannten geometrisch-optischen Täuschungen, bei denen an zwei Hauptlinien oder Flächen, die eigentlich allein zu vergleichen sind, beiderseits verschiedene Zusätze irgend welcher Art angebracht werden.

In diesen Fällen lassen sich aber das Hauptobjekt und seine Zusätze als relativ selbständige Elemente doch wenigstens innerhalb der Gesamtfigur selbst von einander klar und deutlich unterscheiden, weshalb auch zum mindesten die Gleichartigkeit des N und V in beiden Vergleichsfiguren ohne weiteres feststellbar ist. In anderen Fällen stehen dagegen die eigentlich zu vergleichenden Inhalte, die natürlich zur Ableitung von Äquivalenzwerten stets gleichartig sein müssen, innerhalb der beiden Gesamtwahrnehmungen den beiderseits verschiedenen Momenten nicht in dieser klaren Selbständigkeit gegenüber, wenn nämlich nur eine Vergleichbarkeit der Gesamtinhalte hinsichtlich eines „Merkmales“ vorliegt, wobei dann erst eine von den anderen Merkmalen „abstrahierende“ Beachtung die Erkennung der speziellen Beziehung in dieser „Hinsicht“ herbeiführen kann. In der Naturwissenschaft kommt dieser psychologisch besonders interessante Fall z. B. bei der sog. heterochromen Photometrie vor, falls diese nicht nach indirekten Kriterien verfährt, wie die Flimmerphotometrie [1]) u. ä., sondern die verschiedenfarbigen Lichter, z. B. Rot und Grün, unmittelbar miteinander speziell hinsichtlich ihrer Helligkeit vergleicht. Wenn jemand nicht imstande ist, das in beiden Lichtempfindungen allein vergleichbare „Merkmal“ der Helligkeit möglichst allein für sich zu beachten, also vom „Farbenton“ zu abstrahieren, erscheinen ihm beide konkreten Eindrücke geradezu als „völlig unvergleichbar“ oder „disparat“, weil eben unter allen denkbaren

1) Vgl. Bd. III, 2. Abt., Sinnesphysiol. II, S. 33ff.

Intensitätsstufen der beiden Gesamtqualitäten keine Äquivalente vorkommen. Diese Apperzeption kann so wenig, wie eine neue schwierige äußere Tätigkeit, allein nach rein abstrakten Beschreibungen und durch bloßen guten Willen sogleich wirklich richtig ausgeführt werden, sondern muß gewissermaßen immer erst in natürlichen Vorstufen ausprobiert werden. Aber es gibt ein ganz sicheres Hülfsmittel, um sie zunächst einmal ganz unwillkürlich auszulösen. Nach einer allgemeinen Gesetzmäßigkeit, die bisweilen als psychologisches „Kontrastgesetz" bezeichnet wurde, ist das Neue und Wechselnde an sich auffälliger als das innerhalb sonstiger Variationen konstant Bleibende. Man wird also bei Beobachtern, die in solchen Versuchen noch nicht geübt sind, jene Verständnislosigkeit für den Sinn der Aufgabe vor allem dann vorfinden, wenn man ihnen sofort zwei verschiedene Farben gegenüberstellt, deren Helligkeit bereits annähernd gleich oder doch nicht viel mehr verschieden ist, als es für „Vollreihen" bei geübten Beobachtern ausreichen mag. Denn in diesem Falle drängen sich eben gerade die störenden Farbendifferenzen besonders stark auf. Je wirksamer dieser im Wesen der heterochromen Vergleichsobjekte liegende Farben-Kontrast ist, um so stärker müssen vielmehr zunächst auch einmal die Helligkeiten differieren, u. z. muß das beiderseitige Helligkeitsverhältnis (bei Konstanz der Farbennuance) durch den Gleichheitspunkt hindurch von einem Extrem ins andere übergeführt werden; dann wird sich auch die Relation, die von dem beiden Empfindungen gemeinsamen Merkmal fundiert ist, ganz von selbst aufdrängen und sogar unwillkürlich beachtet werden und kann auch viel leichter mit dem Effekt des relativen Gleichheitsbewußtseins apperzipiert bleiben, wenn die beiden heterochromen Helligkeiten im Lauf der Abstufung einmal längere Zeit nur wenig verschieden oder gleich sind. Hat man einmal das eigentlich gemeinte Merkmal sich klar gemacht, so kann das charakteristische Bewußtsein der relativen Gleichheit in dieser Hinsicht von dem Farbenkontrast sogar besonders abstechen und ein klares intellektuelles Korrelat der bekannten ästhetischen Wirkung helligkeitsgleicher Farbenkombinationen abgeben. So weit man zunächst mit Annäherungswerten zufrieden ist, wird sich gerade für diese Einübung einer solchen Abstraktion die Herstellungsmethode sehr empfehlen, falls der Einstellungsapparat leicht und stetig genug zwischen großen entgegengesetzten Differenzen hin und herzugehen erlaubt, wie z. B. der Lummer-Brodhunsche oder der Marbesche Apparat mit Verstellbarkeit des Sektorenverhältnisses eines Maxwellschen Scheibenpaares während der Rotation.[1]) Denn die diskontinuierliche Aufeinanderfolge konstanter Stufen, die natürlich auch hier zur genauen Messung des Äquivalenzwertes nach den allgemeinen Prinzipien von S. 244 nötig wird, läßt ein noch nicht selbständig apperzipiertes Merkmal nicht so aufdringlich heraustreten, wie der schnelle und stetige Wechsel zwischen den entgegengesetzten Relationen.

Natürlich ist die Frage nach der psychologischen Natur dieses Merkmales und seiner relativen Selbständigkeit mit dem Nachweis der Herstellbarkeit ungefähr konstanter subjektiver Gleichungen, bzw. mittlerer Äquivalenzwerte allein noch nicht beantwortet. Es könnte ja sein, daß sich insbe-

1) A. S. 298, A. 1., a. O., S. 65.

sondere in der Nähe des Äquivalenzwertes die zu einer so genauen Messung führende Sicherheit der Urteile wenigstens zum Teil aus irgend welchen indirekten Kriterien erklärt. Bei großen Helligkeitsunterschieden ist aber das Helligkeitsmerkmal an der Empfindung wohl leicht und deutlich zu apperzipieren. Auch bliebe seine Beachtung für die Auslösung indirekter Kriterien ebenfalls von entscheidender Bedeutung. Doch ist bei solchen Kriterien im allgemeinen auch wieder an die Möglichkeit von Ablenkungen des Urteiles von dem eigentlich gewollten zu denken, so daß es ohne sie zwar weniger sicher, aber im Mittel richtiger sein könnte. Indirekte Kriterien können also insbesondere auch bei Abweichungen des Resultates von theoretisch wahrscheinlichen Werten (z. B. von dem Helligkeitswerte der Farbenkomponenten innerhalb indifferenter, unter sich genau vergleichbarer Grau-Gemische oder gleichartiger Farben) als Erklärung in Betracht kommen.

Die optischen Täuschungen und die heterochrome Photometrie, die bereits bei der Raumwahrnehmung und der physiologischen Optik erwähnt sind, haben wir aber hier nach der psychologischen Seite der zu ihrer Messung führenden Urteilsakte nicht nur um ihrer selbst willen etwas genauer analysieren müssen, sondern vor allem auch deshalb, weil sie eine besonders klare und instruktive Analogie zur sinngemäßen Durchführung ähnlich schwieriger Vergleichungen nur teilweise vergleichbarer Objekte darbieten, die bisher noch lange nicht systematisch genug behandelt zu sein scheinen: der Vergleichung von Unterschieden.

41. Die Vergleichung übermerklicher Unterschiede in verschiedenen Reizstufen.

a) Die Übertragung der allgemeinen Prinzipien der Vergleichsmethode auf die Vergleichung zweier voneinander unabhängiger Kontraste.

Die Problemstellung wurde in § 10 bereits so ausführlich erörtert, daß hier sogleich die Methode skizziert werden kann, die nach den bisher gewonnenen Gesichtspunkten zu ihrer Beantwortung am geeignetsten erscheint und die dann auch zugleich einen Maßstab zur Beurteilung der bisherigen Versuche in dieser Richtung an die Hand gibt. Nach S. 22 liefern vor allem die extensiven Wahrnehmungen des Gesichtssinnes klare Beispiele der unmittelbaren Vergleichung von Unterschieden als solchen. Wenn zwei Linienpaare a, b und c, d sukzessiv oder simultan dargeboten werden, so lassen sich die beiden Beziehungen zwischen a und b und zwischen c und d ähnlich unmittelbar vergleichen wie. zwei einzelne Strecken. Auch hier braucht man nur zunächst wieder solche Längen a, b, c, d zu wählen, bei denen sowohl die beiden absoluten Unterschiede b—a und d—c als auch die beiden Verhältnisse a:b und c:d voneinander deutlich genug verschieden sind, um auch einer V.-P., die noch gar keine Übung in der Vergleichung von Unterschieden besitzt, die Möglichkeit einer direkten Beurteilung der beiden Kontraste als „deutlich verschieden" zum Bewußtsein zu bringen. So wird z. B. Fig. 14 das sichere Urteil auslösen, daß der Kontrast a, b_I kleiner sei als c, d, der Kontrast a, b_{II} dagegen größer. Deshalb kann man hier auch trotz des absoluten Unterschiedes zwischen a und c, ähnlich wie bei der heterochromen Helligkeitsvergleichung trotz des Farbenunterschiedes, durch Abstufung einer der vier Linien, also z. B. von b, eine zwischen b_1 und b_n gelegene Größe aufsuchen, bei der die Kontraste unter sich ungefähr äquivalent erscheinen oder wenigstens das Urteil unsicher wird, also ein u-Fall vorliegt. Der das variierte Glied enthaltende Kontrast, hier also a, b, würde hierbei als Vergleichsreiz V behandelt sein, während der konstante Kontrast dem Normalreiz N der Einzelvergleichung entspräche. Wie dieses Bewußtsein der Äquivalenz von Kontrasten im einzelnen zustande kommt, ob die beiden absoluten Unterschiede oder vielleicht die Verhältnisse ins Auge gefaßt werden, kann freilich bei dieser rein methodischen Betrachtung ebensowenig diskutiert werden wie oben bei dem Beispiele der heterochromen Photometrie. Außer dem Resultate selbst hat man zur Beantwortung dieser Frage natürlich vor allem wieder die Selbstbeobachtung

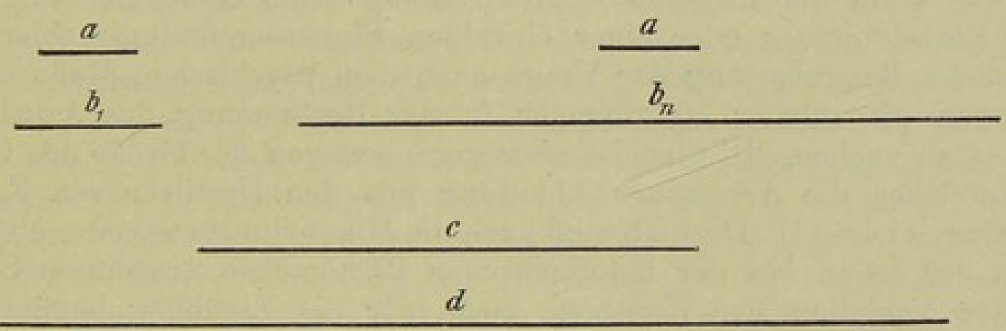


Fig. 14.
Zur Abstufung des Vergleichskontrastes bei der Anwendung der Methode der „vollständigen Reihen“ auf die Vergleichung zweier voneinander unabhängiger übermerklicher Unterschiede.

zu Rate zu ziehen. Die experimentelle Methode zur Durchführung der Messung selbst braucht aber wohl in keinem Punkte von den allgemeinen Gesichtspunkten bei der Gewinnung des Äquivalentes A zu einem einzelnen Vergleichsobjekt abzuweichen.

Hat man mit einer geschlossenen Reihe von Stufen $b_1, b_2 \dots b_n$ wiederholte Vergleichungen der Kontraste angestellt,[1] so lassen sich offenbar zunächst wieder Verteilungskurven der Urteile $F_g(x)$, $F_u(x)$ und $F_k(x)$ konstruieren, aus denen sich auch eine obere und eine untere Grenzabszisse b_0 und b_u berechnen läßt, von der an der Kontrast a, b im Mittel größer, bzw. kleiner erscheint als c, d. Die Differenz $b_0 - b_u$ und die Streuungen, die in M_0 und M_u der hypothetischen K.-G $f_0(x)$ und $f_u(x)$, bzw. in großen Zügen auch schon in der Differenz der Extreme E und E′ zum Ausdrucke kommen, liefern wieder ein Maß der Unsicherheit, das bei solchen Versuchen meistens sehr groß ist. Solange sich der Beobachter über die eigentlich zu

1) Bei der Vergleichung des Kontrastes von räumlichen Strecken gibt es natürlich eine mehrfache Variationsmöglichkeit des veränderlichen Elementes im Vergleichskontrast. Man kann b einseitig oder symmetrisch zu- und abnehmen lassen. Bei einfachen Sinneseindrücken, z. B. bei der Vergleichung des Intensitätskontrastes zweier Paare von Fallgeräuschen, die am vierteiligen Fallphonometer (vgl. Wundt, Physiol. Psychol. I[6], S. 651) nacheinander erzeugt werden können, besteht dagegen immer nur eine einzige Variationsrichtung der Zu- und Abnahme der Intensität.

vergleichende Relation a, b bzw. c, d noch nicht ganz im klaren ist und z. B. zwischen der Auffassung des Verhältnisses und derjenigen des absoluten Unterschiedes oder auch noch irgend welchen anderen sekundären Betrachtungsweisen schwankt, wird auch der Verlauf der Urteilskurven F(x) noch besondere Unregelmäßigkeiten (Verkehrtheiten) aufweisen. Der Größe des ganzen Unsicherheitsbereiches entsprechend wird man natürlich auch die Stufen des variablen Elementes im Vergleichskontrast größer zu wählen haben als bei der Bestimmung der Unterschiedsschwelle für die Vergleichung einzelner Gegenstände, um nicht eine zu große Anzahl von Einzelversuchen in jeder Vollreihe zu erhalten. Denn auch hier ist es wichtig, daß man die Extreme E_0 und E_u der sicheren Beurteilung des Kontrastverhältnisses erlangt.

Die Unterschiedsschwelle und die Präzision der Beobachtung hat aber hier wohl auch psychologisch zunächst nur eine sekundäre Bedeutung, ähnlich, wie wenn der Physiker oder Physiologe eine Gleichung zur Messung eines Einzelobjektes oder einer einzelnen Sinnesempfindung ableitet. Die eigentliche Beantwortung der Frage nach dem psychischen Maße der Empfindungen als solcher ist vielmehr in der Bestimmung des Äquivalenzwertes zu suchen. Hierbei ist aber gerade wegen der Größe des Unsicherheitsbereiches die Art seiner Ableitung aus den Urteilskurven $F_g(x)$ usw. besonders wichtig.[1]) Deshalb muß auch die Herstellungsmethode, obgleich sie wegen der schon bei der heterochromen Photometrie erwähnten Schnelligkeit der Variation der Kontraste auch hier die Einübung begünstigt und wegen der raschen Orientierung über den Unsicherheitsbereich und der bequemen Berechnung ihres Äquivalenzwertes schnell einen vorläufigen Überblick über die Resultate verschafft, zu exakteren Bestimmungen wieder unbedingt durch die Konstanzmethode ersetzt werden. Sie allein ermöglicht bei dem Wechsel des variierten Elementes, der hier an die Stelle der einfachen Umkehrung der Reizlage von N und V tritt, eine völlige Vergleichbarkeit der psychologischen Bedingungen. Dies gilt vor allem wieder für die Untermischung der vier Vollreihen, bei denen immer je eines der vier Elemente in der vorhin an b illustrierten Weise allein abgestuft wird. Hierdurch ist auch die bei der Herstellungsmethode prinzipiell unmögliche Unwissentlichkeit bezüglich des variierten Elementes zu erreichen. Die Kenntnis der Lage des N und V würde dagegen auch hier ähnliche Ungleichmäßigkeiten der Auffassung der Elemente und daher ähnliche Fehlertendenzen mit sich führen, wie es bei der Vergleichung einzelner Eindrücke erwähnt wurde.

Zur bloßen Aufrechterhaltung der Unwissentlichkeit dieser Lage des N und V genügten aber auch schon weniger Versuche, z. B. eine einzige Vollreihe mit passenden Ergänzungsversuchen. Andererseits müßten dagegen noch mehr Versuche angestellt werden, wenn auch unser Korrespondenzsatz [296] bezüglich des Äquivalenzwertes auf diesem Gebiete realisiert werden sollte. Wenn es nur auf einen angenäherten Wert des äquivalenten Kontrastes ankommt, wird man ihn ja schließlich auch schon aus einer einzigen Vollreihe berechnen können, bei der ein einziges Element, z. B. b,

1) Vgl. § 34, S. 244 ff.

variiert und die Unwissentlichkeit durch Zusatzversuche aufrecht erhalten wird, bzw. durch Mittelbildung aus jenen vier Vollreihen, bei denen keine Reihe eine vollständige Umkehrung im Sinne des Korrespondenzsatzes darstellen würde. Doch erwähne ich auch hier diesen Satz, um zu zeigen, daß bei einer richtigen Anordnung der Versuche die Vergleichung von (übermerklichen) Unterschieden bezüglich der „Umkehrbarkeit" bzw. der vergleichbaren Variation der Reizlage des veränderlichen Elementes hinter der Vergleichung einzelner Eindrücke in keiner Weise zurücksteht: Es sei z. B. bei Vergleichung von a, b und c, d und Variation des b die Größe B der richtige Äquivalenzwert, als welcher nach S. 244ff. $\frac{b_0 + b_u}{2}$ oder der Schnittpunkt b (><) der Kurven $F_g(x)$ und $F_k(x)$ oder ein Hauptwert der Kurve $F_u(x)$ in Frage kommen könnte. Dann muß nach dem Korrespondenzsatze eine mit a, B als „Normalkontrast" abgeleitete Vollreihe, in der z. B. das d des „Vergleichskontrastes" c, d variiert wurde, aus den Urteilskurven zu den Abszissen $d_1, d_2 \ldots . d_n$ nach der gleichen Berechnungsweise den Äquivalenzwert D = d wieder auffinden lassen. Denkt man sich dagegen zunächst bei gegebenem a, b, c ein D′ durch Variation des d gefunden, so kann dies wieder als Ausgangspunkt einer neuen Reihe von „Umkehrungen" dieser Art dienen, je nachdem man in einer anderen Vollreihe mit diesem nunmehr konstanten D′ entweder a oder b oder c variiert und die bei Ableitung des D′ benützte, mit der neuen Variablen gleichnamige Konstante a usw. durch Berechnung wieder zu erlangen sucht. Kurz es ergeben sich aus der Vierzahl der bei diesen Aufgaben beteiligten Elemente 4 × 3 = 12 Möglichkeiten der „Umkehrung", an denen man an der Hand unseres Korrespondenzsatzes [296] kontrollieren kann, wie weit irgend ein Prinzip der Ableitung des Äquivalenzwertes aus den Urteilskurven bei solchen Versuchen berechtigt ist.

Schon bei der Vergleichung einzelner Größen wurde aber (S. 238) diese vollständige „Umkehrung" des N und V mit ihrer Konstanz der idealen Äquivalente von gewissen Verallgemeinerungen und insbesondere von der Annahme einer Konstanz der Fehlerkomponenten bei dem sog. teilweisen Wechsel der Raum- und Zeitlage scharf unterschieden, da nur bei ihr die entscheidenden Momente konstant bleiben, während diese letzteren Annahmen sich immer bereits auf wesentlich neue Versuchsbedingungen beziehen. Diese Veränderung der Gesamtlage wird natürlich noch viel einschneidender, wenn man nun auch bei solchen übermerklichen Unterschieden die Raum- und Zeitlage der einzelnen Elemente innerhalb der Kontraste und die der Kontraste im ganzen umkehrt. Denn wenn man z. B. in Fig. 14 a mit b und c mit d oder a, b bzw. b, a mit c, d bzw. d, c vertauscht, so werden schon die Elemente im einzelnen in der neuen Lage anders wirken und außerdem auch in den neuen Kombinationen andere Wechselwirkungen erfahren, so daß es sich eben um ganz neue Kontraste handelt. Auch hier wird vor allem ein solcher Wechsel der Zeitlagen bei sukzessiver Darbietung von Intensitätsstufen, z. B. beim Vergleich der Intensitätskontraste von Fallgeräuschen des Fallphonometers [1]), die Versuchsbedingungen wesentlich verändern. Allgemeinere

1) Vgl. S. 301, A. 1.

Aussagen über die Maßverhältnisse der Empfindungen als solcher werden freilich erst nach einer Elimination dieser Lageeinflüsse möglich, deren Schwierigkeit und Mittelbarkeit aber eben bereits auf der nämlichen Stufe steht, wie bei der Vergleichung von einzelnen Größen die Zerlegung des Totalfehlers, der zunächst auch von der Umkehrung des N und V unabhängig sein soll, in seine hypothetischen Komponenten.[1]) Wie zu dieser Deutung der Totalfehler ist aber dann auch zu einer Theorie über die subjektive Äquivalenz von Konstrasten weiterhin erst noch ein möglichst umfassender Überblick über die Äquivalente in den verschiedensten Lagen und absoluten Größen der Kontraste erforderlich. Zur Abgrenzung eines „Fehlers" an dem äquivalenten Kontrast, z. B. a, B, wäre natürlich stets ein Idealwert desselben vorauszusetzen, während bei dem Vergleich zweier völlig vergleichbarer Größen einfach die Differenz zwischen dem Normalreiz und dem Äquivalenzwert als solche als „Totalfehler" zu bezeichnen war, weil bei dessen Verschwinden eben N = A sein müßte. Jedenfalls können aber auch bei den ganz analog vergleichbaren Unterschieden a, b und c, d spezielle „Fehler" der Kontrastschätzung wenigstens mittelbar herausgelöst werden, soweit das System der Resultate ein bestimmtes Prinzip der Schätzung verrät, mag es sich dabei um eine Unterschieds- oder Verhältnisauffassung oder irgend etwas drittes handeln. Sollten aber irgend welche sekundäre Kriterien, die von der eigentlich gemeinten Vergleichung der Kontraste als solcher verschieden sind, diesen selbst zufällig quantitativ völlig parallel gehen, so daß sie also vom Standpunkte der Vergleichsaufgabe aus gar nicht als „Fehlerquellen" bezeichnet werden können, so könnten sie natürlich überhaupt niemals durch eine experimentelle Induktion von dem Ergebnis der tatsächlichen Vergleichung der Kontraste als solcher abgetrennt werden. Es werde also z. B. bei der Vergleichung zweier Paare von Schallintensitäten das Urteil „gleich" einfach dann abgegeben, wenn das eine Paar dem nämlichen objektiven Doppelprozeß wie beim anderen Paare in einer anderen Entfernung zu entstammen scheint, oder man urteile bei der Vergleichung von zwei Helligkeitskontrasten nach der Erinnerung an das Aussehen eines und des nämlichen zweifarbigen Gegenstandes, also zweier objektiver Absorptionskoeffizienten, bei verschiedener Beleuchtung: In allen solchen Fällen wäre der tatsächliche Effekt natürlich bei allen möglichen Variationen der Nebenumstände nur schwer von dem Resultat zu unterscheiden, wie es bei einer wirklichen Vergleichung der Verhältnisse der Empfindungs-Intensitäten als solcher ausfallen müßte.[2]) Anderseits ist aber freilich den aus der reinen Selbstbeobachtung entnommenen Aussagen, daß sich die V.-P. ausschließlich nach solchen sekundären Kriterien gerichtet habe, bei der Schwierigkeit dieses ganzen Gebietes niemals absolut zu vertrauen.

---

1) Vgl. S. 242.

2) Vgl. auch meine Abhandlung: „Die Probleme der psychologischen Studien von Th. Lipps" Archiv f. d. ges. Psychologie, Bd. 14. 1909, S. 217.

b) Der Müllersche Begriff der sog. „Kohärenz“.

Am allerwenigsten kann aber wohl eine Selbstbeobachtung dann als Einwand dagegen betrachtet werden, daß sich das Urteil auf die Kontraste als solche stütze, wenn sie ihrem Wesen nach so unklar ist, wie G. E. Müllers sekundäres Kriterium der sog. „Kohärenz“ zwischen den Elementen der einzelnen Paare a und b usw. Hiermit soll nicht etwa Müllers Selbstbeobachtung, u. z. weder im allgemeinen noch bezüglich dieses speziellen Punktes, als unklarer bezeichnet werden wie diejenige anderer V.-P. Im Gegenteil hat er mit diesem Bewußtsein der „kollektiven“ Zusammengehörigkeit der Elemente, deren höherer Wert den Kontrast als „kleiner“ und deren geringerer ihn als „größer“ beurteilen läßt, zum ersten Male ein Moment aufgezeigt, das bei der Vergleichung zweier Unterschiede jedenfalls erlebt wird. Denn wenn man dieses Merkmal des Zusammenschlusses zu einer Einheit überhaupt, das in dem „Kollektiven“ oder in der Zugehörigkeit zu einem „Komplex“ enthalten liegt, allgemein genug nehmen will, so kann es zunächst einfach die bei unserer Aufgabe niemals fehlende Kehrseite des „Kontrastes“ bedeuten, mit dem ja auch immer bereits eine ganze Gruppe von besonderen Wirkungen eines auffälligen Unterschiedes im Gegensatze zu der völligen Gleichheit beider Elemente a und b des Paares hervorgehoben ist. Genau genommen wirkt bei der Vergleichung von a, b und c, d der Kontrast zwischen den Unterschieden sogar stets in der Richtung, daß der Eindruck des subjektiv größeren Unterschiedes das spezifische Moment der Verschiedenheit in besonders ausgeprägter Weise erleben läßt, während der Eindruck des kleineren wenigstens etwas von dem Charakter der glatten Verschmelzung zweier subjektiv gleicher Elemente eines Ganzen an sich trägt. Gerade deshalb hieße es aber das Wesen der Relationserlebnisse verkennen, wenn man aus der Selbstbeobachtung ihrer gewissermaßen „ästhetischen“ Ausgestaltung, die in dem allgemeinen psychischen Lebenszusammenhange tief begründet ist und vor allem in dem Gegensatz der relativen Veränderung und Ruhe deutlich wird, darauf schließen wollte, daß das Urteil sich gar nicht auf die Vergleichung der Unterschiede als solcher gestützt habe. Müller denkt aber offenbar nicht an diese selbstverständlichen Ergänzungen aller inhaltlichen Relationen überhaupt, also auch der eigentlich gemeinten Kontraste als solcher, wenn auch seine Faktoren mit den eben genannten wohl darin übereinstimmen, daß sie, wie gesagt, nur einen relativ geringen Klarheitsgrad besitzen. Sie bedeuten bei ihm eine Ablenkung von der eigentlichen Aufgabe. Denn er rechnet z. B. auch das Bewußtsein der Bekanntheit des Zusammenseins zweier beliebiger Stufen a und b hinzu, das von einer ganz zufälligen Wahrnehmung ihres Nebeneinanders am Beginne des Versuches herstammt, also ein Bewußtsein der „Zusammengehörigkeit“ auf Grund einer rein äußerlichen Erfahrungsassoziation. Wo aber dergleichen Hilfen von der V.-P. nicht benützt würden, da sei sie bezüglich der Lösung der Aufgabe überhaupt „ratlos“. Dieser Zustand einer ungeübten Versuchsperson ist aber doch offenbar ein ganz entsprechender, wie er auch bei der unmittelbaren heterochromen Photometrie eintritt, sobald man die V.-P. sogleich vor zu ähnliche Helligkeitsstufen verschiedenen Farbentones stellt. Auch hier fand aber G. E. Müller in der Tat die nämliche „Ratlosigkeit“ und glaubt ebenfalls, daß man sich an gewisse Helligkeits-Gleichungen „gewöhnen“ könne, denen dann natürlich kaum viel theoretische Bedeutung zukäme. Wie dort, so wird man aber auch bei der Vergleichung von Unterschieden ohne Urgierung irgend einer Nebenvorstellung, die nicht schon in der Relationsauffassung als solcher unmittelbar begründet ist, ein sicheres Urteil fällen können, wenn man nur die Differenzen der Kontraste zunächst groß genug wählt. Sind aber einmal die heterogenen Nebenvorstellungen, von denen man am besten wieder durch eine rasche Variation zwischen sicheren entgegengesetzt gerichteten Unterschieden der Kontraste zu abstrahieren lernt, hinreichend ausgeschaltet, so wird man sich ihrer dann auch in der Nähe des Äquivalenzwertes erwehren können. In dem Berichte von Laub (s. u.) treten übrigens den Angaben Müllers und einiger seiner Schüler nunmehr auch andere Selbstbeobachtungen gegenüber, wonach sich die V.-P. ausdrücklich nicht von dem Bewußtsein einer (heterogenen) Kohärenz leiten ließen, ohne daß dadurch die Vergleichung der Unterschiede als solcher unmöglich geworden wäre.

c) Die Methode der mittleren Abstufungen.

Die bisherigen exakten Versuche einer Vergleichung von (übermerklichen) Unterschieden haben sich übrigens von der vorhin skizzierten Übertragung der allgemeinen Gesichtspunkte der Vergleichsmethode auf diese Aufgabe geradezu prinzipiell ferngehalten, da man infolge einer Verkettung besonderer Umstände nicht mit zwei relativ selbständig beobachteten Unterschieden a, b und c, d arbeitete, sondern das ganze Problem immer nur als dasjenige der sog. „mittleren Abstufungen“ ansah.[1]) Und auch diese suchte man früher sogar ausschließlich auf dem zwar psychologisch interessanteren, aber auch zugleich viel schwierigeren Gebiete der Empfindungs-Intensitäten und Qualitäten zu lösen, ohne die Extensionen zu berücksichtigen. In Analogie dazu, daß man die sog. „Sterngrößen“ tatsächlich in einer geometrischen Progression ihrer physikalischen Intensität anordnet, wobei übrigens infolge der Abhängigkeit der Irradiation von der Intensität doch auch die subjektive „Größe“ im eigentlichen Sinne eine Rolle spielt, ließ man seit Plateaus ersten, noch wenig methodischen Versuchen den Beobachter immer nur zu zwei gegebenen Reizen r und R einen dritten mittleren Reiz r_m aufsuchen[2]), so daß die Kontraste r, r_m und r_m, R äquivalent erschienen. Dabei stufte man dann weiterhin meistens auch nur r_m, selten einmal R (Froebes, s. u.) ab und verwendete hierzu die verschiedenen historischen Methoden aus Kap. 9. Auch wenn man ein weiteres Gebiet des gesamten Empfindungs-

1) Als einzige Ausnahme fand ich bisher die Vergleichung von Farbenkontrasten, etwa zwischen Gelb und Rot und Gelbgrün und Gelbrot, die im Interesse der Theorie der sog. „Hauptfarben“ vorgenommen wurde und die G. E. Müller auch ausdrücklich neben der Methode der mittleren Abstufungen erwähnt („Gesichtspunkte“ S. 239 und „Zur Psychophysik der Gesichtempfindungen“ Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. der Sinnesorg. Bd. X, 1896, S. 69ff.). Doch zieht er hieraus für die Anordnung der Versuche zur Vergleichung von Konstrasten keine besonderen Konsequenzen.

2) r bedeutet wie bei A. Lehmann den kleineren und R den größeren Reiz.

kontinuums durchmaß, wie es sich zu theoretischen Schlußfolgerungen bald erforderlich zeigte, betrachtete man höchstens die Reihe

$$r_1, r_2; r_2, r_3; \ldots . r_{n-1}, r_n,$$

in der immer eine Empfindung die „mittlere Abstufung" zwischen den beiden nächstbenachbarten darstellte. Die theoretischen Gesichtspunkte, die für die Beurteilung der Resultate in Betracht kommen, sind allerdings auch hierbei in den einzelnen Arbeiten nacheinander sämtlich zur Sprache gekommen. Insbesondere hat J. Merkel, dessen zahlreiche methodische Arbeiten in Wundts philosophischen Studien schon aus der Literaturübersicht in G. E. Müllers „Gesichtspunkten" zu ersehen sind, in der psychologischen Literatur zum ersten Male vor der früher bereits von E. Hering[1]) bekämpften Vermengung der Gesetze für die übermerklichen und die ebenmerklichen Unterschiede gewarnt, um derentwillen man bisweilen einen Widerspruch zum Weberschen Gesetze für Unterschiedsschwellen zu sehen glaubte, wenn die (übermerklichen) Kontraste der Glieder einer arithmetischen Reizreihe ungefähr gleich groß und die einer geometrischen nach oben hin zunehmend befunden wurden. Einen möglichst konkreten Einblick in dieses Verhältnis zwischen den über- und ebenmerklichen Unterschieden verschaffte dann Külpe durch Anregung mehrerer Arbeiten, unter denen diejenige von Ament[2]) gleich erscheinende Kontraste zum ersten Male auf verschiedenen Sinnesgebieten in Einheiten der in ihnen enthaltenen ebenmerklichen Abstufungen maß. Auch hat Froebes zum ersten Male exakte Vollreihen wenigstens mit Abstufung des oberen Reizes R (bei Gewichtsversuchen) abgeleitet.[3]) Nachdem in dieser Weise die von Plateau und Delboeuf zunächst nur auf Lichtintensitäten angewandten Methoden inzwischen auch auf Intensitäten und Qualitäten aller anderen Sinnesgebiete außer Geschmack und Geruch ausgedehnt worden waren, haben dann Wrinch und Laub endlich auch einmal die extensiven Wahrnehmungen beigezogen, u. z. jener die Zeit-[4]), dieser die Raumauffassung[5]). Auch stetige Reihen hat man schon herzustellen versucht, innerhalb deren die Empfindung mit konstanter Ge-

1) Zur Lehre von der Beziehung zwischen Leib und Seele, I. Mitt.: Über Fechners psychophysisches Gesetz (Sitz.-Ber. der k. Ak. der Wiss. in Wien, LXXII, 3. Abt. 1875).

2) Über das Verhältnis der ebenmerklichen zu den übermerklichen Unterschieden bei Licht- und Schallintensitäten, Wundts Phil. Stud. 16, 1900, S. 135. Aments Arbeit enthält auch einen guten historischen Überblick über alle früheren Vergleichungen übermerklicher Unterschiede. Bei der Abstufung der Helligkeiten verwendete er eine Stufenserie photographisch hergestellter grauer Papiere nach C. Marbe (Neue Methode zur Herstellung homogener grauer Flächen von verschiedener Helligkeit. Zeitschr. f. Psychol. XII, 1896 S. 62).

3) Ein Beitrag über die sog. Vergleichungen übermerklicher Empfindungsunterschiede, Zeitschr. f. Psychologie 36, 1904, S. 241 und 344.

4) Über d. Verh. d. ebenm. z. d. überm. U. im Gebiete des Zeitsinnes, Wundts Phil. Stud. 18, 1903 S. 274 ff. Es wurden von Wrinch am Zeitsinnapparat drei mit Telephontönen ausgefüllte Zeitstrecken hergestellt, wozu die Meumannschen Sternkontakte verwendet wurden. (Vgl. § 65, b, 3, γ.)

5) Über d. Verh. d. ebenm. z. d. überm. U. a. d. Geb. der optischen Raumwahrnehmung, Archiv f. d. ges. Psychologie 12, 1908 S. 312. Laub ließ Kreise auf ihre Fläche hin vergleichen. Auch seine Arbeit ging wie diejenige von Ament und Wrinch aus dem psychologischen Institut Külpes in Würzburg hervor.

schwindigkeit fortzuschreiten schien, wobei allerdings die bei allen Kontrasten überhaupt mehr oder weniger wirksame Wechselwirkung zwischen den räumlich oder zeitlich unmittelbar benachbarten Erregungen, auf die schon vorhin bei der Veränderungsschwelle hingewiesen wurde, Inhalte mit so geringer Ausdehnung von der isolierten Reizwirkung bei einer konstanten Adaptation am meisten abweichen läßt[1]).

Obgleich aber nun Merkel und die genannten Schüler Külpes auch unter diesen speziellen Beobachtungsbedingungen der sog. „mittleren Abstufungen" die Möglichkeit einer unmittelbaren Vergleichung von Kontrasten als solchen klar erkannten und wertvolle Messungen lieferten, so könnten diese doch eine spezielle Fehlerquelle enthalten. Gerade weil die Verschiedenheit des absoluten Niveaus, auf dem man den nämlichen Unterschied wiedererkennen soll, die Heraushebung des Kontrastes als solchen, insbesondere in der Nähe des Äquivalenzwertes, zunächst besonders erschwert, muß man zu einer möglichst korrekten Vergleichung jede Abweichung von Nebenumständen vermeiden, die bei den Auffassungen beider Paare nur irgendwie analog zu gestalten sind. Bei der Methode der mittleren Abstufung und besonders bei ihrer bisher allein geübten Form der Dreigliederung r, r_m, R, bilden aber beide Kontraste r, r_m und $r_m R$ keine hinreichend selbständigen Wahrnehmungen mit durchweg korrespondierenden Elementen, sondern sie sind nur Seiten an dem dreiteiligen Ganzen, innerhalb dessen jedes der drei Elemente seine gewissermaßen individuelle Lage besitzt. Hieraus können sich aber leicht störende „Kohärenzen" irgend welcher Art ergeben. Andererseits dürfte die unmittelbare Nachbarschaft der beiden übermerklichen Abstufungen, die in dem Zusammenfallen eines Elementes r_m des ersten mit einem solchen des zweiten Kontrastes besteht, bei den Schätzungen nicht extensiver Größenunterschiede, also abgesehen von der räumlichen Symmetrie oder rhythmischen Wirkung beim Zeitsinn, kaum eine wesentliche Erleichterung des Vergleiches der Unterschiede mit sich bringen. Bei ihnen besitzen wohl eher die beiden (in einer bestimmten Richtung) unteren und die beiden oberen Elemente der Kontraste, die also dem a und c, bzw. dem b und d von Fig. 14 entsprechen, eine natürliche Korrespondenz, die durch die Gleichheit von $b = c = r_m$ nur gestört wird. Auch beklagt Müller ganz mit Recht, daß bei der Methode der mittleren Abstufungen keine vollständige Umkehrung der Reizlagen des V. vorgenommen werden könne, wie es zu einer exakten Bestimmung der Äquivalenzwerte jederzeit erforderlich ist, während bei der korrekten viergliedrigen Durchführung der Kontrastvergleichung nach dem oben Gesagten offenbar keinerlei prinzipieller Nachteil gegenüber der Vergleichung einzelner Größen besteht.

3. Sehr viele Mühe wurde bei solchen Versuchen mit Lichtempfindungen von A. Lehmann[2]) und Neiglick[3]) darauf verwendet, die peripher-

1) Besonders einfach lassen sich am Farbenkreisel solche nach irgend einer Progression stetig fortschreitende Abstufungen herstellen. Vgl. z. B. die beiden Scheiben mit arithmetischer und geometrischer Progression bei A. Kirschmann, American Journal of Psychology, VII, 1896, S. 396 und Bd. IX, 1898, S. 346.

2) Über die Anwendung der Methode der mittleren Abstufungen auf den Lichtsinn, Wundt, Phil. Stud. III, 1886, S. 497 ff.

3) Zur Psychophysik des Lichtsinnes, Ebenda, IV, 1888, S. 28.

physiologischen Wechselwirkungen innerhalb der beiden Paare und zwischen deren Elementen und dem Hintergrunde auszuschalten. Der Randkontrast sollte auf die Randzone gleichfarbiger Hintergründe beschränkt werden, die bei Neiglick sogar jeder der drei Scheiben r, r_m und R selbständig variabel hinzugefügt wurden und die beim Vergleich nicht mit apperzipiert werden sollten. Freilich wird man zunächst die Wechselwirkung zwischen den Fundamenten der verglichenen Unterschiede selbst auch hiermit nicht aufheben, da sie durch die Vergrößerung der Flächen doch auch teilweise begünstigt wird. Dagegen könnte man allerdings bei der oben prinzipiell verlangten Abtrennung zweier relativ selbständiger Kontraste a, b und c, d innerhalb jedes Paares einen etwas größeren Abstand einführen, während man bei jener Dreigliederung der mittleren Abstufungen hierbei befürchten müßte, daß die beiden eigentlich zu vergleichenden Kontraste noch weniger deutlich als selbständige Vergleichsobjekte heraustreten. Was aber zweitens die Abhängigkeit sämtlicher Elemente vom Hintergrunde anlangt, die mit der Adaptationsfähigkeit des Organes notwendig zusammenhängt, so würde man diese durch die Anpassung der nächsten Umgebung an alle einzelnen Elemente nicht einmal vereinfachen, sondern eher noch komplizieren. Denn die jeweilige Gleichheit der nächsten Umgebung schafft bei der Zufälligkeit der ausgewählten Hauptreize a, b, c, d doch immer nur ganz spezielle Adaptationsbedingungen. Diese unterscheiden sich insbesondere auch von denjenigen bei längerer sukzessiver Ausfüllung des ganzen Sehfeldes mit je einer dieser vier Helligkeiten oder gar bei vollständiger Adaptation des Organes an diese Stufen, die abgesehen von ihrer praktischen Unzweckmäßigkeit für diese spezielle Aufgabe doch wenigstens noch relativ eindeutig wäre. Kurz, die Abhängigkeit jeder Wahrnehmung von einem Hintergrunde, die im Wesen der Intensitätsentwickelung des Organes überhaupt begründet liegt, sollte von der Methode der übermerklichen Unterschiede nicht eliminiert, sondern gerade festgestellt werden, u. z. zunächst unter der einfacheren Bedingung eines konstanten Hintergrundes für alle kontrastierenden Elemente und erst sekundär unter komplizierteren Bedingungen.

Kapitel 12.

Der Einfluß der Vorbereitung auf eine einzelne Elementarleistung.

42. Die systematische Abstufung der Schwierigkeit psychischer Leistungen, insbesondere der Auffassung ebenmerklicher, kurzdauernd dargebotener Unterschiede.

1. Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, sind die bisher geschilderten Maßmethoden zunächst vor allem unter den günstigsten Bedingungen für die höheren psychischen Prozesse der Auffassung und Beurteilung der

gegebenen Reize dazu zu verwenden, die Elemente und Komplexe der Sinneswahrnehmung als solche, sowie ihre Abhängigkeit von den Reizen und von der Verfassung der Sinnesorgane zu studieren. Nachdem aber die Versuchsanordnungen, welche die Wahrnehmungsinhalte bei dieser Analyse im einzelnen exakt abstufen lassen, schon in den früheren Abschnitten über die sinnesphysiologischen Methoden ausführlich behandelt sind, können wir nunmehr sogleich zu den komplizierteren Anwendungen der Schwellen- und Fehlermessung übergehen, bei denen jene Auffassungsbedingungen variiert werden, so daß sie von dem Optimum bei der ungestörten Konzentration auf eine einzige Relation beliebig weit abweichen. Dies erreicht man vor allem dadurch, daß besondere Einstellungen der Apperzeption in der schon in § 4 geschilderten Weise vorgeschrieben und mehrere gleichzeitige oder aufeinanderfolgende Reize in einen einzigen Versuch einbezogen werden.

Auch bei jener elementareren Analyse der Wahrnehmungsinhalte als solcher ist das Bewußtsein natürlich niemals auf die jeweils untersuchten sinnlichen Qualitäten beschränkt, auch pflegen bei dem Studium einzelner Empfindungselemente im allgemeinen nicht einmal innerhalb des nämlichen Sinnesgebietes andere äußere Reize völlig zu fehlen. Doch sucht man wenigstens überall da, wo nicht gerade eine Wechselwirkung zwischen Sinneserregungen, z. B. der sog. Simultankontrast zwischen benachbarten Licht- oder Farbenreizungen, erforscht werden soll, alle irgendwie auffälligen, störenden Nebeneindrücke zu vermeiden. Auch läßt man die V.-P. hierbei ihre Aufmerksamkeit jederzeit ausdrücklich dem Gegenstande der jeweiligen Messung zuwenden, was bei einer nicht zu großen Extension der zu beurteilenden Gegenstände als „Konzentration" bezeichnet wird. Wenn die Inhalte allerdings, wie z. B. bei der Untersuchung der Raumauffassung oder der Klangwahrnehmung, bereits selbst mehr oder weniger ausgedehnt sind, muß die Aufmerksamkeit auch schon zu der bestmöglichen Leistung in besonderer Weise „verteilt" werden. Auch können natürlich mitunter schon zur Analyse der Wahrnehmungsinhalte als solcher unnatürlichere Spaltungen der Aufmerksamkeit erforderlich werden, z. B. bei der Prüfung der Farben- und Raumwahrnehmung in der Peripherie des Sehfeldes, wo eine konstante Abbildung der Objekte auf bestimmten Punkten des subjektiven Sehfeldes nur durch die gleichzeitige Beachtung eines Fixationsobjektes neben der Beobachtung im „indirekten" Sehen aufrecht zu erhalten ist. Im folgenden sollen aber nun solche besondere Auffassungsbedingungen, die von anderen gleichzeitigen Inhalten und von der Apperzeptionstätigkeit abhängen, nicht zur Analyse der Sinneswahrnehmung als solcher, sondern um ihrer selbst willen eingeführt werden, und die jeweilige Erkenntnisleistung der V.-P. soll hierbei, wie schon in § 11 S. 25 ff. erläutert wurde, nur als „Symptom" dieser systematisch variierten Bewußtseinslagen ins Auge gefaßt werden.

2. Zu einer methodischen Analyse wird man nun diese Erschwerung der Auffassung objektiver Reizverhältnisse, auf die wir uns bei der Untersuchung der höheren psychischen Prozesse nach der Reproduktionsmethode im wesentlichen beschränken wollten, in gewissen Hauptstufen zunehmen lassen, die mit besonderen Versuchsanordnungen und Instruktionen der V.-P. jeweils für sich allein vorzunehmen sind. Auf einer untersten Stufe der

Komplikation hat man es zunächst immer noch mit der elementaren Hauptleistung einer einzigen Neuauffassung zu tun, die hierbei nur dadurch erschwert wird, daß die Vorbereitung auf diesen einfachen Akt, also auf die Auffassung eines übermerklichen oder ebenmerklichen Reizes als solchen oder auf die Beurteilung einer Relation, in dieser oder jener Richtung eingeschränkt wird, oder daß der Ablauf dieser Leistung durch gleichzeitige Nebeneinflüsse gestört wird. Die Versuchsperson ist z. B. nicht mehr mit allen Einzelheiten des zu beurteilenden Gegenstandes außer der jeweils dargebotenen Reizstufe im voraus sicher vertraut, ja sie sieht eventuell auch den Zeitpunkt seiner Darbietung nicht mehr so genau voraus wie dann, wenn sie die zu beurteilende Situation selbst auslöst. Besonders interessante Modifikationen der Vorbereitung entspringen weiterhin aus dem Verhältnis der willkürlichen Apperzeption zu der entscheidenden Qualität oder Lage des tatsächlich auftretenden Reizes. Wie schon in § 5 der Vorfragen erwähnt wurde, ist die apperzeptive Einstellung allerdings zunächst auch ohne besondere Instruktion und absichtliche Anstrengung allein schon durch den Stand der bereits gewonnenen Vorkenntnisse bezüglich der Reizlage oder durch sonstige auffällige Nebeninhalte zu beeinflussen. Durch willkürliche Einstellungen läßt sich aber jenes Verhältnis der Apperzeption zur Urteilsgrundlage wenigstens relativ unabhängig von diesem Wissen sowie von sonstigen gleichzeitigen Inhalten und viel systematischer variieren. Am nächsten liegt wohl hierbei die Konzentration und Verteilung innerhalb der räumlichen, zeitlichen und sonstigen qualitativen Variationsmöglichkeiten, unter denen die in der Hauptleistung dann tatsächlich zu beurteilende Reizlage selbst zu finden ist. Da innerhalb der Verteilungen von der nämlichen Art, z. B. über verschiedene Regionen des Sehfeldes, eine Interpolation der Symptome aus Beobachtungen benachbarter Verteilungsgrade möglich ist, so kann man hier auch aus einigen wenigen Hauptformen der Einstellung einen gewissen Überblick über das ganze Tatsachengebiet erlangen, während natürlich ablenkende Nebenreize und sonstige willkürliche Nebenbeschäftigungen überhaupt, die zu dem Inhalte der Hauptleistung in keiner direkten Beziehung stehen, in unbegrenzter Mannigfaltigkeit eingeführt werden könnten. Doch lassen sich auch für diese letzteren Einflüsse leicht einige wenige, für gewisse Hauptkategorien typische Beispiele ausfindig machen.

Bei diesen rein methodischen Überlegungen haben wir natürlich auf die Resultate der Versuche, also auf die Präzision der Hauptleistungen nach den verschiedenen Vorbereitungen, nicht weiter einzugehen. Doch sei hier besonders betont, daß Vorurteile, die sich in dieser Hinsicht auf Grund ungenügender Erfahrungen entwickelten, gerade hier bisweilen hinderlich gewesen sind, so daß man ganz korrekte empirische Ergebnisse für paradox hielt. Wer sich aber einmal den Unterschied zwischen der Tätigkeit der Apperzeption und der wirklichen Neuauffassung selbst klar gemacht hat, wird von vorn herein mit der Möglichkeit rechnen, daß z. B. gleichzeitige Nebeneindrücke nicht nur zu stören brauchen, sondern eventuell auch günstige Anregungen ausüben können, daß die Unwissentlichkeit und die natürliche Verteilung der Aufmerksamkeit, insbesondere auch die Unvoreingenommenheit bezüglich des Zeitpunktes, auch eine positive Kontrastwirkung des Neuen einführt, während dagegen die fortgesetzte Konzentration auf die kritische

Stelle umgekehrt einen gewissen Grad von Abstumpfung und Ermüdung zeitigen kann u. ä. Vor einer theoretischen Deutung der Ergebnisse, die natürlich auch mit allen Selbstbeobachtungen unter analogen Bedingungen übereinstimmen muß und bei der auch sonstige physiologische Reaktionen der Auffassung, z. B. die Akkommodation, sorgfältig zu berücksichtigen sind, hat man aber jedenfalls zunächst einmal die objektiven Symptome der jeweiligen Bewußtseinslage rein empirisch abzuleiten, die in den meßbaren Kriterien der psychischen Leistungen greifbar sind. Dabei ist sowohl hier als auch bei allen höheren Komplikationsstufen vor allem dafür zu sorgen, daß die verschiedenen Vorbereitungsarten bezw. Hauptleistungen, die miteinander verglichen werden sollen, nicht etwa unter verschiedenen Übungsbedingungen gemessen werden. Die Schwelle erfährt z. B. auch bei der optimalen wissentlichen Konzentration auf die kritische Stelle zunächst durch die Übung noch eine bedeutende Verfeinerung, die aber auch nur bei ununterbrochener Beschäftigung mit der nämlichen Aufgabe in vollem Maße aufrecht erhalten werden kann, also bei längerem Aussetzen der betreffenden Beobachtungen wenigstens teilweise immer wieder verloren geht und dann erst von neuem wiedererlangt werden muß. Auch der Totalfehler pflegt hierbei charakteristische Veränderungen zu erleiden. Die apperzeptiven Bedingungen, deren Effekte miteinander verglichen werden sollen, müssen daher von einer Partialreihe einer „vollständigen Reihe" zur anderen fortwährend miteinander abwechseln. Deshalb ist ja auch gerade in diesem Zusammenhange die Berechnung solcher charakteristischer Werte von besonderer Bedeutung, die aus hinreichend breit angelegten Vollreihen, welche der bei den Modifikationen der Fehler und Schwellen möglichen Verschiebung der Urteilsfunktionen F(x) von Anfang an gerecht werden, nach wenigen Darbietungen jeder einzelnen Stufe genau genug berechnet werden können. (Vgl. S. 195f.)

3. Zu der bloßen Aufhebung der maximal konzentrierten Vorbereitung tritt aber nun weiterhin eine immer größere Komplikation hinzu, wenn die zu messende Hauptleistung selbst mehrere Momente in sich befassen soll. Auch die Vorbereitung unterscheidet sich in diesem Falle selbst dann noch sehr wesentlich von derjenigen bei der isolierten Beschäftigung mit einem einzelnen Gegenstande dieser Mehrheit, wenn die V.-P. die Anzahl und die Art der aufzufassenden Reize oder Relationen im voraus genau kennt. Doch wird die Aufgabe einer ausgedehnteren Neuauffassung weiterhin auch noch einmal besonders in der nämlichen Richtung wie eine einzige Hauptleistung bei Aufhebung der genauen Vorbereitung erschwert sein, wenn die V.-P. über die Art oder Anzahl der Reize im ungewissen bleibt, ihre Aufmerksamkeit unabhängig von der tatsächlich eintretenden Reizgruppe nach Instruktion konzentriert oder verteilt usw.

4. Zur Erzielung einer möglichst eindeutigen Symptomatik komplexer psychischer Prozesse sind aber nun den Hauptleistungen zunächst nicht nur objektive, in ihrem Bewußtseinseffekt am besten kontrollierbare Reize überhaupt, sondern vor allem auch kurzdauernde Reize zugrunde zu legen, denn nur dadurch kann die Methode womöglich den Umfang der in einem

einzigen psychischen Akt vollzogenen Leistungen, also gewissermaßen einen Querschnitt des Bewußtseins durch seinen Zeitverlauf zum Ausdruck bringen, der von relativ elementaren Gesetzen beherrscht ist. Je länger dagegen die äußeren Reize und die von ihnen abhängigen direkten Sinneswahrnehmungen in ihrer vollen Lebhaftigkeit und Frische zur Verfügung stehen, um so mehr neue Leistungen können in einer diskursiven, d. h. sukzessiv sich auf verschiedene Punkte konzentrierenden Verarbeitung hinzutreten. Wenn nun auch natürlich für den Gesamtumfang solcher zusammenhängender Leistungen ebenfalls gewisse Gesetzmäßigkeiten bestehen und aus dem quantitativen Resultate gewiß auch charakteristische Symptome der apperzeptiven Einstellung zu entnehmen sind, so besteht doch hier naturgemäß eine viel größere Zahl von Möglichkeiten bezüglich der Art, wie die Gesamtleistung sich aus den Komponenten der einzelnen sukzessiven Unterakte herausentwickelte. Die Selbstbeobachtung allein aber ist bei längerer unveränderter Darbietung der sinnlichen Grundlage der Prozesse keinesfalls imstande, die Einzelleistungen dieser Zeitpunkte auseinander zu halten. Die zeitliche Abgrenzung bildet also eine der wichtigsten Zwischenstufen, die bei der Analyse der höheren psychischen Prozesse nicht übersprungen werden darf, falls man sich dann weiterhin auch ein richtiges Bild von der Entstehung umfassenderer Gesamtleistungen auf Grund länger verfügbarer Beobachtungsgegenstände soll machen können.

5. Da aber nun unser Bewußtsein auf eine gewisse Breite der Neuauffassung gegebener Verhältnisse angelegt ist, die in einem einzigen, auf einen kurzdauernden Reizkomplex bezogenen Akte auch ohne jede speziellere Konzentration zu gewinnen ist, so würde man bei jener ersten Gruppe von Untersuchungen über den Einfluß einer Variation der apperzeptiven Bedingungen auf die Auffassung eines einzigen Gegenstandes überhaupt kein Resultat erlangen, wenn nur ein einziger, deutlich übermerklicher Sinneseindruck als solcher zu erkennen wäre, bzw. wenn er mit einer die Unterschiedsschwelle in irgend einer Variationsrichtung weit übersteigenden Allgemeinheit oder „Ungenauigkeit“ beschrieben werden dürfte, wie es geschieht, wenn die V.-P. z. B. nur aussagt, daß sie einen Punkt gesehen, einen Ton gehört oder dgl. Wenn man also die Erkennung eines Reizes oder einer Relation überhaupt als Indikator verwenden will, so kann ein objektives Symptom der verschiedenen Vorbereitungsarten bei einer einzigen Neuauffassung immer nur in dem Maße einer Grenzleistung gesucht werden, die unter den jeweiligen Bedingungen noch eben möglich ist, also z. B. in der Schwelle für die Auffassung eines Reizes, bzw. einer Veränderung überhaupt, oder in der Unterschiedsschwelle für die Vergleichung eines übermerklichen Reizes mit irgend einer ebenfalls objektiv gegebenen Norm. Im übrigen können aber natürlich auch alle anderen Maße, die aus einer Beobachtungsreihe indirekt als bestimmte Einzelwerte abzuleiten sind, also z. B. das Streuungsmaß der Beobachtung oder der Totalfehler in irgend einer Vergleichshinsicht, als „Symptome“ der Vorbereitung betrachtet werden, ohne daß hier auf die Mittelbarkeit oder Unmittelbarkeit der Abhängigkeit dieser Symptome von den einzelnen Komponenten der Vorbereitung näher eingegangen werden könnte.

Auch wenn an die Erkennung eines einzelnen Eindruckes sich andere Leistungen mit solcher Leichtigkeit und Sicherheit anschließen, wie beim Lesen eines geläufigen Buchstaben, einer Ziffer, Note u. dgl., werden die verschiedenen Vorbereitungen bei einer einzigen Elementarleistung dieser Art nach der Reproduktionsmethode (also ohne Registrierung gewisser Eigentümlichkeiten der Wiedergabe) an dem Resultat nichts zu ändern vermögen. Eine symptomatische Differenzierung wird höchstens erst dann möglich, wenn die Unterschiede zwischen einzelnen dieser Symbole sich der Unterschiedsschwelle unter den jeweiligen Auffassungsbedingungen nähern. Sind aber die Assoziationen zwischen dem Sinneseindruck, z. B. zwischen dem visuellen Bilde eines Symboles und seiner Bedeutung oder einem sonstigen Vorstellungsinhalte, noch so schwach, daß sich schon bei seiner isolierten, konzentrierten Auffassung Einflüsse der Vorbereitung auf die Reproduktion geltend machen, so wären diese Einflüsse zunächst höchstens umgekehrt dazu zu verwenden, um an ihnen die Assoziationsleistung zu „messen“, nachdem man sich ein anderweitiges direkteres Kriterium für den Grad der jeweiligen Vorbereitung verschafft hat.

6. Dagegen gewinnt auch schon die ohne besondere Genauigkeit vollzogene Wiedergabe von Sinneseindrücken überhaupt oder geläufigen Symbolen in der zweiten Hauptstufe der Komplikation, bei komplexen Hauptleistungen, als Element innerhalb des Ganzen symptomatische Bedeutung, da eben der Umfang der gesamten Neuauffassung, insbesondere bei kurzdauernden Eindrücken, ein beschränkter ist. Es stellt also wenigstens die Gesamtsumme aller überhaupt möglichen Reproduktionen dieser Art jederzeit eine Grenzleistung dar, an der sich dann weiterhin auch noch besondere Einflüsse der Vorbereitung geltend machen können. Doch bestehen auch innerhalb des Gesamtumfanges der jeweiligen Neuauffassung noch mannigfache Abstufungen des Zustandes der einzelnen Unterakte, die bei der bloßen Angabe der Gesamtzahl oder Hauptart aller Gegenstände nicht gesondert berücksichtigt werden. Sie treten aber sofort zutage, wenn man über die einzelnen Elemente des aufgefaßten Komplexes genauere Angaben verlangt, die der Unterschiedsschwelle dieser Eindrücke in irgend einer Richtung nahe kommen. Einen genaueren Überblick über den wahren Stand mehrfacher gleichzeitiger Leistungen erlangt man also auch hierbei doch wiederum nur dadurch, daß man nicht die Wiedergabe mehrerer übermerklicher, sondern ebenmerklicher Tatbestände fordert, d. h. also auf mehrere gleichzeitige (kurzdauernde) Reize bzw. Veränderungen die bekannten Maßmethoden zur Ermittelung von Schwellen, Totalfehlern und ihren Streuungsmaßen anwendet. Abgesehen von dem Einblick in etwaige Differenzierungen der Auffassung innerhalb des Komplexes wird dadurch auch der Sinn jener Umfangsbestimmungen erst völlig konkret veranschaulicht. Denn ähnlich wie z. B. die S. 292 genannte Bestimmung der Grenzen der Empfindungskontinuen, z. B. von Farbentönen oder Tonhöhen, ohne Angabe der Intensitätsverhältnisse stets etwas Relatives in sich enthält und nur durch die Ableitung von absoluten Schwellen eindeutig und exakt ausfallen kann, die nach diesen Grenzen zu ansteigen und zuletzt ins Unbegrenzte an-

wachsen, so wird auch die Neuauffassung je nach dem Grade der Präzision, die für die einzelne Leistung verlangt wird, und je nach der Vorbereitung einen verschiedenen Umfang besitzen. Eben deshalb kann ja mit Hilfe der Schwelle und anderer eindeutig definierter Maßwerte sogar schon für jede isoliert vollziehbare Hauptleistung ein Einfluß der Vorbereitung aufgefunden werden, ähnlich wie z. B. die Ableitung der Farbenschwelle bereits zwischen der Stelle des deutlichsten Sehens und einer unmittelbar benachbarten Stelle einen Unterschied der Farbenperzeption nachzuweisen gestattet, der bei der Ableitung von sog. „Isochromen“ mit einer einzigen höheren Intensität nicht zutage treten kann. Von diesem allgemeinsten Gesichtspunkt aus erscheint also dann die Methode zur Untersuchung jener untersten Hauptstufe der Komplikation mit nur einer Hauptleistung nur noch als ein Grenzfall einer umfassenden Analyse, bei welcher man für jede Anzahl gleichzeitiger Neuauffassungen die Präzision in einer bestimmten Hinsicht festzustellen versucht. Doch werden wir diesen Grenzfall, dessen ausreichende Untersuchung mit exakten Maßmethoden technisch natürlich am einfachsten ist und in ihren einfachsten Formen auch historisch am weitesten zurückreicht, im folgenden zuerst allein für sich betrachten.

43. Hauptarten einer Erschwerung der Vorbereitung einzelner Elementarleistungen.

1. Die Technik der Versuche, bei denen die Auffassung eines einzigen Reizes bzw. einer Relation erschwert werden soll, bestand in ihren ersten Anfängen einfach in der Verbindung der gewöhnlichen Ableitung einer Unterschieds- oder Reizschwelle mit einer gleichzeitigen Nebenbeschäftigung, zu der man überhaupt keinen besonderen Apparat verwendete, wie bei der ersten Arbeit dieser Art von F. Boas[1]), der Unterschiedsschwellen des Augenmaßes beim gleichzeitigen Vorstellen von Musikstücken ableitete, oder man nahm einen Störungsreiz des nämlichen oder eines disparaten Sinnesgebietes hinzu, der einer ganz einfachen Zusatzvorrichtung entstammte, wie in den neueren Untersuchungen von G. Heymans[2]) über „psychische Hemmung“, bei denen u. a. in einer Anordnung zur Messung der Reizschwelle für einen Druck- oder Lichtreiz noch ein zweiter konstanter Störungsreiz des nämlichen Sinnesgebietes in variabler Entfernung vom ersten eingeführt wurde. Etwas komplizierterer Anordnungen bedurfte es hierbei nur, sobald speziell die Schwelle für kurzdauernde Reize, u. z. unter genauer Berücksichtigung aller beteiligten Zeitverhältnisse bestimmt werden sollte, wie dies zum ersten Male auf Anregung Kraepelins durch Bertels[3]) geschah, der die absolute Schwelle für einen monokularen Lichtreiz nach Einwirkung eines Blendungsreizes auf das andere Auge maß. Doch sind auch die Vorrichtungen hierzu von denjenigen zur Messung von Kontrasten zwischen den Sinneserregungen an einer einzigen Stelle des Wahrnehmungsfeldes nicht wesentlich verschieden.

1) Über eine neue Form des Gesetzes der Unterschiedsschwelle. Pflügers Arch. f. Physiologie, Bd. 26, 1881, S. 493.

2) Zeitschrift f. Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane Bd. 26, 1901 S. 305ff.

3) Versuche über die Ablenkung der Aufmerksamkeit. Dissertation. Dorpat 1889.

Neuer charakteristischer Versuchsanordnungen bedarf man daher erst, wenn man mit der Schwellenmethode untersuchen will, wie die verschiedene Verteilung der Aufmerksamkeit innerhalb eines ausgedehnteren, eventuell mehrere Merkmale enthaltenden Wahrnehmungsbereiches die Auffassung eines kurzdauernden Tatbestandes an irgend einer Stelle oder bezüglich irgend eines Merkmales beeinflußt. Denn in diesem Falle muß der Experimentator gleichzeitig über mehrere Reizmöglichkeiten und bestimmte Abstufungen derselben verfügen, wenn er auch, gemäß der Aufgabe dieser ersten Hauptgruppe, in jedem einzelnen Versuche immer nur an der Ableitung der Schwelle für eine einzige Stelle, bzw. für ein Merkmal jenes ganzen Bereiches arbeitet. Daher ist es auch nicht notwendig, daß er die einzelnen Stellen oder Merkmale gleichzeitig unabhängig voneinander abstufen kann, wie es für die komplizierteren Aufgaben des 13. Kapitels erforderlich wird.

Das Interesse dafür, die Schwelle für die Erfassung eines kurzdauernden, jedesmal auf eine einzige Stelle, bzw. ein Merkmal beschränkten Vorganges oder Zustandes bei jeder Einstellung für möglichst viele Stellen eines größeren Gebietes zu bestimmen, das die Aufmerksamkeit bei der Beobachtung ganz oder teilweise umspannen soll, ergibt sich zunächst aus der Vermutung, daß der Effekt einer apperzeptiven Einstellung für eine einzelne Stelle des Gesamtbestandes von der Gestaltung des Bewußtseins an sämtlichen, bei der Instruktion in Betracht gezogenen Stellen abhängt (vgl. § 2). Zum vollen Verständnis der Präzision, mit welcher die V.-P. hierbei gewisse Eigentümlichkeiten einer bestimmten Stelle aufzufassen vermag, gehört daher stets ein Überblick über sämtliche Schwellen, die man unter den nämlichen Auffassungsbedingungen für alle diese Stellen ableitet. Eine solche Schwellentafel, wie sie z. B. bei der Untersuchung der Aufmerksamkeitsverteilung im Sehfeld in das Schema der Fig. 18, S. 326 einzuschreiben ist, repräsentiert also dann gewissermaßen einen Querschnitt durch den zeitlichen Verlauf der Auffassungsdispositionen der einzelnen Stellen für einen Augenblick, in welchem die Instruktion zu einer bestimmten apperzeptiven Einstellung, d. h. zur Beachtung der einen und der Nichtbeachtung der anderen Stellen, stets so gut als möglich erfüllt war. Diese Tafel bildet somit das gesuchte endgültige Symptomenbild des Bewußtseinszustandes bezüglich der untersuchten Leistungsfähigkeit und kann mit anderen auf die nämlichen Stellen bezogenen Tafeln aus anderen Einstellungen unmittelbar verglichen werden.

2. Allerdings ist dabei vorausgesetzt, daß neben den äußeren Reizen vor allem auch die apperzeptive Einstellung der V.-P. in allen zu einer bestimmten Verteilungsform gehörigen Einzelversuchen wirklich immer wieder möglichst konstant ausfalle. Hierüber ist ja schon in den einleitenden Paragraphen das Wichtigste gesagt worden. Es sei daher hier nur auf die besondere methodische Schwierigkeit hingewiesen, die für die Erfüllung der Instruktion bezüglich der Aufmerksamkeitsrichtung überhaupt und dann natürlich insbesondere für die Konstanz des tatsächlichen Verhaltens besteht, wenn die V.-P. ihre Aufmerksamkeit auf eine teilweise oder völlig andere Region lenken soll, als in der sie die zu beurteilenden Reize erwartet. Wenn auch die V.-P. von dem Wissen, daß bei allen Verteilungsformen

an sämtlichen Stellen, also auch an den nicht zu beachtenden, Reize bzw. Reizunterschiede auftreten können, während des Vorbereitungsstadiums durch eine besondere Übung willkürlich zu abstrahieren vermag, so wird sie durch den wiederholten gewaltsamen Übergang von dieser in solchen Fällen faktisch unzweckmäßigen und unnatürlichen Nichtbeachtung einer Region zur Auffassung deutlich übermerklicher Wirkungen in ihr fortwährend von neuem zu einer Abschweifung von der Instruktion verleitet. Indessen bietet die Übersicht über die tatsächlichen Urteile stets eine objektive Kontrolle für die Konstanz und, nachdem man einmal ein hinreichendes Material über gelungene Versuche gewonnen hat, auch für die ganze Art der Einstellung, wie ebenfalls schon S. 18 erwähnt wurde. Außerdem kommt aber ja für eine ganze Kategorie solcher Untersuchungen der Aufmerksamkeitsverteilung, bei denen man nur deren Einfluß innerhalb des beachteten Teilgebietes unter Variation seiner Ausdehnung feststellen will, die genannte Schwierigkeit überhaupt nicht in Betracht, weil eben hier die Aufmerksamkeit und die Erwartung jederzeit in natürlicher Assoziation zusammengehen und auch die Hauptleistung höchstens zu einer momentanen Konzentration innerhalb des nämlichen Gebietes nötigt. Endlich werden unvermeidliche Schwankungen in der Durchführung irgend einer einfacheren oder komplizierteren Instruktion wenigstens, soweit sie in zufälligen Ablenkungen nach verwandten Verteilungen, also nicht in systematischen Abweichungen, z. B. in Richtung der bequemeren und natürlicheren Einstellung, bestehen, in den Mittelwerten der Schwellen für eine Reihe gleichmäßig über das ganze Feld verteilter Stellen hinreichend ausgeglichen werden, denen somit eine besondere Allgemeingültigkeit als Symptom einer bestimmten Einstellung zukommen dürfte.

3. Wie schon oben mehrmals angedeutet wurde, kommen als Verteilungsbereich der Aufmerksamkeit nicht nur die verschiedenen Stellen einer räumlichen Extension, sondern auch verschiedene Momente einer vorgestellten Zeitstrecke und außerdem verschiedene Merkmale einer und der nämlichen Stelle des Wahrnehmungsfeldes in Betracht. Während man aber auf eine möglichste Einengung der Beachtung in jeder beliebigen Hinsicht ziemlich gleichmäßig den Begriff der „Konzentration" anwendet, pflegt man eigentlich nur die räumlich orientierte Expansion der Aufmerksamkeit allgemeiner als „Verteilung" derselben zu bezeichnen, wobei also stets eine bestimmte Lokalisation einzelner Reize vorausgesetzt ist, wie sie mehr oder weniger mittelbar für sämtliche Sinnesreize, also auch für Schalleindrücke, vorhanden ist. Bei den letzteren begründet zugleich das eigenartige Nebeneinander der gleichzeitig gehörten Elemente eines Klanges oder Geräusches von verschiedener Höhe einen neuen Verteilungsbereich der Apperzeption in einer besonderen „Richtung", der aus der subjektiven Analyse von Klängen geläufig ist. Eine ähnliche Berücksichtigung mehrerer gleichzeitig relativ selbständig vergegenwärtigter Momente wird aber dann weiterhin durch die Zeitvorstellung ermöglicht. Die V.-P. kann entweder in einer Art von „Konzentration" einen Vorgang in einem ganz bestimmten als zukünftig vergegenwärtigten Augenblick aufzufassen bereit sein, oder ihn auch fortgesetzt in jedem einzelnen neuen Moment von neuem möglichst gleichmäßig gespannt erwarten. Auch kann sie in einer aus diesen beiden Formen gemischten

Einstellung sich von vorn herein auf ein kürzeres oder längeres, aber erst von einem bestimmten Zeitpunkt an einsetzendes Abwarten einrichten. Neben diesen stets nach irgend einer „Extension“ orientierten Veränderungen der Apperzeptionsrichtung interessiert uns aber dann auch die Möglichkeit der Konzentration auf einzelne Merkmale des Reizes unter Abstraktion von anderen, dem konkreten Reize gleichzeitig zukommenden Bestimmungsstücken, auf die wir schon in § 40 ausführlicher eingegangen sind, und der dann auch verschiedene komplexere „Verteilungsformen“ bezüglich jedes einzelnen „Prädikates“ des Gegenstandes zur Seite treten. Hinsichtlich eines jeden dieser Merkmale kann die V.-P. jeweils zwei simultane Reize oder zwei aufeinanderfolgende Zustände eines Reizes vergleichen, so daß sich bei der Möglichkeit einer gleichzeitigen isolierten Abstufung eines jeden Merkmales auch Unterschieds- oder Veränderungsschwellen in jeder dieser Hinsichten ableiten lassen. Die bei einer bestimmten Form dieser „prädikativen Verteilung“ oder „Konzentration“ [1]) abgeleiteten Schwellen repräsentieren dann wieder die simultanen Dispositionen für die Auffassung in jeder dieser Hinsichten.

Eine systematische Analyse dieser Verhältnisse wird natürlich die verschiedenen Hauptrichtungen der Aufmerksamkeitsverteilung zunächst getrennt untersuchen. So ist denn auch unten zuerst über Versuchsmethoden berichtet, bei denen für die verschiedenen Stellen eines räumlichen Verteilungsbereiches nur Schwellen für Unterschiede hinsichtlich eines einzigen Merkmales abgeleitet wurden, u. z. zunächst nur bezüglich der Intensität. Ihnen stehen dann die Versuche mit Beachtung mehrer simultaner Tonhöhen oder einiger disparater Sinnesreize bezw. Wahrnehmungsfelder am nächsten, sofern hierbei ebenfalls nur Unterschiede einer einzigen Art (u. z. in unseren Beispielen wieder nur Intensitätsunterschiede) zu beurteilen sind. Die gleiche Einschränkung der Variationsrichtung fand bei den darnach behandelten Methoden zur Untersuchung des zeitlichen Verlaufes der Auffassungsdispositionen statt. Umgekehrt läßt sich aber auch die Einstellung auf verschiedene Merkmale zunächst an einem einzigen, eng begrenzten Gegenstande untersuchen, also ohne besondere Variationen der extensiven Verteilung. Zu einem umfassenderen Überblick über die Struktur der simultanen Dispositionen ist aber dann weiterhin das extensive und das prädikative Nebeneinander der einzelnen Wahrnehmungsmomente auch noch gemeinsam in die Instruktion einzubeziehen, indem man bestimmte Merkmale einer ganzen Anzahl von Stellen durch eine besondere Beachtung hervorheben läßt, die dann natürlich sämtlich auch experimentell in diesen Richtungen abstufbar sein müssen, um auch die Schwellen für alle diese Merkmale in der ganzen Breite der untersuchten Extension ableiten zu lassen. Nimmt man endlich auch wieder die Einstellung der Apperzeption auf einen bestimmten Zeitverlauf hinzu, so ist auch die zeitliche Entwickelung aller beteiligten Dis-

1) Bei den mittleren Formen einer kombinierten Beachtung kleinerer Bezirke von Stellen oder Merkmalen ist die Verwendung des Begriffes der „Konzentration“ oder „Verteilung“ natürlich ziemlich willkürlich. Auf eine genauere qualitative Analyse dieser Einstellungen, die hier nur um ihrer methodischen Bedeutung willen im allgemeinen charakterisiert wurden, kann hier jedoch nicht weiter eingegangen werden.

positionen in ihrer ganzen Breite unter genau kontrollierbaren inneren und äußeren Bedingungen zu untersuchen und damit ein wichtiger Beitrag zur Lehre von der „Arbeit" des aufmerksamen Beobachtens zu liefern.

4. Die Versuche dieser ersten Hauptgruppe verlaufen also nach dem bisher Gesagten in der Weise, daß die V.-P. für einen bestimmten Augenblick (bzw. für einen längeren Zeitraum) ihre Aufmerksamkeit nach Verabredung einstellt, worauf an irgend einer Stelle des Untersuchungsgebietes eine bestimmte Reizstufe des zu beurteilenden Tatbestandes auftritt, die zur „Vollreihe" für die Ableitung der Schwelle bezüglich eines Merkmales hinzugehört. Am einfachsten erlangt man nun das Symptomenbild der simultanen Dispositionen für die Auffassung einer kurzdauernden Veränderung, die an irgend einer Stelle eines konstanten Wahrnehmungsbestandes auftritt, der in jedem einzelnen Versuche zunächst immer erst wieder eine Zeitlang (mehrere Sekunden) dargeboten wird und nach kurzer Einübung im ganzen völlig geläufig geworden ist. Wenn auch diese genaue Kenntnis der jeweiligen konstanten Ausgangslage in jedem Zeitpunkte der ganzen Untersuchung der Erfolg aller vorangehenden Beschäftigungen mit ihr ist, so liegt doch die endgültige Voraussetzung für die Auffassung des Kontrastes der kurzdauernden Veränderung jeweils immer nur in dem zeitlich unmittelbar vorhergehenden Endstadium, in dem eben gerade die verabredete Einstellung der Aufmerksamkeit erreicht sein soll. Da jeder kleinste Bezirk des bewußten Gesamtbestandes zu einer analogen Stelle des zeitlich unmittelbar darauffolgenden in gleich unmittelbarer Beziehung steht, so kann sich eine Tafel der Veränderungsschwellen besonders gleichmäßig über sämtliche Stellen eines beliebig fein gegliederten Feldes erstrecken, was bei einer Verwertung von Relationen simultaner Elemente des nämlichen Bestandes nicht möglich wäre. Dabei vollzieht sich die Auffassung einer Veränderung speziell auch noch in der Hinsicht unter besonders konstanten apperzeptiven Bedingungen, daß die Urteilsrichtung durch die relative Unselbständigkeit der an dem geläufigen Objekt erkannten Veränderung in natürlicher Weise festgelegt ist und nicht zwischen Haupt- und Vergleichsreiz schwanken kann.

Ein „Querschnitt" gleichzeitiger Dispositionen würde natürlich auch dann herausgelöst werden, wenn man nicht einfach eine Veränderung einer bis dahin konstanten Ausfüllung festzustellen, sondern einen ersten neu auftretenden Momentanreiz an einer nicht im voraus bekannten Stelle mit einem darauffolgenden, ebenfalls kurzdauernden Reiz von gleicher Lage zu vergleichen hätte. Hierbei würde jedoch die Leistung durch die relative Neuheit der beiden entscheidenden Fundamente der Relationsauffassung noch weiterhin in einer Weise erschwert, die zwar an sich interessant, zum Studium des Grundcharakters der Wechselwirkungen zwischen simultanen Auffassungsdispositionen überhaupt indessen zunächst nicht erforderlich ist. Diese Variante würde geradezu bereits auf dem Wege nach der Aufgabe mehrfacher gleichzeitiger Hauptleistungen liegen, die natürlich bei der Möglichkeit, selbst die einfachsten apperzeptiven Einheitsbildungen, in denen man sich „einen" Reiz vergegenwärtigt, apperzeptiv weiterhin zu gliedern, niemals ganz scharf von unserem hier betrachteten Grenzfall abgetrennt werden kann.

Noch schwieriger wird die Aufgabe, wenn sich zwei Wahrnehmungskomplexe von der Ausdehnung des gesamten untersuchten Bereiches, durch Einfügung einer indifferenten Ausfüllung in dessen ganzer Breite, relativ selbständig als Normal- und Vergleichsreiz gegenübertreten, an denen nur eine einzige Stelle verschieden ist. Auch hier soll also der Normalkomplex, ebenso wie vorhin bei der einfachen Veränderungsauffassung das Ausgangsfeld, zunächst durch eine fortgesetzte Darbietung völlig geläufig werden, worauf die leere, bzw. undifferenziert ausgefüllte Pause und darnach der völlig analoge kurzdauernde Vergleichskomplex auftritt, der seinerseits wieder nur an einer einzigen Stelle verändert ist, für die nun die U.-S. abzuleiten ist. Bei jener einfacheren Aufgabe der Veränderungsauffassung ist die Verschiedenheitsrelation zwischen der variierten Stelle und ihrem Vorstadium die einzige objektive Relation dieser Art im ganzen Untersuchungsbereiche. Hier muß sie sich jedoch erst gegen die allgemeinen Verschiedenheitsrelationen der Intermission in der ganzen Breite des Komplexes herausarbeiten, denen gegenüber sie wegen dieser Trennung der zu vergleichenden Ausfüllungen durch die Pause noch dazu im Nachteil ist. Übrigens ist in diesem Falle zur größeren Vergleichbarkeit mit dem kurzdauernden Vergleichskomplex am besten auch der Normalkomplex in dieser Form darzubieten, was für das Vorbereitungsstadium eines jeden Versuches die wiederholte kurzdauernde Exposition des Normalkomplexes in einem der V.-P. bequemen Rhythmus erforderlich macht. Dabei ist es für die Entstehung des Bewußtseins der Geläufigkeit wichtig, daß die V.-P. weiß, daß der Normalkomplex zunächst fortgesetzt konstant wiederholt wird und ihm nur am Schlusse eine einzige (eventuell von ihr selbst auszulösende) Vergleichsexposition nachfolgt. Auch ist es für die Konstanz der Leistungen in der ganzen Hauptgruppe von Vorteil, wenn die V.-P. weiß, daß es sich bei der V.-Exposition nur um die Verschiedenheit an einer einzigen Stelle handelt, deren Auffassung auf dieser ersten Komplikationsstufe der Aufgabe ihre einzige Hauptleistung im Versuche ausmachen soll.

Bei der zuletzt genannten Erschwerung der Verschiedenheitsauffassung fallen natürlich auch die Schwellen im allgemeinen größer aus, abgesehen davon, daß auch die Bestimmung von besonderen Fehlern neben der Unterschiedsschwelle Bedeutung gewinnt. Auch läßt sich eben deshalb kein so großes Feld untersuchen, wie mittelst der Veränderungsschwelle, die daher zu einer Prüfung der Auffassungsdispositionen beliebig fein abgestufter Elemente weiter Wahrnehmungsgebiete am geeignetsten erscheint. Dafür treten in jenen gröberen Werten eigentlicher Unterschiedsschwellen manche Differenzen der einzelnen Einstellungen deutlicher hervor, weshalb wir sie im folgenden in einzelnen Beispielen an Stelle der Ableitung von Veränderungsschwellen berücksichtigt haben.

44. Die räumliche Verteilung der Aufmerksamkeit im Sehfelde.

(Perimetrische Bestimmungen der Veränderungsschwelle für kurzdauernde Aufhellungen.)

Relativ am genauesten und ausführlichsten ist auf diesem Gebiete bisher untersucht worden, wie die verschiedenen Formen der Aufmerksamkeitsverteilung innerhalb des Sehfeldes die Veränderungsschwellen für kurzdauernde Aufhellungen eines kleinen, an einer beliebigen Stelle gelegenen Feldes beeinflussen. Außer meiner Abhandlung über „die Klarheitsgrade der Regionen des Sehfeldes bei verschiedenen Verteilungen der Aufmerksamkeit“[1]) liegt hierüber noch die Dissertation von O. Lipp[2]) vor, die meine Ergebnisse unter teilweise sogar völlig übereinstimmenden Bedingungen nachprüfte. Das gemeinsame sichere Resultat beider Untersuchungen, daß die Schwelle, die bei wissentlicher Konzentration auf die variierte Stelle gefunden wird und im folgenden kurz „Normalschwelle“ heißen soll, selbst bei der weitesten Verteilung der Aufmerksamkeit und bei ihrer Ablenkung auf entlegene Punkte sich relativ nur wenig ändert[3]), weist freilich vor allem auch darauf hin, daß zur genauen Feststellung der tatsächlich vorhandenen Einflüsse, die besonders in den Mittelwerten aus größeren Regionen deutliche Gesetzmäßigkeiten erkennen lassen, sehr genaue Methoden erforderlich sind. Dies läßt aber dann zugleich erwünscht erscheinen, daß die Versuche unter Berücksichtigung aller oben dargelegten Vorschriften für eine exakte Schwellenbestimmung womöglich noch einmal von neuem durchgeführt werden, wobei alle einzelnen Schwellen, also sowohl innerhalb einer jeden Tafel für eine bestimmte Verteilungsform als auch in sämtlichen miteinander zu vergleichenden Tafeln überhaupt, unter möglichst ähnlichen Übungsbedingungen (vgl. S. 312) und bei völliger Unwissentlichkeit der jeweils variierten Stelle abgeleitet werden müßten.

Ein wichtiger Teil des Einflusses der extensiven Aufmerksamkeitsverteilung auf irgendwelche Veränderungsschwellen räumlich geordneter Wahrnehmungsinhalte tritt übrigens erst dann hervor, wenn die V.-P. nicht nur den Eintritt einer solchen Veränderung überhaupt, sondern auch womöglich ihren Ort anzugeben hat. Denn die Unklarheit und Unsicherheit, die ohne spezielle Kenntnis und Beachtung der gereizten Stelle, zumal bei minimalen Reizstufen, dem Inhalte der Veränderung im ganzen zukommt, äußert sich vor allem auch in der Unsicherheit der Lokalisation und begünstigt dabei bestimmte Fehlertendenzen in dieser Hinsicht. Obgleich dies allerdings erst bei den § 50 genannten Versuchen am meisten hervortritt, bei denen die V.-P. Änderungen eines bestimmten Objektes sowohl in intensiver als auch in räumlicher Hinsicht für gleich möglich hält, so macht es sich doch auch schon hier geltend, falls nur die variablen und konstanten Fehler der Lokalisation bzw. ihre Unsicherheit überhaupt unter den jeweils herrschenden Versuchsbedingungen größer sind als die Distanz zwischen den einzelnen Stellen der Schwellentafel. Diese werden natür-

1) In Wundts Psychologischen Studien, Bd. 2, 1906, S. 30.

2) Über die Unterschiedsempfindlichkeit im Sehfelde unter dem Einflusse der Aufmerksamkeit (Dissertation Kiel 1910), Arch. f. d. ges. Psychologie Bd. XIX, 1910, H. 3/4, S. 313.

3) Die völlige Bestätigung dieses Hauptpunktes durch O. Lipp widerlegt zugleich die von mir schon anderweitig (in Wundts Psychol. Stud. V, 1. u. 2. H, 1909, S. 48 ff.) als falsch nachgewiesene Vermutung R. Geißlers (Am. Journ. of Psychology, Bd. XX, 1, 1909, S. 120), daß die geringen Unterschiede zwischen den verschiedenen Stellen bei allen meinen Einstellungen nur einer Überanstrengung der Aufmerksamkeit zu verdanken seien.

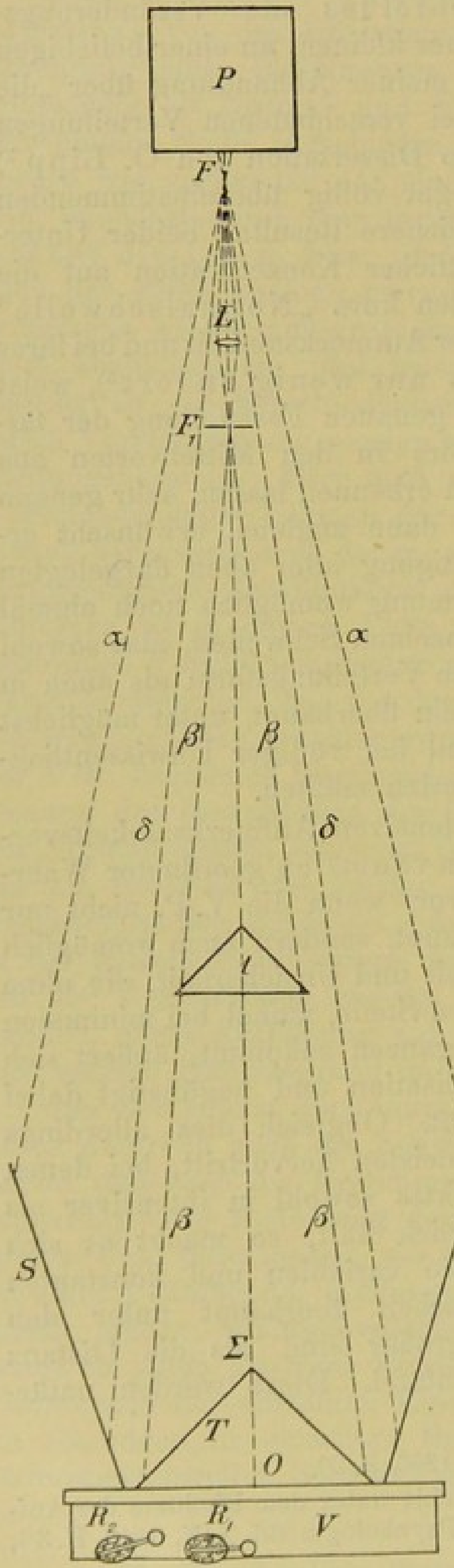


Fig. 15.
Das Projektionsperimeter.
(Grundriß der Anordnung.)

lich durch die häufige deutliche Übermerklichkeit der Reize, die zur Ableitung der Schwelle überhaupt notwendig ist, sowie insbesondere durch die Ableitung der zugehörigen Normalschwellen mit wissentlicher Konzentration bei nicht zu großer Zahl so sicher bekannt, daß die V.-P. ihre Beurteilung des Wahrgenommenen stets einfach auf sie bezieht. Doch ist eben die Einordnung in dieses spezielle System von Individualbegriffen von dem Bewußtseinszustand bei der Veränderung in ganz ähnlicher Weise abhängig wie die absolute Lokalisation ohne solche individuelle Anhaltspunkte durch unmittelbares Hindeuten u. dergl. Andererseits wäre aber die ausschließliche Verwendung von Urteilen mit bestimmter Lokalisation wohl ebenso einseitig, da auch die Schwellen für die Vorstufe der Auffassung einer Veränderung überhaupt, eventuell mit ganz unsicherer Lokalisation, bzw. der Abstand dieser Vorschwelle von der Hauptschwelle, für den jeweiligen Aufmerksamkeitszustand bezeichnend sein können.

Lipp behielt im allgemeinen die seinerzeit von mir bis 1904 angewandte Methode der Schwellenbestimmung bei, die ein Rudiment der älteren Form der Minimaländerung mit konstanter Variationsrichtung bildete (vgl. S. 277). Denn da hier natürlich bei allen Bestimmungen, abgesehen von denen der Normalschwelle, Unwissentlichkeit bezüglich der Lage des Punktes erforderlich wird, so ist hierbei ohne Änderung des zunächst gereizten Punktes nur das aufsteigende Verfahren möglich, bei dem ein zuerst untermerklicher Reiz von einem Versuch zum andern bis zur Merklichkeit gesteigert wird. Doch kommt hier wenigstens in dem Stadium der tatsächlichen Unmerklichkeit der bei dieser Form der Methode sonst besonders einflußreiche Erwartungsfehler nicht mehr in Betracht. Um so störender wird er freilich weiterhin nach Erreichung des Unsicherheitsbereiches, sobald der Reiz einmal mehr oder weniger genau lokalisiert ist. Immerhin war dieser Fehler bei meinen Versuchen deshalb noch einigermaßen zu vernachlässigen, da die Versuche durch eine Zwischenzeit von ca. $^1/_4$ bis $^1/_2$ Minute getrennt waren, die der V.-P. neben der Änderung der Reizstufe sehr leicht auch eine solche des Reizortes möglich erscheinen ließ. Bei Lipp folgten sich dagegen die Reizstufen durch eine mechanische Vorrichtung rhythmisch in nur 3,2 Sek. Abstand, die nach Erreichung der Unsicherheitsregion eine Unkenntnis darüber, ob der Reizort beibehalten worden sei oder nicht, nach Lage der Sache völlig unmöglich erscheinen ließ[1]).

Meine Anordnung war nun vor allem auf die schnelle und präzise Durchführbarkeit des Wechsels der aufzuhellenden Sehfeldstelle angelegt, wie er auch in allen zukünftigen exakten Messungen im allgemeinen sogar nach jedem Versuch nötig sein wird, um die S. 312 geforderte Untermischung der Vollreihen für die Schwellen einer Tafel bequem und ohne Zeitverlust zu ermöglichen. Hierfür hat sich die auch von Lipp beibehaltene Verbindung eines passend geformten transparenten Perimeters, wie es zur Analyse des indirekten Sehens dienen kann, mit einer optischen Projektionsvorrichtung bewährt, die ich kurz als Projektionsperimeter bezeichnet und a. a. O. ausführlich beschrieben habe. Würde man als konstante Ausfüllung des Sehfeldes im Vorbereitungsstadium, wie dies z. B. bei Bertels (s. S. 315) geschah, absolutes Dunkel wählen, so brächte ja allerdings die Unsichtbarkeit des Apparates hinsichtlich der Applikation des kurzdauernden Zusatzlichtes viel größere Freiheit mit sich. Indessen würde die noch stundenlang etwas fortschreitende Dunkeladaptation die Schwelle aller Punkte auch bei gleicher Aufmerksamkeit fortgesetzt verändern und dadurch vor allem jene Hauptforderung konstanter mittlerer Verhältnisse nur sehr schwer erfüllen lassen, ganz abgesehen von der Einseitigkeit der speziellen physiologischen Bedingungen. Aber auch ein durchweg mäßig erleuchtetes Sehfeld, das als eine geschlossene Perimeterfläche für die V.-P. gegen die dahinter befindliche Apparatur abgeschlossen ist, ließe sich leicht herstellen, wenn man Helligkeits- und Farbenunterschiede seiner verschiedenen Regionen mit mehr oder weniger scharfen Konturen in Kauf nimmt. Wir boten dagegen dem Auge des Beobachters eine ganz gleichmäßig, aber nicht blendend erleuchtete weiße Fläche ohne jegliche Kontur dar, die der Aufmerksamkeitsverteilung besonders interessante Aufgaben stellt, und erreichten dies durch eine transparente Kegelfläche aus mattiertem Glas mit Papierbelag, in deren Basismittelpunkt O sich das Auge der V.-P. befand[2]). Die Basis dieses „Trichters", dessen Querschnitt T in Fig. 15 ein gleichschenkliges Dreieck bildet, betrug 50 cm, sein Neigungswinkel 45°, so daß also die von der V.-P. stets fixierte Spitze Σ vom Auge 25 cm entfernt war. Der Trichter war mit seiner offenen Basis auf ein vertikal stehendes Brett montiert, in das eine mit dem Grundkreis des Kegels konzentrische und nicht viel kleinere Öffnung eingeschnitten war, durch welche der hinter dem Brett sitzende Beobachter seinen Kopf in die soeben schon genannte, durch eine Beißvorrichtung fixierte Lage zum Perimeter brachte. Die V.-P. konnte ihre Arme auf einem Brettvorsprung V der Holzwand bequem auflegen, wo auch zwei Telegraphentaster R_1 und R_2, ersterer zur Auslösung der kurzdauernden Aufhellung durch die V.-P., angebracht waren, die später beide zu Reaktionsversuchen dienten (vgl. unten § 81, a).

1) Leider wählte Lipp außerdem auch die Reizzeit nicht mehr möglichst kurz, sondern durchweg 0,8 Sek. lang. (Vgl. S. 312f.)

2) Im Unterschiede von meinen stets monokularen Hauptversuchen ließ Lipp nur binokular beobachten, wie es bei mir nur in Vorversuchen vorgekommen war. (Vgl. a. a. O.)

Diese Trichterform des Transparentes wurde gewählt, damit der koaxiale Strahlenkegel einer Projektionslampe P[1]) auch mit seinen Randstrahlen $\beta\beta$ nicht zu schräg auf die seitlichen Teile des Perimeters auftreffe und zugleich die Entfernung der Fläche vom Auge an den einzelnen Punkten nicht zu verschieden ausfalle[2]). Freilich wäre dafür der Effekt der Zusatzbelichtung, die aus $\beta\beta$ entnommen wurde (s. u.), gerade bei der Spitze Σ ein ganz anderer als auf der übrigen stetigen Mantelfläche. Indessen blieb die mit einem ganz kleinen Fixationspunkt versehene Spitze stets unbenützt, und die kurzdauernde Aufhellung erfolgte ausschließlich an seitlichen Stellen von mindestens 7^0 Distanz, da eben überhaupt nur eine gewisse Zahl gleichmäßig über das ganze Sehfeld verteilter Stellen geprüft werden sollte. Die konstante Beleuchtung des ganzen Sehfeldes wurde jedoch in der Tat überall, also auch einschließlich der Spitze, dadurch so gleichmäßig als möglich, daß der äußere Rand des Lichtstrahlenkegels, der innen von den Strahlen $\delta\delta$ und außen von $\alpha\alpha$ begrenzt war, durch eine diffus reflektierende Papierfläche[3]) von der Form eines Kegelstumpfmantels SS[4]) von außen auf den Mantel des Trichterperimeters zurückgeworfen wurde.

1) Der Brennpunkt F in Fig. 15 war übrigens ein virtueller, wie er der Einschaltung einer Sammellinse hinter dem Kollektor-Fokus (zwischen F und L) entspricht.

2) Natürlich ist diese Trichterfläche nur eine spezielle Form des Kompromisses, auf den man zur möglichst gleichmäßigen Ausnützung des Projektionsstrahlenkegels stets angewiesen ist, und zwar sind bei ihr die Entfernungen der einzelnen Reizorte vom Auge nicht allzu verschieden. Doch gibt es auch andere Kompromisse, je nach den Partien, die man vor allem untersuchen will. Als geschlossene Transparent-Fläche, die auch die Sehfeldmitte gleichmäßig zur Schwellenbestimmung nach dem nämlichen technischen Prinzip beleuchten ließe, würde sich z. B. auch eine Kugelkalotte empfehlen, deren Tangente am Rande, z. B. ebenfalls um ca. 45^0 geneigt ist. Für die Aufhellung der seitlichsten Punkte von 66,8^0 Breitenabstand, die in unseren Versuchen tatsächlich noch in Betracht kamen, genügt übrigens auch eine ca. 1,80 m lange ebene Transparentfläche, auf 0,30 m Entfernung betrachtet, wobei freilich die Distanz der Punkte nach außen fortgesetzt zunimmt. Auch Zylinderflächen, die aus Papier leicht herstellbar sind, können gelegentlich gute Dienste leisten.

3) Lipp verwendete dafür mit Vorteil einen ebenso geformten Reflektor aus Blech, der außen geschwärzt und innen sorgfältig mit der gleichmäßig diffus reflektierenden Lackfarbe Pinorin (aus der K. Lackfabrik G. W. Sikkens & Co. in Grooningen, Holland) ausgestrichen war.

4) Der Brennpunkt F, von dem der ganze Projektionskegel, also auch sein hier verwendeter Rand ausstrahlt, muß zur gleichmäßigen Beleuchtung des Perimeters offenbar in einen virtuellen leuchtenden Ring verwandelt werden, der auf einem Kegel, der von den Mittelsenkrechten MO der Mantellinien des Perimeters gebildet wird (s. Fig. 16), völlig symmetrisch zum Transparenttrichter gelegen ist. Ist R ein Fußpunkt des Reflektormantels auf der verlängerten Basis des Trichterperimeters, so wird daher ein um R mit RF$_1$ geschlagener Kreisbogen auf der verlängerten Mittelsenkrechten AM den neuen virtuellen Lichtpunkt F$_1$' abschneiden, der einer Zurückwerfung der Strahlen durch den Reflektormantel entspricht, dessen Linie RS den Winkel F$_1$RF$_1$' gerade halbiert. Der innerste Teil des Reflektors kann, so weit er bei einem Abstand des Trichterrandes von R kein Licht mehr auf das Perimeter wirft, geschwärzt werden, also von dem Punkt S$_2$ an, der von F$_1$'B auf RS abgeschnitten wird. Die äußere Grenze des Reflektors ist natürlich der durch S$_1$ gehende Schnittkreis der Linien ΣF$_1$' mit RS.

Der innere Teil des Lichtkegels zwischen $\beta\beta$ wurde nun zu der kurzdauerden Aufhellung der einzelnen Stellen verwendet[1]),

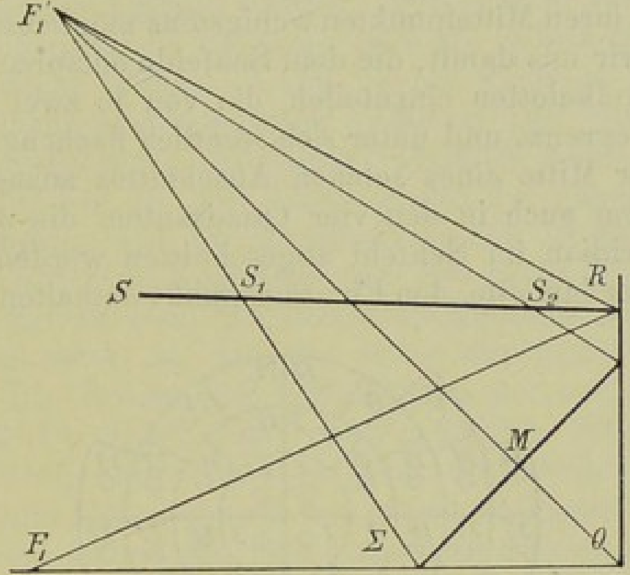


Fig. 16.
Zur Konstruktion des Reflektormantels am Projektionsperimeter.

für welche die Schwelle bestimmt werden sollte. Diesen Lichtzusatz mußte man daher zunächst in jedem Versuch bis auf eine einzige Stelle abblenden und außerdem exakt abstufen und zeitlich abgrenzen können.

1) Die gemeinsame Herkunft sowohl der dauernden Beleuchtung als auch der momentanen Aufhellung von der nämlichen Lichtquelle war für die Konstanz des Verhältnisses beider Lichter, also auch der von diesem abhängigen Veränderungsschwelle von entscheidender Bedeutung. Da indessen auch die absolute Intensität für die Schwelle von Wichtigkeit ist und außerdem die verschiedenen Teile des von der nämlichen Lichtquelle stammenden Strahlenkegels unter sich nicht immer im nämlichen Verhältnisse stehen, so war eine fortgesetzte photometrische Kontrolle sowohl der konstanten Helligkeit als auch des Zusatzes erforderlich, die bei der Verschiedenheit der Richtung, in der man die einzelnen Reizstellen sah, gewisse Schwierigkeiten mit sich brachte. Wir verfuhren in der aus Fig. 17 ersichtlichen Weise, daß ein kleiner Spiegel sp (bzw. bei Lipp ein kleines totalreflektierendes Prisma) an Stelle des Auges, d. h. beim Basismittelpunkt, eingeführt und in die geeignete Ebene gebracht wurde. In diesem Spiegel konnte das in eine passende Entfernung zurückgehende Auge A das Licht $\beta\gamma$ einer hellen Maßscheibe T neben der zu messenden, direkt in Richtung $\alpha\beta$ betrachteten Perimeterstelle sehen. Bei Messung der konstanten Helligkeit konnte das übrige Feld durch ein Diaphragma abgeblendet werden. Die Zusatzhelligkeit hingegen wurde unter Ausschluß der konstanten bestimmt. Die Maßscheibe war ein Transparent T, das sich in einer Fläche befand, die einen langen, dunklen, nach dem Perimeter zu offenen Schacht PP abschloß und in ihm auf einem Schlitten w von dem Beobachter mittelst einer

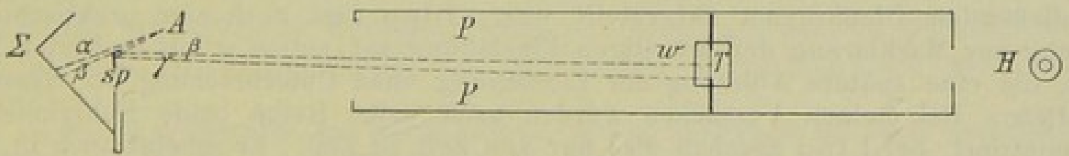


Fig. 17.
Das Photometer zum Projektionsperimeter.

Die Auswahl der Form und Größe sowie der Verteilung der aufzuhellenden Stellen im Sehfeld geschah natürlich ziemlich willkürlich. Doch suchte ich womöglich lauter Kreise von 4^0 Durchmesser zu verwenden und die Abstände zwischen ihren Mittelpunkten wenigstens möglichst ähnlich zu machen. Dabei begnügten wir uns damit, die dem Sehfelde entsprechende Hohlkugel in Sektoren von Kugelkalotten einzuteilen, die von je zwei Breitenkreisen und zwei Meridianen begrenzt und unter sich sämtlich flächengleich waren, und je ein Reizfeld in der Mitte eines solchen Abschnittes anzusetzen[1]). Da diese Reizfelder außerdem auch in den vier Quadranten, die durch den Vertikal- und Horizontalmeridian im Sehfeld abgeschnitten werden, kongruent liegen sollten, so mußte der innerste, den Fixationspunkt enthaltende Sehfeldabschnitt

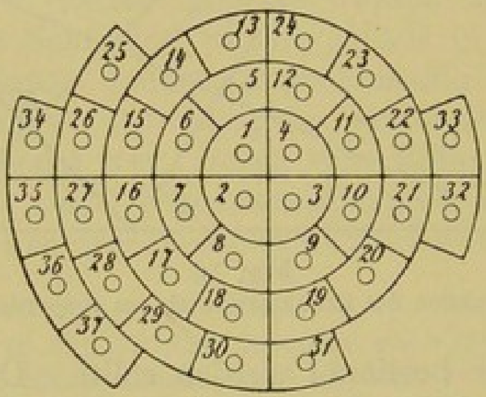


Fig. 18.

Die Verteilung der Reizorte im linken monokularen Sehfelde (insbesondere die Meridian-Abstände innerhalb der konzentrischen Ringe), zugleich als Grundschema zur Anlegung einer Schwellentafel über den Einfluß der Aufmerksamkeitsverteilung.

mindestens 4 Stellen, nämlich je eine in der Mitte jedes Quadranten, erhalten und daher mit der Verhältniszahl 4 bei jener gleichmäßigen Aufteilung der Kugel angesetzt werden. Der nächstbenachbarte Ring nach außen

Zügelvorrichtung verschoben werden konnte. Dadurch entfernte sie sich verschieden weit von der Hefner-Normallampe H, die hinter einem den Schacht auf der anderen Seite abschließenden Diaphragma aufgestellt war. Lipp fügt noch eine praktische Vorrichtung zur Markierung der jeweiligen Einstellung auf einem w mit laufenden Bande hinzu, die eine spätere Ablesung der Einstellung ohne Unterbrechung der Messungen gestattete. Bei meinen Versuchen wurden nach jeder Reihe beide Helligkeitswerte photometriert, bei Lipp geschah dies nur von Zeit zu Zeit. Er scheint auch in seiner Nernst-Lampe (meinerseits verwende ich eine Hefner-Projektions-Bogenlampe) eine sehr konstante Lichtquelle besessen zu haben, welche das Verhältnis des Zusatzlichtes zur dauernden Beleuchtung stets an allen Punkten ca. $^1/_4$ sein ließ. Es wäre für die Verfeinerung dieser Versuche natürlich von besonderem Vorteile, wenn z. B. durch Verwendung einer besonderen Akkumulatorenbatterie, die zugleich einen möglichst gleichmäßigen Strahlenkegel ergibt, eine Lichtquelle genau konstant erhalten werden könnte, da die Gesetzmäßigkeiten zur Reduktion einer Veränderungsschwelle auf andere Haupt- und Zusatzlichter noch zu wenig erforscht sind.

1) Da das Sehfeld nach Gesichtswinkeln auszumessen ist, so wäre natürlich die Erreichung eines ideal gleichen Abstandes aller Reizfelder durch den Eulerschen Satz für Polyeder beschränkt. Da aber 20 genau äquidistante Punkte auf der ganzen Kugel, über den Mittelpunkten der Flächen des einbeschriebenen Ikosaëders angesetzt, bzw. 10 auf der Halbkugel, für unsere Zwecke nicht ausgereicht und außerdem ein ganz bestimmtes Lageverhältnis involviert hätten, so begnügte ich mich mit dem oben beschriebenen Kompromiß.

erhielt 8 Reizstellen, der nächste 4×3 usw. Da die Halbkugel in 6 Ringe aufgeteilt wurde, waren hierdurch $4 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 84$ Reizstellen bestimmt, von denen aber von mir nur die 37 innersten, relativ am besten zu erkennenden benützt wurden. Sie sind in Fig. 18 schematisch auf einer Tafel zusammengestellt, die somit auch die Rubriken zu allen Schwellentafeln dieser Versuche enthält. Lipp konnte natürlich schon wegen seiner binokularen Beobachtungsweise einen größeren Teil dieser 84 Stellen verwenden. Die gegenseitigen Abstände innerhalb eines Ringes $(360 \cdot {}^1/_4)^0$, $(360 \cdot {}^1/_8)^0$ usw. zeigt Fig. 18. Die Exzentrizität der einzelnen konzentrischen Gruppen ist am besten aus der Konstruktion Fig. 19 zu ersehen, in der die Höhe dieser konzentrischen Kugelsegmente, der ja die Ringfläche proportional ist, wie die Zahl der auf dem Ring unterzubringenden Reizstellen, also wie 1, 2, 3, 4, 5, 6 fortschreitet, so daß die Höhe der innersten Kalotte ${}^1/_{21}$ des Radius beträgt. Die Breiten der Mittelpunkte der sechs Gruppen betragen hiernach 9,15°; 24,7°; 37,8°; 51,5°; 66,8°; 80,85°. Soll nun die V.-P. alle Reizfelder des Trichterperimeters (oder irgendeiner anderen Perimeterfläche von beliebiger Form) genau wie gleich entfernte Kreisflächen von 4° Durchmesser sehen, so müssen ihre Grenzkurven eigentlich überall Durchdringungen je eines kleinen Kreiskegels von 4° Öffnung darstellen, dessen Spitze sich in der Mitte der Basis als dem Ort des Knotenpunktes des Auges befindet, während seine Achse die für den Mittelpunkt des Reizfeldes vorgeschriebenen Koordinaten nach Länge und Breite besitzt. Diese Form erlangt man auf rein technischem Wege, ohne weitere Berechnung, durch die photographische Aufnahme einer einfachen Lichtstrahlenprojektion, wie sie in Fig. 20 beigefügt ist. Das Prinzip ihrer Herstellung ist aus Fig. 19 leicht zu entnehmen [1]). Hat man aber einmal die Projektion der gewünschten Reizfelder auf das Trichterperimeter bestimmt, so ist nunmehr auch die jeweilige Aufhellung durch den Lichtstrahlenkegel der Projektionslampe leicht auf je ein Reizfeld von der gewünschten Form zu beschränken, indem man einen dem Perimeter T (Fig. 15) genau ähnlichen Schattentrichter t aus geschwärztem Blech von passender Größe koaxial in perspektivischer Lage zwischen den Brennpunkt F_1 (s. S. 329) und das Perimeter einfügt [2]), in dessen Mantel die oben genannten Durchdringungen der kleinen Projektionskegel der Reizfelder nach Fig. 20 [3]) ausgeschnitten

1) Ein Kegelmantel aus Blech konnte völlig lichtdicht auf eine Grundplatte aufgesetzt werden, in deren Mitte sich ein Einbau befand, der durch eine ganz feine Öffnung im Mittelpunkte der Kegelbasis nach allen Punkten eines Streifens des Blechmantels von der Form der Fig. 20, der mit lichtempfindlichem Film belegt wurde, Licht gelangen ließ, soweit es die zu projizierenden Kreisausschnitte hindurchließen. Diese Kreisauschnitte der dem Kegel einbeschriebenen Halbkugel von 10,5 cm Radius, deren Querschnitt in Fig. 19 auf die Mantellinie (und Mittellinie der Fig. 20) projiziert ist, befanden sich bei unserer photographischen Aufnahme (mit ca. 6° Gesichtswinkel) in den Ebenen eines passend angebrachten Polyederstreifens aus schwarzem Karton, könnten aber natürlich noch einfacher von Ausschnitten einer Blechkugel oder dergl. gebildet werden.

2) Natürlich müssen alle Größen t und T in den beiden Kegeln die Gleichung $t : T = F_1O' : F_1O$ erfüllen, wenn O′ und O die Basismittelpunkte der beiden Kegel sind, und F_1 wieder den Brennpunkt der Schattenprojektion bedeutet.

3) In Fig. 19 und 20 sind alle Ausschnitte auf eine einzige Mantellinie projiziert, da die Form der Projektion der kleinen Kreise auf die Kegelfläche T bezw. t für die

sind und rasch abgestöpselt werden können. In meinen Versuchen begnügte ich mich übrigens vorläufig mit kreisförmigen Ausschnitten in der (aufgerollten) Mantelfläche des Schattentrichters, bzw. des Perimeters, deren Durchmesser einfach die perspektivischen Projektionen der sphärischen Durch-

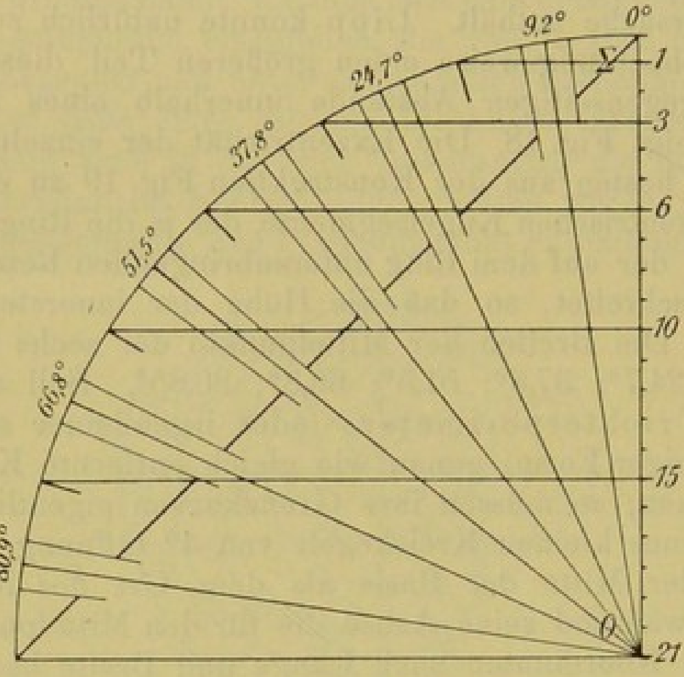


Fig. 19.
Die Konstruktion der Breitengrade der einzelnen Reizorte.

messer der Reizfelder auf die mittleren Mantellinien des Kegels waren, die in Fig. 19 auf der Mantellinie augespart sind. Im Sehfelde waren dann die Flächen in Gesichtswinkeln nicht genau, sondern nur annähernd gleich. Lipp glaubte diesen Punkt noch mehr vernachlässigen zu können, indem

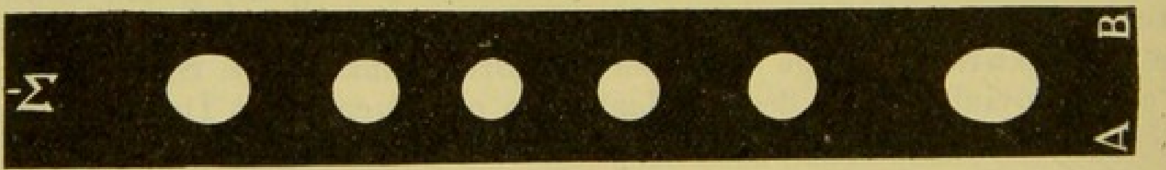


Fig. 20.
Die Ausschnitte im aufgerollten Kegelmantel, die vom Mittelpunkte der Basis aus perspektivisch als Kreise von gleicher Größe erscheinen (nach einem photographischen Projektionsverfahren).

er den Schattentrichter durch eine auch von mir in Vorversuchen angewendete ebene Schattenfläche mit kreisrunden Ausschnitten ersetzte. In der Tat wird bei größeren Flächen — Lipp verwendete außerdem auch

verschiedenen Meridiane bei gleichem Breitengrad die nämliche bleibt. In der zur Ebene aufgerollten Mantelfläche des Schattentrichters, die bei der hier benutzten Form des Perimeters einen Kreissektor mit einem Öffnungswinkel von $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 360^0$ darstellt, wenn der Radius der Basis von 1 der Einheit gleichgesetzt wird, müssen die Reizfeldmitten natürlich im innersten Ring um $1/4$, im nächsten um $1/8$ usw. dieses Öffnungswinkels voneinander entfernt sein.

Reizfelder von ca. 7° Durchmesser — der Einfluß des Gesichtswinkels auf die Schwelle immer geringer, auch werden die von Henius[1]) und Fuijta[2]) neulich abgeleiteten Einflüsse nach meinen Erfahrungen bei kurzdauernden Reizen kaum größer ausfallen. Zudem kommt die Form der Fläche exzentrisch immer weniger in Frage, auch sind ja absolute Differenzen der Normalschwellen verschiedener Stellen überhaupt niemals auszuschalten, so daß es im wesentlichen nur auf die Verhältnisse der modifizierten Schwellen zu den Normalschwellen ankommt. Indessen wird man doch alle abstufbaren inhaltlichen Momente wenigstens möglichst gleich machen. Nachdem also die Herstellung genau gleicher Reizfelder nach dem Gesagten keineswegs allzu schwierig ist, sollte man in zukünftigen Versuchen dieser Art auch in dieser Hinsicht eine noch größere Eleganz der Anordnung anstreben und dann eher noch kleinere, die Aufmerksamkeitseinflüsse vielleicht noch besser verratende Dimensionen der Reizfelder wählen.

Diese Projektionsanordnung eignet sich aber nun weiterhin auch besonders dazu, die Intensität der physiologischen Wirkung des Zusatzes i zur konstanten Beleuchtung J mit dessen zeitlicher Begrenzung gleichmäßig abzustufen. Ähnlich wie nämlich nach dem Talbotschen Gesetze eine rasch genug wiederholte Periode aus Hell und Dunkel eine konstante Empfindung ergibt, deren Intensität der Reizzeit genau proportional ist, so erscheint auch eine einmalige kurzdauernde Aufhellung von weniger Sigmen in einer zur Reizzeit proportionalen Helligkeit, wobei die Unterschiede der Reizdauer in der Empfindung zurücktreten. Fügt man also in den Strahlenkegel der Projektionslampe eine Abblendungsvorrichtung ein, welche die Zeit des Hindurchtrittes der Zusatzstrahlen nach sämtlichen Punkten des Perimeters gleichmäßig nach kleinsten Zeitabschnitten unterhalb ca. 0,03 Sek. genau abzustufen erlaubt, so ist hiermit nicht nur die erforderliche kurze Dauer dieser Reize überhaupt erreicht, sondern zugleich der Stufensatz für die Vollreihe zur Ableitung der Veränderungsschwelle gewonnen. Diese gleichmäßige Abgrenzung der Reizzeit erfolgt natürlich am besten in einem Brennpunkt der Projektionslampe, wobei hier diese Vorrichtung, die im allgemeinen als „Tachistoskop" bezeichnet wird (vgl. unten § 53a), allerdings nur den mittleren Teil des Strahlenkegels zwischen $\beta\beta$ abschneiden darf, da ja der äußere Rand durch den Reflektor die konstante Beleuchtung des Perimeters besorgt. Man sammelt also zunächst nur diesen inneren Teil durch eine nahe hinter dem ersten Brennpunkt F des Kollektors koaxial gelegene Linse L (s. Fig. 15), die den äußeren Teil $\alpha\delta$ bei Montierung auf einem dünnen Stab (oder auf einer Glasplatte) so gut wie gar nicht stört, zu einem neuen Brennpunkt F_1, von dem aus dann die ganze vorhin erwähnte Schattenprojektion für die Zusatzlichter zu rechnen ist. Dieser wird aber nun durch das Brennpunktstachistoskop abgeblendet, das in einer kreisrunden, bis auf ein mittleres Diaphragma massiven Metallscheibe besteht, die in dem Raum innerhalb des Strahlenmantels $\delta\delta$ Platz findet und ebenfalls auf einem dünnem Stab montiert ist. Vor das Diaphragma können sich auf je einer Seite die Platten zweier leichter, sehr rasch drehbarer Hebel legen, die zunächst elektromagnetisch festgehalten und nach Unterbrechung

1) Zeitschrift f. Psychol. u. Physiol. d. S. II. Abt. Bd. 43, 1909, S. 99.
2) Ebenda, S. 243.

des elektrischen Stromes durch starke Federn in ihre Ruhelage zurückgezogen werden. Der eine Hebel bedeckt das Diaphragma nur in der Ruhelage, der andere nur in seiner Lage am Magneten. Schnellt also zuerst dieser, dann jener der beiden sonst völlig gleich gearbeiteten Hebel vom Magneten zurück, so kann das Licht eine kurze Zeitlang nach dem Perimeter hindurchtreten, die dem Zeitintervall zwischen der Unterbrechung zweier Kontakte gleich ist, deren jeder einen der beiden Stromkreise für die beiden Elektromagnete des Tachistoskopes schließt. Die Kontakte befinden sich an einem Kontaktpendel (s. Fig. 21), wobei der eine für die Öffnung konstant bleibt, während der Schließungskontakt gegen ihn verschoben wird[1]). Die Pendelstange ist zunächst selbst elektromagnetisch aufgehängt und schwingt erst ab, wenn der Kontakt am Taster R_1 (Fig. 15) von der V.-P. unterbrochen wird. (Nach der Erreichung der bestmöglichen apperzeptiven Einstellung verläuft also bis zum Auftreten der zu beurteilenden Helligkeitsveränderung noch eine kurze Zeit, die durch die Einstellung des natürlich sehr schnell schwingenden Kontaktpendels reguliert werden kann.)

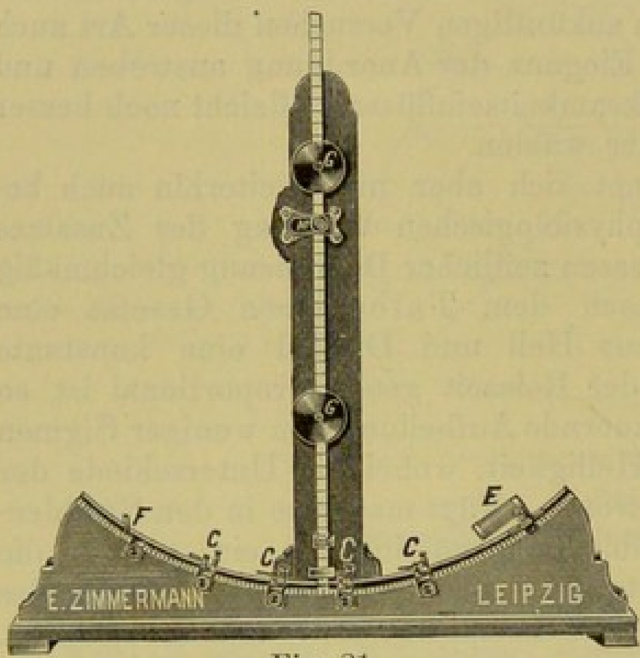


Fig. 21.
Kontaktpendel.

Sobald man überhaupt einmal wesentlich kürzere Reizzeiten verwendet, ist ja die Wirkung ohnedies infolge des Erregungsablaufes von der Reizzeit ebenso abhängig wie von der Reizintensität, wobei a priori nicht einmal zu sagen ist, welchem von beiden Faktoren die Erregungsintensität besser proportional ist. (Vgl. a. a. O. S. 50ff.) Vor allem kommen hier aber, wie schon S. 321 angedeutet wurde, im wesentlichen nur die Verhältnisse der Schwellen in Betracht, deren absolute Werte außerdem auch noch von der Lage des Reizfeldes und, bei einer hier allerdings möglichst vermiedenen Änderung der konstanten Beleuchtung, auch noch von dieser nach dem Weberschen Gesetz bzw. wenigstens einer ihm ähnlichen Regel abhängig sind. Auch für uns war eine Reduktion der Schwellenmaße nach einer solchen Regel nicht ganz zu vermeiden, da selbst die Schwellen des nämlichen

1) Ein Falltachistoskop, wie es unten Fig. 31 abgebildet ist, kann wegen seiner großen Ausdehnung hier nicht Verwendung finden. Indessen würde die Art der Abstufung der Zwischenzeit zwischen der Öffnung und Bedeckung von dieser Einschränkung freier, wenn man den Projektionsstrahlenkegel durch Einfügung einer spiegelnden Fläche bei dem zweiten Brennpunkt F_1 nach der Seite umbiegen ließe. Bildet ein vertikaler Spiegel z. B. mit der ursprünglichen Achse FO (Fig. 15) einen Winkel von 45°, so bleibt hinter ihm Platz genug, um ein umfangreiches Tachistoskop anzubringen.

2) Das exakteste Pendel dieser Art ist das in Bd. II, 3, S. 359 von S. Garten beschriebene Helmholtzsche Kontaktpendel. Bei meinen Versuchen kam der einfachere Apparat Fig. 21 zur Verwendung.

Punktes durch die zeitlichen Schwankungen der dauernden Beleuchtung J verändert wurden. Da außerdem auch die Zusatzintensität nicht ganz konstant war, so mußte schließlich der Reizwert

$$R = \frac{i \cdot t}{J}$$

als endgültiges Schwellenmaß gelten, worin t die systematisch am Kontaktpendel abgestufte Reizzeit bedeutet. Da die Schwankung der i und J stets nur klein waren und außerdem auch die Abweichungen zwischen den ebenmerklichen Reizwerten R bei verschiedenen Aufmerksamkeitszuständen, so konnten jedenfalls die Verhältnisse der modifizierten Schwellen zur Normalschwelle, über die meine Schwellentafeln für die verschiedenen apperzeptiven Einstellungen berichten, den hierbei beteiligten Verhältnissen der ebenmerklichen Empfindungszuwüchse nach Gl. [5] als hinreichend proportional erachtet werden. (Vgl. § 11 S. 26.)

Lipp hätte übrigens bei seiner langen Reizzeit von 0,8 Sek., die durch eine bei der Schattenobjektebene rotierende Spaltscheibe unabhängig von der V.-P. abgegrenzt wurde, leicht eine Abstufung der Intensität durch einen schnell rotierenden Episkotister vornehmen können, da die Zufälligkeiten der Stellung des Episkotisters zum Spaltapparat in einer Exposition bei großer Tourenzahl nicht mehr in Betracht kommen. Er verwendete indessen ein verschieden stark abdunkelndes Medium unmittelbar vor dem Schattenobjekt und der rotierenden, die Reizzeit abgrenzenden Spaltscheibe, nämlich einen Flüssigkeitsfilter mit verdünnter Tusche, der durch eine ähnliche Schlittenvorrichtung wie bei Fig. 28 jedesmal vor das eben gebrauchte Loch des Schattenobjektes geschoben werden konnte, das er dann gerade vollständig bedeckte. Die Schichtdicke konnte durch Herein- und Herausschrauben der einen Deckplatte variiert werden, was durch einen Schnurlauf von der V.-P. selbst besorgt werden konnte, während bei einem Episkotister eine solche Regulierung während der Rotation (s. S. 299) nicht so einfach in dem verfügbaren Raum erreichbar gewesen wäre.

Wegen Heinrichs Beobachtungen über Änderungen der Linsen- und Pupillenakkommodation bei seitlicher Aufmerksamkeitsrichtung (vgl. unten § 74) interessierte hier schließlich auch die Ableitung der Schwellen einer bestimmten apperzeptiven Einstellung bei verschiedenen Akkommodationszuständen. Diese konnten relativ isoliert variiert werden, wenn vor dem Fixationspunkt eine kleine, den ganzen Zusatzbereich freilassende Linse befestigt wurde, und die V.-P. wieder auf das Fixationszeichen scharf akkommodierte. Auch die physiologische Ausschaltung der Akkommodation durch Atropin kam wenigstens in einigen Versuchen zur Anwendung.

45. Die räumliche Verteilung der Aufmerksamkeit im Tastfelde.

(Veränderungsschwellen für Druckintensitäten.)

Etwas schwieriger ist eine analoge Untersuchung des Einflusses der extensiven Aufmerksamkeitsverteilung auf taktilem Gebiete, selbst wenn man sich auf Druckreize und die Schwelle für ihre Intensitätsänderung beschränkt. Denn die technischen Komplikationen, die hier auch schon bei der Ableitung der Schwelle für einen einzigen Punkt hinzutreten, wenn der Reiz auf die einmal gewählte Stelle exakt appliziert werden soll, werden natürlich mit der Vermehrung der Reizmöglichkeiten und deren Verteilung auf verschiedene Körperteile noch bedeutend gesteigert. Doch kann man dafür wenigstens auf die dauernde Flächenreizung verzichten, soweit sie nicht durch die Kleidung und die Unterstützung der Körperlage ohnehin bereits vorhanden ist, zumal sie bei einer ähnlichen inneren Gleichförmigkeit wie bei jenen optischen Versuchen nahezu wirkungslos wäre. Als konstante Haltepunkte der Aufmerksamkeitsverteilung kann man dagegen eine Reihe eng begrenzter Druckreize einführen, an denen man dann zugleich die Veränderungen vornehmen wird, um dadurch die besondere Schwierigkeit des völlig neuen Einsetzens des Druckes an einer vorher ungereizten Stelle zu umgehen. Auch bei den optischen Versuchen werden ja, wie S. 322 erwähnt wurde, die eng umschriebenen Stellen der Zusatzreize, obgleich sie nicht dauernd gesondert wahrgenommen werden, schließlich zu alleinigen Haltepunkten für die Beurteilung der jeweiligen Reizlage. Die fortgesetzte Wahrnehmung dieser Stellen verhindert übrigens selbst bei einer kleinen Zahl und ziemlich weiten Verteilung keineswegs die charakteristischen Fehler bei der Lokalisation der Veränderung. — Wegen der großen Unstetigkeiten der Druckempfindlichkeit, je nach Lage der Druckpunkte, wird man wohl mit etwas breiteren, abgestumpften Reizobjekten unter wesentlich konstanteren Bedingungen arbeiten als mit wirklich punktuellen Reizen, da hier im Verlaufe der Versuchsreihen minimale Verschiebungen der Reizapparate zum Körper kaum zu vermeiden sind. Denn die sonst bei der Applikation eines einzigen Reizes auf eine Extremität angewendete Eingipsung und ähnliche starre Fixierungen sind nicht leicht auf den ganzen Körper übertragbar. Immerhin werden hier an die willkürliche Haltung der V.-P. und ihre Duldung von Stützvorrichtungen höhere Anforderungen als sonst zu stellen sein. Auch hat der Experimentator die Lage der Apparate fortgesetzt wenigstens so gut als möglich zu kontrollieren bzw. zu korrigieren.

Was nun die Anordnung im einzelnen anlangt, so ließe sich zunächst die Vorrichtung, mit der Krohn zum ersten Male bis zu zehn gleichzeitigen Druckreizen in verschiedenen Kombinationen gegangen war, als er ihre Zahl und Lage beurteilen ließ[1]), auch für dieses Problem der Intensitätsschwellen verwenden. Er montierte eine entsprechende Anzahl Mareyscher Tambours, auf deren Membranen Korkstücke befestigt waren, vor den verschiedenen Hautstellen, von denen so viele gleichzeitig gereizt werden konnten, als gerade mit dem primären Druckapparat pneumatisch verbunden waren. W. Peters[2]) hat denn auch in Versuchen, die § 48 zu erwähnen sein werden, und bei denen er eine eigentliche Reizschwelle für Druck zu bestimmen suchte, wenigstens einen einzigen solchen Tambour, dessen 3 cm langer, unten abgestumpfter Korkstöpsel auf den Nagel des Mittelfingers aufgesetzt wurde, zur quantitativen Abstufung eines pneumatisch über-

1) Journ. of Nerv. and Mental diseases, März 1893.

2) Aufmerksamkeit und Reizschwelle, Arch. f. d. ges. Psychologie, Bd. VIII, 1906, S. 385. (Fig. 5. S. 400.)

tragenen kurzdauernden Druckes benützt, indem er auf eine Aufnahmekapsel, die mit jenem Tambour durch eine bis auf die elastischen Verbindungsstücke starre Glasrohrleitung verbunden war, eine Büchse mit verschiedenen Gewichten stets aus der nämlichen Höhe, ca. 4 cm hoch, herabfallen ließ. Da es sich bei dieser Spezialisierung der Krohnschen Anordnung zunächst immer nur darum handeln würde, in jedem Versuche bloß in einem einzigen jener mehrfach angesetzten Reiz-Tambours eine genauer abstufbare Drucksteigerung herbeizuführen, so brauchte also nur durch ein geeignetes Ventilsystem dafür gesorgt zu werden, daß die Peterssche Aufnahmekapsel in raschem Wechsel immer an einen von ihnen angeschlossen werden kann.

Wenn sich aber nun auch eine solche Vorrichtung wegen der Leichtigkeit der einzelnen Reizapparate vielleicht am bequemsten in größerer Zahl vor verschiedenen Hautstellen anbringen ließe, so gestattet doch eine elektromagnetische Anordnung, wenn sie einmal montiert ist, die einfachste Umschaltung, und läßt den Reiz exakter und auf die Dauer zugleich konstanter abstufen. Bei einigen Versuchen, die eine Analogie zu jenen optischen bilden sollten, verwendete ich daher zunächst wenigstens sechs elektromagnetische Reizhebel nach v. Frey und Brückner[1]), die auf einem Gerüst von entsprechend gebogenen Eisenstäben und Stativen über den beiden Handrücken, Unterarmen und Fußrücken bei bequemer, sitzender Haltung der V.-P. montiert waren. Die Modelle waren übrigens etwas größer als das a. a. O. abgebildete, auch war die Spitze durch eine abgerundete, an einer Schraube angesetzte Beinkuppe ersetzt, die infolge des konstanten Druckes zunächst etwas einsank, worauf die Lage des Hebelankers zum Magnetpol, die an einer Skala kontrolliert werden konnte, mittelst der genannten Schraube wieder herzustellen war. v. Frey und Brückner regulierten übrigens die Reizstärke durch Veränderung der Entfernung zwischen Hebelanker und Magnetpol bei konstantem Strom, also nach dem Coulombschen Gesetz. Zur schnellen und genauen Abstufung einer größeren Anzahl von Reizmöglichkeiten, von denen die jeweils benützte unbekannt bleiben soll, eignet sich indessen nur die Variation der Stromstärke, deren Einfluß auf den Hebel an der Wage geeicht wurde, wobei sich der Druck für die nämliche Ankerdistanz dem Quadrate der benützten Stromstärke recht gut proportional zeigte.

Hierbei erreicht man die gewünschte Veränderung eines konstanten Druckes durch eine momentane Vermehrung oder Verminderung eines in allen Elektromagneten bereits vorhandenen Stromes. Bei Trennung der Hauptstromkreise für die einzelnen Magneten wenigstens vom Akkumulator an geschieht dies einfach durch die kurzdauernde Herstellung eines mit variablem Widerstand versehenen Nebenschlusses, u. z. zur Druckvermehrung eines solchen außerhalb des wirksamen Stromzweiges, zur Verminderung aber eines zu ihm parallel geschalteten. Je nach den Hilfsmitteln läßt sich übrigens dieses Grundprinzip in mannigfaltiger Weise variieren, vor allem auch unter Verwendung kurzschließender Kontakte. Bei meinen Versuchen, in denen es zunächst nur auf die Verhältnisse der Schwellen zur Normalschwelle ankam, wurde jedoch der konstante Druck einfach durch ein am Hebel befestigtes Laufgewicht bewirkt und nur zu seiner Steigerung der Hauptstrom durch den betreffenden Magneten geschickt. Die konstante Abgrenzung der Reizzeit besorgte wieder das Fig. 21, S. 330 abgebildete Kontaktpendel, das hier in dem mit dem Rheostaten versehenen Hauptstromkreis lag, der durch einen Umschalter nach jedem Hebelmagneten dirigiert werden konnte. Zur Ver-

1) Vgl. Bd. III, 1. Abt., Sinnesphysiologie I, S. 24f., und Fig. 18.

meidung von Bewegungen der V.-P. wurde es nach einem Vorsignal vom Experimentator ausgelöst.

Wenn die Reizwirkung durch Variation der elektrischen Stromstärke abgestuft wird, ist es besonders dann, wenn dies mittelst eines Stöpsel-Rheostaten im Nebenschlusse geschieht, aber auch bei einem einzigen Stromkreis mit sonstigen größeren Widerständen, selbst bei der einfachsten Abhängigkeit der Kraft von der Stromstärke bisweilen sehr umständlich, die Reizstufen genau äquidistant zu machen. Vor allem aus diesem Grunde haben wir daher oben bei den Hilfssätzen aus der Kollektivmaßlehre auch die Ableitung von Hauptwerten und Streuungsmaßen aus nicht äquidistanten Häufigkeitskurven berücksichtigt.

46. Die räumliche Verteilung der Aufmerksamkeit auf Schallreize.

(Die Abstufung der Intensität von Geräuschen verschiedener räumlicher Herkunft.)

Auch auf akustischem Gebiete läßt sich zunächst der Einfluß der Aufmerksamkeitsverteilung im Raume verfolgen, wenn er auch wegen der Mittelbarkeit der Lokalisation von Schallwahrnehmungen in anderer Weise zustande kommen wird als bei optischen und taktilen Eindrücken. Da die Verbindung räumlicher Merkmale mit den Gehörseindrücken trotz jener Mittelbarkeit eine sehr innige sein kann, so ist zu erwarten, daß auch die Willkürtätigkeit der extensiven Aufmerksamkeitsverteilung oder gleichwertige Wirkungen eines Nebenreizes auf die Apperzeption, die sich an der komplexen Vorstellung des Raumes vollziehen, auch die Auffassung der Schallreize als solcher in irgend einer Weise modifizieren. Zum mindesten wird die Schwelle für die bestimmte Lokalisation, wie sie bei übermerklichen Reizen jedenfalls vorhanden sein kann, bei der Unwissentlichkeit hinsichtlich der speziellen Lage des Reizes innerhalb eines weiteren Gebietes anders ausfallen, auch werden außerdem wahrscheinlich wieder besondere Fehler hinzutreten. Dabei hat man also Schallreize an beliebigen Stellen des Raumes auszulösen und in ihrer Intensität abzustufen.

Wie nun vor allem die schönen Versuche von M. Wien gezeigt haben, läßt sich auch auf akustischem Gebiete die Intensität am besten elektromagnetisch abstufen, indem man z. B. in dem Stromkreis eines Telephones, mittelst dessen man den Reiz hört, den Widerstand ändert[1]). Falls diese Änderungen nur unwesentlich auf die Stromstärken des Hauptstromkreises zurückwirken, an den das Telephon angeschlossen ist, wird die Amplitude der Schwingung der Telephonplatte, solange von einer Resonanz derselben abgesehen werden kann, der Stromstärke direkt, also dem gesamten Widerstand des Telephonstromkreises umgekehrt proportional, und daher die Schallintensität selbst dem Quadrate dieses Widerstands reziprok. Natürlich kommen hierbei stets die speziellen Widerstände für Wechselströme in Betracht.

Da sich die Einflüsse der extensiven Aufmerksamkeitsverteilung auch schon an beliebigen Geräuschen verfolgen lassen, so war hierfür auch schon das leise momentane Knacken als Reiz zu verwenden, das an Telephonen,

1) M. Wien, a. S. 292, A. 1 a. O. Vgl. dort auch die frühere Literatur.

die im sekundären Stromkreise eines Induktoriums liegen, bei Öffnung oder Schließung eines genügend starken primären Stromes auch ohne Anlagerung derselben an den Kopf im ganzen Raum zu hören ist. Dabei läßt sich unter Voraussetzung eines hinreichend stillen Raumes auch leicht mit der absoluten Reizschwelle operieren. Auch kann man dabei die Variation der Intensität einfach in der Weise vornehmen, daß man den Widerstand im primären Stromkreis, also die induzierende Stromstärke, ändert und den sekundären mit dem Telephon verbundenen Kreis unverändert läßt. In dieser Weise arbeitete Glinos im „stillen Zimmer" des Leipziger Institutes für experimentelle Psychologie, das durch seine Bauart gegen äußere Geräusche recht

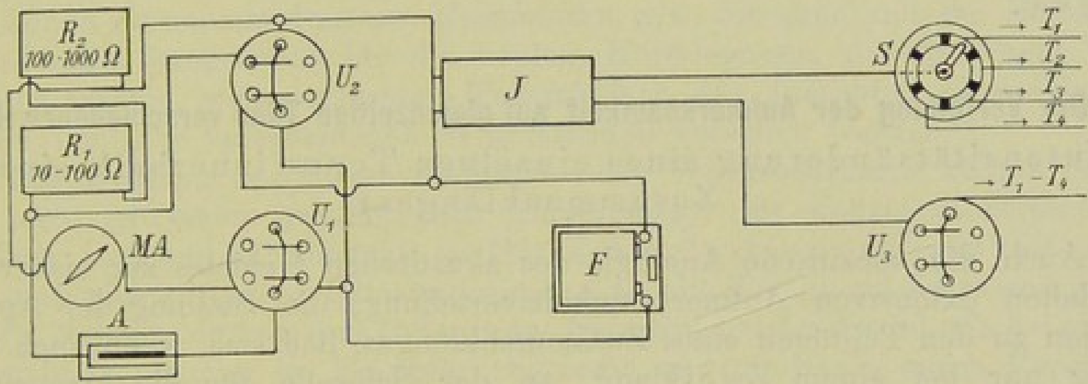


Fig. 22.
Anordnung zur Untersuchung der räumlichen Verteilung der Aufmerksamkeit auf Schallreize.

gut geschützt ist. Seine vor kurzem abgeschlossenen Versuche lassen eine große Konstanz aller Bedingungen erkennen. Auch waren vor allem die Beobachtungsreihen von vornherein auf die Erfüllung der früher genannten Forderungen zur Ableitung möglichst genauer und vergleichbarer Schwellenwerte angelegt. Man hätte die Versuche sogleich mit einer umfassenderen perimetrischen Variation der Telephonlage in Angriff nehmen können. Doch begnügte sich Glinos vorläufig mit vier Hauptlagen, die von vier verschiedenen und völlig konstant an den vier Wänden des Zimmers befestigten Telephonen eingenommen wurden, ohne daß diese jedoch bei ebenmerklichen Reizen etwa einfach an qualitativen Unterschieden identifiziert werden konnten. Der Beobachter saß in der Mitte des Zimmers, wo sein Kopf durch eine Einbeißvorrichtung fixiert war. Durch Filzdämpfungen war außerdem die direkte Wandleitung zwischen den Telephonen und die Wand- und Bodenleitung zwischen ihnen und dem Beobachter so viel als möglich herabgesetzt. In einem entfernten Raum befand sich der Experimentator mit allen übrigen Apparaten, deren einfache Schaltungen aus Fig. 22 zu ersehen sind.

Von dem Akkumulator A mit ca. 4 Volt geht die zur Schwellenbestimmung dienende Hauptleitung zu zwei hintereinander geschalteten Stöpselrheostaten R_1 und R_2 von 10 bis 100 bzw. 100 bis 1000 Ω, von da an dem hierzu unbenützt nach rechts gelegten Umschalter U_2 vorbei zur primären Spule des Induktoriums J und zum Hippschen Fallapparat F, an welchem der Experimentator durch Auslösen des Kugelfalles stets einen gleichartigen Schließungsprozeß im primären Stromkreis herbeiführen konnte. Vom Fallapparat ging die Leitung zum Umschalter U_1 und, bei der gewöhnlichen rechtseitigen Lage desselben, zurück zum Akkumulator. (Bei linksseitiger Lage konnte der Strom direkt von den Widerständen durch ein Ampèremeter zurückgeleitet werden, um die primären Stromverhältnisse zu kontrollieren.) Von der einen sekundären Klemme des Induktoriums ging ein Draht zu dem sechsfachen Umschalter S, von dem vier Ableitungen mit je einem der Telephone im stillen Zimmer verbunden waren und daher einen raschen, völlig unwissentlichen Wechsel der Reizlage gestatteten, während der andere sekundäre Pol durch den Ausschalter U_3 an die vier anderen Telephonpole zugleich anzuschließen war, nachdem alle Vorbereitungen für den jeweiligen Versuch am primären Stromkreis beendigt waren. Für die Vorsignale vor jeder Hauptreihe mit neuer Aufmerksamkeitsrichtung wurde das stärkere Knacken des vorderen Telephones T_1 verwendet, das bei mehrmaligem Schließen und Öffnen des Doppelunterbrechers U_2 in der in Fig. 22 abgebildeten linksseitigen Lage zu hören war, dessen einer Kontakt bei der Schließung einen Nebenschluß zu den Rheostaten herstellte, während der andere Kontakt gleichzeitig einen Nebenschluß zu dem Fallapparat legen mußte, weil dessen Kontakt vor dem Versuch bereits auf Öffnung gestellt war.

47. Die Verteilung der Aufmerksamkeit auf gleichzeitige Töne verschiedener Höhe.

(Intensitätsänderung eines einzelnen Tones innerhalb eines Zusammenklanges.)

Auch die spezifische Analogie des akustischen Gebietes zur bisher behandelten extensiven Aufmerksamkeitsverteilung, die Stellung der Apperzeption zu den Teiltönen eines Zusammenklanges, ließ sich, wenn auch vorläufig nur bei einem Zweiklang, an der Schwelle für die momentane Intensitätsänderung eines Teiltones nach der Telephonmethode studieren. Von Hartmann & Braune in Frankfurt a. M. werden zu Wechselstrommessungen Magnetinduktoren hergestellt, die durch ihre besondere Bauart eine relativ einfache Schwingungsform liefern und bei hinreichender Rotationsgeschwindigkeit (durch Betrieb des Motors mit einer konstanten Akkumulatoren-Batterie von etwa 110 bis 220 Volt) auch einen sehr gleichmäßigen Gang besitzen. Bei der Größe und Geschwindigkeit der bewegten Massen muß ein solcher Induktor allerdings samt seinem starken Elektromotor sehr fest montiert werden, auch ist auf eine genau passende Transmission zwischen beiden besondere Sorgfalt zu verwenden. Der mir im physikalischen Institut der Universität Leipzig[1]) zur Verfügung stehende Doppelinduktor, der gleichzeitig beide Töne lieferte, war mit seinem Motor auf dem Boden des

1) Auf die ausgezeichneten akustischen Leistungen der Magnetinduktoren der bekannten Firma wurde ich schon 1909 durch Herrn Dr. Weißbach aufmerksam gemacht, der inzwischen auch bereits in seiner Dissertation*) darauf hingewiesen hat. Er arbeitete am physikalischen Institut in Leipzig, dessen Direktor, Herr Geheimrat Wiener, einen solchen Induktor unter den günstigsten Versuchsbedingungen zu unserer beiderseitigen Verfügung stellte und die mir außerdem zu der oben beschriebenen Anordnung erforderlichen Räume und Apparatmittel des Institutes anwies, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen möchte. Auch dem Herrn Assistenten des Instituts, Herrn Privatdozenten Dr. Jaffé, bin ich für die freundliche Unterstützung bei der Anordnung zu besonderem Danke verpflichtet. Obgleich meine Versuche noch nicht so zahlreich sind, um bei der Aussicht ergänzender Beobachtungen eine selbständige Veröffentlichung der Resultate zu rechtfertigen, glaube ich in diesem methodischen Zusammenhange eine Empfehlung der Anordnung nicht unterlassen zu dürfen.

*) Versuche über Schalldurchlässigkeit, Schallreflexion und Schallabsorption. 1910.

Maschinenhauses im Souterrain festgemauert und von einer völlig unabhängigen Batterie zu 110 Volt betrieben[1]). Die beiden von der nämlichen Firma dazu gelieferten Telephone, die für die Verwendung im Hauptstrom des Induktors besonders kräftige Wickelungen besitzen, gaben bei dieser Schaltung vor allem, nachdem sie auch noch mit je einem Resonator, ähnlich den variablen Schäferschen, versehen waren, sehr intensive und dabei dem Zungenpfeifenklang eines Harmoniums an Reinheit sehr nahe stehende Töne, die den ganzen Raum erfüllten. Ja der höhere Ton war ohne Einfügung eines Widerstandes geradezu unerträglich laut. Um durch annähernde Gleichheit der subjektiven Intensität die beliebige Einstellung der willkürlichen Aufmerksamkeit möglichst zu erleichtern, mußten daher unter den gegebenen Stromverhältnissen, Resonanzen usw. die außerhalb des Induktors befindlichen Stromkreise für die beiden Hörtelephone, die in einem vom Maschinenraum weit entfernten Turmzimmer des Institutes angeschlossen waren, mit sehr verschiedenen Widerständen versehen werden[2]).

Die Messung der Stromverhältnisse des Wechselstromes konnte natürlich nicht mit einem gewöhnlichen Ampèremeter für konstante Ströme geschehen. Es stand mir zunächst ein Hitzdraht-Instrument[3]) zur Verfügung, das eine viel geringere Belastungsgrenze als die Telephone hatte und daher nur im Nebenschluß zu verwenden war. Sein Spiegelstand wird wie bei einem Spiegelgalvanometer im Fernrohr abgelesen und die Skala durch Vergleich mit einem Ampèremeter bei konstantem Strom geeicht. Innerhalb der von mir beobachteten Grenzen ging der Ausschlag dem Quadrate der Stromstärke fast genau proportional. Vor jeder weiteren Beobachtung ist die Abkühlung des Apparates abzuwarten und die Nullstellung von neuem zu prüfen. Auch wird man den Strom so kurz als möglich schließen. Bei der Trägheit der Temperaturänderung gibt dieser Apparat allerdings nur die Gesamtintensität während eines gewissen Zeitteiles an. Dies genügt aber vor allem zur Lösung seiner Hauptaufgabe, den Einfluß der mittelst des Rheostaten abgestuften Nebenschließung auf den Telephonstrom zu eichen. Außerdem ließ sich hiermit die vollständige Konstanz der absoluten Energie-Entwicklung in dem für den Hitzdraht maßgebenden Zeitteil ermitteln. In den 10 Versuchstagen, an denen jedesmal die Stromstärken beider Telephone gemessen wurden, differierten diese um weniger als etwa $^1/_{10}$ der zu messenden Schwelle, und innerhalb des nämlichen Tages sogar nur um kaum noch abzuschätzende Bruchteile der Skala. Diese Genauigkeit käme also insbesondere voll zur Geltung, wenn zwei sukzessive, durch eine Pause getrennte Töne von etwa $^1/_2$ bis 1 Sek. Dauer miteinander zu vergleichen

1) Es scheint übrigens unter solchen Bedingungen wenigstens keine prinzipiellen Schwierigkeiten zu bieten, durch gleichzeitigen Betrieb von zwei oder mehr Induktoren bzw. Doppelinduktoren, deren Achsen natürlich zur Aufrechterhaltung des nämlichen Frequenzverhältnisses miteinander fest verbunden sein müssen, einen reicheren Zusammenklang zu erzeugen, dessen einzelne Töne unabhängig voneinander in ihrer Intensität variiert werden können.

2) In den Induktionsspulen des tieferen Tones ist der Widerstand (für konstanten Strom) etwa viermal so groß ist wie für die höhere Oktave.

3) M. Wien a. a. O. verwendete dagegen ein Dynamometer. Über die Messung mittelst desselben vgl. M. Wien, Über die Verwendung des Elektrodynamometers im Nebenschluß. Wiedemanns Annalen der Physik. Bd. 63, 1897, S. 390.

wären, bei der Bestimmung von Unterschiedsschwellen unter diesen Beobachtungsbedingungen. Bei Ableitung der Schwelle für Veränderungen, die nur stoßartig einen kleinen Bruchteil der Sekunde hindurch aushalten, kann indessen diese Genauigkeit wohl nicht vollständig erreicht werden,

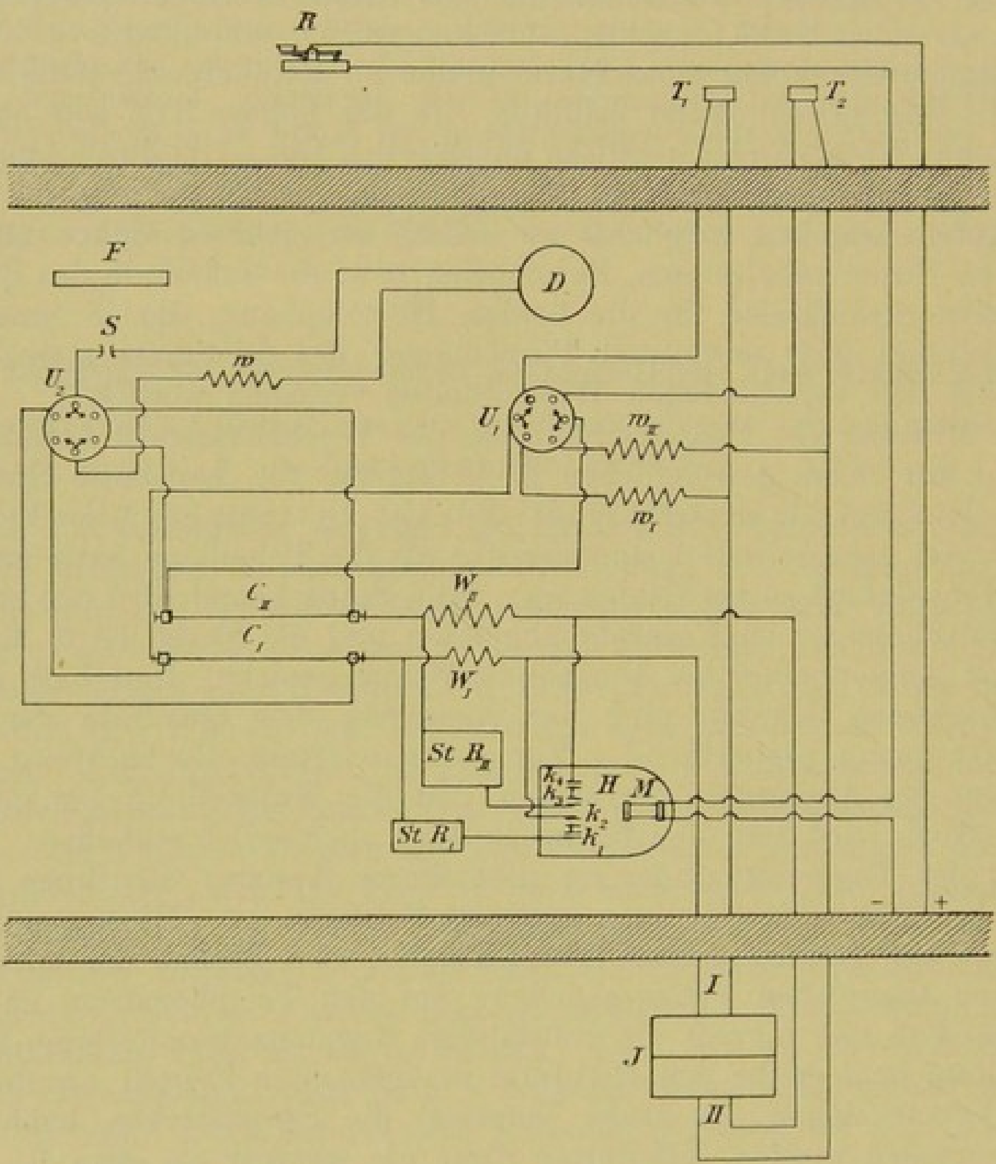


Fig. 23.

Anordnung zur Untersuchung der Verteilung der Aufmerksamkeit auf gleichzeitige Töne verschiedener Höhe.

da die Töne, besonders der hohe, noch gewisse, wenn auch sehr schwache Oszillationen hören lassen, die anscheinend von dem Treibriemen herrühren. Diese konnte man denn auch mittelst des Saitengalvanometers unmittelbar beobachten, das eine Detailanalyse des Wechselstromes gestattet [1]). Der Grad der Konstanz, der bei der Beurteilung der einzelnen Veränderungsstufen zutage trat, zeigte indessen, daß die minimalen, hier schließlich mit in Kauf zu nehmenden Oszillationen wenigstens keine wesentliche Störung der Versuchsresultate mit sich bringen.

1) Vgl. die genaue Beschreibung des Apparates und seiner Behandlung in Bd. II, 3. Abt., 4. Elektrophysiologie von S. Garten, S. 428ff

Die in Fig. 23 skizzierte Anordnung und ihre Verwendung war kurz die folgende: Die beiden in einem oberen Turmzimmer befindlichen Telephone T_1 und T_2 wurden vom Experimentator, der sich mit den übrigen Hilfsapparaten zwei Stockwerke tiefer befand, bei U_1 immer erst kurz vor jedem Versuche eingeschaltet, zugleich als Vorsignal zur Einstellung der Aufmerksamkeit. Um aber die Belastung und den Gang des Induktors J hierbei nicht zu verändern, waren in der Zwischenzeit an ihrer Stelle mittelst des Umschalters U_1 je ein gleichwertiger Widerstand w_{II} und w_{II} angeschlossen. Hierauf konnte nun die V.-P. selbst mittelst eines geräuschlos funktionierenden Tasters R den Fall eines Helmholtzschen Kontaktpendels[1]) H auslösen, das im Zimmer des Experimentators stand und dessen Hebel auf Lederpolster fielen, so daß ihr Fall oben nicht zu hören war. Die beiden ersten der vier Kontakte dieses Pendels k_1 und k_2 bewirkten nun, wenn sie nacheinander berührt wurden, einen ziemlich genau 0,1 Sek. dauernden Nebenschluß zu dem Widerstand W im Stromkreis des Telephons T_1, die beiden anderen k_3 und k_4 schlossen völlig unabhängig hiervon eine ganz analoge Leitungsverstärkung neben dem Widerstand W_{II} im Kreis von T_2. Da die Telephone in den ungeteilten Hauptkreisen I und II lagen, so entstand dadurch eine kurzdauernde, von dem Widerstand der Nebenschließung abhängige Verstärkung des höheren oder des tieferen Tones, je nachdem das Kontaktpaar $k_{1,2}$ oder $k_{3,4}$ aufgestellt war. Diese konnte durch je einen Stöpselrheostaten St_I bzw. St_{II} abgestuft werden, worin genau wie bei jenen Versuchen von Glinos hier die Hauptaufgabe des Experimentators in der Pause zwischen zwei Versuchen bestand. Die Widerstände W_I und W_{II} waren so groß gewählt worden, daß der tiefe Ton zur Ableitung von Vollreihen durch Widerstände von 20 bis 120 Ω im Nebenschlusse, der hohe durch solche von 10000 bis 80000 Ω zu variieren war. Hinter der Vereinigung der Nebenschlüsse mit dem Hauptstrom enthielten beide Hauptleitungen auch noch je einen kleinen, völlig gleichartig gebauten Widerstand C_I und C_{II} aus Konstantandraht, an dessen Enden noch durch den Umschalter U_2 der Stromkreis des Hitzdrahtapparates D angeschlossen werden konnte, in dem außerdem noch ein besonderer Widerstand w und beim Fernrohr F der Ausschalter S lagen.

48. Die Analyse der gleichzeitigen Auffassungsbedingungen verschiedener Sinnesgebiete.

Hat man einmal die bisher beschriebenen Anordnungen zur Beherrschung des optischen, taktilen und akustischen Wahrnehmungsfeldes hergestellt, so lassen sie sich natürlich auch gleichzeitig anwenden, um die Verteilung der Aufmerksamkeit auf mehrere Sinnesgebiete nach der nämlichen Methode zu untersuchen. Hierbei wird nach dem Prinzip dieser ersten Hauptgruppe in jedem Versuch wieder nur eine einzige Veränderung vorgenommen, also entweder eine optische oder eine taktile oder eine akustische, so daß zu einer

1) Vgl. die Abbildung und Beschreibung in Bd. II, 3. Abt., 4 (S. Garten, Elektrophysiologie), S. 359 u. Fig. 25. Da hier eine viel langsamere Pendelschwingung erforderlich war, wurde unterhalb des Haltemagnetes E (a. a. O.) ein zweiter montiert, dessen Strom von der V.-P. unterbrochen wurde (M. in Fig. 23).

gleich erschöpfenden Analyse der Auffassungsverhältnisse innerhalb der drei Wahrnehmungsfelder so viele Versuche erforderlich wären als in allen soeben beschriebenen Einzeluntersuchungen miteinander. Bei den bisherigen Versuchen in dieser Richtung beschränkte sich jedoch der gesamte Verteilungsbereich der Aufmerksamkeit einstweilen auf höchstens drei einzelne disparate Reize. In einigen mehr vorläufigen Versuchen [1]) verwendete ich hierzu die S. 320 genannte Methode, wobei nicht Veränderungs- sondern Unterschiedsschwellen abgeleitet werden: Drei disparate kurzdauernde Reize, ein optischer, ein akustischer und ein taktiler, wurden mehrmals dargeboten und mit einem einmal dargebotenen Komplex aus drei Reizen verglichen, der dem ersten völlig gleich war, bis auf eine Intensitätsveränderung eines der drei Reize. Doch war der akustische Reiz noch nicht genau genug abstufbar. Auch W. Peters wechselte in der S. 332 genannten Arbeit unwissentlich zwischen drei disparaten Reizen ab, wobei er außer dem oben genannten Tastapparat noch ein Fallphonometer, ebenfalls zur Reizschwellenbestimmung für den Momentanreiz des Fallgeräusches, sowie eine elektrische Glühlampe benützte, die plötzlich auf eine geringere Helligkeit fiel (auf der sie dann freilich bis zum Ende des Versuches verblieb!) [2]) Eine für alle drei Reize gleich exakte Anordnung, die auch einen hinreichend raschen Wechsel zwischen allen für Vollreihen in Betracht kommenden Reizmöglichkeiten gewährleistet, verwendete dagegen O. Klemm in der „Untersuchung über den Verlauf der Aufmerksamkeit bei einfachen und mehrfachen Reizen“ [3]). Die drei disparaten, einzeln kurzdauernd zu variierenden Reize in dem Raume der V.-P., der in Fig. 24 von dem entfernten Zimmer des Experimentators mit den Hilfsapparaten durch den schraffierten Streifen abgetrennt ist, bestanden hierbei in einem von drei Glühlampen zu je 25 Kerzen beleuchteten Transparent P, das etwa 2 m vom Beobachter entfernt war, einem Tasthebel D, ähnlich den oben genannten nach v. Frey und Brückner, und einer elektromagnetischen Stimmgabel G_1 bezw. dem durch den Resonator R verstärkten Telephon T, das ebenfalls von einer beim Experimentator stehenden elektromagnetischen Stimmgabel G_2 betrieben wurde (vgl. unten).

Alle drei Reize wurden durch je einen elektrischen Strom unterhalten [4]), der zugleich durch das Zimmer des Experimentators geleitet war und hier einen konstanten Widerstand enthielt, zu dem mittelst des Pflügerschen Fallhammers ein 0,082 Sek. lang dauernder Nebenschluß hergestellt werden konnte. (Im Stromkreis für die Trans-

1) Vgl. Bericht über den II. Kongreß für experimentelle Psychologie in Würzburg 1906, S. 242.

2) Peters legt allerdings auf die Schwellen für den Lichtreiz selbst keinen Wert. Die Verdunklung geschah übrigens durch Vertauschung eines guten mit einem (variablen) schlechten Leiterstück mittelst Umschalters. Die Intensitätsauffassung des Lichtsinnes ist jedoch so fein, daß die nur schwer kontrollierbaren Summationen oder Ausfallserscheinungen im Verlauf des Umschaltens nicht außer Betracht bleiben dürfen. Eine exakte Variation der Helligkeit kann also nur durch das Prinzip der Schließung oder Unterbrechung eines Nebenschlusses erreicht werden, das wir hier für alle Variationen elektrisch erzielter Intensitäten empfehlen.

3) Wundt, Psychol. Studien IV, 4 u. 5. 1908, S. 283.

4) Für den Tasthebel stammte dieser von zwei Akkumulatoren B zu je 4 Volt, für die übrigen Apparate von den Stadtleitungsanschlüssen H_1, H_2 und H_3 zu 110 Volt, denen je ein Lampenwiderstand vorgeschaltet war.

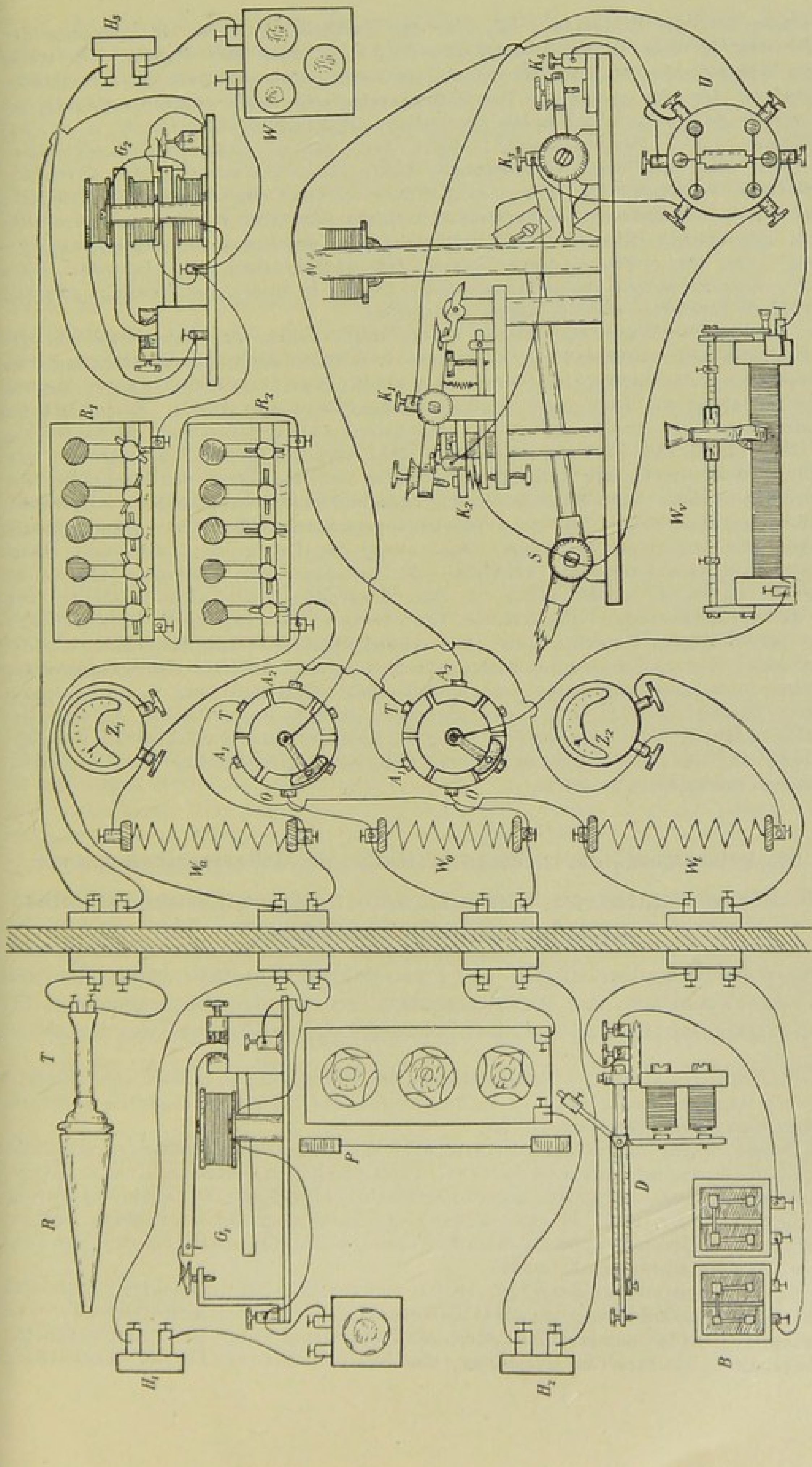


Fig. 24.

Anordnung zur kurzdauernden Variation der Intensität eines von drei konstanten disparaten Sinnesreizen (Licht, Schall und Druck) nach O. Klemm.

parentlampen war der Widerstand W_o, für den Tasthebel W_t, für das Telephon der Stöpselrheostat R_2 und für die Stimmgabel W_a.) Je nach der Stellung des stetig variablen Widerstandes W_v jenes Nebenschlusses wurde also hierdurch die Stromstärke in demjenigen der vier genannten Hauptstromkreise mehr oder weniger verstärkt, an den er gerade durch die Hebel zweier Umschalter (mit den Kontaktplatten O, A_1, T, A_2) angeschlossen war[1]). Der Umschalter U diente dazu, den mit seinen Zuleitungsklemmen (in der Figur oben und unten) verbundenen Nebenschluß auf zweierlei Art durch den Pflügerschen Fallhammer zu leiten, so daß dieser Zweig entweder (bei rechtsseitiger Lage der Wippe) im allgemeinen offen und nur während der 0,082 Sek. langen Fallzeit des Hammers geschlossen oder (bei linksseitiger Lage) umgekehrt im allgemeinen geschlossen[2]) und nur während dieser kurzen Zeit unterbrochen war. In jenem Falle wurde also die gewöhnliche Intensität momentan erhöht, in diesem die allerdings dauernd etwas größere Intensität eben so lange vermindert.

Bei der gleichzeitigen Einwirkung dreier Reize rührte der akustische von der elektromagnetischen Stimmgabel G_1 her, deren Amplitude durch die Verstärkung oder Verschlechterung der Leitung für kurze Zeit erhöht bzw. vermindert werden konnte, ohne daß der Gang der Stimmgabel hierbei sonstige Störungen erlitt[3]). Beim Tasthebel wurde der dauernde Druck nur vom konstanten Akkumulatorstrom herbeigeführt, da der Hebel durch einen dritten mit Laufgewicht versehenen Arm ausbalanciert war. Bei kleinen Änderungen der Stellung des Hebels, wie sie durch das Nachgeben der Haut oder durch kleine, unwillkürliche Bewegungen leicht entstehen, änderte sich freilich die Entfernung des zweiten, mit dem Eisenanker versehenen Hebelarms vom Magneten und daher nach dem Coulombschen Gesetz auch der Druck des Tasthebels. Doch wurde hierdurch wenigstens das Verhältnis der kurzdauernden Änderung, für welche die Schwelle abgeleitet werden sollte, zu dem dauernden Druck nicht wesentlich verändert, das bei annähernder Gültigkeit des Weberschen Gesetzes für die Veränderungsschwelle hier allein in Betracht kam. Die Abhängigkeit der Lichtintensität von der kurzdauernden Nebenschließung konnte nur rein empirisch mittelst einer Angleichung an ein Photometer bestimmt werden, was jedoch nicht ganz leicht war, da in 82 σ kein stationärer Zustand erreicht wird. Zur genaueren Analyse des zeitlichen Ablaufes der Lichtstärkeänderung, wäre allerdings ein bewegter Spalt an einem Kontaktpendel oder dgl. erforderlich, der das Licht überhaupt nur während eines Zeitabschnittes der Lichtstärkeänderung zu beobachten gestattet.

49. Die Untersuchung des zeitlichen Verlaufes der Auffassungsbedingungen.

a) Die Rekonstruktion von Schwankungen in der Auffassung einzelner Reize aus Schwellenmessungen.

Die Anordnung der Fig. 24 wurde aber nicht nur dazu verwendet, den Einfluß des Verhaltens der Aufmerksamkeit zu den drei Sinnesgebieten für einen einzigen Zeitpunkt zu bestimmen, sondern, wie schon der Titel der Arbeit

1) Im Hauptstromkreis des Tasthebels und der Stimmgabel G_1 befand sich außerdem noch je ein Ampèremeter Z_1 und Z_2, in demjenigen des Telephons, ebenfalls außerhalb der Nebenschlußstelle, der Rheostat R_1.

2) Hierbei wurde der Strom zunächst nach dem Stiel des Fallhammers selbst geleitet, von wo er am Schluß der Fallzeit wieder direkt zur unteren Klemme K_3 gelangte, sobald der Hammerkopf den unteren Kontakthebel berührte. Der Schluß des Stromzweiges am Anfang, d. h. bis zum Beginn der kurzdauernden Schwächung, war in der auch sonst bei diesem Apparate üblichen Weise bei K_2 hergestellt, bis die Nase des Kontaktes nach unten gedrückt wurde.

3) Die Schaltung ist aus der Figur bei G_1 zu ersehen. Die Gabel ging besonders konstant, da die Funkenbildung an dem Gabelkontakt so viel als möglich reduziert war. Die Schwingung wurde ausschließlich durch die kleine Schwächung des Elektromagneten aufrecht erhalten, die durch die Herstellung eines Nebenschlusses bei der Annäherung

von O. Klemm sagt, zur Beantwortung der S. 317 genannten Frage, wie die Auffassungsverhältnisse sich während einer gewissen Zeitstrecke änderten, wobei im allgemeinen eine Strecke von 15 Sek., in einer Gruppe von Versuchen aber auch eine solche von 30 Sek. untersucht wurde. Ähnlich wie bei Versuchen, die bereits Bertels in seiner S. 315 genannten Dissertation erwähnt, und wie sie seitdem auch am Leipziger Institut von W. Specht in größerem Umfange ausgeführt wurden [1]), war hierbei die Aufmerksamkeit über diese ganze Zeitstrecke möglichst gleichmäßig „verteilt", d. h. die V.-P. wußte nicht im voraus, in welchem Zeitpunkt die Veränderung eintreten sollte, und bei gewissen Gruppen der Versuche von Klemm nun außerdem auch nicht, auf welchem der drei Sinnesgebiete. Damit die Ausgangsbedingungen für die Aufmerksamkeitsänderungen immer recht gleichartig ausfielen, unterbrach die V.-P., sobald sie zu einer möglichst kontinuierlichen Beachtung des Reizfeldes während einer längeren Zeit bereit war, durch ein ihre Haltung nicht weiter störendes Anblasen eines Schallschlüssels (vgl. § 81, b) den Kontakt eines Stromkreises, der im Zimmer des Experimentators das Pendel einer Baltzarschen Kontaktuhr bisher festhielt. Nachdem so diese Uhr zunächst in Gang gebracht war, zählte nunmehr der Experimentator das Intervall in Sekunden weiter ab, nach welchem er, durch Aufhebung eines den Uhrkontakt umgehenden Nebenschlusses, den Fall des Pflügerschen Hammers bzw. die von diesem ausgelöste Veränderung des Reizes eintreten ließ. Die V.-P. gab nach der Erkennung des Reizes sogleich ein bestimmtes Klingelsignal, das je nach dem Sinnesgebiete variierte, oder antwortete auf Befragung, daß sie nichts, oder wenigstens nichts Sicheres erkannt habe, wobei im Falle der Unsicherheit auch das Gebiet zu bezeichnen war. Es wurde nun unwissentlich zwischen den nach Sekunden abgestuften Intervallen (vom Beginn der neuen Aufmerksamkeitseinstellung bis zur Veränderung) in zufälliger Reihenfolge gewechselt, bis schließlich alle Intervalle gleich oft mit bestimmten Veränderungen vorgekommen waren. Zur Ableitung mittlerer Schwellenwerte hätte natürlich für jedes von diesen Intervallen eine ganze Reihe von Reizstufen mit einer gewissen Häufigkeit wiederholt werden müssen, wenn über das Verteilungsgesetz der Schwellenschwankungen in den einzelnen Intervallen keine Voraussetzungen zu machen waren. Da es aber zunächst nur darauf ankam, zu sehen, ob die Zu- und Abnahme der Schwellen in der Zeit überhaupt gewisse Regelmäßigkeiten erkennen lasse, begnügte sich Klemm mit der Ableitung der rel. Häufigkeiten der Erkennung bei einigen wenigen positiven und negativen Veränderungen. Bei gleichzeitiger Einbeziehung mehrerer Sinnesgebiete wurde zugleich die Konzentration der

---

der Gabelbranchen an den Magneten erfolgte. Dabei war der Gang bei einem empirisch aufgefundenen Verhältnis der Widerstände am konstantesten. Die Amplitude erhöhte sich nur für einen Moment, wenn der soeben genannte, durch das Zimmer des Experimentators geleitete Nebenschluß, der auch den Widerstand W_a enthielt, durch die oben erwähnte, W_v enthaltende Nebenschließung mittelst des Pflügerschen Fallhammers verstärkt wurde, weil nunmehr der Magnetismus in dem Umkehrpunkt der Gabelschwingung, in dem er nur dämpfend wirkte, stärker als sonst vermindert wurde.

1) Über die Methode und die Ergebnisse vgl. Wirth, Experimentelle Analyse der Bewußtseinsphänomene 1908, S. 259. Die Versuche von Bertels und Specht bezogen sich jedoch nur auf den Gesichtssinn.

Aufmerksamkeit auf je einen der gleichzeitig dargebotenen Reize systematisch variiert. Bestimmtere Gesetzmäßigkeiten bezüglich des Verlaufes, die mehr sind als die Tatsache von Oszillationen überhaupt, ließen sich aber natürlich erst feststellen, nachdem die Zeitkurve der rel. Häufigkeiten im ganzen wiederholt unter möglichst ähnlichen Bedingungen abgeleitet worden ist[1]).

Eine interessante Betrachtung widmet Klemm den subjektiv bedingten Urteilen, die sich nicht auf experimentell herbeigeführte Veränderungen bezogen, sondern in irgendeinem ν-ten Intervall vor diesen erfolgten, worauf natürlich der Versuch, der nunmehr zur voraussetzungslosen Ableitung einer Schwelle für das eigentlich beabsichtigte Intervall nicht mehr verwertbar war, sogleich abgebrochen wurde. Diese Fälle, deren Zahl jeweils Z_ν sein mag, entsprechen offenbar einem Urteile g oder f bei der Differenz 0 in dem Zeitpunkte, auf den sie sich beziehen, und können daher mit einem bisweilen üblichen Ausdruck als „Nullfälle" bezeichnet werden. Wenn man diese Nullfälle zur Beurteilung des Verlaufes der Veränderungsauffassung beiziehen will, muß man eine relative Häufigkeit g bzw. k für die Differenz 0 angeben. Hierbei sind aber nun sämtliche Fälle mit zu berücksichtigen, in denen das betreffende Intervall nach Lage der Versuchsreihen auch einen Nullfall hätte ergeben können, d. h. in denen es ebenfalls mit der Veränderung 0 passiert wurde, ohne daß eine Veränderung gemeldet wurde. Ist m das größte Intervall, in beliebigen Einheiten gemessen, d. h. bei der Abstufung nach Sekunden hier 15 oder 30, und p die Zahl aller Veränderungen jedes Intervalles, so wäre also nach allen mp Versuchen eine spontane Meldung bei dem ν-ten Intervalle außer in den Z_ν auch noch in $(m-\nu)p$ Fällen möglich gewesen. Da aber die Z_ν Fälle bei den mp planmäßigen Versuchen gar nicht mitrechnen, so erhöht sich die Summe aller soeben genannten Möglichkeiten auch noch um $\sum_\nu^m Z$, d. h. um die Summe aller Nullfälle, bei denen das ν-te Intervall vorkam. Daher kann

$$z_\nu = \frac{Z_\nu}{(m-\nu)\,p + \sum_\nu^m Z} \qquad [319]$$

als relative Häufigkeit der Nullfälle betrachtet werden, falls man nur die eindeutige Beziehung dieser Fälle auf bestimmte diskret abgestufte Intervalle gestattet[2]). Unter Voraussetzung des Gaußschen Gesetzes für die beteiligten Zufälligkeiten könnte dann hieraus selbständig wenigstens der Wert sh nach Gl. [271], S. 203 u. Tab. 8 berechnet werden, da $t = h(d-s)$ für die Differenz $d = 0$ einfach zu sh wird. Freilich hat dieses Produkt allein für sich noch nicht viel Wert. Insbesondere fehlt die Voraussetzung dazu, daß seine zeitliche Änderung vorwiegend auf die „Präzision" h der sinnlichen Auffassung bezogen werden könne. Denn hierzu müßte die Schwelle s einfach als an-

1) Ebenso, wie man auf diese Weise die zeitlichen Veränderungen der Schwelle im wachen Zustande rekonstruiert, läßt sich durch eine Ableitung der sog. „Weckschwelle", z. B. für Schall- oder Tastreize, in verschiedenen Zeitpunkten während des Schlafes ein Bild des zeitlichen Verlaufes der sog. „Schlaftiefe" gewinnen. Da aber für einen Überblick über die ganze Zeit des täglichen normalen Schlafes viel größere Zeiträume in Betracht kommen, so muß man sich, wenn man nicht den normalen Verlauf des Schlafes durch mehrmalige Prüfungsversuche in einer Nacht*) stören will, auf größere Intervalle der Zeitabszisse beschränken. Vgl. Wirth, Experimentelle Analyse der Bewußtseinsphänomene, S. 261.

2) Auf diese spezielle Schwierigkeit, die bei jedem Vergleich einer stetigen Verteilung der Urteilsmöglichkeiten in der Zeit mit den Verhältnissen bei der „Konstanzmethode" wiederkehrt, sind wir auch schon oben beim Vergleich der Methode der Selbsteinstellung und der Konstanzmethode gestoßen (vgl. S. 267).

*) Michelson (Untersuchung über die Tiefe des Schlafes, Kraepelin's Psychol. Arb. II, 1897, S. 14) führte in einer Nacht zwei Versuche aus.

nähernd konstant betrachtet werden können, eine Annahme, die jedoch bei der Wahrscheinlichkeit der Schwankung aller Auffassungsbedingungen unzulässig ist[1]).

b) Die sogenannten Aufmerksamkeitsschwankungen.

Während aber nun auf die soeben betrachtete Art die Schwelle höchstens für bestimmte Zeitpunkte rekonstruiert werden kann, gestatten die Methoden zur Untersuchung einer Erscheinung, die unter dem Namen der „Aufmerksamkeitsschwankungen" bekannt ist, die Zu- und Abnahme der Schwelle unmittelbar zu beobachten. Schon Helmholtz hatte an sog. Massonschen Scheiben (vgl. Fig. 25), die, bei rascher Rotation bis zur Verschmelzung der schwarzen Ringsektoren mit dem Weiß des Scheibengrundes, eine Reihe nach außen hin immer hellerer und schließlich vom Grund nicht mehr unterscheidbarer Ringe sehen lassen, Schwankungen der Grenze der Wahrnehmbarkeit dieser Ringe festgestellt. Nachdem aber Urbantschitsch an Geräuschempfindungen (Ticken der Uhr) periodische Schwankungen beobachtet hatte, wurden solche von N. Lange, Münsterberg, A. Lehmann, Eckener u. a. auf allen drei soeben betrachteten Sinnesgebieten aufgefunden. Die Vp. hatte dabei einfach einen physikalisch konstanten, der Schwelle nahekommenden Reiz fortgesetzt möglichst gleichmäßig zu beachten. Da aber der weitere Verlauf der Aufmerksamkeit von dem Rhythmus einer einmal wahrgenommenen Oszillation beeinflußt wird, so dürfen die Erscheinungen, die bei dieser unmittelbaren Wahrnehmung der Schwankungen der Reizschwelle häufig eine gewisse Regelmäßigkeit erkennen ließen, keineswegs zu einer Gesetzmäßigkeit für den Verlauf der Schwelle überhaupt oder einer ihrer wesentlichen Teilbedingungen, wie z. B. der Aufmerksamkeit, verallgemeinert werden. Die speziellen Anregungen zu regelmäßigen Oszillationen der Auffassungsbedingungen werden natürlich noch vermehrt, wenn die V.-P. das scheinbare Auf- und Abschwanken des schwachen

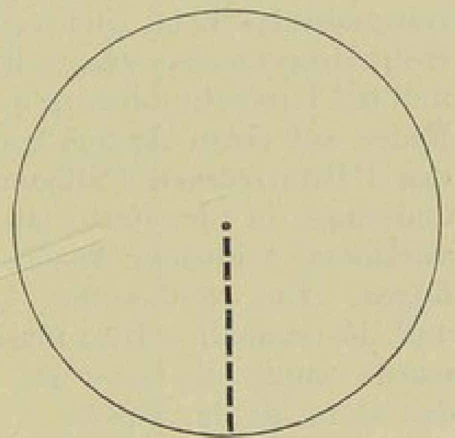


Fig. 25.
Massonsche Scheibe zur Beobachtung sogenannter Aufmerksamkeits-Schwankungen.

1) Richtig ist übrigens, daß die Anzahl der Nullfälle Z_ν bei großem p proportional zur Nummer ν des Intervalles abnehmen müßte, falls die relative Häufigkeit der Überschwelligkeit einer rein subjektiven Veränderung oder kurz eines „Fehlers" für alle Intervalle gleich wäre (was allerdings keineswegs etwa als erfüllt angenommen wird). Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fehler im ν-ten Intervall überschwellig wird, mit f_ν, so findet man durch eine ähnliche Überlegung, wie sie Urban zur Klärung der Urteilsverhältnisse bei der Minimaländerungsmethode anstellte (vgl. S. 280), als Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fehler erst im ν-ten Intervall und nicht schon vorher zu einem Nullfall führte:

$$Z_\nu = (1 - f_2) \ldots . (1 - f_{\nu-1}) \cdot f_\nu . \qquad [320]$$

Bei Gleichheit aller f wird aber die Reihe $f_1, f_2 - f_1 \cdot f_2, f_3 - 2 f_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3, \ldots .$, die sich aus der Berechnung der Produkte nach [320] ergibt, in der Tat ungefähr eine arithmetische. Für $f = 0{,}1$ erhielte man also z. B. $Z_1 = 0{,}1$; $Z_2 = 0{,}09$; $Z_3 = 0{,}0081$ usw. Wie man sieht, ließe sich nach diesem Prinzipe umgekehrt auch unter der allgemeinen Voraussetzung, daß für jedes Intervall ein besonderes f anzusetzen ist, diese Reihe der f-Werte aus der Reihe der beobachteten Z_ν-Werte, bzw. der z_ν berechnen.

Reizes nicht nur einfach zu beobachten, sondern durch diskontinuierliche oder auch nur stetige Handbewegungen zu registrieren hat[1]).

c) Die Beeinflussung des Verlaufes der Auffassungsverhältnisse durch rhythmische Nebenreize.

Dieser zuletzt genannte Einfluß einer wahrgenommenen Oszillation auf den Zeitverlauf der Aufmerksamkeit sowie der Merklichkeitsbedingungen überhaupt läßt sich aber natürlich auch wieder in exakterer Form durch die zuerst genannte Methode der unwissentlichen Variation des Zeitraumes bis zu einer momentanen Veränderung untersuchen. Solche Versuche wurden ebenfalls von Klemm durchgeführt. Er untersuchte den Verlauf der Schwelle für die 82 σ dauernde Helligkeitsveränderung des S. 340 genannten Lampentransparentes beim gleichzeitigen Anhören der rhythmischen Schläge eines Schallhammers, dessen Kopf von einem Elektromagneten festgehalten war und bei Unterbrechung des Stroms durch seine Schwere und den Zug einer Feder auf einen Amboß traf[2]). Hierzu mußte also nur die Unterbrechung des Pflügerschen Fallhammers (vgl. Fig. 24), welche die Helligkeitsveränderung in der oben ausführlich beschriebenen Weise herbeiführte, in variablem zeitlichen Abstand von den Taktschlägen des Schallhammers erfolgen. Die rhythmische Unterbrechung des Schallhammer-Magnetstroms und die einmalige Hinzufügung der Auslösung des Pflügerschen Hammers wurde durch ein schweres Schneidenpendel von großer Trägheit bewirkt, das schon in der S. 343, A. 1 genannten Untersuchung von W. Specht benützt worden war. Es wurde vermittelst einer von Klemm vereinfachten Selbststeuerung elektromagnetisch sehr gleichmäßig im Schwung erhalten und unterbrach hierbei Kontakte, die auf zwei zum Drehpunkt konzentrischen Bügeln aufgesetzt und in ihrem gegenseitigen Abstand beliebig variiert werden konnten[3]). Der eine der Kontakte lag im Stromkreis des Schallhammers, der andere in dem des Pflügerschen Fallhammers. Mit dieser Anordnung untersuchte Klemm die rel. Häufigkeit der Erkennung einer bestimmten

1) Experimentelle Analyse der Bewußtseinsphänomene S. 240ff. (ebenda auch ausführlichere Literaturangaben). Ein Mittelding zwischen dieser stetigen und unmittelbaren Verfolgung des Schwellenverlaufes bei konstantem Reiz einerseits und der vorerwähnten indirekten Rekonstruktion aus Urteilen bei vielen Intervallen, die stets wieder von einem als vergleichbar betrachteten Nullpunkt der Selbstauslösung aus erreicht werden, andererseits ist die direkte Verfolgung der Schwelle durch einen der Schwelle nahestehenden Reiz, dessen Intensität fortgesetzt bis zur jeweiligen Ebenmerklichkeit vermindert bzw. vermehrt wird, je nachdem der Reiz augenblicklich merklich oder unmerklich ist. (Seashore, University of Jowa Stud. in Psych. IV, 1905, S. 46.) Jede Erreichung des Punktes der Ebenmerklichkeit im Verlaufe dieser fortgesetzten Variation liefert also nach einer primitiven Form der Minimaländerungsmethode sogleich eine Ordinate zu der gesuchten Zeitkurve des Schwellenverlaufs, deren Abszissenwert aus der fortgesetzten, zu einer Zeitmarkierung parallelen Registrierung der Einstellung des Reizapparates und der Urteilsabgabe zu entnehmen ist. Freilich wird der resultierende Verlauf hier vor allem von der zufälligen Geschwindigkeit der objektiven Variation wesentlich beeinflußt sein.

2) Dies wurde durch eine etwas andere Montierung der Teile eines großen Schallhammers erreicht (vgl. unten § 65, b, 3, β und Fig. 44).

3) Die Eichung des Pendels konnte durch Aufzeichnung einer Stimmgabelschwingung auf der Platte E erfolgen, die mikrometrisch nach zwei Richtungen eingestellt werden konnte.

Aufhellung für je 5 Zeitlagen in jedem von 5 aufeinanderfolgenden Takten des Schallhammers, also für insgesamt 25 Zeitlagen, von denen jede ca. 50mal

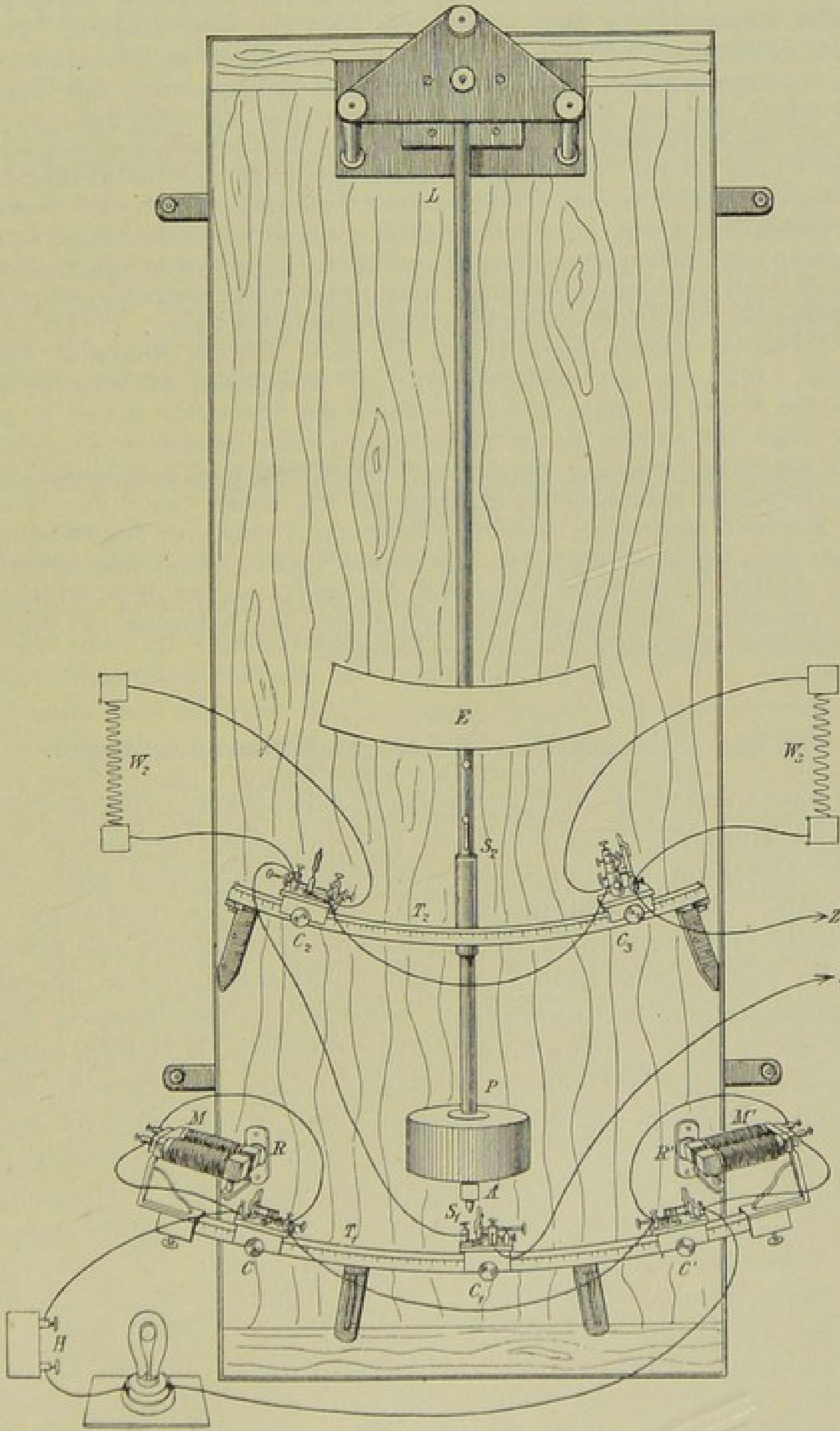


Fig. 26.
Großes **Kontaktpendel** mit doppelter Kontaktschiene, das elektromagnetisch in konstanter Schwingung erhalten wird.

die Veränderung enthielt, was somit bei 2 Beobachtern ca. 1250 Einzelversuche ergab (vgl. Wundt, Psychol. Stud. IV, 6. 1909, S. 505ff.)

Die in Fig. 26 sichtbare Schaltung der drei Kontakte C_1, C_2 und C_3 diente einer erst § 64, b genannten Untersuchung. Auch kamen hier von diesen drei Kontakten nur C_1 und C_3 zur Verwendung. Deren Kontakthebel tragen oben eine federnde Nase, so daß die Auslöser S_1 bzw. S_2 der Pendelstange nur beim Vorbeigang in der einen Richtung den Kontakt unterbrechen, beim Rückschwung aber einfach die Nase zur Seite drücken. Der mit dem Schallhammer verbundene Kontakt C_3 lieferte daher Schläge im Takte einer Doppelschwingung des Pendels. Die Schallintensität konnte übrigens durch den Widerstand W_3 abgestuft werden, der dem Kontakte parallel geschaltet war und daher keine völlige Unterbrechung des Magnetstromes, sondern nur eine Schwächung zustande kommen ließ. Der Kontakt C_1 lag ebenso, wie früher (S. 343) derjenige der Baltzarschen Uhr, im Stromkreis des Haltemagneten des Pflügerschen Fallhammers und war ebenso zunächst bis zu der Pendelschwingung, bei der die Helligkeitsänderung erfolgen sollte, durch eine Nebenschließung mit Unterbrechungstaster gesichert. Dabei konnten die beiden Kontakte C_1 und C_3 auf ihren getrennten Schienen auch genau unter einander gebracht werden, so daß Prüfungsreiz und Schall auch gleichzeitig auszulösen waren. Die Dauerschwingung des Pendels wurde durch C und C′, zwei ähnliche Kontakte wie C_1, aufrecht erhalten. Wie aus der Schaltung Fig. 26 zu ersehen ist, erhalten die großen Doppelmagneten M und M′, deren Polschule durch die Schrauben R und R′ genau symmetrisch zur Lage des Ankers A der Pendelstange beim Durchgang eingestellt werden können, nur bei Unterbrechung der kurzschließenden Kontakte C und C′ den bei H mit Lampenwiderstand entnommenen Stadtstrom. Die Nasen von C und C′ stehen nun so, daß der Kontakt nur beim Hinaufschwingen des Pendels zu den Polschulen unterbrochen wird, beim Rückschwung aber geschlossen bleibt. Der kurze Antrieb, der also nur so lange erfolgt, als sich der Auslöser S_1 hinwärts an dem Kontakthebel befindet, genügt bei passender Stromstärke vollständig, um den Schwung mit einer bald erreichten stationären Amplitude aufrecht zu erhalten.

d) Die sogenannten Aufmerksamkeitswanderungen.

Wenn eine solche Rekonstruktion des gleichzeitigen Verlaufs der Schwelle auf mehreren Sinnesgebieten mit einer Abnahme der Schwelle in dem einen Gebiete die Zunahme in einem anderen verbunden zeigen sollte, so könnte dieser Vorgang unter Umständen auch als eine Wanderung der Aufmerksamkeit von dem einen nach dem anderen Gebiete hin gedeutet werden, falls die Selbstbeobachtung mit dieser Auffassungsweise übereinstimmt. Solche „Aufmerksamkeitswanderungen“ sind bereits seit längerer Zeit in der Diskussion der § 53, a genannten Versuche über die Neuauffassung bei einmaliger kurzdauernder Darbietung eines Komplexes zur Sprache gekommen, wobei es sich jedoch um die Wanderungen des „inneren Blickpunkts“ innerhalb des nämlichen Sinnesgebietes, also z. B. innerhalb des Sehfeldes handelt. Ihre systematische Analyse unter den elementarsten Bedingungen gehört aber offenbar schon in den Zusammenhang der hier erörterten Versuche hinein. Nur wären eben hierzu die oben genannten disparaten Reize durch Veränderungen an benachbarten Stellen des nämlichen Sinnesgebietes, z. B. an unmittelbar aneinandergrenzenden Stellen des Sehfeldes, zu ersetzen. Auch werden zur Analyse dieser auf ein kleines Wahrnehmungsfeld beschränkten Verschiebungen der Auffassungsbedingungen die Zeitintervalle noch viel feiner abzustufen und dafür lieber im ganzen nicht weit auszudehnen sein. Denn die Verschiebungen, die innerhalb eines kleinen Bereiches im Verlaufe einer längeren Zeit allein schon durch die unwillkürlichen peripheren Verschiebungen der Sinnesorgane, z. B. durch Augenbewegungen, eintreten, interessieren natürlich weniger als die zentraler bedingten Veränderungen der Schwelle, die z. B. auf optischem Gebiete in einer Zeit unter 100 σ auftreten, in der eine ursprüngliche Fixation noch keine Verschiebung erleiden kann (vgl. § 53, a). Natürlich setzen auch schon die Ablaufsverhältnisse der Empfindungen selbst dieser Analyse eine untere Grenze; da jedoch nach S. Exner bei 0,017 Sek. Zeitdifferenz zwei benachbarte Lichterregungen wenigstens noch als Bewegung von einem Punkte zum andern gesehen werden können, also jedenfalls noch eine zeitliche Differenzierung aufweisen, so wären selbst bei einer Gesamtzeit von nur 100 σ immer noch mindestens 5 unmittelbar benachbarte Punkte mit hinreichend kurzdauernden Reizen hinsichtlich der zeitlichen Differenzierung ihrer Auffassungsbedingungen zu analysieren, falls es nur gelingt, willkürlich oder unter Führung äußerer Reize von einem jeweils vergleichbaren Nullpunkte der Intervallmessung aus tatsächlich immer die nämliche Form der Aufmerksamkeitsbewegung zu wiederholen.

50. Die Konzentration und Verteilung der Aufmerksamkeit auf einzelne abstrakte Merkmale.

Während nun in den von S. 320 an geschilderten Arbeiten immer nur Änderungen des nämlichen Merkmales, d. h. der Intensität, vorgenommen werden, die sich nur an verschiedenen Stellen vollzogen, suchte Mittenzwey[1]) mittelst der Schwellenmethode die ebenfalls schon S. 318 genannte Frage zu beantworten, wie sich die Auffassungsbedingungen für verschiedene Merkmale eines Objektes gestalten, wenn die Beachtung der einzelnen Merkmale modifiziert wird. Dabei beschränkte er sich zunächst wieder auf das optische Gebiet, das vor allem die Variation einzelner Figuren nach Form, Größe, Lage und Helligkeit möglich macht. Er verwendete ausschließlich Kreisflächen, die sich von einem gleichmäßig beleuchteten Hintergrunde in etwas größerer Helligkeit abhoben (Verhältnis ca. 15:4), verzichtete also auf die Variation der Form und veränderte nur die Größe, Lage und Helligkeit dieser Scheiben. Bei einer ersten Versuchsgruppe mit nur einem einzigen Kreis kamen Vergrößerung und Verkleinerung, Lageverschiebungen in vier Hauptrichtungen, sowie Aufhellung und Verdunklung in Betracht. Bei einer zweiten Gruppe mit 6 Kreisen von durchweg etwas verschiedener Größe und Helligkeit, in denen die Verbindung der extensiven und der „prädikativen" Verteilung der Aufmerksamkeit (vgl. S. 318) untersucht werden sollte, wurden Vergrößerungen, Verkleinerungen und Verschiebungen eines Kreises gegen die Nachbarkreise und gegen die Mitte des Komplexes sowie Aufhellungen einzelner Kreise vorgenommen. Um aber die Einflüsse der apperzeptiven Einstellung an etwas gröberen Schwellenwerten um so deutlicher beobachten zu können, wurden hier nicht Veränderungsschwellen, sondern Unterschiedsschwellen nach der bereits S. 320 genannten Methode abgeleitet. Das Objekt, bzw. der Komplex wurde zunächst beliebig oft im Rhythmus von ca. 1 Sek. dargeboten, worauf der Beobachter nach Vollendung der vorgeschriebenen Einstellung seiner Aufmerksamkeit eine einmalige, im nämlichen Takte nachfolgende Exposition des

1) Über abstrahierende Apperzeption, Wundt, Psychol. Stud. II 1907, 5 u. 6, S. 358.

Vergleichsobjektes, bzw. Komplexes auslöste, in der der Kreis (bzw. beim Komplex immer nur einer der 6 Kreise) ausschließlich in einer einzigen Richtung um eine bestimmte Stufe verändert war. Das unmittelbar darnach abgegebene Urteil der V.-P. sollte jedoch stets alle möglichen Veränderungsrichtungen ins Auge fassen. Sämtliche Wahrnehmungen bestanden, wie mit dem obigen Hinweis auf S. 320 rekapituliert wurde, aus kurzdauernden Expositionen, die durch eine rotierende Spaltscheibe (Rotationstachistoskop) beim Durchgang des Spaltes durch die Gesichtslinie stets im gleichen Tempo von 1 Sek. bewirkt wurden.

Bei der ersten Anordnung sah die V.-P. nur das variable Vergleichsobjekt V direkt, während der beliebig wiederholt exponierte Normalkreis N seitlich vom Beobachter angebracht war und nur in einem Spiegel, aber virtuell genau an der nämlichen Stelle wie N gesehen werden konnte.

Dieser rechteckige Spiegel bildete den untersten Teil III der Schlittenscheibe eines Fallapparates, ähnlich dem § 53, a beschriebenem Falltachistoskop, die außerdem noch zwei andere gleich große Abteilungen darüber (I, II und III in Fig. 27[1]) enthielt. Beim Beginne des Versuches befand sich die unterste Abteilung III mit dem Spiegel gerade in der Gesichtslinie. Auf einen Fingerdruck der V.-P. hin rückte dann rasch die mittlere, hier nur aus einem schmalen Rahmen bestehende Abteilung II nach und gestattete einen freien Durchblick nach dem Vergleichsobjekt, aber nur für die eine, unmittelbar folgende Exposition. Denn ohne weiteres Zutun trat bis zum folgenden Durchgang des rotierenden Spaltes durch die Gesichtslinie die oberste, undurchsichtig hellgraue Abteilung I des Schlittens in das Gesichtsfeld. Der einfache Mechanismus dieses stufenweisen Herabfallens des Schlittens, der in Einschnitten der Säulen T, T herabgleiten konnte, ist aus Fig. 27 ersichtlich. Bei der obersten Stellung ruhte die Schlittenscheibe mit einem an ihrem unteren Rande rechts vorne befestigten Stifte auf dem Kopf des um die Achse a_1 etwas nach vorne drehbaren Hebels h_1, bei der mittleren Stellung auf dem Kopf des ebenso nach hinten drehbaren Hebels h_2, bei der untersten fiel der Schlitten einfach auf eine Filzdämpfung des Grundbrettes B auf. Beim Fingerdruck der V.-P. auf einen Reaktionstaster wurde die Schließung des Stromkreises des Elektromagneten M_1 zunächst so weit vorbereitet, daß sie beim kurzdauernden Schlusse eines Schleifkontaktes am Rotationstachistoskop vollständig hergestellt war. In diesem Momente zog M_1 den Hebel h_1 (gegen eine Feder wirkend) zurück und ließ dadurch den Schlitten rasch bis auf h_2 herabfallen. Im Herabfallen wurde der Umschalter U umgestellt, der dann beim nächsten Schluß des genannten Schleifkontaktes den Elektromagneten M_2 ebenso in Tätigkeit versetzte, während die V.-P. den Taster noch niedergedrückt hielt, so daß der zweite Fall des Schlittens erfolgte.[2])

Der Hintergrund der Kreisflächen war nur von vorn beleuchtet, die hellere transparente Kreisfläche selbst sowohl von vorn als auch von rückwärts. Beim Normalobjekt N (Durchmesser 2 cm) war alles konstant; die Kontur des Vergleichs-Kreistransparentes V aber wurde bei dieser ersten Versuchsgruppe mit einem Kreis durch eine in Fig. 28 skizzierte Vorrichtung gebildet. In einer senkrecht stehenden metallenen Grundplatte G war ein größerer Kreis ausgeschnitten, etwas größer als die ganze Fläche, vor die das

1) Die Ausfüllung der beiden Felder II und III in Fig. 27 bezieht sich nur auf die zweite Gruppe.

2) Eine einfachere Anordnung zu ähnlichen Zwecken ohne Spiegel beschrieb ich in der Abh.: Zur Theorie des Bewußtseinsumfanges und seiner Messung, Wundt, Phil. Stud. 20, 1902, S. 639. Eine etwas kompliziertere, aber auch sehr mannigfaltig verwertbare Spiegelvorrichtung zu ähnlichen Zwecken (mit total reflektierenden Prismen) stellte Michotte 1910 in Innsbruck auf dem Kongreß f. exp. Psychologie aus. Vgl. Ber. d. Kongresses, herausgeg. von F. Schumann (Apparatenausstellung beschrieben von Rupp), 1911, S. 287 f. (Vergleichstachistoskop).

Kreistransparent bei allen Lage- und Größeänderungen jemals zu liegen kam. Vor diesem Ausschnitt verdrehte sich konzentrisch die feste Kreisscheibe a, auf der zu beiden Seiten eines länglich-runden Ausschnittes die Schienen t, t befestigt waren, in denen der Schlitten S mit der Irisblende J, die die sichtbare Kontur des Transparentes bestimmte, verschoben werden konnte. Die Irisblende, die Schienen t, t und der Kreisausschnitt waren mit Teilungen versehen, mittelst deren die Größe und die Lageverschiebung des Kreises in $\frac{1}{10}$ mm zu bestimmen waren. Die Helligkeit des V wurde dadurch variiert, daß ein Spiegel einen Teil des Lichtes der Glühlampe, die auch die

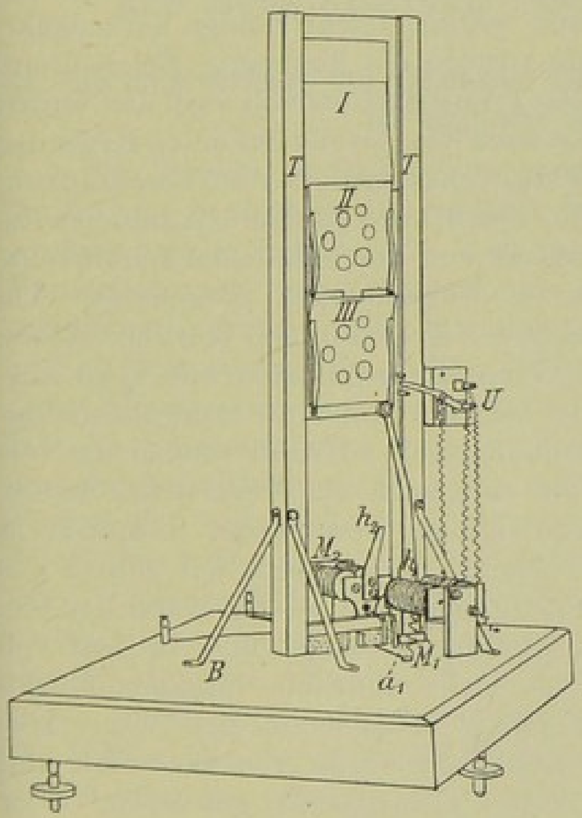


Fig. 27.

Apparat zur Auswechslung des Normal- und Vergleichsobjektes in tachistoskopischen Vergleichsversuchen.

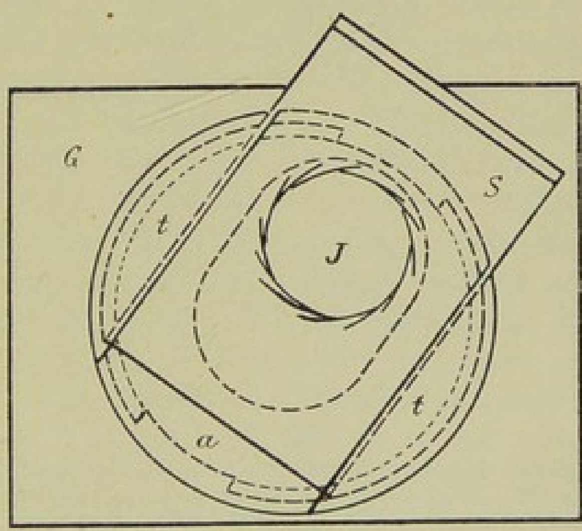


Fig. 28.

Vergleichsobjekt zur Variation der Größe und Lage eines Kreis-Transparentes in K. Mittenzweys Versuchen.

Vorderfläche von N und V sowie die Rückseite von N beleuchtete, aus verschiedener Entfernung von rückwärts auf das Transparent fallen ließ.

Bei der zweiten Gruppe der Versuche mit 6 Kreisflächen wurde dagegen sowohl N als auch V direkt durch den Spalt des in § 53, a genannten Spiegeltachistoskopes beobachtet, das zwischen den Expositionen eine gleichmäßig helle Fläche virtuell in der nämlichen Tiefe wie N und V sehen ließ.[1]) N und V waren hier nämlich selbst auf der Schlittenscheibe des Fallapparates Fig. 27 in III und II übereinander angebracht. Die Objekte bestanden hier einfach in weißen Kartonscheiben, aus welchen die Kreise herausgestanzt waren. Die präzise Führung des Schlittens und des Rahmens bei II, in das die

1) Über die optischen Vorsichtsmaßregeln bei dieser Verwendung des Apparates vgl. Mittenzwey a. a. O. S. 448.

rasch auszuwechselnden Vergleichsscheiben eingeschoben wurden, bedingte auch hierbei eine sehr genaue Korrespondenz der Lageverhältnisse bei dem Nachrücken von Abteilung II mit V an die Stelle von III mit N. (Die Abteilung I wurde von einer einfachen weißen Kartonscheibe gebildet.) Natürlich mußte unter diesen Umständen für sämtliche einzelne Fälle der Größen- und Lageänderung je eine besondere Karte hergestellt werden, weshalb auf allen Karten ein Schema (s. Fig. 29) vorgedruckt worden war, nach welchem die jeweils gewünschte Variante des Normalkomplexes mittelst eines Satzes genau gearbeiteter Lochstanzen, die in dem erforderlichen Bereiche nach halben Millimetern abgestuft waren, leicht richtig herausgearbeitet werden konnte. Auch hier wurde sowohl die konstante Beleuchtung des Transparentes von vorn und hinten als auch das jeweils auf einen Kreis des Vergleichskomplexes zu beschränkende, abstufbare Zusatzlicht mittelst Reflexion von der nämlichen Lichtquelle, einer Bogenlampe, genommen. Da aber die Kreise in den Kartonscheiben einfach herausgestanzt waren, so wurde hier die konstante Ausgangshelligkeit sämtlicher Kreise sowohl im Normal- als auch im Vergleichskomplex von einem besonderen Transparent bestimmt, das unmittelbar hinter der Schlittenscheibe in der Höhe der Gesichtslinie befestigt und in den von den sechs Kreisen eingenommenen Flächen verschieden hell war. Das Zusatzlicht wurde von rückwärts auf dieses Transparent geworfen, u. z. durch einen kleinen Spiegel, der auf einer Schiene in verschiedene Entfernung gebracht und außerdem durch ein Kugelgelenk in verschiedene Richtung gedreht werden konnte. Die räumliche Beschränkung auf je einen einzigen Kreis geschah durch ein näher bei dem festen Transparent befindliches verstellbares Diaphragma, die zeitliche Begrenzung der Zusatzhelligkeit durch eine zunächst elektromagnetisch vor dem kleinen Spiegel festgehaltene Blende, die gleichzeitig mit dem ersten Weiterrücken des Schlittens abgeworfen wurde.

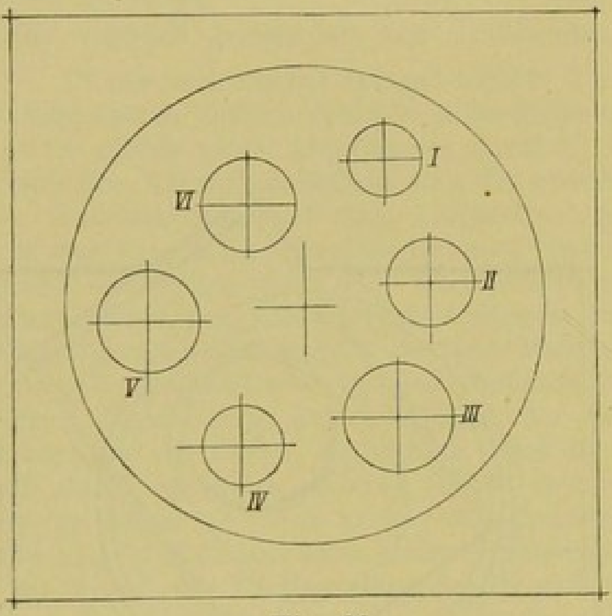


Fig. 29.
Schema des Normalkomplexes in K. Mittenzweys zweiter Anordnung mit sechs Kreisen (Vordruck zum Ausstanzen der variierten Vergleichsscheiben).

Die Untersuchung mit den sechs Kreisen beschränkte sich auf die einzige in Fig. 29 dargestellte Anordnung des Komplexes. Wenn aber überhaupt deutliche Einflüsse der verschiedenen Einstellungen der Aufmerksamkeit vorhanden sind, so müssen sie bei einer hinreichenden Variation dieser Einstellungen auch an einer solchen rein zufällig herausgegriffenen Form des Komplexes zutage treten, bei der die Versuche, die zur Ableitung genauerer Schwellenwerte an mehreren Beobachtern erforderlich sind, noch praktisch durchführbar waren. Zur Schwellenbestimmung benutzte Mittenzwey vorläufig allerdings ebenfalls nur eine Form der Methode der Minimaländerungen, ähnlich wie sie in meinen S. 322 genannten Perimeter-versuchen für die Analyse der extensiven Aufmerksamkeitsverteilung angewendet worden war.

Kapitel 13.

Die Neuauffassung mehrerer gleichzeitiger Reize.

51. Die Untersuchung des Einflusses der Formauffassung auf die Apperzeption der ihr zugrunde liegenden Elemente.

Wie bereits S. 314 näher ausgeführt wurde, ist auch die gleichzeitige Auffassung mehrerer (kurzdauernder) Eindrücke am exaktesten in der Weise zu untersuchen, daß man die Schwellen für mehrere gleichzeitig dargebotene Veränderungen bzw. Unterschiede abzuleiten sucht. Natürlich nehmen die möglichen Versuchslagen mit der Anzahl der Änderungen, die gleichzeitig aufgefaßt werden sollen, unter Voraussetzung einer bestimmten Menge variabler Einzelreize bzw. Variationsrichtungen bedeutend zu. Denn es sind manche Kombinationen von Veränderungen der nämlichen Stellen und in der gleichen Richtung oft allein schon durch die Größenstufe der einzelnen Variationen bezüglich ihres Gesamteindruckes ganz wesentlich verschieden. Auch hier wird man sich daher vorläufig darauf beschränken müssen, gewisse typische Fälle herauszugreifen, an denen die Wechselwirkungen der gleichzeitigen Veränderungen wenigstens in den Mittelwerten mit einer gewissen Allgemeingültigkeit hervortreten, u. z. sowohl die elementareren Einflüsse einer gegenseitigen Störung oder Miterregung, als auch vor allem die Hilfen, die der gedanklichen Verarbeitung des Wahrgenommenen durch die Auffassung von Formen (Gestaltsqualitäten) auf Grund bestimmter Gruppierungen der Elemente zuteil werden, sowie die charakteristischen Ablenkungen des Urteiles, die aus der assimilativen Einmischung besonders geläufiger und speziell auch bedeutungsvoller Formen dieser Art resultieren. Gerade in dieser letzteren Hinsicht werden die zur Ableitung fruchtbarer Fragestellungen für quantitative Untersuchungen notwendigen Vorüberlegungen durch eine mehr qualitative Betrachtung mit sorgfältigen Selbstbeobachtungen vorbereitet werden müssen. Bezüglich der vielen meist erst teilweise geklärten Streitfragen, die es hierbei an der Hand von empirischem Material noch zu lösen gilt, muß im Rahmen dieser Methodik natürlich auf die spezielle Literatur verwiesen werden, während hier nur ein paar Beispiele wieder mehr nach der rein technischen Seite hin skizziert werden sollen. Zunächst wären offenbar einige der bisher genannten Anordnungen unmittelbar dazu geeignet, die Veränderungen, die in jener ersten Hauptgruppe einstweilen immer nur einzeln dargeboten wurden, in jedem Versuche irgendwie zu kombinieren, so z. B. die S. 333 genannte Anordnung mehrerer Tasthebel, ferner die S. 340 beschriebene mit drei disparaten Reizen oder auch die zuletzt geschilderte Variation der Lage und Größe eines gesehenen Objektes. Einer solchen Weiterentwicklung der zuletzt genannten Arbeit steht nun eine noch nicht veröffentlichte Untersuchung von K. Lohnert am Leipziger psychologischen Institut nahe, in der ein besonders einfaches Beispiel der vorhin erwähnten Formwirkung analysiert wurde, die sich auf die Kombination von gleichzeitigen Veränderungen in wenigstens zwei Hauptrichtungen aufbaut. Auf einer senkrecht vor dem Beobachter aufgestellten weißen Papierfläche, die von zwei seitlich angebrachten elektrischen Glühlampen beschienen ist, leuchtet momentan ein helles Rechteck als Transparent auf, dem in einer passenden Zwischenzeit (ca. 1,1 Sek.) an der nämlichen Stelle ein analoges Vergleichsobjekt nachfolgt, das entweder nur in der Höhe oder nur in der Breite um eine variable Stufe verändert ist, oder in beiden Richtungen zugleich, u. z. bei völliger Unabhängigkeit der beiderseitigen Stufen. Es wurden nun die Schwellen für jede der beiden Veränderungsrichtungen abgeleitet, die sich bei drei verschiedenen Einstellungen der Aufmerksamkeit ergeben: bei spezieller Beachtung der Höhe oder der Breite, oder bei Beachtung der Figur im ganzen. Augenbewegungen von dem in der Mitte der Figur gelegenen Fixationspunkt hinweg waren im Laufe einer einzelnen kurzdauernden Exposition wieder möglichst ausgeschlossen. Dabei fragte es sich vor allem, ob die Schwelle bei einer gleichzeitigen proportionalen Veränderung von Höhe und Breite, bei der die Form des Rechteckes erhalten bleibt, vielleicht größer ausfällt als bei einseitiger Veränderung, trotzdem im letzteren Falle der Flächeninhalt der Figur im ganzen sich weniger ändert.

Ein schematischer Grundriß der Anordnung ist aus Fig. 30 zu ersehen. Die Projektionslampe L (mit dem Widerstand W) beleuchtet bei Freigabe ihres Lichtkegels von rückwärts den Projektionsschirm T, vor dem sich die V.-P. mit dem Reaktionstaster S und den beiden genannten Glühlampen l_1 und l_2 befindet und der während des Versuches von rückwärts sonst kein weiteres Licht erhält. Abgesehen von der kurzdauernden Exposition ist dieser Lichtkegel aber nun von der undurchsichtigen Fläche des mit zwei Haltemagneten m_1 und m_2 versehenen Spaltpendels P_1 abgeschnitten. Drückt dann die V.-P. einmal kurz auf den Reaktionstaster S, so unterbricht sie für einen Augenblick den Stromkreis des Haltemagneten M eines weiteren Pendels P_2, das einfach in einer bifilar an einem Galgen aufgehängten Eisenkugel besteht[1]). Diese trägt unten einen Stift, der beim Passieren der Gleichgewichtslage u. z. hier beim Hin- und Hergang, einen ähnlichen Kontakt C wie die in Fig. 26 abgebildeten (mit federnder Nase) unterbricht, der in dem gemeinsamen Stromkreis für m_1 und m_2 liegt[2]). Nach dem kurzen Druck auf S schwingt also P_2 einmal hin und zum Magneten M zurück und bewirkt dadurch die zwei Expositionen des Transparentes, zwischen denen der hinter dem Schirm auf der Projektionsseite sitzende Experimentator die Veränderung des konturgebenden Schattenobjektes vornimmt. Dieses bestand aus der Metallscheibe R, aus der ein quadratisches Feld von 10×10 cm als äußerste Ausdehnung des Transparentes ausgeschnitten war. Vor diese Öffnung legten sich die Platten zweier Hebelparallelogramme, die an der Scheibe R so befestigt waren, daß sie mit je einem Handgriff unabhängig voneinander zwischen je zwei genau meßbar variablen Widerhalten schnell hin- und hergestellt werden konnten. Die inneren Plattenränder des einen Parallelogrammes gaben die Höhengrenze, diejenigen des anderen die Breitengrenze des transparenten Rechteckes (s. E. Zimmermanns Katalog (L. 20), S. 11 ff). Während der Einstellung der Widerhalte wurde natürlich von rückwärts beleuchtet und das Transparent daher zur Erhaltung der Unwissentlichkeit durch einen Blechschirm verschlossen.

1) Solche einfache Fadenpendel haben sich zur Herstellung der relativ langen Zwischenzeiten zwischen Vorsignal und Hauptreiz oder Normal- und Vergleichsreiz gut bewährt.

2) Sämtliche Stromkreise waren hier an die Stadtleitung angeschlossen, der natürlich für die Pendelmagnetströme ein Glühlampenwiderstand w (Fig. 30) vorgeschaltet war.

52. Die Ableitung der Unterschiedsschwellen für mehrere gleichzeitig dargebotene Paare kurzdauernder Vergleichsreize.

Mit einer einzigen kurzdauernden Exposition eines ähnlichen Transparentes untersucht J. Lorenz z. Z. am nämlichen Institute, wie die Unter-

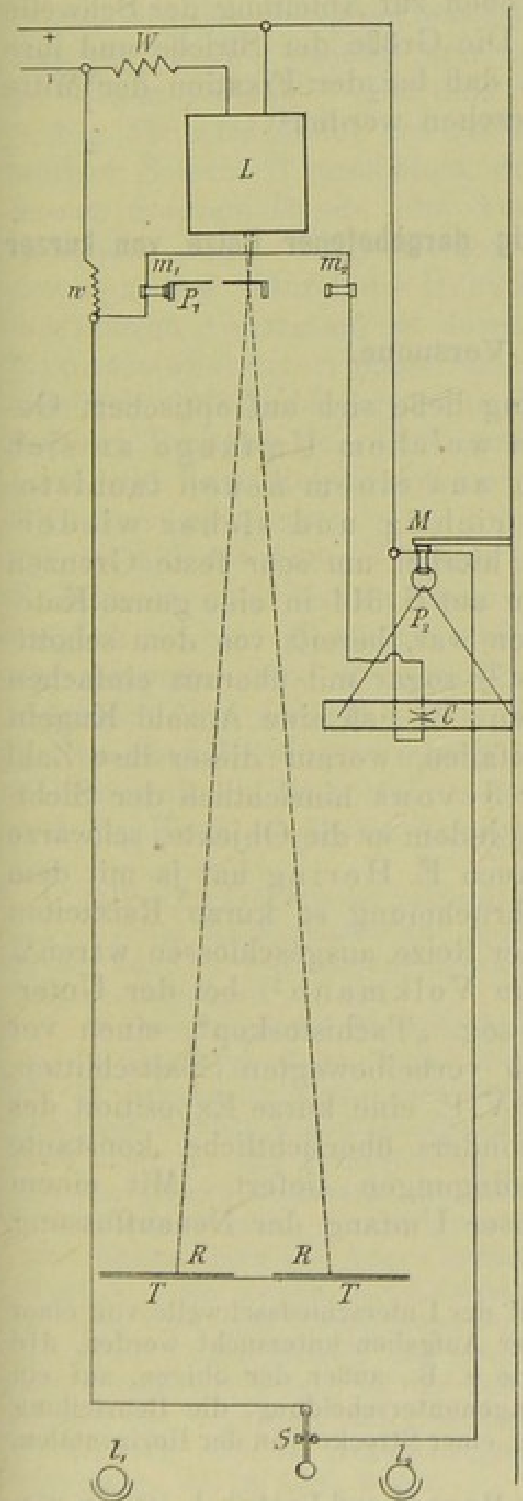


Fig. 30.

Anordnung zur sukzessiven kurzdauernden Exposition zweier optischer Vergleichsobjekte in K. Lohnerts Versuchen.

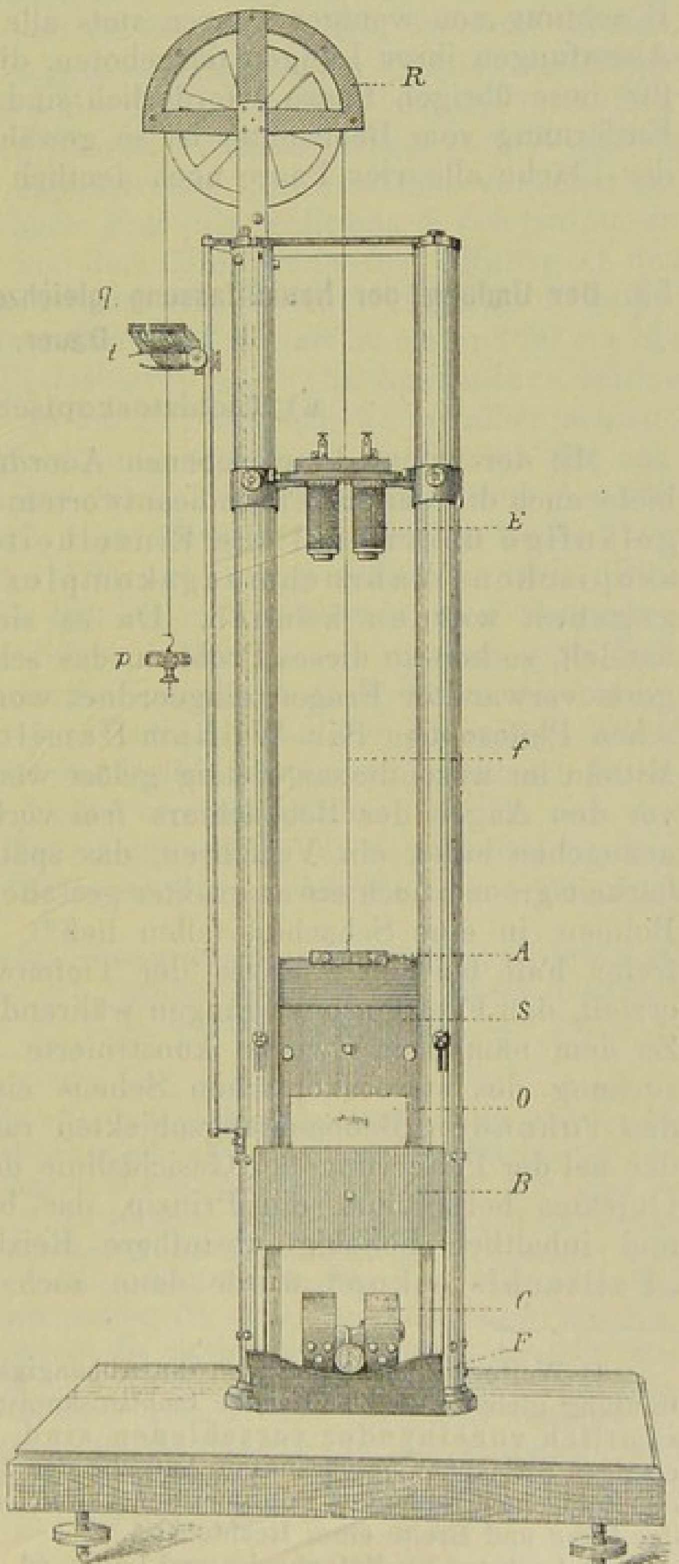


Fig. 31.

Falltachistoskop nach Wundt.

schiedsschwelle für einen Längenunterschied zwischen zwei nahe benachbarten parallelen Strichen von der Anzahl der gleichzeitig zu beurteilenden Strichpaare abhängig ist, u. z. geht er vorläufig bis zu vier Paaren. Um alle optischen Bedingungen bei der Beurteilung einer verschiedenen Anzahl solcher Paare möglichst konstant zu erhalten, werden natürlich auch bei der Beachtung von weniger Paaren stets alle vier Paare, u. z. in verschiedenen Abstufungen ihrer Längen dargeboten, die eben zur Ableitung der Schwelle für diese übrigen Paare erforderlich sind. Die Größe der Striche und ihre Entfernung vom Beobachter ist so gewählt, daß bei der Fixation der Mitte der Fläche alle vier Paare noch deutlich gesehen werden[1]).

53. Der Umfang der Neuauffassung gleichzeitig dargebotener Reize von kurzer Dauer.

a) Tachistoskopische Versuche.

Mit der zuletzt beschriebenen Anordnung ließe sich auf optischem Gebiete auch die weitere Frage beantworten, in welchem Umfange an sich geläufige übermerkliche Einzelheiten aus einem neuen tachistoskopischen Wahrnehmungskomplexe richtig und sicher wiedergegeben werden können. Da es sich hierbei um sehr feste Grenzen handelt, so konnte dieses Problem, das schon auf S. 314 in eine ganze Kategorie verwandter Fragen eingeordnet worden war, bereits von dem schottischen Philosophen Sir William Hamilton[2]) sogar mit überaus einfachen Mitteln im wesentlichen richtig gelöst werden. Er ließ eine Anzahl Kugeln vor den Augen des Beobachters frei vorbeifallen, worauf dieser ihre Zahl anzugeben hatte, ein Verfahren, das später Jevons hinsichtlich der Sichtbarkeitsgrenze noch etwas exakter gestaltete, indem er die Objekte, schwarze Bohnen, in eine Schachtel fallen ließ[3]). Auch E. Hering hat ja mit dem freien Fall bei der Analyse der Tiefenwahrnehmung so kurze Reizzeiten erzielt, daß Fixationsbewegungen während der Reize ausgeschlossen waren[4]). Zu dem nämlichen Zwecke konstruierte nun Volkmann[5]) bei der Untersuchung des stereoskopischen Sehens ein sog. „Tachistoskop", einen vor den ruhenden Beobachtungsobjekten rasch vorbeibewegten Spaltschlitten, der bei der Passierung der Gesichtslinie der V.-P. eine kurze Exposition des Objektes herbeiführt, ein Prinzip, das besonders übersichtliche, konstante und inhaltlich beliebig abstufbare Reizbedingungen liefert. Mit einem „Falltachistoskop" wurde dann auch unser Umfang der Neuauffassung

1) Weiterhin soll dann auch die Abhängigkeit der Unterschiedsschwelle von einer Häufung gleichzeitig zu lösender tachistoskopischer Aufgaben untersucht werden, die sämtlich voneinander verschieden sind, wie z. B., außer der obigen, auf ein einziges Strichpaar beschränkten Aufgabe der Längenunterscheidung, die Beurteilung der Zahl einer Reihe von Punkten, der Abweichung einer Strecke von der Horizontalen, der Höhe und Breite eines Rechteckes.

2) Lectures on Metaphysics and Logic, ed. by Mansel and Veitch I, 1887, S. 254.

3) The Power of Numerical Discrimination, Nature III, 1871, S. 281.

4) Reicherts und Du Bois-Reymonds Archiv 1865, S. 153.

5) Sitzungsber. der K. sächs. Ges. der Wiss. 1859, S. 90.

von Cattell zum ersten Male in exakterer Weise bestimmt[1]). Wenn die Wirkung der kurzdauernden Exposition genau festgelegt sein soll, muß freilich dem Auge wenigstens bis zur Ankunft des Spaltes vor den Objekten eine ruhende, von der Schlittenbewegung ungestörte Fixationsmarke dargeboten werden. Dann wird die Richtung der Gesichtslinie auch noch während einer Expositionszeit der Objekte von bis zu ca. $^1/_{10}$ Sek. konstant bleiben, da eine etwaige Anregung seitlicher Augenbewegungen zur Fixation auffälliger Randpartien der Objekte erst nach einer „Reaktionszeit" von ca. 0,180 Sek. zu wirken vermag[2]). Bei dem vergrößerter Falltachistoskop nach Wundt[3]) (s. Fig. 31) wird daher vor die zu exponierende Objektscheibe zunächst ein leichter Schirm B geschoben, der beim Fall des Schlittens S von Stiften an dessen unterem Rande erst kurz vor dem Durchgang der Öffnung O des Schlittens rasch weggeschlagen und von einer Fangvorrichtung F aufgenommen wird. Durch die Höhe seiner Säulen (1 m statt 30 cm und 50 cm bei den älteren Apparaten) ist dieses Tachistoskop auch für besonders kurze Expositionszeiten eingerichtet. In der Tat läßt sich die bei allen tachistoskopischen Methoden erstrebte Herauslösung verschiedener Phasen der zentraleren Prozesse des Auffassungsaktes, d. h. der Wiedererkennung der Objekte und ihrer Relationen, so weit versuchen[4]), als auch der Verlauf der Sinneserregung noch eine zeitliche Differenzierung erkennen läßt. Dies scheint auf optischem Gebiete nach den schon S. 348 erwähnten Versuchen S. Exners noch bis zu einer Zeitdifferenz der Reize von etwa 0,017 Sek. möglich zu sein. Natürlich wird es hierbei dann auch noch darauf ankommen, die Adaptation und Reizintensität so zu wählen, daß der Erregungsverlauf möglichst akut ausfällt. Dies dürfte bei Helladaptation und mittleren Intensitäten ohne Blendungswirkung am besten erreicht werden[5]). — Da sich der Fallraum durch Verschieben der Haltemagneten E für den Schlittenanker, und die Kraft sowie die bewegte Masse nach dem Atwoodschen Prinzip[6])

1) Über die Trägheit der Netzhaut und des Sehzentrums, Wundt, Phil. Stud. III, 1886, S. 94.

2) Über die Methoden zur Analyse der Augenbewegungen, vgl. dieses Handbuch dritter Band, 2. Abt., Sinnesphysiologie II, E. B. Hofmann, Raumsinn des Auges — Augenbewegungen. S. 206.

3) Grundzüge der Physiol. Psychol. III[6], 1911, S. 338.

4) Diese von Cattell und Wundt a. a. O. beabsichtigte Analyse, die theoretisch für die Erkennung eigentlicher Wechselwirkungen zwischen wirklich gleichzeitig vorhandenen sinnlichen Auffassungsbedingungen von Wichtigkeit ist (vgl. S. 312), darf jedoch nicht mit der Fragestellung von B. Erdmann und R. Dodge in ihrem Buche „Psychologische Untersuchungen über das Lesen auf experimenteller Grundlage" 1898 verwechselt werden, wieviel man unter den natürlichen Bedingungen des Lesens bei einer Ruhestellung des Auges aufzufassen vermag (in einer sog. „Lesepause", die allerdings im Lesen gerade keine Pause, sondern die eigentliche Arbeitszeit darstellt, also nur eine Pause der Augenbewegung ist). Bei größerer Trägheit des Bewegungsapparates oder Undeutlichkeit der Zeichen u. dergl. könnte diese Lesepause natürlich im Mittel noch viel länger als die Zeit von ca. 0,1 Sek. dauern, auf die Erdmann und Dodge die Exposition des Lesemateriales einschränkten. Vgl. auch dieselben, Zur Erläuterung unserer tachistoskopischen Versuche. Zeitschr. f. Psychol. u. Phys. der Sinnesorg., Bd. 22, 1900, S. 241.

5) Vgl. Wundt, Zur Kritik tachistoskopischer Versuche. Phil. Stud. XV, 1900, S. 287.

6) An dem über die Rolle R laufenden Faden hängt das variable Gegengewicht p, das außerdem bei entsprechender Einstellung des Trägers t das Balanciergewicht q mitnehmen kann.

abstufen lassen, so ist die Expositionszeit am Wundtschen Falltachistoskop zugleich in weiten Grenzen variierbar[1]).

Freilich sind bei diesem Vorbeiwandern eines Schlittenspaltes O unmittelbar vor dem Objekt außer der sog. „reinen Expositionszeit", in der alle Objektteile gleichzeitig sichtbar sind, stets zwei „schädliche" Zeiten vorhanden, während deren das Objekt erst allmählich abgedeckt bzw. wieder verhüllt wird. Bei einer schnellen Schlittenbewegung[2]) läßt sich allerdings für eine bestimmte Gesamtzeit der Exposition der Spalt so breit machen, daß diese schädlichen Zeiten im Vergleich zur reinen relativ klein werden, zumal wenn es sich nur um die Auffassung einer schmalen Horizontalzeile

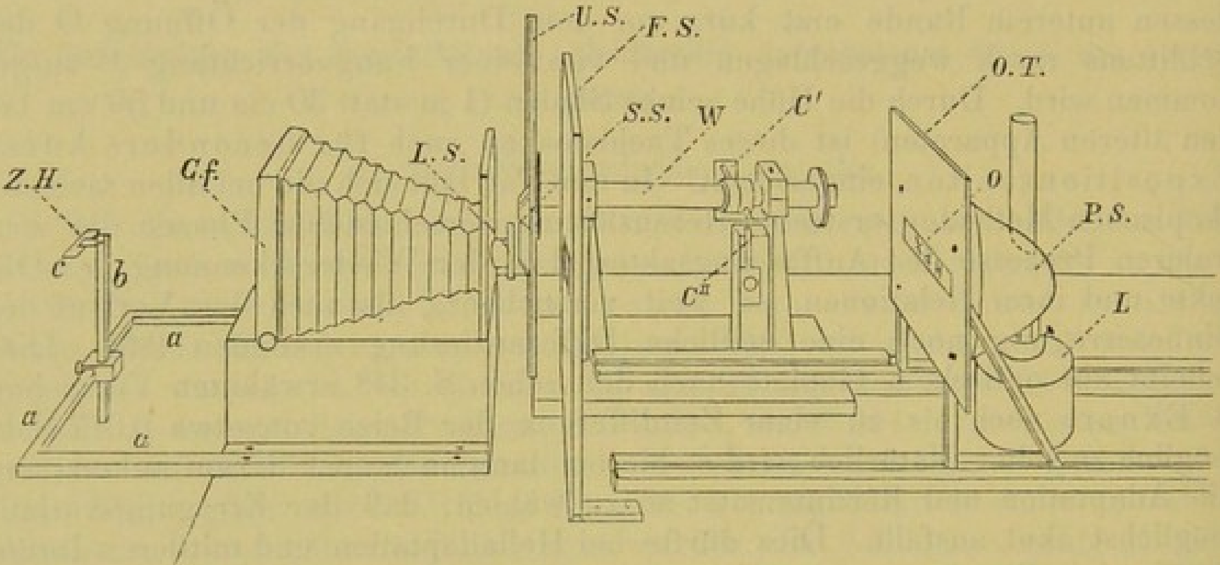


Fig. 32.
Projektionstachistoskop nach B. Erdmann und R. Dodge.

handelt. Dennoch ist methodisch eine Expositionsweise vollkommener, wenn sie zu den bisher genannten Möglichkeiten noch ein gleichzeitiges Auftreten und Verschwinden aller Teile des Momentaneindruckes hinzufügt, wie es bei dem Projektionstachistoskop von Erdmann und Dodge bis zu Expositionszeiten von Bruchteilen einer Tausendstelsekunde erreicht war[3]) (s. Fig. 32). Die V.-P., deren Kopf durch den an den Stäben a und b mehr-

1) Die Eichung der Expositionszeit für irgendeinen Objektpunkt, z. B. die zu fixierende Stelle, geschieht am besten graphisch, indem man über der Öffnung O des Schlittens ein Papier aufzieht, dieses berußt und im Herabfallen mittelst einer Schreibstimmgabel oder eines Federsignales von bekannter Schwingungszahl beschreiben läßt, nachdem die Schreibspitze in die Höhe des Fixationspunktes gebracht ist.

2) Bei dem jetzigen Modell des Falltachistoskopes wird dabei freilich das störende Geräusch beim Fall des Schlittens in die Dämpfungsfedern C noch vermehrt, ein Nachteil. der übrigens nicht im Prinzip des Fallapparates als solchen liegt, sondern durch eine freie Auslaufsbewegung des Schlittens nötigenfalls zu beseitigen wäre.

3) Über das Lesen, S. 94 ff. Über einen ursprünglich zur Analyse des Empfindungsverlaufes verwendeten Apparat von G. Martius, der ebenfalls sehr kurze Expositionszeiten präzis abgrenzen läßt und in neueren Versuchen (s. § 65) auch zum Studium höherer physischer Prozesse verwendet wurde, vgl. G. Martius, Über die Dauer der Lichtempfindungen, 3. Ein neuer Lichtunterbrechungsapparat (beschrieben von K. Minnemann) (S. 301 ff.) Beiträge zur Psychologie und Philosophie, I, 3. H. 1902, S. 275.

fach verstellbaren Zahnhalter Z. H. mit Beißbrett c fixiert ist, blickt auf die Mattglasplatte (Gesichtsfeld G. f.) einer Auszugskamera, auf die mittelst der Objektivlinse, hinter der sich ein variabler Horizontalspalt L. S. befindet, ein scharfes Bild der Objekte O entworfen werden kann, die, auf Papier gedruckt und auf Mattglasplatten gezogen, von hinten durch eine oder mehrere Lampen L (mit dem parabolischen Scheinwerfer P. S.) beleuchtet werden. Da nun die kurze Dauer der Exposition durch Abschneiden des Projektionslichtkegels hinter der Mattglasplatte und nicht durch Wegnehmen einer Blende vor dem Objekt erzielt wird, so sind hier vor allem auch die Augen der V.-P. von Anfang an genau auf die Expositionsebene akkommodiert, während die Fixation der Blende schon bei einem kleinen Abstande von wenigen mm eine während der Exposition nicht mehr zu korrigierende Unschärfe des Bildes und bei binokularer Beobachtung noch dazu störende Doppelbilder ergibt[1]). Zur Abgrenzung der minimalen Expositionszeiten (Bruchteile von σ)[2]) diente eine von einem Gewichtsmotor betriebene Spaltscheibe U. S., die mit ihrer etwas nach von vorne ausladenden (s. u.) Spaltvorrichtung S. S. unmittelbar hinter dem Linsenspalt L. S. rasch (z. B. 10mal in der Sekunde) vorbeirotierte, während der Fallschlitten F. S. eines Tachistoskopes den Lichtkegel zunächst abblendete und ihn nur für einen einzigen Durchgang des Spaltes S. S. freigab, nachdem er durch die Schließung eines Stromes beim Kontakt C′ bei einer geeigneten Phase der Rotation von U. S. zum Herabfallen gebracht worden war[3]). Die relativ geringe konstante Beleuchtung des Lesefeldes ($^1/_{12}$ der ohnehin nur 0,03 MK betragenden Expositionshelligkeit[4])) war allerdings einem raschen Ablauf der Erregung nicht günstig[5]). Indessen liegen diese Intensitätsverhältnisse nicht im Wesen des Apparates, der bei stärkeren Lichtquellen und eventuellen geringen Modifikationen wegen seiner sonstigen exakten Expositions-

1) Bei dem Wundtschen Falltachistoskop ist diese schädliche Differenz allerdings dadurch sehr verringert, daß die Blende B in der Mitte tellerförmig vertieft ist, wodurch der Fixationspunkt ganz nahe an die Objektebene zurückgeschoben wird.

2) Besonders einfach läßt sich eine Momentanexposition natürlich dadurch erreichen, daß man die im Dunkeln liegenden Objekte mittelst des elektrischen Funkens beleuchtet, welchen schon Dove zu der vielfach tachistoskopisch vorgenommenen Analyse des Tiefensehens verwendet hat. Die Intensitätsverhältnisse sind hierbei allerdings nicht sehr konstant und die gewöhnlich hiermit verbundenen Beobachtungsbedingungen einem akuten Erregungsablaufe nicht gerade günstig. In neueren Versuchen über den Verlauf der Auffassung hat E. Becher von dieser Expositionsweise Gebrauch gemacht. (Experimentelle und kritische Beiträge zur Psycholochie des Lesens bei kurzen Expositionszeiten. Zeitschr. f. Psychol. u. Phys. der S. Bd. 36, 1904, S. 19 (S. 40ff.))

3) Vor dem Kontakt C′ liegt im nämlichen Stromkreis noch ein weiterer Kontakt, der von dem Gewichte des Gewichtsmotors, das vorher auch ein Glockensignal zur Spannung der Aufmerksamkeit auslöst, für eine bestimmte Umdrehung geschlossen wird. Der Kontakt C″ wurde nur zur Auslese des gewünschten Umganges bei der chronographischen Eichung der Expositionszeit benützt.

4) Zu der konstanten Beleuchtung des Gesichtsfeldes G. f. in der Zeit vor und nach der Exposition diente nur das Licht, das von der hinter der Spaltvorrichtung S. S. etwas zurücktretenden weißen Fläche der Rotationsscheibe U. S. durch den Linsenspalt nach allen Stellen der Scheibe G. f. reflektiert wurde (bzw. bei dem unten genannten einfacheren Verfahren mit 0,1 Sek. Expositionszeit von der weißen Fläche des Fallschlittens).

5) Vgl. a. S. 357, A. 4 (Schluß) a. O. und W. Wundt, a. S. 357, A. 5 a. O.

bedingungen sehr wohl auch zu jener S. 348 genannten Analyse der zeitlichen Entwicklung des Auffassungsprozesses zu verwenden wäre.

Dagegen ist die Auslöschung der bedeutungsvollen, z. B. Schriftzeichen bildenden Erregungsdifferenzen durch eine unmittelbar folgende gleichmäßige Aufhellung der ganzen Fläche, die einst Baxt durch Anbringung eines Blendspiegels an dem Helmholtzschen Rotationstachistoskope[1]) in verschiedenen Zeitabständen von der Hauptexposition zu erzielen suchte[2]), keineswegs ein geeigneteres Mittel zur zeitlichen Abgrenzung simultaner Erregungskontraste als die Auswahl passender Helligkeitskontraste innerhalb der Hauptexposition selbst bei günstigen Adaptationsbedingungen, da der intensive „Tuschreiz" stets noch Störungen der geistigen Verarbeitung des Gesehenen mit sich bringt, die sich hierbei überall gerade unter möglichst günstigen Bedingungen soll entwickeln können. Auch ist der von Baxt tatsächlich nachgewiesene Effekt, daß die Auffassungsleistung mit dem Zeitintervall bis zum Störungsreiz zunimmt, nicht nur dem Einfluß dieses Reizes auf die Zeitverhältnisse des aufzufassenden Haupteindruckes, sondern vor allem auch auf die resultierenden Kontraste in diesem selbst zuzuschreiben, dessen Zeiten ja niemals mit den Reizzeiten verwechselt werden dürfen. Unter den von Baxt eingeführten Bedingungen wird sich in einem Stadium der Mischung der Effekte des Haupt- und Störungsreizes einfach eine schlechtere Abhebung der Schrift von dem Hintergrunde ergeben, ähnlich wie sie Hempstead während einer längeren Dauer (5 Sek.) hervorbrachte, indem er unmittelbar vor schwarz auf weiß gezeichneten Figuren eine weiße Scheibe mit einem variablen sektorenförmigen Ausschnitt nach Art eines Farbenmisch-Kreisels rotieren ließ[3]). Auch hierbei ergab sich trotz der langen Zeit eine mit der Herabsetzung des Konturkontrastes zunehmende Verringerung der richtig aufgefaßten Einzelheiten.

In ihren Untersuchungen über den Umfang der Auffassung in einer Lesepause (vgl. S. 357, A. 4) exponierten Erdmann und Dodge dagegen das Lesematerial 0,1 Sek. lang. Hierzu war die rotierende Scheibe U. S. überhaupt unnötig, und kam nur das Falltachistoskop F. S. zur Verwendung.

1) N. Baxt, Über die Zeit, welche nötig ist, damit ein Gesichtseindruck zum Bewußtsein kommt und über die Größe (Extension) der bewußten Wahrnehmung bei einem Gesichtseindrucke von gegebener Dauer, Pflügers Archiv, 4, 1871, S. 325. Der nämliche Apparat war auch von S. Exner zu seiner bekannten erstmaligen Untersuchung des optischen Erregungsanstieges verwendet worden.

2) Eine ähnliche Wirkung ist bei dem Schumannschen Rotationstachistoskop, einem großen in Kugellagern laufenden Rade von ca. 3/4 m Durchmesser mit einem variablen Expositionsspalt in dem 10 cm breiten Blechrand, durch einen 45° gegen die Ebene des Rades geneigten Spiegel zu erzielen. F. Schumann, Die Erkennung von Buchstaben und Worten bei momentaner Beleuchtung. Bericht des I. Kongresses für exper. Psychologie in Gießen 1904, S. 34. Ders., Psychologie des Lesens, Sammelreferat auf dem II. Kongreß f. exp. Psychol. in Würzburg, Bericht 1907, S. 153ff.

3) Hempstead, The perception of visual Form, Am. Journ. of Psychol. XII, 1901, S. 185. Eine ähnliche Verminderung der Zahl von Einzelheiten, die richtig und sicher wiedergegeben werden können, trotz längerer Beobachtungszeit, ergibt sich natürlich auch bei einer Verkleinerung der Objekte bis zur Undeutlichkeit, wie sie L. Loewenfeld zur Analyse der Auffassung von Wortbildern in Analogie zu den Sehschärfemessungen verwendete. (Über zwei Fälle von amnestischer Aphasie nebst Bemerkungen über die zentralen Vorgänge beim Lesen und Schreiben, Deutsche Zeitschr. für Nervenheilkunde II, 1892, S. 1ff.)

Aber auch bei der Messung der psychomechanischen Konstanten des Prozesses der Neuauffassung, die nicht so äußerlich bedingt sind wie der Umfang des in einer Lesepause Gelesenen, ist gerade für die sicherste Konstante, nämlich für den Umfang der freien Wiedergabe nach einem einzelnen Elementarakte der Neuauffassung, keineswegs eine besonders kurze Expositionszeit erforderlich[1]). Es ist notwendig, diese viel allgemeinere Frage nach der Grenze der Neuauffassung (bis zu etwa 7 Einheiten[2])), bei der die Darbietung der einzelnen Komplexelemente während des Auffassungsaktes ohne wesentliche Änderungen des Gesamtumfanges auf das mannigfaltigste wechseln und vor allem auch simultan oder sukzessiv sein darf, von dem viel spezielleren und schwierigeren Problem zu unterscheiden, ob sich ein solcher Auffassungsakt in gesetzmäßiger Weise durch eine sukzessive Neuaufnahme der einzelnen wiederzugebenden Elemente sättigen müsse oder eventuell auch als eine an vielen Stellen zugleich einsetzende Klärung und Sicherung dieser Elemente und ihrer Merkmale entwickeln könne, worüber offenbar nur durch eine möglichst präzise Abstufung der Erregungszeiten zu entscheiden sein wird. Diesen letzteren von Baxt gemeinten, aber noch nicht genügend isolierten Gegenstand der Analyse wollen wir aber hier nicht weiter verfolgen, sondern bleiben beim Versuche einer exakten Lösung der ersten Frage. Da man bei der freien Wiedergabe einer Reihe an sich geläufiger Symbole, wie Buchstaben, Ziffern oder sonstwie bekannter Figuren, stets nur die Hauptform zu behalten braucht und andererseits für die Einzelheiten der Strichelemente jeder Figur auch gar nicht gutstehen kann, falls man nicht seine Aufmerksamkeit auf ein spezielles Element konzentrierte, so wird die Eindeutigkeit der Abgrenzung des Maximalumfangs, bis zu dem eine richtige und sichere Wiedergabe möglich ist, natürlich zunächst von der Präzision der quantitativen Bewertung der Wiedergabe in jedem einzelnen Versuche abhängen. Hierauf kommen wir S. 397 bei der „Trefferzählung“ der Gedächtnisversuche nochmals zurück. Da aber bei Bekanntheit einer Gruppierung von Elementen, z. B. eines Wortbildes, einer Jahrzahl, auch die ganze Gruppe selbst als „geläufige Einheit“ in den Umfang der Neuauffassung eingehen kann, so wird insbesondere die Wiedergabe sinnvoller Kombinationen von Buchstaben und Worten, aber auch schon die Reproduktion beliebiger, leicht an sinnvolle Gruppen anklingender Elemente überhaupt zur Bestimmung der Konstanten der Neuauffassung weniger geeignet sein[3]) als z. B. die Abschätzung einer tachistoskopisch dargebotenen

1) Vgl. Wirth, Experimentelle Analyse der Bewußtseinsphänomene 1908, S. 68ff.

2) Vgl. auch Ebert und Meumann, Über einige Grundfragen der Psychologie der Übungsphänomene im Bereiche des Gedächtnisses, Arch. f. d. ges. Psychol. IV, 1905, S. 1 (S. 15).

3) Die quantitative Abschätzung dessen, was von individuell verschiedenen Elementen wiedergegeben werden kann, kompliziert sich noch mehr, wenn gleichzeitig mehrere Merkmale jedes Elementes in Frage kommen. So ließ Külpe regelmäßige und unregelmäßige Figuren aus vier dreibuchstabigen Silben von verschiedener Farbe (rot, grün, violett, schwarz) tachistoskopisch beobachten und darauf nach den vier Gesichtspunkten der Art und Anzahl der Elemente, der Figur des Ganzen und der Silbenfarbe beschreiben. (O. Külpe, Versuche über Abstraktion, Bericht über den I. Kon-

Anzahl gleichartiger Elemente, z. B. von Strichen, die aus der Gesamtvorstellung des Wahrgenommenen heraus offenbar nur bis zum nämlichen Umfange richtig und sicher möglich ist[1]). Da bei völlig gleichartigen Elementen die wiedergegebene Zahl hierbei außerdem ein in allen Versuchen vergleichbar abgestuftes Maß der jeweiligen Auffassungsleistung an die Hand gibt, so lassen sich hier nach der „Methode der mittleren Fehler" in den Werten des Präzisionsmaßes $\frac{1}{M\sqrt{2}}$ und des sog. „konstanten Fehlers" (Totalfehlers) (vgl. S. 264) auch allgemeingültigere Anhaltspunkte zur Definition der gesuchten Umfangskonstanten gewinnen. Denn einerseits lassen die Schwankungen der Aufmerksamkeit oft auch bei relativ wenig Elementen noch Fehler vorkommen, und andererseits ist auch beliebig weit über den Umfang des im allgemeinen richtig und sicher reproduzierbaren Komplexes hinaus nach dem allgemeinen Vergleichsprinzip für Bewußtseinsinhalte überhaupt eine wenigstens im Mittel nicht allzu falsche Schätzung möglich, weil die Striche eben auch bei viel größerer Zahl doch gleichzeitig im bewußten Sehfeld irgendwie vertreten waren, wenn sie nur überhaupt groß genug waren und sich vom Hintergrund genügend abhoben. Bis zu dem hier gesuchten „Umfange" fällt nur eben diese Variations- und Fehlerkurve in Abhängigkeit von der jeweils abzuschätzenden Zahl wenigstens im wesentlichen mit der Abszissenachse zusammen. Wenn man sich also nicht auf ein bestimmtes Minimalmaß einer mittleren Variation und eines konstanten Fehlers einigt, das man für die Reproduktion noch zulassen will, wird man auch für die Angabe der hier gesuchten Konstanten keine völlig eindeutigen Voraussetzungen haben[2]).

Manche methodische Einschränkung, die man bisweilen der tachistoskopischen Analyse im allgemeinen auferlegen wollte, z. B. daß sie sich nur auf Objekte des deutlichsten Sehens beziehen solle, daß man mit genügender Aufmerksamkeitsspannung beobachten müsse, bezogen sich nur auf das Spezialproblem, den maximalen Umfang der Neuauffassung an möglichst fein differenziertem Lesematerial zu sättigen. Es gibt aber natürlich mancherlei psychologisch interessante Probleme, zu deren Lösung an sich nicht weniger vollkommene tachistoskopische Experimente mit Verteilung der Aufmerksamkeit auf eine größere Fläche u. dgl. notwendig werden, wie wir schon in den früheren Paragraphen dieses Abschnittes gesehen haben. Die Deutlichkeit des Bildes bei kurzdauernden Expositionen ist übrigens von so vielen Momenten abhängig, daß man überall da, wo an die sinnliche Grund-

greß für experimentelle Psychologie in Gießen, 1904, S. 56.) Solche Versuche bilden also auf dieser Komplikationsstufe der Auffassung das Analogon zu der S. 349 beschriebenen Untersuchung Mittenzweys.

1) Vgl. Cattell a. S. 357, A. 1 a. O.

2) Eine Übersicht über diese Abhängigkeit der mittl. Var. D und des Totalfehlers c von der Zahl tachistoskopischer Objekte, auf die schon Jevons (s. S. 356, A. 3) geführt wurde, gibt Cattell a. a. O. Für die Messung der Neuauffassung durch die Zahl richtig wiedergegebener Symbole von bekannter Form (Ziffern), bei der die quantitative Bestimmung unserer Konstanten nach dem oben Gesagten auf größere Schwierigkeiten stößt, geben z. B. Ebert und Meumann (s. S. 361, A. 2) die Fortsetzung jenseits der Grenze dieses sog. „Umfangs" der Neuauffassung in der Zuordnung der nach der „Treffermethode" (vgl. § 61,a) geschätzten Fehlerprozente zu der Gesamtzahl der Elemente.

lage der Auffassung irgendwelche speziellere Anforderungen gestellt werden, zunächst im wissentlichen Verfahren bei ausdrücklicher Konzentration der Aufmerksamkeit auf die kritische Stelle rein empirisch ausprobieren muß, ob die gewünschten Merkmale der Empfindungen, z. B. die Lesbarkeit eines Buchstaben, tatsächlich vorhanden sind, ein Prinzip, das ganz allgemein gilt, also auch für kurzdauernde Darbietungen auf anderen Sinnesgebieten, die deutlichen Kontrasten der Erregungen in bestimmten Hinsichten oft noch viel weniger günstig sind, als es bei der Gesichtswahrnehmung selbst in parazentralen Regionen des Sehfeldes bei genügender Größe der Objekte noch immer möglich ist.

Bei allen derartigen Versuchen ist das Spiegelprinzip besonders vielseitig zu verwerten, das ja auch schon bei den S. 350 und S. 360 genannten Anordnungen vorkam. Es läßt ein virtuelles Bild von Objekten, die nicht in der Gesichtslinie gelegen sind, in diese an Stelle der direkt

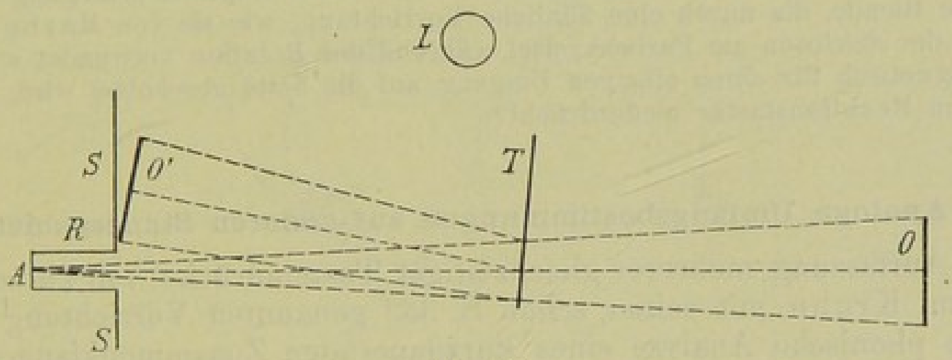


Fig. 33.
Grundriß der Anordnung des Spiegeltachistoskops.

gesehenen Objekte einführen, wenn nur der Spiegel in die Gesichtslinie tritt. Dies kann entweder außerhalb der Hauptexposition geschehen, als einfache Verdeckung vorher und nachher, als eine von dem Hauptkomplex beliebig verschiedene Vorbereitung, als Auslöschung und dergl., oder es kann die Hauptexposition selbst bilden. Bei Vergleichsversuchen kann auch das virtuelle Bild den einen, das direkt gesehene Objekt den anderen Vergleichsreiz darstellen. Selbst bei seiner einfachsten Verwendung zur einmaligen Exposition eines nachträglich wiederzugebenden Komplexes, also bei der hier behandelten Aufgabe, bringt das „Spiegeltachistoskop" den auch am Projektionstachistoskop anerkannten Vorteil mit sich, daß die V.-P. auch bei binokularer Beobachtung auf die Hauptexposition scharf und ohne Doppelbildzerlegung akkommodieren kann.

Blickt z. B. bei einer Anordnung wie in Fig. 33 das Auge von A aus durch ein innen geschwärztes Rohr oder Binocle und den Schirm S in der Richtung nach O, so sieht es bei richtiger Stellung des Spiegels T ein seitlich an dem Schirme gelegenes Flächenstück O′ genau in der Fläche O hinter dem Spiegel. Ist nun an einer zunächst nicht in der Gesichtslinie gelegenen Stelle des Spiegels dessen Belag abgelöst, so wird eine rasche Verschiebung des Spiegels in der nämlichen Ebene, bei der diese der Öffnung O des Falltachistoskop-Schlittens Fig. 31 entsprechende belegfreie Stelle die Gesichtslinie passiert, ein bei O stehendes Objekt genau in der Akkommodationsebene kurzdauernd exponieren. Bei den erwähnten einfachen tachistoskopischen Versuchen wäre O′ natürlich nur gleichförmig weiß oder grau. Statt dessen könnte hier aber auch ein (spiegelbildlicher) Kontredruck des Expositionsobjektes angebracht sein, der bei feiner Einstellung und passender Stellung der Lichtquelle L während der Vorbeibewegung des Spiegelspaltes überhaupt keine merkliche Veränderung wahrnehmen läßt. Bei systematischer Abstufung eines Unterschiedes in O, wie bei Versuchen zur Ableitung von Unterschiedsschwellen, wären also hiermit z. B. auch Veränderungsschwellen für Komplexe ableitbar. — Zur raschen Verschiebung des hierbei zunächst ruhenden Spiegels empfiehlt sich eine Pendel- oder Fallbewegung. Bei jener muß der Ausschnitt des Belages zu einer möglichst gleichmäßigen Exposition sektorenförmig, bei dieser wie beim Falltachistoskop einfach rechteckig sein. Auch die Rotations-Spiegeltachistoskope meiner Konstruktion sind nunmehr, da sich während der Rotation des Spiegels doch keine absolute Ruhe des Bildes erreichen läßt, ähnlich wie das S. 354 erwähnte Spaltpendel, für eine einmalige kurzdauernde Schwingung eingerichtet, die wenigstens die Hauptzeit der Vorbereitung auf ein dauernd im Spiegel gesehenes Normalobjekt völlig ruhig verlaufen läßt. Bei der einfachsten Verwendung des virtuellen Bildes als eintöniger Ausfüllung vor einer einzigen Hauptexposition kommen dagegen die kleinen, auch bei sorgfältiger Einstellung der Spiegelebene noch übrig bleibenden Bildverschiebungen während der dauernden, durch einen Motor bewirkten Rotation nicht in Betracht. Der hierbei erforderliche Verschluß der belegfreien Stelle bis zum Expositionsumgang geschieht durch eine Blende, die durch eine ähnliche Vorrichtung, wie sie von Marbe zur Veränderung der Sektoren am Farbenkreisel während der Rotation verwendet wurde, u. z. elektromagnetisch für einen einzigen Umgang auf die Seite geschoben wird, wenn die V.-P. einen Reaktionstaster niederdrückt[1]).

b) Analoge Umfangsbestimmungen auf anderen Sinnesgebieten.

Die Auffassung mehrerer gleichzeitiger Tasteindrücke von kurzer Dauer wurde von Krohn mit seiner schon S. 332 genannten Vorrichtung geprüft. Auch die phonische Analyse eines kurzdauernden Zusammenklanges würde leicht mittelst der Telephonanordnung zu untersuchen sein, die oben bei der Auffassung einzelner Tonhöhenänderungen erwähnt wurde, falls die Technik der Erzeugung möglichst reiner Sinusschwingungen in einem elektrischen Stromkreis noch mehr vereinfacht werden könnte. Vorläufig hat man aber zu diesem Zwecke die direkte Röhren-Luftleitung von Tönen der gewöhnlichen Klangquellen für akustische Versuche, also von Stimmgabeln, Flaschen, Zungenpfeifen, zeitlich möglichst präzis zu begrenzen gesucht. So hat schon R. Schulze in das Schalleitungsrohr, durch das der zu analysierende Zusammenklang von Stimmgabeln in das entfernte Zimmer der V.-P. geleitet wurde, einen von einer Pendelvorrichtung betriebenen Hahn gelegt[2]). Auch Stumpf bediente sich dann „nach mancherlei Versuchen auf sehr verschiedenen Wegen“ dieses Hilfsmittels bei einer Nachprüfung der Resultate Schulzes mit Tönen einer Flaschenorgel[3]). Dabei suchte er die phonischen und zeitlichen Verhältnisse dadurch möglichst einfach zu gestalten, daß er ein nicht zu enges, 2 cm weites Rohr von dem Orgelraum geradlinig durch ein mittleres Zimmer in den Raum der V.-P. hindurchführen ließ. Im mittleren Zimmer war der Hahn angebracht, in dessen Kolben sich eine Stange befand,

1) Wundt, Phil. Stud. Bd. XX (Festschrift), 1902, S. 659 ff. (die S. 350, A. 2 a. Abh.). Das Spiegeltachistoskop, ebenda, Bd. XVIII, 1903, S. 687 ff. Die obengenannte Vorrichtung zur Spaltöffnung eines Rotationstachistoskopes benützte ich auch schon ohne Spiegel bei meinem großen Rotationstachistoskop in der zuerst genannten Abhandlung.

2) R. Schulze. Über Klanganalyse. Wundt, Phil. Stud. Bd. 14, 1898, S. 471 ff.

3) C. Stumpf. Über das Erkennen von Intervallen und Akkorden bei sehr kurzer Dauer, Zeitschr. f. Psychol. und Physiol. der S. Bd. 27, 1902, S. 148 ff.

die ihn durch ein über eine Rolle laufendes Gewicht geräuschlos so rasch drehte, daß Expositionszeiten von 0,075 bis 0,225 Sek. erzielt wurden. Versieht man diese Stange als ein Pendel P mit Laufgewichten und einem Eisenanker Z wie in nebenstehender Figur 34, so kann man dieses Pendel an dem Elektromagneten M aufhängen und nach seiner Auslösung (eventuell seitens der V.-P. durch den Reaktionstaster T) frei ausschwingen[1]) lassen, wenn nur die Öffnung, die von der Stellung der Bohrung B des Hahnkolbens zu der Röhre B' abhängt, infolge der Abnahme der Amplitude nicht mehr erreicht wird. Einer solchen vielleicht als „Tachistophon" zu bezeichnenden Vorrichtung bediente sich Kafka[2]) mit Vorteil bei Versuchen über den Anstieg der Tonerregung.

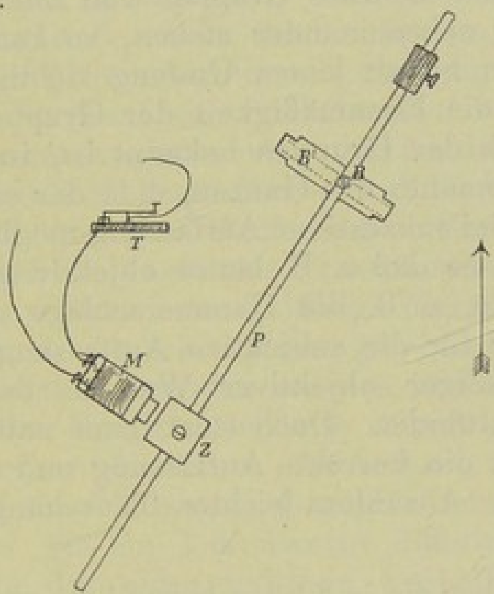


Fig. 34.
Hahnvorrichtung zur kurzdauernden Öffnung einer Schalleitung (Tachistophon).

54. Die Sättigung des Umfanges der Neuauffassung mit sukzessiv wahrgenommenen Reizen.

Schon S. 361 wurde erwähnt, daß dem sog. Umfang der Auffassung eines neuen Komplexes aus geläufigen Elementen eine ganz allgemeine Bedeutung zukommt, da die so bezeichnete Konstante auch bei sukzessiver Darbietung der aufzufassenden Objekte wieder aufgefunden wird. Sie gilt also z. B. auch für den Fall des Behaltens einer einmal gehörten Reihe sinnloser Silben, Ziffern und dergl. Deshalb gehören z. B. auch die Versuche bei rein akustischer Darbietung sinnvoller Lautfolgen hierher, die man mittelst phonographischer Methoden von den Zufälligkeiten des Vorsprechens befreit hat[3]). Die einfachsten geläufigen „Elemente" einer sukzessiven

1) Das Wiederauffangen auf der anderen Seite ist niemals völlig geräuschlos.

2) Kafka, Über das Ansteigen der Tonerregung. Wundt, Psychol. Studien Bd. II, 3. u. 4. H., 1906, S. 256 (S. 285).

3) Hierbei kann man dann die Lautkomplexe auch leicht durch abstufbare Eliminationen variieren, um die Präzision der Auffassung, insbesondere auch bezüglich charakteristischer Fehler, ähnlich wie bei der tachistoskopischen Methode zu prüfen. Vgl. W. Ch. Bagley, The apperception of the spoken sentence; a study in the psychology of Language. Am. Journ. of Psych. XII, 1899/1900, S. 80.

Gliederung sind aber offenbar einzelne gleichförmige Eindrücke von kurzer Dauer, z. B. Schlaggeräusche eines Schallhammers. Nach dem Anhören einer Reihe solcher Schläge kann man, falls das Ganze nicht länger als ein paar Sekunden dauerte, unmittelbar, d. h. ohne diskursives Abzählen während der Aufnahme, einfach aus der resultierenden Gesamtvorstellung heraus, bis zu jenem sog. Umfang der Neuauffassung die Zahl der Einzeleindrücke angeben, selbst wenn die Intervalle zwischen ihnen verschieden waren. Es ist also ein ganz ähnlicher Prozeß wie bei Cattells Versuchen mit der simultanen tachistoskopischen Wahrnehmung einer Reihe von Strichen, wie auch von Cattell selbst angenommen wurde. Trennt man nun bei dem zuletzt genannten Versuch deutlich mehrere Gruppen von Linien ab, innerhalb deren die Striche z. B. enger nebeneinander stehen, so kann man natürlich auch die Zahl der Gruppen bis zu jenem Umfang richtig und sicher angeben, und wenn gleichzeitig die Ebenmäßigkeit der Gruppen erkannt wurde und die Strichzahl innerhalb der Gruppen bekannt ist, indirekt natürlich auch die Zahl der letzten Elemente des Ganzen, d. h. der einzelnen Striche selbst. Etwas Ähnliches wird bei sukzessiver Auffassung möglich, wenn eine Rhythmisierung eintritt, sei es daß z. B. lauter objektiv genau äquidistante und gleichförmige Eindrücke, z. B. die Hammerschläge eines Taktierapparates (s. unten § 65, b, 2), nur für die subjektive Auffassung in Gruppen zerfallen oder daß ein regelmäßiger objektiver Wechsel der Betonung und der einzelnen Intervalle stattfindet. Doch stört dann natürlich die Ausdehnung der ganzen Reihe leicht die korrekte Auffassung und läßt bei jener unmittelbaren Beurteilung ohne Abzählen leichter Täuschungen über die Gesamtzahl aufkommen.

Ähnlich, wie man aber die in § 53, a behandelte unmittelbare Wiedergabe einer optischen Gesamtauffassung von neuen Figurenkomplexen auch durch mehr oder weniger genaues Nachzeichnen vollziehen kann, läßt sich auch hier die Wiedergabe durch freies Nachtaktieren der V.-P. erledigen, bei der die V.-P. auch das Tempo, falls es nur auf die Anzahl der Glieder ankommt, freier variieren kann. Ausführlichere Versuche, die wieder, wie S. 362 erwähnt, nach der Methode der mittleren Fehler anzustellen wären, liegen jedoch über den hierbei erreichbaren Maximalumfang einer im Mittel hinreichend richtigen und sicheren Wiedergabe nicht vor. Die Methode der freien Wiedergabe durch Nachzeichnen u. ä. steht übrigens bereits wieder einer Form des eigentlichen Vergleichsverfahrens näher, bei der der V.-P. fortgesetzt eine Liste der sämtliche n Elemente fertig vorliegt, aus denen die einmal dargebotenen Komplexe in jeweils neuen Gruppen zu je m Gliedern kombiniert werden, wobei n wesentlich größer als m. Beim tachistoskopischen Lesen ist eine solche Unterstützung der Wiedergabe nur deshalb belanglos, weil die Form der Buchstaben und Ziffern an sich bereits hinreichend geläufig ist. Trotz der fortgesetzten Darbietung jener Liste der Komplexelemente bei noch nicht völlig freier Beherrschung des Figurenmaterials vermag man aber jenen Umfang der Neuauffassung so wenig zu überschreiten wie bei nicht unterstützter Wiedergabe geläufiger Buchstaben, Ziffern oder rhythmischer Einheiten. (Vgl. unten § 60, a die Methode von Diehl u. a.)

Jedenfalls erscheint aber die Möglichkeit, die Gesamtvorstellung einer bestimmten Reihe sich bei ihrem Abschluß noch einmal unmittelbar vergegenwärtigen zu können, bevor man sie frei zu entwickeln versucht, immerhin noch als eine günstigere Bedingung einer richtigen und sicheren Wiedergabe des wirklich Gehörten, als wenn man sogleich nach der durch ein Klingelsignal beendigten Reihe im nämlichen Takt zur Beachtung einer neuen Reihe weitergehen muß, die man unter Hingabe an den einmal angeregten Rhythmus mit der vorhergehenden vergleichen soll[1]). Auch bei der unmittelbaren Vergleichung zweier neuer tachistoskopischer Komplexe, von denen jeder nur einmal dargeboten wurde, zeigte sich der Umfang derjenigen Einzelelemente aus beiden Komplexen, über die nachträglich noch eine sichere und richtige Auskunft erteilt werden konnte, eher noch unter den Umfang der Neuauffassung bei einmaliger Darbietung heruntergedrückt. Da nun bei der sukzessiven Vergleichung von Taktreihen wenigstens ein wichtiges Moment dieser Bedingungen wiederkehrt, so bin ich dazu geneigt, die tatsächlichen Treffer bei irgendwie längeren Reihen auf die Wiedererkennung einer relativ geringeren Zahl reicherer rhythmischer Einheiten zurückzuführen, als auf die Zunahme des Umfanges der Neuauffassung. Natürlich darf sich mit dem subjektiven Rhythmus keine geläufige Melodisierung irgendwelcher Art verbinden, da ja sonst, wie schon Mach gelegentlich hervorhob, beliebig lange Reihen korrekt verglichen werden könnten, und eine psycho-energetische Konstante als Grenze der Vergleichsleistung so wenig zur Geltung kommen würde wie beim diskursiven Abzählen. Auch wenn Gefühle der Spannung und Lösung an der auf eine Umfangskonstante beschränkten Unterscheidung zweier Reihen, die nur um ein Taktelement differieren, entscheidend mitwirkten, müßten sie in der eigentümlichen Einheitlichkeit und Stetigkeit verlaufen, wie sie eben die bewußte Gesamtvorstellung der Reihe in irgendeiner mehr oder weniger anschaulichen Form, jedenfalls aber eine bewußte Vergegenwärtigung des Anfanges der Reihe voraussetzt. Eine Deutung des Vergleichsurteils nach Abschluß der zweiten Reihe setzt daher jedenfalls zunächst immer sorgfältige Selbstbeobachtungen über die subjektiven Einheitsbildungen innerhalb der rhythmischen Gesamtvorstellung, über indirekte, dem Abzählen nahekommende Hilfen u. dergl. voraus, so daß die Versuche mit deutlicher objektiver Rhythmisierung die Mitwirkung der Untergliederung beim Vergleichsurteil am deutlichsten hervortreten lassen

1) Solche Versuche wurden zuerst von Wundt und Dietze mit einem Metronom ausgeführt, wobei zum ersten Male die Vergleichsmethode zur Feststellung eines sicheren Minimums an Bewußtseinsinhalten verwendet wurde. (Dietze, Untersuchung über den Umfang des Bewußtseins bei regelmäßig aufeinanderfolgenden Schalleindrücken, Wundt, Phil. Stud. II, 188, S. 362ff.) Mit dem unten § 65, b, 2 genannten Kontaktapparat wurden dann ähnliche Versuche von J. Quandt angestellt (Bewußtseinsumfang für regelmäßig gegliederte Gesamtvorstellungen, Wundt, Psychol. Stud. I, 2. 1905, S. 137). Auf eine sehr rasche Folge von Schallreizen war die Vergleichsmethode inzwischen auch von Bolton angewendet worden (Am. Journ. of Psych. 5, S. 294), wobei jedoch ganz besonders die Notwendigkeit hervortritt, die Zahl- von der bloßen Zeit-Vergleichung durch Variation des Tempos in Normal- und Vergleichsreihe zu sondern. Über die Theorie dieser Versuche vgl. ferner Schumann, Zeitschr. f. Psychol. u. Phys. der S. I, 1890 S. 75 und II, 1891, S. 115. Wundt, Physiol. Psychol. III6, 1911, S. 330ff u. 341 und Wirth, a. S. 350, A. 2 a. O. S. 539ff, sowie Experimentelle Analyse der Bewußtseinsphänomene 1908, S. 282ff.

werden. Außerdem hat man aber doch auch ein gewisses objektives Kriterium einer subjektiven Rhythmisierung an der Hand, insofern die Schwellen und Fehler im allgemeinen und insbesondere bei Reihen von einer größeren Länge, als sie eine sichere und richtige Auffassung ermöglicht, von der Art der Zusammensetzung abhängig sein werden.

Daß aber nun bei der Berücksichtigung aller dieser Gesichtspunkte, die eine etwaige Analogie zwischen dem Umfang für die korrekte Auffassung rhythmisierter Reihen und dem „Umfange der Neuauffassung" erst genügend hervortreten lassen, eine solche nicht mehr geleugnet werden kann, gehört schon zu den Ergebnissen der Methode, auf die wir hier nicht einzugehen haben. Jedenfalls besteht eine prinzipielle Übereinstimmung auch noch in der Hinsicht, daß bei einer Überschreitung des Umfanges von Reihenelementen, bei dem wir noch bis auf ein einziges Element (also entweder Einzelreiz oder Taktgruppe) gutstehen können, ebensowenig, wie bei der Angabe der Zahl tachistoskopischer Elemente die Möglichkeit einer unmittelbaren Beurteilung aufhört. Es werden vielmehr auch dann noch bei hinreichenden Differenzen der Gliederzahl (u. z. relativ unabhängig von der absoluten Zeitdauer) sichere und richtige Unterschiedsurteile möglich, falls nur überhaupt eine Gesamtvorstellung der Reihe im ganzen zu bilden versucht worden ist. Unterschiedsschwelle und konstanter Fehler sind dann auch hier die Symptome der speziellen Art, wie die einzelnen Elemente und Gruppen zusammengefaßt worden sind.

55. Die Verarbeitung der Komplexe nach Einzelheiten und inneren Beziehungen bei wiederholten oder länger dauernden Expositionen.

Sollte die einmalige kurzdauernde Darbietung eines Komplexes zunächst möglichst elementare Akte der Neuauffassung heraussondern lassen, so kann weiterhin durch wiederholte Expositionen dieser Art die diskursive Verarbeitung des Ganzen zu einer in allen Teilen klaren und sicheren Gesamtvorstellung verfolgt werden. Da bei der Wiederholung des nämlichen Komplexes allmählich ganze Partialgruppen (z. B. Wortbilder), so geläufig werden, wie es bei der ersten Exposition nur gewisse Elemente desselben (Buchstaben, Ziffern, Striche) waren, so kann schließlich unter Umständen der ganze Komplex noch in den Umfang der sog. Neuauffassung für die inzwischen entstandenen Formqualitäten der Partialgruppen hineinfallen, ein Prozeß, den teilweise schon Cattell (a. S. 357, A. 1 a. O.) verfolgte. Auch bei der S. 349 beschriebenen Untersuchung des Einflusses der Aufmerksamkeitsverteilung auf die Unterschiedsschwelle für einzelne Merkmale (Größe, Lage, Helligkeit) wurde die konstante Ausgangslage der optimalen Beherrschung des „Normalkomplexes" bei einer bestimmten Aufmerksamkeitseinstellung jeweils durch eine beliebige Anzahl (rhythmischer) tachistoskopischer Expositionen erreicht. Dabei erwies sich aber das Bewußtsein der V.-P., daß es sich wirklich um lauter unveränderte Expositionen des nämlichen objektiven Komplexes handle, als eine wichtige subjektive Voraussetzung für die schnelle Herausbildung einer solchen klaren Gesamtvorstellung. Offenbar können dadurch die rein subjektiven Verschiedenheiten, wie kleine Verschiebungen der absoluten Orientierung (bei tachistoskopischen Expositionen z. B. durch Störungen der Fixationslage des Auges) oder Unterschiede des Erregungsverlaufes (Ermüdung, Nachbilder), besser ausgeschieden werden, und die mit der Lebhaftigkeit und Frische direkter Sinneswahrnehmungen angeregten Assoziationen, die bei dem Gedanken an die Möglichkeit objektiver Veränderungen in regellosester Weise von jenen primären Schwankungen der Sinneswahrnehmung beeinflußt werden würden, vollziehen sich umgekehrt gerade im Sinne einer von einer Exposition zur anderen immer kräftigeren Heraushebung des Konstanten.

Dieses Suchen nach unveränderlichen Elementen, das einen wesentlichen Bestandteil der diskursiven Verarbeitung der Wahrnehmungen im Leben überhaupt ausmacht, läßt sich dann aber auch als selbständiger Untersuchungsgegenstand herauslösen, indem man umgekehrt gerade die objektive Änderung von einem Komplex zum anderen überwiegen läßt und die V.-P. anweist, die allen gemeinsamen Elemente herauszufinden. Solche Versuche hat A. A. Grünbaum[1]) durchgeführt, allerdings bei der Hauptmasse ohne tachistoskopische Exposition. Auch hatten die verglichenen Komplexe jederzeit eine verschiedene Lage, da sie simultan dargeboten wurden. Er entwarf auf einen weißen Schirm mittelst eines Projektionsapparates Komplexpaare aus möglichst ungeläufigen Figuren[2]) in der Anordnung von Fig. 35, die mit Tusche auf Pauspapier gezeichnet waren, und ließ sie 3 Sekunden lang beobachten, so daß also während der direkten Sinneswahrnehmung diskursive Vergleichungen kreuz und quer stattfinden konnten. Der schräge Teilungsstrich sollte wenigstens die Hauptrichtung des Vergleiches sichern, da sonst bisweilen nicht einmal so viel behalten war, ob die gleiche Figur im nämlichen oder im anderen Komplex lag[3]). Es wurden Vergleichskomplexe von 2 bis 6 Gliedern verwendet, die aber stets (wissentlich) nur eine Figur gemeinsam hatten, deren Lage innerhalb des

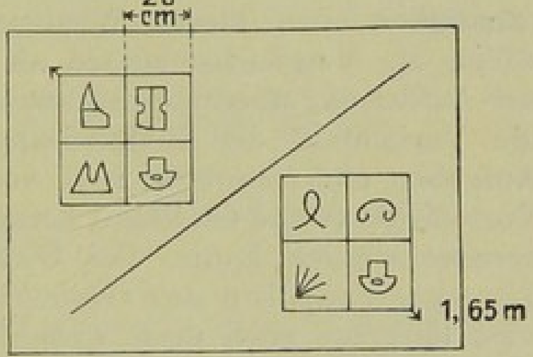


Fig. 35.
Anordnung der beiden Vergleichskomplexe in A. A. Grünbaums Versuchen über die Abstraktion der Gleichheit.

1) A. A. Grünbaum, Über die Abstraktion der Gleichheit, Archiv f. d. ges. Psychologie, XII, 1908, S. 340.

2) Diese schon früher von Moore in ähnlichen Versuchen am Leipziger Institut benützten Figuren sind, auf gummiertes Papier lithographiert, von Haack, Leipzig, Sophienstraße 9, zu beziehen. Sie wurden von Grünbaum durch besondere Versuche mit einfacher Exposition der einen Hälfte des Doppelkomplexes (s. Fig. 35) dann auch noch daraufhin geprüft, ob sie ungefähr gleich auffällig sind (a. a. O. S. 470).

3) Schon Ranschburg hatte festgestellt, daß kurzdauernd dargebotene Zahlen, die neben mehreren verschiedenen auch gleiche Ziffern enthalten, fast regelmäßig falsch aufgefaßt werden, wenn eine gleich große Zahl ohne homogene Elemente noch richtig aufgefaßt wird. Über Hemmungen gleichzeitiger Reizwirkungen, Zeitschrift für Psychol. u. Phys. d. S. 30, 1902, S. 39.

Komplexes möglichst gleichmäßig variiert wurde [1]). Die V.-P. hatte nach der Exposition zunächst zwei gleiche Figuren herauszufinden, dann an zweiter Stelle ungefähr nachzuzeichnen, was sie überhaupt noch in Erinnerung hatte, und schließlich, in einem Übergang von der Methode der freien Wiedergabe zur Vergleichsmethode (s. S. 366), im Hinblick auf den wieder vorgezeigten Komplex anzugeben, was ihr sonst noch bekannt war. Nur gelegentlich wurden auch tachistoskopische Expositionen mittelst eines photographischen Momentverschlusses (33 σ) ausgeführt, bei denen aber zwei gleiche oder ähnliche Figuren aus der nämlichen Liste ebenfalls in einer einzigen Exposition simultan gegeben waren (a. a. O. S. 445).

Diese Versuche dienten nun vor allem auch dem Nachweise, daß sich die Wiedergabe einer Relation der Gleichheit oder Ähnlichkeit relativ unabhängig von derjenigen ihrer einzelnen Fundamente, d. h. der Figuren selbst, vollziehen kann. Schon S. 234 hatten wir auf diese begriffliche Selbständigkeit einer bloßen Wiedergabe der Relation hingewiesen, um derentwillen die Vergleichsmethode als das elementarste Hilfsmittel zur Analyse der Auffassung überhaupt zu betrachten ist. S. 254 war uns dann auch bereits die Variabilität der Relationsapperzeption begegnet, die durch bestimmte Aufgaben und Absichten, z. B. vorwiegend Gleiches aus Verschiedenem oder Verschiedenes aus Gleichem herauszuerkennen, in systematischer Weise vorbereitet werden kann. Bei Grünbaums Versuchen war nun vor allem die Apperzeption der Gleichheit durch die Instruktion bevorzugt; diese wird übrigens auch noch weiterhin durch die Steigerung des Bewußtseinsgrades der zweimal sichtbaren Figur (vgl. a. a. O. S. 430) unterstützt, die an sich auch da vorliegt, wo weder diese Figur selbst noch auch die Relation der Gleichheit wiedergegeben werden kann, und die ja auch bereits in Cattells Versuchen mit wiederholter Exposition des ganzen Komplexes zutage trat. Schon früher hatte ich jedoch das Problem der Auffassung von Relationen überhaupt, sowohl der Gleichheit als auch der Ähnlichkeit und Verschiedenheit, von einem allgemeineren Gesichtspunkt aus experimentell in Angriff genommen, wobei aber durch tachistoskopische Darbietung der einzelnen Vergleichskomplexe und vor allem durch ihre Sukzession in einem bequemen Zeitintervall von ca. 1 Sek., bei denen die Lagen der einzelnen Glieder sich genau entsprachen, für einfachere Entwicklungsbedingungen der Relationsauffassung gesorgt war. Denn bei dieser korrespondierenden Lage bezieht sich die Aufgabe der Wiedergabe auf die besonders naheliegenden, von Natur auffälligen Relationen, die zwischen den zeitlich nahe benachbarten Ausfüllungen der nämlichen Stelle des Bewußtseins bestehen (s. S. 290 u. 319), während spezielle Relationen innerhalb simultaner Elemente stets erst eine besondere Einheitsbildung erfordern, die durch die Art der Ausfüllung oder sonstige Vorbereitungen angeregt werden muß. Auch hat ja in den Grünbaumschen Simultanexpositionen (Fig. 35) der Trennungsstrich schließlich auch vor allem die Bedeutung gehabt, die inner-

1) Es scheint aber, da nichts Besonderes über die Variation dieser Lage innerhalb eines Doppelkomplexes gesagt ist, daß die gleichen Elemente hier stets analoge Stellen innehatten wie auch in der einzigen beigegebenen Figur (s. Fig. 35). S. 347 heißt es nur: „in jeder Gruppe war ein Element vorhanden, dem ein gleiches in der anderen Gruppe entsprach.“

halb der Teilkomplexe relativ gleich gelegenen Elemente bei der diskursiven Verarbeitung zueinander in eine nähere Beziehung treten zu lassen. Außerdem wäre aber Grünbaum bei tachistoskopischer Darbietung wohl kaum gleich von vornherein zur Verwendung ungeläufiger Komplexelemente genötigt gewesen. Denn nur deshalb, weil die V.-P. bei so langer Sichtbarkeit einfachere Komplexe nachträglich im einzelnen rekonstruieren könnte und dann außer den erstmals erfaßten Relationen natürlich auch erst nachträglich abgeleitete wiederzugeben vermöchte, mußte Grünbaum zu so komplizierten Figuren greifen, die selbst bei diskursiver Verarbeitung einer direkten Sinneswahrnehmung von 3 Sekunden noch nicht völlig behalten werden können. Meinerseits konnte ich dagegen viel einfachere (kreuzförmig angeordnete) Figuren aus dem in Fig. 36 angegebenen Streifen [1]) verwenden. Denn bei einer zweimaligen tachistoskopischen Exposition von Komplexen, bei deren Wahrnehmung man nicht einzelne Elemente als solche, sondern in einem einheitlichen Vergleichungsakt nur die beiderseitigen

Fig. 36.
Elemente für Normal- und Vergleichskomplexe bei der tachistoskopischen Untersuchung der Relationsauffassung.

Relationen zu erfassen sucht, erreicht die Wiedergabe der Einzelelemente, wenn diese bis auf ein einziges differieren, einen relativ nicht größeren Umfang wie bei den Grünbaumschen Versuchen, nämlich aus beiden Komplexen nicht einmal den Umfang der Neuauffassung, wie schon bei der Erwähnung dieser Versuche S. 367 in anderem Zusammenhange hervorgehoben wurde. Bezüglich der Wiedergabe der Relationen und der charakteristischen Fehler hierbei (relative Unabhängigkeit des Relationsgedächtnisses von dem Behalten der Einzelheiten, Verwandlung von Gleichheit in Ähnlichkeit u. dergl.) hatten sich aber auch schon bei meinen wenigen, mehr vorläufigen Versuchen dieser Art, bei denen auch die Zahl und relative Lage der gleichen und verschiedenen Elemente wechselte, ganz analoge Erscheinungen gezeigt wie bei Grünbaums speziell auf die Gleichheitsabstraktion ausgehender Untersuchung, so daß es wohl der Mühe wert wäre, ein gleich ausgedehntes Versuchsmaterial unter meinen, psychologisch einfacheren, wenn auch technisch komplizierteren Bedingungen abzuleiten. Ja unter Umständen würden sich sogar noch viel einfachere, aber womöglich exakt abstufbare Komplexelemente empfehlen.

In dem Zusammenhang, in dem meine soeben erwähnten Versuche vorkamen, handelte es sich allerdings vor allem um die Entstehungsbedingungen der Auffassung einer Verschiedenheit der Komplexe und um den Nachweis, daß die Unterschiedsschwelle für die Auffassung einer Verschiedenheit unter sonst gleichen Umständen einen Rückschluß auf den Bewußtseinsgrad der variierten Stelle des Komplexes gestattet, u. z. in viel weiterem „Umfange“

1) Über die technischen Einzelheiten vgl. „Zur Theorie des Bewußtseinsumfanges und seiner Messung“ (a. S. 350, A. 2 a. O.) S. 655ff. Die lithographierten Streifen lieferte die S. 369 genannte Firma.

24*

als die unmittelbare Wiedergabe einzelner Elemente als solcher[1]). In der Tat sind auch die Bedingungen für das Bewußtsein eines Unterschiedes an einer einzelnen Stelle des Komplexes bei sonstiger Gleichheit des Vergleichskomplexes[2]) durch eine Variation dieses Unterschiedes viel eindeutiger abzustufen als die Bedingungen für das Bewußtsein der Gleichheit eines Elementes bei sonstiger Verschiedenheit[3]), wenn auch natürlich vom Standpunkt der Analyse der Neuauffassung von Relationen überhaupt, unabhängig von dieser speziellen Nebenabsicht der indirekten Verwertung einer bestimmten Art der Relationserkenntnis zu anderen Messungen, die letzteren sowie alle möglichen Übergänge zwischen ihnen gleich interessant sein können.

56. Die Untersuchung der Auffassungsbedingungen bei fortlaufender psychischer Arbeit.

Sobald sich die Hauptleistung zur Auffassung einer geschlossenen Reihe kurzdauernder Expositionen erweitert, treten aber nun auch die spezifischen Begleiterscheinungen der Dauerarbeit hinzu. Dies bedeutet also zunächst einmal eine ähnliche Erschwerung wie bei der S. 343 nach der Schwellenmethode untersuchten Verteilung der Aufmerksamkeit über eine größere Zeitstrecke, in der man in jedem Momente eine Momentanänderung zu erwarten hat (eine Aufgabe, die natürlich auch in der nämlichen Schwierigkeit auf die Methode der unmittelbaren Wiedergabe zu übertragen wäre, indem man einen einzigen Komplex in einem im voraus nicht genauer bestimmten Augenblicke exponiert). Nur ist eben jetzt bei jedem Einzelversuche in allen Zeitabschnitten eine besondere Neuauffasung als Partialleistung der Dauerarbeit zu vollziehen. Dies wirkt aber freilich nicht nur ermüdend, sondern zunächst vor allem auch übend, kurz, es kommen sämtliche Faktoren in Betracht, deren Einflüsse Kräpelin als sog. „Komponenten der Arbeitskurve" für jeden Punkt der Arbeitszeit aus dem jeweiligen Totaleffekt zu berechnen sucht[4]). Für die Rekonstruktion des Verlaufes dieser Komponenten, d. h. der Zu- oder Abnahme der Leistung, die bei der ausschließlichen Wirkung eines jeden dieser hypothetischen Faktoren in den einzelnen Zeitpunkten eintreten würde, muß hier jedoch auf Kräpelins eigene Darstellung verwiesen werden[5]), da zur Gewinnung der methodischen Gesichtspunkte, um die einzige gegebene Größe jedes Augenblickes, eben die Arbeitsleistung, in mehrere Komponenten zu zerlegen, natürlich bereits die Ergebnisse selbst in weitem Umfange berücksichtigt werden müssen. Wir beschränken uns also weiterhin auf Hilfsmittel zur rein empirischen

1) Dies bezieht sich also zugleich auf die oben S. 320 ff. dargelegten Messungen von Unterschieds- bzw. Veränderungsschwellen (für je eine Veränderung innerhalb des ganzen Komplexes), deren Methode aber dort ganz unabhängig von dieser Deutung der Ergebnisse dargestellt wurde.

2) Bei der Ableitung der Unterschiedsschwelle treten natürlich auch die u-Fälle als Grenzfälle dieser Abstufung hinzu.

3) Vgl. Experimentelle Analyse der Bewußtseinsphänomene S. 89 ff.

4) Kräpelin, Die Arbeitskurve. Wundt, Phil. Stud. XIX (Festschrift) 1902, S. 459 ff.

5) Vgl. auch Experimentelle Analyse der Bewußtseinsphänomene, S. 228 ff.

Aufnahme der Arbeitskurven selbst und weisen nur noch darauf hin, daß die Variationen der Einzelversuche, die zur Anwendung der Kräpelinschen Analyse auf das Rohmaterial erforderlich werden, vor allem eine systematische Abstufung der Pausen nach jedem Zeitabschnitte in größerem Umfange voraussetzen, da speziell aus ihrem Effekt auf den Stand der einzelnen Einflüsse zu ihrem Beginne zurückgeschlossen wird.

Die Methoden zur fortlaufenden Registrierung von Arbeitseffekten nahmen ihren Ausgang vor allem von den Messungen der besonders auffälligen Ermüdung[1]), die in pädagogischem und psychopathologischem Interesse unternommen wurden, um einerseits eine Norm des Abfallens der Leistung unter bestimmten Voraussetzungen, wie Alter, Geschlecht, Charakter, Vorbildung usw., zu gewinnen und andererseits eine individuelle Abweichung hiervon diagnostisch verwerten zu können. Nachdem man hier aber zunächst einfach direkt die Zunahme der Fehler der Arbeiten, um deren Verlaufsbedingungen es sich handelte, beobachtet hatte (Burgerstein[2])), suchte man nach Leistungen, an denen man die jeweilige psychophysische Ermüdung schlechthin erkennen könne, und kam dabei z. B. auf Messungen der Raumschwelle des Tastsinnes (Griesbach[3])) oder der Muskelleistung am Ergographen (Kemsies[4])), während von anderer Seite mit Recht energisch dagegen protestiert wurde, die hier gefundenen Leistungen zu einem Maß der psychophysischen Leistungsfähigkeit überhaupt, also insbesondere auch für höhere intellektuelle Funktionen, zu verallgemeinern[5]). Für die letzteren sah Kräpelin vor allem in dem fortlaufenden Addieren, das er in Partialarbeiten z. B. zu je 5 Minuten durchführen ließ, ein technisch besonders leicht ableitbares und in allen Zeitpunkten vergleichbares Maß des Arbeitsquantums von allgemeiner Bedeutung. Dieses hält zwischen der unmittelbareren Aktualisierung von Bedeutungsassoziationen bei Leseversuchen u. dergl. einerseits und den viel mittelbarer ausgelösten Ergänzungen von Textstücken, die Ebbinghaus zur vergleichbaren Prüfung der Kombinationsleistung einführte[6]), andererseits eine gewisse Mitte ein. Es steht daher zu den ebenfalls von Ebbinghaus schon zu Ermüdungsmessungen beigezogenen Gedächtnisleistungen der Reproduktion ganzer Reihen (s. § 60f.) in näherer Beziehung, wie denn auch die Exposition von Additionsaufgaben-Serien mit

1) Ders. Über Ermüdungsmessungen. Arch. f. d. ges. Psychologie I, 1903, S. 9 und Meumann, Vorlesungen zur Einführung in die experimentelle Pädagogik, II. Bd. 1907, 11. und 12. Vorlesung. Literatur ebenda S. 435 ff.

2) L. Burgerstein, Die Arbeitskurve einer Schulstunde. Zeitschr. f. Schulgesundheitspflege 1891.

3) Energetik und Hygiene des Nervensystems in der Schule, 1895.

4) Arbeitshygiene der Schule auf Grund von Ermüdungsmessungen, 1898. Diese Bestimmungen fallen also bereits unter die § 69 ff. behandelten Reaktionsmethoden (im allgemeinen Sinne), die natürlich auch noch andere Symptome des Ermüdungszustandes, z. B. in den unwillkürlichen Prozessen des Blutkreislaufes, der Atmung u. a. an die Hand geben.

5) Meumann, Entstehung und Ziele der experimentellen Pädagogik, die deutsche Schule V, 2.–5., 1901 u. a. a. O. S. 89 ff.

6) Über eine neue Methode zur Prüfung geistiger Fähigkeiten und ihre Anwendung bei Schulkindern (Vorl. Mitteilung im Berichte des III. Intern. Psychologenkongresses in München 1896, S. 134). Ausführlich in der Zeitschr. f. Psychol. u. Ph. d. S. Bd. 13, 1897, S. 401.

den dort genannten Apparaten zur Prüfung der Gedächtnisleistung (vgl. z. B. Fig. 39, S. 384) am exaktesten zu bewerkstelligen ist.

Wenn aber auch eine Arbeitskurve für eine bestimmte Art von Leistungen niemals beliebig verallgemeinert werden darf, so kann man doch durch die Abstufung bis herab zu elementaren Aufgaben einen möglichst vollständigen Überblick über enger zusammengehörige Hauptformen jener „Komponenten" gewinnen, bei dem dann auch wirklich allgemeine Gesetzmäßigkeiten nur um so deutlicher hervortreten werden. Freilich muß dabei auch der ganze psychische Verlauf bei der Entstehung der einzelnen Partialarbeiten so konkret als möglich analysiert werden, indem man mit hinreichend feinen Messungsmethoden etwaige Veränderungen der hierbei beteiligten Wahrnehmungsinhalte als solcher, die Klarheit und Deutlichkeit ihrer Auffassung, den Verlauf der assoziativen Zutaten usw. in jedem Augenblicke zu kontrollieren sucht. Insbesondere hat dann aber auch wieder die schärfere zeitliche Begrenzung tachistoskopischer Neuauffassungen den Vorteil, daß sie eine feinere Differenzierung der Partialarbeiten ermöglicht als die früheren Rechenversuche, bei deren Verwertung man sich allerdings auch auf bloße Mittelwerte aus größeren, im einzelnen freier gegliederten Partialarbeiten beschränken wollte. Hierzu gehört aber dann auch ein Tachistoskop, das die Expositionen ohne besondere Hantierungen in den Pausen rasch nach einander auszuführen gestattet. Beim Rotationstachistoskop, das wenigstens rhythmische Reihen darbieten läßt, ist allerdings die Expositionsform immer zugleich von dem Reihentempo abhängig. Dagegen bietet das Spaltpendel[1]), insbesondere in der Form eines leicht gebauten Federpendels, die Möglichkeit, mit jeder beliebigen Geschwindigkeit bis herab zur Schwingungszeit des Pendels rhythmische oder arrhythmische Expositionsserien darzubieten. Für einfachere Zwecke ist unter Umständen schon ein vorne beschwerter und mit einer Blende versehener elektromagnetischer Federunterbrecher ausreichend, wie er in der physiologischen Graphik zur Zeitmarkierung mit der Baltzarschen Kontaktuhr verbunden wird. Noch vollständiger ist aber der Apparat unseren Zwecken angepaßt, dessen Konstruktion und Funktion aus Fig. 37 leicht ersichtlich ist[2]). An dem senkrechten Stabe T_1 des von der Grundplatte und den Muffen M_2, M_3 gehaltenen Stabrahmens trägt die Muffe M_1 an dem Stabe h die beiden gabelförmigen Achsenlager G und G′ für die 2,5 cm langen horizontalen Achsen des Gelenk-Parallelogrammes AB B′A′. Bei der Drehung der Hebel AB und A′B′ um die Achsen in A und A′ wird also der an dem vorderen Verbindungsstück C befestigte Schirm S parallel mit sich auf und ab bewegt. Die Federn F_1 und F_2, die einerseits an M_4, D_1, H_1, t_1 und s_1, bezw. den entsprechend bezeichneten unteren Gegenstücken mannigfach verstellbar fixiert sind und andererseits an den Hebeln AB und A′B′ angreifen, würden nun, sich selbst überlassen, das Gelenkparallelogramm in einer bestimmten Gleichgewichtslage, z. B. in der in der Figur ersichtlichen Stellung fest-

1) Wundt bezeichnet so ein großes Pendel mit einer horizontalen oder vertikalen Expositionsrichtung, das er vor allem als optischen Reizapparat bei Reaktionsversuchen verwendete. Vgl. Grundzüge der Physiol. Psychol. III⁶, 1911, S. 388. Fig. 377.

2) Wirth, Ein Tachistoskop für Reizserien, in Wundts Psychol. Studien V. Bd. 3 u. 4, 1909, S. 268.

halten. Zieht man dieses aber so weit empor, bis der an AB befestigte Anker a an dem Pol des am Querstab Q befestigten Elektromagneten E haftet, so wird eine kurzdauernde Unterbrechung des Stromes von E die Hebel und mit ihnen den Schirm S gerade einmal nach unten und wieder bis zu E zurückschwingen lassen, wobei ein Geräusch beim Aufschlagen von a auf E durch den Puffer P bei richtiger Stromstärke völlig zu vermeiden ist[1]).

Freilich geschieht hier die Exposition durch ein einseitiges Auf- und Zuschieben der Verdeckung S vor dem Objekt, das man sich unabhängig

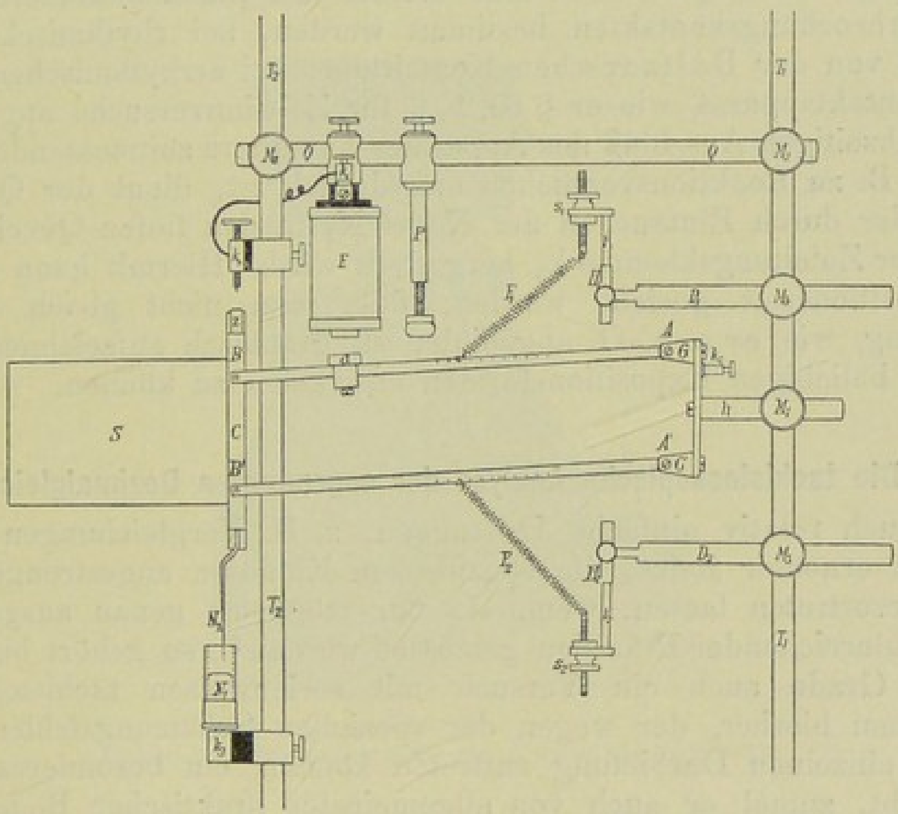


Fig. 37.
Federpendel-Tachistoskop für Reizserien.

hinter S fixiert denken muß. Hierbei werden also die zuletzt freigegebenen Partieen erst zuletzt wieder abgeschlossen werden. Aber selbst wenn man das Objekt direkt hinter S anbringt, kommt diese Differenz nur wenig in Betracht, besonders wenn es im wesentlichen wieder nur aus einer Horizontalzeile besteht, wie es auch für die exaktesten Versuche mit dem Falltachistoskop vorausgesetzt wurde, und wenn man das Objekt so legt, daß seine Exposition von der raschesten Schirmbewegung durch die Gleichgewichtslage begrenzt

1) Will man den Hauptteil der Schwingung unter Umständen auch noch von der Stromstärke in E unabhängig machen, so kann man den Strom einerseits von k_1 (an E) erst nach k_4 und andererseits bei k_2 in die Hebel bzw. nach einer feinen Kontaktfeder Z an dem Schirmträger C einleiten. Dann ist nur so lange Strom in E, als die Platinspitze der verstellbaren Kontaktschraube bei k_4 auf der federnden Zunge Z des Hebels aufliegt, also nur bei unmittelbarer Nähe von Hebel und Magnet, vorausgesetzt, daß auch der übrige Stromkreis wieder geschlossen ist. Dies trifft aber erst wieder am Ende der Schwingung zu, nachdem der Hebel durch die Elastizität des Systemes allein wieder so weit herangekommen ist.

wird. Bei einer Verwendung des Apparates in einem Brennpunkt (vgl. S. 329) oder wie bei Erdmann und Dodge (s. S. 359) bringt dagegen diese Expositionsform selbst bei beliebig ausgedehnten Objekten keinerlei bemerkenswerte Änderung mit sich. Die Dauer der Sichtbarkeit des Objektes ist hierbei einerseits durch die Spannung der Federn bzw. die Schwingungsweite, andererseits durch die Höhenlage des Objektes in weiten Grenzen variierbar. Doch ist der Apparat in den hier angegebenen Dimensionen nicht für wesentlich kürzere Zeiten als etwa 0,1 Sek. eingerichtet[1]). (Vgl. S. 357.) Die Aufeinanderfolge der Expositionen muß hierbei von einem besonderen Apparat mit Unterbrechungskontakten bestimmt werden, bei rhythmischen Reihen also z. B. von der Baltzarschen Kontaktuhr, bei arrhythmischen aber von einem Kontaktapparat, wie er § 65, b, 2 für Zeitsinnversuche angegeben ist. Zum gleichzeitigen Anschluß des Apparates an andere zeitmessende Apparate, wie es z. B. zu Reaktionsversuchen erforderlich ist, dient der Quecksilberkontakt, der durch Eintauchen der Nadel N_2 in den tiefen Quecksilbernapf N_1 mit der Zuleitungsklemme k_3 hergestellt wird. Hiermit kann dann auch die Expositionszeit geeicht werden, falls man nicht gleich die ganze Schwingung, wie es a. a. O. abgebildet ist, graphisch aufzeichnen will, um dann alle beliebigen Expositionsformen auswählen zu können.

57. Die tachistoskopische Analyse der sogenannten Dezimalgleichung.

Da auch relativ einfache Leistungen, z. B. Vergleichungen je zweier fortgesetzt erneuter Reize, die spezifischen Einflüsse angestrengter Dauerarbeit hervortreten lassen, wenn sie nur möglichst genau ausgeführt und auch mit hinreichender Präzision gemessen werden[2]), so gehört bis zu einem gewissen Grade auch ein Versuch mit serienweisen tachistoskopischen Expositionen hierher, der wegen der speziellen Schätzungsfehler, die hier bei jeder einzelnen Darbietung auftreten können, ein besonderes Interesse beansprucht, zumal er auch von allgemeinster praktischer Bedeutung ist: Die bei der Messung einer Distanz im allgemeinen erforderliche Schätzung von Bruchteilen, z. B. Dezimalen der (objektiv nicht weiter geteilten) Skaleneinheit. Während man diese bei längerer Überlegung stets noch richtig angeben kann, wenn die letzte gedachte Einheit bei ihrer objektiven Abgrenzung noch deutlich genug gesehen werden könnte und auch die Einheit im ganzen nicht unübersichtlich groß ist, treten bei begrenzter Zeit oder Ermüdung und sonstiger Indisposition charakteristische Fehler auf, die als individuell und dispositionell schwankende Bevorzugungen bestimmter Bruchteile zur Aufstellung sog. „Dezimalgleichungen" geführt haben. Diese kommen vor allem in Betracht, wenn der Teilungspunkt oder ein Endpunkt der Strecke sich

1) Wollte man nur einen Teil der Hin- oder Herbewegung zu entsprechend kürzeren Expositionszeiten verwenden, die man mittelst eines Spaltschirmes beliebig herausschneiden kann, so wäre natürlich noch eine besondere Vorrichtung erforderlich, um die zweite Exposition bei der Rückkehr (oder beim Abschwingen) des Schirmes abzublenden.

2) Es sei daher in diesem Zusammenhange auch Höflers in mehr theoretischer Absicht diskutierte Aufgabe erwähnt, die Geradheit einer auf einem Telegraphenstreifen gezeichneten Linie beim Abwickeln der Rolle fortgesetzt beurteilen zu lassen. (Psychische Arbeit, Zeitschr. f. Psychol. und Phys. der S. Bd. 8, 1895, S. 44 u. 161 (S. 55).

bewegt, so daß die zu schätzende Situation nur für einen Moment gegeben ist, wie bei den astronomischen Durchgangsbeobachtungen nach der sog. „Auge- und Ohrmethode“, bei der dann zu den Raumfehlern noch charakteristische Zeitfehler hinzutreten, deren Messung uns unten noch besonders beschäftigen wird (s. § 64, a). Bei serienweisen Arbeiten treten aber solche Fehler auch bei ruhender Strecke auf. Auch wurden sie bei analogen Abschätzungen von Distanzen gefunden, die auf einer Schätzung übermerklicher Empfindungsstufen beruhen, nämlich bei der Einordnung der Sterne in Größenklassen (s. S. 306)[1]. Während aber die astronomischen

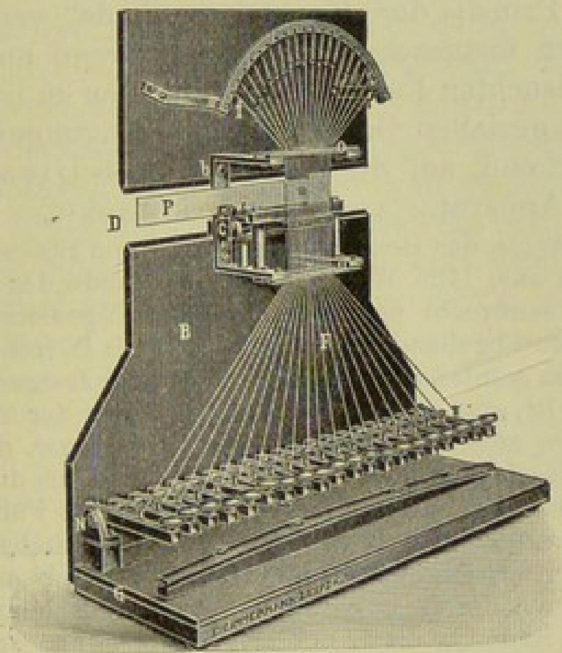


Fig. 38.
Apparat zur Untersuchung der sog. Dezimalgleichung.

Protokolle oder andere Messungen aus dem alltäglichen Leben die Dezimalgleichung wegen der Unbekanntheit der objektiven Werte nur von der Voraussetzung aus abzuleiten gestatten, daß alle Dezimalen bei sehr großer Versuchszahl ungefähr gleich häufig vorkommen, lassen sich diese Schätzungsfehler bei Bekanntheit der Strecke natürlich auch für jeden Einzelfall angeben. Das vorhin beschriebene Federtachistoskop wurde nun von Ulezko in einer bereits abgeschlossenen Untersuchung dieser Dezimalgleichung am Leipziger psychologischen Institut zur rhythmisch fortgesetzten Exposition einer ruhenden, jedesmal neu eingeteilten Strecke von 6 cm verwendet.

1) Die Literatur über die schon von J. Hartmann (Grunerts Archiv f. Math. u. Phys. 31. 1858, S. 24) bei seinen Beobachtungen der Durchgänge eines künstlichen Sterns gefundene „Dezimalgleichung“ vgl. u. a. bei E. Großmann, Über die Schätzung nach Augenmaß, Astron. Nachr. Bd. 170, 1906, Nr. 4066 S. 150, O. Meißner, Über systematische Fehler bei Zeit- und Raumgrößenschätzung, ebenda Bd. 172, 1906, Nr. 4113, F. M. Urban, Systematic Errors in Time-Estimation, Am. Journ. of. Psych. Bd. 18, 1907, S. 187 und Zeitschr. f. Psychol. und Phys. der S. 1. Abt. Bd. 53, 1909, S. 361, Wirth, Exp. Analyse der Bewußtseinsphänomene, 1908, S. 171, J. Plaßmann, Astronomie und Psychologie, Zeitschr. f. Psychol. u. Ph. der S. 1. Abt. Bd. 49, 1908, S. 267 (Vortrag, gehalten auf dem 3. Kongr. f. exp. Psychologie in Frankfurt).

Die Abstufung des Tempos der von der Baltzarschen Kontaktuhr ausgelösten Darbietungen ließ dabei die Bedingungen für diese speziellen Fehler in weitern Grenzen variieren. Damit aber der Experimentator selbst beim Sekundentempo nach einem ganz bestimmten Versuchsplan von einer Exposition zur anderen immer wieder eine neue Teilung genau und konstant einstellen konnte, wurde ein besonderer Dezimalen-Apparat (Fig. 38) konstruiert, der zwischen zwei Grenzstriche mittelst einer Klaviatur gewissermaßen wie nach Noten einen Teilstrich hineinspielen ließ, der irgendein Vielfaches von Zwanzigsteln der ganzen Strecke abteilte. Während die Praxis stets beliebige Teilungen zu schätzen aufgibt, kann natürlich das Experiment auch hier nach dem Prinzip der „Konstanzmethode" verfahren und nur ganz bestimmte Abteilungen fortgesetzt wiederholen, wenn nur die Einteilung fein genug ist, um die gesuchten Fehler noch eintreten zu lassen. Hierzu erwies sich aber unter den speziellen Beobachtungsbedingungen sogar die Variation nach Zehnteln hinreichend, auf die sich dann auch Ulezko trotz der feineren Differenzierung des Apparates vorläufig beschränkte.

Fig. 38 zeigt eine Skizze des Dezimalenapparates von rückwärts, d. h. vom Standort des Experimentators aus. Die Wand B, die am Rande der auf der Tischplatte befestigten Grundlage G senkrecht aufsteigt, läßt in Augensitzhöhe einen bis auf die Verbindungsschienen b durchgehenden horizontalen Spalt D frei, hinter dem eine weiße Zelluloidplatte P mit dem rechtsseitig (von der V.-P. aus) festgemachten Grenzstrich der Teilstrecke so befestigt ist, daß sich von unten her jeder der 20 Zähne z, die vorn an die Köpfe von 20 Hebeln angesetzt sind, als Teilstrich (bzw. der zwanzigste als Endstrich) der Strecke hereinschieben kann. Jene Hebel sind um die Achse C drehbar und so genau gearbeitet, daß sie infolge ihrer gegenseitigen Führung und einer festen äußeren Umrahmung ihren Zahn z immer genau in die nämliche, ihrer Nummer entsprechende Stelle treffen lassen, wenn der Experimentator auf die zugehörige der 20 Tasten drückt, die, um die zu C parallele Achse N drehbar, durch einen Faden F am gegenüberliegenden Ende je eines der Hebel angreifen, antagonistisch zum Zuge je einer Feder f, die durch einen Faden am anderen Ende befestigt ist. Um bei der breiteren Lagerung der Tasten und der Federn f keine seitliche Zerrung der z-Hebel einzuführen, laufen die Schnüre unter und über den Hebeln zunächst bis zu einer Reihe von Ringen an den Querstäben O und U genau senkrecht.

Der Beobachter blickt nun wieder ähnlich wie nach Fig. 33, S. 363 durch ein kurzes Rohr in der Öffnung einer Wand S zunächst nach einem etwas seitlich gedrehten Spiegel T, dessen Belag in einer horizontalen Öffnung abgelöst ist, die dem Gesichtswinkel der dahinter liegenden Teilstrecke O genau entspricht. Unmittelbar hinter dem Spiegelspalte liegt der Schirm des Federtachistoskopes (S in Fig. 37). Bei den schnelleren Tempis der Beobachtungsreihen war außer dem Experimentator, den die Einstellung dann voll in Anspruch nahm, noch ein Gehilfe zur Aufzeichnung der Schätzungen der V.-P. erforderlich.

Kapitel 14.

Die Messung von Gedächtnisleistungen an der Beurteilung neuer Vergleichsreize.

58. Das Gedächtnis für einfache Sinneseindrücke.

1. Die Elemente der Methoden, mittelst deren der Einfluß der Vorbereitung und der inhaltlichen Komplikationen auf die Leistung einzelner Zeitpunkte, und zwar eventuell einer längeren Zeitstrecke, untersucht werden kann, lassen sich aber nun weiterhin auch dazu verwenden, bei zwei zeitlich getrennten Vergleichsobjekten oder ganzen Komplexen von solchen die Wirkung der Zwischenzeit zu studieren. Da ein Vergleich unter dieser Voraussetzung nur dadurch möglich wird, daß der frühere Tatbestand auch noch nachträglich vergegenwärtigt wird, nachdem die primäre Phase des Inhaltes längst durch andere Phasen der nämlichen Stellen des Wahrnehmungsfeldes abgelöst ist, so gehören solche Versuche offenbar zur experimentellen Analyse der Gedächtniserscheinungen im allgemeinsten Sinne. Hierzu bilden bereits die gewöhnlichen Vergleichsexperimente einen völlig stetigen Übergang, bei denen die beiden Objekte nicht genau gleichzeitig und unmittelbar benachbart sind und sich auch nicht, wie bei der Beurteilung plötzlicher Veränderungen, als Ausfüllungen der nämlichen Stelle unmittelbar folgen, sondern durch eine kleine Pause von wenigen Sekunden getrennt sind, wie z. B. bei der Vergleichung sukzessiv gehobener Gewichte u. dergl. Doch bleibt dabei natürlich das besondere Problem zu beantworten, in welcher Beziehung die Veränderung der Leistung mit der Zwischenzeit zu den unvermeidlichen Wandlungen steht, welche die Repräsentation des früheren Reizes erfährt, indem sie ihre subjektive Sicherheit und anschauliche Frische unmittelbar nach der Sinneswahrnehmung immer mehr verliert und je nach den Versuchsbedingungen schneller oder langsamer, unstetiger oder allmählicher völlig aus dem Bewußtsein verschwindet, so daß sich die V.-P. beim Auftreten des Vergleichsreizes erst in einer „Reproduktion" im engeren Sinne (vgl. S. 232) wieder an sie „erinnert". Daneben interessiert übrigens auch, wie die aktuelle Nachwirkung der primären Wahrnehmung ohne bestimmte logische Beziehung auf diese die späteren Gedächtnisleistungen beeinflußt, wobei hinsichtlich ihres Vorteiles oder Nachteiles im Vergleich zu anderen „Ausfüllungen der Zwischenzeit" a priori nicht zu entscheiden ist[1]). Eine systematische Beantwortung solcher

1) Die Erinnerung an den früheren Vergleichsreiz darf aber nicht mit der psychologischen Reflexion auf sein mehr oder weniger lebhaftes „Gedächtnisbild" verwechselt werden, die eine ganz andere Einstellung bedeutet und, wie es von vornherein plausibel erscheint und durch die experimentellen Ergebnisse bestätigt wurde (vgl. F. Angell [and Harwood], Discrimination of clangs for different intervals of time. Am. Journ. of. Psych. XI, 1, 1899, S. 67 u. XII, 1, 1900, S. 58), bei einer besonderen Anspannung der Apperzeption in dieser Richtung für die Vergleichsleistung sogar nachteilig ist.

Fragen ist natürlich nur möglich, wenn der Bewußtseinsverlauf an der Hand möglichst genau kontrollierbarer Bedingungen zunächst wiederum im allgemeinen mittelst der Selbstbeobachtung studiert wird, worauf hier nicht weiter im einzelnen eingegangen werden kann. Keinesfalls wird man sich aber dabei mit der bloßen Feststellung des Vergleichsurteils bzw. eines bloßen Bekanntheitsgefühles u. dergl. als letzter Resultante der Nachwirkung der früheren Wahrnehmung begnügen dürfen, sondern man hat genau wie bei der Analyse eines einzigen Zeitpunktes, bei dem alle Vergleichsfundamente direkt wahrgenommen werden, die spezielle Einstellung des Bewußtseins auf die verschiedenen Merkmale zu studieren, auf die sich jenes logische Bewußtsein jeweils bezieht. Denn auch bei dem Auftreten eines bloßen Bekanntheitsgefühles liegt natürlich eine ganz verschiedene Gedächtnisleistung vor, je nachdem sich dieses auf allgemeinere oder speziellere Merkmale des neuen Objektes bezieht, insofern doch z. B. die sichere Wiedererkennung einer vierstelligen Zahl nur als Zahl überhaupt trotz größter Intensität der emotionalen Komponenten eines solchen Zustandes unter Umständen eine weit geringere Gedächtnisleistung darstellen kann als das schwächste Bekanntheitsgefühl, das sich auf die einzelnen Ziffern als solche bezieht.

Doch wollen wir bei diesen Gedächtnisversuchen im engeren Sinne zunächst noch von einer gewissen Richtung der Apperzeption absehen, die jederzeit möglich ist, sobald uns ein früherer Tatbestand klarer oder verworrener, mit oder ohne Vergegenwärtigung von Einzelheiten der begleitenden Nebenumstände, als individuelles Einzelerlebnis vorschwebt, nämlich von der ausdrücklichen Vergegenwärtigung der Zeitverhältnisse selbst. Denn diese wird als Auffassung eines besonderen objektiven Tatbestandes, den das Bewußtsein gewissermaßen in einer höheren psychischen Wahrnehmungsfunktion repräsentiert, nach speziellen, im übernächsten Kapitel skizzierten Methoden auf ihren neuen Erkenntniswert hin zu untersuchen sein, wobei vor allem mehrere durch gleichzeitig vergegenwärtigte Vorgänge abgegrenzte Zeitabschnitte unter sich zu vergleichen sind. Wir beschäftigen uns also im 14. und 15. Kapitel nur mit der Untersuchung, wie das Resultat der Vergleichung zeitlich getrennter Wahrnehmungen bezüglich ihrer eigenen inhaltlichen Merkmale und die freie Reproduktion dieser Qualitäten von der Art der Inhalte, der speziellen Form ihrer Einprägung und von der Zeit bis zu ihrer Wiedererneuerung abhängig sind.

Dabei wird aber natürlich der von einem neuen Prozeß angeregte Gedächtnisvorgang nicht nur von dem früheren und der Zwischenzeit, sondern vor allem von dem neuen Vorgang selbst abhängig sein. Vom methodischen Gesichtspunkte aus lassen sich nun im wesentlichen zwei Hauptarten von Gedächtnisversuchen unterscheiden: Es ist zunächst eine besondere Aufgabe, wenn durch eine neue Wahrnehmung einfach ein Vergleich mit einer früheren angeregt wird. Daneben steht die Aktualisierung einer Gedächtnisspur durch eine sogenannte freie Reproduktion des früheren Erlebnisses. Während bei jener Vergleichung die neue Sinneswahrnehmung nur solche Momente in sich enthält, die von den zu reproduzierenden Inhalten nicht viel verschieden sind, werden bei dieser freien Reproduktion zunächst nur andere Wahrnehmungen gegeben, die mit den zu reproduzierenden Inhalten nur „assoziiert" sind. Doch liegt von vornherein die Aufgabe nahe, die enge verwandten Abhängigkeiten der beiden Leistungen von den Qualitäten der Inhalte, von der Art der Einprägung der früheren Wahrnehmung und von der Zwischenzeit miteinander zu vergleichen.

Die Entstehung der Dispositionen könnte übrigens selbst in den zu einer einzigen Messung gehörigen Einzelversuchen variieren. Da nämlich z. B. bei der Ableitung der Unterschiedsschwelle und des Totalfehlers für zwei zeitlich getrennte Wahrnehmungen eine systematische Abstufung des Vergleichsreizes erforderlich wird, so wäre zu genauen Versuchen eine vollständige Umkehrung der „Zeitlage" für den Haupt- und Vergleichsreiz sogar ganz besonders wünschenswert. Indessen behandelt man bei den Gedächtnisversuchen nach der Vergleichsmethode, ähnlich wie es bei der freien Reproduktion nach einer bestimmten Zwischenzeit möglich ist, die frühere Wahrnehmung und die durch sie gesetzte Disposition im allgemeinen als das Konstante und den neuen Reiz gewissermaßen nur als Mittel zum Zweck seiner Untersuchung. — Auf die theoretische Diskussion der Frage, durch welchen Bewußtseinsverlauf eine bestimmte Vergleichs- oder Reproduktionsleistung im einzelnen zustande kommt und inwieweit ihre quantitativen Verhältnisse ein mehr oder weniger direktes Maß der jeweils aktualisierten Gedächtnisdisposition abgeben, können wir natürlich an dieser Stelle wieder so wenig eingehen, wie oben auf den Zusammenhang der Schwellen und Fehler mit der Klarheit und Deutlichkeit der einzelnen Stellen des Wahrnehmungsfeldes je nach der verschiedenen Vorbereitung. Es handelt sich also auch hier zunächst einfach darum, daß die meßbaren Leistungen den genannten Versuchsbedingungen der Einprägung, der Zwischenzeit usw. vorläufig wieder nur als ein rein empirisches Symptom möglichst eindeutig zugeordnet werden (vgl. S. 26).

2. Wenn aber der Verlauf der Nachwirkung bei seiner Prüfung nach einer bestimmten Methode ein einigermaßen konstantes Bild ergeben soll, so muß natürlich vor allem wieder der primäre Vorgang in allen zur Konstruktion dieses Bildes erforderlichen Einzelversuchen jedesmal möglichst gleichartig ausfallen. Bleiben wir im folgenden zunächst bei der Beurteilung des Gedächtnisses nach der Unterschiedsschwelle und dem Fehler beim Vergleich mit einem späteren gleichartigen Objekt, so ist jene Forderung bei einfachen Sinneseindrücken wohl leicht zu erfüllen, da eben hierbei der erste Eindruck wieder ebenso wie bei den gewöhnlichen psychophysischen Versuchen mit voller Aufmerksamkeit zu erfassen ist. Wenn jedoch die V.-P. einmal weiß, daß es sich um die Relation des Reizes zu einem später dargebotenen V handelt, wird sich dann freilich an die einfache Wahrnehmung weiterhin erst noch ein Akt der besonderen Einprägung anschließen, der bei längerer Beschäftigung mit derartigen Vergleichungen über eine größere Zeitstrecke hinweg, ähnlich wie bei einer größeren räumlichen Distanz von N und V, immer erfolgreicher sein wird, wie denn gerade bei solchen Versuchen von Anfang an „eine ungeheuere Wirkung der Übung"[1]) auffiel.

1) Wolfe, a. u. a. O. S. 552.

Schon E. H. Weber hat das Gedächtnis für die Schwere gehobener Gewichte und für gesehene Raumstrecken mittelst der Schwellenmethode geprüft und wollte „solche Versuche der Aufmerksamkeit der Psychologen empfehlen“ [1]), und F. Hegelmeyer führte darnach ebenfalls Augenmaßversuche dieser Art mittelst der Methode der r. u. f. Fälle durch [2]). Aber erst nachdem Ebbinghaus seine bekannte Untersuchung „über das Gedächtnis“ nach der unten behandelten Methode des Auswendiglernens veröffentlicht hatte, wurde 1886 auch jene historisch ältere Schwellenmethode von K. H. Wolfe [3]) energisch wieder aufgenommen, der die Unterschiedsempfindlichkeit für Tonhöhen in Abhängigkeit von dem Zeitintervall zwischen N und V ebenfalls nach der Methode der r. u. f. Fälle zu bestimmen suchte. Freilich würde zu einer exakten Ableitung der U.-S., zumal wenn gar noch mit einem Wechsel der Zeitlage von N und V operiert werden sollte, eine meistens ebenso unerschwingliche Anzahl von Einzelversuchen erforderlich werden wie bei der Bestimmung des zeitlichen Verlaufes der Aufmerksamkeit mittelst der Schwellenmethode (s. S. 343). So hat sich denn Wolfe sogar mit der Ableitung der Zeitkurve der relativen Urteilshäufigkeiten g und k für jeweils nur eine einzige Differenz d = V — N innerhalb der nämlichen Reihe begnügt, die er je nach dem Maximum der in der Reihe geprüften Zwischenzeiten verschieden groß wählte. Aber auch bei einer solchen Einschränkung [4]) wird die Gesamtzeit, die die Untersuchung der zeitlichen Entwickelung auch nur einer einzigen Disposition beansprucht, mit dem maximalen Intervall immer größer. Die exakte Ausnützung dieser Schwellenmethode, die ihrem Wesen nach noch viel feinere Dispositionen zu messen gestattet, also (unter gleichen Einprägungsbedingungen) für viel längere Zeitintervalle anwendbar bleibt, findet daher leider praktisch sehr bald

---

1) Der Tastsinn und das Gemeingefühl, Wagners Handwörterbuch der Physiologie III, 2, 1846, S. 545 f.

2) F. Hegelmeyer, Über Sinnengedächtnis, Vierordts Archiv, Jahrg. XI, 1859, S. 844.

3) K. H. Wolfe, Untersuchungen über das Tongedächtnis, Wundt, Phil. Stud. III, 1886, S. 534. Seitdem wurde das Gedächtnis für Raumlagen, Strecken, Empfindungsqualitäten u. a. öfters nach dem nämlichen Prinzip untersucht. (Vgl. vor allem die Literaturangaben bei W. v. Tschisch, Über das Gedächtnis für Sinneswahrnehmungen, Bericht des III. Internationalen Psychologenkongresses in München 1896 [1897], S. 95, Wundt, Physiol. Psychol. III[6], S. 451 ff. und Ebbinghaus, Grundzüge der Psychologie I, § 62.) Die Elemente der Versuchstechnik sind den Abschnitten über die Sinnesphysiologie zu entnehmen, wozu nur eventuell noch Apparate zur exakten Auslösung des Vergleichsreizes V nach bestimmten Zeitintervallen hinzutreten, wie sie oben S. 343 bei der Verfolgung des zeitlichen Verlaufes der Aufmerksamkeit genannt wurden.

4) Bei gleicher Versuchszahl wird hier die Methode der mittleren Fehler derjenigen der r. u. f. Fälle ziemlich ebenbürtig. Sie liefert in dem Präzisionsmaß ein ungefähres Maß der U.-E., was für g oder k bei einem einzigen d = V — N nicht in gleichem Maße gilt; auch kommen bei den Gedächtnisversuchen die motorischen Einstellungsfehler gegenüber den Urteilsschwankungen mit zunehmender Zwischenzeit immer weniger in Betracht. Diese Methode wurde z. B. angewandt von W. Lewy, Experimentelle Untersuchungen über das Gedächtnis, Zeitschr. f. Psychol. Bd. VIII, 1895, S. 231, soweit es sich um die räumliche Lage von Tastreizen handelte (S. 254), die nach einiger Zeit nachgetastet werden sollten. (Seine Anordnung für die Untersuchung des Streckengedächtnisses bei optischer Auffassung hätte wohl ebenfalls diese Methode zugelassen, doch wurde hier eine Art Minimaländerungsmethode angewandt, a. a. O. S. 237.)

ihre Grenze. Die bisherigen genauen Messungen erstreckten sich denn auch höchstens auf 1 bis 2 Minuten, während doch aus einzelnen Beobachtungen bekannt ist, daß einfache Sinneseindrücke, wenn man sich ihrer überhaupt noch zu erinnern vermag, mit einer entsprechend vergröberten Schwelle über beliebig lange Zwischenzeiten hinweg verglichen werden können. Allerdings lassen sich bei dieser Methode andererseits wiederum leicht auch beliebig kleine Zeitintervalle zwischen N und V beiziehen und die untersuchten Intervalle so fein abstufen, als man will, da der einzelne Prüfungsakt selbst keine so lange Zeit erfordert wie bei komplexeren Gedächtnisleistungen.

59. Das Gedächtnis für Wahrnehmungskomplexe.

Die nächste Stufe der Gedächtnisleistung, bei der einzelne, nach mehreren Richtungen variable Objekte oder Simultankomplexe von solchen z. B. Fig. 29 (nach Mittenzwey) bzw. Reihen aus mehreren einfachen Sinneseindrücken bis zur beliebig späteren Darbietung eines Vergleichskomplexes gemerkt werden, ist bisher noch nicht mittelst der Schwellen- und Fehlermethode geprüft worden. In Analogie zu dem Lernmaterial für die Methode des Auswendiglernens wurde vielmehr sogleich zur Einprägung ganzer Reihen von sukzessiv dargebotenen Komplexen übergegangen. Freilich liegt auch hierüber bisher nur die einzige Arbeit von F. Reuther vor, die ursprünglich einfach als Übertragung der S. 320 skizzierten Vergleichsmethode mit kurzdauernden optischen Komplexen auf das Reihengedächtnis gedacht war, aber von Reuther bald zu einer selbständigen, dem speziellen Zwecke angepaßten Methode entwickelt wurde. Um auch dem Material der Lernversuche näher zu kommen, wurden nicht sinnlose optische Zeichen, sondern Ziffern in vierstelligen, allerdings sinnlosen Zahlen verwendet[1]). In dem Diaphragma eines dunklen Schirmes des Expositionsapparates traten nacheinander in gleichem Takte mehrere solcher Zahlen hervor, wobei im Verlaufe der Untersuchung die Anzahl der Wiederholungen der ganzen Reihe, die Dauer und die Aufeinanderfolge der Expositionen jeder Zahl, die Reihenlänge, die, abgesehen von der speziellen Untersuchung ihrer Wirkung, 8 Glieder umfaßte, und vor allem die Zeit des Behaltens zur Prüfung ihres Einflusses auf das Gedächtnis variiert wurden. Während hierbei nicht laut gelesen wurde, um im allgemeinen den relativen Anteil der optischen Komponente an der Leistung möglichst zu erhöhen, kam in besonderen Versuchen zur Bestimmung des Typus der V.-P. nach der Cohnschen Methode (vgl. unten § 62, a) auch wenigstens noch lautes Ablesen zur Anwendung.

Nachdem Ebbinghaus (s. S. 393) in seinen erstmaligen Versuchen über das Reihengedächtnis überhaupt noch keinen besonderen Expositionsapparat benützt, sondern die zusammengestellten Silben einfach nacheinander abgelesen hatte, war bei G. E. Müller und Schumann (s. S. 393) dadurch bereits besser für eine wirklich sukzessive Sinnes-

1) Die Gesichtspunkte für die Herstellung möglichst gleich schwieriger Reihenglieder sind ähnliche wie die, welche im nächsten Paragraphen für die Reihen aus sinnlosen Silben zu erwähnen sind. Zahlen mit der 1 am Anfang und mit einer 0 wurden vermieden, ebenso die natürliche Ziffernfolge 1, 2, 3 usw. und die Übereinstimmung von Ziffern in einer Zahl. Außerdem waren auch alle Tausender einer Reihe und die ersten und letzten Ziffern zweier aufeinanderfolgender Zahlen verschieden.

wahrnehmung gesorgt, daß die Silben auf eine um eine horizontale Achse rotierende Trommel aufgeschrieben waren und sich dabei hinter dem horizontalen Schlitz eines Schirmes vorbeibewegten. Doch ist die gesamte wirksame Expositionszeit hierbei immer noch nicht genau genug bestimmbar; auch wirkt die konstante Bewegung des Lesematerials bisweilen schwindelerregend. Ranschburg konstruierte daher einen von ihm seit 1900 verwendeten elektromagnetisch betriebenen Apparat[1]) (Mnemometer), durch welchen eine Scheibe, auf deren äußeren Ringsektoren die Objekte angebracht sind, ruckweise in beliebigem Tempo weiter gedreht werden kann, so daß die V.-P. in dem Diaphragma des Schirmes, abgesehen von der auf die Lesepausen fallenden Fortbewegung der Reihe um ein Glied, deren Schnelligkeit ein Lesen ausschließt, nur ruhende Objekte wahrnimmt. Den nämlichen optischen Effekt erreichte ich dann mit einem anderen, vor allem sehr geräuschlos arbeitenden Apparate, der auch von Reuther in den genannten Versuchen benützt wurde (vgl. Fig. 39). Hierbei ist die Kraft für die Fort-

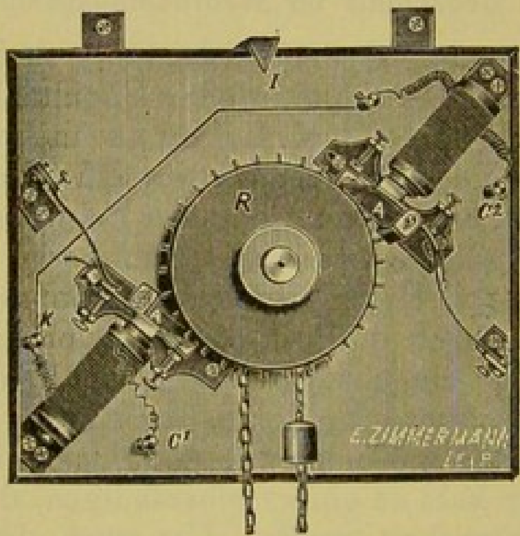


Fig. 39.
Apparat zur Exposition einer Reihe sprungweise fortschreitender, ruhender Gesichtsobjekte (nach Wirth).

bewegung der Kreisscheibe, auf deren Ringsektoren die Zahlen aufgedruckt werden, von dem Mechanismus für die Auslösung und Begrenzung der Bewegung abgetrennt. Das Rad R, auf dessen vorderer Platte die (auf dem Bild abgenommene) Scheibe ähnlich wie auf einem Farbenkreisel fixiert ist, würde von einem Gewicht im Uhrzeigersinne weitergedreht, falls es nicht von außen aufgehalten wäre. Es trägt nun außen einen Kranz von 30 äquidistanten radialen Stiften, von denen immer einer von dem Kopf eines der beiden Hebel A, bzw. von einer in diesem Hebelkopf quer über den Weg der Stifte gespannten Seidenschnur aufgehalten ist. Da der Bogenabstand zwischen diesen Widerhalten der beiden Hebel A gerade um die Hälfte des Stiftabstandes von einem ganzen Vielfachen dieses Abstandes verschieden ist, so wird also die abwechselnde kurzdauernde Zurückziehung dieser Widerhalte aus der Bahn der Stifte, die durch abwechselnde Erregung der zugehörigen Elektromagneten erfolgt, die Scheibe in dem Tempo dieser Stromschlüsse immer um die Hälfte des Stiftabstandes weiterrücken lassen, so daß der ganze Umlauf der Scheibe in 60 äquidistanten Schritten erfolgt. Ein dunkler Schirm, der nach Aufsetzen der Scheibe von oben heruntergeklappt wird, trägt rechts in mittlerer Höhe einen horizontalen Spalt, in welchem nacheinander 60 verschiedene Felder zutage treten[2]). Die Zahlen oder Buchstaben passen also bei einer

1) Monatsschrift f. Psychol. u. Neurologie Bd. 10, S. 321.

2) Für wiederholte Expositionen kleinerer Reihen, also z. B. von 8 Ziffern, muß daher, solange am Apparate keine besondere Repetiervorrichtung angebracht ist, die Reihe mehrmals auf die Scheibe gedruckt werden.

Ruhestellung genau in den Spalt hinein, wenn die Scheibe unter Berücksichtigung der oberen festen Spitzenmarke J richtig aufgesetzt ist[1]).

Soweit man mit der durch das treibende Gewicht herbeigeführten Präzision der Expositionsgrenzen zufrieden ist, wie es z. B. Reuther bei den genannten Versuchen sein konnte, genügt zum Betrieb des Apparates ein Metronom mit zwei Quecksilberkontakten, das sich zur Vermeidung von Geräuschen in einem entfernten Raum befindet und den vom Akkumulator in die Pendelstange eingeleiteten Strom bald einerseits nach der Klemme C_1 an den einen Magneten, bald andererseits nach C_2 an den anderen weitergibt, während der andere Pol des Akkumulators mit der beiden Magneten gemeinsamen Klemme K verbunden wird. Für beliebige Rhythmen muß freilich ein Kontaktapparat verwendet werden, wie er z. B. unten bei den Zeitsinnversuchen (§ 65, b, 2) abgebildet ist. Wünscht man indessen eine präzisere zeitliche Begrenzung, z. B. tachistoskopische Exposition, so ist vor der Scheibe (oder Schleife) des Gedächtnisapparates erst noch ein besonderer Expositionsapparat anzubringen. Als solcher kann z. B. ein Rotationstachistoskop (s. S. 364 A. 1) verwendet werden, das elektromotorisch angetrieben wird. Dieses übernimmt dann zugleich selbst den Betrieb des Gedächtnisapparates, indem der umzuschaltende Pol einem Exzenter auf der Achse des Rotationsapparates zugeführt und von da abwechselnd auf zwei vom Exzenter berührte Kontaktfedern weitergeleitet wird, und zwar immer zeitig genug, um beim Durchgang des Spaltes durch die Gesichtslinie die Fortbewegung der Objektscheibe beendigt sein zu lassen. Für Versuche mit Reaktionen auf das Auftreten des Wortes, bzw. eine sich anschließende Gedächtniswirkung (vgl. auch unten § 61, c) eignet sich endlich auch vor allem das oben S. 37 Fig. 375 beschriebene Federpendel-Tachistoskop, das z. B. auch einfach an jenes außerdem noch mit einem Unterbrechungskontakt versehene Metronom angeschlossen werden kann.

In allen Versuchen Reuthers, in denen nicht speziell der Einfluß der Wiederholungszahl untersucht und somit der Grad der Einprägung variiert werden sollte, wurde ebenso wie bei den Lernversuchen von Ebbinghaus (vgl. § 60, b) als konstanter Ausgangszustand des zeitlichen Verlaufes der Disposition die vollkommene Beherrschung der ganzen Reihe angestrebt, nur eben in einem speziell der Vergleichsmethode entsprechenden Sinne, d. h. es brauchte die Reihe nicht auswendig hergesagt werden zu können, sondern es genügte eine bestimmte Vergleichsleistung bei Darbietung einer Vergleichsreihe. Bei einem stetig abstufbaren Material hätte man also nach einer gewissen Anzahl von Expositionen probeweise jeweils

1) Wirth, Ein neuer Apparat für Gedächtnisversuche mit sprungweise fortschreitender Exposition ruhender Objekte, Wundts Phil. Stud. Bd. 18, 1903 S. 701. E. Zimmermann hat nach dem nämlichen Prinzip auch einen Trommelapparat für ruckweise Fortbewegung beliebig langer über die Trommel gehängter Schleifen hergestellt (vgl. ebenda), die vor allem bei den neuen Modellen durch Dornen auf der Peripherie der Trommel, die in ausgestanzte Löcher am Rande der Schleife eingreifen, sehr sicher vor sich geht. Auch für die gleichzeitige Anwendung des Scheiben- und Trommelprinzipes an dem nämlichen Modell und die Auswechselung von Scheiben mit verschiedener Stiftzahl ist gesorgt worden. Vgl. hierüber auch H. Rupps wertvolle Beschreibung der experimentalpsychologischen Apparate im Geschäftskatalog der Firma Spindler & Hoyer (Göttingen) VII, S. 132ff. Apparate zur Untersuchung des Gedächtnisses. Hier ist auch eine ausführliche Darstellung anderer teilweise bereits wieder verbesserter Hilfsmittel zur Lösung der nämlichen Aufgabe zu finden, wie der Apparate nach Lipmann (Zeitschrift f. Psychol. u. Physiol. der Sinnesorgane Bd. 35, 1904, S. 270, und verbessert ebenda Bd. 49, 1908, S. 270), und nach Rupp (Katalog S. 149) und eines von Rupp verbesserten Apparates mit sinnreicher Verwendung des Spiegelprinzipes nach Hempel. Da der oben ausführlicher beschriebene, besonders einfache Apparat in der Tat bereits für alle praktischen Zwecke genügen wird, so darf ich mich hier wohl mit diesem kurzen Hinweis auf diese späteren Modelle begnügen.

eine irgendwie variierte Vergleichsreihe darbieten und aus der Beurteilung ihrer Relationen zur einzuprägenden „Normalreihe" auf den Stand der Dispositionen schließen können. Wie aber schon bei jenen Bestimmungen der Schwelle für die einzelnen Stellen geläufiger Komplexe bei sofortiger Nachfolge des Vergleichsobjektes (vgl. S. 320) die V.-P. selbst einfach durch Selbstkontrolle ein hinreichend konstantes Ausgangsstadium herbeiführen konnte, indem sie wartete, bis der Normalkomplex nach einer bestimmten Anzahl von Expositionen in allen zu beachtenden Teilen für den Vergleich hinreichend klar und sicher vorzuschweben schien, so ergab sich auch hier als die natürlichste Kontrolle dieser gleichmäßigen Beherrschung der ganzen Reihe das Bewußtsein der Bekanntheit der einzelnen Glieder bei ihrer objektiv unveränderten Wiederkehr im gleichen Expositionstempo. Die Kenntnis der objektiven Gleichheit der Reihen hinderte also bei dem deutlichen Unterschiede der subjektiven Bekanntheit von der Neuheit und bei der Möglichkeit einer Abtrennung gewisser Vorstufen von der endgültigen Bekanntheit keineswegs daran, daß sich die subjektive Beherrschung aller Glieder als „bekannt" erst nach einer individuell ziemlich konstanten Zahl von Wiederholungen einstellte, wobei sich die Abhängigkeit der Einprägung von der Zahl der Expositionen mit ihren Verschiedenheiten der allmählichen Entwickelung dieses Endeffektes an den verschiedenen Stellen, vorübergehenden Rückfälle usw. in ganz ähnlicher Weise zeigte wie beim Auswendiglernen. Es war daher nur konsequent, wenn Reuther nun auch weiterhin bei der Prüfung der Gedächtnisspuren dabei verblieb, die V.-P. einfach wieder die Glieder der objektiv unveränderten Reihen unter den nämlichen Wahrnehmungsbedingungen auf ihre Bekanntheit hin betrachten zu lassen, anstatt eine Abstufung der Vergleichsreihen nach irgendeinem der Schwellenmethode entnommenen Prinzipe vorzunehmen, die bei solchem Ziffernmaterial ja auch nur sehr schwer in ihrer Quantität abzuschätzen bzw. vergleichbar zu gestalten wäre. Als Maß der auf eine Reihe bezogenen Gedächtnisleistung betrachtete Reuther dann das Verhältnis $\frac{b}{s}$ der Anzahl b der wiedererkannten zu der Zahl s aller Glieder und nannte dieses Verfahren die „Methode der identischen Reihen". Bei seinen eigenen Versuchen war deren eigentliches Wesen den V.-P. verborgen geblieben, da sie der Instruktion gemäß auf eine gewöhnliche Abstufungsmethode gefaßt waren. Mit Recht ist nun dagegen von G. E. Müller[1]) der Einwand erhoben worden, daß sich diese Unwissentlichkeit ohne wirkliche objektive Änderungen bei einer allgemeineren Anwendung dieses Verfahrens auf die Dauer nicht aufrecht erhalten lasse. Indessen ist diese Unwissentlichkeit an sich für die Anwendbarkeit der Methode überhaupt noch nicht entscheidend, da sie sich ja, wie schon gesagt, auch beim Einprägungsakt trotz der Wissentlichkeit zur ziemlich präzisen Abgrenzung eines bestimmten Zustandes der Dispositionen bewährt hat. Auch muß man berücksichtigen, daß zwischen den Darbietungen alter Reihen auch fortwährend

1) Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. der Sinnesorgane, Bd. 39, 1905, S. 462. Vgl. dazu Reuther, Einige Bemerkungen über die Methoden und über gewisse Sätze der Gedächtnisforschung, Wundt, Psychol. Stud. II, 1 u. 2 (1906), S. 89.

wieder allmähliche Einprägungen neuer Reihen stattfanden, an denen die V.-P. in besonders natürlicher Weise ohne Voreingenommenheit alle Stufen der Bekanntheit durchlief, so daß eine an sich wohl mögliche Verschiebung des Maßstabes für dieses Kriterium ausgeschlossen war. Außerdem wird aber ja an dem eigentlichen Wesen der Messung von Dispositionen nach dieser Methode nichts geändert, wenn man zur gelegentlichen Kontrolle sowohl bei der Darbietung alter als auch neuer Reihen wirklich auch einmal veränderte Glieder einfügt. Dies wird jedenfalls vor allem bei der Einübung neuer V.-P., aber auch ganz allgemein den objektiven Wert der gefundenen Maße erhöhen. Nur dadurch wäre also bei einem Kenner der Methode die Vergleichbarkeit mit den Reutherschen Resultaten hinreichend zu wahren. In dieser Weise ist denn auch diese Methode in einer nächstens veröffentlichten Untersuchung von K. Jesinghaus am Leipziger Institut (mit dem nämlichen Apparate) wirklich gehandhabt worden, wobei gleichzeitig Lernversuche nach dem unten behandelten Prinzip mittelst eines ganz analogen Materiales durchgeführt wurden, so daß sich die Resultate nach beiden Methoden auch quantitativ vergleichen lassen [1]). Jedenfalls wird der besondere Wert einer auf das Vergleichsprinzip gegründeten Methode zur Analyse des Gedächtnisses für Komplexe, mit der man ebenso wie bei den einfachen Sinnesreizen sehr feine Dispositionen verfolgen kann, hier noch durch die Einfachheit des Verfahrens erhöht, da man zur bloßen Feststellung jenes Quotienten $\frac{b}{s}$ im späteren Zeitpunkt nur eine einzige Exposition braucht. Dadurch läßt sich die Methode also auch in der Praxis über viel längere Zwischenzeiten zwischen N und V als bei einfachen, nur nach der Schwellenmethode zu prüfenden Eindrücken ausdehnen, ohne des Vorteiles der Fähigkeit zur feineren zeitlichen Differenzierung der Analyse verlustig zu gehen. Über das Verhältnis der Werte $\frac{b}{s}$ zu irgendwelchen anderen Maßen, z. B. auch zu den jedenfalls exakteren Schwellenwerten, mit denen sie ja bei stetig abstufbarem Komplexmaterial einmal ausführlicher verglichen werden könnte, ist freilich a priori nichts zu entscheiden. Doch scheint nach Reuthers Resultaten der zeitliche Verlauf der Dispositionen und der Einfluß der Einprägungsart bei Darstellung in diesem Maße von dem Prospekt nach den anderen bisher üblichen Maßen nicht allzuweit abzuweichen [2]).

1) Inzwischen war die Methode auch von Czimbinski in noch nicht veröffentlichten Versuchen auf die Untersuchung der Nebenassoziationen, des Einflusses der absoluten Stelle in der Reihe u. ä. mittelst Umstellungsreihen (vgl. unten § 62, c) angewandt worden.

2) Näheres s. F. Reuther, Beiträge zur Gedächtnisforschung, Wundts Psychol. Stud. I, 1, 1905, S. 4.

Kapitel 15.

Die Messung von Gedächtnisleistungen an der Menge frei reproduzierter Inhalte.

60. Die Einprägung des Lernstoffes.

a) Das Lernen ganzer Reihen sinnloser Silben.

Falls die Nachwirkung eines einmaligen früheren Eindruckes noch kräftig genug ist, um beim Auftreten anderer mit ihm assoziierter Wahrnehmungen eine Erinnerung an ihn selbständig ins Bewußtsein treten zu lassen, kann sich die Analyse des Gedächtnisses einfach in der Weise vollziehen, daß man sich von der V.-P. das von ihr Behaltene eine beliebige Zeit nach dem erstmaligen Eindruck frei wiedergeben läßt (J. Finzi[1]), Ranschburg[2])). Einen Grenzfall dieser Methode bildet also die oben S. 356 genannte Ableitung der Konstanten des Umfanges, bis zu welchem geläufige Elemente eines neuen kurzdauernden Komplexes unmittelbar nach seiner Wahrnehmung richtig und subjektiv sicher wiedergegeben werden können, während es bereits wieder als ein Übergang von da zur Untersuchung des Gedächtnisses nach der soeben betrachteten Vergleichsmethode angesehen werden kann, wenn das Behaltene nicht völlig auswendig wiedergegeben werden muß, sondern nur an der Hand der ganzen Reihe von Objekten (z. B. Figuren, Zahlen, Silben), aus denen der Experimentator die Komplexe zusammengestellt hat, nach einer Art von „Methode der Wahl" (vgl. § 67) rekonstruiert zu werden braucht[3]). Bietet man einen simultanen Komplex länger zu einer diskursiven Auffassung nach allen möglichen Seiten dar, so läßt er sich natürlich schließlich auch in beliebig großem Umfange rein aus dem Gedächtnis rekonstruieren. Doch läßt sich die Einprägung eines ausgedehnteren Stoffes wieder besser übersehen, wenn sie sich auf Reihen kurzdauernder sukzessiv wahrgenommener Glieder gründet. Auch wird die Aufgabe besonders eindeutig, wenn man nicht beliebige Gegenstände darbietet und sie aus dem Gedächtnis irgendwie beschreiben läßt, sondern die sog. rein „mechanische" Reproduktion ganz bestimmter Laute verlangt, die bei akustischer Übermittelung der Reihen von akustisch-

1) Über Auffassungsfähigkeit und Merkfähigkeit, Kräpelins Psychologische Arbeiten Bd. III, 1901, S. 343.

2) Über Art und Wert klinischer Gedächtnismessungen bei nervösen und psychischen Erkrankungen, in Sommer, Klinik für psychische und nervöse Krankheiten II. Bd. 1907, S. 365 (367).

3) A. Diehl, Zum Studium der Merkfähigkeit, Berlin 1902. A. Bernstein, Über eine einfache Methode zur Untersuchung der Merkfähigkeit bzw. des Gedächtnisses bei Geisteskranken. Zeitschr. f. Psychol. u. Phys. d. S. Bd. 32, 1903, S. 259. Für einzelne Quadrate wurde diese Methode außer dem Nachzeichnen auch schon früher von Baldwin und Shaw angewendet, Memory f. Square-Size (Stud. f. Princeton Lab.), Psychol. Review II, 1895, S. 237.

motorischen (-artikulatorischen) Assoziationen und bei der meistens verwendeten Exposition von Lesematerial von optisch-akustisch-artikulatorischen, u. zw. im wesentlichen von einem Gliede zum anderen, weiter geleitet wird. Man spricht dann bekanntlich wie bei sonstigen Fertigkeiten von „Lernen“, bzw. hier speziell von „Auswendiglernen“.

Um bei der Herstellung der Reihen nicht auf zu wenige Kombinationsmöglichkeiten beschränkt zu sein, führte Ebbinghaus, der solche Lernversuche zum ersten Male anstellte[1]), die seitdem oft benützten Reihen aus sinnlosen Silben ein. G. E. Müller und Schumann[2]) stellten dann bei der Nachprüfung und Fortsetzung dieser Untersuchungen (1887—1892) für die Herstellung der Reihen bestimmte Grundsätze auf, nach denen sich die einzelnen Silben jeder Reihe gleich schwierig und die Reihen unter sich möglichst vergleichbar gestalten ließen, während Ebbinghaus seine ursprünglichen Bestrebungen in der gleichen Richtung später zugunsten der Herstellung rein zufälliger Buchstabenkombinationen wieder aufgegeben hatte. In einer von ihnen als „normal“ bezeichneten Silbenreihe[3]) waren 1. alle Anfangskonsonanten, Vokallaute und Endkonsonanten verschieden, 2. stimmte der Anfangskonsonant einer Silbe nie mit dem Endkonsonanten der unmittelbar vorhergehenden Silbe überein, 3. war der Anfangskonsonant der ersten und der Endkonsonant der zweiten Silbe, die unter den speziellen Versuchsbedingungen beim rhythmischen Lesen in einen zweiteiligen Takt zusammengefaßt wurden, niemals identisch[4]), und 4. bildeten die Buchstaben zweier oder mehrerer unmittelbar aufeinanderfolgender Silben nie ein bekanntes mehrsilbiges Wort oder eine Phrase. Um nach diesen Vorschriften z. B. Reihen von je 12 Silben zu bilden, wurden die 17 ebenso wie bei Ebbinghaus benützten Anfangskonsonanten b, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, r, s, t, w, z, (sch) — letzteres kam später nicht mehr überall in Betracht — einzeln auf Pappstückchen geschrieben und in einen ersten Kasten gelegt; ebenso enthielt ein zweiter Kasten die 12 Vokallaute a, aa (fehlte bei Ebbinghaus), e, i, o, u, ä, ö, ü, au, ei, eu, und ein dritter die 12 Endkonsonanten f, k, l, m, n, p, r, s, t, z[5]), ch, sch. Aus diesen Kästen wurden die drei Buchstaben je einer Silbe, nach Mischung vor jeder neuen Reihe, ohne Zurücklegung gezogen und unter Erfüllung der übrigen Vorschriften zur Reihe angesetzt. Doch gelangten insgesamt nur 2210 Silben zur Verwendung, weil auch noch euphonische Gesichtspunkte in Frage kamen. Die Benutzung der nämlichen Silbe in einem früheren Versuch sollte mindestens 10 Tage zurückliegen. Dies konnte man an der Hand einer Silbentafel kontrollieren, deren 17 Vertikalkolumnen den einzelnen Anfangskonsonanten und deren 12 Horizontalreihen den Vokallauten entsprachen, so daß zu dem erforderlichen

1) H. Ebbinghaus, Über das Gedächtnis. Leipzig 1885.

2) G. E. Müller und F. Schumann, Experimentelle Beiträge zur Untersuchung des Gedächtnisses, Zeitschr. f. Psychol. u. Phys. d. S. VI, 1894, S. 81 u. 257.

3) a. a. O. S. 95 ff.

4) Bei gelegentlichen, als „verschärft normal“ bezeichneten Reihen oder besser Reihengruppen war außerdem auch noch verlangt, daß am nämlichen Tage keine Silben vorkamen, die hinsichtlich ihrer beiden ersten oder ihrer beiden letzen Buchstaben oder hinsichtlich ihrer Anfangs- und Endkonsonanten miteinander übereinstimmten.

5) z wurde bei Ebbinghaus nicht als Endkonsonant verwendet.

Überblick nur der Endkonsonant mit Angabe des Versuchstages in eines der 17×12 Fächer einzutragen war. Aus den hier angedeuteten Regeln ist wohl auch für alle anderen Reihenlängen und für noch speziellere Ansprüche[1]) die bestmögliche Erreichung des Endzweckes aller dieser Detailvorschriften in analoger Weise abzuleiten. Von allgemeinster Bedeutung war schließlich auch noch, daß Müller und Schumann völlige Unwissentlichkeit des Verfahrens einführten, indem die Tätigkeit des Experimentators, der die Reihen herstellte und darbot, und der V.-P. stets streng geschieden wurde. Auch bewirkten sie die Exposition der Silben unter genauen Zeitverhältnissen und annähernd sukzessiv mit ihrem schon S. 383 genannten Apparat, wofür allerdings seitdem in ähnlichen Arbeiten auch schon mehrmals eine der oben erwähnten Vorrichtungen zur sprungweise fortschreitenden Darbietung eingetreten ist. Dabei konnte dann auch die Richtigkeit des freien Hersagens nach Inhalt und Tempo sehr leicht objektiv kontrolliert werden, indem der Experimentator die jeweils genannte Silbe auf der gleichzeitig wieder im nämlichen Tempo ablaufenden Trommel nachsehen konnte. Dagegen findet sich bei Ebbinghaus, der allein arbeitete, nirgends eine Angabe darüber, ob er nicht wenigstens nachträglich Fehler des subjektiv sicher und im richtigen, am Ticken eines Chronometers kontrollierten Tempo Hergesagten festzustellen suchte, bzw. ob er dies vielleicht unter seinen Versuchsbedingungen überhaupt für unmöglich erachtete.

b) Die Einprägung einer Reihe zweigliedriger Verbindungen, insbesondere die reine Paarmethode.

Im alltäglichen Leben beziehen sich solche Aufgaben des Auswendiglernens ganzer Reihen allerdings im allgemeinen nur auf sinnvolle Texte, bei denen die spätere Reproduktion von den nämlichen Hilfsassoziationen geläufiger Wort- und Satzbildungen sowie sachlicher Zusammenhänge unterstützt wird, wie die erstmalige Auffassung. Subjektiv „sinnlose“ Assoziationsglieder sind also hier meistens nur dann im Spiel, wenn das Individuum die Laute und Zeichen einer Sprache oder Schrift neu verstehen oder in ein anderes System zu übersetzen lernt. Diese Prozesse vollziehen sich aber im allgemeinen nur in zweigliedrigen Verbindungen, die nur so weit auswendig gelernt zu werden brauchen, daß das ursprünglich neue Element bei der Wahrnehmung des anderen Gliedes der Assoziation ins Bewußtsein tritt. Doch ist meistens wenigstens noch die eine beim Lernen jener sinnlosen Silbenreihen beteiligte Erschwerung dabei, daß ganze Reihen solcher Paare in einem gewissen Rhythmus ununterbrochen nacheinander durchgenommen werden, wie z. B. beim Lernen von Vokabeln, von Geschichtszahlen u. dergl.

Auch wenn eine Reihe in der Absicht gelesen wird, sie zuletzt im ganzen frei hersagen zu können, dominieren übrigens für gewöhnlich enger begrenzte

1) So stellte z. B. O. Lipmann mit etwas weniger Elementen 1300 Silben für 16-gliedrige Reihen her. (Die Wirkung der einzelnen Wiederholungen auf verschieden starke und verschieden alte Assoziationen. Zeitschr. f. Psychol. u. Phys. d. S. 35, 1904, S. 195 (S. 201.)

Assoziationen, da die Silben unwillkürlich zu Takten zusammengefaßt werden. Deshalb bildet ein deutlicher Leserhythmus, der als $^3/_4$ oder $^4/_4$ Takt schon in Ebbinghaus' Selbstinstruktion aufgenommen war, sogar die konstanteste Lern- und Reproduktionsbedingung. Dabei enthält aber jedenfalls der einfachste, zweiteilige Takt mit Betonung der ersten Silbe, also der Trochäus, die elementarsten Voraussetzungen der Assoziation. Es kann daher von irgendeiner betonten Silbe aus auch bei ihrer isolierten Darbietung leicht die folgende Silbe frei reproduziert werden, wie es bei jenen zweiteiligen Assoziationen des alltäglichen Lebens der Fall ist, eine Partialleistung, für die somit die beim Hersagen der Reihe im ganzen sonst noch erforderlichen Assoziationen von Takt zu Takt, die Assoziation einer Silbe mit ihrer relativen Stelle innerhalb der Reihe u. ä. wertlos sind. Nachdem nun G. E. Müller schon in seinen mit Schumann unternommenen Versuchen des Hersagens ganzer Reihen der Bedeutung diesen Binnenassoziationen innerhalb der (trochäischen) Zweitakte nachgegangen war, gelangte er in seiner späteren mit Pilzecker durchgeführten Untersuchung (seit 1892) dahin, auf das Auswendigkönnen der Reihe im ganzen überhaupt kein Gewicht mehr zu legen, sondern nur noch jene Fähigkeit zur Reproduktion des zweiten Taktgliedes bei der späteren Vorzeigung des erstern zu prüfen, u. zw. bei völlig zufälliger und wechselnder Reihenfolge der ursprünglich betonten Silben[1]). Allerdings wurde die Reihe beim Einprägen, äußerlich betrachtet, in der nämlichen Weise exponiert und abgelesen wie bei den früheren Versuchen des Auswendiglernens der ganzen Reihe. Auch war die V.-P. „selbstverständlich angewiesen, über den Zweck der Versuchsreihe nicht weiter nachzudenken" (a. a. O. S. 8). Da aber doch die Art der Prüfung der V.-P. bekannt war und zum mindesten keine Instruktion vorlag, die Reihe beim Lernen so durchzunehmen, als ob sie im ganzen frei hergesagt werden solle, so wird das innere Verhalten der V.-P. der Reihe gegenüber wohl ein prinzipiell anderes geworden sein als in den früheren Versuchen. Die stets unwillkürlich unterlaufenden Versuche zur freien Reproduktion werden sich schließlich im wesentlichen wohl auf die unterschiedliche Wiedererkennung der später als Stichreize dienenden Iktus-Silben und die freie Hinzufügung der unbetonten Silben beschränkt haben, ohne daß freilich eine ganz klare Abtrennung dieser Partialleistungen von Tendenzen zur freien Reproduktion der Stichworte selbst erfolgt sein wird. Eindeutige Versuchsbedingungen dürften daher erst wieder bei der sog. Wortpaarmethode vorliegen, auf die sich Ranschburg bei seinen klinischen Untersuchungen des Gedächtnisses (seit 1900) schon deshalb hingeführt sah, weil bei geisteskranken und nervösen Personen mit verminderter Auffassungs- und Merkfähigkeit das Auswendig-Hersagen ganzer Reihen sinnloser Silben u. dergl. überhaupt nicht mehr möglich sein kann, während sich zweigliedrige Assoziationen, insbesondere zwischen sinnvollen Worten, durch wiederholte simultane Darbietung der Wortpaare noch neu bilden, bzw. bei einer schon vorhandenen Beziehung experimentell so weit verstärken lassen, daß das zweite, z. B. zweisilbig gewählte Wort bei

1) Müller und Pilzecker, Experimentelle Beiträge zur Lehre vom Gedächtnis. Zeitschr. f. Psychol. u. Phys. d. S., Erg. Bd. 1, 1900.

der erneuten Wahrnehmung des ersten (einsilbigen) „Stichwortes“ richtig genannt wird[1]). Auch früher suchte man ja schon den nicht experimentell gewonnenen, sondern aus dem alltäglichen Leben fertig mitgebrachten Bestand der Assoziationen bei Gesunden und Kranken zunächst vor allem in zweigliedrigen Einzelverbindungen zu entwickeln[1]). Diese auf das mannig-

1) Studien über die Merkfähigkeit d. Normalen, Nervenschwachen u. Geisteskranken, Monatschr. f. Psychiatrie und Neurologie 1901, Bd. IX, sowie a. S. 388 a. O. (Die Fortsetzung vgl. ebenda (Sommer, Klinik usw.) Bd. III, 2, 1908, S. 2 und Bd. V, 2, 1910, S. 89. Außerdem: Ders., „Die Ergebnisse der experimentellen Psychopathologie des Gedächtnisses“ (Sammelreferat beim IV. Kongreß für experimentelle Psychologie in Innsbruck, Ber. herausgeg. von Fr. Schumann, 1911, S. 95 ff.)

2) Die V.-P. ist hier z. B. instruiert, die erste beste Vorstellung zu nennen, die ihr auf ein dargebotenes Reizwort oder Bild hin einfällt, während bei den oben ausführlich behandelten Gedächtnisversuchen eine ganz bestimmte, experimentell entstandene Verbindung zur Geltung kommen und bei vollkommener Wiedergabe auch mit dem Bewußtsein der Richtigkeit in bezug auf die Entstehungsbedingungen auftreten soll. Deshalb ist bei jenen „Assoziationsversuchen“ freilich auch nichts Direktes über die Abhängigkeit der Reproduktion von der Entstehung und dem zeitlichen Verlauf der Dispositionen auszumachen. Sie liefern vielmehr nur eine Statistik der fertigen assoziativen Grundlagen des Denkens eines bestimmten Individuums und haben daher allerdings ebenfalls eine große diagnostische Bedeutung. Wenn an Stelle der rein mechanischen Assoziation auf die Reizworte hin die Beantwortung einer Frage verlangt wird, gehen die Versuche in die eigentliche Untersuchung des Denkens über, freilich zunächst ebenfalls in der weniger exakten Form, bei der der ausgefragte Begriff nicht zugleich selbst unter genauer kontrollierbaren Bedingungen gebildet wurde (vgl. S. 8 f. u. 234).

Über diese Assoziationsversuche (und ihre wichtige Verwertung in der psychopathologischen Diagnose) vgl. u. a.:

Fr. Galton, Brain, II 1879, p. 154, und Inquiries into human faculty and its development, London 1883. p. 185 ff.

M. Trautscholdt, Experimentelle Untersuchungen über die Assoziation der Vorstellungen, Wundts Phil. Stud. I, 1882, S. 216 ff.

Münsterberg, Beiträge zur experimentellen Psychologie, Heft 1, 1889, S. 64 ff.

Kraepelin, Der psychologische Versuch in der Psychiatrie, Kraepelins Psychol. Arbeiten I, 1896, S. 9 ff.

Aschaffenburg, Experimentelle Studien über Assoziationen, ebenda, I, 1896, S. 209 II, 1897, 1, IV, 1902, S. 235.

Sommer, Lehrbuch der psychopathologischen Untersuchungsmethoden, 1899, S. 326 ff.

S. Freud, Kleine Schriften zur Neurosenlehre aus den Jahren 1893—1906. Über die von ihm angeregte Literatur vgl. K. Mittenzwey, Versuch zu einer Darstellung und Kritik der Freudschen Neurosenlehre in W. Spechts Zeitschr. f. Pathopsychologie I, 1. H. 1911, S. 164 (S. 168 f).

A. Wreschner, Die Reproduktion und Assoziation von Vorstellungen, Zeitschr. f. Psychologie u. Ph. der S. I. Abt., 1907, Erg.-Bd. 3, I u. II.

Die Gedächtnisversuche nach der „Paarmethode“ können zunächst wenigstens den einfachen Assoziationsversuchen (mit freien Assoziationen an einen Stichreiz), nur eben unter jenen exakteren Bedingungen, näher gebracht werden, wenn die Reproduktionsaufgabe durch mehrfache Verwendung des nämlichen Stichreizes vieldeutig wird.

Die höheren Denkvorgänge, die durch eine Frage angeregt werden, schließen aber natürlich bereits teilweise mehrgliedrige Assoziationen ein, also wieder ähnlich wie beim freien Hersagen einer ganzen Reihe. Doch trat bei ihrer Analyse sogleich die Aufgabe zur Wiedergabe derjenigen Momente in den Vordergrund, die das Bewußtsein des Erkennens bei der Operation mit vorwiegend sehr unanschaulich repräsentierten Begriffen charakterisieren. Auch bei den einfachen Gedächtnisversuchen gehört aber faltigste variierbare „Paarmethode" Ranschburgs wandte dann z. B. Lipmann auch in der Form an, daß er zweistellige Zahlen als „Stichreize" für einzelne Buchstaben nahm und z. B. 79 i, 31 z usw. lernen ließ (s. S. 390, A. 1). Auch suchte er ihr weiterhin bei der Rückkehr zu den sinnlosen Silben die Methode von Müller-Pilzecker dadurch noch ähnlicher zu machen, daß er die (betonten) Silben, welche der V.-P. nur als „Stichreize" unterschiedlich geläufig zu werden brauchten, jedesmal in roten Lettern, die an sie zu assoziierenden (unbetonten) aber in blauen darbot.

c) Die Schwierigkeiten der Bestimmung des Stadiums der Einprägung ganzer Reihen und der hierzu aufgewendeten psychischen Arbeit.

Gleichgültig, ob man aber nun lauter solche Einzelassoziationen untersucht, deren Bildung und Aktualisierung nur durch das reihenweise Einlernen und Reproduzieren kompliziert ist, oder das Auswendiglernen ganzer Reihen, hat man beim Vorgange der Einprägung, dessen eindeutige Bestimmtheit nach S. 381 für den Erfolg der ganzen Untersuchung von entscheidender Bedeutung sein muß, auf die beiden Komponenten des einfachen lauten oder leisen Lesens (bzw. des einfachen Zuhörens) einerseits und des Versuches zur freien Reproduktion des vorher Aufgenommenen andererseits zu achten, von deren beiderseitigem Verhältnis der ganze weitere Verlauf der Dispositionen abhängig ist. Ein Mangel an Kontrolle in dieser Hinsicht kann natürlich um so störender werden, je mehr Wiederholungen der Reihe für den gewünschten Effekt erforderlich werden, so daß die schon oben genannte Vieldeutigkeit bei den Versuchen von Müller und Pilzecker vielleicht noch nicht so schwer ins Gewicht fällt. Denn deren Ansprüche bei der Prüfung der Dispositionen sind so sehr herabgesetzt, daß es sich weiterhin „empfiehlt, soweit nicht anderweite Rücksichten entgegenstehen, den Silbenreihen eine größere Länge zu geben", sie aber dafür „nicht gar so fest einprägen zu lassen". Bei den von Ebbinghaus sowie von Müller und Schumann a. a. O. untersuchten Leistungen suchte man dagegen einen möglichst konstant zu definierenden Zustand in der Weise zu erreichen, bzw. nach seinem Verlust wiederzugewinnen, daß man die Reihe so lange lesen ließ, bis sie „zum erstenmal, nach gegebenem Anfangsglied, ohne Stocken in einem bestimmten Tempo[1]) und mit dem Bewußtsein der Fehlerlosigkeit auswendig hergesagt werden konnte". (Ebbinghaus a. a. O. S. 31.)

---

z. B. jenes Bewußtsein der Richtigkeit zu dieser Kategorie von Bewußtseinsmomenten hinzu. Ja diese sind schließlich auch bei der Analyse der einfachsten Elementarleistung zu berücksichtigen, die niemals ein bloßes Aggregat von Elementen ohne solche höhere Bewußtseinsmomente bilden. Über die Literatur zu diesen z. Z. noch lebhaft diskutierten Streitfragen vgl. Wundt, Grundr. d. Physiol. Psych. III[6], S. 551.

1) Bei Ebbinghaus traf sowohl beim Einlernen als auch beim richtigen Hersagen auf jede Silbe ca. 0,4 Sek. Bei Müller und Schumann konnte das vom Experimentator zu kontrollierende „richtige" Tempo des freien Hersagens in der Weise definiert werden, daß die Reproduktion sich eingestellt haben müsse, bevor die Silbe auf der wie beim Lernen ablaufenden Trommel in dem hierbei vom Experimentator beobachteten Gesichtsfeld des Apparates auftrat (vgl. S. 390).

Wenn aber nun auch dieser Zustand des momentanen[1]) Auswendigkönnens in solcher oder ähnlicher Form eindeutig genug definiert werden kann, so ist doch die geistige Arbeit, die bis zu seiner Erreichung aufgewendet worden ist, nur schwer einzuschätzen, wenn bei den Lesungen fortwährend schon in unkontrollierbarer Weise Versuche unterlaufen, einzelne Silben bzw. ganze Abschnitte der Reihe bis zum Eintreten einer Stockung[2]) auswendig herzusagen. Sehen wir hier auch einstweilen noch von der besonderen Schwierigkeit ab, die sich hieraus bei einer speziellen Methode zur Messung der späteren Gedächtnisleistung, bei der sog. „Ersparnismethode" (s. § 61, b) ergibt, so kommt die bei der Einprägung aufgewandte Arbeit doch zunächst schon als selbständige Bedingung der Assoziationsfestigkeit in Betracht, gleichgültig mit welchen Methoden man ihren Effekt messen will. Denn es ist für das Behalten einzelner Assoziationen oder einer ganzen Reihe keineswegs ohne Belang, ob man beim Lernen gerade nur so viel Arbeit aufgewandt hat, um die freie Reproduktion eben vollziehen zu können, oder ob man noch mehr oder weniger darüber hinausgeht. Ja es erscheint sogar ziemlich wahrscheinlich, daß in diesen verschiedenen Fällen auch schon die primären Bewußtseinsprozesse selbst beim sog. richtigen, d. h. von jener Ebbinghausschen Definition des Endzustandes nicht merklich abweichenden Hersagen wesentlich untereinander differieren. Deshalb schob z. B. Knors[3]) zur Erzielung einer größeren Eindeutigkeit des Lernprozesses nach jeder Lesung der ganzen Reihe einen besonderen Versuch zu ihrem freien Hersagen ein.

Bei der in den beiden hier gemeinten Arbeiten von Ebbinghaus und Müller noch ausgeschlossenen Spezialuntersuchung über die Abhängigkeit der freien Reproduktion von der Zahl und Art der Wiederholungen wird man aber ja überhaupt nach einem allgemeineren Kriterium der Eindeutigkeit des Lernprozesses und der Konstanz des jeweils erreichten Stadiums suchen müssen, da eben hier die in jener Definition vorausgesetzten Bedingungen selbst variiert werden und zum Hersagen der ganzen Reihe stets bereits eine gewisse Mindestzahl an Wiederholungen erforderlich ist. Man könnte zunächst sogar einfach wieder ebenso wie bei der Untersuchung der primären Auffassungs- und Vergleichsakte mit der Konstanz der objektiven und subjektiven Bedingungen beim Ablesen der Silben überhaupt und ihrer Kontrolle durch die Konstanz des Resultates der späteren Dispositionsmessung zufrieden sein, gleichgültig, welches Maß man für die Ge-

1) Da diese sichere Beherrschung der ganzen Reihe wegen der unvermeidlichen Dispositionsschwankungen unter Umständen schon beim nächsten Versuch des Hersagens der Reihe wieder verschwunden sein kann, suchte Ebbinghaus eine Zeitlang das als konstant zu betrachtende Endstadium durch die Fähigkeit zu definieren, daß man die Reihe zweimal hintereinander in der oben genannten Weise hersagen könne.

2) Bei den selbständigen, mit dem Durchlesen „zwanglos abwechselnden" Versuchen des freien Hersagens, die als eine besondere Wiederholung gezählt wurden, las man die Reihe, sobald eine Stockung auftrat, einfach wieder ununterbrochen zu Ende, so daß also die beiden Kombinationen aus den beiden Hauptformen des Ablaufes wenigstens nur zweigliedrig waren, allerdings wohl mit ziemlich irregulären Schwankungen an der Übergangsstelle, d. h. am Punkte der Stockung.

3) C. Knors, Experimentelle Untersuchungen über den Lernprozeß. Archiv f. d. ges. Psych. XVII, 1910, S. 297.

dächtnisleistung bei unvollständiger Beherrschung der Reihe wählen wollte. In diesem Falle brauchte man aber dann die Lesungen, deren Anzahl bei der Untersuchung ihres Einflusses von einer Versuchsgruppe zur anderen abzustufen ist, vor der Prüfung der Reproduzierbarkeit der Reihe überhaupt durch keinerlei ausdrückliche Versuche zum Hersagen unterbrechen zu lassen[1]). Da indessen die V.-P. im allgemeinen doch der Leistung der freien Reproduktion (im ganzen oder nach Teilen) zustrebt und deren Prüfung voraussieht, so wird freilich auch in diesem Falle beim wiederholten Lesen nicht nur das Bewußtsein der Bekanntheit der Glieder wie bei den S. 386 genannten Versuchen auftreten, sondern es werden sich eigenartige neue Kombinationen der passiven Auffassung mit der Selbstbeobachtung, ob man sie auch frei hätte reproduzieren können, herausbilden. Die Verteilung dieser Prozesse über die ganze Reihe und die Verschiebungen des Schwerpunktes der geistigen Verarbeitung an die jeweils schwächsten Stellen werden sich aber in diesem Falle von der Herausbildung der bloßen Bekanntheit in den Versuchen, in denen diese allein erstrebt wird, kaum wesentlich unterscheiden. Dies brauchen freilich noch nicht die günstigsten Bedingungen für das Auswendiglernen einer Reihe im ganzen oder auch nur für die Beherrschung aller Paar-Assoziationen zu sein, sondern diese werden eher bei einem zunehmenden Überschuß der Versuche zur freien Reproduktion über die mehr passive Wiederholung des Lernstoffes anzunehmen sein. Darauf scheint auch Witasek[2]) bei seinem speziellen Lernverfahren hinzustreben, bei dem die Versuche zur freien Reproduktion von dem einfach wiederholten Lesen dadurch durchweg scharf abgetrennt bleiben, daß beim Eintritt einer Stockung nicht die Reihe wieder einfach zu Ende gelesen wird, sondern immer nur die fehlende Silbe der V.-P. nach einer gewissen Zwischenzeit vom Experimentator zugerufen wird, bis die Reihe zu Ende ist, also wie bei dem schon früher zur Messung der Gedächtnisleistung benützten Verfahren der sog. „Hilfen" (vgl. § 61, a, 2). Indessen wird ein solches Lernen wenigstens dann, wenn einmal noch viele Hilfen nötig sind, nach dem soeben Gesagten bezüglich seiner Einprägungswirkung hinter dem einfachen Weiterlesen zurückstehen, zumal wenn als Intervall bis zum Einspringen der Hilfen 10 Sek. gewählt sind, wie es Witasek tat, um die Methode eben zugleich zum Nachweis der bereits vorhandenen Spuren geeignet zu machen.

Da natürlich die früheren Lesungen und freien Reproduktionen stets auch den Effekt jeder späteren Wiederholung mit bestimmen, so würde sich schließlich ein eindeutigeres Bild der Einprägung überhaupt niemals anders als durch Unterscheidung der verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten bezüglich beider Operationen gewinnen lassen, die sich zunehmend vermehren, wenn die Reihe unter Variation der Stellungnahme zu ihren einzelnen Gliedern und Unterabteilungen einmal, zweimal usw. durchgenommen wird. Auch in dieser Hinsicht bietet aber wohl die Paarmethode (s. S. 391) bei geeigneter Anwendung, d. h. vor allem nach Beseitigung der Vieldeutig-

1) Vgl. hierzu z. B. Nr. 3 der Instruktion bei Witasek, Über Lesen und Rezitieren in ihren Beziehungen zum Gedächtnis, Zeitschr. f. Psych. u. Ph. d. S. Bd. 44, 1. Abt. 1907, S. 161 (S. 166).

2) Vgl. ebenda.

keit des Verhaltens beim Lernen, die nach S. 391 bei der Müller-Pilzeckerschen Methode droht, einfachere Voraussetzungen dar, da die relative Isolierung der einzelnen Teilassoziationen einen etwas klareren Überblick über jene Kombinationsmöglichkeiten zulassen wird. Doch braucht hier auf diese Fragen der sog. „Ökonomie" des Lernens, zu denen vor allem auch die Probleme bezüglich des Einflusses zeitlich weiter auseinander liegender Wiederholungen hinzugehören, nicht weiter eingegangen zu werden, da sie im wesentlichen nach den allgemeinen methodischen Gesichtspunkten zu bearbeiten sind[1]). Es sei nur noch darauf hingewiesen, daß der Effekt der Versuche zum Auswendiglernen ganzer Reihen und zur Einprägung einer ganzen Reihe von Einzelassoziationen, bei denen schon diese unmittelbare Aufeinanderfolge die Bedingungen für die Ausbildung der Reproduktionsdispositionen wesentlich anders gestaltet als bei isolierten Wahrnehmungen einzelner Paare[2]), natürlich auch durch die Beschäftigung, die der Reihe im ganzen unmittelbar nachfolgt, wesentlich beeinflußt wird. Daher ist also auch bei den Wiederholungen sorgfältig auf die Länge und Ausfüllung der Zwischenpausen zu achten.

Natürlich sind diese Fragen nach der Art der allmählichen Entwicklung leistungsfähiger Assoziationen auch mit anderen Bewußtseinsinhalten, und zwar bei allen möglichen meßbaren Erscheinungsformen des assoziativen Mechanismus zu verfolgen[3]).

61. Die Messung der Gedächtnisleistung.

a) Die Abzählung der sog. „Treffer".

1. Die Bestimmung der Trefferzahl bei unmittelbarer Wiedergabe (ohne Hilfen).

Zur Messung der Gedächtnisleistung in einem bestimmten Stadium des Auswendigkönnens sind zwei Hauptmethoden zur Anwendung gekommen.

1) Vgl. hierüber u. a. noch Jost, Die Assoziationsfestigkeit in ihrer Abhängigkeit von der Verteilung der Wiederholungen, Zeitschr. f. Psychol. u. Ph. d. S. Bd. 14, 1897, S. 459. L. Steffens, Experimentelle Beiträge zur Lehre vom ökonomischen Lernen, ebenda Bd. 22, 1900, S. 321. E. Ebert und E. Meumann, Über einige Grundfragen der Psychologie der Übungsphänomene im Bereiche des Gedächtnisses, Arch. f. d. ges. Psychologie IV, 1905, S. 1. E. Meumann, Ökonomie und Technik des Gedächtnisses, Leipzig 1908. Ders., Vorlesungen zur Einführung in die experimentelle Pädagogik, II. Bd. 1907, S. 1ff. (u. Literatur ebda. S. 434f). G. E. Müller, Zur Analyse der Gedächtnistätigkeit und des Vorstellungsverlaufes, I. Teil, 1911, Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. d. S., 1. Abt. Erg.-Bd. 5, besonders Abschn. 4 (Über die Komplexbildung beim Lernen, S. 253ff.).

2) Aus diesem Grunde besitzt auch die Methode der freien Wahl der Expositionszeit jedes Reihengliedes beim Erlernen ein besonderes Interesse, die den Bedingungen des Erlernens im alltäglichen Leben am nächsten kommt und dessen experimentelle Verwertbarkeit in noch nicht veröffentlichten Untersuchungen aus dem Meumannschen Institute geprüft wird.

3) Über die allmähliche Ausbildung einer auf Assoziationen beruhenden Gewichtstäuschung vgl. z. B. Laura Steffens, Über die motorische Einstellung. Zeitschr. f. Psychol. u. Phys. d. S., Bd. 23, 1900, S. 241.

Ebbinghaus bestimmte in seinen ersten, oben beschriebenen Versuchen die Zahl WL der Wiederholungen, die später notwendig werden, um den inzwischen verloren gegangenen Ausgangszustand wieder zu erreichen, bei dem die ganze Reihe nach L ursprünglichen Wiederholungen frei hergesagt werden konnte (vgl. S. 393). Die Differenz $\varDelta = L - WL$ war für ihn „die bei dem Wiedererlernen gefundene Arbeitsersparnis" (a. a. O. S. 93). Im Anschluß an Jost (a. S. 396, A. 1 a. O. S. 438) nennt man dies kurz das „Ersparnisverfahren". Direkter als diese unten erst an zweiter Stelle weiter zu verfolgende Messungsmethode dürfte dagegen die neue aktuelle Leistung eines bestimmten Stadiums durch die Abzählung der aus dem Gedächtnis richtig wiedergegebenen Elemente dargestellt werden, falls nur geeignete Nebenbedingungen hinzutreten, welche hierbei den Bestand an tatsächlich vorhandenen Assoziationen in möglichst großem Umfange zu aktualisieren gestatten. Jost, sowie G. E. Müller und Pilzecker bezeichneten diese richtig reproduzierten Elemente (a. S. 391 a. O.) als „Treffer" und stellten die Abzählung der Treffer jenem Ebbinghausschen „Ersparnisverfahren" als sog. „Treffermethode" zur Prüfung der Gedächtnisleistung gegenüber. Da dies aber im Zusammenhang mit der von Müller und Pilzecker eingeführten Prüfung einer speziellen Art der Gedächtnisleistung geschah, bei der nach S. 391 die Einstellung der V.-P. während des Erlernens sich derjenigen bei der „Paarmethode" Ranschburgs annähern mußte, so hat man leider den Begriff der „Treffermethode" seitdem allgemein so eingeengt, daß sie sich überhaupt nur auf solche im wesentlichen mit der Paarmethode übereinstimmende Versuchsbedingungen bezog. An sich ist aber dieser Begriff eines Hauptverfahrens zur Prüfung der Gedächtnisleistung in seinem Gegensatz zum Ersparnisverfahren so allgemein, daß er nicht nur die Müller-Pilzeckersche und Ranschburgsche Messung der Leistung in sich befaßt, sondern auch das Abzählen der „Treffer" bei den Versuchen einer freien Wiedergabe ganzer Reihen, mit dem seit 1895 zum ersten Male W. G. Smith auf Anregung Münsterbergs direkter als Ebbinghaus auf das Ziel loszugehen suchte, sowie die sog. „Methode der Hilfen", durch die dann Ebbinghaus selbst diese Aufgabe in vollkommenerer Weise als Smith zu lösen wußte.

Wegen seiner Unvollkommenheiten kann freilich der Smithsche Versuch, der begrifflich unter die Treffermethode fällt, gar nicht als eine gleichwertige Messung der Gedächtnisleistung (i. eng. S., d. h. längere Zeit nach der Einprägung) gezählt werden. Er ist hier nur zu erwähnen, weil er doch wenigstens sogleich auf die spezielle Unterfrage einer Einschätzung der sog. „Teiltreffer" hinführte, und weil er zugleich die methodische Beziehung zu der S. 361 beschriebenen Anwendung des ganz analogen Verfahrens bei der Feststellung des sog. Umfanges der Neuauffassung herstellt. Nach einmaliger Darbietung eines kurzdauernden Simultankomplexes oder einer kurzen, in einem einzigen Akte aufzufassenden Reihe bildet ja in der Tat der Versuch, so viel als möglich von dem Wahrgenommenen unmittelbar darnach frei aus dem Gedächtnis wiederzugeben, die vollwertige Methode zur exakten Abgrenzung jenes für die Neuauffassung charakteristischen Umfanges. Ebenso, wie aber Cattell (a. S. 368 a. O.) mittelst dieses Versuches auch schon den Effekt der wiederholten Darbietung eines diskursiv aufgenommenen Simultankomplexes verwertete, wollte Smith[1]) hiermit die Wirkung der einzelnen Wiederholungen beim Auswendiglernen ganzer Silbenreihen verfolgen, das unter ähnlichen Bedingungen wie bei Ebbinghaus[2]) geschah. Da nun zwischen der richtigen Wiedergabe eines Komplexelementes mit dem Bewußtsein seiner Richtigkeit und dem völligen Ausfall desselben eine ziemlich stetige Reihe von Zwischenstufen einer nur teilweisen oder unsicheren Reproduktion liegt, so verlangt dieses Gesamtmaß der Leistung auch noch die Abschätzung der teilweisen „Treffer" bzw. der entsprechenden Fehler. Diese ist zunächst durch eine Analyse der verschiedenen Arten der Fehler vorzubereiten, wie sie Smith bereits ausführlich vornahm, indem er zwischen dem völligen Wegfall einer Silbe, ihrer Ersetzung durch eine ähnliche Silbe und ihrer bloßen Umstellung, sowie bezüglich der Ersatzsilbe noch zwischen verschiedenen Graden ihrer Ähnlichkeit unterschied (a. a. O. S. 24). Die quantitative Einschätzung dieser verschiedenen Teilleistungen ist freilich vorläufig kaum ohne willkürliche Konventionen durchführbar. Ranschburg (a. a. O.) und Ephrussi[3]) unterschieden (bei Anwendung der Paarmethode) zunächst nur zwischen der völligen Null-Leistung und halben Treffern, die jener bei nachträglicher (spontaner oder angeregter) Berichtigung, dieser bei der Richtigkeit mindestens zweier Silbenbuchstaben ansetzte, während Ebert und Meumann (bei Versuchen zur Wiedergabe ganzer Reihen, a. S. 396 a. O. S. 11) das Weglassen oder Hinzutun einer Zahl als Fehler 1 (bzw. Leistung 0), den Fehler bei einer Verschiebung um mehr als eine Stelle als $^3/_4$, bei einer solchen um nur 1 Stelle als $^1/_2$ und bei nachträglicher Berichtigung als $^1/_4$ rechneten, und Lipmann (bei seiner S. 393 genannten Paarmethode) einfach einen nach Art und Lage richtigen Buchstaben als $^1/_3$, zwei als $^2/_3$ Treffer betrachtete. Witasek suchte dann bei seinen S. 395 und sogleich nochmals genannten Reproduktionen ganzer Reihen diese quantitativen Abstufungen auf Grund einer ähnlichen Detailanalyse der Fehlerarten[4]) wie bei Smith noch zu verfeinern, wobei er theoretische Überlegungen und empirische Beobachtungen über die zur Vermeidung der verschiedenen Fälle notwendige Leistung zu Rate zog. Die Grade der subjektiven Sicherheit sind jedoch in den genannten Arbeiten nicht besonders in Anschlag gebracht worden.

2. Die Methode der „Hilfen".

Wie aber das unmittelbar Wiedergegebene bereits den Umfang an ursprünglich bewußten Wahrnehmungselementen nicht zu erschöpfen, sondern nur einige wenige, besonders klare Momente herauszuheben vermag, so darf man sich auch bei der Untersuchung des Gedächtnisses nur da auf dieses Maß beschränken, wo eine einzige Assoziation ohne weitere Reproduktions-

1) The Place of repetition in memory, Psych. Rev. III, 1896, S. 21.

2) Es erscheint einigermaßen irreführend, wenn es a. a. O. heißt, daß die Versuche unter ähnlichen Bedingungen wie bei Müller und Schumann ausgeführt worden seien.

3) P. Ephrussi, Experimentelle Beiträge zur Lehre vom Gedächtnis, Zeitschr. f. Psychol. u. Ph. der S. 37, 1904, S. 56 u. 161 (S. 223).

4) a. S. a. O., S. 167ff. (Die Gewichtsskala der Fehler mit einigen Ausgleichungsbestimmungen S. 179.)

hilfe von ihrem Stichreiz aus zu entwickeln und abzuschätzen ist. Wenn aber die Disposition zur freien Wiedergabe einer ganzen Reihe eingeschätzt werden soll, bei der die freie Reproduktion jedes weiteren Elementes nach dem Stichreiz als „Sticherregung" für die späteren Silben oder Zahlen funktioniert, kann die Leistungsfähigkeit aller Assoziationen natürlich nur dann als hinreichend erschöpft angesehen werden, wenn alle Elemente der alten Reihe einmal darauf hin geprüft worden sind, ob sie nicht durch eine sogenannte „unmittelbare" Assoziation mit dem nächstfolgenden Glied, oder eine „mittelbare" mit späteren Gliedern eine Mehrleistung über das Maß hinaus auszulösen vermögen, auf das eine dieser „Hilfen" entbehrende freie Wiedergabe beschränkt wäre. Dabei wird das Mißverhältnis zwischen den „primären"[1]) und diesen „sekundären" Treffern offenbar um so größer sein, je längere Reihen auswendig hergesagt werden sollen, je mehr also bei gleicher Wahrscheinlichkeit einer Stockung an irgendeiner Stelle von jenen inneren oder Binnen-Assoziationen ungenützt bleiben muß.

Zur Erzielung der bestmöglichen Gesamtleistung wäre somit ähnlich wie bei der S. 383 beschriebenen Methode der bloßen Wiedererkennung die Abwicklung der ganzen alten Reihe, nur eben in einem freieren Tempo erforderlich, bei dem die V.-P. möglichst anstrengungslos das Auftreten des nächsten Reihengliedes immer erst dann selbst auslöst, wenn sie es befriedigend reproduziert hat oder die Hoffnung auf seine Reproduktion (bzw. auf seine Verbesserung bei bloßer Unsicherheit) aufgegeben hat, wobei natürlich zur Vermeidung der Uferlosigkeit[2]) des Versuches zugleich mechanisch eine obere Grenze der Pause gesetzt werden muß. Als Maß der Gedächtnisleistung wäre hierbei also schließlich wiederum die Zahl der Treffer einschließlich der Teiltreffer anzusehen, die unter Mitwirkung dieser Hilfen im ganzen zutage gefördert werden.

Das Prinzip dieses Verfahrens wurde zum ersten Male von Ebbinghaus zur Untersuchung des Einflusses der Wiederholungszahl angewandt[3]), indem der Experimentator der V.-P. beim Hersagen die fehlenden Silben einfach zurief. Er bezeichnete dies eben als sog. „Methode der Hilfen", die Witasek (a. S. 395 a. O.) sinngemäß noch durch die verschiedene Einschätzung der „Hilfen" weiter auszubilden suchte, je nach den Fehlern, die der Experimentator durch sein Einsagen korrigierte. Der oben erwähnten Tafel der Fehlergewichte entspricht also bei Witasek eine „Hilfengewichtsskala". Die hiernach berechneten Gesamtsummen der Hilfeleistung bei jeder Reihe lassen an einem von ihm mitgeteilten Beispiele (a. a. O. S. 180) des

1) Ob man zur Erklärung dieser ersten Hauptkategorie der „primären Treffer", die nach Darbietung des bloßen Reihenanfanges erreicht werden, noch des Begriffes eines eigenen Beharrungsvermögens („Perseveration") bzw. des „freien Steigens" der Vorstellung bedarf oder schon mit der bloßen Assoziation mit der Situation im ganzen und dem weiterhin frei Erinnerten ausreicht, ist hier methodisch nur von sekundärer Bedeutung. Die Tatsache, daß bei einer experimentellen Auslösung des Gedächtnisprozesses im allgemeinen stets zum mindesten eine assoziabile Gesamtsituation ins Bewußtsein gehoben werden muß, sollte jedenfalls den Umfang der soeben an zweiter Stelle genannten eigentlichen Assoziationen nicht unnötig beschränken lassen.

2) Vgl. G. E. Müller und Pilzecker, a. S. 391, A. 1 a. O.

3) Mitgeteilt in seinen Grundzügen der Psychologie I, 1. Aufl. 1897.

wiederholten Hersagens der unvollständig beherrschten Silbenreihe unter gleichzeitiger Ergänzung der ganzen Reihe durch „Hilfen“ in der Tat die stetige Erhöhung der Leistung besser hervortreten als die unterschiedslose Abzählung der einzelnen Hilfen als solcher[1]).

Da bei der Prüfung der Gedächtnisleistung aber auch da, wo nicht eine Reihe im ganzen frei hergesagt werden soll, sondern wie bei der Methode der Hilfen oder der Paarmethode mehrere Reihenelemente wieder als Stichreize dargeboten werden, doch wenigstens von diesen letzteren aus immer wieder die freie Wiedergabe eines Komplexes von Buchstaben oder Ziffern notwendig wird, so kehrt bei jedem Treffer das nämliche Problem gewissermaßen nochmals im kleinen wieder. Beruht ja doch auch die ganze Abschätzung der „Teiltreffer“ einfach darauf, daß man die Reproduktion jeder einzelnen Silbe oder Zahl als freie Wiedergabe eines Komplexes versteht, der unter Umständen in einer geringeren Leistung wenigstens teilweise frei reproduziert werden kann. Da aber die Buchstaben und Ziffern sowie das bisher stets konstant gehaltene Schema ihrer Gruppierung zu Silben oder mehrstelligen Zahlen der V.-P. auch ohne äußere Hilfe vorschwebten, so würde im Laufe der Zeit bei einer diskursiven Selbstbefragung, die der S. 388 genannten Wahlmethode verwandt wäre, oder gar bei einer der Reutherschen Methode (s. S. 383) noch mehr angenäherten Darbietung objektiver Detailhilfen noch viel mehr rekonstruiert werden können als bei dem taktmäßigen Hersagen der Reihen. In dieser Richtung kann also, wie schon vorher erwähnt, nur die Einhaltung bestimmter Zeitgrenzen für die Reproduktion die Eindeutigkeit der Messung der noch einzubeziehenden Dispositionen aufrecht erhalten (vgl. c).

3. Die Paarmethode.

Wie öfters hervorgehoben wurde, hängt die Eindeutigkeit des Resultates einer psychologischen Methode überall wesentlich mit davon ab, daß die Leistungen der V.-P. in dem Vorbereitungsstadium bei der späteren Prüfungsleistung sämtlich zur Geltung kommen, also in dem Endresultat objektiv kontrolliert werden können. Bei Gedächtnisversuchen sind nun alle Auffassungen einzelner Elemente und alle Komplexbildungen bei der „Erlernung“ als solche Vorbereitungsleistungen für die spätere freie Reproduktion von den Stichreizen aus zu betrachten. Da aber die besonderen Anstrengungen, die bei dem Auswendiglernen einer ganzen Reihe vorliegen, nach dem eben Gesagten nur nach der „Methode der Hilfen“ voll gewürdigt werden können, so werden viele speziell dieser Reproduktion der ganzen Reihe dienende Komponenten die für den eindeutigen Verlauf der ursprünglichen Lesungen der Reihe nötige Zweckmäßigkeit verlieren, sobald jedesmal eine ganz bestimmte Gruppe der Silben,

1) Über die Verwendung solcher Hilfen beim Prozeß der Einprägung vgl. oben S. 395. Doch wird es gut sein, diese beiden Funktionen der Hilfen methodisch auseinanderzuhalten, wie auch die Versuchsbedingungen bei Entstehung und Messung der Assoziationen überhaupt wesentlich andere sind. So wird man also insbesondere auch die Zwischenzeit bis zur Hilfe bei der Prüfung viel länger wählen dürfen, um der V.-P. Gelegenheit zu verschaffen, auch noch schwächere Assoziationen zur Geltung zu bringen.

z. B. die beim trochäischen Lesen betonten, später als Stichreize wiederkehren, ohne Rücksicht darauf, ob man auch die Stichreize infolge des Auswendigkönnens größerer Reihenabschnitte vielleicht frei hätte reproduzieren können. Bei der von Müller und Pilzecker eingeführten Methode der Prüfung erhielt nun die V.-P. ausdrücklich die Instruktion, über den Zweck der Lesungen nicht weiter nachzudenken, ohne daß sich jedoch bei der Konstanz der einseitigen Prüfung durch ein ganz bestimmtes System von Stichreizen das Bewußtsein einer völligen subjektiven Gleichwertigkeit aller möglichen Komplexbildungen aufrechterhalten ließ. Die V.-P. wird also bei den Lern-Lesungen wohl in der Tat zwischen dem Verhalten wie beim Auswendiglernen der Reihe im ganzen und bei der „reinen Paarmethode", wo nur ein Teil der Silben oder Zahlen an Stichreize angeknüpft wird, geschwankt haben, so daß die Assoziationen zwischen den unbetonten Silben und den betonten des nächsten Taktes sowie die Nachwirkungen der absoluten Stelle (s. § 62, c) im Mittel größer gewesen sein werden, als bei der ausdrücklichen Instruktion zur bloßen Komplexbildung innerhalb der Takte im Sinne der späteren Prüfung[1]), die dafür die Assoziationen innerhalb der Takte nicht nur relativ kräftiger, sondern vor allem auch konstanter wird ausfallen lassen. Dabei dürfte die spezielle Versuchsbedingung, die Müller und Pilzecker durch die Variation der Reihenfolge der Stichreize bei der Prüfung[2]) hinzufügten, diese Inkonstanz noch erhöht haben. Denn der Wechsel dieser Stellen erzeugt eine umso stärkere assoziative Hemmung, je weniger bei der ursprünglichen Lesung etwaige Komplexbildungen zur freien Reproduktion der ganzen Reihe ausdrücklich durch die Instruktion ausgeschaltet wurden. Die von Ebbinghaus übernommene Konstanz der Lage des Silbenpaares bei den Wiederholungen behufs der Einprägung ist also bei der Anwendung der reinen Paarmethode überhaupt etwas Unnatürliches. Daher sucht man ja auch bei den praktischen Anwendungen der Paarmethode, z. B. beim Vokabellernen, dieser Einseitigkeit, soweit sie auch hier durch die äußeren Verhältnisse, d. h. den nur einmaligen Abdruck der Vokabelpaare, naheliegt, im allgemeinen wenigstens durch einen Wechsel der Reihenfolge des Ablesens einigermaßen zu begegnen. Doch steht natürlich nichts im Wege, daß man speziell auch einmal der Stellenassoziation

1) Wie das Schema der Reihenfolge der Stichreize bei Müller und Pilzecker in der folgenden Anmerkung erkennen läßt, haben sie denn auch mit Recht gerade diese Assoziationen bei der Prüfung absichtlich so wenig als möglich zur Geltung kommen lassen. Bei Lipmann (a. S. 390 a. O. S. 201) hätte dagegen die Reihenfolge der Stichreize auch ohne die Gefahr, Schwankungen der Einstellungen beim Erlernen der Reihe hereinzubringen, einfacher variiert werden können, wenigstens dann, wenn die Tendenz dieses Autors zur besseren Herausarbeitung der reinen Paarmethode bei der Einlernung (vgl. S. 393) die Assoziationen zwischen den Takten wirklich vermindert hat.

2) Die Reihenfolge der 6 als Stichreize auftretenden betonten Silben (aus Reihen von 12 trochäisch gelesenen Silben) war (a. a. O. S. 25) für einen Turnus aus 24 Versuchstagen

1.—4. Tag: 11, 7, 3, 9, 5, 1
5.—8. Tag: 7, 3, 9, 5, 1, 11
9.—12. Tag: 3, 9, 5, 1, 11, 7
:
21.—24. Tag: 1, 11, 7, 3, 9, 5.

mittelst der Paarmethode nachzugehen sucht, die hier bei einer nur auf die spezifische Prüfung nach dieser Methode berechneten Komplexbildung in geringerem Maße zu erwarten ist, oder anderen nur bei konstanter Reihenfolge möglichen Faktoren der Einprägung. Will man aber speziell den Grad prüfen, in dem die Stellenassoziation sowie andere nur für das Auswendigkönnen einer ganzen Reihe wichtige Komponenten ohne Einschränkung der Komplexbildung im Sinne der reinen Paarmethode, also z. B. ohne besonderes Nachdenken über den Zweck der Reihe, zur Geltung kommen, so wird man durch einen Wechsel zwischen der reinen „Paarmethode" und der „Methode der Hilfen" bei der späteren Prüfung nach einem der V.-P. nicht im voraus bekannten Plane den subjektiven Wert der einzelnen Assoziationskomponenten für die V.-P. gleichmäßiger gestalten müssen, ähnlich wie z. B. auch die Verteilung der Aufmerksamkeit über ein größeres Wahrnehmungsfeld (bzw. eine indifferente Einstellung) im Vorbereitungsstadium dann am konstantesten durchgeführt wird, wenn die V.-P. in jedem einzelnen Versuche eine Veränderung an irgendeiner Stelle des ganzen Verteilungsbereiches zu gewärtigen hat.

Bei allen Formen der in diesem ganzen Paragraphen betrachteten Treffermethoden finden sich nun Angaben darüber, daß manchmal objektiv ganz oder großenteils richtige Glieder ohne das Bewußtsein der Richtigkeit, ja auch ohne jegliches Bekanntheitsgefühl aufgetreten seien. Daher könnte es scheinen, als stehe die Methode der freien Wiedergabe bezüglich der Feinheit der Spuren, die sie noch nachzuweisen gestattet, keineswegs absolut hinter der Vergleichsmethode, z. B. nach dem Prinzip der identischen Reihen (s. S. 386), zurück, weil bei der letzteren das Auftreten des objektiv Richtigen in diesen Fällen doch ebenfalls kein Bekanntheitsgefühl erwarten ließe. Dagegen ist zunächst zu sagen, daß eine freie Reproduktion, die für das Bewußtsein der V.-P. auch nicht die mindeste Beziehung zu der im ganzen bekannten Reihe besäße, überhaupt niemals als ein Treffer in dem hier gemeinten Sinne, auch nicht einmal als Teiltreffer niedrigsten Ranges in Anschlag gebracht werden könnte. Hierzu wäre erst ein ganz neues Verfahren nötig, in dem man alles, was sonst noch von dem benützten Lernmaterial gleichzeitig mit dem subjektiv Richtigen oder wenigstens als hinzugehörig Vermuteten ins Bewußtsein tritt, von der V.-P. registrieren ließe. Es ist a priori noch nicht abzugrenzen, was bei einer solchen Statistik, die bezüglich der psychologischen Entstehungsbedingungen den „Assoziationsversuchen" im engeren Sinne (s. S. 392), z. B. in einer von Kräpelin gehandhabten Form (a. § 62, a) a. O.), nahesteht, an psychischen Dispositionen zur Geltung gebracht werden kann[1]). Tatsächlich

1) Für die Leistungsfähigkeit einer solchen Statistik spricht auch ihre Verwertbarkeit zur experimentellen Analyse gewisser Gleichförmigkeiten des Vorstellungsverlaufes bei verschiedenen Individuen, die von C. Marbe als Ursache der die mathematische Wahrscheinlichkeit überschreitenden Trefferzahl bei Versuchen über sog. „Gedankenlesen" nachgewiesen wurden. (Bericht über den IV. Kongreß f. experimentelle Psychologie in Innsbruck, herausgeg. v. Schumann, 1911, S. 185 und ausführlich in Zeitschr. f. Psychol. u. Ph. d. S. I. Abt. 56, 1910, S. 241. Über das Gedankenlesen und die Gleichförmigkeit des psychischen Geschehens. Vgl. dort auch die Literatur über das sog. Gedankenlesen und seine experimentelle Analyse.)

traten aber ja die in jenen Berichten gemeinten Silben überhaupt nicht völlig ohne ein Bewußtsein der Hinzugehörigkeit auf. Denn der Trieb, bestimmte Silben gerade in diesem Zusammenhang auszusprechen, enthält mindestens vollwertige artikulatorische Bekanntheitsmomente in sich, die nur eben sonst über den meistens dominierenden optischen und akustischen Grundlagen des Wiedererkennens nicht besonders beachtet werden. Im übrigen ist auch noch gar nicht nachgewiesen, daß die objektive Darbietung des früher Wahrgenommenen in einem Zustande, in dem man die Silben in dieser Weise triebartig aussprechen möchte, wirklich gar kein Bekanntheitsgefühl erwecken würde. Die späteren Gefühle nach dem selbständigen Aussprechen einer Silbe, in dem auch wiederum Störungen der reproduktiven Grundlage des Bekanntheitsgefühls enthalten sind, lassen hierüber noch nicht entscheiden.

b) Das Ersparnisverfahren.

Bei dieser schon S. 397 nach Ebbinghaus definierten Methode wird die Gedächtnisleistung an der Erleichterung gemessen, die sie der Wiederherstellung des ursprünglichen, unmittelbar nach der Bildung der Assoziation vorhandenen Zustandes im Vergleich zum Arbeitsaufwand beim frischen Erlernen verschafft. Diese Formulierung läßt das Wesen des von Ebbinghaus benützten Maßes allerdings noch viel allgemeiner erscheinen. Denn sie gilt für jeden beliebigen kontrollierbaren Ausgangszustand der Assoziation sowie für jede Möglichkeit, die zu seiner Erreichung aufgewendete Arbeit zu messen.

Auf die Schwierigkeiten, die Arbeit abzuschätzen, die speziell zu dem wohl hinreichend eindeutig bestimmten Stadium des sicheren Auswendigkönnens einer ganzen Reihe eben notwendig ist, wurde schon oben S. 393 ff. hingewiesen. Sie kehren offenbar bei der Aufgabe, die Reihe im Zeitpunkte der Nachprüfung von neuem bis zum richtigen Hersagen zu lernen, noch einmal besonders wieder. Immerhin kommen jene schwer kontrollierbaren Eigentümlichkeiten des Lernprozesses zum mindesten bei einer individuellen Konstanz desselben, die sich nach einiger Übung wahrscheinlich bei jeder brauchbaren V.-P. herausbilden wird, für die hier allein verwertete Differenz Δ zwischen der Wiederholungszahl L des ersten und der Zahl WL des späteren Lernens weniger in Betracht, zumal wenn die Reihe überhaupt erst ein einziges Mal vollständig erlernt worden ist.

Es ist natürlich nicht zu erwarten, daß der Wert Δ unter sonst gleichen Bedingungen der Trefferzahl nach der „Methode der Hilfen" proportional ausfalle, wenn auch ein eindeutiger Zusammenhang zwischen beiden nachweisbar sein wird, wenn sich beide wirklich auf eine Einprägung beziehen, in der die nämlichen Reproduktionsleistungen erstrebt wurden[1]). Jedenfalls ist die Arbeitsersparnis ein indirekteres Maß der

1) Eine Vergleichung und systematische Verbindung beider Bestimmungsmodi der Gedächtnisleistung hat Witasek versucht (a. S. 395. a. O.), der die Repetitionen beim Wiedererlernen ausschließlich in der schon oben beschriebenen Weise als freies Hersagen mit Hilfen durchführen ließ. Der erste Reproduktionsversuch ergab also dann die weiterhin auch nach dem Ersparnisverfahren zu messende Gedächtnisleistung zunächst nach der Treffermethode der Hilfen. Freilich werden die schon oben genannten

Gedächtnisleistung als die Trefferzahl. Denn mit dem Wiedererlernen setzen eben ganz neue Vorgänge ein, für welche die zu messende Disposition nur eine zu Anfang vorhandene Teilbedingung abgibt. Da aber doch die schwächere Disposition zu ihrer Wiederherstellung auf alle Fälle die größere Zahl von Wiederholungen erfordert, so muß sich mit dieser Methode wenigstens die Überlegenheit der einen Entstehungs- und Erhaltungsbedingungen über die anderen mit Sicherheit nachweisen lassen. Außerdem wird sich gerade wegen der Mittelbarkeit des Verfahrens wenigstens im voraus keine untere Grenze angeben lassen, von der an eine noch vorhandene Disposition auf den Wert Δ keinen Einfluß mehr erlangen könnte, während ein Treffer selbst bei der Methode der Hilfen und der Paarmethode bereits eine gewisse aktuelle Leistung bildet. Mit diesem Vorbehalt bezüglich der unteren Grenze ist freilich noch nicht gesagt, daß sich die Leistungsfähigkeit des Ersparnisverfahrens höher erweisen werde als die Trefferzählung.

c) Die Messung der Reproduktionszeit.

Bevor Ebbinghaus die Zahl der Wiederholungen als endgültiges Maß des Arbeitsaufwandes beim Lernen und Wiederlernen einführte, hatte er es bereits mit der hierbei verbrauchten Gesamtzeit versucht, deren Feststellung ihm, der V.-P. und Experimentator in einer Person war, leichter fallen mußte. Doch ging er hiervon wieder ab, weil sie doch zu sehr von den Zufälligkeiten des Tempos beim Lesen und Hersagen beeinflußt war. Durch die Verwendung präziser Expositionsapparate wurde dann wenigstens für das (taktmäßige) Lernlesen (ohne Versuche der freien Reproduktion) eine besondere Bestimmung der Zeitverhältnisse überhaupt unnötig. Auch bei der Konstatierung des Auswendigkönnens, wie es z. B. bei der Ebbinghausschen Handhabung des Ersparnisverfahrens erstrebt wird, wäre die Zeit bei Forderung eines streng taktmäßigen Hersagens im allgemeinen noch keine neue Unbekannte. Bei der freien Reproduktion bildet dagegen die Zeit von dem Auftreten des Stichreizes bis zum Einfallen des assoziierten Elementes (bzw. beim Hersagen ganzer Reihen die Zeit von der jeweils vermittelnden bis zur vermittelten Reproduktion) ein selbständiges, für den Stand der Disposition charakteristisches Moment der aktuellen Gedächtnisleistung. Wo die Disposition allerdings, wie beim Ersparnisverfahren, nur indirekt geprüft wird, braucht eine solche Zeit nicht gemessen zu werden, wenn die einzelnen Repetitionen im wesentlichen wieder in einfachen Lesungen an einem exakten Expositionsapparate bestehen. Bei der Treffermethode in allen ihren Formen hingegen, bei der die aktuelle Gedächtnisleistung unter bestimmten dispositionellen Voraussetzungen selbst entwickelt werden soll, gehören die Zeitverhältnisse zur näheren Bestimmung der Leistung eigentlich stets hinzu. Dabei ist freilich an die Zeiten bis zur Reproduktion im Bewußtsein selbst gedacht, die nur in der Selbstbeobach-

Schwierigkeiten dieses kombinierten Lernverfahrens, vor allem die Ungleichmäßigkeit der objektiven Einflüsse bei den einzelnen Wiederholungen hierbei wieder um so störender, je mehr neue Repetitionen erforderlich sind. Zu einem bloßen Vergleich der beiden Methoden wäre also nach dem ersten Reproduktionsversuch eher zunächst wieder eine passende Mischung von Lern- und Reproduktionsversuchen zu empfehlen.

tung unmittelbar zu erfassen sind und die höchstens durch den Vergleich mit nebenhergehenden objektiven Zeitmarken bis auf einen hierbei zu erwartenden Fehler der sog. „Zeitverschiebung“ zu bestimmen wären (vgl. § 64, a). Die sog. „Trefferzeit“ aber, die bei solchen Versuchen zum erstenmal von Müller und Pilzecker (a. S. 391 a. O.) systematisch verfolgt wurde, ist die Zeit vom Auftreten des Stichreizes bis zur lautlichen Wiedergabe der Assoziation. Dabei kommt dem Vorgange, der zur objektiven Markierung einer vorderen Zeitgrenze benützt werden kann, (hier also dem Stichreize) höchstens bei der reinen Paarmethode die Bedeutung zu, daß er die eigentliche Reproduktionszeit, d. h. die Zeit von der ersten Anregung der Disposition bis zu ihrer Aktualisierung im Bewußtsein, einleitet, während beim Auswendigkönnen ganzer Reihen dieser Zeitpunkt für die Treffer, die von freien Reproduktionen (allein oder unter dem Hinzutreten von Hilfen) angeregt wurden, nicht mit dem (eigenen oder fremden) Aussprechen der vorhergehenden Silbe zusammenzufallen braucht.

Zu solchen Messungen der Trefferzeit nach der Paarmethode ist nun vor allem die schon S. 385 erwähnte zeitliche Präzision des Auftretens der Stichreize erforderlich, weshalb man dem Reihenapparate dann am besten ein besonderes Tachistoskop für fortgesetzte taktmäßige Expositionen vorschaltet. Hierfür wurde S. 385 vor allem das Federpendel-Tachistoskop empfohlen, das sich durch den Kontakt N_1, N_2 auch leicht an die zeitmessenden Instrumente anschließen läßt. Zur Markierung des Zeitpunktes der Wiedergabe aber können die § 81, b beschriebenen Schallschlüssel oder die weniger trägen Apparate zu phonetischen Registrierungen verwendet werden[1]).

Wie aber nun schon S. 16 und S. 229f. bei der Gegenüberstellung der Reproduktions- und Reaktionsmethoden betont wurde, schließen die Zeitverhältnisse der Wiedergabe, falls die V.-P. meint, daß der Experimentator nur den Inhalt, nicht aber auch zugleich die Zeit der Reproduktion wissen will, rein zufällige Momente in sich. Man kommt daher der wirklichen Reproduktionszeit höchstens dann wenigstens bis auf eine gewisse Reaktionszeit nahe, wenn die V.-P. das Aussprechen der Silbe ihrer gedanklichen Reproduktion so schnell oder zum mindesten so gleichmäßig als möglich nachfolgen läßt. Dies erfordert jedoch stets eine bestimmte Instruktion und Einstellung[2]), infolge deren schließlich aber auch die ganze Reproduktion

1) In Versuchen von M. Beer (Die Abhängigkeit der Lesezeit von psychologischen und sprachlichen Faktoren, Zeitschr. f. Psychol. u. Ph. der S. I. Abt. 1910, S. 264 ff.) wurde z. B. die Marbesche Rußmethode, die als Verfahren zur Untersuchung der Sprechmelodie u. dergl. von Poirot in der Phonetik (Dies. Handb. III, 6. Abt. 1911, S. 103) beschrieben ist, zur Analyse des Lerntempos verwendet, was sich natürlich auch auf Reproduktionsversuche nach der Paarmethode übertragen läßt.

2) Je längere Reproduktionszeiten in Frage kommen, um so weniger braucht allerdings die Gedächtnisleistung durch die Absicht zu möglichst präzisen Zeitverhältnissen der Wiedergabe belastet zu werden, am wenigsten also wohl bei den S. 392 A. 2 genannten Versuchen mit freien Assoziationen. Außerdem verlangt auch die „adäquate“ sprachliche Reaktion, die aus den sicheren und geübten Zuordnungen der Muttersprache zu den Reproduktionen schöpft, keine besondere Leistung zur Unterscheidung verschiedener Reaktionsmöglichkeiten, wie bei der Zuordnung einer allgemeinen Markierbewegung, z. B. einer Handbewegung zu einem bestimmten Reproduktionseffekt von

unter anderen, teilweise sogar störenden Bedingungen verläuft. Die durch solche Zeitbestimmungen erweiterte Treffermethode untersucht daher im allgemeinen bereits wieder eine Leistung von einer höheren Komplikationsstufe [1]).

62. Die Elementaranalyse des Lernens und der Reproduktion.

a) Die Bestimmung der optischen, akustischen und artikulatorischen Komponenten und ihres Verhältnisses bei verschiedenen „Typen".

Die Methodik der Gedächtnisversuche ist von der Bewertung der Gesamtarbeit, wie sie beim Auswendiglernen ganzer Reihen zunächst in den Wiederholungszahlen abgebildet erschien, mehr und mehr zu einer Detailanalyse der hierbei beteiligten elementaren Prozesse weitergegangen. Den augenfälligsten Fortschritt in dieser Richtung bildet natürlich die Ergänzung des Auswendiglernens durch die Paarmethode, welche die Assoziationen zwischen den einzelnen Silben getrennt für sich zur Geltung zu bringen sucht. Aber auch bei der Erlernung ganzer Reihen ließen sich einzelne der hierbei beteiligten Faktoren durch geeignete Variationen der Lern- und Reproduktionsbedingungen voneinander sondern.

An erster Stelle sei die für alle Lernversuche gleich wichtige Unterscheidung der optischen, akustischen und artikulatorischen Komponenten genannt, die bei jeder Reproduktion eines früher abgelesenen Materiales gleichzeitig im Spiele sind, aber bei den verschiedenen Individuen je nach ihrem „Typus" in verschiedenen Stärkeverhältnissen. Hierüber kann zunächst bereits die Selbstbeobachtung Auskunft geben, indem sie die Lebhaftigkeit und Frische dieser verschiedenen Komponenten, die während des Lesens selbst natürlich stets kräftig angeregt werden, bei der geistigen Verarbeitung des Gelesenen und bei der Erinnerung unmittelbar zu erfassen sucht [2]). Doch sind aus der bloßen Beschreibung des eigenen Bewußtseins freilich höchstens extreme Abweichungen von dem gewöhnlichen Anteil der einzelnen Sinnesgebiete zu entnehmen. Daneben gestatten aber auch objektive Befunde gewisse Rückschlüsse auf den Typus der V.-P., z. B. bei der Anwendung von J. Cohns Methode der Variation des Einprägungsmodus unter gleichen visuellen Auffassungsbedingungen. In den meisten seiner sehr variationsfähigen Versuche hatten seine V.-P. 12 Konsonanten

allgemeiner Art, z. B. dem Bekanntheitsgefühl, oder gar bei einer „disjunktiven Reaktion" von der in § 81, c beschriebenen Art, wie sie z. B. vorliegt, wenn auf ein schwaches und ein starkes Bekanntheitsgefühl mit je einer besonderen Bewegung und bei Unbekanntheit gar nicht reagiert werden soll. Wie sehr derartige „Nebenaufgaben" die Ausbildung neuer oder die Aktualisierung alter Dispositionen erschweren können, und wie lange der Erkenntniswert ihrer Lösung noch durch Fehlreaktionen getrübt ist, ersah ich z. B. aus derartigen Versuchen, die ich zur Verfolgung der allmählichen Ausbildung der Bekanntheit und zur Messung der speziellen „Reproduktionszeit" der bloßen Wiedererkennung gelegentlich bei der Reutherschen Untersuchung (s. S. 386) durchführte.

1) Vgl. auch E. Meumann, Über Assoziationsexperimente mit Beeinflussung der Reproduktionszeit. Arch. f. d. ges. Psychologie, Bd. 9, 1907, S. 117.

2) Vgl. u. a. R. M. Ogden, Über den Einfluß der Geschwindigkeit des lauten Lesens auf das Erlernen und Behalten von sinnlosen und sinnvollen Stoffen. Arch. f. d. ges. Psychol. Bd. 2, 1904, S. 93 (speziell S. 183 ff.).

in drei untereinander stehenden wagerechten Reihen zweimal zu lesen und nach 10 Sekunden frei wiederzugeben. „Das Lesen erfolgte bei einem Drittel der Versuche laut, bei einem zweiten Drittel unter möglichstem Ausschluß der Artikulation (Umrollen der Zunge gegen den harten Gaumen, Schluß der Lippen), bei dem Rest mit gleichzeitigem Sprechen eines Vokales“[1]). Der erste Modus sollte den akustischen Typus zur Geltung bringen, der zweite den motorischen, der letzte aber sowohl den motorischen als auch den akustischen in Verlegenheit setzen. Besonders ausführlich hat dann in neuerer Zeit A. von Sybel die Lern- und Reproduktionsbedingungen hinsichtlich der Beteiligung von Wahrnehmungen aus den einzelnen Sinnesgebieten variiert[2]). Das Lernen geschah am Müllerschen Gedächtnisapparat unter Variation des Lesetempos entweder mit lautem Lesen (visuell-motorisch-akustisch VMA) oder bei beliebigem, aber möglichst konstantem motorischem Verhalten leise lesend (V), oder ebenso leise lesend, während der Experimentator möglichst gleichzeitig laut mitlas (VA), oder u. s. gl. U. rein akustisch unter dem Vorlesen des Experimentators (A). Endlich vervollständigte man diese Kombinationsmöglichkeiten durch die weitere Hinzunahme eindeutiger objektiver Instruktionen in motorischer Hinsicht beim V-, VA- und A-Verfahren, indem einmal nur lautlos mitartikuliert (Vm u. s. w.), das andere Mal aber jede Sprachbewegung möglichst unterdrückt werden sollte (Vs u. s. w.), jedoch ohne gezwungene Haltung der Zunge wie bei Cohn. Sybel wollte eben das fremdartige Element ausschalten, das durch diese unnatürliche, gepreßte Haltung entsteht, ebenso wie er auch das akustische Wahrnehmungsfeld bei der Lernweise V nicht durch konstantes Aussprechen eines Vokales wie bei Cohn erfüllte. Auch scheint sich Sybel (a. a. O. S. 262) daran gestoßen zu haben, daß die Mithilfe gleichzeitiger reproduktiver Artikulations- bzw. Gehörsvorstellungen durch jene beiden Versuchsbedingungen Cohns doch nicht absolut auszuschließen ist. Indessen werden sie doch zunächst jedenfalls bedeutend reduziert, so daß solche ausdrücklich antagonistisch wirkende Bedingungen unter den verschiedenen Kombinationen zur Erforschung des Anteiles der verschiedenen Sinnesgebiete immerhin einen selbständigen Wert neben dem bloßen Ausfall bestimmter Sinneswahrnehmungen besitzen. In Cohns Überlegungen hatten dann aber außerdem gerade diese Reste an reproduktiven Vorstellungen wegen ihrer Variabilität auch noch eine besondere Rolle bei der Unterscheidung der verschiedenen Vorstellungstypen gespielt.

Beim VA- und A-Verfahren zeigten sich die Versuche übrigens durch die Aufmerksamkeitsverteilung der V.-P., sowie bisweilen auch durch unvermeidliche Unregelmäßigkeiten des Lesens seitens des Experimentators gestört, Fehler, die vor allem bei phonographischer Vorführung, womöglich mit Einstellung der Richtung des Schalles in die Gesichtslinie der V.-P. beim Lesen

1) J. Cohn, Beiträge zur Kenntnis der individuellen Verschiedenheiten des Gedächtnisses. Bericht des III. intern. Kongr. f. Psychologie, München 1897, S. 456. Ders., Experimentelle Untersuchungen über das Zusammenwirken des akustisch-motorischen und des visuellen Gedächtnisses. Zeitschr. f. Psychol. u. Ph. d. S., Bd. 15, 1898, S. 161.

2) A. von Sybel, Über das Zusammenwirken verschiedener Sinnesgebiete bei Gedächtnisleistungen. Zeitschr. f. Psychol. u. Ph. der S. I. Abt. Bd. 53, 1909, S. 257.

zu vermeiden wären. Die Prüfung der Gedächtnisleistung geschah durch freies Hersagen der Reihen oder durch Trefferzählung nach der Müller-Pilzeckerschen Anwendung der Paarmethode mit Zeitmessung, bei der wiederum zwischen optischer und akustischer Darbietung der Stichreize unterschieden wurde. Aus dem Vergleich der Resultate nach den verschiedenen Verfahrungsweisen, bei denen V, M und A möglichst variiert wurde, ist freilich niemals ohne weiteres das gesuchte Verhältnis der Beteiligung der einzelnen Sinnesgebiete zu erschließen, da, ganz abgesehen von der bereits erwähnten Unmöglichkeit, die reproduktiven, von starken Assoziationen getragenen Elemente von disparater Qualität auszuschließen, auch schon aus der andersartigen Gesamtform des variierten Verlaufes besondere Bedingungen bezüglich der Aufmerksamkeit u. dergl. resultieren, so daß die theoretische Bearbeitung der Ergebnisse, wenn auch deren Zuordnung zu den Bedingungen V, VA usw. wertvolles empirisches Material bietet, doch bezüglich der eigentlich erstrebten Elementaranalyse der Beteiligung der verschiedenen Sinnesgebiete häufig vieldeutig oder wenigstens sehr hypothetisch ausfällt.

Die Einordnung einer V.-P. in eine bestimmte Kategorie auf Grund solcher Resultate ist natürlich um so mehr gerechtfertigt, je mehr sie mit den Ergebnissen der Prüfung des Gedächtnistypus nach den anderen Methoden übereinstimmt und zugleich durch die Art der Leistungsfähigkeit der V.-P. bei elementaren Aufgaben auf den verschiedenen Gebieten wahrscheinlich gemacht wird. Außerdem gestattet aber doch auch schon die Art der positiven Reproduktionen und der Teiltreffer, sowie der Fehler, ohne Variation der Einprägungsbedingungen, einen Rückschluß auf die an der Leistung vorwiegend beteiligten Sinnesgebiete. Hierbei gingen Müller und Schumann von der plausiblen Voraussetzung aus, daß die relativ häufigere Verwechslung gleich klingender, aber verschieden aussehender Buchstaben auf akustischen Typus schließen lasse, die umgekehrten Fehler auf visuellen[1]). Als spezifisch visueller Typus gilt z. B. auch, wer in Gedanken Worte besonders schnell rückwärts lesen kann[2]).

---

1) a. S. 389, A. 2 a. O. S. 153 (auch M. und Pilzecker a. S. 391 a. O.) Einen ähnlichen Rückschluß aus der Art der Fehler auf die vorwiegende Beteiligung akustischer Momente bei einer Neuauffassung zogen dann auch Lehmann und F. C. C. Hansen in ihrem Versuch, die Bedeutung des unwillkürlichen Flüsterns für die sog. Gedankenübertragung nachzuweisen. (Wundt, Phil. Stud. 11, 1895 S. 471.) Vgl. übrigens hierzu S. 402, A. 1.

2) Um den sensoriellen Gedächtnistypus überhaupt, also nicht gerade die Art seiner Wirkung bei solchen Lernversuchen festzustellen, hatte Kräpelin schon früher (a. S. 392 a. O.) Assoziationsversuche im engeren, oben erläuterten Sinne mit freier Beantwortung einer allgemein gestellten Frage, vorgeschlagen: der optische Typus sei z. B. daraus zu erkennen, daß die V.-P. die Frage nach Gegenständen mit ausgesprochener Farbe innerhalb einer bestimmten Arbeitszeit (5 Minuten) reicher beantworte als die Frage nach akustisch eindringlicheren Vorgängen, die dafür dem akustischen Typus nahe liegen. Vgl. auch L. W. Stern, Über Psychologie der individuellen Differenzen, Schriften der Gesellsch. f. Psychol. Forschung 1900, S. 58. (Weitere Literatur s. ebenda S. 138 f.)

b) Die Bedeutung von Nebenvorstellungen.

Bei allen Gedächtnisversuchen helfen ferner Nebenvorstellungen mit, die zu den visuellen Symbolen einschließlich ihrer lautlichen Bedeutung hinzutreten. Schon Ebbinghaus erkannte jedoch die Schwierigkeiten einer quantitativen Abschätzung des jedenfalls erleichternden Einflusses, der beim Erlernen sinnvoller Stoffe zu konstatieren ist. Aber auch bei dem sog. „sinnlosen Material", also z. B. den nach den oben erwähnten Vorschriften gebildeten Silben, sind Nebenvorstellungen überhaupt selten ganz auszuschließen, während dies bei 4-stelligen Zahlen der auf S. 383, A. genannten Art (Reuther) noch am ehesten möglich erschien, die aber freilich für Versuche des Auswendiglernens längerer Reihen ein zu schwieriges Material bilden würden. Wie man den Einfluß dieser Nebenvorstellungen z. B. an der Zahl und Reproduktionszeit der Treffer bei der Paarmethode prüfen kann, zeigte u. a. auch Ephrussi in seinen Versuchen „über das mechanische und das unterstützte Lernen der sinnlosen Silbenreihen".[1])

c) Die Forschung nach sog. „mittelbaren" Assoziationen und „Assoziationen im Unbewußten" mittelst Umstellungsreihen und die Abtrennung des Einflusses der Bekanntheit der Elemente durch Vergleichsreihen.

Was dann weiterhin die Herauslösung einzelner Assoziationen zwischen je zwei Reihengliedern anlangt, so ist auch hier deren jeweilige Stärke, ähnlich wie bei den Cohnschen Versuchen das Verhältnis der visuellen, akustischen und motorischen Komponenten der Reihenglieder, zunächst einmal schon von vornherein durch die Art der Einprägung systematisch zu beeinflussen. So wird die Aufgabe, die Reihe im ganzen frei reproduzieren zu können, schon bei der Neuauffassung zu viel weiteren Einheitsbildungen führen, als sie zur bloßen Hinzufügung je eines frei zu reproduzierenden Elementes zu jedem Stichreiz erforderlich wären, zumal wenn bei der letzteren auch noch der natürlichste Lernmodus der extremen Paarmethode durchgeführt würde, daß die Reihenfolge der Stichreize von einer Wiederholung zur anderen variiert wird. Beim Auswendigkönnen der ganzen Reihe schweben der V.-P. dann außer den jeweils ausgesprochenen bzw. im Blickpunkt der Apperzeption befindlichen Silben meistens doch auch noch andere Reihenelemente oder zum mindesten ein dunkles Bild der Hauptgliederung der ganzen Reihe gleichzeitig vor, deren höhere Komplexqualitäten auch bei der weiteren Reproduktion eine besondere Wirksamkeit entfalten werden. Hierbei ist die Reproduktion auch deutlicher als bei anderen Assoziationen als eine assimilative Ergänzung simultan bewußter Elemente zu erkennen und kann daher auch nicht so leicht auf das Schema einer Elementarkonstruktion aus lauter binären Zusammenhängen gebracht werden, wie der Verlauf nach der extremen Paarmethode.

Die Analyse der tatsächlich vorhandenen Binnenassoziationen zwischen zwei bestimmten Reihengliedern, gleichgültig, wie sie vermittelt sind, wird sich dann natürlich immer nur so ermitteln lassen, daß der Experimentator alle möglichen paarweisen Kombinationen zwischen den einzelnen

1) a. S. 398 A. 3 a. O. § 3 (S. 75).

Gliedern in Betracht zieht, wobei gemäß des primären Wahrnehmungsverlaufs vor allem die sukzessiven Assoziationen von einem Gliede zu einem späteren interessieren[1]). Doch braucht die experimentelle Prüfung deshalb keineswegs etwa nur nach Art der „Paarmethode" mit Bestimmung der Trefferzahl und -zeit zu erfolgen, wobei die V.-P. zu einem gegebenen Stichreiz das ihm in der primären Reihe unmittelbar folgende Glied oder auch (absichtlich) ein späteres oder eine früheres zu nennen hat. Auch in dieser Richtung haben vielmehr Ebbinghaus und Müller und Schumann a. a. O. bereits früher mittelst der „Ersparnismethode" wertvolle Aufschlüsse gewonnen, wobei der Experimentator die Durchmusterung der Reihe nach allen möglichen in ihr enthaltenen Silbenpaaren nur vornimmt, um geeignete Umstellungsreihen zu konstruieren, deren Erlernung (bis zu einem bestimmten Grade der Beherrschung) bei einer Wirksamkeit der fraglichen Binnenassoziationen eine Erleichterung im Vergleich zur alten Reihe mit sich bringen muß.

Die Prüfung der Binnenassoziationen mittelst der Paarmethode und Trefferzählung wurde nun von Müller-Pilzecker, Lipmann u. a. von vornherein so vorgenommen, daß möglichst nur die von dem Inhalt des Stichreizes ausgehende Anregungen zur Geltung kamen, also die Unterstützung seitens der in der alten Reihe vorhergehenden Glieder und vor allem seitens der Vorstellung der Lage in der Reihe, die sogen. „Stellenassoziation" möglichst ausgeschaltet wurde. Denn es wurde hier z. B. nach dem S. 401 A. 2 erwähnten Schema die Lage der Stichreize in der Prüfungsreihe stets so vollständig als möglich variiert. Freilich kann durch solche Variationen weder hier noch bei dem Ersparnisverfahren jemals der Beitrag der auszuschaltenden Assoziationshilfen rein herausgelöst werden, weil die Herabminderung der Trefferzahl im Vergleich zur Wiederholung in der alten Reihenfolge (bzw. die relativ größere Schwierigkeit der Erlernung einer Umstellungsreihe unter analogen Bedingungen) teilweise zugleich der positiven Hemmung zuzuschreiben ist, die von der Tendenz zur Reproduktion der alten Glieder an ihrer früheren Stelle ausgeht[2]). Natürlich liegt diese Elimination des Stelleneinflusses[3]) keineswegs im

1) Vgl. dagegen über die Feststellung der sog. „initialen Reproduktionstendenz" u. a. Müller-Pilzecker, a. a. O. § 39 S. 200.

2) Über die Erklärung der falschen Fälle bei der Paarmethode aus solchen Nebenassoziationen vgl. auch Müller und Pilzecker a. a. O. Kap. 7, S. 204 ff.

3) Einen interessanten Einblick in die spezielle Wirkung der Lokalisation einer Silbe gewährt die Untersuchung von W. Jacobs „Über das Lernen mit äußerer Lokalisation", Zeitschr. f. Psychol. u. Ph. der S. I. Abt. 45, 1907, S. 43. Die nicht gelesenen, sondern nur angehörten Silbenreihen wurden hier bei einer ersten Einstellung so memoriert, daß die V.-P. sich bemühte, die gehörten (12) Silben beim Lernen und freien Reproduzieren nacheinander in je eine von 12 schwarzen Kreisflächen, die vor ihr auf einem weißen Blatt angeordnet waren, visuell hineinzuphantasieren, während in einer zweiten zum Vergleich durchgeführten Versuchsgruppe bei geschlossenen Augen nach Belieben verfahren werden konnte. Solche Versuche liefern zugleich einen neuen wertvollen Beitrag zur experimentellen Analyse der willkürlichen Phantasietätigkeit (vgl. S. 9), wie sie außerdem z. B. in den Versuchen zur willkürlichen Variation der sog. umkehrbaren pseudoskopischen Tiefentäuschungen, d. h. der plastischen Auffassung von mehrdeutigen Zeichnungen stereometrischer Gebilde, in Angriff genommen wurde (über die Wichtigkeit dieses Faktors hierbei vgl. Wirth, Experimentelle

Wesen der Paarmethode, wie sie denn auch z. B. von Ranschburg zunächst ohne jede Umstellung der Stichreize durchgeführt wurde. Insbesondere kann dann aber die Änderung der Lage natürlich auch graduell geschehen, wobei man die Verschlechterung der Trefferzahl mit der Abnahme der Ähnlichkeit der ganzen Anlage der Reihe stufenweise verfolgen kann. Auch braucht man sich, falls nicht gerade die reine Paarmethode schon bei der Erlernung vorlag, nicht darauf zu beschränken, die einzelnen Silben entweder nur als Stichreiz oder als das zu reproduzierende Element zu verwenden, sondern kann sämtliche Silben bei einer Umstellung je einmal als Stichreize vorkommen lassen, so daß also jede Silbe einmal als reproduzierende und als reproduzierte figuriert. Endlich wären auch sog. „mittelbare Assoziationen" zu entfernter stehenden Silben nach dieser Methode (in einem rein empirischen Sinne dieses Begriffes) erwiesen, wenn die V.-P. bei der Aufforderung, zu einem Stichreiz nicht bloß die nächste Silbe, sondern, wie beim Hersagen ganzer Reihen, auch die späteren zu nennen, nicht die unmittelbar folgende, wohl aber wieder eine spätere Silbe zu nennen vermöchte. (Vgl. übrigens S. 399, A. 1.)

Zur Darstellung der anderen, historisch früheren Methode zur Ermittelung des Einflusses der Nebenassoziationen, des Ersparnisverfahrens, bedient man sich der einfachen, von Ebbinghaus überkommenen Markierung der Silben durch römische Ziffern mit je einem arabischen Index, welche die Relation der an zweiter Stelle gelernten „Umstellungsreihen" zu den zuerst gelernten „Vorreihen" leicht überschauen läßt: Die gleichen römischen Ziffern bedeuten Silben aus der nämlichen Vorreihe, und die ehemalige Stelle der Silbe innerhalb der Vorreihe ist aus dem arabischen Index zu ersehen. So suchte z. B. Ebbinghaus das Dasein der schon vorhin genannten „mittelbaren Assoziationen"[1]) durch den Nachweis zu erhärten, daß z. B. die Erlernung von Umstellungsreihen

$$\mathrm{I}_1\ \mathrm{I}_3\ \mathrm{I}_5\ \mathrm{I}_7\ \mathrm{I}_9\ \mathrm{II}_1\ \mathrm{II}_3\ \mathrm{II}_5\ \mathrm{II}_7\ \mathrm{II}_9$$
$$\mathrm{I}_1\ \mathrm{I}_4\ \mathrm{I}_7\ \text{usw.}$$

eine Ersparnis im Vergleich zum Erlernen einer frischen Reihe mit sich bringe, die mit der früheren Distanz der in der Umstellungsreihe unmittelbar

Analyse der Bewußtseinsphänomene 1908, S. 181 und E. Becher, Über umkehrbare Zeichnungen, Arch. f. d. ges. Psychologie 16, 1910, S. 396) oder auch in Benussis optischen Täuschungen auf Grund der Phantasievorstellung von Linien, die sich die V.-P. in vorgeschriebener Weise zwischen gegebenen Punkten gezogen denkt. (Benussi, Experimentelles über Vorstellungsadäquatheit, Zeitschr. f. Ps. u. Ph. d. S. 42, I. Abt. 1906, S. 22.)

1) Über die Versuche zur Ermittelung sog. „mittelbarer Assoziationen" durch Anregung nicht experimentell entstandener Assoziationen, also nach dem Prinzip der S. 392, A. 2 genannten Assoziationsversuche im engeren Sinne vgl. E. W. Scripture, Über den assoziativen Verlauf der Vorstellungen, Wundt, Phil. Stud. VII, 1892, S. 50ff. W. G. Smith, Zur Frage der mittelbaren Assoziation, Dissertation, Leipzig 1894. Münsterberg, Beiträge H. 4, 1892, S. 7; H. C. Howe, American Journal of Psychol. VI, 1894, S. 239 und Wundt, Grundzüge der Phys. Ps. III[6], S. 529. Eine solche mittelbare Assoziation kann aber natürlich immer auch bei der deutlichen Bewußtheit des Zwischengliedes mit im Spiele sein, wenngleich dann ohne speziellere quantitative Analysen keine anderen als paarweisen Zusammenhänge angenommen zu werden brauchen. Im übrigen ist selbstverständlich das Fehlen der Erkennung des Zwischengliedes niemals ein sicherer Grund zur Annahme seiner völligen Unbewußtheit.

benachbarten Silben abnehme. Müller und Schumann zogen jedoch bei ihrer Aufnahme dieser Methode der Umstellungsreihen zugleich in Erwägung, daß das Lernen einer Umstellungsreihe, wie schon oben S. 410 angedeutet wurde, stets gewisse Nachwirkungen allgemeinster Art aktualisiere, welche die Ersparnis positiv und negativ beeinflussen und bei der Beurteilung speziellerer Nebeneinflüsse, wie mittelbarer Assoziation, Stellenassoziation u. dergl., von der gesamten Differenz Δ der Wiederholungen erst in Abzug gebracht werden müßten. Es ist dies vor allem die Wirkung der Bekanntheit der Silben als solcher, welche jede neue Verbindung dadurch erleichtert, daß nicht auch noch die Elemente jeder einzelnen Silbe neu assoziiert werden müssen, daß also diese „Umstellungen" niemals, wie bei der Bildung „frischer" Reihen, auch auf die Buchstaben übergreifen. Daher führten Müller und Schumann in die Methode der Umstellungsreihen die wichtigen Vergleichsreihen ein, bei welchen die Silben ganz analoger Vorreihen in einer so irregulären Weise umgestellt werden, daß eben womöglich nur die Bekanntheit der Silben als solcher erleichternd wirken kann und zugleich deren Nachteil, die Hemmung der Herstellung neuer Verbindungen durch die alten, ungefähr ebenso stark ist wie in den Prüfungsreihen. Als Beispiel seien die Umstellungsreihen aus 4 je 12silbigen Vorreihen erwähnt, deren Erlernung die besondere Festigkeit der Assoziation zwischen den zum nämlichen Takt der Vorreihe gehörigen Silben (bei trochäischem Lesen) erkennen läßt, zumal wenn bei der neuen Erlernung diese Silbenpaare wieder ebenso betonte Takteinheiten bilden. (Da im ganzen am ersten Versuchstag 6 Vorreihen und am zweiten 6 Umstellungsreihen erlernt wurden, um gleichzeitig auch noch ähnliche Assoziationen zwischen dem zweiten Gliede des einen und dem ersten des nächsten Taktes zu prüfen, so gehen die römischen Zahlen von I bis VI.)[1]

Die erste Prüfungsreihe R war:

$$R\colon\ II_{11}\ V_{12}\ |\ II_9\ II_{10}\ |\ V_7\ V_8\ |\ II_5\ II_6\ |\ V_3\ V_4\ |\ II_1\ II_2\ |$$

Die Vergleichsreihe V aber, in der die Reihenfolge bekannter und wie früher betonter[2]) Silben dieser speziellen Beziehung zu dem früheren Rhythmus entbehrte, war:

$$V\colon\ I_{11}\ IV_{12}\ |\ I_9\ IV_{10}\ |\ I_7\ IV_8\ |\ I_5\ IV_6\ |\ I_3\ IV_4\ |\ I_1\ IV_2\ |$$

Aus je 12 Silben zweier Vorreihen konnten natürlich auch zwei Umstellungsreihen von demselben Charakter konstruiert werden[3]), z. B. eine

1) Müller und Schumann, a. S. 389, A. 2 a. O. §. 4.

2) Bei einer Umstellungsreihe kann natürlich nur der grobe Hauptunterschied von betont und unbetont erhalten bleiben.

3) Ich führe wenigstens noch die zweite Vergleichsreihe an, um an diesen beiden den nämlichen Vorreihen I und IV entstammenden Umstellungsreihen V und V′ von gleichem Charakter den Kunstgriff zu erläutern, durch den Müller und Schumann dafür sorgten, daß nicht nur die Vorreihen, sondern auch die Umstellungsreihen im Sinne der S. 389 genannten Regeln „normal" waren. Zu diesem Zweck wurde die eine Vorreihe, die mit der anderen zusammen die Grundlage für zwei Umstellungsreihen gleicher Art abgeben sollte, in zwei Abteilungen hergestellt. Da z. B. die Silben 2, 4, 6, 8, 10, 12 von Vorreihe IV mit den Silben 1, 3, 5, 7, 9, 11 von Vorreihe I in einer Umstellungsreihe zusammenkommen sollten, mußten sie aus den 3 Buchstabenkästen nach Heraus-

zweite Vergleichsreihe V′ von gleicher Schwierigkeit der Erlernung:

$$V'\colon IV_{11}\ I_{12} \mid IV_9\ I_{10} \mid IV_7\ I_8 \mid IV_5\ I_6 \mid IV_3\ I_4 \mid IV_1\ I_2 \mid.$$

Die Prüfungsreihen waren immer von 5 Assoziationen der zu untersuchenden Art unterstützt, ohne daß dieser Charakter von der V.-P. sogleich am ersten Paare erkannt werden konnte, das überhaupt, ähnlich wie das letzte, eine aus seiner günstigen Apperzeptionsbedingung resultierende Sonderstellung einnimmt, weshalb man beide beim Vergleich besser ausscheiden läßt.

Dieses Beispiel zeigte uns also die spezielle Art der Anwendung des Ersparnisverfahrens auf die Bestimmung von Nebenassoziationen durch Ableitung der Differenzen Δ zwischen Wiederholungen zur Erlernung ganzer Reihen[1]. Auch in dieser Richtung ist aber das Ersparnisverfahren nicht auf die Messung der Gedächtnisleistung durch L — WL eingeschränkt. Vielmehr könnte die Schwierigkeit der Umstellungsreihen auch wieder nach dem Trefferverfahren mittelst der Methode der Hilfen oder der Paarmethode eruiert werden, wobei wiederum der Vorteil hinzutritt, daß die Reihen nicht immer bis zum Auswendigkönnen wiederholt zu werden brauchen, wie es wenigstens zu einer möglichst exakten und direkten Abgrenzung der Wiederholungszahlen L und WL erforderlich ist.

Am weitesten reichte der Rückschluß aus der Arbeitsersparnis unter neuen Bedingungen, dessen theoretische Unbegrenztheit bezüglich der Feinheit der indirekt ermittelten Dispositionen schon S. 404 hervorgehoben wurde, an dem Punkt über die unmittelbare Erfahrung der Selbstbeobachtung hinaus, wo man durch ihn eventuell geradezu Assoziationen zwischen unbewußten Elementen nachweisen zu können meinte. Hierbei sind allerdings nicht mehr nur zwei, sondern drei auf die nämlichen Silben bezogene Operationen vorausgesetzt, also Vorreihen und Umstellungsreihen erster und zweiter Folge. Würde z. B. nach zwei 10-silbigen Vorreihen I und II eine Umstellungsreihe erster Folge

$$U_1\colon I_3\ II_8 \mid I_7\ II_2 \mid I_1\ II_4 \mid I_5\ II_{10} \mid I_9\ II_6 \mid$$

gelernt und später beim Memorieren der weiteren Reihe

$$U_2\colon II_7\ I_4 \mid II_1\ I_8 \mid II_3\ I_2 \mid II_9\ I_6 \mid II_5\ I_{10} \mid$$

nahme der Buchstaben für diese Silben der Vorreihe I gebildet werden, also ähnlich wie die übrigen Silben 2, 4, 6, 8, 10, 12 der Vorreihe I. Die Buchstaben für letztere wurden daher nach Ziehung der Silben in 3 besondere Kästen gelegt, aus denen dann nach Mischung IV_2, IV_4 usw. gebildet wurden. Ebenso kamen die in 3 besondere Kästen gelegten Buchstaben der Silben I_1, I_3, I_5 usw. für die Silben der nicht mit ihnen in einer Umstellungsreihe verbundenen Silben IV_1, IV_3, IV_5 usw. zur Verwendung. Wenn jedoch durch die spezielle Anordnung der Silben hierbei Verstöße gegen die S. 389 genannten Regeln vorkamen, konnten u. a. noch die 5 bei 12 Silben zunächst nicht benützten Anfangskonsonanten von allen 17 beigezogen werden.

1) In neuester Zeit hat F. Nagel, ein Schüler von E. Meumann, nach dieser Methode auch den Einfluß der Stellenassoziation möglichst rein herauszuarbeiten gesucht, indem er Umstellungsreihen aus so vielen Vorreihen herstellte, daß er in einer Prüfungsreihe aus jeder Vorreihe immer nur eine einzige Silbe, diese aber auch an ihrer alten Stelle vorbrachte, so daß keinerlei direkte oder mittelbare Asso-

eine Erleichterung bemerkt, die diejenige einer Vergleichsreihe ohne dieses Bildungsgesetz, aber auch ohne sonstige Hilfen außer der Bekanntheit der Silben (bei der nämlichen Zeitlage zu den Vorreihen) übertrifft, so wäre dies vielleicht wirklich ein Hinweis darauf, daß beim Lernen von U_1 gleichzeitig die Silben der Reihe U_2 angeregt wurden, so daß U_2 gewissermaßen gleich mitmemoriert worden ist, u. z. die Silben von I durch einfache sukzessive Assoziationen, die von II aber durch die „initiale Reproduktionstendenz" (vgl. S. 410 A. 1). Freilich dürfte es nicht leicht sein, Vergleichsreihen zu finden, die wirklich durch ganz gleiche Ähnlichkeit mit den Vorreihen, vor allem bezüglich der Lageverwandtschaft, einen nur geringen Vorteil der Prüfungsreihe unverfälscht erkennen lassen. Am ehesten wird dies vielleicht noch bei der reinen Paarmethode zu erwarten sein, falls umfassendere Komplexbildungen wirklich vermieden wurden. Freilich wäre auch bei einer relativen Erleichterung der Erlernung von U_2 noch keineswegs der Nachweis erbracht, daß die Silben dieser Reihe beim Lernen von U_1 völlig unbewußt geblieben und nicht in geringerem Grade der Lebhaftigkeit und Frische gegenwärtig gewesen seien. In der Tat fallen ja dem Beobachter beim Lernen der Umstellungsreihe häufig genug Silben der Vorreihen ein, die mit den neu auftretenden unmittelbar assoziiert waren, also der Umstellungsreihe U_2 zugehören würden.

Es braucht wohl schließlich nach dem S. 390 und S. 396 Gesagten nicht mehr besonders darauf hingewiesen zu werden, daß bei der Elementaranalyse solcher Lernversuche mit Reihen vor allem auch die Komponenten der Arbeitskurve (s. S. 372 f.) zu berücksichtigen sind. Dabei wird sich übrigens speziell bei der reinen Paarmethode eine Annäherung an die „Gleichgewichtspause" (s. S. 15) erreichen lassen, bei der sich die Analyse der Leistung unter besonders günstigen Bedingungen vollzieht.

Kapitel 16.

Die Analyse der Zeitvorstellung.

63. Die Zeitwahrnehmung und die Antizipation.

1. Die Zeitvorstellung ist im entwickelten Bewußtsein, das unserer Selbstbeobachtung und experimentellen Analyse allein zugänglich ist, ebenso wie die Raumvorstellung eine nicht weiter zurückführbare Vergegenwärtigung einer eigenartigen objektiven Beziehung zwischen unmittelbaren Erlebnissen oder gedachten Vorgängen. Die Zeitrelationen bilden in der Gesamtvorstellung ein besonderes Etwas, das die V.-P. ebenso wie die speziellen inhaltlichen Merkmale ausdrücklich beachten muß, falls sie ihre Quantitätsver-

ziation der Silben als solcher beim Lernen der Umstellungsreihe mitwirken konnte und die Hemmung gleichmäßig über die Reihe verteilt war. In den ähnlich konstruierten Vergleichsreihen war dagegen auch die Stelle der Silbe eine andere geworden (vgl. auch S. 396 A. 2).

hältnisse genauer auffassen, merken und vergleichen will, wenn auch das Zeitbewußtsein als solches nicht erst durch diese Beachtung entsteht, sondern von der speziellen Auffassungstätigkeit relativ unabhängig ist. Da man aber im alltäglichen Leben längere Zeiträume, wo es einigermaßen auf Genauigkeit und Pünktlichkeit ankommt, im allgemeinen nicht unmittelbar aus dieser Zeitvorstellung heraus abschätzt, sondern nur Raumlagen eines Uhrzeigers beobachtet, so bringt die V.-P. freilich trotz der allgemeinen Bedeutung des Gegenstandes höchstens in der Auffassung und Vergleichung kürzerer Zeitstrecken einige Übung in das Laboratorium mit, wie sie bei den alltäglichen rhythmischen Vorgängen des Marschierens, Turnens, Musizierens usw. fortgesetzt durch hervorstechende Eindrücke abgegrenzt werden, bei denen sich das Zeitliche von selbst aufdrängt und außerdem, zum Zweck der genaueren Ausführung ohne indirekte Hilfen, noch besonders beachtet wird. Doch läßt sich auch die Fertigkeit der Zeitschätzung durch eine systematische Beschäftigung mit dem Gegenstande je nach der Anlage noch wesentlich steigern.

2. Im ganzen betrachtet schließt nun die Zeitvorstellung eine analoge Stufenfolge immer vermittelterer und dabei freilich immer weniger anschaulicher Repräsentationen in sich, wie irgendeine elementare sinnliche Qualität eines Tones oder einer Farbe. Die experimentelle Analyse wird sich aber wieder vor allem an die primäre Vergegenwärtigung der Zeit zu halten haben, in der uns wirkliche eigene Bewußtseinserlebnisse in einer bestimmten Zeitlage zur unmittelbar erlebten Gegenwart vorschweben. Dabei können wir entweder ein einzelnes fertiges Erlebnis eines bestimmten Augenblickes, bzw. eine diskrete oder stetige Mannigfaltigkeit von solchen, nachträglich fortgesetzt in ihrem stets zunehmenden Zeitabstand von der jeweiligen Gegenwart ins Auge fassen oder ein neues Erlebnis erwarten, bzw. einen Willensimpuls für eine bestimmte Zukunft vorbereiten. Jenes Zeitbewußtsein bei der nachträglichen Vergegenwärtigung eines Vorganges möchte ich im Unterschiede von der freien Phantasievorstellung irgendwelcher Zeitverhältnisse als „Zeitwahrnehmung" bezeichnen, da bei ihm das Bewußtsein der Zeitlage durch die Nachwirkung der wirklichen Erlebnisse gewissermaßen wie durch einen unabhängigen Reiz zustande kommt, falls wir uns überhaupt an das ehemalige Erlebnis erinnern. Hierin ist dann auch zugleich der Hauptvorteil der eindeutigen Beherrschung und Kontrollierbarkeit des Verlaufes angedeutet, die diese Vorstellung ebenso wie die direkten Sinneswahrnehmungen einzelner Qualitäten oder räumlicher Relationen als Gegenstand des Experimentes besonders geeignet erscheinen läßt. Selbstverständlich ist die normale experimentelle Erzeugung der Zeitwahrnehmung auf die Ausdehnung bis zurück zur erstmaligen Gelegenheit einer Einwirkung beschränkt, da eben die weiter zurückliegende Vergangenheit nicht mehr experimentell zu beeinflussen ist. Ausgedehntere Distanzvorstellungen können also höchstens noch als fertig gegebene „beobachtet" werden.

Die zweite der beiden oben genannten Formen der Zeitvorstellung aber, die im folgenden „Antizipation" heißen soll, ist zwar in ihren Quantitätsverhältnissen im einzelnen jederzeit von Zeitwahrnehmungen oder einer aus solchen noch mittelbarer abgeleiteten Vorstellung abhängig. So schließt sich

z. B. an einen neuen markanten Sinneseindruck mit besonderer Lebhaftigkeit und Anschaulichkeit die Erwartung eines gleichmäßigen Fortganges an, wenn gleichartige Eindrücke in konstanten und gleich ausgefüllten Zeiträumen unmittelbar vorhergingen, also z. B. nach dem Anhören einer Reihe nicht zu langsamer regelmäßiger Taktschläge. Auch die Bereitschaft, einen Willensimpuls, z. B. zur aufmerksamen Auffassung eines neuen Eindruckes oder zu einer äußeren Willkürbewegung, in einem bestimmten antizipierten Augenblick auszuführen, führt sich stets auf einen assoziativen Mechanismus zurück, in dem vorher wahrgenommene Zeitverhältnisse wirksam werden. Doch ist die unmittelbare Vergegenwärtigung des tatsächlichen Eintrittes eines erwarteten Erlebnisses nach einer von der Gegenwart aus gerechneten, fortgesetzt abnehmenden Zeit als solche ebenfalls eine besondere, nicht weiter zurückführbare Bewußtseinserscheinung, die aus der bloßen nachträglichen Vergegenwärtigung eines alten Eindruckes als solchen, also aus der Zurückversetzung in die Vergangenheit in der Erinnerung, nicht ableitbar ist. Zudem richtet sich auch das praktische Interesse im alltäglichen Leben stets vor allem antizipierend auf die nächste Zukunft, so daß uns im allgemeinen nur besonders kräftige, nachhaltige Eindrücke bei dem eben oder früher Vergangenen verweilen und dabei eine eigentliche „Zeitwahrnehmung" erleben lassen. Experimentell gewinnt nun diese „Antizipation" eine zweifache Bedeutung. Zunächst kommt sie als mögliche Einstellung der V.-P. bei jedem Vergleich zweier gegebener Zeitstrecken a und b in Betracht, da die V.-P., wenn sie einmal weiß, welche Vergleichsobjekte auftreten werden, von Anfang an den ganzen Prozeß in seinen Hauptzügen antizipiert, besonders lebhaft aber natürlich den Endpunkt einer mit a übereinstimmenden Strecke a′, wodurch das Erlebnis bei einer eventuellen Abweichung der wirklichen Vergleichsstrecke b von der subjektiv gleichen Strecke sowie bei ihrer Übereinstimmung das für solche Vergleichsversuche charakteristische Gepräge erhält. Es ist von dem nachträglichen Vergleich zweier irgendwie abgegrenzter Zeitstrecken, die man beim unmittelbaren Erleben noch nicht zueinander in Beziehung setzte, wesentlich verschieden und für die Präzision des Resultates, aber freilich auch zugleich für bestimmte Fehlertendenzen entscheidend.

Während es sich aber hierbei zunächst nur um die Antizipation eines Auffassungsaktes handelte, kann diese zweite Einstellungsform weiterhin auch noch zu einer besonderen Form der experimentellen Analyse der Zeitvorstellung führen, wobei die V.-P. anstatt eines bloßen Apperzeptionsaktes (s. S. 7) eine äußere Willkürhandlung für einen bestimmten antizipierten Zeitpunkt oder kurz „antizipierend" ausführt, also z. B. den Abschluß einer Vergleichsstrecke a′ zu einer unmittelbar vorhergehenden Normalstrecke a durch eine Handbewegung markiert. Da der äußere Effekt des Impulses objektiv registriert und dadurch sein Zeitabstand von dem Beginn der Vergleichsstrecke gemessen werden kann, so ergibt sich hieraus eine besondere Art der „Herstellungsmethode" auf diesem Gebiete, von der schon Vierordt Gebrauch machte[1]). Man liest bisher freilich noch bisweilen, daß von der hergestellten Zeit in diesem Falle immer erst

1) Zeitsinn, 1868, S. 34.

eine „Reaktionszeit“ in Abzug gebracht werden müsse, um die der V.-P. subjektiv gleich erscheinende Zeitstrecke zu erhalten. Hierbei ist also angenommen, daß die V.-P. auf den Abschluß der subjektiv gleichen Strecke wie auf einen äußeren Reiz, dessen Eintritt im voraus nicht genau vorauszusehen war, gewartet oder „auf ihn reagiert“ habe (s. S. 15). Wie aber unten bei den Reaktionsversuchen noch weiter ausgeführt werden soll, ist eine antizipierende Willkürhandlung von einer solchen „Reaktion“ im engeren Sinne wohl zu unterscheiden, da bei ihr das Anschwellen des Willensimpulses eben schon in die Zeit der Antizipation oder der Voraussicht des Zeitpunktes, in dem der äußere Effekt fertig sein soll, hineinfallen darf, während bei der Reaktion auf das fertige Erlebnis, auf das man reagieren soll, gewartet werden muß [1]). Bei dem wiederholten Versuch, Registrierbewegungen auszuführen, die mit einer äquidistanten Reihe von Reizen, z. B. Gehörseindrücken, im einzelnen möglichst genau zusammentreffen, läuft bei einem bequemen Takt schließlich nur noch eine kleine zufällige Variation von ca. $\pm 30\ \sigma$ im Mittel unter, so daß also die V.-P bei der antizipierenden Auslösung des Impulses die psychophysische Zeit von diesem speziellen Bewußtseinserlebnis seiner Auslösung bis zu dem gewollten äußeren Effekt schon sehr genau in Rechnung ziehen kann. [2]) Bei einmaligen Versuchen dieser Art wird natürlich nicht die gleiche Genauigkeit erreicht, doch ist der Prozeß im Prinzip der nämliche.

Allerdings könnte man auch erst auf die Vollendung der ganzen der Strecke a gleich erscheinenden Zeit a′ „reagieren“, was freilich bei der Schwierigkeit eines derartigen Reflexionsaktes die ziemlich lange Zeit einer sog. Erkennungsreaktion (s. § 81, a) ergeben würde [3]). Jedenfalls wäre aber diese Einstellung der V.-P. viel unnatürlicher als die sinngemäße Anwendung der Fähigkeit zur „antizipierenden“ Auslösung der Impulse. Nach unserer Haupteinteilung gehören aber nun alle objektiven Registrierungen von Markierbewegungen zu den „Reaktionsmethoden“ (im weiteren Sinne), während wir uns hier bei den Reproduktionsmethoden im wesentlichen auf die Beurteilung der Zeitverhältnisse möglichst passiv hingenommener Eindrücke zu beschränken haben. In der Tat sind die Inhalte des Bewußtseins im Verlaufe der Zeitstrecke bei der Registriermethode vor allem während der unmittelbaren Vorbereitung des Willkürimpulses andersartige. Die subjektive Ausfüllung ist aber für den Ausfall der Schätzung stets von Bedeutung. Nur bei längeren Zeitstrecken, bei denen das kritische Endstadium mit der Impulsentwicklung im Verhältnis zum Ganzen und sogar zur Unterschiedsschwelle weniger in Betracht kommt, wird dieser Gegensatz so gut wie verschwinden [4]). Auch sonst ist er freilich insofern schließlich doch nur

1) Vgl. Experimentelle Analyse der Bewußtseinsphänomene, S. 266 ff.

2) Diese Genauigkeit beobachtete zuerst F. Martius bei dem Versuch, die Zahl der Pulsschläge durch Nachtaktieren an einer Registriervorrichtung zu bestimmen (s. u. Kap. 20).

3) Vgl. solche Zeiten z. B. bei E. Meumann, Beiträge zur Psychologie des Zeitbewußtseins in Wundts Phil. Stud. Bd. 12, 1896, S. 238.

4) Auch bei relativ kurzen Zeiten nehmen die Schwierigkeiten ab, wenn man auch bei der Registriermethode die Gesichtspunkte berücksichtigt, die aus dem Wesen der einheitlichen Auffassung einer Zeitstrecke überhaupt zu entnehmen sind (vgl. unten). So ist auch hier die unmittelbare Aneinanderreihung der beiden Strecken ohne Pause,

ein relativer, als die Ausfüllung der Vergleichszeit auch bei den Versuchen nach der reinen „Reproduktionsmethode“ [1]) keinen Zustand der reinen Passivität bedeutet, sondern, wie schon oben erwähnt, von antizipierenden Apperzeptionsimpulsen erfüllt ist. Diese sind aber in der natürlichen Koordination der inneren Willenshandlung (s. S. 7) mit zahlreichen Innervationen der willkürlichen und unwillkürlichen Muskulatur verbunden und besonders bei ausgesprochen rhythmischer Auffassung der aufeinanderfolgenden Zeitabschnitte manchmal so intensiv, daß die antizipierende Spannung gegen das Ende der Vergleichsstrecke hin bei dem Anschwellen eines bestimmten einzelnen Markierimpulses kaum sehr viel stärker ausfallen könnte.

64. Drei Hauptprobleme für eine experimentelle Untersuchung.

a) Die sog. Zeitschwellen und Zeitverschiebungen.

1. Ähnlich wie bei der Raumvorstellung lassen sich nun auch hier im einzelnen mindestens drei Hauptgruppen von Problemen unterscheiden, die mittelst der Vergleichsmethode in der soeben allgemein skizzierten Weise exakt bearbeitet werden können. Betrachtet man zunächst einen einzelnen Zeitpunkt, so kann man die den „Raumschwellen“ analogen „Zeitschwellen“ messen, bei denen aber ebenfalls ähnlich wie bei jenen zwei verschiedene Erscheinungsformen auseinander zu halten sind. Es läßt sich nämlich erstens fragen, wie groß das Zeitintervall zwischen zwei auf die nämliche Stelle des Sinnesorganes applizierten Reizen sein muß, damit die Empfindungen nicht mehr stetig verschmelzen, sondern eine Intermission merklich bleibt. Dieses Problem wurde schon bei den sinnesphysiologischen Methoden behandelt, da ja die gefundenen Zeitwerte zunächst aus dem Ablauf der Sinneserregung zu deuten sind. Es werden also auf diese Weise keineswegs etwa kleinste natürliche Elemente des Zeitbewußtseins überhaupt aufgefunden. Vielmehr kann die Intermission ebenso wie die Empfindung des kürzesten positiven Reizes, des elektrischen Induktionsfunkens, wenn sie überhaupt einmal merklich wird, sogleich als eine gewisse Dauer oder ein Verlauf bewußt werden [2]).

---

bei der die dritte von der Registrierung gebildete Marke die zweite Strecke abschließt, eine wesentliche Fehlerquelle (s. S. 426). Der Einfluß der Zeitlage wäre durch die Vergleichung einer ersten „aktiven“ und zweiten „passiven“ Strecke zu ermitteln.

1) Die Herstellungsmethode von Vierordt, die später vor allem Glaß unter exakteren Bedingungen verwertete (Kritisches und Experimentelles über den Zeitsinn, Wundt, Phil. Stud. Bd. 4, 1888, S. 423f.), wurde wegen der freien Reproduktion des antizipierten Endpunktes der Vergleichsstrecke auch als „Reproduktionsmethode“ bezeichnet. Nach unserer Haupteinteilung (s. S. 228) bezeichnet dieser Name dagegen gerade das Wesen der anderen Methode mit bloßer Beurteilung wahrgenommener Zeitstrecken, was zur Vermeidung von Verwechslungen hier ausdrücklich hervorgehoben sei.

2) Eine andere Frage ist es hingegen, ob die Trägheit der Sinneserregungen nicht doch wenigstens insofern für die Untergliederung der bewußten Zeiträume in unserer Auffassung, also auch unsere anschaulichen Begriffe von kleinsten Zeiteinheiten von Bedeutung ist, daß diese niemals unter die Zeitschwellen des Sinnesgebietes mit der feinsten Differenzierung des Ablaufes, nämlich des Gehörssinnes, heruntergehen können.

Diese Zeitschwelle für zwei nur zeitlich getrennte Reize entspricht in gewissem Sinne offenbar der Raumschwelle zweier nur räumlich getrennter Eindrücke, d. h. der Simultan-Raumschwelle. Bei dieser ist schon wegen der Irradiation für das Auftreten eines nicht bzw. anders ausgefüllten Zwischenraumes nicht die Minimalschwelle zu erwarten, nach deren Überschreitung man allerdings schon die Lage der beiden an ihrer Grenze noch verschmolzenen Erregungen im ganzen in einem Bewußtsein der Ausdehnung unterscheiden kann. Wie diese Differenz aber dann eventuell bei sukzessiver Reizung zweier benachbarter Stellen deutlicher hervortreten kann, so wird auch die Auffassung eines minimalen Zeitunterschiedes erleichtert, wenn zwei benachbarte Stellen des nämlichen Sinnes, z. B. des Sehfeldes, sukzessiv erregt werden. (Vgl. S. 348.) Jedenfalls läßt sich das Bewußtsein einer Zwischenzeit stetig unter sonst gleichen Umständen zum völligen Verschwinden bringen und, bei weiterer Verschiebung des Zeitpunktes des neuen Reizes in der nämlichen Richtung, in dasjenige eines Zeitabstandes in entgegengesetzter Richtung überführen, wenn beide Reize nicht auf die nämliche Stelle, sondern auf verschiedene Stellen oder als „disparate" auf verschiedene Sinne einwirken. Die Ableitung einer Zeitschwelle für disparate Reize, unter denen hierfür wegen der präziseren Abgrenzung der Reize und Erregungen bisher wieder nur Gesicht, Gehör und Tastsinn in Frage kamen, wird in Anlehnung an den Herbartschen Begriff gewöhnlich als „Komplikationsversuch" schlechthin bezeichnet. Dabei kann man, wie es bisher immer geschah, Momentanerregungen, die sich von dem bisherigen Zustand abheben, im ganzen zueinander in Beziehung bringen, wobei dann die Zeitlagen des Anstieges und des Abklingens der durch einen Momentanreiz hervorgebrachten Erregungen gleichmäßig berücksichtigt werden. Man kann aber auch nur Zeitgrenzen von länger dauernden Erregungen, die dabei natürlich ebenfalls möglichst präzise sein müssen, einander zuordnen. Bei dem letzteren Falle, der gegenwärtig im Leipziger psychologischen Institut untersucht wird, kommt also nur der Anstieg oder das Abklingen in Betracht, wobei sich wiederum für je zwei Reize vier verschiedene Möglichkeiten ergeben, je nachdem der Anstieg oder das Abklingen des einen und des anderen Reizes miteinander kombiniert werden.

Da die Zeitabstände, in denen eine richtige und sichere Unterscheidung der beiderseitigen Zeitlage möglich wird, jederzeit noch in die Zeit eines einzigen psychischen Auffassungsaktes hineinfallen (s. S.361), so beschäftigt man sich bei den bisher genannten Versuchen offenbar mit einer ganz analogen Apperzeptionsleistung wie bei tachistoskopischen Beobachtungen. Dies muß vor allem bei der theoretischen Deutung der Aussagen berücksichtigt werden: Die Urteile über die Zeitlage zweier benachbarter oder disparater Reize erlangen die Eindeutigkeit, die der Wiedergabe zugrunde liegt, immer erst auf Grund einer nachträglichen Verarbeitung des kurzdauernd Wahrgenommenen. Selbst stärkere Anachronismen bezüglich zweier voneinander relativ unabhängiger Eindrücke, die nicht mehr auf Unterschiede des Erregungsablaufes zurückführbar sind, brauchen also keineswegs auf „halluzinatorischen" Verschiebungen des Wahrnehmungsbildes gegenüber der Reizlage zu beruhen, wenngleich bei bestimmten Vorbereitungen illusionäre Prozesse ähnlich wie beim tachistoskopischen Verlesen von Buchstaben u. dgl. auch hier wohl möglich sind[1]).

Natürlich tritt bei weniger nah benachbarten und disparaten Reizen noch die besondere Erschwerung der Beurteilung durch die Unnatürlichkeit der Relation überhaupt hinzu, wobei die Einflüsse der Aufmerksamkeitsverteilung, sowie willkürlicher oder unwillkürlicher Einstellungen auf die Auffassung spezieller Zeitfolgen überhaupt interessante Spezialprobleme bilden. Jedenfalls erhält man daher vor einer besonderen Einübung bei nur einmaliger Darbietung jeder einzelnen Zeitdifferenz, die zur Ableitung von Vollreihen dargeboten wird, sehr große Schwellen, weshalb hier S. Exner, der die Zeitschwellen für einzelne isolierte Momentanreize zum ersten Male untersuchte (s. u.), sogleich zu einer mehrfachen Wiederholung jeder einzelnen Distanzstufe griff, die aus technischen Gründen außerdem sogar taktmäßig erfolgte. Diese ganz speziellen Versuchsbedingungen, die den S. 368 genannten bei wiederholter tachistoskopischer Darbietung vergleichbar sind, führen freilich auf diesem Gebiete auch zugleich ganz besondere Fehlerquellen für die Auffassung der Zeitlage mit sich.

Als Übergang von hier zur Streckenvergleichung könnte in gewissem Sinne die Auffassung der Zeitfolge einer ganzen Reihe von Eindrücken betrachtet werden. Diese Aufgabe kann natürlich auch wieder bei Applikation aller Reize auf die nämliche Stelle gestellt werden, wo sie z. B. auch schon in der Methode der unmittelbaren Wiedergabe einer einmal dargebotenen Reihe von kurzdauernden Eindrücken, z. B. von sinnlosen Silben, vorkommt, bei der die richtige Wiedergabe zugleich die Vergegenwärtigung einer bestimmten Reihenfolge voraussetzt[2]).

2. Auch bei den Komplikationsversuchen werden aber bereits größere Zeitstrecken in den eigentlichen Versuch einbezogen, soweit eine spezielle Vorbereitung hinzutritt, wenn auch die entscheidende Wahrnehmungsgrundlage des Urteiles immer nur in einem kleinen Zeitabschnitt des Ganzen gewonnen wird. Auch bei dem einfachsten Versuch wäre natürlich diesem kritischen Zeitpunkt schon nach den allgemeinen Vorschriften zur Erlangung einer eindeutigen Einstellung überhaupt ein Vorsignal oder eine Selbstauslösung vorauszuschicken. Doch ist hier mit der speziellen Vorbereitung schon eine engere inhaltliche Beziehung der vorhergehenden Zeitausfüllung zum Hauptgegenstande gemeint, wie sie z. B. in der schon genannten rhythmischen Wiederholung der disparaten Reize in der nämlichen zeitlichen Gruppierung bei jeder Exposition vorliegt. Außerdem kann aber die Auffassung der Reize

1) Daß bei falschen Urteilen vor allem auch die bloße nachträgliche Verwechslung der Zeitlage der in richtiger Folge aufgetretenen Erregungen eine gewisse Rolle spielt, ersieht man wohl auch schon daraus, daß z. B. in Versuchen dieser Art von Weyer (s. u.) die falschen Urteile, also jedenfalls Unterschiedsurteile, von der Reizstufe an, bei der auch die richtigen Unterscheidungen begannen, zunächst wieder häufiger wurden. (Die Zeitschwellen gleichartiger und disparater Eindrücke, in Wundt, Phil. Stud. Bd. 14, 1898, S. 616 u. Bd. 15, 1900, S. 67.

2) Bei der mit der Wahrnehmung gleichzeitigen Wiedergabe von Raumverhältnissen sind allerdings höchstens in den unklareren Regionen der Peripherie des Sehfeldes und des Tastsinnes Umstellungsfehler möglich, beim Gesichtssinn aber auch besonders bezüglich der Tiefenordnung, wie überhaupt die Relationen innerhalb der „Zeitwahrnehmung“ mit der „Perspektive“ des Tiefenbewußtseins manche Verwandtschaft besitzen.

oder eines derselben in dem kritischen Moment auch stetig vorbereitet werden, z. B. wenn man ein Gesichtsobjekt mit konstanter Geschwindigkeit oder wenigstens in einer hinreichend geläufigen Bewegungsform, z. B. einer Pendelbewegung, sich fortbewegen sieht, so daß man die kommenden Lagen in den einzelnen Zeitpunkten antizipierend voraussieht. Dies ist sogar die ursprüngliche Form, in der das Problem als eines der ältesten der experimentellen Psychologie seinerzeit von den Astronomen übermittelt wurde: Es soll die Stellung eines gleichförmig durch das Gesichtsfeld des Fernrohres wandernden Sternes zu den Fäden des Fadenkreuzes angegeben werden, die dieser im Moment eines Sekundenschlages der astronomischen Uhr gerade innehat. Sind parallel zum Meridianfaden mehrere (nicht gerade äquidistante) Fäden gespannt, die im Verlauf mehrerer Sekunden durchwandert werden, so ist wiederholt die Teilung dieser Distanzen durch die jeweiligen Sternstände bei den einzelnen Sekundenschlägen nach Dezimalen abzuschätzen (vgl. S. 376). Dies ist bekanntlich die sog. „Augen- und Ohrmethode" der astronomischen Zeitbestimmung, die schon S. 294 und S. 377 erwähnt wurde. Offenbar bedeutet es aber nach dem S. 416ff. Gesagten keine prinzipielle Änderung des psychologischen Charakters der Methode, wenn man an die Stelle der Auffassung des rhythmisch gehörten Taktschlages der Uhr einen Impuls zu einer objektiven Registrierbewegung einführt, der antizipierend gleichzeitig mit der Wahrnehmung der Sternbewegung so vorbereitet wird, daß er möglichst gleichzeitig mit dem vorausgesehenen Sterndurchgang selbst erfolgt. Nur strebt die Komplikation dem Durchgangsmoment selbst zu und die rhythmische Dezimalschätzung ist durch die Wahl der günstigsten Impulszeit ersetzt. Auch die Auffassung des Zeitpunktes des Taktschlages bei der Auge- und Ohrmethode ist ja ganz wesentlich durch die Antizipation mitbestimmt, so daß sich also ein völlig neues Verfahren erst ergeben würde, falls die Antizipation des Taktschlages aufgehoben bzw. die antizipierende Auslösung des Impulses vor dem Durchgang verboten würde. Doch werden wir die Zeitbestimmungen nach der Registriermethode, unserer Einteilung entsprechend, erst bei den Reaktionsversuchen behandeln. — Wie bei der Dezimalgleichung kommen hier natürlich nur die Beobachtungen am künstlichen Stern in Betracht, während man auch hier die Tatsache von Fehlern der Zeitschätzung überhaupt ohne Möglichkeit ihrer absoluten Messung bereits aus den persönlichen Differenzen, der sog. „persönlichen Gleichung", bei der Bestimmung des nämlichen astronomischen Vorganges erschlossen hatte, dessen absolute Zeitlage nicht bekannt ist. Führt man aber an diesen „Passage-Apparaten" aus praktischen Gründen, zur Annäherung an die Bedingungen bei der Auge- und Ohrmethode, einen rhythmischen akustischen Reiz ein, so wird die Auffassung des Zeitlagenverhältnisses zwischen den optischen und akustischen Eindrücken im kritischen Durchgangsmomente eben nicht nur durch die vorangehende Wahrnehmung der Sternbewegung vorbereitet, sondern auch zugleich durch den Rhythmus der Taktschläge der Uhr oder der dafür eintretenden Reizreihen aus einem anderen Sinnesgebiete, z. B. von Funkenreihen (C. Wolf), und bisweilen auch durch den Rhythmus mehrerer unmittelbar aufeinanderfolgender Durchgänge, weshalb dann die Auffassung der kritischen Sternstände im wesentlichen eine antizipierende wird. Doch trägt die geradlinige Bewegung des künstlichen Sternes durch das Gesichtsfeld nicht noch außerdem einen Rhythmus in sich, falls nicht mehrfache und dabei äquidistante Fäden passiert werden. Bei den Instrumenten hingegen, die im Anschluß hieran zuerst von Wundt zu rein psychologischen Zwecken konstruiert wurden, trat auch noch eine periodische Rotationsbewegung eines Zeigers hinzu, der über eine Skala entweder mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschritt oder hin und her pendelte, wobei die Perioden der Zeigerbewegung und der Komplikation (zunächst eines Glockenschlages) zusammenfielen[1]). Statt daß elementarere Versuchsbedingungen eingeführt wurden, fügte man dann vorerst sogar noch weitere Komplikationen hinzu, indem man nicht nur das Glockensignal durch einen andersartigen Reiz (Tastreiz, elektrischen Hautreiz) oder mehrere ersetzte, sondern es auch selbst zu einem ganzen Komplex von disparaten Momentanreizen in verschiedenen Kombinationen ergänzte, zu dem dann die gleichzeitige Zeigerstellung herauszufinden war (Tschisch)[2]).

Da nun in allen diesen Versuchen stets wieder mehrere Umläufe oder Schwingungen des Zeigers hintereinander beobachtet wurden, so war die endgültige Entscheidung stets von der Antizipation bestimmter Zeigerstellungen für den ebenfalls vorausgesehenen Zeitpunkt des nächsten Glockenschlages beeinflußt, die sich auf die in der Vorbereitungszeit gewonnenen Zeitwahrnehmungen aufbaut. Aber selbst die Beobachtung eines einzigen Umlaufes des Zeigers mit konstanter Geschwindigkeit bringt durch die räumliche Gliederung der Skala nach den natürlichen Hauptrichtungen der Vertikalen und Horizontalen auch in die Auffassung der Zeitverhältnisse eine bei geradliniger Bahn nicht vorhandene Gliederung hinein, welche die Zeitschätzung beeinflußt. Weiterhin brachte aber dann bei diesen Skalenbeobachtungen auch noch die Einteilung in viele Teilstriche neue Haltepunkte, aber auch zugleich Ablenkungen mit sich, die bei der astronomischen Beobachtung selbst bei mehrfachen Fäden wegen der größeren relativen Fadendistanz nicht oder wenigstens nicht in gleichem Maße vorhanden waren. Diese besonderen Bedingungen für die Auffassung der Zeitverhältnisse der optischen Eindrücke können sich z. B. auch ohne alle Komplikationsreize in dem Erlebnis der Beobachtung eines wiederholt gleichförmig umlaufenden Zeigers als solcher zur Geltung bringen. Als rhythmischer Prozeß wird der Umlauf leicht an irgendeiner bevorzugten Stelle mit einem besonderen Akzent versehen werden, der dann bei „zu schneller" Periode bei jedem

1) Die ganze Beobachtungsweise bei einer dem Zifferblatt der Uhr vergleichbaren Skala brachte es dann zugleich mit sich, daß die gemessenen Auffassungsfehler nicht mehr wie bei der astronomischen Auge- und Ohrmethode als Fehler der vom Beobachter gefundenen astronomischen Zeit angegeben, d. h. nicht mehr auf die objektive Zeitlage der akustisch erfaßten Vorgänge als Norm bezogen wurden. Wundt und seine Schüler bezeichneten vielmehr als negativen bzw. positiven Zeitfehler gerade umgekehrt die Lokalisation des Komplikationsreizes bei einer zu frühen oder zu späten Zeigerstellung. Hierbei wäre also die Zeitangabe dieser hier als Nullpunkt der Fehlermessung gewählten Zeigerstellung, nach Glockenschlägen gerechnet, immer umgekehrt mit einem positiven, bzw. negativen Fehler behaftet.

2) Über die Zeitverhältnisse der Apperzeption einfacher und zusammengesetzter Vorstellungen, untersucht mit Hülfe der Komplikationsmethode. Wundt, Phil. Stud. Bd. 2, 1895, S. 603.

weiteren Umgang auf eine immer spätere Stelle trifft, bei „zu langsamer“ auf eine immer frühere. Wird dann beim Hinzutreten rhythmischer Komplikationsreize der Akzent vor allem von diesen bestimmt, so werden sich bei der Verarbeitung des Wahrgenommenen ähnliche Verschiebungstendenzen des Akzentes wie bei rein optischer Wahrnehmung wirksam zeigen können. Allerdings wäre zur Sonderung der beiderseitigen Einflüsse gleichzeitig auch einmal ein ganz verschiedener Takt in den einzelnen Sinnesgebieten anzuwenden.

Eine systematische Analyse dieser Einflüsse einer speziellen Vorbereitung hätte jedenfalls von den geringsten Voraussetzungen zu bestimmten Antizipationen zu immer spezielleren und komplizierteren fortzuschreiten, eine methodische Weiterentwicklung der Wundtschen Versuchsanordnungen, die bereits durch die Untersuchung von Geiger begonnen wurde [1]. Bei einer stetigen Bewegung wäre sogar zunächst auch einmal bei völlig ungeteilter Bahn die Stellung des bewegten Objektes im Augenblicke eines nur einmal einwirkenden und nur im allgemeinen avisierten Komplikationsreizes nachträglich anzuzeigen. Ist aber schon während des kritischen Momentes eine feste Marke oder eine ganze Reihe von solchen gegeben [2], so kann einfach die Lage zu ihr im Komplikationsmoment im allgemeinen beurteilt bzw. auch noch durch Anzeigen der Stelle genauer wiedergegeben werden. (Bei Vertauschung der Sinnesgebiete brächte etwa die Einordnung eines einmaligen optischen Eindruckes in eine Reihe wiederholter Glockensignale oder in eine Melodie ähnlich einfache Voraussetzungen mit sich.) In der Stufenreihe der Probleme folgt dann erst die stetige geradlinige Bewegung mit mehreren vorhergehenden Signalen, weiterhin die sonstwie gegliederte und die im ganzen periodische Bewegung, und zwar ebenfalls zunächst ohne Wiederholung des Momentaneindruckes, dann mit einer von der optischen Periode unabhängigen, bzw. im Grenzfall mit ihr übereinstimmenden Wiederholung desselben. Über die Komplikation eines Glockenschlages mit einer Stellung des konstant rotierenden Zeigers nach rein akustischem und rein optischem Takt liegen übrigens bereits Versuche von Heyde vor [3].

Heyde untersuchte dann aber auch noch die Unterschiedsschwellen und Fehler, die sich bei der Zuordnung mehrerer Zeiger zu einem Glockenschlag ergeben, wenn diese alle gleichförmig wie Speichen eines Rades rotieren, u. zw. ebenfalls unter Variation der akustischen und optischen Antizipationsbedingungen. Es hat also hierbei die V.-P. ähnlich wie bei der S. 355 genannten Fragestellung eine umfassendere Situation (bis zu vier Zeigerstellungen) zu beschreiben, die nur während eines einzigen, von dem Glocken-

1) Neue Komplikationsversuche, Wundt, Phil. Stud. Bd. 18, 1903, S. 347.

2) Da eine Anziehung der Teilstriche sowie jeder irgendwie ausgezeichneten Stelle des Raumes nachgewiesen ist, so bedeutet die Verwendung von mehreren Teilstrichen unter Umständen zugleich eine teilweise Kompensation einer Fehlertendenz, je nach der Stellung im kritischen Moment.

3) K. Heyde, Versuche an der Komplikationsuhr mit mehreren Zeigern; Wundt, Psychol. Stud. VI, 5. u. 6. H., 1910, S. 317. Auch hier mußte man sich natürlich, ähnlich wie es für die S. 352ff. genannten Versuche notwendig war, auf die Beobachtung einzelner, mehr zufällig herausgegriffener Kombinationen der Zeiger beschränken, wenn nicht die Fehler- und Schwellenbestimmung zu viele Einzelversuche erfordern sollte.

schlag bezeichneten Momentes gegeben ist. Nur tritt hier eben außer der kürzeren Zeitdauer der entscheidenden Wahrnehmungen die stetige Vorbereitung und Fortsetzung der kritischen (optischen) Situation hinzu, die einerseits Erleichterungen, andererseits aber freilich auch besondere Fehlerquellen einführt. Die Problemstellung läßt sich natürlich auch verallgemeinern, indem man den engen Zusammenhang zwischen den einzelnen, gleichförmig rotierenden Zeigern aufhebt. Auch braucht der kritische Moment für die Beurteilung einer kurzdauernden optischen Situation nicht durch einen disparaten Sinnesreiz angegeben zu werden, sondern kann durch Nebenreize innerhalb des Sehfeldes oder auch durch eine Unstetigkeit der beobachteten Bewegungen selbst herausgehoben werden. So untersuchte z. B. Biener die Vergleichung von Raumstrecken, die von einem zwischen zwei ruhenden Punkten sich bewegenden Punkte im Momente seiner Umkehr abgeteilt werden, Versuche, die sich natürlich schließlich so weit komplizieren lassen, daß man die Raum- und Geschwindigkeitsverhältnisse lauter bewegter Objekte beurteilen läßt, die in einem bestimmten, irgendwie markierten Augenblicke vorhanden sind, wie es ja im praktischen Leben, z. B. bei der Orientierung in einer belebten Straße, fortwährend unter relativ komplizierten Bedingungen ausgeübt werden muß. Die Schätzungsfehler hierbei können als eine spezielle Gruppe „optischer Täuschungen“ bzw. Bewegungstäuschungen bezeichnet werden.

Da aber die Auffassung der Zeitlagen der Eindrücke eines bestimmten Augenblickes, falls sie durch einen zeitlich gegliederten Verlauf vorbereitet wird, von der hierbei gewonnenen Zeitvorstellung in der Form der Antizipation beeinflußt wird, so ist das volle Verständnis für die Fehlertendenzen hierbei erst aus der Analyse der Schätzung ganzer Zeitstrecken zu entnehmen. Diese bildet die zweite Hauptgruppe der Probleme bezüglich des Zeitbewußtseins.

b) Die Schätzung von Zeitstrecken.

Auch bei der Schätzung von Zeitstrecken sind natürlich die quantitativen Resultate immer nur nach einer möglichst genauen qualitativen Analyse der Einstellung der V.-P. während der entscheidenden Wahrnehmungen richtig zu deuten, die vor allem darüber Aufschluß geben muß, wie die Eindrücke überhaupt zur Vorstellung einzelner Strecken zusammengefaßt werden, da das Vergleichsurteil offenbar nur von den tatsächlichen subjektiven Einheitsbildungen der V.-P. abhängig ist. Die Auffassungsbedingungen wären in dieser Hinsicht noch einfacher, die Urteile aber unsicherer, als es tatsächlich bisher meistens der Fall war, wenn die zu vergleichenden Längenstufen niemals mit dem Bewußtsein ihrer objektiven Idendität wiederholt würden. Denn das Optimum der Streckenauffassung, bei dem der Endpunkt der Strecke unmittelbar erlebt, und diese somit in ihrer ganzen Ausdehnung den Inhalt einer primären Zeitwahrnehmung in dem oben (S. 415) erläuterten Sinne bildet, ist bei einer einmaligen Wahrnehmung auch hier nur während eines einzigen Momentes vorhanden, und so vollzöge sich dann auch die Vergleichung ganzer Zeitstrecken wieder unter ähnlichen Bedingungen wie bei der Vergleichung einzelner tachistoskopischer Reize. Doch wurde z. B. von Vierordt bei der Bestimmung der Unterschiedsschwelle eine von zwei Metronomschlägen abgegrenzte Strecke taktmäßig siebenmal nacheinander gegeben und mit einer zweiten analogen, etwas schnelleren oder langsameren Taktreihe auf ihre Geschwindigkeit hin verglichen. Bei den neueren Versuchen mit Vergleichung zweier einzeln dargebotener Strecken hat man aber doch wenigstens den Normalreiz immer für eine ganze Versuchsgruppe wissentlich konstant erhalten, so daß auch hierbei anstatt einer stets voraussetzungslosen Neuauffassung eine Art spezieller Einübung[1]) auf die gegebene Länge stattfinden konnte, die gerade für den antizipierenden Vergleichsmodus von besonderer Bedeutung ist.

Naturgemäß hat die absolute Länge der zu vergleichenden Strecken auf die Lebhaftigkeit der Vergegenwärtigung ganzer Strecken einen entscheidenden Einfluß. Im allgemeinen können nur bei kurzen Zeiten, während deren die die beiden Strecken ausfüllenden Eindrücke auch ohne besondere Anstrengungen der Apperzeption noch nicht aus dem Bewußtsein verschwunden sind, also bei Strecken von 1—2 Sek., auch die Zeitverhältnisse so auffällig werden, daß die subjektive Gleichheit mit den charakteristischen Begleiterscheinungen des rhythmischen Bewußtseins auftritt, bei dem die von der Antizipation geleiteten, triebartigen Impulse zur Auffassung, bzw. aktiven Markierung der Zeitgrenzen jeweils mit besonderer Aufdringlichkeit anschwellen. Eine Verschiedenheit aber löst dann alle Nebenerscheinungen der Störung einer rhythmischen Reihe aus. Doch sei hier ausdrücklich hervorgehoben, daß es sich hierbei stets nur um den höchsten Grad von Wirkungen handelt, die bei einer besonderen Anstrengung in Richtung einer analogen aktiven Vereinheitlichung der Teilstrecken auf viel weitere Grenzen als die soeben angedeuteten ausgedehnt werden können, die noch nicht genügend festgestellt sind. Hierbei kommt es ja auch gar nicht darauf an, daß auch die ganze Ausfüllung der Strecke im einzelnen so klar und deutlich vergegenwärtigt werden kann, wie es etwa für das präzise Vergleichsresultat nach S. 365ff. erforderlich ist. Auch die in der Natur der Apperzeption gelegenen Intermissionen einer solchen Konzentration heben den hier gemeinten Endeffekt nicht prinzipiell auf. Ein wesentlich anderes Erlebnis liegt erst dann vor, wenn eine Streckenvorstellung in den Vergleich eingeht, bei der der Anfang nicht bis zur Wahrnehmung des Schlusses in Gedanken festgehalten wurde, sondern erst ad hoc mit einem größeren oder kleineren Vorderteil der Strecke wieder auftaucht, wie es bei kurzen einige Sekunden übersteigenden Zeiten möglich, bei sehr langen aber sogar notwendig ist. Doch haben wir es auch hierbei immer noch mit einer Zeitwahrnehmung in dem S. 415 definierten Sinne zu tun. Dagegen bedeutet es eine weniger tiefgreifende Modifikation jener optimalen Bedingungen, wenn nach einer einheitlichen Auffassung der ersten Vergleichsstrecke zunächst eine längere Pause folgt. Mit der Ausdehnung dieser Zwischenzeit zwischen den beiden Vergleichsstrecken gehen solche

1) Auf die besondere Bedeutung einer allgemeinen Einübung auf Zeitvergleichungen überhaupt (s. S. 415) und einer solchen speziellen Einübung auf bestimmte Strecken hat u. a. Thorkelson hingewiesen. (Undersogelse af Tidssansen af S. Thorkelson, 1885. Vgl. Meumanns Beitr. z. Psychol. des Zeitsinns, Wundt, Phil. Stud. 8, 1893, S. 432.)

Vergleichsversuche freilich wiederum stetig in eine Untersuchung des Zeitgedächtnisses über. Kürzere Pausen aber schädigen den Vergleich nur relativ wenig, ja sie können unter Umständen sogar vorteilhaft sein. Nachdem die Einheitsbildung auf diesem Gebiete mit jenen besonderen Nebenmomenten verbunden ist, die uns bei regelmäßigen Reihen am geläufigsten sind und die jeder Stelle der einzelnen Einheit einen verschiedenen Schätzungswert verschaffen können, kommt es natürlich bei der Auswahl der Vergleichsbedingungen vor allem darauf an, dafür zu sorgen, daß mit dem Beginn der Vergleichsstrecke ein neuer analoger Auffassungsprozeß dieser Art einsetzt. Beim Vergleich sehr kurzer Zeiten ist daher eine relativ lange Pause (bei 0,2 bis 1 Sek. Normalzeit eine Pause von etwa 1,2 bis 2 Sek.)[1]) notwendig, um zu verhindern, daß N und V als verschiedenwertige Teile einer einzigen Einheit aufgefaßt werden. Insbesondere ist bei solchen kurzen Zeiten bei der Pause 0, also beim Vergleich zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Strecken, die von drei Momentaneindrücken abgegrenzt sind, ein Unterschied der rhythmischen Stellung von N und V in der Gesamtauffassung beider Strecken nur schwer zu vermeiden. Bei mittleren Zeiten wird eine der ersten Zeit gleiche Pause ein Optimum mit sich bringen, da hier eben die Pause selbst als ein koordinierter Takt aufgefaßt wird. Da lange Zeiten aber unwillkürlich zu einer weiteren Untergliederung der Auffassungstätigkeit führen, so wird die Pause hier am besten als Schlußglied einer größeren Haupteinheit gefaßt, die bis zur Vergleichsstrecke reicht, mit der dann ein neuer analoger Wechsel von Haupt- und Nebenbetonungen der subjektiven Untergliederung einsetzt. Bei entsprechender Antizipation ist auch die Auffassung der Pause als Auftakt der zweiten Strecke möglich. Meumann empfiehlt daher, auch hier nicht über Pausen von 3—5 Sek. hinauszugehen, während er für mittlere Zeiten (1—6 Sek.) eine Pause von etwa 2—3 Sek. am günstigsten fand[2]). Gerade in diesem Punkte wird alles auf eine sorgfältige subjektive Analyse der als Rhythmen funktionierenden Einheitsbildungen ankommen, die ja bezüglich der absoluten Zeiten große Freiheit lassen, wie aus der Ungestörtheit des Genusses von Rhythmen bis zu einem gewissen Grade des ritardando und accelerato bekannt ist.

Diese Feststellung der rhythmischen Momente ist dann vor allem auch für die Beurteilung des Einflusses einer verschiedenen Begrenzung oder Ausfüllung der Zeitstrecken wichtig, wobei außer dem Verhältnis der Vergleichsstrecken unter sich auch das Verhältnis ihrer beiderseitigen Ausfüllung zu dem Inhalt der Pause in Betracht kommt. Das letztere wurde z. B. bisher in der Weise variiert, daß man entweder kontinuierlich, aber gleichmäßig ausgefüllte Vergleichsstrecken oder, wie es aus technischen Gründen meistens der Fall war, leere, durch Momentanreize begrenzte Zeitstrecken verglich. Die klare Abhebung von der Pause erleichtert im ersten Fall wahr-

1) Meumann, a. S. 417, A. 3 a. O.

2) Wenn dagegen während der Wahrnehmung der Zeitstrecke überhaupt noch keine einheitliche Auffassung durch Festhaltung des Anfanges der Strecke erlebt wird, also z. B. bei der ausdrücklichen Ablenkung von den Zeitverhältnissen als solchen durch Lesen u. dgl., ist jede Pause überhaupt sehr störend (Meumann a. a. O. Bd. XII, S. 236). Mit der einheitlichen Auffassung der Hauptstrecke während der Wahrnehmung fällt offenbar auch die klare Einordnung der Pause in die rhythmische Hauptbewegung hinweg, die sie von den eigentlich zu vergleichenden Hauptteilen des Taktes absondert.

scheinlich das richtige Einsetzen eines analogen Auffassungserlebnisses beim Beginn der Vergleichsstrecke. Auch Meumann hat die kontinuierlich ausgefüllten Strecken gewissermaßen als ideales Versuchsmaterial für den Vergleich von Zeitstrecken betrachtet. Weiterhin untersuchte er zum ersten Male sowohl die Fehlertendenzen, die bei irgendwelchen Unterschieden der Begrenzung zweier leerer Vergleichsstrecken auftreten, z. B. bei Intensitäts-, Qualitäts- oder Lageunterschieden kurzdauernder Grenzgeräusche[1]) oder bei disparater Begrenzung der Strecken, als auch den Einfluß einer verschiedenen Ausfüllung der beiden Vergleichsstrecken, wobei außer verschiedenen Einteilungen der Strecken durch Momentanreize auch verschiedene kontinuierliche Ausfüllungen eingeführt wurden (Rasselgeräusch eines Induktoriums, Stimmgabelton, konstantes Licht). Natürlich bilden die spezifischen Begleiterscheinungen der wiederholten einheitlichen Auffassung ähnlicher, nicht zu langer Strecken, die das rhythmische Bewußtsein ausmachen, selbst wiederum eine besondere Art der Ausfüllung, die durch die Anregung der natürlichen dispositionellen Grundlagen des Rhythmus auch dessen Tendenz einführt, eine bequeme absolute Zeiteinheit einzuhalten, und dadurch ebenfalls charakteristische Vergleichsfehler mit sich bringt. Diese nehmen um so mehr zu, je mehr der Rhythmus der Auffassungstätigkeit durch unwillkürliche oder willkürliche Muskelbewegungen ergänzt wird, z. B. durch Taktierbewegungen mit dem Kopf, Händen oder Füßen u. ä., oder in bereits vorhandene periodische Bewegungen, z. B. die Atmung, regulierend eingreift und ihre Auffälligkeit innerhalb des gesamten augenblicklichen Bewußtseinsbestandes erhöht. Der Beweis für ihre völlig sekundäre Bedeutung ergab sich für Meumann aus der schon von Nichols gefundenen Tatsache, daß eine möglichst passive Zeitwahrnehmung die günstigsten Bedingungen für die Zeitschätzung darbietet, während eine absichtliche Ausfüllung von beiden Vergleichsstrecken mit jenen Hilfen nur charakteristische konstante Fehler erkennen ließ[2]).

---

1) Diese Versuche wurden in neuerer Zeit von Benussi mit ausführlichen Versuchsreihen nach der Konstanzmethode wieder aufgenommen. Er untersuchte einstweilen wenigstens 11 von den Möglichkeiten, die bei vier momentanen Grenzgeräuschen zweier durch eine Pause getrennter Strecken sich dadurch ergeben, daß man jedes derselben entweder stark oder schwach wählt, wobei also nur zwei Intensitätsstufen in Frage kommen. (Zur experimentellen Analyse des Zeitvergleichs, I. Zeitgröße und Betonungsgestalt, Arch. f. d. ges. Psychol. IX, 1907, S. 366.)

2) Meumann bediente sich zur Ermittelung der Fehlerrichtung, was er ausdrücklich nicht als eine exakte Methode der Fehler- und Schwellenmessung betrachtet wissen will, eines abgekürzten Verfahrens, indem er die von uns als E_o bzw. E_u bezeichneten Extreme der Urteilsfunktionen $F_g(x)$ und $F_k(x)$ zu bestimmen suchte (s. S. 176). Bei den bloßen Betonungsunterschieden der Grenzreize ließ sich schon bei 6 Darbietungen hinreichend eindeutig feststellen, welche Differenz jedesmal richtig, bzw. (bei großem „konstanten Fehler") eindeutig im Sinne der subjektiven Schätzung beurteilt wurde (a. a. O. Bd. IX). Bei größeren Unterschieden der Ausfüllung von N und V, die den Vergleich sehr erschweren, mußte jedoch oft bis zu viel höheren Wiederholungszahlen der kritischen Stufen (meistens 10, doch auch bis 25 und mehr) hinaufgestiegen werden (a. a. O. Bd. XII, S. 152). Auch lag in letzterem Fall eine viel größere Differenzierung der Sicherheitsstufen des Urteiles nahe (dreifache, bei manchen V.-P. sogar fünffache Abstufung), was natürlich die Eindeutigkeit der Resultate bei einem solchen Ausprobieren noch mehr in Frage stellte.

Überall wurde auch die Zeitlage des abgestuften Reizes V gewechselt, wie es auch zu einer exakten Anwendung der Methode vollständiger Reihen unerläß-

Im übrigen bietet natürlich die Abhängigkeit des rhythmischen Bewußtseins von den absoluten Zeitverhältnissen der Reize sowie die Entstehung der subjektiven Untergliederung bei rascherem Tempo ein selbstständiges Problem, das nach Anregungen von Mach und Vierordt zuerst von Bolton experimentell genauer behandelt wurde (s. u. § 65). In neuester Zeit hat Wallace (s. u.) auch untersucht, wie groß die Abweichung der absoluten Zeit eines einzelnen Elementes (des letzten Taktes einer kurzen Taktreihe) sein darf, damit dieses spezifische Bewußtsein nicht gestört werde. Er bezeichnet diese Abweichung als „Schwelle des Rhythmus". Äußerlich betrachtet bildet eine solche Versuchsanordnung einen speziellen Fall der viel allgemeineren Fragestellung, bei der sämtliche Taktelemente einer kurzen rhythmischen Reihe zeitlich verändert werden können, wobei die V.-P. ähnlich wie bei der „zeitlichen" Aufmerksamkeitsverteilung nach S. 343 nicht im voraus weiß, welches Element verändert werden wird. Solche Versuche führte O. Klemm[1]) mit dem S. 346f. beschriebenen Kontaktpendel aus, wozu die in Fig. 26 dargestellte Schaltung der drei Kontakte C_1, C_2, und C_3 diente,

---

lich ist. Ebenso geschah es z. B. bei Benussi (allerdings unter fortgesetzter Wiederholung eines konstanten Schemas der Abstufung mit regelmäßigem Auf- und Absteigen) und bei Hüttners Vergleichungen der Zeitdauern kontinuierlicher Lichtreize (s. unten). In Versuchen von Katz über den Einfluß der Pause (s. unten) wurde jedoch auf diesen Wechsel der Zeitlage ausdrücklich verzichtet, was zwar den Wert der tatsächlich angestellten Versuche als solcher nicht vermindert, aber keineswegs etwa für deren theoretische Verwertung irrelevant ist.

Ich erwähne diese nach S. 244ff. selbstverständliche Umkehrung hier besonders, weil gelegentlich behauptet wurde, daß auf dem Gebiete des Zeitvergleiches überhaupt kein eigentlicher Wechsel der Zeitlage möglich und daher auch die Methode der r. u. f. Fälle, die diesen Wechsel fordert, nicht anwendbar sei (vgl. Wundt, Physiol. Psychol. III[6] 1911, S. 481). Versteht man aber unter diesem Wechsel, wie es allgemein üblich ist, denjenigen der Lagen des variablen bzw. des konstanten Reizes V und N, die der Konstruktion eines Systems von Urteilsfunktionen $F_g(x)$ und $F_k(x)$ zugrunde gelegt werden, so ist gar kein Zweifel, daß auch hier, wie ja Meumanns u. a. eigene Versuchspraxis bewies, dieser Wechsel in ganz analoger Weise geschehen kann, wie denn auch hier die Methode der Vollreihen wiederum die einzig exakte ist und bei entsprechend geringer Häufigkeit weniger, passend ausgewählter Stufen auch praktisch wohl durchführbar bleibt. Vielleicht war an der Verwechslung mit schuld, daß Meumann den beurteilten Reiz mit V und den andern mit N bezeichnet, also mit den für den variablen und konstanten Reiz benützten Symbolen. Die Beziehung des Urteils auf den zweiten Reiz wird allerdings bei allen Zeitvergleichungen die naturgemäße sein, weshalb sie auch von Meumann stets beibehalten wurde. Für die richtige Umkehrung der Zeitlage des N und V (im gewöhnlichen Sinne) ist es dagegen gerade wesentlich, daß die Urteilsrichtung konstant bleibt. Außerdem wäre ja auch selbst bei größter Konstanz aller sonstigen Nebenumstände keine Erfüllung unseres „Korrespondenzsatzes" zu erwarten. Dagegen ist es weiterhin auch wohl möglich, in einer besonderen Untersuchung auch die Urteilsrichtung zu ändern, da diese einen wesentlichen Einfluß ausüben dürfte. Eine präzise Ermittelung ihres Einflusses würde aber natürlich ebenfalls wiederum eine Umkehrung der Zeitlage des N und V notwendig machen, wobei also beide Male die erste Strecke zu beurteilen wäre. Ganz das nämliche gilt ja für alle Versuche mit einem Unterschiede der Zeitlage, also auch z. B. bei der Vergleichung der Intensitäten sukzessiver Geräusche.

1) G. F. Arps und O. Klemm, Der Verlauf der Aufmerksamkeit bei rhythmischen Reizen, Wundts Psychol. Studien IV, 6. H. 1909, S. 505 (S. 518).

die zusammen mit einem bei Stromunterbrechung niederfallenden elektromagnetischen Schallhammer (s. ebenda), der sich in dem entfernten Zimmer der V.-P. befand, in einen Stromkreis geschaltet wurden. Da C_1 den Strom völlig unterbrach, zu C_2[1]) und C_3 aber die gleichen Widerstände W_2 und W_3 parallel lagen, so ergab sich beim Dauerschwung des Pendels eine daktylische Reihe, bei der nun jeder Taktschlag verschoben werden konnte. Natürlich fällt jene Schwelle für die Störung des Rhythmus nicht mit der von Klemm gesuchten Unterschiedsschwelle für die Erkennung einer Unregelmäßigkeit der Taktreihe überhaupt zusammen und wird aus dem S. 426 genannten Grunde überhaupt nicht sehr präzis abzuleiten sein. Doch haben auch Klemms Versuche für die Analyse des Rhythmus insofern Bedeutung, als sich die Bedingungen für die Auffassung objektiver Unterschiede der Zeitlagen von den Betonungsunterschieden abhängig erweisen. Ja solche Versuche könnten eventuell sogar dazu dienen, die subjektiven Betonungsunterschiede objektiv festzustellen.

c) Die Vergleichung der Unterschiede von Zeitstrecken. (Methode der mittleren Abstufung.)

Auch bei dem dritten Hauptproblem dieses Gebietes, das sich auf die Vergleichung von Unterschieden oder Verhältnissen zwischen Zeitstrecken, also auf sog. „übermerkliche" Unterschiede bezieht, ist überall die Möglichkeit einer einheitlichen rhythmischen Untergliederung für sämtliche Vergleichselemente ins Auge zu fassen, wobei wiederum die Möglichkeit eines Tempowechsels komplizierend hinzukommt. Das Problem wurde bisher in verschiedener Weise in Angriff genommen, jedoch nur von Wrinch[2]) auf Anregung von Külpe mittelst der schon S. 306ff. erörterten Methode der mittleren Abstufungen, wobei immer drei durch eine Pause von 2 Sek. getrennte Zeitstrecken aufeinander folgten. Eine Abschätzung des Verhältnisses zwischen zwei (übermerklichen) Zeitstrecken überhaupt liegt aber bereits vor, wenn man eine gegebene Zeitdauer in Hälften, Drittel oder Viertel teilen soll, was bei kleinen Gesamtstrecken kaum von der Herstellung eines $^1/_2$, $^3/_4$, $^4/_4$-Taktes abzutrennen ist[3]). Von Avord und Searle wurde eine längere und eine kürzere Strecke gegeben, und die V.-P. befragt, wie oft die letztere in der größeren Strecke enthalten ist[4]). Es steht übrigens mit dem S. 427 Gesagten in Übereinstimmung, wenn Wrinch bei Zeitstrecken, die mit telephonisch übertragenen Stimmgabeltönen kontinuierlich ausgefüllt waren, eindeutigere Resultate erhielt als bei leeren Strecken.

---

1) Bei diesem Kontakt ist die S. 346 genannte Wippe der Kontakte C_1 und C_3 durch eine einfache federnde Lamelle ersetzt, die so weit gedämpft ist, daß der Hammer nach der Rückkehr zum Haltemagneten nicht mehr abreißt.

2) Über das Verhältnis der ebenmerklichen zu den übermerklichen Unterschieden im Gebiete des Zeitsinns, Wundt, Phil. Stud. XVIII, 1902, S. 274.

3) Vgl. Exp. Anal. d. Bew. Phän. S. 281 u. 298.

4) Edith A. Avord and Helene E. Searle, A study in the comparison of time intervals (Min. Stud. f. th. Psych. Lab. of Vassar College), Am. Journ. XVIII, 1907, S. 177.

65. Die experimentellen Hilfsmittel im einzelnen.

Jede Anordnung zu einer Untersuchung über das Zeitbewußtsein besteht aus einem oder mehreren Reizapparaten und dem Zeitinstrument, von dem die Reizzeiten abhängig sind. Die Präzision dieser Vorrichtungen muß hierbei außerdem fortgesetzt durch besondere, erst bei den Reaktionsversuchen beschriebene Zeitmeßinstrumente kontrolliert werden.

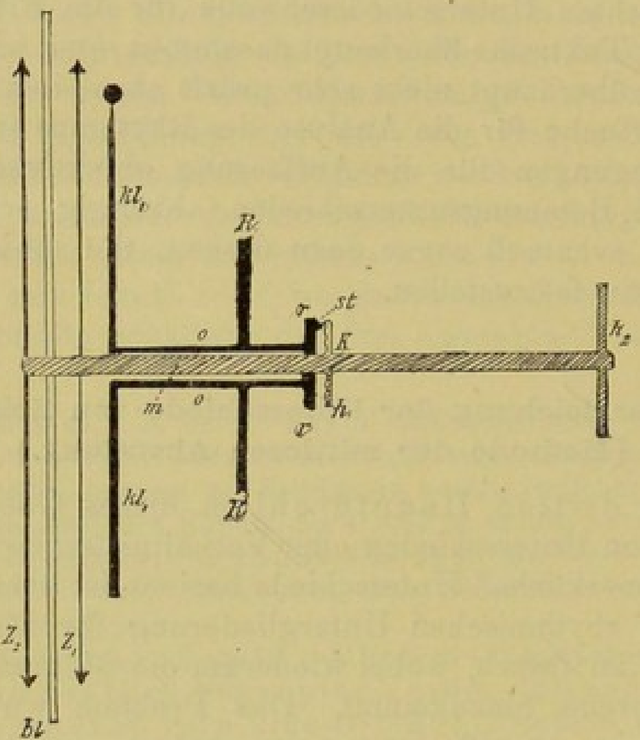


Fig. 40.
Durchschnitt durch das Stellwerk der sogenannten Komplikationsuhr.

a) Die Vereinigung von Zeitinstrument und Reizapparaten in sog. Komplikationsuhren.

Die beiden Hauptteile der Anordnung können natürlich, insbesondere bei rein mechanischer Auslösung der Reize, zu einem einzigen Apparate verbunden sein. So war es z. B. bei Beobachtungen von künstlichen Sternen nach Art der Auge- und Ohrmethode und von rotierenden Zeigern. Eine besonders einfache Vorrichtung ergibt sich, wenn ein Uhrzeiger auf einem irgendwie eingeteilten Skalenkreis mit konstanter Geschwindigkeit rotiert und in den Umlauf rhythmische Glockenschläge von der gleichen Periode eingeschaltet werden sollen. Fig. 40 zeigt den Mechanismus eines solchen von Geiger und Heyde benützten Apparates, den Wundt als „Komplikationsuhr" bezeichnet, im Unterschied von seinem sogleich zu nennenden Komplikationspendel mit Pendelbewegungen des Zeigers. Doch läßt sich der Begriff der „Komplikationsuhr" ganz allgemein für alle in diesem Abschnitt behandelten Kombinationen von Zeitinstrument und Reizapparaten verwenden.

Ein starkes Gewichtsuhrwerk mit verstellbarer Windflügelregulierung dreht die röhrenartig durchbohrte horizontale Achse o mit dem zum Uhrwerk gehörigen Rade R, an der außerdem noch das schwere Schwungrad kl_1, mit einem federnden Klöppel an der Peripherie, befestigt ist. An der Wand des Uhrgehäuses ist eine Glocke ausschaltbar so angebracht, daß der Klöppel kl_1 sie während der Rotation bei einer bestimmten Stellung des Rades streift. Die Intensität des Glockenschlages, der natürlich bei gleicher Glockenlage von der Umlaufsgeschwindigkeit des Rades abhängt, kann durch die Einstellung und besondere Dämpfungen reguliert werden. (Beim Anschlag kann der Klöppel mit der gegenüberliegenden Seite seines Knopfes außerdem auch noch die Wippe eines ebenfalls ausschaltbaren Öffnungskontaktes zur Seite drücken, wodurch gleichzeitig mit dem Glockenschlag oder, bei Zurückziehung der Glocke, auch allein ein Induktionsfunke auszulösen ist.) Die objektive Zuordnung der Zeigerstellung zu diesem Momentanreiz kann nun durch einen einzigen Handgriff bis auf Hundertstel der Skala beliebig reguliert werden. Der Zeiger Z_2, der vor der Skala bl rotiert, ist nämlich vorne an der Achse m befestigt, die ihrerseits in der mit dem Klöppel fest verbundenen Röhre o des Uhrwerkes beliebig verdreht werden kann, wenn man sie an dem rückwärtigen Handgriff h_2 gleichzeitig gegen eine in o angebrachte Feder so weit zurückzieht, daß der Stift st an dem mit o fest verbundenen Rad r nicht mehr in die Zähne des an ihr selbst befestigten 100-teiligen Kronrades K eingreift. Die Einstellung ist auch während der Rotation ausführbar, und der Experimentator kann von rückwärts an dem zweiten zu Z_2 parallelen Zeiger Z_1 diesseits der Skala die Einstellung kontrollieren. Der Komplikationsmoment wird genau bestimmt, wenn man den Zeiger, u. zwar diesmal unter Druck gegen h_2, mitsamt dem Werk langsam bis zur Berührung von Klöppel und Glocke weiterführt. Zur Beobachtung im Dunkeln sowie für Demonstrationszwecke ist das Uhrgehäuse mit Lampen versehen und eine 100-teilige Kreisskala auf einer Milchglasplatte bl angebracht, auf die natürlich für besondere Zwecke beliebige anders eingeteilte Skalen aus Kartonpapier aufgesetzt werden konnten, ebenso wie bei Heydes Versuchen mit mehreren Zeigern außerdem auch auf die Zeigerachse mehrere Scheiben nach Art der Maxwellschen mit je einem Strich aufgesetzt wurden. Die rhythmische Wiederholung des Glockensignales, die nach S. 420 ff. die Schätzung wesentlich beeinflußt, konnte durch Zurückziehung der Glocke für beliebige Umgänge aufgehoben werden.

Die zeitliche Einschränkung der optischen Zeigerwahrnehmung, die bei Heydes Versuchen hinzutrat, geschah mittelst einer ganz analogen Spiegelanordnung, wie sie schon S. 363 und 278 ausführlicher beschrieben wurde. Der Spiegelbelag bei T (vgl. Fig. 33) war hierbei kreisförmig so weit abgenommen, daß er den Zeiger, nicht aber die Skala direkt sehen ließ, die man sich in der Ebene O der Fig. 33 zu denken hat. Hinter der Belagöffnung befand sich nun, unmittelbar anliegend, ein zweiter, in Schlittenfugen laufender Spiegel, durch den sie beliebig geöffnet und wieder verschlossen werden konnte. Die Skala war an der Wand S angebracht, durch die der Beobachter sah, und wurde daher zur Einstellung der Aufmerksamkeit konstant schon vor der Öffnung des Zeigerfeldes im Spiegel gesehen. Dabei lag die Spiegelebene hier genau senkrecht zur Gesichtslinie (nicht schräg wie in Fig. 33), zu der dann auch das Zifferblatt der Uhr sowie die gespiegelte Skala konzentrisch angeordnet waren. Denn es störte die Beobachtung nicht, wenn an Stelle der Schraube vorne an der Zeigerachse zunächst im Spiegel das Okular gesehen wurde. Bei Klemms[1]) Versuchen mit dem Wundtschen Komplikationspendel (s. u.), bei denen wieder die nämliche Spiegelbeobachtung angewandt wurde, konnte außerdem der als Skala im Spiegel gesehene Kreisring in der Wand S, durch die der Beobachter hindurchsah, mitsamt dem konzentrischen Okular an Handgriffen steuerradähnlich vom Beobachter selbst gedreht werden. Hierdurch konnte der

1) Versuche mit dem Komplikationspendel nach der Methode der Selbsteinstellung, Wundt, Psychol. Stud. 2. Bd., 5. u. 6. H. 1907, S. 324.

Beobachter in einer besonderen Form der **Herstellungsmethode**[1]) den Skalenstrich an die Stelle der rhythmisch wiederholten Komplikation bringen, bzw. an die Grenzen, von denen an die Zuordnung eben noch möglich war.

Die direkte Auslösung des Momentanreizes durch den gleichzeitig beobachteten Bewegungsvorgang hatte Wundt schon 1861 bei Befestigung des Zeigers an einem schweren Pendel angewendet, an dem ein weiterer, auf eine tönende Feder aufschlagender Hebelarm angebracht war, der hier je nach der Lage der verstellbaren Feder den Schall bei einer verschiedenen Skalenstellung bewirkte[2]). Später führte er dann eine etwas mittelbarere Bewegung sowohl des Zeigers als auch des Glockenklöppels durch ein von einem Gewichtsuhrwerk im Gange gehaltenes Pendel ein. Durch eine Zahnradübertragung ist hierbei die Amplitude der beobachteten Zeigerbewegung erweitert, und der Klöppel wird erst von einem eingeschalteten Zwischenmechanismus geführt, der aber ebenfalls von dem Pendel direkt weitergeschoben wird, so daß keine Zeitdifferenz zwischen der letzten Angriffsoperation des Uhrwerkes und dem Schallreiz eintritt. Auch besteht der Klöppel hier aus einem Doppelhebel, dessen anderer Arm zur direkten mechanischen Applikation eines mit dem Schall gleichzeitigen Tastreizes benützt werden konnte (s. S. 422), und außerdem sind an ihm Kontaktspitzen anzubringen, die in Quecksilbernäpfe tauchen und so eingestellt werden, daß sie sich im nämlichen Momente wie der Glockenschlag von dem Quecksilberspiegel ablösen und Induktionsreize hervorbringen. Für die Einzelheiten muß auf Wundts eigene Beschreibung verwiesen werden[3]), ebenso für die gleichfalls etwas kompliziertere Vorrichtung, mit der Hartmann

1) Die Herstellungsmethode (s. S. 264) kann bei solchen Beobachtungen in verschiedener Weise angewendet werden. Bei einmaliger Darbietung einzelner disparater Momentanreize zur Ableitung ihrer Zeitschwelle kommt sie zunächst noch nicht weiter in Betracht. Ist jedoch der die Reihen einschließende Zeitraum in eindeutig greifbarer Weise ausgefüllt, wie z. B. bei der Bewegung eines Punktes über eine Skala, so kann schon nach einem einzigen Durchgang die Stelle des Punktes im Moment des disparaten Reizes im einzelnen rekonstruiert werden, was zur Methode der mittleren Fehler führt. Tritt aber dann auch noch eine Wiederholung der Komplikation in wissentlich regelmäßigen, nicht zu langen Zeiträumen hinzu, so läßt sich auch die Erfahrung bei jedem Durchgang dazu verwerten, um mittelst besonderer Mechanismen, wie sie oben mehrfach angegeben sind, eine bestimmte zeitliche Zuordnung für den nächsten Durchgang antizipierend vorzubereiten, wobei immer der Takt des einen Reizes den konstanten Haltepunkt für die relative Zuordnung des disparaten (bzw. anders lokalisierten) abgibt. Solche Einstellungsversuche sind also der S. 416ff. genannten Herstellung einer **Zeitstrecke** verwandt. Nur laufen hier eben die beiden disparat begrenzten Strecken gleichzeitig nebeneinander ab.

Nur im letzteren Falle, der daher auch kein einfacher Zeitschwellenversuch mehr ist, läßt sich dann auch wieder ebenso, wie bei der Streckenvergleichung, eine **Vertauschung der variierten „Strecke“**, also ein Wechsel von N und V einführen. Bei einer einmaligen Beobachtung einer einzelnen Komplikation momentaner Reize ohne bestimmte Beziehung zu einem vorhergehenden Signal gibt es dagegen überhaupt keinen Gegensatz eines bei der Abstufung konstanten und variablen Elementes. (Der wohl mögliche Wechsel der Beurteilung ist als ein ganz neuer Beobachtungsmodus mit dem für die Fehlerbestimmung mittelst der Methode der Vollreihen wichtigen Umkehrung der Lage von N und V nicht zu verwechseln, s. oben S. 427, A. 2.) Die letzten Bemerkungen gelten natürlich ganz allgemein auch für die Methode der Vollreihen.

2) Vgl. Vorlesungen über die Menschen- und Tierseele, 4. Aufl. 1906, S. 297.

3) Grundzüge der physiologischen Psychologie III[6], S. 71.

die Bedingungen der astronomischen Beobachtung eines (geradlinigen) Sterndurchgangs nach der Auge- und Ohrmethode imitiert hatte[1]). Für geradlinige Bewegungen bedient man sich aber nunmehr wohl am besten der Schleifenkymographien, wie sie in der physiologischen Graphik beschrieben sind[2]), wobei nur durch Kettenvorrichtungen oder dergl. für eine sichere Führung der den bewegten Punkt (den künstlichen Stern) tragenden Schleife seitens der übrigen Teile des Apparates gesorgt werden muß, insbesondere falls diese den Momentanreiz auslösen sollen.

Die Rotation mit gleichförmiger Geschwindigkeit kann natürlich durch Ketten- und Hebelübertragung, Führung von Stiften in Räderausschnitten von entsprechender Kurvenform u. ä bei genügender Vermeidung von totem Gang auch zur exakten Auslösung beliebiger periodischer Bewegungsformen benutzt werden. Soweit es aber hierbei nur auf den optischen Effekt ankommt, leistet dies in besonders einfacher Weise das Stroboskop, das Biener für seine (noch nicht publizierten) Versuche (s. S. 424) verwendete. Da es ihm zunächst nur auf die Fortbewegung eines einzelnen Punktes ankam, genügte sogar die primitivste Form dieses Prinzipes, bei der unmittelbar hinter einem sehr schmalen Spalt ein Zylinder rasch vorbeirotierte, der hier den Rand eines großen Metallrades von 42 cm Durchmesser bildete, das von einem Elektromotor sehr konstant getrieben wurde. Auf der mit weißem Papier bezogenen Zylinderfläche war eine Linie gezogen, von der im Spalt unter geeigneten optischen Bedingungen nur ein hin und her wandernder Punkt zu sehen war. Der Zylinder ist bei diesem Stroboskop mit dem Boden, dessen Ebene während der Rotation trotz seiner Größe durch besonders sorgfältige Bearbeitung und präzise Führung keinerlei Schwankungen erleidet, durch 4 Mikrometervorrichtungen verbunden, an denen er mitsamt der Linie genau parallel zur Zylinderachse verschoben werden kann. Dadurch konnte also der Umkehrpunkt des zwischen zwei festen Punkten der Spaltebene hin und her wandernden Objektes von einem Versuch zum anderen leicht nach der Methode der Vollreihen mikrometrisch genau abgestuft werden. Mit dem Rade ist durch Zahnräderübertragung zugleich eine Kontaktvorrichtung verbunden, welche durch Stromschluß in einer elektromagnetisch bewegten Blendenvorrichtung die Zeit des Ausblickes auf die bewegte Fläche in weiten Grenzen zu regulieren gestattete[3]). Von dieser oder von dem Zylinder selbst können dann natürlich auch wieder Komplikationsreize in beliebigen Zeitverhältnissen ausgelöst werden.

b) Die Trennung von Zeitinstrument und Reizapparaten.

1. Die Untersuchung von Zeitschwellen bei momentanen Reizen.

Wenn man nicht die stetige Bewegung des Zeitinstrumentes selbst, sondern z. B. nur einzelne Momentanreize beobachten läßt, wie bei den

1) Über die übrige Literatur vgl. Exper. Anal. d. Bewußtseinsphän. S. 189ff. u. 304ff.

2) Vgl. dieses Handbuch I, 4. Allg. Meth. II, S. 8. Ein einfaches Pendel, das vor der Lichtquelle des Meridianzeichens vorbei schwang, verwendeten Hirsch und Plantamour für die Bewegung des künstlichen (transparenten) Sternes bei ihren Versuchen nach der Registriermethode (s. u. § 81, a).

3) Das Prinzip dieser leicht gebauten Hebelvorrichtung, die auch zur zeitlichen Begrenzung akustischer Reize (durch Unterbrechung der Luftleitung zwischen zwei nach

einfachsten Komplikationsversuchen nach S. Exner[1]), bedient man sich am besten wie Weyer[2]) eines doppelseitig elektromagnetisch aufgehängten Pendels. Denn hierbei wird man bezüglich der Bewegungsform und Geschwindigkeit des Zeitinstrumentes von der Vorbereitungszeit unabhängig, was der Präzision der Abstufung im kritischen Zeitpunkt selbst zugute kommt. Außerdem läßt sich dann die Komplikation leicht entweder nur ein einziges Mal in einem beliebigen Zeitpunkt auslösen, oder wenn man das Pendel dauernd in Schwung erhält[3]), auch rhythmisch wiederholen. Bei einer Rotationsvorrichtung, wie sie z. B. auch Exner verwendet hatte, ist man dagegen ohne besondere Zusatzvorrichtungen zunächst immer an die Umlaufsperiode gebunden. Außerdem trägt aber das Pendel, wenn es einmal geeicht ist, seine Zeiteinteilung unabhängig von Betriebsmitteln in sich, was vor allem bei der Ableitung von Zeitschwellen innerhalb des nämlichen Sinnesgebiets wichtig ist, weil hier sehr feine Abstufungen bis auf 0,001 Sek. konstant ausführbar sein müssen, bei akustischen Zeitschwellen aber auch noch feinere. Bei disparaten Reizen kann man zwar eventuell mit einer etwas geringeren Feinheit der Abstufungen auskommen, die Konstanz der absoluten Stufen ist aber natürlich auch hier für Schwellen- und Fehlerbestimmungen sehr wichtig. Es wäre daher auch hier das schon S. 330 erwähnte Helmholtzsche Modell mit Vorteil zu verwenden.

Die Auslösung der Reize kann zunächst wieder nach dem vorigen Prinzip rein mechanisch erfolgen[4]), d. h. beim Lichtreiz tachistoskopisch und beim Schallreiz eventuell auch durch mechanische Ventile, wenn nur das Zeitinstrument so geräuschlos funktioniert, daß es sich unmittelbar bei der V.-P. befinden kann[5]). Auch C. Minnemann[6]) ließ bei seinen neuesten Komplikationsversuchen mit Licht- und Schallreizen den Lichtreiz von dem hierbei als Zeitinstrument verwendeten Martiusschen Lichtunterbrechungsapparat, bei dem Spaltscheiben durch einen Elektromotor in rasche Rotation versetzt werden, direkt tachistoskopisch exponieren (s. S. 358, A. 3), nachdem bereits Hüttner mit diesem Apparat allein die Vergleichung der Zeitdauer

---

Urbantschitsch in die Schallleitung eingefügten Spitzen) dient, s. bei Kafka, a. S. 365 A. 2 a. O. S. 270.

1) S. Exner, Experimentelle Untersuchungen über die einfachsten psychischen Prozesse. Pflügers Arch. f. d. ges. Physiologie Bd. 11, 1875, S. 403 (406).

2) a. S. 420 A. 1 a. O.

3) s. S. 346.

4) Dies geschah z. B. auch beim optischen und akustischen Reiz des Reizapparates von Deuchler für Reaktionen auf Komplikationen. Vgl. § 81, a.

5) Für Schallreize wurde bei solchen Untersuchungen diese direkte Begrenzung durch das Zeitinstrument selbst außer in den bisher genannten Formen auch noch in der Weise vorgenommen, daß man eine mit sektorenförmigen Ausschnitten versehene Scheibe zwischen der Öffnung eines Helmholtzschen Resonators und einer elektromagnetischen Stimmgabel ohne Resonanzkasten rotieren ließ, womit schon von A. M. Mayer u. a. Intermissionen von Tönen erzeugt worden waren (Am. Journ. of sciences, 3, vol. 8, 1874, p. 241). So verfuhren in Untersuchungen über den Rhythmus Bolton (Rhythm, Am. Journ. of Psych. VI, 1894, S. 145) und kürzlich wiederum Wallace Wallin (Experimental Studies of Rhythm and Time, Psychol. Rev. Bd. XVIII 1911, S. 100).

6) Untersuchungen über die Differenz der Wahrnehmungsgeschwindigkeit von Licht- und Schallreizen, 3. Abschn. (Experimentelle Untersuchung usw.) Archiv f. d. ges. Psychologie XX, 3. 1911, S. 311.

kontinuierlicher Lichtreize untersucht hatte[1]). Allerdings wurde nur bei einem Teile der Minnemannschen Versuche auch der Schallreiz direkt an diesem Apparat durch den Anschlag eines mit einer der Scheiben rotierenden Klöppels an einer Glocke erzeugt.[2]) Später wurde jedoch der Klöppel durch eine Metallfeder und die Glocke durch einen Schleifkontakt, der Glockenschlag also durch einen kurzdauernden Kontaktschluß ersetzt, der einen elektromagnetischen Schallhammer in Bewegung setzte (vgl. unten b, 3, β). Dadurch kam freilich noch eine Latenzzeit von ca. 27 σ vom Kontaktschluß bis zum Aufschlag des Hammers auf den Ambos hinzu, die Minnemann mit dem Chronoskop (s. § 82, b) und außerdem noch mit einer photochronographischen Eichung, bei der allerdings noch eine Relaiszeit zu eliminieren war, gesondert bestimmte[3]).

2. Universal-Kontaktapparate, insbesondere zur Herstellung von Zeitstrecken (Zeitsinnapparate, Taktierapparate).

Diese zuletzt genannte Auslösung elektromagnetischer Reizapparate ist natürlich die universellste. Hierbei ist dann das Zeitinstrument nur noch Kontaktapparat, der je nach der Art der Reizapparate Stromöffnungen oder -schließungen herzustellen hat. Während aber für kurze Zeiten, also für die Ableitung von Zeitschwellen und zur Vergleichung kleinster übermerklicher Zeiten, ein Kontaktpendel den Vorzug verdient, sind zur gleichmäßigen Abstufung längerer Zeiten Apparate mit konstanter Rotation eines Kontaktauslöser-Hebels über eine horizontale, kreisförmige Kontaktbahn am handlichsten. Die experimentelle Psychologie erreichte die auf diesem Gebiete erforderliche Genauigkeit und eine rasche und ausreichende Variationsmöglichkeit etwa seit Anfang der 90er Jahre, als auch die Muskel- und Nervenphysiologie am Rheotom Erfahrungen in ähnlicher

---

1) Zur Psychologie des Zeitbewußtseins bei kontinuierlichen Lichtreizen, in Martius' Beiträgen zur Psychol. und Philos. I, 3, 1902, S. 367.

2) Dabei konnte auch die Methode der Selbsteinstellung angewendet werden, jedoch in ganz anderer Form, als sie z. B. bei Klemms Versuchen mit Skalenbeobachtung (s. S. 431) möglich war, und auch wiederum anders, als es mittelst einer ähnlichen Vorrichtung wie Fig. 40 geschehen könnte. Diesmal war nämlich umgekehrt die Glocke gegen den mit dem optischen Apparat fest verbundenen Klöppel durch eine Kurbel zu verstellen, so daß der Glockenschlag beim nächsten Vorgang, unter Aufrechterhaltung des optischen Taktes, im Vergleich zum Lichtreiz früher oder später zu erwarten war. Außerdem war die Glocke immer erst durch eine elektromagnetische Hebung senkrecht zur Rotationsebene einzuschalten, wofür der letzte entscheidende Kontaktschluß vom Rotationsapparat selbst periodisch hergestellt wurde.

3) Minnemann glaubt, daß dieser Zeitfehler des Schallhammers genauer zu bestimmen sei als die Latenzzeit zwischen dem Anschlag des Klöppels an der Glocke und deren hellem Klang. Bei den oben erwähnten Anordnungen mit gedämpfter Glocke lag indessen der für die Zuordnung entscheidende Akzent im Schallvorgange wohl immer auf der intensivsten Anfangsphase des Aufschlages selbst, für die somit überhaupt keinerlei Latenzzeit in Rechnung gezogen zu werden braucht. Wohl ist aber für sämtliche Versuche dieser Art bei größerer Entfernung der V.-P. vom Apparate die Fortpflanzungszeit des Schalles in Betracht zu ziehen.

Richtung gesammelt hatte [1]). Während aber für die dort notwendigen Reizfrequenzen Motorbetrieb notwendig war, wurde der zuerst von E. Meumann [2]) benützte „Zeitsinnapparat" bei seinen Versuchen wie auch bei den meisten späteren Anwendungen von dem Uhrwerk eines Baltzarschen Kymographions [3]) mit Windflügelregulierung betrieben. Die Umlaufsgeschwindigkeit der Trommelachse, deren Umdrehungszeit in einfacher Weise zwischen $1\frac{1}{2}$ Stunden und 2 Sek. zu variieren ist, wird durch Zahnräder auf die Achse des in Fig. 41 dargestellten Rotationsapparates

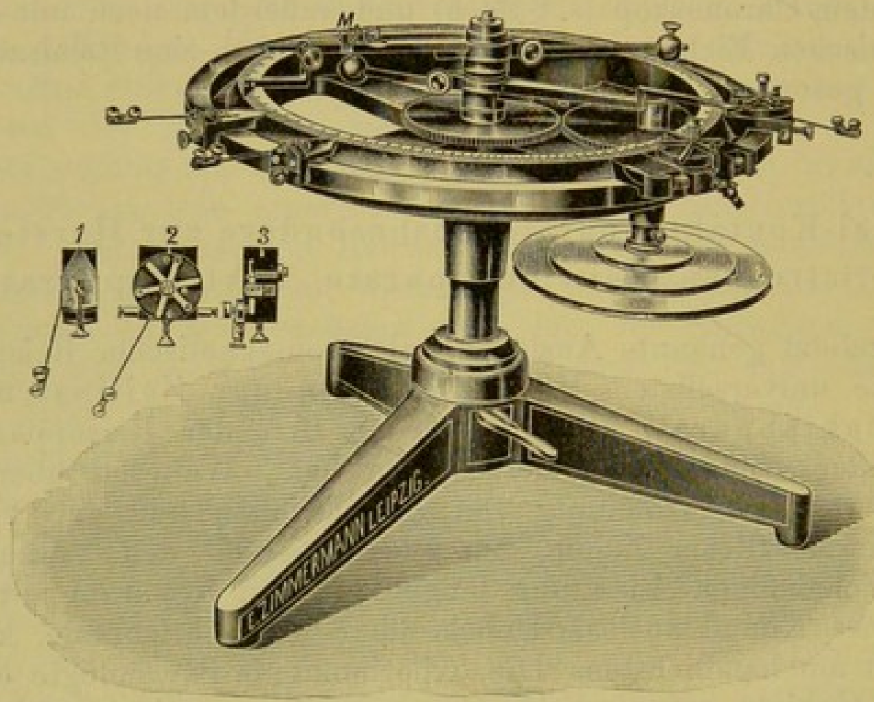


Fig. 41.
Kontaktapparat zur Untersuchung des Zeitbewußtseins nach Meumann mit drei Kontaktformen. (Nr. 1 Schleifkontakt, Nr. 2 Sternkontakt, Nr. 3 Wippe.)

übertragen [4]), auf die einer oder mehrere ausbalancierte Auslöserhebel aufgesetzt werden können, deren peripheres Ende über dem Kreisring von 28 cm Durchmesser rotiert und hier die Kontakte bedient, die in einer Rinne des Ringes verschiebbar und an jedem Punkt derselben durch eine Druckschraube zu fixieren sind. Diese auf Hartgummi montierten Kontakte sind von jener Metallrinne des Teilkreises isoliert, während der in den Apparat eingeleitete Strom in den Auslöserhebel gelangt. Die Minimalzeit, die mit einem Hebel durch Änderungen in zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden

1) Vgl. wiederum S. Garten, a. S. 330 a. O. dieses Handbuches, S. 364ff.

2) Beiträge zur Psychologie des Zeitsinnes. Wundt, Phil. Stud. IX, S. 270.

3) Vgl. dieses Handbuch I, 4. Abt. Allgemeine Methodik II. 1911. O. Frank, Kymographien, Schreibhebel usw. S. 6. Hierbei ist auf die Achse a^2 (a. a. O. Fig. 1), die sonst die Trommel trägt, ein Zahnrad aufgesetzt, das in ein Rad des Kontaktapparates eingreift.

4) Wie aus der Figur zu ersehen ist, setzt sich die Achse des Übertragungsrades nach unten in eine Riemenscheibe fort, mittelst deren dieser Kontaktapparat auch durch einen Elektromotor zu betreiben ist. (Vgl. unten.)

Kontakten zu begrenzen ist, hängt natürlich von der Breite dieser Kontakte ab. Doch war bereits von Meumann auch die Verwendung eines Doppelhebels vorgesehen, der z. B. bei gestrecktem Winkel seiner Arme Kontakte an diametral gegenüberliegenden Stellen bedient und dabei dann auch beliebig kleine Zeiten bzw. Zeitdifferenzen herzustellen erlaubt, wovon erst vor kurzem Pauli bei seinen Versuchen über die subjektive Zeitordnung verschieden lokalisierter optischer Reize Gebrauch machte[1]. Der Kreisring für die Kontakte ist in $^1/_2$ Grade geteilt, so daß $^1/_4$ Grade noch genau zu schätzen sind.

In Anlehnung an das Engelmannsche Polyrheotom[2] konstruierte dann Schumann[3], der schon früher die horizontal gestellte Achse eines Balt-

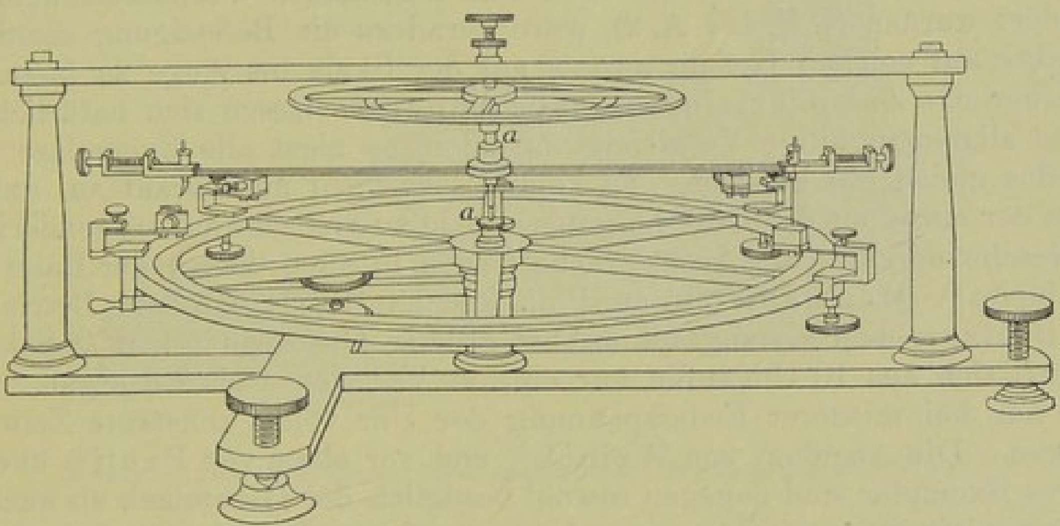


Fig. 42.
Kontaktapparat nach Schumann.

zarschen Kymographions zur Herstellung von drei aufeinanderfolgenden kurzen Quecksilberschließungen verwendet hatte[4], ein größeres in Fig. 42 dargestelltes Modell eines ähnlichen Kontaktapparates, wie er soeben beschrieben wurde, aber nur für den Betrieb mittelst eines hier konzentrisch angreifenden Motors. Schumann fand den Gang bei Verwendung des Helmholtzschen elektromagnetischen Rotationsapparates, nachdem er ihn mit Trockenkontakten versehen hatte, überaus konstant (s. unten)[5]. Die Kreisscheibe für die Kontakte hat hier einen Durchmesser von 42 cm und ist bei ihrem größeren Umfange in $^1/_4{}^0$ geteilt. Im Bilde ist auf die Achse a, a der

1) R. Pauli, Über die Beurteilung der Zeitordnung von optischen Reizen (im Anschluß an eine von C. Mach beobachtete Farbenerscheinung). Arch. f. d. ges. Psychologie XXI, 1911, S. 133. Hierbei diente also der Rotationsapparat auch zu Zeitschwellenversuchen.

2) Vgl. Garten a. S. 330 a. O. S. 357 ff. und Lit. 71.

3) Ein Kontaktapparat zur Auslösung elektrischer Signale in variierbaren Intervallen. Zeitschr. f. Psychol. u. Ph. der S. Bd. 17, 1898, S. 253.

4) Über die Schätzung kleiner Zeitgrößen, Zeitschr. f. Psychol. u. Ph. der S. Bd. 4, 1893, S. 1 (S. 48).

5) Auch S. Exner hatte (vgl. a. S. 434, A 1 a. O.) seinerzeit seine rotierende Scheibe mit verstellbaren Zeigerspitzen für die Quecksilberkontakte bereits mittelst eines Helmholtzschen Elektromotors (älterer Konstruktion) betrieben.

schon beim vorigen Modell erwähnte Doppelhebel zur Herstellung kürzester Zeiten aufgesetzt, der auch hier durch einen abgesehen vom Gegengewicht einarmigen Hebel zu ersetzen ist.

Außerdem ist hier noch ein besonderer mit Handgriff versehener Hebel unter dem Kreisring konzentrisch mit stärkerer Reibung zu verdrehen. An seinem Ende, das zu dem Kontaktkreis heraufreicht, kann ebenfalls ein Kontakt in richtiger Lage zum Auslöserhebel befestigt werden, den dann der Experimentator rasch von einem Umlauf des Zeigers zum andern exakt in eine andere Lage bringen kann, wie es vor allem zur raschen Abstufung der von diesem variablen Kontakt abgeschlossenen Vergleichsstrecke von Wert ist[1]). Ja für Versuche mit einem fortwährenden Wechsel der Zeitlage der variierten Strecke, wie sie oben von allgemeinen Voraussetzungen aus gefordert wurden (s. S. 427 A. 2), wäre geradezu die Befestigung sämtlicher Kontakte auf solchen Hebeln anstatt auf der Skala ins Auge zu fassen.

Über die Zeitpräzision solcher Apparate lassen sich natürlich nur schwer allgemeingültige Vergleiche anstellen, da nicht alle Exemplare eines Modelles gleich gut arbeiten. Es kommt hier nicht nur darauf an, daß die Zeiten der einzelnen Umläufe im ganzen nicht zu viel schwanken, sondern daß die Geschwindigkeit des Auslöserhebels auch in allen Teilen der Bahn konstant bleibt[2]). Meumann gibt an (Phil. Stud. IX, S. 271), daß beim Betrieb mit dem Baltzarschen Kymographion bei größter Geschwindigkeit (2 Sek. pro Umlauf) sich aus 10 Umläufen nur eine m. Var. von 1 bis 2 σ ergab. Doch seien nur bei mittlerer Federspannung der Uhr völlig konstante Zeiten zu erlangen. Die Angaben von Wrinch[3]) und vor allem von Pauli[4]) über ein anderes Exemplar sind dagegen sowohl bezüglich der Gesamtzeit als auch der Gleichmäßigkeit im einzelnen weniger günstig (z. B. bei 200 σ eine m. V. von 6—7 %). Beim Betrieb mittelst eines Helmholtzschen Motors mit Trockenkontakt fand dagegen Schumann an seinem Apparat für 10 Umdrehungen à 1,232 Sek. eine m. Var. von nur 0,9 σ (bzw. bei einer Teilstrecke von 0,3 Sek. nur 0,4 σ), was D. Katz[5]) an dem Göttinger Exemplar bestätigt fand. (Bei jeweils neuem Anlauf stieg die m. Var. des ganzen Umlaufes allerdings auf 2 σ.) Indessen hat der Antrieb mittelst Uhrwerkes den schon von Meumann betonten Vorteil, daß die absolute mittlere Zeit, wenn die Skala der Friktionsscheibe am Kymographion einmal geeicht ist, jederzeit

1) Meumann gibt übrigens an, daß er den entsprechenden Schlußkontakt in der Rinne des Teilkreises seines Apparates auch schon ohne weiteres in ähnlicher Weise rasch verschieben konnte, da der geringe Widerstand beim Durchgang des Auslösers eine festere Fixierung erließ.

2) Da dieser Gang bei jedem neuen Anlauf des Apparates immer erst nach einiger Zeit erreicht wird, die rein empirisch festzustellen ist, so muß natürlich in den vom Kontaktapparat zu schließenden Stromkreisen stets noch ein besonderer Schlüssel, bzw. in den zu unterbrechenden eine vorläufige Nebenschließung vorhanden sein. Selbstverständlich sind alle Eichungen unter den nämlichen Widerstandsverhältnissen der Kontakthebelbewegung, nicht etwa bei freiem Kreisring, vorzunehmen, wenn man nicht nur das Zeitinstrument, sondern die Präzision der Anordnung im ganzen kontrollieren will.

3) a. S. 307 A. 4 a. O.

4) a. S. 437 A. 1 a. O.

5) Experimentelle Beiträge zur Psychologie des Vergleichs im Gebiet des Zeitsinns. Zeitschr. f. Psychol. u. Ph. d. S. 1. Abt. Bd. 42, 1906, S. 302 u. 414.

schnell wieder aufgefunden werden kann, während man beim Motor auch neben der Stromstärkemessung stets noch der Kontrolle mittelst der Fünftelsekundenuhr u. dergl. bedarf.

Zu Untersuchungen der Rhythmisierung und der Vergleichung von Taktreihen (s. S. 428), bei denen eine längere Reihe von kurzdauernden Schließungen des nämlichen Stromkreises für einen Reizapparat herzustellen und in ihrer Geschwindigkeit innerhalb weiter Grenzen rasch zu variieren ist, verwendete man auch besondere Taktierapparate. Einen solchen konstruierte z. B. Bolton (a. S. 434, A. 5 a. O.) im Anschluß an das Gewichtsuhrwerk des großen Wundtschen Chronographen[1]), wobei an Stelle der Trommel, ähnlich wie bei Schumanns älterem Apparat (s. S. 437, A. 4), eine Achse

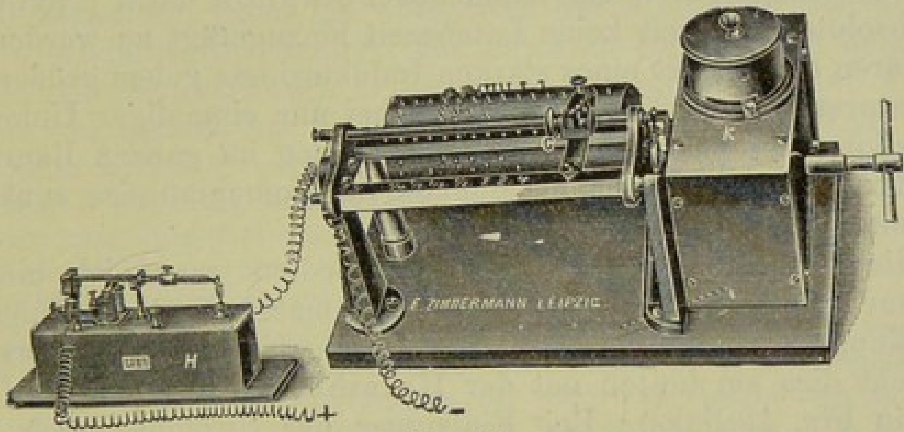


Fig. 43.
Taktierapparat mit kleinem elektromagnetischen Schallhammer nach Wundt.

mit einer Reihe von Hebelarmen mit variabler Winkeldistanz aufgesetzt war, die für kurze Zeit Quecksilberkontakte schlossen bzw. unterbrachen (s. unten). Wundt verwendet dagegen einfach eine durch ein Gewichtsuhrwerk getriebene Horizontaltrommel mit verschieden engen Reihen äquidistanter fester Kontaktstifte (Fig. 43). Eine auf diesen Stiften schleifende Feder c, die von der Trommel isoliert ist und in die der eine Pol des Stromkreises geleitet wird, während der andere zur Trommel gelangt, kann auf einem zur Achse parallelen Stab rasch verschoben und vor jeder Stiftreihe genau fixiert werden[2]). Die gewöhnlichen Metronome, die für manche Versuche dieser Art und zu vorläufigen Beobachtungen wohl ausreichen, sind wegen der Verschiedenheit der beiden Schläge und ihrer Zeitabstände beim Hin- und Herschwingen wenigstens für Versuche mit rein subjektiver Rhythmisierung nicht genügend.

3. Reizapparate und Kontakte zu ihrer Auslösung mittelst eines Kontaktapparates.

a) Auslösung von Momentanreizen ohne wesentliche Latenzzeit (Funkeninduktion, Telephonknall).

Die Wahl der einzelnen Kontaktvorrichtungen, die auf die Gleitschiene des Pendels oder Rotationsapparates aufgesetzt werden, hängt natürlich davon

1) s. § 82, a.
2) Wundt, Grundzüge der Physiol. Psychologie III[6], 1911, S. 30.

ab, welcher Reizapparat angeregt werden soll. Will man Zeitschwellen nach diesem Modus ableiten, so erregt man am besten ein Induktorium, dessen Elektroden unmittelbar einen Licht-, Tast- oder Schallreiz mit einer hier zu vernachlässigenden Latenzzeit und Reizdauer auszulösen gestatten und so vor allem zur Ableitung von Zeitschwellen disparater Momentanreize in Komplikationsversuchen geeignet sind (S. Exner, Weyer u. a.). Einen reinen Lichtreiz ohne Funkengeräusch erhält man entweder durch Einbauen der Funkenstrecke in einen schalldichten Kasten[1]) oder mittelst einer Geißlerschen Röhre[2]). Über die Herstellung einer Reihe möglichst konstanter elektrischer Tastreize macht Meumann bei seinen Versuchen über ausgefüllte Strecken Erfahrungen[3]). Als Schallreiz kommt dem bei kleiner Funkenstrecke nur schwachen Funkengeräusch vor allem das Telephon darin praktisch gleich, daß der absoluten Reizzeit keine Latenzzeit hinzugefügt zu werden braucht. Im sekundären Stromkreis eines starken Induktoriums geben größere Modelle mit Resonatoren (vgl. S. 336) auch schon bei nur einmaliger Unterbrechung oder Schließung des primären Stromkreises einen im ganzen Raum deutlich hörbaren Knall. Doch kam das Telephon für Momentanreize zunächst auch im primären Stromkreis zur Verwendung.

Für die Erregung des Induktoriums bedient man sich hierbei jetzt meistens nur noch der Trockenkontakte und macht die Schließung so kurz, daß Schließungs- und Öffnungseffekt in einen einzigen Eindruck verschmelzen. Man erreicht dies am besten mit der Helmholtzschen Wippe (Nr. 3 der Kontakte in Fig. 41 links). Bei Einleitung des Stromes durch den vorn platinierten Auslöserhebel und Ableitung durch die Wippe erhält man eine Schließungszeit von nur ca. $^1/_{3000}$ Sek.[4]) Doch ist der Reizeffekt noch einfacher, wenn man nur die Unterbrechung des primären Stromkreises auf den sekundären wirken läßt. So arbeiteten bei dem S. 439 genannten Taktierapparat Boltons je ein Kontakthebel im primären und im sekundären, das Telephon enthaltenden Stromkreis in der Weise zusammen, daß zunächst der primäre Kreis, dann erst der sekundäre geschlossen wurde, worauf die Reizung durch Unterbrechung im primären erfolgte und schließlich auch der sekundäre wieder geöffnet wurde, Schaltungen, für die ebenfalls die Praxis der Rheotome mancherlei Anregung an die Hand geben kann. Das nämliche ließe sich auch mittelst der Fig. 41, Nr. 1 abgebildeten Schleifkontakte erreichen, die in etwas anderer Form auch die vier in Fig. 42 auf den Schumannschen Apparat aufgesetzten Kontakte bilden. Diese geben einen kurzdauernden Schluß, wenn in die Spitze des den einen Pol leitenden Auslöser-Hebelarmes eine Metallfeder (aus Kupfer)

1) Meumann fand bei einer 1 mm großen Funkenstrecke eines Induktoriums mit 4 cm Schlagweite einen starkwandigen Holzkasten, der mit Filz ausgelegt und vorn mit zwei 1 cm voneinander entfernten Glasscheiben abgeschlossen war, zur Schalldämpfung ausreichend (Phil. Stud. Bd. 12).

2) Pauli verwendete in seiner S. 437 genannten Untersuchung in den beiden Lampenkästen des Wundtschen Perimeters, deren Lichtreize auf ihr Zeitverhältnis hin zu beobachten waren, hinter einem Mattglas je eine taschenuhrförmige Geißlersche Röhre, die, mit Kohlensäure gefüllt, ein nahezu weißes, etwas bläuliches Licht ziemlich gleichmäßig über die beobachtete Fläche verteilt zeigte.

3) Phil. Stud. Bd. 12.

4) Vgl. Garten, a. S. 330 a. O., S. 364, Fig. 29.

eingesetzt wird[1]). Man stelle nun einen solchen Schleifkontakt so ein, daß er von dem Arm eines Doppelhebels in der eben genannten Weise unmittelbar vor der durch den anderen, vom Apparat isolierten Arm bewirkten Öffnung einer Wippe berührt und vor dem Zurückschnellen der Wippe von dem zweiten Doppelhebel wieder verlassen wird. Liegt hierbei der Schleifkontakt mit seinem Auslöserhebelarm im primären und die innere Unterbrechungsstelle der Wippe im sekundären Stromkreise, so hat man die von Bolton angewendete Auslese der Unterbrechungsinduktion.

β) Trägere Apparate für Momentanreize (Schallhammer u. ä.).

Vor allem dienen diese Schleifkontakte aber nun zur Erregung etwas trägerer Reizapparate, denen ein wenigstens etwas längerer Stromimpuls von mehreren σ erteilt werden muß[2]). So legt man sie z. B. mit dem elektromagnetischen Schallhammer in einen Stromkreis[3]), der Fig. 44 abgebildet ist und bereits von Estel[4]), Mehner[5]) und Glaß[6]) zu Versuchen über das Zeitbewußtsein verwendet wurde.

Die Säule S trägt das Achsenlager, in dem der Hammerstiel als doppelarmiger Hebel in Spitzenlagerung frei schwingen kann. Auf dem Arm mit dem Kopf H ist ein Anker angebracht, der bei Stromschluß im Elektromagneten E (Klemmen 1 u. 2) den Kopf H gegen den Amboß A schlagen läßt, wodurch zugleich ein bei 4 (bzw. 3) nach H und bei 6 in den Amboß geleiteter Strom geschlossen und außerdem auch noch eine Verbindung zwischen zwei Quecksilbernäpfen durch die isolierte Platinspitzengabel g hergestellt werden kann, Hilfsvorrichtungen, die wieder zu anderen Reizkomplikationen, zu Zeitkontrollen und bei Reaktionsversuchen verwendbar sind. Die Elastizität des Hammers und mit ihr die Fallzeit und Schallintensität bei gegebener Stromstärke und Kontaktdauer lassen sich durch die verstellbare Gegenfeder f regulieren[7]).

---

1) Wegen der dreieckigen, nach der Achse zugespitzten Form der meistens neusilbernen Schleifplatten kann die Kontaktdauer durch eine radiale mikrometrische Verschiebung (M in Fig. 41) der Hebelfeder verändert werden. Bei den Kontakten zum Schumannschen Apparat läßt sich durch eine Druckschraube auch der ganze Kontakt gegen die Kreisfläche heben und senken (s. Figur 42), was übrigens auch mit der Schleifplatte an den Meumannschen Kontakten geschehen kann*). Bei jenen schneidet außerdem die dreieckige Metallplatte des Schleiffeldes an der von der Metallfeder des Auslösers zuerst berührten Stelle genau radial ab, wie es natürlich auch für das Modell Fig. 41, Nr. 1 herstellbar ist.

2) Pauli verwendete a. S. 437 a. O. die Schleifkontakte übrigens auch zur Erregung des Induktoriums bzw. der Geißlerschen Röhre.

3) In den öfter genannten Versuchen von E. Meumann kamen sie allerdings noch nicht zur Anwendung. Bei den damaligen Kontakten stand vielmehr u. a. eine dreieckige Feder aus feinstem Uhrfederstahl senkrecht zur Kreisscheibe und wurde von dem festen, platinierten Kopfende des Auslöserhebels gestreift, ähnlich wie auch bei Weyer an dem Kontaktpendel eine federnde Platte befestigt war, die auf eine feste, mit Zahnbetrieb auf der Kontaktbahn verstellbare Spitze traf.

4) Phil. Stud. Bd. 2, 1885, S. 37.

5) Ebenda, S. 546.

6) a. S. 418 A. 1 a. O.

7) Soll der Schallreiz in gleicher Weise durch eine Stromöffnung ausgelöst werden, so braucht man nur den Elektromagneten z. B. über dem Hebel anzubringen und die Feder auf der nämlichen Seite antagonistisch nach unten ziehen zu lassen, wie es schon früher S. 436, A. 1 u. S. 429 angegeben wurde.

*) Ein Modell dieser Art wurde mir vor einiger Zeit von dem Frankfurter Mechaniker Jost zur Verfügung gestellt.

Wird der Hammer in Komplikationsversuchen mit anderen Reizapparaten zugleich verwendet, so ist natürlich die absolute Latenzzeit jedes einzelnen Apparates zu kennen, wie sie Minnemann a. S. 434, A. 6 a. O. für den Hammer ableitete. Zunächst wurde er jedoch nur zur Abgrenzung leerer Zeiten beim Streckenvergleich benützt. Falls aber hier der nämliche Hammer alle „Grenzreize“[1]) gibt, kommt es offenbar nicht auf die absolute Dauer der Latenzzeit, sondern nur auf deren Konstanz an. Die Kontrolle geschieht nach Meumann und Schumann am besten graphisch. Man versieht den Hammerkopf mit einer Schreibfeder und registriert die ganze Bewegung neben einer bekannten Stimmgabelschwingung unter gleichzeitiger Markierung

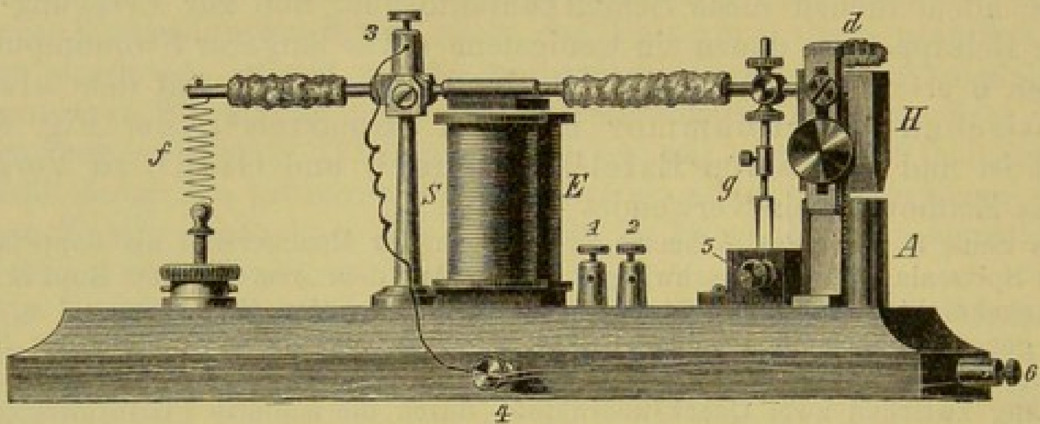


Fig. 44.
Elektromagnetischer Schallhammer.

des Stromschlusses, z. B. mittelst eines Pfeil-Signales, das nach Tigerstedt nur 0,3 σ Latenzzeit und 0,1 σ mittl. Var. besitzt[2]), oder mittelst ähnlicher Vorrichtungen[3]). Natürlich ist bei unmittelbar aufeinanderfolgenden Erregungen eine Konstanz überhaupt nur dann möglich, wenn die Nachschwingung im Augenblicke des neuen Impulses vollständig abgeschlossen ist. Zur Verkürzung dieser Eigenschwingung ist der Hammer mit dem verstellbaren Kopfpolster d (Fig. 44) versehen, gegen das er von der Feder f gedrückt wird und das auch die Ausgangslage des Hebels zum Magneten bzw. zum Ambos regelt. Wenn also Schumann gelegentlich Nachschwingungen von 150 σ beobachtete, so lag das nur an der zufälligen Einstellung aller dieser Bestandteile. Für besonders schnell aufeinanderfolgende Schläge ist überhaupt ein kleines Modell zu empfehlen, wie es z. B. auch für Wundts Taktierapparat hergestellt wurde (s. H in Fig. 43). Außerdem ist bei unmittelbar aufeinanderfolgenden Schließungen der Anstieg des Magnetismus zu berücksichtigen[4]).

1) In diesem Sinne der Zeitbegrenzung, der in diesem Zusammenhange natürlich nicht mit der Bedeutung der Grenzabszissen r_0 und r_u (z. B. auf S. 259) zu verwechseln ist, wurde dieser Begriff von Meumann gebraucht.

2) Vgl. Garten, a. S. 330 a. O., S. 361 u. Lit. 76.

3) Vgl. O. Frank, Kymographien, Schreibhebel usw. S. 12f.

4) Bei Verwendung zweier Stromquellen ließe sich übrigens auch der Strom nach jedem Schlag umkehren, indem man die unter sich isolierten Schleifkontakte abwechselnd an eine der beiden Batterien, u. z. an verschiedene Pole anschließt, die beiden anderen entgegengesetzten Pole mit einer Klemme des Schallhammermagneten verbindet und von der anderen Klemme zum Auslöserhebel ableitet.

Legt man vor die einzelnen Schleifkontakte verschiedene Widerstände oder schaltet man verschiedene elektromotorische Kräfte ein, so kann man auf die einfachste Art die Schallintensität ändern, wie es z. B. für die S. 427 genannten Probleme erforderlich ist. Doch hat Meumann dies auch durch verschieden eingestellte Hämmer bewirkt, deren unmittelbare Nachbarschaft keine Lokalisationseinflüsse auf die subjektive Betonung ausübte. Die Latenzzeit muß in dem einen wie in dem anderen Fall gesondert bestimmt werden. Auch Benussi verwendete a. S. 427, A. 1 a. O. für den Betonungsunterschied zwei verschiedene Reizapparate von ähnlicher Konstruktion[1]).

Die nämlichen Gesichtspunkte wie für den Schallhammer gelten natürlich auch für alle anderen Reizapparate von ähnlichen Trägheitsverhältnissen. So wurde von K. Dunlap[2]) eine dem Schallhammer ähnliche Vorrichtung zur Begrenzung von Zeitstrecken durch Tastreize benützt, wozu vor allem auch der v. Freysche Tasthebel geeignet ist (s. S. 333).

γ. *Ausfüllung von Zeitstrecken mit kontinuierlichen Reizen.*

Will man bestimmte Zeitstrecken mit einem dauernden Reizzustand ausfüllen, so bedient man sich ebenfalls am besten elektromagnetischer Apparate. Diese können unter Umständen nur durch je eine momentane Leistung die Abblendung einer bereits dauernd vorhandenen Wirkung aufheben und unmittelbar darnach wieder einführen, wobei die beiden Latenzzeiten insbesondere bei Doppelblenden oder Doppelhähnen sehr gleichmäßig ausfallen, wie sie zur Untersuchung des Ansteigens der Sinneserregung verwendet wurden[3]). Hierzu, sowie vor allem auch zur direkten Dauerschließung oder Unterbrechung eines Arbeitsstromes sind dann, falls man nicht etwa von Relaisvorrichtungen Gebrauch machen will, die von kurzdauernden Schließungen der Schleifkontakte umgestellt werden[4]), besondere Kontakte

1) Eine an einem Doppelhebel befestigte Stahlspitze stößt senkrecht nach unten gegen eine eventuell auf einen Resonanzkasten zu stellende Platte, wenn ein Elektromagnet das andere Hebelende nach oben zieht.

2) Tactual time estimation, Harvard Psychological Studies, I, 1903, S. 101 (Mon. Suppl. IV, 1).

3) Vgl. Kafka, a. S. 365, A. 2 a. O. und Bode, Die Zeitschwellen für Stimmgabeltöne mittlerer und leiser Intensität, in Wundt, Psychol. Stud. II, 5 u. 6, 1907 S. 293.

4) Ein solches sicher arbeitendes Relais mit Trockenkontakten, die auch hier den Vorzug verdienen, zeigt Fig. 45. Ein Doppelhebel H besteht aus einem festen und einem durch Einfügung einer Bandfeder f etwas elastischen Arm. Beide können durch je ein Elektromagnetpaar antagonistisch niedergezogen werden und wegen der Federung auch beide gleichzeitig von ihren Magneten angezogen sein. Der dem ersten Grenzreiz bei leeren Zeitstrecken entsprechende Schleifkontakt schließt zunächst den bei Klemme 1, 2 eingeleiteten Stromkreis für den festen Arm, wodurch eine an ihm angebrachte Federlamelle L mit Platinblättchen den isolierten Arbeitsstrom der Klemmen 3,5 schließt, bzw. 3,4 unterbricht. Gleichzeitig wird aber ein Nebenschluß 8, (9)*) zu dem Schleifkontakt im Zeitinstrument hergestellt, so daß der Strom im Elektromagneten auch nach Aufhebung des Schleifkontaktes noch geschlossen bleibt, bis der zweite Schleifkontakt des Streckenschlusses durch die Klemme 6, (7)*) gleichzeitig den Elektromagneten des federnden Armes schließt und den Arbeitsstrom des Reizapparates samt der Nebenschließung 8, (9) wieder unterbricht. Die Vergleichsstrecke wird dann von

*) Die Klemmen mit eingeklammerter Ziffern sind in der Figur verdeckt.

erforderlich, die von dem Auslöserhebel bei bestimmten Stellungen in einen bis auf weiteres konstant zurückgelassenen Schließungs- oder Öffnungszustand gebracht werden. Wo ein schweres Kontaktpendel die Auslösung besorgt, können einfach die Kontakte des Helmholtzschen Pendels (vgl. S. 330) oder ähnliche Konstruktionen benützt werden, bei denen die Schließung vor einer plötzlichen Unterbrechung bzw. die plötzliche Schließung eines zunächst geöffneten Stromes durch große Reibung, eventuell auch noch durch besondere Sicherungen, aufrecht erhalten bleiben[1]).

Bei Rotationsapparaten ist man dagegen wegen der Störung des Ganges durch einen stärkeren Widerstand des Kontaktes gegen den Auslöserhebel auf besondere Konstruktionen angewiesen. Man verwendet schon seit langer Zeit eine zur Schließung und Öffnung gleich brauchbare Konstruktion, bei der

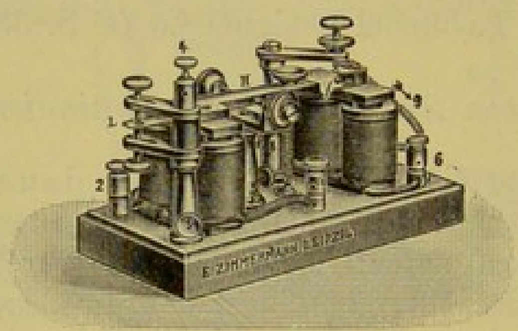


Fig. 45.
Doppelrelais zur Herstellung und Wiederaufhebung einer konstanten Schließung (oder Unterbrechung), durch je einen kurzdauernden Schluß eines besonderen Stromkreises.

eine zur Rotationsebene senkrechte, walzenförmige Achse, die einen Hebel in die Bahn des hierbei mit einem festen Kopfende versehenen Auslösers hineinragen läßt, von diesem beim Vorbeigang ohne nennenswerten Widerstand etwas gedreht wird. Dadurch kommt entweder eine den Strom zuführende Feder, die zunächst auf einem Hartgummisektor der Walze schleift, mit einem leitenden Sektor der Walze in Berührung, oder es wird eine Leitung, die bei etwas anderer Lage der Sektoren zunächst in dieser Weise bestand, durch die Verdrehung unterbrochen, und zwar beides bei einer ganz bestimmten Stellung des Auslösers zur Kreisteilung. — Während hier aber die Kontakthebel nach dem Umlauf des Apparates immer wieder (gegen einen festen Anschlag) zurückgestellt werden müssen[2]), läßt der Auslöserhebel die Meumannschen Stern- oder Drehkontakte[3]) (s. Fig. 41 No. 2) nach jedem Vorbeigang genau in der Lage zurück, daß der nächste Umgang ohne weiteres den nämlichen Kontaktverlauf bringt, nur eventuell, nach Ver-

zwei weiteren Schleifkontakten in ganz analoger Weise begrenzt. Das Relais arbeitet nicht laut. Doch läßt sich natürlich bei entsprechendem Bau der Schall der Kontaktschließungen auch zur Herstellung gleicher leerer Strecken verwenden.

1) Dies gilt also z. B. auch für die S. 419 genannte Untersuchung, bei der die Zeitverschiebungen der Grenzen kontinuierlicher Eindrücke mittelst eines Kontaktpendels festgestellt werden sollen.

2) Bei dem Kontaktpendel nach Ach (a. § 82, b a. O. S. 254) wird diese Wiederherstellung pneumatisch vollzogen. Auch sog. Bob-Auslöser fanden schon Verwendung.

3) Wundt, Phil. Stud. Bd. 12, S. 146 ff.

schiebung der Kontakte in der Rinne der Kreisteilung, mit einer anderen Gesamtzeit. In der gewöhnlichen Ausführung sind die Kontakte gegen stärkere Funkenbildung im Innern zu schützen, was z. B. bei der Verwendung zur Schließung eines schwachen Telephonstromes ohne weiteres erfüllt ist. Außer bei Meumanns eigenen Versuchen mit kontinuierlich ausgefüllten Zeitstrecken (a. S. 444 a. O.) haben sich diese Drehkontakte u. a. auch bei Wrinchs Versuchen nach der Methode der übermerklichen Abstufungen gut bewährt. Meumann gibt an, daß die durch sie eingeführte m. Var. weniger als 1 σ betragen habe.

Die Schaltung der zwei Drehkontakte S und S'_1, die eine mit Arbeitsstrom in dem Stromzweig A erfüllte Zeitstrecke begrenzen, ist aus dem Schema der Fig. 46 zu ersehen, worin die jeweils mit Strom versehenen Zweige der Leitung stark ausgezogen sind. In die Hartgummiplatte jedes Kontaktes sind, mit der Oberfläche glatt abschneidend, zwei kleine metallische Flächen K und K_1, bzw. K' und K_1' eingelassen, die mit seitlichen Klemmen (s. Fig. 41, Nr. 2) verbunden sind. Auf der Platte wird nun ein regelmäßiger Stern aus sechs genau gleich geformten Hebeln bei jedem Vorbeigang des Auslöserhebels gerade um 60° weiter gedreht. Die drei in der Figur schwarz gezeichneten Hebel tragen unten platinierte Stifte. Diese leiten den zunächst den beiden Sternen zugeführten Strom durch die leitenden Stellen der Grundplatte während der hergestellten Zeitstrecke nach dem Arbeitszweig A (eventuell also auch den sekundären Stromkreis eines Induktoriums oder einer elektromagnetischen Stimmgabel nach einem in A liegenden Telephon). In dem Schema I, das den Zustand vor der ausgefüllten Zeitstrecke repräsentiert, ist A zunächst stromfrei, da die zu K_1 und K_1' gehörigen Metallflächen der Grundplatte unter Hebelarmen ohne Platinspitze (manchmal auch im ganzen aus Hartgummi gefertigt) liegen und daher die Leitung von K nach Kl und K' an A vorbeiführt. Nun kommt der Auslöser von rechts, vertauscht nach Drehung von S_1' um 60° die Leitungswege Kl K' mit Kl, Kl_1, K_1 und schaltet dadurch A ein, die Hauptphase des Prozesses, die in Schema II dargestellt ist. Nach einer minimalen Verschiebung des Sternes von S wird dann am Schlusse der auszufüllenden Strecke A wieder stromlos, und nach Drehung von S um 60° ist die Stromleitung Kl_1 Kl K durch Kl_1 K_1 ersetzt. Das nächstemal vertauscht der Auslöser wieder von rechts her bei S'_1: Kl_1 K_1 mit Kl_1 Kl K', schaltet also A wieder ein, bis schließlich nach Drehung von S beide Hebel um 120° gedreht sind, also wenigstens bezüglich der Leitungsverhältnisse wieder alles genau so ist, wie es in Fig. 45, I als Ausgangslage gezeichnet war. Die nämlichen Sternelemente kehren natürlich erst nach sechs Umläufen wieder. Meumann gibt übrigens noch eine einfachere Schaltung an, bei der immer erst jeder zweite Umgang die Strecke zwischen S und S'_1 mit Arbeitsstrom ausfüllen läßt.

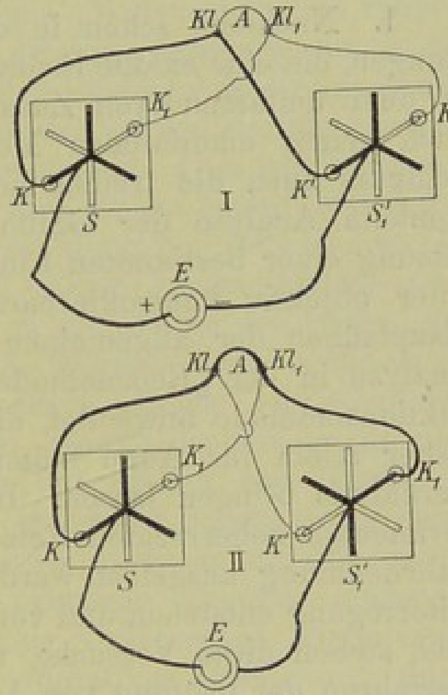


Fig. 46.

Die Schaltungen zweier Meumannscher Sternkontakte S und S_1' zur Ausfüllung einer Zeitstrecke mit Stromschluß in A bei jedem Vorbeigang des Kontaktauslösers (I vor und II während dieser Zeitstrecke).

Kapitel 17.

Die experimentelle Analyse der Gefühle und Willensakte.

66. Der allgemeine Charakter der Methode.

1. Nachdem schon in den einleitenden Kapiteln die psychischen Leistungen, die eine exakte Erforschung nach der Reproduktionsmethode zulassen, in dem umfassenderen Zusammenhange des Bewußtseins, also vor allem auch seiner emotionalen Momente, betrachtet wurden, möchte ich zum Schlusse auch die freilich noch in den ersten Anfängen befindliche experimentelle Analyse der Gefühle und Willenserlebnisse, die unter Voraussetzung einer bestimmten Einstellung der V.-P. aus ihrer Beschäftigung mit einer objektiv kontrollierbaren Reizlage entspringen, wenigstens in ihren Hauptzügen der allgemeinen Reproduktionsmethode einordnen. Da diese Analyse in der „Reizmethode" ebenfalls die eindeutigste Form der Reproduktionsmethode anwendet, die wir auch bei den übrigen Zweigen derselben bisher allein ins Auge faßten, so muß sie sich zu diesen in ein gewisses Verhältnis bringen lassen. Insofern die emotionalen Inhalte von dem experimentell beherrschten Reize nicht so direkt wie dessen adäquate Sinneswahrnehmung ausgelöst werden, sondern erst auf Grund einer besonderen Miterregung entstehen und von jenem Wahrnehmungsinhalte zu unterscheiden sind, stehen diese Versuche, rein äußerlich betrachtet, dem experimentellen Verfahren der Prüfung von Assoziationsleistungen mittelst eines „Stichreizes" am nächsten.

Bei der Analyse der Gefühle der Lust und Unlust oder des ästhetischen Wertbewußtseins und der hier nicht weiter zu analysierenden Zustände der Erregtheit oder Ruhe des Gemütes begnügte man sich im allgemeinen mit der einfachen Feststellung eines Zusammenhanges zwischen Reiz und Gefühlswirkung, den die V.-P. aus dem alltäglichen Leben in die Untersuchung mitbringt und den man höchstens durch eine entsprechende Einstellung, eventuell sogar unter Anwendung der Hypnose[1]), möglichst rein herauszuarbeiten suchte. Man wollte die bestehenden natürlichen Zusammenhänge, die sog. Gefühlsbetonung der Wahrnehmung, möglichst ungestört kennen lernen, bemühte sich also insbesondere keineswegs etwa gar ausdrücklich, solche Zusammenhänge neu zu schaffen, wie es vor allem bei den komplexeren Prozessen des ästhetischen Genießens und Erlebens überhaupt, die erst eine spezielle, der V.-P. eventuell noch fehlende Vorbereitung voraussetzen, an sich wohl möglich wäre. Man nahm höchstens notgedrungen die Einflüsse mit in Kauf, die jede, also auch die experimentell erzeugte Gemütsbewegung, zumal bei ihrer speziellen Apperzeption und Reproduktion, auf die Entwicklung analoger zukünftiger Prozesse ausübt. Somit berührt sich diese Analyse nach der Reizmethode am nächsten mit der S. 392 eben-

1) O. Vogt, Die direkte psychologische Experimentalmethode in hypnotischen Bewußtseinszuständen. Zeitschr. f. Hypnotismus Bd. 5, 1897, S. 7 und 180ff.

falls nur kurz angedeuteten Statistik der bereits fertig mitgebrachten Assoziationen aus jenen „Assoziationsversuchen" im engeren Sinne, mit der sie auch gemeinsam hat, daß es dem Experimentator dabei häufig sofort auf die Vergleichung möglichst vieler Individuen, also auf die Unterscheidung individueller Differenzen von generellen Zusammenhängen ankam. Natürlich bestehen auch hier alle möglichen Abstufungen der Innigkeit des Zusammenhanges zwischen dem Eindruck und der Gemütsbewegung. Dessen Unmittelbarkeit ist z. B. bei der Unlust, die eine intensive Schmerzempfindung begleitet, der direkten Erfassung einer geläufigen „Bedeutung" des Sinneseindruckes, wie etwa beim Lesen, ja sogar der direkten Erregung durch den äußeren Reiz selbst verwandt, während allmählich ansteigende Erregungszustände, z. B. die Gefühlswirkungen von Farben, der Aktualisierung weniger geübter oder mittelbarer Assoziationen vergleichbar sind. Dies gilt selbstverständlich erst recht, wenn die Gefühlswirkung des Reizes selbst erst durch weitere Assoziationen vermittelt wird, wie es vor allem bei ästhetischen Genüssen und der Erregung von Affekten auf Grund zusammenhängender Vorstellungen vorkommt[1]). Es liegt freilich in der Natur der Sache, daß gerade die vielseitigste Darstellungskraft des Wortes, das besonders in lyrischen und dramatischen Dichtungen ohne weitere „Reize" alle möglichen Gemütsbewegungen anzuregen vermag, bis zu diesem Enderfolg in dem Genießenden die meisten Zwischenglieder zu überwinden hat. Auch ist natürlich selbst die intensivste Stimmung, die ein guter Schauspieler durch die Hineinversetzung in eine ihm geläufige, aber nicht unmittelbar wahrgenommene Szene bei sich erreicht, einem primären Erlebnis höchstens ähnlich und daher zu dessen Studium niemals vollkommen ausreichend. Dennoch garantiert die Entwicklung aus einer objektiven Darstellung, nachdem das ästhetische Verständnis derselben gewissermaßen ein stationäres Stadium erreicht hat, unter Umständen eine größere Konstanz der Gefühlswirkung[2]), als wenn sich die V.-P., wie es bei der einfachen Selbstbeobachtung, abgesehen von der Erinnerung an eigene zufällige Gefühlserlebnisse, geschah, in einen nur mit Namen genannten Affekt[3]) oder in eine im einzelnen selbsterfundene Situation von bestimmtem Gefühlswert hineinversetzt oder, was allerdings den höchsten auf normalem Wege erreichbaren Grad der Lebenswahrheit ermöglicht, vom Experimentator irgendwie mystifiziert wird[4]).

Auf die allgemeinen oft genannten formalen Schwierigkeiten jeder Gefühlsanalyse brauche ich nach dem in der Einleitung über die Selbstbeobachtung Gesagten wohl nicht mehr besonders zurückzukommen. Nur die materielle

---

1) Külpe versuchte durch tachistoskopische Darbietung von Gesichtsobjekten auch die zeitliche Entwicklung des Gefühles, soweit es von der lebhaften und frischen Vergegenwärtigung der Objekte (z. B. von Kunstgegenständen) abhängig ist, in analoger Weise genauer zu verfolgen, wie es bezüglich der sinnlichen Qualitäten und der intellektuellen Auffassung möglich ist. (Ein Beitrag zur experimentellen Ästhetik, Am. Journ. of Psych. XIV, 1903, S. 479 ff. sowie a. S. 449, A. 3 a. O. S. 14 f.).

2) Vgl. F. Rehwoldt, Über respiratorische Affektsymptome (Wundt, Psychol. Stud. VII, 3. 1911 (144 ff.).

3) P. Mentz, Die Wirkung akustischer Sinnesreize auf Puls und Atmung, (Wundt, Phil. Stud. XI, 1894. S. 384) u. a. (Lit. vgl. bei Rehwoldt a. a. O.).

4) C. Minnemann, Atmung und Puls bei aktuellen Affekten (Martius, Beiträge zur Psychol. u. Philos. I. 4, 1905, S. 514).

Gefährdung der Ableitung allgemeingültiger Zuordnungen zwischen experimenteller Einwirkung und Gefühlswirkung sei noch hervorgehoben, die darin besteht, daß bei allen diesen assoziativ vermittelten Gefühlswirkungen wie bei allen Gemütsbewegungen überhaupt der Effekt bestimmter Reize und willkürlicher Einstellungen immer auch von dem übrigen Gesamtbestand des Bewußtseins und den allgemeinen psychophysischen Dispositionen abhängig ist. Aber auch dies trifft ja teilweise bei den genannten Assoziationsversuchen zu und bereitet leider hier wie dort der experimentellen Analyse besondere methodische Schwierigkeiten.

2. Demgegenüber besitzt die Analyse einfacher Willkürtätigkeiten den schon in der Einleitung betonten Vorteil, daß sich infolge der Selbstbeherrschung der V-P. auf Verabredung hin mehr oder weniger genau definierte Impulse oder Impulskomplexe zu bestimmten äußeren Sinneseindrücken oder irgendwie bestimmten Zeitpunkten überhaupt zuordnen lassen. Deshalb spielte ja die experimentelle Analyse der Willkürhandlung auch schon in dem Abschnitt über das Zeitbewußtsein eine wichtige Rolle, das in der Form der Antizipation des Augenblickes der Tat die entscheidende Grundlage für die richtige Entwicklung des Impulses inmitten der sonstigen objektiven, dem Intellekt vorschwebenden Prozesse bildet. Aber auch bezüglich aller sonstigen Einzelheiten der Tat selbst, was Koordination, Schnelligkeit und Intensität anlangt, pflegt die experimentelle Analyse der Willkürhandlung nicht nur mit fertig mitgebrachten Eigenschaften der Zuordnungen zu arbeiten, sondern diese selbst in vielen Fällen erst neu herzustellen, also ganz ähnlich, wie die exaktere Assoziationsanalyse bei den Gedächtnisversuchen im engeren Sinne in einem Prozesse der Einprägung die später zu prüfende Assoziation selbst bereits in wohl kontrollierbarer Weise entstehen läßt[1]). Umgekehrt liefern natürlich auch die Gedächtnisversuche, soweit sie nicht nur mit der Wiedererkennung früher wahrgenommener Gegenstände operieren, sondern eine freie artikulatorische Reproduktion erlernen lassen, ebenso wie die später behandelten Reaktionsversuche experimentelles Material für die Analyse äußerer Willkürtätigkeiten, alle Auffassungsversuche überhaupt aber zum mindesten Material für die Analyse des Bewußtseins der Apperzeptionstätigkeit, wobei natürlich außerdem stets auch noch die Gefühle im engeren Sinne ins Auge gefaßt werden können. Eine gleichzeitig eingestreute Prüfung des Ergebnisses dieser speziellen Leistungen nach den oben und im folgenden behandelten Methoden wird aber dabei jeweils auch wieder festzustellen haben, ob die Resultate der Gefühls- und Willensanalyse mit ihrer neuen Einstellung der Reproduktionstendenz wirklich zu den Erlebnissen bei der alleinigen Anwendung jener früheren Methoden auf die intellektuelle Seite der Leistung (bzw. auch zu den von den Reaktionsmethoden festgestellten Ausdruckssymptomen) in direkte Beziehung gesetzt werden dürfen. Die Kenntnis von dieser Kontrolle kann die V.-P. übrigens vielleicht auch von dem kaum völlig zu vermeidenden Einflusse der nachträglichen Verwertung ihrer Be-

1) Trotzdem darf die Willkürtätigkeit selbst nicht mit der Aktualisierung einer Assoziation der im Verlaufe der Tat auftretenden Sinneswahrnehmungen in der Form ihrer Antizipation verwechselt werden.

wußtseinserlebnisse für diese oder jene Aufgabe der Selbstbeobachtung wenigstens etwas unabhängiger machen.

67. Die experimentellen Methoden zur Ableitung einer ästhetischen Wertskala.

Obgleich nun nach dem Gesagten für alle möglichen emotionalen Inhalte eine tatsächlich bestehende Abhängigkeit von experimentell beherrschten Situationen bestimmter Art dadurch ermittelt werden kann, daß man die Erlebnisse bei systematisch abgestuften „Reizlagen" paarweise unter sich vergleicht, hat man bisher nur die Korrelation zwischen dem Grade der Lust oder Unlust bzw. der ästhetischen Bewertung und der Quantität bestimmter Merkmale von Wahrnehmungsobjekten etwas genauer untersucht, nachdem Fechner zum ersten Male seine berühmte Statistik über die relative Häufigkeit aufgestellt hatte[1]), mit der die verschiedenen als Argumente eines K.-G. betrachteten Seitenverhältnisse von Rechtecken bei Befragung vieler Personen jeweils als die gefälligsten bezeichnet worden waren. Einen Überblick über die Methoden, die bis 1900 von Fechner und anderen bei diesen und ähnlichen Versuchen mit Raumformen und Farben angewandt wurden, gab Larguier des Bancels[2]). In neuester Zeit hat dann Külpe in seinem Sammelreferat[3]) über die gesamte experimentelle Ästhetik auf dem Würzburger Psychologenkongreß der Darstellung ihrer wichtigsten Ergebnisse eine vortreffliche Sichtung der dabei angewandten spezifischen Maßmethoden vorausgeschickt, auf die ich hier im wesentlichen wohl einfach verweisen darf. Es handelt sich hier um ein ähnliches Problem wie bei der sog. übermerklichen Abstufung, bei der einer gegebenen Größenfolge der einzelnen Reize bestimmte Quantitätsverhältnisse von Empfindungsinhalten zugeordnet werden sollen (S. 300). Doch ist man hier vorläufig mit viel weniger zufrieden und sucht nur nach einer eindeutigen Abhängigkeit der Änderungsrichtung des Gefühles von derjenigen der Reize, aus der sich also vor allem das Maximum einer bestimmten Gefühlswirkung, insbesondere ein Optimum der ästhetischen Wirkung bestimmen läßt. Aus Unstetigkeiten der Kurven, die sich durch wiederholte Ableitung der rel. H. als nicht zufällige erweisen, kann dann eventuell auch auf das Eingreifen neuer Faktoren bei bestimmten Reizstufen geschlossen werden.

Prinzipiell müssen sich nun alle Versuche dieser Art auf eine paarweise Vergleichung der Gefühlswirkungen von jeweils zwei Objekten der ganzen Reizreihe zurückführen lassen, die zuerst von Witmer[4]) und

1) Zur experimentellen Ästhetik I. Teil (IX. B. d. Abh. der math.-phys. Kl. der K. S. Ges. der W. 1871, S. 555) und Vorschule der Ästhetik 1876, I. Teil S. 190, II. Teil, S. 273.

2) Les méthodes de l'esthétique expérimentale. Formes et couleurs. Année psychologique, VI. 1900, S. 144 ff.

3) Külpe, Der gegenwärtige Stand der experimentellen Ästhetik. Bericht über den II. Kongr. f. exp. Psychologie in Würzburg her. v. Schumann (1906) 1907, S. 1 ff.

4) L. Witmer, Zur exp. Ästh. einfacher räumlicher Formverhältnisse. Wundt, Phil. Stud. IX, 1894, S. 96 u. 209.

Cohn[1]) angewandt wurde. Indessen bringt die Kombination der beiden Gegenstände, deren Gefühlswirkungen verglichen werden sollen[2]), besondere Bedingungen mit sich, die bei dem Genuß des einzelnen für sich betrachtet nicht vorhanden wären. Wenn nun auch trotzdem die relative Einschätzung hierbei im wesentlichen von dem Genusse bei ausschließlicher Bewußtheit der einen von beiden Wahrnehmungen abhängig sein dürfte, so kann doch durch die besonderen Nebenumstände der paarweisen Kombination der relative Wert des Gegenstandes a gelegentlich auch kleiner als der von c erscheinen, obgleich die Werte $a > b$ und $b > c$. Soweit es sich hierbei aber nur um Zufälligkeiten handelt, wird man nach der paarweisen Vergleichung jedes Gegenstandes der Wertreihe mit allen übrigen seinen relativen Wert unter allgemein vergleichbaren Auffassungsbedingungen immerhin noch am ehesten durch die Summe der relativen Häufigkeiten aller Arten von Bewertungen repräsentiert denken können, in der man die höhere oder geringere Einschätzung positiv bzw. negativ rechnet und unentschiedene Werturteile gleich Null setzt. Bei zufälliger Untermischung aller möglichen Paare (bis zur einmaligen Absolvierung aller) dürften die Versuchsbedingungen nur einer exakter kontrollierbaren Durchführung der „Wahlmethode" Fechners gleichkommen, bei der die V.-P. aus allen gleichzeitig voliegenden Objekten das Optimum frei heraussuchen konnte. Külpe hält übrigens eine gewisse Regelmäßigkeit bei der Durchnahme der Paare für vorteilhaft. Wo indessen eine Nachwirkung trotz einer entsprechenden Pause zwischen den Versuchen und absichtlichen Abstraktion vom Vorangegangenen überhaupt nicht auszuschalten ist, wo also insbesondere die dargebotenen Reihenglieder sich unwillkürlich leicht zu ästhetisch wirksamen Sukzessionsgebilden zusammenschließen, wie z. B. bei Vergleichung einzelner Zweiklänge[3]), bei der es durch Perseveration von Tönen oder absolutes Tongedächtnis leicht zu Melodiewirkungen kommen kann, da wird gerade die Regelmäßigkeit spezifische Wirkungen hervorbringen können. Das nämliche gilt in erhöhtem Maße von der sog. „Reihenmethode", bei der die einzelnen Glieder von der V.-P. unmittelbar in eine Wertreihe geordnet werden sollen. Denn auch hier treten durch die Einordnung in das Ganze neue Wertfaktoren hinzu, wenn es nicht gelingt, wieder rein paarweise zu vergleichen. Allerdings wird, wie Külpe vor allem betont, bei dieser Form der „Wahlmethode" das gesamte Urteilsmaterial vollständiger zur Darstellung gebracht, als wenn man nur ein Optimum bestimmt. Eine Art von Vorstufe zur Reihenmethode bildet die sog. „mehrfache Wahlmethode", bei der ebenfalls nicht nur das Optimum gesucht, sondern auch einzelnen oder mehreren geringeren Graden der Wertskala Reihenglieder zugeordnet werden sollen.

1) J. Cohn, Experimentelle Untersuchungen über die Gefühlsbetonung der Farben, Helligkeiten und ihre Kombinationen. Ebenda X, 1895, S. 562.

2) Bei dem Vergleich konzentriert man natürlich die Aufmerksamkeit, wenn auch genießend, (s. S. 10) zunächst auf das Objekt, da ja nur dadurch die Stimmung wirklich von diesem bedingt, das „Werturteil" also „richtig" wird.

3) Versuche dieser Art mit paarweiser Vergleichung wurden von G. Kästner angestellt (Untersuchungen über den Gefühlseindruck unanalysierter Zweiklänge. Wundt, Psychol. Stud. IV, 1909, S. 473).

In ihren einzelnen Faktoren, ebenso wie bei der Unterschiedsschwelle, weniger kontrollierbar und außerdem noch viel mehr von den technischen Momenten beeinflußt ist endlich die „Herstellungsmethode", die bereits Fechner auch als Methode der experimentellen Ästhetik anerkannte. Mit Recht wurde aber außerdem auch noch hervorgehoben, daß hier die Tatsache der eigenen Herstellung als solche einen neuen und dabei sogar besonders wichtigen Gefühlswert hinzufüge, der dieses Verfahren überhaupt nicht mehr als einfache Reizmethode betrachten läßt.

IV. Reaktionsmethoden.

Kapitel 18.

Die psychologischen Symptome in der willkürlichen Bewegung und Ruhe.

68. Einschränkung der Aufgabe des IV. Abschnittes.

In einer selbständigen Methodik der experimentellen Psychologie würde die Darstellung der zweiten Hauptgruppe, die nach § 7 die Reaktionsmethoden im weiteren (Wundtschen) Sinne umfassen soll und in § 32 den Reproduktionsmethoden gegenübergestellt wurde, mindestens den nämlichen Raum wie die erste Gruppe beanspruchen. Wäre doch hierzu vor allem eine genaue Beschreibung der teilweise sehr schwierigen physiologischen Methoden erforderlich, die zur richtigen Registrierung der objektiv greifbaren Rückwirkungen des Bewußtseinslebens auf den Körper dienen können. Da diese jedoch als spezifisch physiologische Methoden in anderen Teilen dieses Handbuches in weiterem Zusammenhange ausführlich behandelt sind, so kann ich mich hier unter Hinweis darauf mit einer Rekapitulation der in der experimentellen Psychologie vorkommenden Apparate und Arbeitsweisen begnügen [1].

Da sämtliche physiologischen Funktionen irgendwie mit dem Zentralnervensystem zusammenhängen, das mit dem Bewußtsein in direkter Wechselwirkung steht, so können sie auch alle ohne Ausnahme irgendwie psychisch beeinflußt werden. Doch ist die Ablenkung vom bisherigen Ver-

1) Eine vor allem auch methodisch wertvolle Monographie über die experimentelle Analyse der unwillkürlichen Ausdruckssymptome gab erst in jüngster Zeit E. Weber in seinem Buche „Der Einfluß psychischer Vorgänge auf den Körper" 1910. Die vollständigste Darstellung der einschlägigen Methoden vom psychologischen Standpunkte aus findet man in Wundts Grundzügen der Physiologischen Psychologie II⁶ 1910, S. 278 ff. und III⁶ 1911, S. 187 ff. und 359 ff., wo auch ihre Ergebnisse für seine Gefühlstheorie verwertet sind. Meinerseits habe ich im dritten Teil der Exp. Anal. d. Bewußtseinsphänomene (1908) S. 341 (Versuche nach der Reaktionsmethode) eingehend dazu Stellung genommen. Für die psychologische Deutung der unwillkürlichen Ausdruckssymptome dürfte der entscheidende Gesichtspunkt darin bestehen, daß man den jeweiligen Gesamtinhalt des Bewußtseins auf die Impulselemente (nicht Innervationsempfindungen!) hin betrachtet, deren Komplexe man als „Erregung" verschiedener Qualität zu bezeichnen pflegt, während ihr Fehlen oder ihre Herabminderung einen entgegengesetzten Zustand des Gemütes ausmacht. Diese sind offenbar der zielbewußten Willkürtätigkeit nicht nur inhaltlich sondern vor allem auch bezüglich der zentrifugalen Wirkungsfähigkeit nahe verwandt.

laufe bei einer Bewußtseinsänderung oft nur unmerklich gering, und manchmal läßt sie sich erst bei längerer Dauer der Abweichung des psychischen Lebens von seiner Normallage konstatieren, wie z. B. eine organische Störung oder Besserung nach längeren traurigen oder freudigen Stimmungen[1]). Aus diesem unbegrenzten Gebiete der einfachen Beobachtung und des Experimentes, für das natürlich auch sämtliche physiologische und klinisch-diagnostische Methoden überhaupt in Betracht kommen, seien aber im folgenden nur die wichtigsten der bisher in psychologischen Laboratorien gebräuchlichen Untersuchungsarten genannt, bei denen die Rückwirkung eine ähnliche Unmittelbarkeit, Schnelligkeit und klare Abhebung von einem vorher und darnach übereinstimmend auffindbaren Normalzustand aufweist, wie etwa der äußere Effekt eines Willkürimpulses zu einer kurzdauernden Änderung der ursprünglichen Haltung. Bildet doch diese Willkürtätigkeit auch hier, genau wie bei der soeben skizzierten Anwendung der Reproduktionsmethode auf die Gemütsbewegungen, den Idealfall der Erkennbarkeit eines eindeutigen Zusammenhanges zwischen einer Änderung des Bewußtseins und des körperlichen Zustandes, dessen genaues Studium auch für das Verständnis der sog. unwillkürlichen triebartigen oder rein reflektorischen (nicht bewußt ausgelösten) Äußerungen manche Gesichtspunkte beibringen kann.

69. Die ergographische Analyse von Maximalleistungen.

Was zunächst die Registrierung von Willkürleistungen anlangt, so liegt es in der Natur ihrer psychologischen Entstehungsbedingungen, daß die Aufzeichnung eines beliebigen einzelnen Effektes rein für sich betrachtet keinen besonderen wissenschaftlichen Wert besitzt. Bildet doch dieser nur einen Spezialfall aus einer unerschöpflichen Fülle von Kombinationsmöglichkeiten. Auch wenn die konkreten variablen Elemente der resultierenden Komplexe, wie sie bei dem jeweiligen Stande der Selbstbeherrschung isoliert innerviert werden könnten, nach den Methoden der speziellen Bewegungslehre analysiert werden[2]), was bei jedem Studium spezieller psychologischer Symptome in dem Ablauf einer Willkürhandlung geschehen sollte, bleibt natürlich immer noch der bei gegebenem Widerstand von ihrer Innervation abhängige Kraftaufwand im einzelnen unbestimmt. Hierbei werden sie also ähnlich wie bei der Konstatierung der Erregung bestimmter Sinneselemente zunächst nur den Dispositionen zu ganzen Kontinuen elementarer Innervationserlebnisse überhaupt eingeordnet. Erst die Unterordnung der „Willkür" unter bestimmte Vorschriften über den Zeitpunkt und den Ablauf der Bewegung im einzelnen, und sei es auch nur die Wiederholung einer zufällig frei ausgeführten Bewegung nach rein kinästhetischen Anhaltspunkten oder an der Hand sonstiger Erfahrungen über den Bewegungseffekt, führen eine bestimmte Norm ein, welche unter Voraussetzung einer bestimmten Vorbereitung ganz allgemein für jede beliebige Bewegungsform gewisse Aussagen bezüglich der Präzision dieser Unterordnung zu machen gestatten, ebenso wie es bei den Urteilen durch ihre Beziehung auf gegebene Objekte möglich war. Nur zwei

1) Vgl. z. B. G. Dumas, La tristesse et la joie 1900, S. 279.

2) Dieses Handbuch II, 3. Abt. (Muskelphysiologie) III, S. 120 (O. Fischer, Methodik der speziellen Bewegungslehre).

Spezialfälle jener Willkürmöglichkeiten sind jeweils schon rein in sich selbst so eindeutig bestimmt, daß sie auch besondere psychische Nebeneinflüsse herauserkennen lassen: die beiden Extreme des Effektes bei der Absicht zur größtmöglichen Ruhe einer zusammengehörigen Muskelgruppe einerseits und bei dem stärksten in dieser Richtung auslösbaren Willensimpulse andererseits. Bleiben wir zunächst bei dem zweiten, seit längerer Zeit und am ausführlichsten untersuchten Extreme, so können wir bezüglich der Methoden zur Untersuchung einzelner Maximalleistungen bestimmter Muskelpartien, z. B. der Handbeuger, bereits auf die ausführliche Beschreibung der sog. Dynamometer verweisen, die W. Caspari und N. Zuntz bei den Apparaten zur Messung der Arbeitsleistung im Zusammenhange mit der Untersuchung des Stoffwechsels gaben[1]). Dort sind auch die von Binet und Vaschide[2]), A. Lehmann[3]) u. a. gerügten Nachteile der alten Federdynamometer erwähnt, um derentwillen A. Lehmann eine besondere, bequem anzufassende Zugvorrichtung hinzufügte (a. a. O.). Treves[4]) wandte sich ganz allgemein gegen dieses Prinzip der annähernd isometrisch arbeitenden Federwage, das übrigens schon bei dem Gummiball-Dynamometer mit Vorteil durch eine hydromanometrisch vermittelte Steigerung des bei der Kompression auftretenden Widerstandes ersetzt wurde[5]), und suchte seinerseits die Eindeutigkeit der jeweiligen Maximalleistung nach dem zweiten, zuerst von Mosso eingeführten isotonischen[6]) Prinzip des Ergographen zu erreichen, bei dem ein Gewicht gehoben wird. Dieser ist a. a. O. S. 54f. (Fig. 34) in einer besonders variationsreichen Form beschrieben und abgebildet, die sich aus der ursprünglichen Mossoschen infolge der seinerzeit vor allem von Hoch und Kraepelin[7]) erhobenen Forderungen bezüglich der Handlagerung und

1) Dieses Handbuch I, 3. Abt. (Ernährung) I., S. 1. W. Caspari und N. Zuntz, Stoffwechsel, S. 53ff. (Vgl. auch II, 3 (Muskelphysiologie) II v. Frey, Allgemeine Muskelmechanik, S. 107.)

2) Binet et Vaschide, Critique du dynamomètre ordinaire, L'année psychologique IV, 1898, p. 303.

3) A. Lehmann, Die körperlichen Äußerungen psychischer Zustände, II. (Die physischen Äquivalente der Bewußtseinserscheinungen) übers. von Bendixen, 1901, S. 118ff.

4) Treves, Über die Gesetze der willkürlichen Muskelarbeit, Pflügers Arch. f. d. ges. Physiologie 78, 1899, S. 163 u. Über den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnis, die Ergographie betreffend ebenda Bd. 88, 1902, S. 7. (Vgl. auch Caspari und Zuntz.)

5) Caspari und Zuntz a. a. O. S. 54 (Fig. 33) nach Henry. Einen kompressiblen Gummiball verwendete auch Scripture, Education of muscular control and power. Stud. f. Yale Psychol. Labor. II, 1894, S. 114 (118) (Scripture beschreibt ebenda Bd. IV, 1896, S. 69ff. (Researches on voluntary effort) auch ein scherenartiges Daumen-Fingerdynamometer).

6) Der Begriff der „Isotonie" ist hier allerdings in einem allgemeineren Sinne verwendet, als er aus der Muskelphysiologie von Versuchen mit Muskelpräparaten her bekannt ist; denn der Muskel selbst arbeitet hier in seinen natürlichen Verbindungen wegen der Skelettverschiebungen keineswegs unter gleicher Spannung. Doch besteht diese hier wenigstens auch wieder an dem Punkte, an dem der Apparat am Körper angreift. Die spezielle Bewegung des Fingerskeletts bei der Arbeit am Mossoschen Ergographen ist von Zoth genauer analysiert worden. (Über die Form der Arbeit am Mossoschen Ergographen, Pflügers Arch. f. d. ges. Physiol. 112, 1906, S. 311.)

7) Über die Wirkung der Teebestandteile auf körperliche und geistige Arbeit, Kraepelins Psychol. Arbeiten, Bd. 1, 1896, S. 378.

Fixierung[1]) allmählich herausgebildet hat. An einem solchen Apparate ist aber innerhalb des freien Spielraumes der Hebung ein maximaler Kraftaufwand nur möglich, wenn das angehängte Gewicht eben noch vollständig gehoben werden kann. Treves suchte nun für jeden Arbeitsmoment dieses „Maximalgewicht" und konstruierte auch andere Apparate für dieses Prinzip[2]).

Die tatsächliche Willensanstrengung zu einer einmaligen Maximalleistung am Dynamometer oder dergl., welche die V.-P. in einem ihr anheimgegebenen oder nur ungefähr avisierten Zeitpunkt ausführt, ist natürlich erst dann völlig eindeutig bekannt, wenn man auch den Verlauf der Handlung bis zur Endlage kennt. Nun gibt es allerdings auch hier ein Optimum der Kraftentwicklung, das bei Übung und Geschicklichkeit in der Hantierung mit dem speziellen Apparat auch tatsächlich erreicht und wohl jederzeit wenigstens angestrebt wird. Bei den in psychologischen Versuchen stets notwendigen Wiederholungen tritt zugleich die Ausbildung einer Gewohnheit, gleichgültig ob sie die optimale ist oder nicht, also das S. 453 genannte Moment der Unterordnung unter erfahrungsgemäße Inhalte, konstanzerhöhend hinzu. Jedenfalls ist es aber bei der Beurteilung von Nebeneinflüssen von Wert, wenn man aus einem Überblick über den ganzen Verlauf beurteilen kann, wieweit die Variation des Endeffektes sich schon aus der Verlaufsform erklären läßt, wieweit also der Nebeneinfluß den Endeffekt schon um dessentwillen modifizieren muß, weil er die Impulsentwicklung im einzelnen verändert. So hat schon Féré sein Federdynamometer (nach Hammon und Verdin) mit einem Mareyschen Schreibtambour verbunden, der die Kompression graphisch zu registrieren gestattete. Diese Verbindung nannte er „Dynamograph"[3]). Sie ist auch in A. Lehmanns und Henrys Apparat hergestellt, bei letzterem aber direkter, wodurch die besondere Eichung des zugleich niemals völlig konstanten Tambours unnötig wird. Der Ergograph Mossos war von vornherein auf eine solche Aufzeichnung des Hebungsverlaufes eingerichtet[4]). Doch geht hier, zumal bei Belastung mit dem „Maximalgewicht" nach Treves, für die Aufzeichnung ein viel größerer Teil jeder Muskelkontraktion bis zum Anhub verloren, als bei einem passend eingestellten Dynamographen, während allerdings dafür andererseits der weitere Verlauf gleichmäßiger zur Geltung kommt.

Bei der Verwendung des Ergographen oder Dynamographen[5]) zu fortgesetzten Leistungen, z. B. zur Verfolgung der Ermüdung, wozu Mosso

1) U. a. kritisierten auch Binet und Lehmann a. a. O. den Mossoschen Ergographen.

2) Vgl. Caspari und Zuntz, S. 56 und Treves, L'énergie de contraction dans le travail musculaire et la fatigue nerveuse, Arch. di Fisiologia I, 1904, S. 171.

3) Sensation et mouvement 1. Aufl. 1887. (Schon seit Anfang der 80er Jahre waren von ihm hierüber einzelne Abhandlungen erschienen in Compt. rend. de Soc. de Biol.)

4) Mosso versuchte übrigens die Spannung in jedem Momente der Hebung noch besonders durch sein Ponometer zu bestimmen (a. Bd. I, 3. S. 54, A. 1 a. O., S. 119), wogegen G. E. Müller (Zeitschr. f. Psychol. 1, S. 187ff.) Einwände erhob.

5) Lehmann bezeichnet übrigens seinen modifizierten Dynamographen auch als Ergographen. Es ist oben der Ausdruck nur für die (im Angriffspunkte) isotonischen Gewichtsergographen beibehalten, obgleich natürlich auch jeder Dynamograph, indem er den Verlauf der Kraftentwicklung im einzelnen angibt, eine „Arbeit" registriert. Auch beim Gewichtsergographen liegen aber freilich die Arbeitsverhältnisse für die

seinen Apparat zunächst überhaupt bestimmt hatte [1]), wäre freilich zur vollen Eindeutigkeit des Resultates, abgesehen von einer Vorschrift über das Tempo, die hier hinzutreten muß, vor allem erforderlich, daß die wiederholten Handlungen ihrer Tendenz nach die nämlichen bleiben, d. h. daß stets die nämlichen Muskelpartien in der gleichen simultanen und sukzessiven Koordination maximal angespannt werden. Diese Konstanz der speziellen Arbeitsbedingungen ist jedoch kaum jemals zu erreichen. Wenigstens haben bisher mit der Ermüdung immer entferntere Muskelgruppen helfend eingegriffen [2]). Man kann also höchstens wieder damit rechnen, daß die Verschiebungen, die im Laufe der Ermüdung eintreten, infolge einer allmählich erlangten Arbeitsgewohnheit immerhin konstant genug sind, um schließlich doch einen typischen Normalverlauf herbeizuführen, von dem sich etwaige vor allem im Ermüdungsstadium wirksame exzitierende und deprimierende Nebeneinflüsse unterscheiden lassen. Nachdem Féré (a. a. O.) schon frühe solche Änderungen des Dynamogrammes durch gleichzeitige Reize von bestimmter Gefühlswirkung zahlreich festgestellt hatte, wurden von A. Cleghorn [3]), Hofbauer [4]) und auch wiederum von Féré [5]) mittelst des Mossoschen Ergographen die besonders kräftigen Hemmungen oder Verstärkungen, bzw. selbständigen unwillkürlichen Nebenzuckungen studiert, die im Ermüdungsstadium durch plötzliche „Tuschreize“ (S. Exner), z. B. Pistolenschüsse, heiße Wassergüsse u. dergl., je nach ihrem Zeitabstand von der normalen Impulsentwickelung ausgelöst werden, woraus sich auch interessante Rückschlüsse auf die Zeitverhältnisse dieser Entwickelung unter jenen speziellen Bedingungen ziehen ließen.

Entspricht diese Einführung von Nebenreizen bei der Aufnahme von Ergogrammen analogen, S. 315 genannten Versuchen bei Auffassungsleistungen, so hat man auch die in jenem Teile unserer Methodik besonders ausführlich behandelte Kombination mehrerer gleichzeitiger Willkürleistungen auf die Untersuchung der Muskelarbeit übertragen. Dabei suchte man aber nicht nur den speziellen Einfluß simultaner und alternierender Muskelarbeit verschiedener Glieder auf die Einzelleistung festzustellen (Patrizzi [6]), Féré [7]),

---

beteiligten Muskeln in ihrer natürlichen Verbindung nicht so einfach wie beim Muskelpräparat. Vgl. S. 454, A. 6.

1) Auf die Kritik des Versuchs, den Apparat zur Messung der allgemeinen psychophysischen Ermüdung beizuziehen, wurde schon S. 373 hingewiesen.

2) Dieser Einwand, der in allen bisher genannten Kritiken der ergographischen Ermüdungsversuche von Binet, Hoch und Kraepelin, Lehmann u. a. erhoben wurde, ist am konkretesten von R. Müller dargelegt worden. (Über Mossos Ergographen mit Rücksicht auf seine physiologischen und psychologischen Anwendungen. Wundt, Phil. Stud. XVII, 1901, S. 1ff.

3) The Reinforcement of voluntary muscular contractions. Am. Journ. of Physiol. 1898, I, S. 336.

4) Interferenz zwischen verschiedenen Impulsen im Zentralnervensystem. Pflügers Arch. f. Physiol. 68, 1897, S. 546ff. Hofbauer suchte ebenso wie vor ihm Pregl die Konstanz der Haltung im Ermüdungsstadium (s. oben A. 2) dadurch zu erreichen, daß er von Anfang an eine so gepreßte Haltung einführte, daß keinerlei weitere unwillkürliche Hilfen seitens anderer Muskelgruppen mehr möglich waren.

5) Compt. rend. de Soc. de Biol. 1900, S. 845 und Travail et plaisir 1904, S. 216ff.

6) Arch. Ital. de Biol. XIV, 1893, p. 126.

7) Travail et Plaisir 1904, p. 387.

A. Lehmann[1])), sondern vor allem auch die Konkurrenz zwischen gleichzeitiger körperlicher und geistiger Arbeit (Kopfrechnen), und zwar benützte Loeb[2]) hierbei zunächst einfach ein Dynamometer, A. Lehmann (a. a. O.) und Féré (a. a. O. S. 429) wieder den Ergographen. Zu einem genaueren Verständnis des Konkurrenzeffektes auf der motorischen Seite, der am systematischsten bei A. Lehmann berechnet wurde[3]), wäre jedoch überall auch das jeweilige Quantum der gleichzeitigen geistigen Arbeit zu ermitteln. Außerdem lassen sich bei dieser Verbindung des Kopfrechnens mit den Zügen der Hand am Ergographen höchstens die mittleren Leistungen des ganzen kritischen Zeitraumes in körperlicher und geistiger Hinsicht auf einander beziehen, ohne daß man immer je zwei bestimmte Bewußtseinsakte aus beiden Tätigkeitsreihen im einzelnen als gleichzeitig in Wechselwirkung stehend annehmen könnte. Hierzu wäre man höchstens bei einer Einrichtung imstande, bei der die Exposition eines kurzdauernden Wahrnehmungsmateriales für Neuauffassungen von dem Dynamometer oder Ergographen selbst bei ganz bestimmten Spannungen oder Hubhöhen ausgelöst würde[4]).

70. Die Registrierung minimaler Bewegungen bei willkürlicher Ruhe.

Das andere S. 454 genannte „Extrem“ der Willkürtätigkeit, die Ruhe einer bestimmten willkürlich kontraktilen Muskelpartie, ist für hinreichend feine Registriermethoden insofern ein interessantes Objekt, als bei ihr die unwillkürlichen, rein reflektorischen oder auch bewußt triebmäßigen Innervationen unmittelbar, von dem „eigentlich gewollten“ Effekt gesondert, hervortreten. Wer einmal einen gewissen Typus willkürlicher Tätigkeiten oder Haltungen bestimmter Personen, ihr Sprechen, Gehen, Stehen u. dergl., genauer kennen gelernt hat, wird nicht nur die groben landläufigen Affektäußerungen, sondern auch schon feinere Abweichungen von jener Norm infolge bestimmter Gemütsbewegungen oder wegen gleichzeitig konkurrierender Tätigkeiten usw. aus dem Gesamteindruck ohne weiteres herauserkennen und „sympathisch“ deuten können. Dieses unmittelbare Verständnis fremder Gemütsbewegungen aus dem mimischen oder pantomimischen Ausdrucke ist eine nicht nur theoretisch besonders interessante, sondern auch methodisch sehr wertvolle natürliche Verbindung der einfachsten Form der „Reaktionsmethode“ einerseits und des unmittelbaren be-

1) A. S. 454, A. 3 a. O., S. 192ff.

2) Muskeltätigkeit als Maß psychischer Tätigkeit (Vorl. Mitteilung), Pflügers Arch. 39, 1886, S. 592.

3) Lehmann bestimmte für die Zeit während des Kopfrechnens die Differenz zwischen der wahrscheinlichen motorischen Leistung As ohne Störung, die, allerdings um einen noch zu ermittelnden Fehler zu groß, aus den Hubhöhen vor und nach dem Kopfrechnen interpolatorisch ergänzt wurde, einerseits, und der tatsächlichen verminderten Leistung Av andererseits. Diese Differenz wurde zu der wahrscheinlichen ungestörten Leistung ins Verhältnis gesetzt und der Quotient $\frac{As - Av}{As} = M$ als Maß der Konkurrenzwirkung betrachtet. Vgl. auch a. S. 238, A. 3 a. O. S. 121ff.

4) Bezüglich dieser speziellen psychologischen Einzeluntersuchungen über Muskelarbeit vgl. auch Exp. Analyse der Bewußtseinsphänomene S. 368ff.

wußten Nacherlebens, also einer Seite der Selbstbeobachtung, bzw. der „Reproduktionsmethode" andererseits [1]). Diese unterstützte man dann auch weiterhin sinngemäß durch die photographische, bzw. kinematographische Aufnahme des ganzen Verhaltens von Personen, bzw. besonders ausdrucksvoller Partieen, was längst zum Inventar der speziellen Bewegungslehre (vgl. II. Bd., 3. Abt. III, S. 278 ff.) und des künstlerischen und physiologischen Studiums der Mimik gehörte [2]), von R. Sommer [3]) aber insbesondere auch der Psychopathologie als diagnostische Methode empfohlen wurde. Hiermit wird sich, unter Verwendung geeigneter chronophotographischer Methoden (vgl. I, 1. Abt., S. 65 S. Garten, Die photographische Registrierung), auch die unten erwähnte Elementaranalyse einzelner Komponenten der Oszillation bei „willkürlicher Ruhe" ohne jede Störung der bewegten Glieder und daher am exaktesten erreichen lassen, wie es vor allem für das empfindlichste Bewegungungsorgan, das Auge, unerläßlich war (s. S. 357, A. 2).

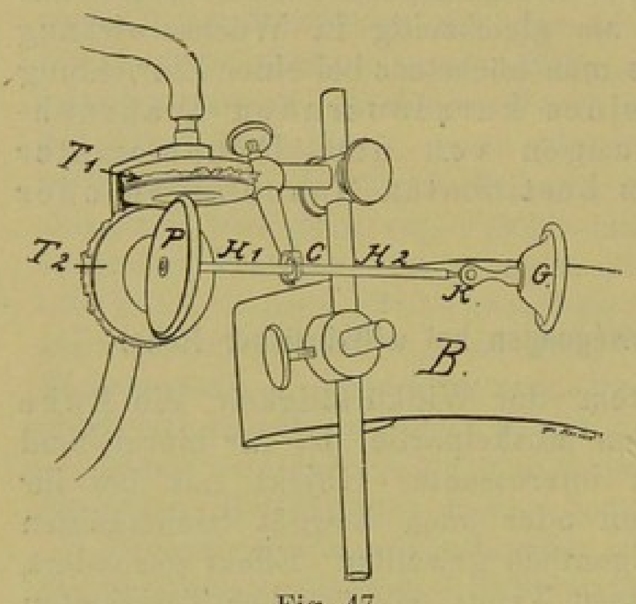


Fig. 47.
Apparat zur zweidimensionalen Registrierung von Bewegungen der Stirnhaut nach R. Sommer.

Vor allem versuchte man aber zunächst die rein mechanische Aufzeichnung von Ausdrucksbewegungen und zwar vor allem auch der „mimischen" Muskulatur des Antlitzes, was bei Rousselot speziell phonetischen Studien diente [4]). Auch zum Nachweis unwillkürlicher Flüsterbewegungen beim innerlichen Hersagen, die Lehmann und Hansen (a. S. 408, A. 1 a. O.) nach rein akustischen Methoden festzustellen suchten, wurde die phonetische Graphik von H. S. Curtis [5]) mit Erfolg verwendet. Sommer, der übrigens auch die akustisch-phonetischen Methoden (den Phonographen) in den Dienst der Diagnostik stellte [6]), registriert von den mimischen Ausdrucksmomenten insbesondere die Bewegungen der Stirnmuskulatur, wobei die in Fig. 47 abgebildete Vorrichtung die horizontalen und vertikalen Verschiebungen einer Stelle der Stirnhaut mit je einem Mareyschen Tambour gleichzeitig auf

1) Vgl. Exp. Anal. der Bew.-Phän. S. 343 ff.

2) Vgl. auch die Photographien bei Sante de Sanctis, die Mimik des Denkens (Übersetzt von J. Bresler), 1906. Zu psychologisch-pädagogischen Experimenten wurde die einfache Photographie in neuerer Zeit vor allem auch von R. Schulze angewandt. (Die Mimik der Kinder beim künstlerischen Genießen, ausführlich aufgenommen in sein Buch: Aus der Werkstatt der experimentellen Psychologie und Pädagogik 1909, S. 117 ff und 147 ff.)

3) R. Sommer, Lehrbuch der psychopathologischen Untersuchungsmethoden, 1899, S. 5 ff.

4) Vgl. J. Poirot, Die Phonetik (Dies. Handb. III, 6. Abt., S. 1 (S. 9 ff.))

5) Automatic movements of the Larynx. Am. Journ. of Psychol. XI,2. 1900, S. 237.

6) a. a. O. S. 140 ff.

einer Trommel gesondert zu registrieren gestattet[1]). Der Mechanismus ist aus der Figur ohne weiteres ersichtlich, wenn man berücksichtigt, daß der im Kugelgelenk C drehbare Hebel $H_1 H_2$ die Bewegungen des bei K angesetzten und auf der Stirnhaut fixierten Saughütchens G aufnimmt und durch seine Platte P deren vertikale Komponente an die Mareysche Aufnahmekapsel T_1, deren horizontale aber an T_2 weitergibt. Der Träger des Ganzen wird mittelst der Binde B so am Kopfe befestigt, daß die Stirne bis auf die von G berührte Stelle frei bleibt. Diese Befestigung solcher und ähnlicher Apparate am Kopfe und eine spezielle Belastung einzelner Partieen wirkt bei der Registrierung allerdings leicht störend auf die Einstellung des Bewußtseins im ganzen ein und läßt die Verwendung dieser Apparate zur Analyse von Gemütsbewegungen weniger geeignet erscheinen[2]), als analoge Vorrichtungen zur Aufzeichnung der kleinsten unwillkürlichen Bewegungen der Extremitäten, die an das Arbeiten gegen äußere Widerstände gewöhnt sind, weshalb z. B. auch die ganze Ergographie günstige allgemeine Versuchsbedingungen darbietet. Mit dieser Verfeinerung der „pantomimischen" Analyse hatte denn auch Sommer seine graphische Registrierung der kleinsten unwillkürlichen Bewegung nach den drei Hauptkomponenten zunächst begonnen, nachdem schon Jastrow auf die psychologische Bedeutung der Registrierung solcher Vorgänge überhaupt hingewiesen hatte.[3]) Bei den beiden Apparaten Sommers, mittelst deren man die Bewegungen der Hände und der Beine aufzeichnen kann, werden diese jedoch nicht pneumatisch, sondern unmittelbar mechanisch durch ein Hebelsystem auf drei Schreibhebel an einer Schreibtrommel übertragen[4]).

Bei dem Handapparat ruht der Ellbogen in der Schlinge am Stativ A_2A_2, während ein oder mehrere Finger ausgestreckt auf die Platte B_1 eines steigbügelartigen Rahmens gelegt werden, die zunächst bis zum Beginn des eigentlichen Versuches von dem verstellbaren Stativ A_5 fest gestützt wird. Von dem oberen Ende des Rahmens geht nun ein Stab nach oben, der zunächst bis zum Angelpunkt a um den oberen Teil des Gerüstes A_3A_3 herum (auf der Figur nach links) ausbiegt, in a selbst mit einer vertikal nach unten gerichteten Spitze für ein Spitzenlager versehen ist, und von da aus noch um den senkrecht nach oben reichenden Stab V verlängert ist. Läßt man nun zur Registrierung der Hand-

---

1) Zur Messung der motorischen Begleiterscheinungen psychischer Zustände. Sommers Beiträge zur psychiatrischen Klinik. I. Heft 3. 1902, S. 143 (S. 145, Messung physiognomischer Ausdrucksbewegungen an der Stirnmuskulatur).

2) Die Fixierung der Apparate außerhalb des Körpers würde nicht nur ganz andere Bewegungen, eben die unwillkürlichen Schwankungen des Kopfes im ganzen, hereinbringen, sondern außerdem auch eine ganz gezwungene willkürliche Anstrengung zur größtmöglichen Ruhe einführen.

3) Jastrow, A Study of involuntary movements (Stud. f. Univ. of Wisconsin) Amer. Journ. of Psych. IV, 1892, S. 398, und A further study of involuntary movements V, 1893, S. 223. Auch die dreidimensionale Analyse von Bewegungen war in psychologischen Versuchen, allerdings viel komplizierter wie bei Sommer, von Solomons und Stein versucht worden (Normal motor automatisme (Psychol. Lab. of Harvard Univ.), Psych. Rev. III, 1896, S. 492).

4) a. S. 458 A. 3 a. O. S. 93 ff. und „Die dreidimensionale Analyse der Ausdrucksbewegungen" Zeitschr. f. Psychol u. Ph. der S. Bd. 16, 1898, S. 275, Ber. d. III. intern. Kongr f. inn. Medizin 1896, S. 574, „Eine graphische Methode des Gedankenlesens", Ber. d. III. intern. Kongr. f. Psychol. in München 1896 (1897), S. 383 und „Die Ausstellung von exp.-psychol. Apparaten und Methoden bei dem 1. Kongr. f. exp. Psychologie in Gießen". Leipzig 1904, S. 46.

bewegungen das Stativ A_5 herab, so daß sich B_1 frei bewegen kann, so dreht sich das soeben beschriebene System B_1 a V um die Spitze bei a. Wäre deren Lager s fest, so würden zunächst nur einerseits die seitlichen Bewegungen von B_1 (rechts und links von der V.-P.) durch Zwischenhebel in Vertikaldrehungen des an dem oberen Gerüst A_4A_4 befestigten mittleren Schreibhebels B_4 umgesetzt, und andererseits die Vor- und Rückwärtsbewegungen von B_1 bzw. V (die Stoßbewegungen der Hand) in Vertikalbewegungen des oberen Schreibhebels B_5. Da aber nun auch das Lager s der Spitze von a in der Hülse h vertikal verschiebbar ist und nur bei B_2 durch den einen Arm des an dem Gerüstansatz st wie eine Wage schwingenden Hebels (mit dem Gegengewicht g am anderen Arm) getragen wird[1]), so können auch Vertikalbewegungen der

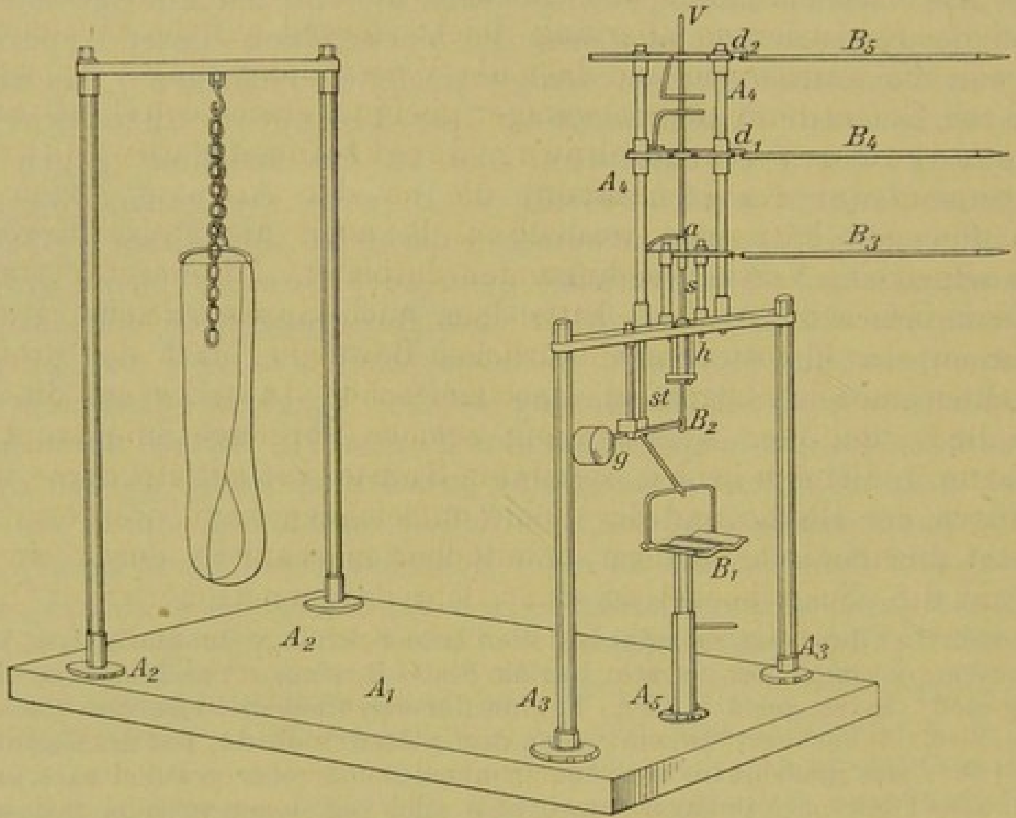


Fig. 48.
Apparat zur dreidimensionalen Analyse von Bewegungen der Hand nach R. Sommer.

Grundplatte B_1 durch s unmittelbar auf den Schreiber B_3 übertragen werden. Die Empfindlichkeit dieses Hebelsystems ist so groß, daß sich in den Niveaulinien der drei Hebel die Oszillationen kundgeben, die auch die Hand des Normalen z. B. bei dem leisen Affekt der Wahrnehmung eines intensiv erwarteten Objektes in einer für dieses bisweilen charakteristischen Form ausführt und die auch bei dem taktilen „Gedankenlesen" eine Rolle spielen sollen.

Der etwas widerstandsfähigere Apparat zur Registrierung kleiner unwillkürlicher Beinbewegungen ist im wesentlichen analog gebaut. Ein langer gerader Stab, der mit einer seitlichen Muffe am Sprunggelenk befestigt und vermittelst eines ihn durchsetzenden Hebels und eines über Rollen laufenden Gewichts äquilibriert ist, reicht durch eine Tischöffnung nach oben, in der er innerhalb eines Rollenlagers vertikal verschiebbar und zugleich in jeder Höhenlage wie ein Zentrifugenpendel beweglich ist. Die letztere Bewegung des über den Tisch reichenden Stabendes wird nun wie bei dem Handapparat (Fig. 48) in die Stoßkomponente für einen mittleren und in die Horizontalkomponente für einen unteren Schreibhebel zerlegt. Für die Vertikal-

1) Zum Verständnis der Figur darf man also vor allem nicht den Hebel an st mit B_1 und seinem hinter st vorbeigehenden gebogenen Arm verbunden denken.

komponente tritt auch hier erst noch eine besondere zu dem oberen Schreiber führende Hebelvorrichtung ähnlich wie bei einem verkleinernden Storchschnabel dazwischen, in welcher der vorhin genannte Äquilibrierungshebel ein Verbindungsstück bildet.

Mit dem Beinapparate untersuchte Sommer übrigens auch den Verlauf des Kniesehnenreflexes, zu dessen konstanter Auslösung durch exakt abstufbare Schlagintensitäten er auch noch einen besonderen Reizapparat konstruiert hatte [1]), der die gewöhnliche Art, den Reflex freihändig mittelst eines Hammers auszulösen, nur unter genau regulierteren Bedingungen nachahmt. Bei der großen diagnostischen Bedeutung dieses Reflexes, der sich im wesentlichen in einer Pendelebene abspielt, wurde von Sommer hierzu auch ein besonderer Registrierapparat (sog. Reflexmultiplikator) konstruiert [2]), bei dem der frei bewegliche Unterschenkel durch den über dem Fußgelenk angreifenden Zug eines Gewichtes äquilibriert ist. Die Schnur, an der das Bein aufgehängt ist, läuft über eine an einem Gerüst befestigte Rolle und führt in dem genau vertikal hängenden Teile, der das Gewicht trägt, zugleich den Schreiber am Kymographion [3]).

Im Zusammenhange der Reaktionsversuche (vgl. Kap. 20, § 77, d, 3) war man übrigens schon früher auf die unwillkürlichen Bewegungstendenzen aufmerksam geworden, die sich trotz der Absicht zur Ruhe in dem Vorbereitungsstadium jederzeit ergeben, wenn man in Erwartung des Reizes innerlich zu der tatsächlichen Bewegung im nächsten Augenblicke bereit ist [4]). Doch wurden bei Reaktionsversuchen zunächst erst noch andere ungewollte Bewegungen graphisch aufgezeichnet, die sich bei sogen. disjunktiven Reaktionen (s. unten § 81 c) im Hauptstadium einstellen, bei denen man z. B. gleichzeitig bereit ist, mit dem einen Finger zu reagieren, wenn das Reizmotiv a_1 auftritt, mit einem andern auf a_2 usw. Féré wies nämlich hierbei kleine unwillkürliche Mitbewegungen sämtlicher tätigkeitsbereiter Finger bei jedem beliebigen Reizmotiv nach, indem er alle arbeitenden Finger auf je einen Mareyschen Tambour aufsetzen ließ und als die eigentliche Reaktion einen Druck auf den Tambour verabredete. Bei diesen Versuchen Férés wird also, ähnlich wie auch bei allen Reaktionen durch Niederdrücken eines federnden Tasters bis zum Schluß eines zunächst offenen elektrischen Kontaktes, im Ruhestadium überall die nämliche freie, bzw. nur ganz wenig unterstützte Haltung des reagierenden Gliedes gegen einen federnden Widerstand eingehalten, wie bei dem Sommerschen Handapparat. Unter solchen Bedingungen läßt sich aber dann auch schon im Vorbereitungsstadium jeder beliebigen einfachen Reaktion (s. § 81, a) eine oszillierende Unruhe nachweisen, die je nach den unten weiter zu erörternden Versuchsbedingungen charakteristische Verschiedenheiten zeigen kann, wozu wiederum auch der Sommersche Apparat gut zu gebrauchen ist, wenn auch zum Nachweis einer Bewegung überhaupt hier im allgemeinen die Druckkomponente genügt.

---

1) a. a. O. S. 24f.

2) Ebenda, auch schon veröffentlicht in der deutschen medizin. Wochenschrift 1894, Nr. 45.

3) a. a. O. S. 24ff.

4) Vgl. Exp. Anal. der Bew.-Phän. S. 409.

Gerade weil man aber im Vorbereitungsstadium der Reaktion in gespannter Erwartung ist', fühlt man sich hierbei ruhiger und sicherer, wenn die Schließung oder Unterbrechung des entscheidenden Kontaktes erst durch eine energische Muskelspannung erreicht wird, hinter der die kleinen gleichgerichteten Spannungsänderungen der Ungeduld weit zurückbleiben. Obgleich dies nun auch bei der eben genannten Haltung, die z. B. bei der Reaktion mittelst einer Druckvorrichtung (wie für elektrische Klingeln) vorliegt, durch eine entsprechende Stärke der Gegenfeder und Entfernung des kontaktschließenden Stückes von der Endlage wohl erreichbar ist, bedient man sich in psychologischen Laboratorien zur Vermeidung einer toten Bewegung des Reaktionsapparates[1]) jetzt wohl meistens der Unterbrechung eines Kontaktes, die bereits bei der geringsten Bewegung der Vorrichtung in der entscheidenden Richtung eintritt. Dabei verwendet man vor allem die Unterbrechung eines Kontaktes, der im Vorbereitungsstadium zunächst durch Anspannung der Antagonisten der zur Reaktion berufenen Muskeln aufrecht erhalten wird, könnte aber hierzu natürlich auch einen plötzlich verstärkten Druck in der nämlichen Richtung wählen, in der das reagierende Glied schon im Vorstadium an den Tasterknopf sich anlegt, wobei man also gegen eine kontaktschließende Feder arbeitete. Da aber nun in diesen beiden Fällen die kleinen unwillkürlichen Spannungen bzw. Spannungssteigerungen in Richtung der Kontaktbrechung durch den Widerstand der Antagonisten bzw. der Apparatfeder vollständig überwunden werden, so kann man sie natürlich auch nicht mehr unmittelbar von dem hierbei völlig ruhig bleibenden Reaktionsapparat aus registrieren, sondern die V.-P. kann sie höchstens in ihren Tastempfindungen konstatieren. Iudd[2]) hat nun vor allem zur Kritik der Versuche von W. G. Smith[3]), die eine antagonistische Vorbewegung unmittelbar vor der eigentlichen Reaktion bei vielen Personen beweisen sollten, wenigstens bei einer Annäherung an jene Reaktionsweise mit Unterbrechung eines antagonistisch aufrecht erhaltenen Kontaktes die unwillkürlichen Bewegungen des Vorstadiums zu registrieren versucht, indem er den Taster im ganzen auf eine elastische Unterlage brachte, deren Feder aber stärker als die innerhalb des Kontaktes war[4]). Ein mit der Unterlage verbundener Schreiber zeichnete somit bis zur Unterbrechung des Kontaktes alle Änderungen der Spannung getreu auf, also auch die noch nicht zur Unterbrechung des Kontakes hinreichenden Verminderungen. Indessen wird mit einer solchen Vorrichtung doch gerade der Hauptcharakter der Einstellung verschoben, daß eben das reagierende Glied bis zur Handlung auf einem objektiv absolut ruhigen Punkt aufruht. Denn bei objektiven Verschiebungen außerhalb der elastischen Teile des Fingers selbst können besondere unwillkürliche

1) Eine tote Spannungsänderung der Muskulatur ist natürlich niemals zu vermeiden, wenn der Kontakt nicht bereits von den unvermeidlichen unwillkürlichen oder zufälligen Bewegungen der Hand verändert werden soll.

2) Iudd McAllister and Steele, Analysis of reaction Movements. Psych. Rev. Monogr. Suppl. Vol. VII. 1. 1905 (Stud. f. Yale) S. 141.

3) Antagonistic Reactions, Mind, Jan. 1903, S. 47.

4) Die analoge Konstruktion bei der Unterbrechung durch eine gleichgerichtete Bewegung läßt sich aus dem Gesagten wohl leicht ableiten.

Bewegungstendenzen entstehen, die dort fehlen. Man könnte also höchstens die Feder der Unterlage so kräftig wählen, daß die Tastempfindungen denen bei unelastischer Fundierung hinreichend gleichkommen, könnte aber dann natürlich auch die Spannungsänderungen höchstens durch vergrößernde Übertragungen, eventuell mit optischen Hilfsmitteln deutlich genug registrieren. Auch bei den Sommerschen Apparaten sind entsprechende Änderungen der Spannungsverhältnisse durch Regelung der Gegengewichte (z. B. g in Fig. 48) erreichbar.

---

19. Kapitel.

Symptomatische Veränderungen an unwillkürlichen oder völlig unbewußt ausgelösten Vorgängen.

71. Mechanisierte Willkürhandlungen.

Während einzelne neue Willkürimpulse, wie gesagt, höchstens bei der Forderung gewisser Extreme unter hinreichend eindeutigen Voraussetzungen ablaufen, enthält nun eine geläufige Willkürtätigkeit in ihren einzelnen Zügen, wie sie nicht mehr erst durch neue Willkürimpulse dirigiert zu werden brauchen, sondern in gewissen Quantitätsverhältnissen rein gewohnheitsmäßig ablaufen, selbst bereits eine genügend feste Norm, um aus etwaigen Abweichungen hiervon auf Änderungen des gewohnten Bewußtseinszustandes im ganzen oder auf spezielle Nebeneinflüsse einzelner gleichzeitiger Akte schließen zu lassen, ähnlich wie bei neuen Willkürbewegungen, die erst im einzelnen nach bestimmten Vorschriften vollzogen werden sollen (vgl. S. 453). Auch in dieser Richtung lassen sich vor allem wieder mit Hülfe der kinematographischen Methode, die leicht einen Überblick über den ganzen Körper verschafft, psychologische Symptome ableiten, indem man die V.-P. bei der Ausführung gewohnter Beschäftigungen aufnimmt[1]). Da aber bei den Rückschlüssen auf die sonstige Bewußtseinslage hierbei, wie gesagt, stets ihre Interferenz mit dem gewohnten Ablauf der Impulse ohne spezielle Konzentration auf die Einzelheiten der Handlung vorausgesetzt ist, so wird alles darauf ankommen, daß die V.-P. entweder von der gleichzeitigen Aufnahme der gewohnten Beschäftigung überhaupt nichts weiß, oder daß sie wenigstens von einer solchen Kenntnis so weit zu abstrahieren vermag, daß sich die Verhältnisse zwischen den Bewußtseinsgraden der einzelnen Impulse nicht wesentlich verschieben[2]).

---

1) Vgl. Sommer a. S. 458, A. 3 a. O.

2) Bezüglich der Methoden zur Analyse dieser Bewegungsvorgänge der willkürlichen Muskulatur im einzelnen kann hier wieder nur ganz im allgemeinen auf die Spezialliteratur verwiesen werden. In vieler Hinsicht können die vorhin in § 70 erwähnten Methoden Verwendung finden, soweit sie eine hinreichende Exkursion der Bewegung gestatten. Der speziellen Bewegungslehre über die Fortbewegung des Körpers, über die

72. Allgemeine methodische Gesichtspunkte bei der Konstatierung psychischer Symptome in den ganz oder teilweise unbewußt ausgelösten Lebensvorgängen.

Den symptomatischen Veränderungen mechanisierter[1]) Willkürhandlungen sind aber ihrem ganzen Wesen nach offenbar die ebenso verursachten Modifikationen des gewohnten Ablaufes automatischer Lebensprozesse nahe verwandt. Bei diesen Prozessen können ja auch teilweise ebenfalls neue Willkürimpulse auslösend oder verändernd eingreifen, während allerdings andere, wie der Blutkreislauf, einer isolierten[2]) willkürlichen Beeinflussung im allgemeinen völlig entzogen sind, so daß gewisse Veränderungen derselben nur nach den nämlichen objektiven Induktionsregeln als von Bewußtseinszuständen kausal abhängig zu erweisen sind, nach denen man eben auch zwischen lauter außerpsychischen Vorgängen eine eindeutige Abhängigkeitsbeziehung wissenschaftlich abzuleiten pflegt. Wie schon S. 229 und früher in der Einleitung hervorgehoben wurde, ist hierzu natürlich stets eine möglichst genaue Kenntnis des jeweiligen Bewußtseinsverlaufes, und zwar auch in seinen dunkleren Regionen vorauszusetzen, die jedoch hierbei womöglich nicht aus der stets störenden Analyse während der Registrierung der Symptome selbst, sondern aus den allgemeinen Versuchsbedingungen[3]) und den früheren Erfahrungen entnommen werden soll.

Hierbei sind die Zeitpunkte[4]) der Reizeinwirkungen wie bei rein physiologischen Versuchen möglichst fehlerfrei zu registrieren, ebenso aber auch der Eintritt etwaiger reproduktiv erzeugter Gemütszustände. Bei letzteren gefährdet allerdings die eigene Reaktion der V.-P. unter Umständen die

Sprechbewegungen u. a. hat sich in neuerer Zeit vor allem auch die Graphologie als ein besonderer Wissenszweig angeschlossen, der für die psychologische Symptomatik ebenfalls von Wichtigkeit ist (vgl. E. Javal, die Physiologie des Lesens und Schreibens, deutsch von Haas 1906). Ich erwähne hier nur die Schriftwage Kraepelins, durch welche die Druckverhältnisse beim Schreiben untersucht werden können (Kraepelins Psychol. Arbeiten, Bd. I, 1896, S. 20 und Ad. Groos, Untersuchungen über die Schrift Gesunder und Geisteskranker, Ebda. II, 1899, S. 450). Vgl. außerdem die Literaturangaben in Wundts Grundz. der Physiol. Psychol. III[6], 1911, S. 584f.

1) Wundt, Grundzüge der Physiol. Psychologie III[6] 1911, S. 288.

2) Vgl. Exp. Anal. der Bew.-Phän. S. 47 und 347.

3) Seitdem O. Vogt die Hypnose bei der Gefühlsanalyse verwendete (a. S. 446 A. 1 a. O.), hat man sich ihrer insbesondere auch bei dem Studium der Ausdruckssymptome gern bedient. Abgesehen von der normalen Veränderung des psychischen Zustandes im allgemeinen können aber hierbei auch die speziellen Funktionen, auf denen die Ausdruckssymptome beruhen, modifiziert sein. Dies gilt wohl vor allem auch für die vasomotorischen Symptome, bei deren Untersuchung besonders E. Weber (a. S. 452, A. 1 a. O.) die Hypnose bevorzugt. Wie diese beim normalen Schlafe eigenartige sind, so wird wohl auch die Hypnose ihre vasomotorischen Eigenheiten besitzen, welche die Ergebnisse am Hypnotisierten nicht ohne weiteres auf den Normalzustand übertragen lassen.

4) Die fortlaufende Zeitmarkierung, z. B. mittelst der Baltzarschen Kontaktuhr, muß wegen der kräftigen Wirkung aller Rhythmen auf die Ausdruckssymptome so geräuschlos als möglich sein. Man schließt daher am besten die in einem entfernten Raum befindliche Uhr an einen Elektromagneten an, dem gegenüber man eine mit einer Eisenplatte beklebte Aufnahmekapsel in einer den Anschlag der Platte am Magnet verhindernden Entfernung montiert, die mit einem Mareyschen Schreiber verbunden wird. Auch das Kymographion ließ Wundt für solche Versuche mit möglichst geräuschlosem Gange konstruieren. Die bei vielen anderen psychologischen Versuchen eingeführte Isolierung der V.-P. in einem besonderen Raume ist allerdings hier bisher nicht üblich

äußere Haltung[1]) und innere Einstellung, weshalb man sich bezüglich solcher ohnehin niemals ganz präzis registrierbarer und träger ablaufender Prozesse auch mit der indirekten Registrierung durch den seitens der V.-P. mit leisem Zurufe avisierten Experimentator begnügte.

Bei der großen Menge zufälliger Nebeneinflüsse muß man sich freilich auf diesem besonders schwierigen Gebiete vor allzu frühen Behauptungen allgemeiner Korrelationen hüten, wenn ein paarmal bestimmte psychologische und physiologische Änderungen gleichzeitig beobachtet worden sind, und darf seine Schlüsse nur auf ein für jede V.-P. umfassendes Material ohne willkürliche Auslese gründen. Auch das alte Baconsche Prinzip der „Tafel der Grade" kann bei der Induktion solcher neuer Zusammenhänge zwischen quantitativ abstufbaren psychischen und physiologischen Vorgängen wertvolle Dienste leisten. Keinesfalls dürfte aber aus der Tatsache, daß die registrierbaren physiologischen Ausdruckssymptome der Atmung, des Blutkreislaufes usw. von den dem Bewußtsein zunächststehenden zentralen Prozessen durch eine Reihe rein physiologischer Zwischenglieder mit allerlei komplizierenden Wechselwirkungen getrennt sind, ein prinzipieller Einwand gegen eine wissenschaftlich exakte Fixierung der Ausdruckssymptome zu entnehmen sein[2]), deren Vorhandensein als solcher zweifellos feststeht. Nur wird natürlich die richtige Deutung bestimmter Befunde im allgemeinen schließlich immer sehr viele Möglichkeiten zu berücksichtigen haben.

Soweit die registrierten physiologischen Vorgänge noch willkürlich zu beeinflussen sind oder wenigstens mit bewußten, nur eben rein triebartigen Impulsen oder Erregungszuständen in einem der Willkürhandlung analogen Zusammenhange stehen, was beides vor allem bei der Atmung der Fall ist, wird man die symptomatischen Änderungen auch in der Selbstbeobachtung unmittelbar erfassen oder wenigstens wiedererkennen können, nachdem man durch das objektive Symptomenbild einmal auf sie aufmerksam geworden ist. Schließlich ist wohl auch sogar zu erwarten, daß diese dem

gewesen, da man die Schreiber am Kymographion fortgesetzt kontrollieren mußte und allzu große Schlauchlängen, die durch die Wand in einen benachbarten Raum reichen, vermeiden wollte.

1) Dies kann insbesondere bei der Registrierung der Kreislaufssymptome stören, die vor allem bei der Plethysmographie eine möglichst ruhige Haltung erfordert. In Versuchen von Slaughter über den Parallelismus zwischen den S. 345 erwähnten Aufmerksamkeitsschwankungen und dem Plethysmogramm (The fluctuation of the attention. The Am. Journ. of Psych. 12, 1900, S. 313), bei denen die Remissionen der Aufmerksamkeit von der V.-P. selbst registriert wurden, soll hierdurch nach Berger und E. Weber (vgl. a. S. 452 a. O., S. 346) geradezu ein dem wahren entgegengesetzter Verlauf vorgetäuscht worden sein.

2) Es ist erfreulich, daß solche an sich sehr beachtenswerte und jedenfalls von reichem physiologischen Wissen getragene Einwände R. Müllers*) gegen A. Lehmanns erstmaligen Versuch einer umfassenderen psychologischen Deutung eines Teiles dieser Erscheinungen (a. S. 454, A. 3 a. O. I. Teil 1899) auch von seiten der Physiologen mit Entschiedenheit als viel zu weitgehend bezeichnet werden. Vgl. H. Berger a. S. 473 a. O. und E. Weber, a. S. 452 a. O. S. 59. Über die aus jenen physiologischen Wechselwirkungen entspringenden methodischen Schwierigkeiten der Deutung der Ausdruckssymptome, vgl. auch Wundt, Grundzüge der Physiol. Psychol. II⁶ 1910, S. 279ff.

*) Zur Kritik der Verwendbarkeit der plethysmographischen Kurve für psychologische Fragen, Zeitschr. f. Psychol. u. Ph. der S. 30, 1902, S. 340.

Bewußtseinsbestande selbst angehörigen Momente, also z. B. die bewußten Atmungsimpulse, von den psychophysischen Miterregungen und Wechselwirkungen, welche die funktionelle Grundlage der ganzen Symptomatik überhaupt ausmachen, relativ am meisten betroffen werden, ähnlich wie jene zuerst genannten mechanisierten, an sich jeweils willkürlich einsetzenden Handlungen.

73. Atmungssymptome.

Schon am Schlusse der allgemeinen Betrachtungen über die Konstatierung psychischer Einflüsse auf die Lebensprozesse war soeben auf die vorteilhafte Stellung der Atmungserscheinungen hingewiesen worden. Außerdem wird auch der Umstand, daß die Atmung als solche nicht einmal als Ganzes erst willkürlich ausgelöst zu werden braucht und für gewöhnlich noch mehr als solche gewohnte, nebenbei vollzogene Willkürtätigkeiten im Hintergrund des Bewußtseins verbleibt, zugleich die Abstraktion von der Tatsache ihrer Registrierung erleichtern, deren besondere Beachtung freilich hier dafür auch um so fremdartigere Nebeneinflüsse einführen würde[1]). Der Blutkreislauf vollzieht sich demgegenüber in viel festeren Formen, die momentanen Einflüssen seitens spezieller Bewußtseinszustände viel mehr entzogen sind, wenn sich auch dafür die Veränderungen präziser von gewissen mittleren Zuständen abheben können. So könnte es verwunderlich erscheinen, daß erst Meumann und Zoneff auf die besondere symptomatische Bedeutung der Atmung hingewiesen haben, wenn man nicht zugleich berücksichtigte, daß bei den Versuchen, die Symptome zu deuten, auf seiten des Bewußtseins häufig gerade die Tätigkeitsmomente gegenüber dem Gegensatz der Lust und Unlust vernachlässigt wurden, der in dieser Hinsicht (abgesehen von der gleichzeitigen Erregung) in den Affektzuständen weniger entscheidend zu sein scheint[2]).

Nach psychologischen Atmungssymptomen gesucht hat man aber bei ihrer populären Anerkanntheit schon so lange, als man überhaupt die Einflüsse der Gemütsbewegungen auf die Lebensfunktionen exakt registrierte. Mosso verwendete hierzu zunächst den Mareyschen Pneumographen[3]),

1) Die Gefahr dieses Nebeneinflusses, die bei der Auffälligkeit der Registriervorrichtungen nicht leicht durch Unwissentlichkeit zu beseitigen ist, hat schon Mosso hervorgehoben, der z. B. ihre Ausschaltung bei der Registrierung der Atmung im Schlafe für einen besonderen methodischen Vorzug vor den Versuchen mit wachen Personen betrachtete (a. S. 467 A. 2 a. O.). Am meisten dürfte ein solcher Fehler bei Ungeübten in Betracht kommen. R. Schulze fand es daher z. B. auch bei seinen Versuchen mit Schulkindern ratsam, der V.-P. zu suggerieren, daß es bei einem Versuch um den andern überhaupt nicht auf die Atmung, sondern auf andere Dinge abgesehen sei, und daß das Kymographion nur der Bequemlichkeit halber in Gang bleibe, ein an sich wohl ganz zweckmäßiges Verfahren, das nur leider nicht auf unterrichtete V.-P. anwendbar ist. Vgl. a. S. 458, A. 2 a. O. S. 102. Auch E. Weber glaubt diesen Nachteil der Symptomatik willkürlich modifizierbarer Prozesse höher als Meumann und Zoneff veranschlagen zu müssen. Vgl. a. S. 452 a. O. S. 23.

2) Vgl. Exp. Anal. der Bew.-Phän. S. 352 ff.

3) Dieses Handbuch II, 2. Abt. 1908, I, F. Schenk, Atembewegungen, S. 16 (dort als „Thorakograph" bezeichnet). Vgl. auch III, 6. Abt., J. Poirot, Phonetik, S. 9 ff. (Die Atembewegung beim Sprechen) und S. 53 ff. (Die aërodynamischen Eigenschaften des Luftstromes).

der jedoch wegen der relativen Starrheit seiner Unterlage nur für die Montierung über den Rippen oder am Brustbein, aber weniger zur Registrierung der Bauchatmung geeignet ist[1]). Für diese letztere verwendete daher schon Mosso bei ihrer erstmaligen Parallelaufnahme neben der thorakalen, (die allerdings zunächst im wesentlichen an Schlafenden zu einer rein physiologischen Orientierung unternommen wurde[2]), einen einfachen Hebel (d. h. einen Vierordtschen Sphygmographen, vgl. II, 4. Abt. S. 73), und ging somit vom pneumographischen zum stethographischen Prinzip über (vgl. Bd. II, 1. Abt., S. 4 ff). Meumann und Zoneff[3]) betonten ebenfalls die charakteristischen Unterschiede der thorakalen und abdominalen Atmung[4]), über die sie zum ersten Mal psychologisch gedeutetes veröffentlichten Material[5]). Sie nahmen aber doch auch die abdominale Atmung ebenso wie die thorakale mit dem Mareyschen Modell auf, da die Vergleichung der absoluten Ausschläge durch möglichst gleiche Aufnahmebedingungen begünstigt wird. Dabei erscheint es aber dann wohl vorteilhafter, umgekehrt auch für die Brustatmung ein Modell zu verwenden, das abdominal bequem zu tragen ist, weshalb jetzt öfter der schon von Lehmann benützte Brondgeestsche[6]) Pneumograph als besonders universell bevorzugt wird[7]), dessen Spannung allerdings jeweils sorgfältig zu kontrollieren ist[8]). Ähnlich, wie es oben bei der mechanischen Registrierung des mimischen Ausdruckes geltend gemacht wurde, wenn auch in etwas geringerem Grade, müssen freilich alle diese an sich ungewohnten, die Atmung und den Blutkreislauf selbst erschwerenden Bandagen bei psychologischen Versuchen als besonders unnatürliche Zutaten erscheinen, wenn auch wegen der Unbestimmtheit der Grenzen normaler Lebensbedingungen hierbei

1) Zur Vermeidung von Kältereizen an Brust und Bauch, die Atmung und Kreislauf in spezifischer Weise beeinflussen, sind Pneumographen im allgemeinen über einer leichten Kleidung zu montieren.

2) A. Mosso, Über die gegenseitige Beziehung der Bauch- und Brustatmung. Arch. f. Physiol. 1878, S. 441. (Umarbeitung eines schon 1878 im Archivio p. l. Sc. med., A. II erschienenen Aufsatzes.)

3) Über Begleiterscheinungen psychischer Vorgänge in Atem und Puls; Wundt, Phil. Stud. XVIII, 1903, S. 1 ff.

4) Von vier kreuzweise vernähten unelastischen Bändern umschnürte das obere horizontale Band mit dem thorakalen Pneumographen das Segment zwischen der ersten und zweiten Rippe. Das untere horizontale Band mit dem abdominalen Apparat lag unterhalb des Sternums.

5) Schon im W.-S. 1898/99 hatte G. Störring zum ersten Male in psychologischem Interesse die beiden Atmungskomponenten gleichzeitig registriert, aber sein Material erst 1906 veröffentlicht. (G. Störring, Experimentelle Beiträge zur Lehre vom Gefühl, Arch. f. d. ges. Psychol. 6, S. 325 ff.) Im Zusammenhange phonetischer Untersuchungen war auch H. Gutzmann auf die Wichtigkeit dieser Parallelaufnahme aufmerksam geworden. (Verh. des 20. Kongresses für inn. Medizin 1902, S. 508.)

6) II, 2. Abt. VI, S. 16.

7) Das von Gent (Wundt, Phil. Stud. 18, 1903, S. 715) benutzte Modell von Knoll (nicht das Mareysche!), das in einem einfachen Gummibeutel mit Schlauchspitze besteht, ist in seinen Elastizitätsverhältnissen für eine ausgedehntere Untersuchung kaum konstant genug. (Vgl. II, 2. Abt. ebenda.)

8) Eine Einheitlichkeit bezüglich des verwendeten Prinzipes wäre auch schon deshalb zu wünschen, weil sich die Mareysche Kurve bei der Ein- und Ausatmung der Brondgeestschen entgegengesetzt bewegt und daher auch nach Drehung um 90° der Brondgeestschen erst im Transparent oder Spiegelbild gleich ist.

nicht gerade von Versuchsfehlern, sondern eben nur von sehr speziellen Bedingungen gesprochen werden kann. Immerhin wird die Gewöhnung auch der Anordnung zu einer mehrfachen pneumographischen Registrierung manches von ihrer Lästigkeit benehmen. Während es aber bei an sich unbewußt verlaufenden Lebensprozessen, abgesehen von ihrer eventuellen Änderung durch direkte Auslösung von Reflexen, im wesentlichen bei der Ablenkung der Symptome nach seiten derjenigen der Stimmung der Beengtheit sein Bewenden hätte, kommt bei der Atmung freilich noch hinzu, daß diese Aufdringlichkeit der Apparatur die oben genannte Gefahr der Verschiebung der normalen Stellung der Atmungsimpulse im Bewußtsein (s. oben) und der willkürlichen Nachhilfe hierbei wesentlich erhöht, zumal die Behinderung nicht nur die Stimmung im allgemeinen verändert, sondern auch speziell Atmungsstörungen, insbesondere den Trieb zu tiefem Aufatmen mit sich bringt. Jede deutlicher hervortretende Seite der Behinderung regt dabei eine besondere Beachtung und Innervierung spezieller Komponenten an, die ohnedies überhaupt niemals isoliert heraustreten würden. Doch sind diese Störungen wohl noch am geringsten, wenn der allgemeine Bewußtseinszustand, dessen Atmungssymptome untersucht werden sollen, in einer auf bestimmte Wahrnehmungen oder Gedanken konzentrierten Willenstätigkeit besteht, wie z. B. bei der pneumographischen Analyse des ganzen Verlaufes einer Auffassungs- oder Reaktionsleistung, deren Präzision außerdem noch gleichzeitig kontrolliert wird. Die V.-P. wird also der unnatürlichen Beachtung der Atmung vor allem da zu begegnen haben, wo mehr passive Stimmungen, z. B. beim ästhetischen Genuß von Farben, Tönen usw., entstehen sollen, bei denen an und für sich eine gewisse Expansionstendenz der Apperzeption vorhanden ist.

In neuester Zeit wurde die Analyse selbständig variabler Komponenten der Atmung noch bedeutend verfeinert, insbesondere durch die Feststellung verschiedener Hauptformen des gesanglichen und rhetorischen Vortrages[1]). Diese spezifisch willkürliche Funktion der Respirationsmuskeln steht hierbei mit den Innervationen der übrigen bei der Stimmbildung beteiligten Muskulatur sowie mit der Haltung und Bewegung des ganzen Körpers im engsten Zusammenhange. Die Nachprüfung der zunächst ohne besondere physiologische Apparate ausgesuchten Punkte, welche sich je nach dem „Typus“ in charakteristischer Weise verschieben, ist jedoch Aufgabe der phonetischen Methoden. Die bedeutende Steigerung der instrumentellen Belastung der Körperfläche, die eine gleichzeitige Kontrolle mehrerer der in Betracht kommenden Punkte mit sich bringt, vermehrt natürlich die Gefahr einer unnatürlichen Bewußtseinsstellung der Atmungsimpulse, die allerdings bei der Registrierung des aktuellen Vortrages selbst wieder durch die Konzentration auf den Gegenstand wesentlich vermindert werden kann. Letzteres gilt auch für die schon S. 477 genannte Anwendung der „Reproduktionsmethode“ im engeren, S. 10 erläuterten Sinne, bei der Rehwoldt in einem nach O. Rutz' Angaben erweiterten Umfange Atmungssymptome registrierte. Fig. 49 zeigt schematisch die fünf Stellen der Brust und des

1) Vgl. Ottmar Rutz, Neue Entdeckungen von der menschlichen Stimme, 1898. Ders. Neue Ausdrucksmittel des Seelischen, Arch. f. d. ges. Psychol. Bd. 18, 1910, S. 234.

Unterleibes für fünf an unelastischen Bändern montierte Brondgeestsche Pneumographen, deren Kurven von Rehwoldt samt einem Sphygmogramm auf einem Kymographion mit Heringscher Schleife untereinander aufgezeichnet wurden[1]). Soweit diese Punkte freilich, wie A_1, A_2 oder A_4, A_5 auf dem nämlichen Segmente liegen, könnten ihre Verschiebungen unabhängig voneinander höchstens durch sog. Stethographie[2]) registriert werden. Jedenfalls sind nach alledem, wie auch Meumann und Zoneff besonders betonen, die Symptome je nach der Abnahmestelle verschieden genug, um Pneumogramme nur bei gleicher Applikation des Apparates vergleichbar erscheinen zu lassen.

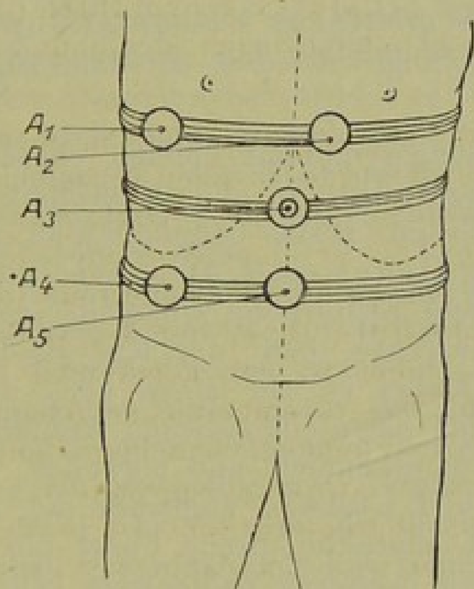


Fig. 49.
Die Anordnung zur gleichzeitigen Registrierung der Atmung mit fünf Brondgeestschen Pneumographen auf Brust und Unterleib in den Versuchen von Rehwoldt.

Außerdem ist aber vor allem auch erforderlich, daß sich die Anordnung sowie die allgemeinen subjektiven Bedingungen der Respiration[3]) während der Untersuchung nicht ändern. Bezüglich der instrumentellen und der muskelphysiologischen Bedingungen böte nun gerade die Atmung wegen ihrer willkürlichen Auslösbarkeit den besonderen, bei den unbewußten Lebensprozessen fehlenden Vorteil dar, daß die V.-P. auch wieder jene eindeutigen Haltepunkte in der Einschätzung des Effektes einfacher Impulse, nämlich die Extreme der größtmöglichen Inspiration und Exspiration, zu einer jeweiligen Kontrolle willkürlich einführen könnte[4]). Gerade bei diesem

1) Vgl. den der Abhandlung Rehwoldts beigegebenen Kurvenatlas.

2) Vgl. Bd. II, 2. Abt., S. 4 ff.

3) Bezüglich der spirometrischen Untersuchung, die noch mehr Störungen der V.-P. durch die Anordnung nötig macht, aber außerhalb der eigentlichen psychologischen Versuche zu Kontrollen beigezogen werden kann, vgl. Bd. I, 3. Abt. II, Tigerstedt, Respirationsapparate und III, 6. Abt. Poirot, Phonetik S. 53 ff.

4) Da diese extremen Amplituden bei einer Einstellung des Schreibers, die für eine möglichst differenzierte Aufzeichnung der tatsächlich vorkommenden Atemzüge am zweckmäßigsten ist, häufig gar nicht mehr registriert werden könnten, wären hierzu die Spannungsverhältnisse des Systems durch Eröffnung eines zweiten konstanten Manometerraumes jeweils erst passend abzuändern.

Unternehmen tritt aber wieder die verschiedene psychologische Stellung der einzelnen Komponenten deutlich hervor. Der Versuch, eventuell bestimmte Segmente, über denen die Pneumographen montiert sind, in extreme Stellungen zu bringen, könnte offenbar zu sehr unnatürlichen Einstellungen mit ungünstigen Nachwirkungen für den ganzen Versuch führen. Rekurriert man aber doch einmal auf ein natürliches Innervationsverhältnis der einzelnen Komponenten, wie es ja schließlich auch bei der Ableitung der Extreme an sich wohl möglich wäre, so ist man doch wiederum auf die Konstanz von Koordinationen im Verlauf des ganzen Versuches angewiesen. Daher war man denn bisher auch mit dem Nachweis des gleichen Prospektes der Kurve bei möglichst natürlicher mittlerer Normalatmung in den verschiedenen Zeitpunkten der Untersuchung zufrieden, der dann zugleich die instrumentelle Konstanz verbürgt.

Psychologische Atmungssymptome können, ebenso wie es oben von den Willkürbewegungen gesagt wurde, in allen Einzelheiten des konkreten Pneumogrammes gefunden werden. Bisher begnügte man sich aber im wesentlichen mit der Feststellung der Dauer eines Atemzuges und seiner beiden Hauptphasen der Inspiration und Exspiration einerseits (der „Längen“ in Kurvenmaßen)[1]) und der Atemtiefe (bzw. der Kurvenhöhe und des jeweiligen Niveaus) andererseits. Dabei ist vor allem nach der Exspiration, die gewissermaßen den Abschluß eines einheitlichen Atmungsaktes darstellt, häufig eine besondere Pause zu erkennen, und bisweilen, wie es schon der Einteilung von Vierordt und Ludwig zugrunde lag, auch nach der Inspiration. Um auch die oft charakteristische Form des Ablaufes im einzelnen wenigstens noch in einem weiteren Zahlenwert zum Ausdruck zu bringen, bestimmte Rehwoldt auf Vorschlag von Salow auch noch die Höhen Hi und He des Pneumogrammes in den Zeitpunkten, die zwischen dem Beginn und dem Abschluß der Inspiration bzw. der Exspiration gerade in der Mitte liegen, und setzte diese zu der Höhe im Maximum der Einatmung ins Verhältnis[2]). Insbesondere bei der Untersuchung der Konkurrenz zwischen der Atmung und einer intensiven Konzentrationsleistung fanden Meumann und Zoneff auch noch den abgeleiteten Wert der sog. „Atmungsgröße“ charakteristisch[3]), die als das Produkt aus der mittleren Summe der thorakalen und der abdominalen Atemhöhen in je 10 Sek. einerseits und der mittleren Atemfrequenz in dieser Zeitstrecke andererseits definiert wird, und „in gewissem Maße dem Quantum der aus- und eingeatmeten Luft entspricht“. (Vgl. S. 469, A. 3.)

1) G. Störring gab a. S. 467, A. 5 a. O. zum ersten Male die charakteristischen Verhältnisse J : E zwischen den Längen der Inspiration und der Exspiration an.

2) Vgl. Rehwoldt, a. S. 447, A. 2 a. O. S. 149. Über die Charakterisierung des symptomatisch wichtigen Grades der Regelmäßigkeit der Atmung durch die Angabe mittlerer Variationen (Schwankungsbreiten) vgl. auch Salow, Der Gefühlscharakter einiger rhythmischer Schallformen in seiner respiratorischen Äußerung. Psychol. Stud. IV, 1908, S. 1.

3) a. a. O, S. 47.

74. Symptomatische Änderungen im Blutkreislauf.

a) Druck- und Volumpuls, insbesondere das Unterarmplethysmogramm.

Die psychischen Einflüsse auf den Blutkreislauf wurden seit A. Mosso bisher vor allem am Sphygmogramm (s. Bd. II, 4. Abt. S. 70 ff.) und am Plethysmogramm (ebenda S. 272 ff.) studiert[1]. Zu der S. 465 geforderten Unterscheidung rein physiologischer Einflüsse von den gesuchten psychologischen Symptomen muß dabei vor allem die gleichzeitige Atmungsperiode bekannt sein, also womöglich stets gleichzeitig ein Pneumogramm aufgenommen werden. Denn die Dauer der einzelnen Pulse, die auch hier am exaktesten festgestellt werden kann, ist während der Inspiration im Mittel kürzer als während der Exspiration, was insbesondere bei der Beurteilung kurzdauernder Symptome wichtig ist[2]. Beim Volumpuls hat man außerdem die ebenfalls mit der Atmung synchronen Traube-Heringschen Wellen als solche zu erkennen, wozu dann freilich auch noch andere automatische Niveauverschiebungen kommen, sog. Mayersche Wellen, die aber bei genauer Markierung der Reizzeiten im allgemeinen von psychischen Einflüssen zu unterscheiden sein werden.

Die schon beim Pneumographen erwähnten Störungen der V.-P. durch die direkte Montierung der Apparate am Körper, die vor allem mit der Häufung gleichzeitiger Registrierungen zunehmen, sind bei der Aufnahme des Radialis-Sphygmogrammes noch relativ am geringsten und auch beim Kardiogramm für bloße Frequenzmessungen sehr zu vermindern[3]. In dieser Hinsicht hat auch hier für psychologische Zwecke die kinematographische Aufnahme (Bd. II, 4, S. 213) oder die z. B. für den Herzton verwendete Aufzeichnung von akustischen Fernwirkungen u. ä. (ebenda S. 195) besondere Vorzüge. Da aber bei allen Registrierungen des Blutkreislaufes die dem Apparat mitgeteilten Impulse viel feinere sind als bei der robusteren Atmungsbewegung, so haben sie leider den besonderen Nachteil, daß sich die V.-P. während der ganzen Aufnahme möglichst ruhig halten muß, insbesondere dann, wenn die Körperoberfläche, wie bei den bisher am meisten gebräuchlichen Unterarmplethysmographen, zur Registrierung der Blutbewegung gegen eine außerhalb des Körpers fixierte Wandung zu arbeiten hat[4].

---

1) Die a. a. O. S. 216 ff. ausführlich dargestellte Messung des Blutdruckes, der beim Menschen erst durch die Gefäßwandung und die aufgelagerten Gewebe hindurch auf das Manometer wirken kann, ist deshalb weniger zur psychologischen Symptomatik beigezogen worden, weil sie nur den Druck in einzelnen Augenblicken exakt zu messen gestattet, aber keine fortlaufende Kurve der zur Unterdrückung des Pulses jeweils notwendigen Belastung ergibt. Wie a. a. O. dargelegt ist, können jedoch auch aus dem Sphygmogramm bei konstanten Spannungsverhältnissen der Manometer Rückschlüsse auf den jeweiligen Blutdruck gezogen werden.

2) Vgl. z. B. auch G. Martius, Über die Lehre von der Beeinflussung des Pulses und der Atmung durch psychische Reize (Martius, Beiträge zur Psychologie und Philosophie 1. 4. H. 1905, S. 411) (S. 421 ff.).

3) So fanden Meumann und Zoneff (a. S. 467 a. O.) das einfache Umhängen des Mareyschen Kardiographen (s. II, 4. Abt. S. 182 f.) ausreichend, dessen Pelotte hierbei nur durch ein an den Apparat gehängtes Gewicht leicht gegen den Thorax gedrückt wurde.

4) Die am Kopf fest montierten Luft-Plethysmographen (vgl. unten) werden dagegen z. B. wiederum durch die Bewegungen der Kopfmuskulatur z. B. beim Schlucken beeinflußt, selbst wenn der Kopf im ganzen fixiert ist (vgl. E. Weber a. a. O. S. 340.)

Bezüglich der Verwendung des Sphygmographen für unsere Zwecke ist nur auf die genannten Stellen zu verweisen. Der Plethysmograph für den Unterarm hat jedoch erst durch A. Lehmann die gegenwärtig in psychologischen Untersuchungen gebräuchliche Form erhalten (s. Fig. 50)[1].

Dieser Apparat unterscheidet sich von dem II, 4. Abt. S. 277 angegebenen Modell Mossos in mancher Hinsicht. In die Armröhre aus Zinkblech, die hier mit schlechten Wärmeleitern umhüllt ist, wird, ähnlich wie es schon bei dem II, 4. Abt. S. 222ff. ausführlich beschriebenen Apparate zur Blutdruckregistrierung nach Hürthle (1896) geschah, erst ein (hier am offenen Rande festgebundener) Sack aus feiner Gummimembran eingestülpt, der den Wasserraum gegen den Arm abschließt. Außerdem wird das Zuflußrohr, nach Einlauf des gut erwärmten Wassers und sorgfältiger Entfernung von Luftblasen durch vorsichtige Bewegungen, mittelst eines Hahnes verschlossen und das bei

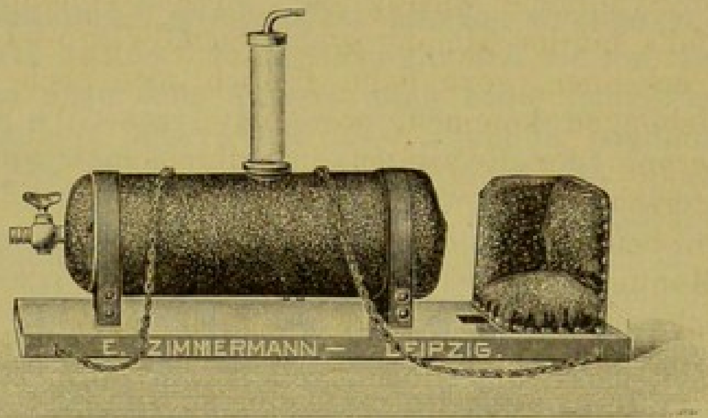


Fig. 50.
Unterarm-Plethysmograph nach A. Lehmann.

den gewöhnlichen Versuchen noch bis etwa 10 cm mit Wasser gefüllte Wasserstandsrohr pneumatisch an einen Mareyschen Schreibtambour angeschlossen, die Volumzunahme also zu einer gegen eine Wassersäule und eine Tambourmembran wirkenden Drucksteigerung verwendet[2]). Zur Sicherung der Armlage gegen die schon A. Fick[3]) wohlbekannte Gefahr unwillkürlicher Bewegungen, die bei Erregung durch Reize und sonstigen Affekten oder auch bei gleichzeitigen Registrierbewegungen der V.-P. (s. S. 465) natürlich noch vermehrt ist, soll jedoch die von A. Lehmann eingeführte, verstellbare Ellenbogenlagerung nicht ausreichen[4]). Wollte man aber den Arm noch fester an den Apparat montieren, also z. B. den Gummisack ähnlich wie am genannten Apparat von Hürthle befestigen, so würden nur die oben erwähnten allgemeinen Störungen zunehmen, ohne daß eine völlige Sicherheit erreicht wäre.

b) Erweiterung der Plethysmographie.

(Registrierung der Volumänderungen des Hirnes, der Unterleibsorgane, gleichzeitige Untersuchung mehrerer Regionen.)

Besonderes Interesse hat aber natürlich in diesem Zusammenhange der Untersuchung psychischer Einflüsse die Registrierung der Volumpulse des

1) a. S. 465, A. 2 a. O. 1899.

2) Vgl. dagegen bezüglich der Registrierung mit dem Piston-Rekorder oder dem Brodieschen Bellow-Rekorder Bd. II, 4. Abt. S. 91ff. und S. 277.

3) Druckkurve und Geschwindigkeitskurve in der Arteria radialis, Würzburg 1886.

4) Vgl. vor allem die Kontrollen von Martius mit eingegipstem Unterarm a. S. 471, a. O. S. 430ff. Günstiger lauten die Ergebnisse von E. Weber a. S. 478, A 2 a. O. S. 61ff.

Hirnes, wie sie bei Schädeldefekten möglich ist[1]). Die Geschichte dieser ebenfalls von Mosso[2]) zuerst auf psychische Symptome angewandten Methode ist von E. Weber (a. a. O. S. 335 ff) dargestellt[3]). Folgende Vorschriften sind von allen Experimentatoren von Mosso an beobachtet worden: „Man darf nur solche Personen benutzen, deren Wunde am Schädel völlig vernarbt ist, obwohl man natürlich an der Stelle des Knochendefektes die Pulsationen des Gehirnes unter der Haut deutlich fühlen muß. Auch dürfen die Apparate, nachdem sie angelegt sind, in keiner Weise auf die pulsierende Stelle des Schädels drücken. Außerdem muß natürlich ganz besonders beachtet werden, ob die Funktion des zu untersuchenden Gehirns noch immer normal ist oder ob sie etwa durch den Schaden, der zu dem Schädeldefekt geführt hat, gelitten hat" (a. a. O. S. 338). Besondere technische Schwierigkeiten ergaben sich z. B. bei einem von Brodmann untersuchten Kranken mit einem Trepanloche über dem linken Hinterhaupte[3]). Hierbei mußte ein „gut Hühnerei großer" nur mit einer ganz dünnen Hautlamelle bedeckter Vorfall von Hirnsubstanz erst durch eine mittelst Gipsabgusses hergestellte Guttaperchakappe überwölbt werden, die sich, wie es allgemein auch bei glatten Formen notwendig ist, „durch leichtes Erwärmen absolut luftdicht auf der glatt rasierten Haut der knöchernen Umrandung ..... festkleben und jederzeit bequem abnehmen ließ" (Brodmann a. a. O. S. 12 u. 14)[4]).

Auf Grund dieser neueren Untersuchungen, bei denen gleichzeitig z. B. der Volumpuls des Hirns und Armes oder des Hirns und Ohres aufgenommen wurde, ist der ursprüngliche einfache Rückschluß Mossos aus den Plethysmogrammen der Extremitäten auf das Hirnvolumen hinfällig geworden. Es ergab sich zunächst im besonderen eine große Selbständigkeit der vasomotorischen Verhältnisse des Hirns und im allgemeinen ein ziemlich verwickeltes und von der sonstigen Verfassung des Zentralorgans (z. B. Schlaf, Ermüdung) abhängiges Bild der Blutverschiebungen zwischen

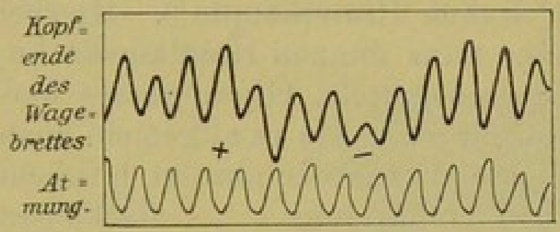
1) E. Weber hat auch die ebenfalls schon von A. Mosso begonnene Untersuchung psychischer Einflüsse auf das Plethysmogramm anderer Körperteile wieder aufgenommen und erweitert. Über diese Apparate (Plethysmographen für Fuß, Ohr usw.) vgl. E. Weber a. S. 452 a. O. S. 51 ff.

2) Über den Kreislauf des Blutes im menschlichen Gehirn, Leipzig 1881.

3) Das ausgedehnteste Material hat H. Berger gewonnen. Außer seiner Habilitationsschrift „Zur Lehre von der Blutzirkulation in der Schädelhöhle des Menschen, namentlich unter dem Einfluß von Medikamenten (Experimentelle Untersuchungen)", Jena 1901, kommt vor allem sein Buch in Betracht: Die körperlichen Äußerungen psychischer Zustände. Experimentelle Beiträge zur Lehre von der Blutzirkulation in der Schädelhöhle des Menschen I. Teil 1904, II. Teil 1907, dem die Resultate von mehreren Personen mit jeweils verschieden gelegenen Schädeldefekten zugrunde liegen. Vgl. außerdem vor allem K. Brodmann, Plethysmographische Studien am Menschen, I. Teil: Untersuchungen über das Volumen des Gehirns und Vorderarmes im Schlafe. Journ. f. Psychol. u. Neurol. 1, H. 1 u. 2, 1902, S. 10 und E. Weber a. a. O. S. 339 u. 353, wo außerdem auch noch eine neuere Arbeit von Shepard (Proc. Am. Physiol. Soc. 21 an. meeting) zitiert ist. Über die Literatur zwischen Mosso und Brodmann, die von diesen neueren Arbeiten mit exakteren Methoden teilweise überholt ist, gab Brodmann a. a. O. ein ausführliches Verzeichnis.

4) Brodmann wendet sich a. a. O. auch noch gegen die sonst übliche weitere Befestigung der Kappe mit Bindentouren u. ä., bei der man sie nur wieder auf ungünstige Stellen verschieben und Undichtigkeiten herbeiführen könne.

den einzelnen Körperteilen, das bis zur Ermöglichung der Aufstellung umfassenderer plethysmographischer Symptomenbilder bestimmter Gesamtzustände noch viele recht voraussetzungslose Detailarbeit erfordern wird. Nach E. Weber stehen noch am ehesten die Blutmengen der Bauchorgane und der Extremitäten in dem antagonistischen Verhältnis, das Mosso ursprünglich zwischen Hirn und Extremitäten angenommen hatte. Er entnahm dies zunächst einer direkten Bestimmung eines im allgemeinen 15 cm langen Gummisackes von 8 cm Durchmesser, der über eine hohle, fast eben so lange Sonde gesteckt, in den Mastdarm der V.-P. eingeführt und von der Sonde aus aufgeblasen werden konnte[1]). Zur graphischen Registrierung war der Schlauch durch den Rohrstuhl, auf dem die V.-P. saß, unmittelbar



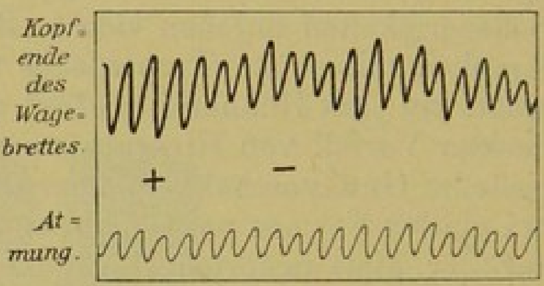


Fig. 51a. (Jedesmal von + bis — Kopfrechnen.) Fig. 51b.
Lage: Bauch kopfwärts der Achse. Lage: Bauch fußwärts der Achse.
Zur Bestimmung der Blutverteilung bei geistiger Arbeit mittelst der Menschenwage (E. Weber a. S. 452 a. a. O., S. 228).

zu einem kräftigen Schreibtambour geleitet. Obgleich mit einem solchen „inneren Plethysmographen“, der den Onkographen (s. II, 4. Abt., S. 278ff.) der Tierphysiologie ersetzen soll und mit ihm auch durch Parallelversuche bei einer Katze kontrolliert wurde (a. a. O. S. 118), seitens eines klinisch geschulten Physiologen unbedenklich wertvolles Material gesammelt werden kann, bringt seine Anwendung doch jederzeit eine eigenartige psychische Einstellung mit sich, die den Apparat für feinere psychologische Normalversuche höchstens unter ganz besonderen Voraussetzungen gebrauchen läßt. Das nämliche gilt für die von Mosso und Pellacani[2]) vorgenommene Registrierung der psychisch ausgelösten Bewegungen der Blase, die (bei Mädchen) wie der Gummisack jenes „inneren Plethysmographen“ vermittelst eines Katheters direkt mit einem Mareyschen Tambour in Verbindung gesetzt wurde.

c) Die direkte Ermittelung von Änderungen der Blutverteilung mittelst der Menschenwage.

Ganz ungefährlich, aber freilich technisch schwieriger und indirekter ist dagegen die Kontrolle der Blutfülle der inneren Organe mittelst der Mosso-schen[3]) Menschenwage (vgl. II, 4. Abt. S. 304), bei der nur der Gesamtzu-

1) a. a. O. S. 115ff.

2) A. Mosso e T. Pellacani, Sulle funzione della vesica, R. Accad. d. Lincei, 1881/82 (zit. nach E. Weber S. 24).

3) A. Mosso, Archives Ital. de Biol. 1884, S. 130. Ders. „Die Furcht“ 1889, S. 89. Vgl. E. Weber, a. a. O. S. 211ff.

stand wiederum durch die horizontale Lage einseitig beeinflußt wird, die man zur möglichst vollständigen Ausnutzung der Kräftekomponenten bei der Wägung einführen muß [1]). E. Weber verwendete dieses Verfahren speziell zur Beantwortung seiner Frage, wie sich die Blutfülle der Bauchorgane bei psychischen Einflüssen ändere. Er wog einfach zweimal bei dem nämlichen Verlaufe (vorübergehendes Kopfrechnen), wobei nur der fragliche Körperabschnitt der V.-P. beide Male auf verschiedenen Seiten des Drehpunktes der Wage lag [2]). Figur 51 a und b zeigt den entgegengesetzten Ausschlag des Kopfendes der Wage in diesen beiden Fällen, der sich der Atmungsoszillation superponiert, die als Hebung bei der Inspiration, Senkung bei der Exspiration zugleich das Kriterium der richtigen Äquilibrierung abgibt. Deshalb wurde auch hier stets die Atmung gleichzeitig registriert, außerdem auch bisweilen die Kurve des Armplethysmographen, der hierbei auf dem Wagebrett seitlich festgeschraubt war.

75. Pupillenmessungen.

Den vasomotorischen Ausdruckserscheinungen verwandt, aber doch durch selbständige Innervationen vermittelt [3]) sind die psychischen Einflüsse auf den Pupillenreflex. Die Beschreibung der Apparate zu ihrer Messung ist jedoch vor allem Aufgabe der Ophthalmologie (s. III, 3. Abt. I). Auch gehört das Studium der Irisbewegung bei dem wichtigsten Reizeinflusse, der Lichterregung des Auges, bereits zu den sinnesphysiologischen Methoden. Ferner beobachtete z. B. Heinrich auch den Einfluß der seitlichen Einstellung und der Ablenkung der Aufmerksamkeit auf die Pupillenweite mittels des Ophthalmometers [4]) ebenso wie den Einfluß auf die Linsenakkommodation [5]). Eine selbständige Konstruktion ist der Sommersche Apparat [6]), bei dem durch einen für die Beobachtung durchbohrten Spiegel, ähnlich wie beim Helmholtzschen Ophthalmoskop, in das Auge der V.-P. direkt von vorne das Licht einer in einem Kasten darüber befindlichen Glühlampe einfällt, das mit einem Rheostaten nach einer photometrisch exakt zu eichenden Skala abgestuft werden kann [7]). Stellt der Experimentator die Parallelfäden, aus deren Distanz die Pupillenweite zu berechnen ist, ähnlich wie bei einer astronomischen Durchgangsreaktion (s. § 81, a) ein, so läßt sich auch die eben-

1) Es wäre vielleicht nicht unmöglich, daß auch die Veränderungen der Schwingungszeit des schaukelnden Körpers oder der Effekte anderer Beschleunigungsweisen, aus denen man auch die Massenverteilung in dem vertikal stehenden Körper ermitteln könnte, schon bei kleinen, der V.-P. kaum merklichen Bewegungen mit entsprechend feinen Apparaten genügend zur Geltung gebracht werden könnten. Auch bei der Aufnahme der sog. „Erschütterungskurve" nach Gordon kommt zunächst die vertikale Stellung auf einer Federwage in Betracht.

2) Über das Verfahren von Ottfried Müller (Arch. f. klin. Med. 1905), bei dem die V.-P. horizontal auf mehreren neben einander befindlichen Wagschalen liegt, vgl. E. Weber a. a. O.

3) Wernicke, Virchows Arch. Bd. 56, S. 403 (zit. nach. E. Weber, a. a. O. S. 26).

4) Heinrich, Die Aufmerksamkeit und die Funktion der Sinnesorgane. Zeitschr. f. Psychol. u. Ph. d. S. Bd. 9, 1896, S. 342.

5) Ebenda (Fortsetzung) Bd. 11, S. 410.

6) a. S. 458, A. 3 a. O. S. 82 ff.

7) Weitere Literatur vgl. bei E. Weber a. S. 452 a. O. S. 25.

falls symptomatische Geschwindigkeit der Pupillenreaktion ermitteln. Auf die speziellen psychologischen Gesichtspunkte, die für die Verwendung solcher „Reaktionen" des Messenden vor allem bei Beobachtungen der eigenen Irisbewegung in Frage kommen, die aber teilweise doch auch bei Beobachtungen der fremden Iris Geltung haben können, ist schon von Donders aufmerksam gemacht worden[1]).

76. Temperaturmessungen.

Psychologische Symptome von allgemeinerer Bedeutung[2]) enthalten endlich auch die Veränderungen der Temperatur und der elektrischen Spannung der verschiedenen Körperteile, deren exakte Messung hier aber ebenfalls nicht mehr im einzelnen dargelegt zu werden braucht. Da jedoch auch die empfindlichsten Thermometer eine gewisse Zeit von $^1/_2$ bis 1 Minute brauchen, um einen stationären Zustand zu erreichen, so kommen bei fortlaufenden Registrierungen der Körperwärme an irgend einer Stelle vor allem mittlere Wirkungen kleiner Zeitabschnitte zur Geltung, ähnlich wie bei den früher genannten Methoden und Messungen der geistigen Arbeit durch Kopfrechnen (s. S. 373). Für die Messung psychischer Einflüsse[3]) kämen natürlich im wesentlichen nur die gewöhnlichen klinischen Methoden der Temperaturmessung in Betracht, die bei Verwendung des Thermoelementes oder Bolometers die bei der Thermodynamik des Muskels in der Tierphysiologie erforderliche Genauigkeit (10^{-3} ° C.) noch sicher erreichen lassen, während das Quecksilberthermometer nur noch Differenzen von 0,01° C. abzulesen gestattet[4]). Auch hat man z. B. die Apparate für eine so genaue Messung im Rektum bei rein physiologischen Untersuchungen bereits so bequem gemacht, daß sie kaum in irgend einer Haltung als Störung des allgemeinen Zustandes in Betracht kommen[5]). Eine Deutung der an verschiedenen Stellen des Körpers eventuell gleichzeitig abgenommenen Temperaturen hat

1) Vgl. M. v. Vintschgau, Zeitbestimmungen der Bewegungen der eigenen Iris. Pflügers Archiv f. Physiol. Bd. 26, 1881, S. 324 ff., der aus Donders Abhandlung: Reflexiebeweging der beide Pupillen bij het invallen van licht aan eene zijde (Nederlandsch Archief voor Genees en Naturakunde) nach F. Arlt, Archiv f. Ophth. XV, I, S. 294 ff zitiert: „Bei diesen Versuchen machte jedoch das einfallende Licht einen so starken Eindruck, daß man, in der Spannung, möglichst schnell zu reagieren, geneigt war, sogleich den Strom zu schließen, und nicht wartete, bis man die Verengerung wirklich sah." Hier ist also eine methodische Einübung auf eine bestimmte kontrollierbare Reaktionsweise von Wichtigkeit (vgl. unten § 78 ff.).

2) Ich übergehe die Methodik der für die experimentelle Psychologie bisher kaum irgendwie ergebnisreichen Arbeiten über die psychischen Einflüsse auf die Speichelsekretion des Tieres (Pawlow u. a.), zu deren Feststellung ein vivisektorischer Eingriff notwendig ist, weshalb am Menschen bisher höchstens nach einer Operation analoge Beobachtungen gemacht werden konnten, ferner die Beobachtungen über den Einfluß von Gemütsbewegungen auf die Milchsekretion u. ä. Zur Lit. vgl. E. Weber a. a. O. S. 26 ff. und L. Drozynski, Atmungs- und Pulssymptome rhythmischer Gefühle, Wundts Psychol. Stud. VII, 1. u. 2. S. 1911 S. 83 (S. 90 f.).

3) Vgl. Exp. Anal. der Bew.-Phän. S. 357.

4) Vgl. II, 3. Abt. (I. K. Bürker, Methoden zur Thermodynamik des Muskels S. 29). Vgl. daselbst auch über die fortlaufende Aufzeichnung S. 36.

5) Vgl. z. B. F. G. Benedict und J. Ferguson Snell, Eine neue Methode, um Körpertemperaturen zu messen. Pflügers Arch. f. d. ges. Physiol. Bd. 88, 1902, S. 492.

allerdings sehr viele Gesichtspunkte zu berücksichtigen, wenngleich eine Parallele der an einer tiefer gelegenen Stelle abgeleiteten Wärme zu der psychischen Erregung überhaupt zu den plausibelsten aller Symptome gehören würde. Am unmittelbarsten suchte Mosso wieder die Temperatur des Hirnes selbst bei Schädeldefekt zu messen, indem er ein kleines Quecksilberthermometer durch eine noch unverheilte Schädellücke tief in das Gehirn selbst einführte, womit aber wohl zugleich besondere Störungen verbunden sein mußten[1]). Über die weitere Entwickelung dieser letzteren Methode und die physiologischen Gesichtspunkte, die bei ihrer Deutung in Frage kommen, vgl. W. Trendelenburg a. A. 1 a. O.

77. Die Untersuchung der elektrischen Begleiterscheinungen.

Bei der fortlaufenden Registrierung der elektrischen Begleiterscheinungen der Lebensprozesse können im Unterschiede von der Wärme die Einzelzustände zeitlich und in ihren jeweiligen Maßverhältnissen sogar ganz besonders fein differenziert werden, vor allem bei Anwendung des Saitengalvanometers[2]). Wie das Elektrokardiogramm[3]) zeigt, ist es dabei möglich, sogar den Wechsel der geringen Potentialdifferenzen zu verfolgen, die von der Leitung der Ladungen einzelner Teile der im Innern arbeitenden Organe nach der Körperoberfläche herrühren und sich dem konstanteren Strome, der bei leitender Verbindung der nämlichen Hautstellen entsteht, superponieren. Da die Aktionsströme jedenfalls eine besondere Seite der Kreislaufsprozesse ausmachen, so ist es zum mindesten nicht von vornherein auszuschließen, daß sie auch spezielle psychophysische Symptome erkennen lassen werden. Wie Tarchanow[4]) fand, lassen sich aber kurz nach dem Eintritt einer psychischen Erregung auch vorübergehende Änderungen des Hautstromes im ganzen nachweisen, die er auf die Aktionsströme der Schweißdrüsen und eventuell auch der glatten Hautmuskeln zurückführte und die als unmittelbare Begleiterscheinungen der psychischen Erregung von Veraguth[5]) geradezu als „psychogalvanisches Reflexphänomen" bezeichnet wurden. Tarchanow schloß die auf ihre Potentialdifferenz hin zu untersuchenden Hautstellen, z. B. eine Stelle der Innenfläche und des Rückens der Hand, mit Du-Rois-Reymondschen unpolarisierbaren Elektroden an den äußeren Stromkreis an, der ein Spiegelgalvanometer nach Meißner und Meyerstein und außerdem eine den konstanten Körperstrom im psychischen Ruhezustand kompensierende Stromquelle enthielt. Die Elektroden

---

1) Mosso, Die Temperatur des Gehirns 1894. Vgl. außerdem III, 4. Abt. W. Trendelenburg, Das zentrale Nervensystem der warmblütigen Tiere, S. 33 und Lit. S. 144, Nr. 221 u. 222, auch E. Weber a. a. O. S. 338.

2) Vgl. II, 3. Abt., S. 428ff.

3) Über seine Ableitung vgl. II, 4. Abt. S. 203.

4) Über die galvanischen Erscheinungen in der Haut des Menschen bei Reizung der Sinnesorgane und bei verschiedenen Formen der psychischen Tätigkeit. Pflügers Arch. Bd. 46. 1890, S. 46. (Die Resultate wurden bestätigt von Sticker: Über Versuche einer objektiven Darstellung von Sensibilitätsstörungen. Wiener klin. Rundschau 1897. Nr. 30/31. Vgl. auch W. Trendelenburg a. A. 1 a. O. S. 34.)

5) Das psychogalvanische Reflexphänomen, 1909 (auch Monatshefte f. Psych. und Neurol. 1907 u. 1908.)

waren dabei in der von Garten Bd. II, 3. Abt. S. 340 beschriebenen Weise mit Wattebäuschen verlängert, die mit Kochsalzlösung getränkt waren. Läßt sich hierbei noch nicht ganz ausschließen, daß an der Stromschwankung teilweise eine Widerstandsänderung zwischen Elektroden und Haut durch das Schweißsekret selbst schuld sei, so kam eine solche Änderung jedenfalls bei den Versuchen von L. Binswanger[1]) mit Eintauchen der Hände in die Kochsalzlösung, wie sie auch bei der Aufnahme des Elektrokardiogramms vorgenommen wird, sicher nicht mehr in Betracht (s. II, 4. Abt. a. a. O. Fig. 29).

Wesentlich andere physikalische Grundlagen des Vorgangs ergeben sich dagegen, wenn man Metallelektroden in der Hand hält. Dann ist die beobachtete Stromstärke, wie Sommer und Fürstenau fanden, unter Voraussetzung des nämlichen Metalles von der Größe der Berührungsfläche und der Stärke des Druckes abhängig, so daß durch Druckänderungen in der einen Hand sogar die Stromrichtung umgekehrt werden kann[2]). Natürlich wird hierbei, abgesehen von den genannten Aktionsströmen, auch dem Schweißsekret selbst, das bei der Erregung auftritt, ein Einfluß auf die Stromstärke zukommen. Im wesentlichen scheint aber Sommer die Stromänderungen unter seinen Versuchsbedingungen nur für eine besondere Art der Registrierung von „Ausdrucksbewegungen“ der Hände zu halten. Auch in Veraguths Versuch, bei dem die bei Tarchanow nur kompensierende äußere Stromquelle dauernd einen konstanten Strom durch den Körper schickt, dem sich die psychischen Einflüsse nur superponieren, wurden Metallelektroden (Nickel) verwendet. Übrigens muß sich nach den allgemeinen Prinzipien der rein physikalischen Methodik entscheiden lassen, welcher Anteil an der hierbei beobachteten Änderung der Stromstärke speziell den elektromotorischen Kräften oder den Widerständen zukommt. So führte denn auch Albrecht[3]) einfach sukzessiv zwei sehr verschiedene Widerstände in dem äußeren Stromkreise ein und suchte die elektromotorische Kraft und den inneren Widerstand dann einfach aus dem beide Male beobachteten Ausschlag nach dem Ohmschen Gesetz zu berechnen. Damit aber in beiden

1) L. Binswanger, Journ. f. Psychol. und. Neurol. 1907 (vgl. E. Weber a. a. O., der diesen direkten Nachweis der Hautströme (unter möglichstem Ausschluß eines trockenen Kontaktes und besonderer elektromotorischer Kräfte an der Berührungsfläche) bei Tarchanow selbst und Binswanger, wie mir scheint, mit Recht für die ideale und allein übersichtliche Anordnung hält).

2) Klinik f. psych. und nerv. Krankh. 1906, S. 197 und „Deutsche mediz. Wochenschrift“ 32, 1906, 1448. (Die scheinbaren elektrischen Ladungen des menschlichen Körpers.) Sommer und Fürstenau suchten auch durch Auswahl passender verschiedenartiger Elektroden, die in der Spannungsreihe von der Haut etwa gleich weit in entgegengesetzter Richtung entfernt liegen, die Wirkung der elektromotorischen Kräfte an beiden Stellen zu summieren, wofür Kohle und Zink geeignet erscheinen. (Vgl. auch die älteren Versuche Sommers (1901) a. S. 459, A. 1 a. O. S. 157 (Zur Messung elektromotorischer Vorgänge an den Fingern), sowie die Diskussion bei dem unten genannten Vortrag von Albrecht.)

3) Über eine neue Methode zur Untersuchung elektrischer Vorgänge am menschlichen Körper, Ber. über den IV. Kongr. f. exp. Psychol. in Innsbruck, 1910 (1911) S. 191ff. (Vgl. auch die Diskussion zu dem Vortrage ebenda S. 195.) Es erscheint nächstens auch eine Veröffentlichung Albrechts hierüber im Britisch Journal of Psychology.

Fällen wirklich die nämlichen physiologischen Zustände zugrunde liegen, ließ er die beiden Schaltungen durch einen entsprechenden Stromwender rasch alternieren und bestimmte die den kurzdauernden Stromimpulsen entsprechenden Ausschläge, was allerdings mit einem Drehspulengalvanometer gewisse Schwierigkeit bereitete. In neuester Zeit verwendete er auch ein Saitengalvanometer. Jedenfalls ließ sich mittelst dieses Apparates sowohl eine Änderung des inneren Widerstandes als auch der elektromotorischen Kraft berechnen[1]).

---

20. Kapitel.

Willkürliche Reaktionen auf verabredete Reizmotive.

78. Die methodischen Voraussetzungen eindeutiger Verhältnisse bei Reaktionsversuchen.

a) Das Wesen und die Komponenten jeder Reaktionshandlung.

Der einfachste Fall der oben S. 453 abgegrenzten Spezialaufgaben, bei denen auf Grund einer Verabredung der Verlauf einer Willkürhandlung im einzelnen möglichst vollständig von objektiv gegebenen Bedingungen abhängig wird, besteht in dem unmittelbaren zeitlichen Anschluß eines einfachen, isoliert auslösbaren Willensimpulses, z. B. einer Hand- oder Fingerbewegung, an einen äußeren Sinnesreiz. Die Sinneswahrnehmung bildet also dann infolge der freiwilligen Unterordnung der V.-P. unter die Instruktion das hinreichende Motiv für den sofortigen Vollzug einer bestimmten Handlung. Ihr tatsächlicher Eintritt richtet sich aber natürlich auch noch nach allerlei teilweise experimentell beherrschten Nebenbedingungen, deren Einfluß auf die psychologische Entwickelung der bloßen Absicht, unter bestimmten Voraussetzungen die Bewegung auszuführen, zu dem tatsächlichen Impulse jedoch immer nur bei einer eindeutigen Motivation ermittelt werden kann.

Durch die Instruktion, die Bewegung unmittelbar dem Reize folgen zu lassen, ist offenbar neben der Art des Impulses, bzw. seines zur Registrierung erforderlichen Effektes, nur das einzige „Detail" seines Anfanges festgelegt, während die sonstige Form des weiteren Verlaufes der Bewegung der V.-P. vollständig freigestellt ist. Dieser wird allerdings durch die Absicht zur sofortigen Beantwortung des Reizes wenigstens indirekt mitbestimmt sein und somit bei konstanter Lösung der eigentlichen Aufgabe im allgemeinen ebenfalls nur in ziemlich engen Grenzen variieren. Die Bewegung wird mit einem Ruck einsetzen und daher vor allem eine ziemliche Wucht haben, die ohne besondere Zusatzbestimmungen eine größere Schleuderung des Gliedes

---

1) Außerdem ist noch zu erwähnen F. Peterson and C. G. Jung, Psycho-physical investigations with the galvanometer and pneumograph in normal and insane individuals, Brain, 1907. S. 153. (Vgl. auch Peterson und Scripture, Münchener Med. Wochenschr. Nov. 1909.)

herbeiführt. Auch ließen sich wohl durch eine Registrierung dieses weiteren Verlaufes im einzelnen Abweichungen von seinem Optimum hinsichtlich eines möglichst schnellen Einsetzens der ganzen Bewegung je nach der Geschicklichkeit der V.-P. konstatieren und durch Übung entsprechend reduzieren. Doch könnte dies höchstens nach einer vollständigen „Mechanisierung" der neuen Form (s. S. 463) auch der Lösung der ursprünglichen Aufgabe wieder zugute kommen. Denn jede ausdrückliche Forderung einer allgemeiner oder spezieller bezeichneten Bewegungsform, die eine gewisse Aufmerksamkeit verlangt, geht über die zunächst so einfach als möglich gestellte Aufgabe hinaus, die sich ausschließlich auf den Eintritt einer im übrigen sich selbst überlassenen Handlung bezieht.

Eine solche Leistung nennt man eine „Reaktion auf den Reiz schlechthin und das ganze Experiment einen „Reaktionsversuch" im engeren Sinne (s. S. 15), nachdem schon Donders[1]) diesen Ausdruck in diesem Zusammenhange gebraucht und S. Exner[2]) dann das objektive Hauptresultat eines solchen Versuches, das Zeitintervall zwischen dem Reiz und der registrierbaren Bewegung als „Reaktionszeit" bezeichnet hat. Die instruktionsgemäße Reaktionsleistung ist aber nun offenbar nur durch den wohlgeordneten Vollzug dreier Partialleistungen möglich: Die V.-P. hat sich zunächst die Befolgung der Aufgabe, wonach sie auf einen bestimmten Reiz mit einer verabredeten Bewegung reagieren soll, für eine gewisse Zeit, in welcher der Versuch stattfinden soll, so sicher vorzunehmen, daß sie bei der Wahrnehmung dieses Reizes wirklich zur „richtigen" Tat „bereit" ist. Diese Seite der Vorbereitung der Reaktionsleistung, die in gewissem Sinne mit dem Akte der „Einprägung" bei Gedächtnisversuchen nach der Paarmethode (s. S. 390 ff.) zu vergleichen ist, bezieht sich also auf die „Zuordnung" einer Bewegung zu einem Reizmotiv überhaupt. Diese wäre als solche aber natürlich auch bei einer beliebigen Zwischenzeit zwischen Reiz und Bewegung einzuhalten, falls die V.-P. nur einen Motivationszusammenhang überhaupt erleben soll. Irgend eine Eindeutigkeit besitzt daher auch diese Aufgabe wieder erst beim Hinzutritt einer Extrembestimmung, wonach sich die Bewegung ohne jeden Zeitverlust dem Reize anschließen soll. Hierzu sind aber eben noch zwei weitere Partialleistungen erforderlich: Die V.-P. muß das verabredete Reaktionsmotiv bei seinem Auftreten so schnell als möglich als solches erkennen, bzw. wiedererkennen, und muß darnach wirklich sogleich zur Tat übergehen. Natürlich sollen diese drei Seiten jeder korrekten Reaktion[3]) hiermit nicht als völlig selbständige, scharf voneinander abtrennbare Prozesse hingestellt werden. Die beiden zuletzt genannten sind vielmehr in der „Zuordnung"

---

1) Die Schnelligkeit psychischer Prozesse, Archiv f. Anat. u. Physiol. 1868, S. 657 (666 ff.).

2) Experimentelle Untersuchungen der einfachsten psychischen Prozesse, 1. Abh.: Die persönliche Gleichung. Pflügers Arch. f. Physiol. VII, 1873, S. 601 (609).

3) Auf diese Gliederung des inneren Erlebnisses in jeder korrekten Reaktion, die nicht nur für das theoretische Verständnis der Resultate, sondern zunächst auch schon für die zweckmäßige Ausgestaltung der Methode von entscheidender Bedeutung ist, hat zuerst G. Martius nachdrücklich hingewiesen. (Über die muskuläre Reaktion und die Aufmerksamkeit, Wundt, Phil. Stud. Bd. VI 1891, S. 167.)

bereits ganz einheitlich vorgebildet. In dem Maße als sich die V.-P. im Vorbereitungsstadium dem kritischen Augenblick zu nähern glaubt, konkretisiert sich nur die vorher allgemeiner gehaltene und dunklere Vergegenwärtigung jener „Zuordnung" zu einer lebhafteren Antizipation der Handlung, d. h. des unmittelbaren Anschlusses des Bewegungsimpulses an die Auffassung des Reizes.

Der tatsächliche Eintritt des Reizes bleibt aber freilich bei dieser Verabredung einfach abzuwarten, wenn auch eine intensive und korrekte Tätigkeit der aufmerksamen Erwartung wenigstens jeden weiteren Zeitverlust nach dem tatsächlichen Reizeintritt auf der intellektuellen Seite des Reaktionsprozesses verhüten kann, so daß von einer besonderen Auffassungsleistung in jeder korrekten Reaktion gesprochen werden muß. Eben deshalb darf aber die V.-P. bei einer zweckmäßigen Vorbereitung der Reaktion im ganzen auch andererseits auf der motorischen Seite niemals über die bloße „Bereitschaft" zu dem verabredeten Impulse hinausgehen, bis das Reizmotiv als solches erkannt ist, worauf auch die dritte Komponente der Reaktionshandlung voll zur Geltung kommen kann.

b) Die Wichtigkeit einer konstanten Vorbereitung.

(Ihre Berücksichtigung seit der Begründung der Methode durch Helmholtz.)

Dies alles würde jedoch bei nur mäßiger, längere Zeit hindurch möglicher Anstrengung noch keineswegs die kleinste Reaktionszeit ergeben (bei größerer Anspannung aber höchstens dann und wann und untermischt mit um so schlechteren Leistungen), wenn man den Reiz innerhalb eines ganzen Intervalles von mehreren Sekunden oder gar Minuten zu erwarten hätte, ohne den Zeitpunkt genauer voraus zu wissen. Man kann natürlich die Oszillationen, die unter dieser erschwerenden Bedingung der unbestimmten Erwartung ähnlich wie bei der Ableitung von Schwellen nach S. 343 auftreten, wieder ausdrücklich zum Gegenstand der Untersuchung machen, indem man die Zeitlage des Reaktionsreizes, ebenso wie dort die minimalen Veränderungsstufen, innerhalb eines gewissen Zeitraumes, der bei jedem Einzelversuch immer wieder von neuem subjektiv konstant einzuleiten ist, beliebig variieren läßt. Ordnet man dann den einzelnen Zeitintervallen als Abszissen einer Abhängigkeitskurve die Mittel der bei ihnen gemessenen Reaktionszeiten als Ordinaten zu, so läßt sich auch die Frage nach gewissen Gesetzmäßigkeiten in dem zeitlichen Verlauf der Reaktionsbereitschaft beantworten[1]), vorausgesetzt, daß durch die unten genannten Hilfsmittel die Konstanz der übrigen Einstellung erwiesen ist.

1) Nachdem schon Dwelshauwers (Untersuchungen zur Mechanik der aktiven Aufmerksamkeit, Wundts Phil. Stud. Bd. VI, 1891, S. 217ff.) diese Einflüsse durch Reaktionsversuche ohne Vorsignal und mit verschiedenen, jedoch nicht in der früher (S. 343) genannten Weise variierten Intervallen zwischen Vorsignal und Reizmotiv studiert hatte, wurden von Della Valle auch bereits Versuche der oben angedeuteten Art angestellt. Vgl. seine vorläufigen Mitteilungen: Der Einfluß der Erwartungszeit auf die Reaktionsvorgänge, Wundts Psychol. Stud. III, 1907, S. 294.

Sobald man jedoch andere spezielle Nebeneinflüsse auf die optimale Reaktionszeit untersuchen will und daher auf eine möglichste Konstanz der Entwicklung des Impulses aus der Motivwahrnehmung bedacht sein muß, gibt man der V.-P. jedesmal ungefähr gleich lang vor dem Reizmotiv ein Vorsignal. An dieses schließt sich dann ein spezielles Vorbereitungsstadium an, in welchem die Aufmerksamkeit auf die Reizlage und die Bereitschaft zum Impuls gerade zu einem Maximum ansteigen kann, wie es nur ganz kurze Zeit ohne Störung der richtigen Zuordnung jener beiden Partialleistungen zu einander aufrecht erhalten bleiben kann. Diese Forderung eines konstanten Verlaufes von der Reizauffassung bis zum Impuls gilt natürlich vor allem dann, wenn man mit solchen Versuchen die Geschwindigkeit der bei der Reaktion beteiligten Leitung der sensorischen Nervenerregung im normalen Lebenszusammenhang bestimmen will, was eben deshalb nur beim Menschen möglich ist. Dies ist bekanntlich das Problem, um dessentwillen Helmholtz im Jahre 1850 überhaupt zum ersten Male Reaktionsversuche ausgeführt hat[1]). Am Froschmuskelpräparat hatte er die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im motorischen Nerven aus der Differenz der Latenzzeiten bei zwei vom Muskel verschieden weit entfernten Nervenreizungen ermittelt[2]), wie es in jedem Lehrbuch der Physiologie ausführlich geschildert zu werden pflegt. Dieser Versuch war dann auch in ganz analoger Weise auf den lebenden Menschen übertragen worden, am genauesten nach Helmholtz' Vorversuchen von Baxt, der nach Eingipsung des Armes die Muskeln des Daumenballens durch Reizungen des N. medianus entweder am Handgelenk oder am Oberarm neben dem M. biceps zur Kontraktion brachte[3]). Ebenso mußte sich aber nun beim reaktionsfähigen Menschen auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im sensorischen Nerven aus der Differenz der Zeiten von zwei Reaktionen auf Hautreize berechnen lassen, bei denen diese Reize verschieden weit vom Zentralorgan appliziert wurden[4]): „Es wird einem Menschen ein ganz leichter elektrischer Schlag an irgend einer beschränkten Hautstelle beigebracht, und derselbe ist angewiesen, wenn er den Schlag fühlt, so schnell es ihm möglich ist, eine bestimmte Bewegung mit der Hand oder den Zähnen auszuführen, durch welche der zeitmessende Strom (vgl. unten) unterbrochen wird. . . . . Wenn wir den Eindruck auf die Empfindungsnerven von verschiedenen Hautstellen, dem Gehirn bald nahe, bald entfernt, ausgehen lassen, so ändern wir von der ganzen Summe (H. meint die ganze Reaktionszeit, bestehend aus der Zeit der sensorischen Leitung, des nicht näher analysierten Prozesses von da bis zur zentromotorischen Innervation und der motorischen Leitung bis zur registrierbaren

---

1) Über die Methode, kleinste Zeitteile zu messen, und ihre Anwendung für physiologische Zwecke. (Gelesen in der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg am 13. Dez. 1850, abgedr. in den Königsb. naturw. Unterhalt. Bd. II, 2, S. 1) Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen II, 1883, S. 862 ff.

2) Literaturangabe II, 3. Abt. Garten, Elektrophysiologie, S. 481 (Nr. 82).

3) Mitteilung, betreffend Versuche über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den motorischen Nerven des Menschen usw. Monatsber. der Akad. der Wiss. zu Berlin 1867, S. 228 (Helmholtz, Wissensch. Abh. II, 1883, S. 932). Bei dieser Mitteilung erwähnt Helmholtz in einer Anm. auch die Zeiten seiner eigenen Reaktionen auf elektrische Hautreize aus früheren Versuchen.

4) a. A. 1 a. O. (1850). (Wiss. Abh. II, S. 878.)

Kontraktion) nur das erste Glied, die Fortpflanzungszeit in den empfindenden Nerven[1]). Wenigstens dürfen wir wohl annehmen, daß die Vorgänge des Wahrnehmens und Wollens im Gehirn in ihrer Dauer nicht wesentlich von der Art der getroffenen Hautstelle abhängen werden. Ich muß aber dies als eine nicht vollständig erwiesene Annahme anerkennen.“ Dabei war sich aber nun Helmholtz auch bereits über die Wichtigkeit einer gespannten Aufmerksamkeit für die annähernde Gültigkeit dieser zuletzt genannten Annahme völlig klar. Er fand die Reaktionszeit „bei laxer Aufmerksamkeit sehr unregelmäßig und lang, bei gespannter dagegen sehr regelmäßig“ (l. c.). Während man sich aber bei diesen früheren Versuchen mit einer ungefähren Avisierung der V.-P. kurz vor dem Reiz begnügte, ließ sich diese Regulierung des Reaktionsprozesses natürlich dadurch noch wirksamer gestalten, daß entweder vom Experimentator eine mechanische Vorrichtung[2]) ausgelöst wurde, die zunächst ein Vorsignal und nach einer stets konstanten Zwischenzeit das Reizmotiv einführte, oder daß die V.-P. wiederum selbst einen Apparat durch eine leichte Bewegung in Gang setzte, der kurz darnach das Reizmotiv bewirkte. Der Zeitabstand des Vorsignales oder der Selbstauslösung vom Reaktionsmotiv war nach subjektiven und objektiven Kriterien möglichst günstig, zwischen 1 und 2 Sekunden, auszuwählen. Bei der Selbstauslösung tritt allerdings zu den Impulsen der inneren Tätigkeit des Vorbereitungsstadiums noch ein solcher zu einer äußeren Bewegung hinzu, eine Mehrbelastung, die jedoch bei schwierigeren Vorbereitungsleistungen zu speziellen Erkennungsakten usw. gegenüber der hierdurch erzielten Freiheit nicht ins Gewicht fällt[3]).

1) Man könnte meinen, daß der nächstliegende Weg zur Beantwortung dieser Frage nach der Leitungsgeschwindigkeit im sensorischen Nerven doch eigentlich darin bestehe, daß man nach der S. 430 ausführlich behandelten Methode einfach die Zeitverschiebung bei der Vergleichung der Zeitlagen jener beiden an verschiedenen Stellen applizierten Hautreize ermittelt. Die exakte Feststellung dieser rein peripher bedingten Zeitverschiebung ist jedoch zunächst schon durch die Tatsache der Zeitschwelle für verschieden lokalisierte Reize des nämlichen Sinnesgebietes (s. S. 419), außerdem aber vor allem auch noch durch die sonstigen psychologischen Nebeneinflüsse mindestens eben so schwierig wie die Aufrechterhaltung konstanter psychologischer Bedingungen bei Reaktionsversuchen, wie denn auch Helmholtz bei der oben genannten Überlegung von der Ungenauigkeit der Auge- und Ohrmethode und ähnlicher Versuche ausging. Dennoch muß unter sonst möglichst gleichen Auffassungsbedingungen ein geübter Beobachter den Unterschied der Leitungszeit im sensorischen Nerven auch mit solchen Versuchen direkt auffinden können.

2) So verwendete schon L. Lange (Neue Experimente über den Vorgang der einfachen Reaktion auf Sinneseindrücke, Wundts Phil. Stud. IV, 1888, S. 479) ein Kontaktpendel, das jede Sekunde einen Kontakt schloß, der durch geeignete Einschaltung weiterer Kontakte zuerst ein Glocken-Vorsignal und dann in Sekundenabstand den Hauptreiz erfolgen ließ (S. 484). Erdmann und Dodge gaben bei Reaktionen auf tachistoskopisches Lesematerial, das mit dem S. 358 beschriebenen Apparat exponiert wurde, vor dem Reiz zwei Glockenschläge im Abstand von 0,5 Sek., denen das Motiv im nämlichen Takte nachfolgte (a. S. 357, A. 4 a. O. S. 108 u. S. 325). R. Bergemann (Reaktionen auf Schalleindrücke nach der Methode der Häufigkeitskurven bearbeitet, Wundts Psychol. Stud. I, 3. u. 4. 1906, S. 179) benützte wieder ein Kontaktpendel (s. S. 330, Fig. 21) mit Kontakten für Vorsignal und Hauptreiz, wie es in verschiedenen Modellen auch bei vielen neueren Versuchen beibehalten wurde.

3) Diese Selbstauslösung bewährte sich bei Reaktionen auf tachistoskopische Expositionen von Cattell (Psychometrische Untersuchungen, in Wundts Phil. Stud.

Auch die Vorteile des Vorsignales und der Selbstauslösung des Reizes kommen aber erst wieder mit der Einübung im allgemeinen und vor allem mit der fortlaufenden Wiederholung in größeren, möglichst regelmäßig angelegten Versuchsreihen recht zur Geltung. Natürlich dürfen diese nicht bis zur Ermüdung ausgedehnt werden. Am besten bestehen sie aus kleineren, durch etwas längere Erhohlungspausen getrennten Gruppen von ca. 10 bis 12 Einzelversuchen, die durch möglichst gleiche Intervalle von höchstens $^1/_2$ Minute getrennt sind und somit vor allem auch der motorischen Bereitschaft eine spezielle, rhythmusähnliche Förderung zugute kommen lassen. In der Tat sind denn auch alle Reaktionsversuche zur Elimination psychophysischer und rein physikalischer Variationen seit Helmholtz reihenweise angestellt worden, so daß jeder Konstellation von Reaktionsbedingungen wiederum ein ganzer Kollektivgegenstand von Reaktionszeiten im Sinne von § 14,2 zugeordnet wurde, wie er durch die früher abgeleiteten Mittelwerte repräsentiert werden kann [1]).

c) Die Entdeckung der sog. „Antizipation" beim Studium der astronomischen Registriermethode und ihre Unterscheidung von der Reaktion.

Diese Anwendung des Prinzipes der großen Zahlen mit ihren speziellen Folgen für den Verlauf des ganzen Prozesses wurde aber dann besonders

---

III, 1886, S. 305 u. 452, IV, 1388, S. 241). Vgl. ferner A. Kästner und Wirth. Die Bestimmung der Aufmerksamkeitsverteilung innerhalb des Sehfeldes mit Hilfe von Reaktionsversuchen, Wundts Psychol. Stud. III, 1907, S. 361 u. IV, 1908, S. 139, wo III, S. 386 auch die Gesichtspunkte erwähnt sind, die hier für das Zeitintervall bis zum Reaktionsreiz maßgebend sind. Selbstauslösung fand z. B. auch schon bei den Reaktionen auf Temperaturreize mittelst eines sog. Thermòphores statt, wie sie v. Frey Bd. III. 1. Abt. (Sinnesphysiologie I) S. 6 beschrieb.

1) Auf diesem Gebiete wurden denn auch schon frühe Häufigkeitskurven von psychologischer Bedeutung rein empirisch konstruiert, als R. Tigerstedt und Bergquist (Zur Kenntnis der Apperzeptionsdauer zusammengesetzter Gesichtsvorstellungen, Zeitschr. f. Biologie Bd. XIX, 1883, S. 5) die bloße Vergleichung der arithmetischen Mittel aus allen zu einer Einstellung gehörigen Versuchen (nach Hirsch) oder nach der gewöhnlichen, stets ziemlich willkürlichen Ausschaltung extremer Werte nicht mehr ausreichend fanden. Für die rasche Ableitung von ausgeglichenen Häufigkeitskurven aus der Urliste, die nach dem schon von Fechner angegebenen Prinzip das Mittel aus allen möglichen „Reduktionslagen" von gleicher „Stufe" (vgl. S. 38) bilden, hat Günther (Reaktionsversuche bei Durchgangsbeobachtungen, Wundt, Psychol. Stud. VII, 4. u. 5. Hft. 1911, S. 251) eine praktische Formel abgeleitet. Über die rein rechnerische Prüfung des empirischen K.-G. der Reaktionszeiten bezüglich der Konstanz seiner Entstehungsbedingungen, vgl. die von H. Bruns ausgehende Entwickelung bei H. Günther a. a. O. S. 253 und die an G. F. Lipps kritisch angeschlossene Analyse von G. Deuchler, Beiträge zur Erforschung der Reaktionsformen I. Abh. (Wundts Psychol. Stud. IV, 4. u. 5. 1908, S. 353), S. 393ff. Doch kann einer solchen rein formalen Zerlegung eines empirischen K.-G. immer nur dann eine psychologische Bedeutung zukommen, wenn sie sich mit anderen subjektiven oder objektiven Kriterien für die Heterogenität einzelner Partialgruppen deckt. Von besonderer Bedeutung für die Konstruktion homogener K.-G. ist nach dem oben Gesagten, daß man zunächst die Tageswerte getrennt hält, aus deren konkreten Streuungen man übersichtliche Kurven des ganzen Übungsverlaufes herstellen kann. (Vgl. Kästner u. Wirth a. S. 483 A. 3 a. O. Bd. IV, S. 143.) Eine anschauliche Differenzierung der Zeitlage in dem umfassenden K.-G. für sämtliche Einzelversuche geben Erdmann und Dodge a. S. 357, A. 4 a. O. S.287.)

durch die zweite praktische Hauptaufgabe nahegelegt, die auf Reaktionsversuche hingeführt hatte, durch die astronomische Registriermethode. Schon seit Anfang der 40-er Jahre war von Arago ausprobiert worden, daß man den Durchgang des Sternes durch den Faden des Fernrohres, die sog. Bisektion, statt nach der Auge- und Ohrmethode (s. S. 421) einfach durch Arretierung eines Uhrwerkes markieren könne. Auch war die chronographische Registrierung einer manuellen Markierung schon in den 50-er Jahren einstweilen wenigstens durch Vergleichung der astronomischen Zeiten auf ihre Konstanz hin geprüft und der älteren Methode vorgezogen worden. Aber erst nachdem man für diese (in den S. 433 f. genannten Untersuchungen) an besonderen Passagenapparaten auch die absoluten Zeitfehler zu bestimmen versucht hatte, unternahmen Hirsch und Plantamour[1]) zum ersten Male das nämliche für die Registriermethode und maßen die Zeit zwischen der Bisektion eines künstlichen Sternes und der Registrierbewegung. Hirsch war sich dabei der Beziehung seiner Experimente zu den Helmholtzschen Reaktionsversuchen wohl bewußt und verglich sie auch mit Reaktionen auf einzelne Eindrücke verschiedener Sinnesgebiete[2]). Offenbar führt aber nun die spezielle Vorbereitung auf die Auffassung des Reaktionsmotivs durch die Wahrnehmung der Annäherung des Sternes an den Faden bei mäßiger Geschwindigkeit zu einer so lebhaften und sicheren „Antizipation“ des erwarteten Motives in dem S. 416 geschilderten Sinne, daß die V.-P. ganz unwillkürlich entweder gelegentlich oder auch für immer zu einer ganz anderen Handlungsweise übergeht, nämlich zur „antizipierenden“ Auslösung des Impulses, bei der man bestrebt ist, die Bewegung möglichst gleichzeitig mit dem zu registrierenden Vorgang auszuführen. In diesem Falle beginnt also der Impuls zur Tat bereits während der Antizipation und vor der wirklichen Bisektion anzuschwellen, d. h. es wird überhaupt nicht mehr „auf den Durchgang reagiert“. Nicht seine Wahrnehmung, sondern die Vorstellung eines bestimmten Zeitabstandes von seinem voraussichtlichen Eintritt, der dem Beobachter auf Grund des Bewußtseins seiner Muskelbeherrschung der Zeit vom Impuls bis zur (wahrnehmbaren) Kontraktion der Muskeln gerade äquivalent erscheint, ist das eigentliche Motiv der Handlung. Hirsch und Plantamour erkannten diese zweite, „antizipierende“ Einstellung aus gelegentlichen ver-

---

1) Hirsch, Über persönliche Gleichung und Korrektion bei chronographischen*) Durchgangsbeobachtungen, Vortrag in der naturforschenden Gesellschaft in Neuenburg am 8. Nov. 1861: Über die historische Entwickelung dieser Untersuchungen der astronomischen Auge- und Ohrmethode und des Registriermethode vgl. Radau, Moniteur scientifique Quesneville Nr. de 15 novembr. 1865 et suiv. und Carls Repertorium f. physik. Technik (zit. nach S. Exner, a. S. 480, A. 2 a. O., S. 607, wo die frühere Literatur ebenfalls zusammengestellt ist) und vor allem Sanford, Personal Equation, Am. Journ. of Psych. II, 1888 S. 3, 271 u. 403.

2) In der vorausgehenden Abhandlung: Chronoskopische Versuche über die Geschwindigkeit der verschiedenen Sinneseindrücke und der Nervenleitung, Ebenda, S. 183.

*) Die „chronographische“ Methode soll hier ein allgemeiner Ausdruck für die in der Praxis tatsächlich im eng. S. chronographische Registriermethode überhaupt sein, da ja Hirsch diese Versuche mittelst des Hippschen Chronoskopes anstellte (s. u.).

schwindend kleinen oder sogar negativen Zeitwerten[1]). S. Exner[2]) ging ihr dann systematisch weiter nach und sah, daß man auch für Momentanreize bei rhythmischer Wiederholung zu dieser Einstellung übergehen könne, wenn man nicht jedesmal auf die einzelnen Reize warte, sondern eine mit ihr synchrone Taktierbewegung auszuführen suche. Doch sind seine auf optischen Takt bezüglichen Ergebnisse noch nicht so günstig als die, welche F. Martius[3]) für das Nachtaktieren einer gehörten Taktreihe erhielt, ein Versuch, den dieser zur Prüfung der Genauigkeit einer ähnlichen Registrierung des Pulses unternahm.

d) Die Notwendigkeit einer systematischen Kontrolle der instruktionsmäßigen Motivation der Reaktionshandlung.

1. Die allgemeine methodische Ableitung der Motivkontrolle aus den Vorschriften für die Induktion eines Motivationszusammenhanges.

Offenbar kann sich aber nun auch bei fortgesetzter Wiederholung eines Reaktionsversuches, bei welchem dem Reizmotiv nur ein einziger Sinneseindruck in einem völlig geläufigen bequemen Intervall als Vorsignal vorausgeht, schließlich ebenfalls eine so lebhafte Antizipation des Hauptreizes von der Wahrnehmung dieses Signales an ausbilden, daß der Impuls ohne besondere Gegenmaßregeln einfach in dem Takte, der in früheren wirklichen Reaktionen auf den Reiz eingeübt wurde, ohne weiteres Abwarten eines neuen Sinneseindruckes anschwillt. Solange diese Zeitlage noch ungefähr eingehalten wird, braucht sich dieser neue psychologische Charakter der Impulsentwickelung in den gewöhnlichen Reaktionsversuchen objektiv gar nicht weiter zu äußern. Wegen des instruktionsgemäßen Strebens, die Bewegung ohne Zeitverlust auszuführen, schleicht sich aber bei dieser neuen Einstellung meistens auch noch die Tendenz ein, die Bewegung möglichst gleichzeitig mit dem antizipierten Reiz selbst zu vollziehen, und führt dann bei negativen Zeitfehlern zu gelegentlichen, teilweise allerdings auch noch irregulärer bedingten vorzeitigen Reaktionen, die früher das einzige sichere Kriterium für diese innere Einstellung bildeten, da die Selbstbeobachtung allein bei der Feinheit der zeitlichen und intensiven Differenzierung der entscheidenden Momente hierzu niemals ausreichen kann.

Da aber der Impuls nur deshalb so bald ausgelöst wird, weil er überhaupt nicht mehr durch die spezielle Neuauffassung des Reizes, sondern durch seine Erwartung in einem bestimmten Zeitpunkt nach dem Vorsignal motiviert ist, so muß sich die korrekte Einstellung der eigentlichen Reaktion auf den Reiz in einem beliebigen Einzelversuch syste-

1) Eine besonders klare Gegenüberstellung der beiden Verhaltungsweisen findet sich schon bei Le Verrier, Annales de l'observatoire de Paris (mémoires) T. VIII, p. 7, (ausführlich zit. bei H. Leitzmann: Über Störungserscheinungen bei astronomischer Registrierung, Wundts Phil. Stud. V, 1889, S. 56ff. (S. 62, Anm. 1).

2) a. S. 480, A. 2 a. O. S. 639ff.

3) F. Martius, Weitere Untersuchungen zur Lehre von der Herzbewegung, Zeitschrift für klinische Medizin Bd. XV, S. 536. (Vgl. auch Kraepelin, Zur Methodik der Herztonregistrierung, Deutsche Med. Wochenschrift 1888. Nr. 33.)

matisch dadurch feststellen lassen, daß man das verabredete Reizmotiv völlig ausfallen läßt oder durch ein anderes ersetzt und zusieht, ob der Impuls dann noch zurückgehalten werden kann. Hiermit wird einfach das Aristotelisch-Baconische Prinzip der negativen Instanzen bei der Induktion irgendeiner Kausalbeziehung überhaupt auf die Kontrolle eines Motivationszusammenhanges angewendet. Wenn das verabredete Motiv ausfällt, darf bei korrekter Einstellung auch der Impuls zur Tat sich nicht entwickeln. Solche Kontrollen dienen aber bei sinngemäßer Einstreuung in die Versuchsreihen[1]) nicht nur zur Orientierung für den Experimentator, ob er die gefundenen Reaktionszeiten überhaupt auf den verabredeten, eindeutig bestimmten Prozeß beziehen darf, sondern geben auch dem Reagenten selbst in ihrem Gelingen oder Mißlingen erst die Möglichkeit an die Hand, den Grad seiner Selbstbeherrschung in der Zuordnung von Impulsen zu äußeren Sinneswahrnehmungen kennen zu lernen und eventuell durch Übung bis zu einem stationären Stadium zu steigern. Erst dann sind die Reaktionszeiten jene eindeutigen Grenzwerte, aus deren Abhängigkeit von speziellen physiologischen und psychologischen Nebeneinflüssen allgemeinere Schlüsse gezogen werden können.

2. Die Verabredung der Motivations-Präzision bezüglich des Reizmotives.

Da die Zuordnungen einer Reaktion zu einem Reiz nach beiden Seiten hin eine mit der Gesamtleistung variable Unterschiedsschwelle besitzen, so ist auch für die korrektesten Reaktionen die Definition der Abänderung der Reizlage im kritischen Momente, bei welcher die V.-P. ruhig bleiben soll, ebenso wie dieser noch als Ruhe betrachtete Zustand bis zu einem gewissen Grade konventionell und relativ. Durch entsprechende Vorsicht in der Koordination der einzelnen Partialleistungen kann aber die V.-P. jedenfalls immer höheren Ansprüchen in dieser Richtung genügen, woraus sich von selbst ein natürlicher Gesichtspunkt für die Abstufung der Schwierigkeit der einzelnen Reaktionsaufgaben entwickelt. Hiervon war auch Donders[2]) bei seinen erstmaligen Versuchen in dieser Richtung ausgegangen, der diesen Unterschied einer allgemeineren oder spezielleren Motivation in folgendem Passus zum Ausdruck brachte: „Wer die Versuche gemacht hat, weiß, daß das Signal (so nennt Donders die Reaktion selbst) da, wo es nur um Reaktion im allgemeinen zu tun ist, bei allem, was geschieht, losbricht. Wartet man mit Spannung auf eine Lichterscheinung, man reagiert unwillkürlich auch auf einen Klang und umgekehrt, und ebenso auf einen Stoß, auf einen elektrischen Schlag, kurz auf jeden kräftigen Eindruck. Man wartet nicht, bis man hört, sondern nur bis man gewahr wird." Man kann also im „einfachsten" Falle zufrieden sein, wenn die V.-P. nur wenigstens beim völligen Ausfall jeglichen Reizes ruhig bleibt. Verlangt man aber die Respektierung anderer positiver Reize als negativer Instanzen, so hat man

1) Über die Gesichtspunkte, die hierbei im einzelnen zu beobachten sind, vgl. A. Kästner und W. Wirth, a. S. 483, A. 2 a. O. S. 366ff und Exp. Anal. der Bewußtseinsphän. S. 408ff.

2) a. S. 480, A. 1 a. O. S. 673.

bereits eine Reaktion auf ein spezielleres Reizmerkmal. Auch war sich Donders bereits darüber klar, daß die ganze Reihe nicht mehr auf eine eindeutige Einstellung bezogen werden könne, falls in ihr auch nur ein einzigesmal ein von der Motivation ausgeschlossener Reiz mit einer Reaktion beantwortet wird, was also auch bei der S. 484 A. 1 erwähnten Konstruktion des K.-G. aller der nämlichen Instruktion entstammenden Reaktionszeiten in Rücksicht zu ziehen ist. Doch ist in den älteren Versuchen eine solche Eindeutigkeit minimaler Reaktionszeiten wohl noch niemals wirklich erreicht worden.

Indessen wäre bei Donders' Reaktionen auf spezielle Merkmale und bei den an ihn sich anschließenden Versuchen mit sog. Unterscheidungs- und Erkennungsreaktionen, bei denen ähnliche Reize vorkamen, auf die nicht reagiert werden sollte, die Minimalzeit, bei der eben noch jederzeit eine korrekte Reaktion der geforderten Art möglich ist, auch schon deshalb wohl gar nicht zu erreichen gewesen, weil die V.-P. hierbei durch ein relativ häufiges Auftreten negativer Instanzen besonders auf diese hingelenkt wurde. Dadurch kam, wie Wundt zuerst hervorhob[1]), nicht die volle Bereitschaft zustande, die nur bei ausschließlicher Antizipation des positiven Falles möglich wird. Denn der ausdrücklichen Aktualisierung des disjunktiven Urteiles, es könne entweder die positive oder irgendeine negative Reizeventualität eintreten, entspricht eine analoge disjunktive Konkurrenz der beiden Vorbereitungen zum Reaktionsimpulse einerseits und zur Zurückhaltung im kritischen Moment andererseits, wie sie das Wesen der unten § 81c betrachteten disjunktiven Reaktion ausmacht, wenn dabei gleichzeitig mehrere Impulsmöglichkeiten für verschiedene Reizeventualitäten in Frage kommen. Zur Erzielung wirklicher Minimalzeiten der Reaktionen auf allgemeinere oder speziellere Merkmale ist somit unbedingt die ausdrückliche Instruktion der V.-P. erforderlich, sich um die gelegentlichen Kontrollen bei der eben noch sicher beherrschten Vorbereitung des Impulses gar nicht zu kümmern. Dies kann aber um so sicherer befolgt werden, je mehr die V.-P. aus dem tatsächlichen Gelingen der Kontrollen ohne jeden vorherigen Gedanken an sie und trotz größtmöglicher Impulsbereitschaft Selbstvertrauen in ihre differenzierte Beherrschung jeder in Betracht kommenden Situation gewinnt, und je seltener überhaupt solche Versuche bei ihrer fortgesetzten Respektierung weiterhin noch eingestreut zu werden brauchen.

3. Die Verabredung der Motivationspräzision bezüglich des motorischen Verhaltens.

Wie schon erwähnt, ist aber zur vollen Eindeutigkeit auch das motorische Verhalten noch näher zu definieren, das noch als korrekte Respektierung eines fremden Reizes anerkannt werden soll. Würde das reagierende Glied, z. B. die Hand, in der S. 461 f. geschilderten Weise auf einer frei federnden Unterlage ruhen und schon die geringste Bewegung am zeitmessenden Apparat die Reaktionszeit abgrenzen, so wäre die Forderung, nicht zu „rea-

1) Grundzüge der Physiol. Psychologie (1. Aufl. 1874) III⁶ 1911, S. 447.

gieren", bei der Unvermeidlichkeit jener ebenda genannten unwillkürlichen Bewegungen in einem irgendwie kritischen Moment überhaupt niemals zu erfüllen. Ja die unsichere Unterlage der Hand bewirkt leicht eine Unsicherheit des allgemeinen Bewußtseinszustandes, die dem korrekten Vollzug bestimmter positiver oder negativer Koordinationen schon an sich nachteilig ist. Aber auch schon ein zu geringer Widerstand eines zunächst nicht federnden Reaktionsapparates wird die Forderung, beim Kontrollversuch keine registrierbare Bewegung auszuführen, durch die Notwendigkeit einer besonderen Zurückhaltung immer noch ähnlich erschweren wie die Verabredung eines sehr speziellen Reizmotives, dessen Erkennung eine große Anstrengung erfordert. Dagegen scheint vor allem das zur eigentlichen Reaktionsleistung antagonistische Niederdrücken des Tasters gegen eine feste Unterlage, das den zeitmessenden Apparat selbst gegen stärkere unwillkürliche Bewegungstendenzen zu sichern vermag, die korrekte Disjunktion des impulsiven Verhaltens je nach der Reizlage zu begünstigen, weil ihm gegenüber der Reaktionsimpuls mit einem höheren Grade willkürlichen Nachdruckes einsetzen muß, als bei einer bloßen Fortbewegung in der nämlichen Richtung gegen einen mäßigen äußeren Widerstand.

79. Die systematische Kontrolle der Antizipation und die Bestimmung des zureichenden Reizmotives der antizipierenden Innervation.

Wo sich nun durch die Stetigkeit oder Taktmäßigkeit der Vorbereitung umgekehrt gerade die antizipierende Auslösung des Impulses so regelmäßig durchführen läßt wie bei der astronomischen Registriermethode, ist auch diese abgesehen von der Zeitmessung wiederum durch das Verhalten der V.-P. bei entsprechenden Kontrollversuchen nachzuweisen. Denn wenn der Impuls bereits um so viel vor dem erwarteten Reizmoment losbricht, daß sein registrierbarer Effekt mit dem Reiz ungefähr gleichzeitig eintritt, wird natürlich ein Ausbleiben des Reizes an der Ausführung nichts mehr ändern können. Bei unstetiger Vorbereitung durch einen Momentanreiz, der um ein völlig geläufiges Intervall dem Reaktionsmotiv voranzugehen pflegt, oder gar durch eine für gewöhnlich mit dem Reiz rhythmisch abschließende Taktreihe gibt es nun hierbei nur die beiden Möglichkeiten des Auftretens oder Ausbleibens des Reizes, wenn man von der Darbietung eines ähnlichen Reizes im richtigen Moment oder der Hinzufügung neuer Reize vor diesem absieht. Bei der stetigen Vorbereitung eines Sterndurchganges oder dergl. läßt sich jedoch der Zeitpunkt der Hemmung, nämlich des Stehenbleibens (oder Verschwindens) des Sternes vor dem Fadenkreuz, durch Abstufung der Entfernung des Haltepunktes von dem Fadenkreuz beliebig variieren. Dadurch kann nun die zeitliche Entwickelung des Impulses bei den verschiedenen Einstellungen untersucht und ermittelt werden, von wann an sich die Handlung vom äußeren Reizmotiv unabhäng weiter entwickelt, ohne daß freilich hier auch schon der (ungestörte) Impuls selbst einsetzen müßte.

Zunächst ließ sich also auch hier wiederum die gewöhnliche Reaktion auf den wirklichen Durchgang dadurch nachweisen, daß bei ihr die Bewegung beim gelegentlichen Anhalten des Sternes in einer Entfernung vom

Fadenkreuz, die eben noch deutlich wahrgenommen wird, jederzeit noch sicher zurückgehalten werden konnte. Dabei erwies sich in zahlreichen Versuchen von Günther[1]) eine systematische Kontrolle dieser Art als ein sicheres Hilfsmittel, um sich bei der allgemeinen Absicht, wirklich erst auf den Durchgang zu reagieren, die zunächst stets naheliegende antizipierende Einstellung tatsächlich definitiv abzugewöhnen und den Durchgang zwar um eine Reaktionszeit verspätet, dafür aber auch sehr konstant zu registrieren[2]). Sucht aber nun die V.-P. die Bewegung mit dem Durchgang gleichzeitig auszuführen, so muß sich doch andererseits wiederum eine entsprechend frühere Stellung des Sternes vor dem Fadenkreuze ermitteln lassen, vor der er nicht stehen bleiben darf, wenn die Registrierung nicht auch bei dieser Einstellung ausbleiben soll. Ein Anhalten nach dieser Stelle aber würde hierbei den Impuls ebensowenig zurückhalten können, wie bei der Reaktion auf den Durchgang eine Bremsung nach der Bisektion. Obgleich man nun bei dieser rein subjektiv durch die antizipierende Bewegungsvorstellung bedingten Auswahl des Zeitpunktes für die Auslösung des Impulses nicht von einer „Reaktion" der V.-P. auf diese frühere Stellung des Sternes sprechen wird, dürfte ihr zeitlicher Abstand von der Bisektion doch ihrer Dimension nach etwa der Reaktionszeit bei Verwendung ähnlicher Reaktionsmotive gleichkommen. Natürlich wird man beim Versuch, das Einsetzen des rein antizipierend geleiteten Impulses nach diesem Prinzip zu ermitteln, auch das tatsächliche Verharren bei der rein antizipierenden Registrierung fortgesetzt durch Zeitmessungen bei ungestörtem Durchgang zu kontrollieren haben. Auch muß die V.-P. schon von sich aus ebenso wie bei jener Kontrolle der eigentlichen Reaktion bei jedem Versuche immer von neuem so viel als möglich bemüht sein, die spezielle Aufgabe, hier also der gleichzeitigen Bewegung, wirklich zu lösen, ohne weiter an die Möglichkeit eines Zurückbleibens des Reizobjektes zu denken. Freilich wird eine genauere Bestimmung der kritischen Stelle jederzeit eine größere Anzahl von Kontrollversuchen fordern. Denn es handelt sich ja hier wieder um die Feststellung eines Bedingungsextremes oder einer Schwelle im allgemeinsten, S. 164 definierten Sinne unter ganz analogen Bedingungen, wie sie in § 29 dargelegt wurden. Da die Stellung, bei der der Impuls ausgelöst wird, zufälligen Schwankungen unterworfen ist, so wird man nicht eine bestimmte Distanz des Sternes vom Faden finden, vor der jederzeit und nach der niemals ein Zurückhalten möglich ist. Wie in Fig. 52 skizziert ist, wird sich vielmehr bei n-mal wiederholter Bremsung des Sternes vor dem Faden F höchstens wieder ein ganzer „Unsicherheitsbereich" zwischen zwei Distanzextremen E_0 und E_0' ermitteln lassen: Hat der Stern bei seinem Stillstand den Punkt E_0 noch nicht erreicht, so wird der Impuls in n Fällen jedesmal zurückgehalten werden, nach Überschreitung von E'_0 dagegen niemals mehr. Dazwischen aber ist ein allmählicher Übergang der rel. Häufigkeit der Zurückhaltung von 1 auf 0 zu erwarten, aus deren Kurve der hypothetische K.-G.

1) a. S. 484, A. 1 a. O.

2) Auch ein zu vorsichtiges Abwarten des vollen Durchganges gibt sich hierbei darin kund, daß die Reaktion in diesem Falle selbst bei einem Anhalten des Sternes etwas nach der Bisektion gestört erscheint.

des Beginnes der rein subjektiven Führung des Impulses bzw. z. B. dessen arithmetisches Mittel J (𝔄) und Streuungsmaß nach den in Kap. 7 entwickelten Prinzipien abzuleiten sind, wenn die Abszissen der in Fig. 52 angedeuteten Kurve zugleich Zeitwerte bedeuten[1]. Der Reaktionszeit ist aber natürlich nicht ohne weiteres der Zeitabstand zwischen J (𝔄) und der Bisektion, sondern der in der Figur als R.-Z. (𝔄) bezeichnete Abstand zwischen J (𝔄) und dem Mittel der tatsächlichen Registrierungen äquivalent zu erachten, die in den nämlichen Versuchsreihen mit den Kontrollversuchen völlig zufällig und unwissentlich untermischt abgeleitet wurden. In Fig. 52 ist auch deren K.-G. durch eine Kurve angedeutet, deren Abszissen wieder einfache Zeitwerte bedeuten. Die Distanz des stark gezeich-

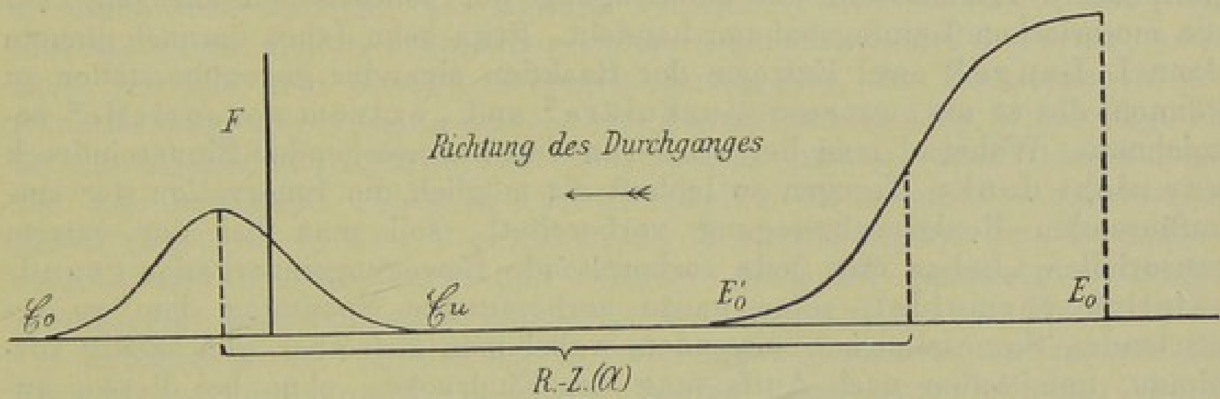


Fig. 52.
Zur Bestimmung der Zeit zwischen der Auslösung eines antizipierenden Willkürimpulses und der Muskelkontraktion.

neten Fadens F von der schraffierten mittleren Registrierung stellt unmittelbar den konstanten Fehler dar, der bei der Absicht zur gleichzeitigen Registrierung untergelaufen ist und der von der Größe des Gesichtsfeldes, von der Geschwindigkeit des Sternes u. a. abhängig ist. Je weniger übrigens die Gegenordre, wie Stillstand oder Verschwinden des Sternes vor dem Faden oder ein besonderes Signal, sich während der Bereitschaft zu einer mit der Bisektion gleichzeitigen Bewegung von selbst aufdrängt, um so früher wird sie auftreten müssen, um noch rechtzeitig zur Geltung zu kommen. Die Zeit R.-Z. (𝔄) wäre also dann ähnlich verlängert, wie die Zeit einer eigentlichen Reaktion auf ein wenig auffälliges Reaktionsmotiv, bei der erst noch eine besondere Erkennungsleistung hinzutreten muß (s. § 81, a).

80. Die Unzulänglichkeit der alten Unterscheidung zwischen der sog. sensoriellen und muskulären Reaktionsweise für die Erzielung eindeutiger Einstellungen.

Einer zweckmäßigen Weiterentwickelung der Methodik der Reaktionsversuche war es längere Zeit hinderlich gewesen, daß man an Stelle solcher, wie wir sahen, schon bei Donders a. a. O. vorgebildeten systematischen Kontrollen, welche die wirkliche Reaktion auf einen Reiz und die anti-

1) Bei ungleichförmiger Bewegung des Sternes wären natürlich noch entsprechende Umrechnungen vorzunehmen. Die Abszisse des arithmetischen Mittels J (𝔄) ist in Figur 52 ebenso schraffiert wie diejenige des Extremes E_0.

zipierende Auslösung des Impulses voneinander sondern läßt, die Reaktionsweisen unmittelbar nach dem Verhältnis der sensoriellen und der motorischen Momente bei ihnen zu unterscheiden suchte, das sich vor allem in der Selbstbeobachtung und außerdem bis zu einem gewissen Grade auch an der äußeren Haltung der V.-P. im Vorbereitungsstadium erkennen lassen sollte. Schon 1873 hatte Exner (a. a. O. S. 619) bei intensiven, mit Schreckwirkung verbundenen Hautreizen und bei Reaktionen, vor denen man sich absichtlich in eine schreckartige, zum plötzlichen Zusammenfahren geneigte Stimmung versetzt hatte, besonders kurze Zeiten gefunden, weshalb ihm hier „ein ganz wesentlicher Unterschied" vorzuliegen schien und er vorübergehend sogar daran dachte, es könne sich dabei um eine dem reinen Reflex näherstehende, peripherere Lokalisation der Übertragung der sensorischen Erregung auf die motorischen Leitungsbahnen handeln. Etwa zehn Jahre darnach glaubte dann L. Lange [1]) zwei Extreme der Reaktion einander gegenüberstellen zu können, die er als „extrem muskuläre" und „extrem sensorielle" bezeichnete. Während man bei jener „an den bevorstehenden Sinneseindruck gar nicht denkt, dagegen so lebhaft als möglich die Innervation der auszuführenden Reaktionsbewegung vorbereitet", soll man bei der extrem sensoriellen, „indem man jede vorbereitende Bewegungsinnervation grundsätzlich vermeidet, seine ganze vorbereitende Spannung dem zu erwartenden Sinneseindruck zuwenden, wobei man sich aber gleichzeitig vornimmt, unmittelbar nach Auffassung des Eindruckes, ohne bei diesem unnötig zu verweilen, den Impuls zur Bewegung folgen zu lassen" (a. a. O. S. 487 f.). Diese ergebe relativ lange, jene dagegen so kurze Reaktionszeiten, daß man sie für einen durch vorhergehende Willenstätigkeit vorbereiteten Kleinhirnreflex halten müsse. Während aber Exner seine soeben erwähnte ähnlich motivierte Unterscheidung von jener Gegenüberstellung der wirklichen Reaktion auf den Reiz und der ausschließlich von der Antizipation geleiteten Bewegung vollständig getrennt hält, gibt L. Lange für die „persönlichen Differenzen" überhaupt keinen anderen Erklärungsgrund mehr als den Gegensatz der sensoriellen und muskulären Einstellung [2]).

Nun kommt aber L. Lange mit der Konstatierung jener an sich natürlich möglichen Extreme als solcher methodisch doch nicht weiter, da auch er die korrekte oder, wie Wundt sagt, die „vollständige Reaktion" nur als eine Art von Mischung aus beiden Extremen auffassen muß, die erst durch die Übung stationär wird. Aber es handelt sich eben gerade darum, das richtige „Mischungsverhältnis" oder die Koordination der „sensorischen" und der „muskulären" Momente objektiv kontrollieren zu können. Selbstbeobachtung reicht dazu, wie gesagt, keinesfalls aus, so daß die V.-P. auch bei vermeintlich „sensorieller" Einstellung die Kontrollversuche bisweilen verfehlt. Auch muß es schon von vornherein als ein methodischer Nachteil betrachtet werden, wenn eine solche Einstellung nicht aus ihrem objektiv kontrollierbaren Effekt, sondern im wesentlichen, von zufälligen vorzeitigen Reaktionen abgesehen, nur in der Selbstbeobachtung kontrolliert

1) Vgl. S. 483, A. 2 a. a. O.

2) Unter diesem Gesichtspunkte suchte dann auch Alechsieff die verschiedenen Kategorien von Zeitwerten bei der astronomischen Registriermethode zu verstehen. (Reaktionszeiten bei Durchgangsbeobachtungen. Wundt, Phil. Stud. XVI, 1900, S. 1 ff.).

wird, da gerade die Selbstbeobachtung zeigt, daß wir im natürlichen Verlauf des seelischen Lebens die von äußeren Situationen abhängig gemachten Impulse am besten auch im ausschließlichen Hinblick auf die Reizlage, also ohne psychologische Reflexion, auslösen und nur hierbei die „richtigen" Maßverhältnisse am ungestörtesten treffen können. Endlich läßt sich aber der gerade bei der astronomischen Registriermethode entscheidende Gegensatz der wirklichen Reaktion auf den Durchgang und der antizipierenden Auslösung des Impulses niemals auf die Langesche Unterscheidung zurückführen. Vielmehr muß auch bei der ausdrücklichen oder unwillkürlichen Einstellung auf eine mit der Bisektion gleichzeitige Bewegung zwischen den sensoriellen Momenten, d. h. der Wahrnehmung des Sternes vor dem Faden einerseits und dem muskulären der Impulsvorbereitung andererseits, unterschieden werden, wenn auch, wie aus dem S. 489ff. Gesagten hervorging, der Zeitpunkt für die Aktualisierung der dritten, motorischen Partialleistung hier früher liegt als bei der eigentlichen Reaktion auf den Stromdurchgang. Auch hier können aber nur bestimmte objektive Effekte, nämlich vor allem die gemessenen Zeiten selbst, die in dem Verhältnis zum Wert Null hierbei eine besondere, unmittelbare Kontrolle bieten, und außerdem die S. 489 genannten Prüfungsversuche die wiederum allein eindeutige festzulegende optimale Koordination der motorischen zur sensoriellen Komponente herausfinden lassen, die die Bisektion wirklich so gut als möglich treffen läßt, wenn überhaupt einmal auf diese besondere Art registriert werden soll. Physiologische Hypothesen über die Natur der zum psychophysischen Prozesse der Reaktionshandlung gehörigen sensorisch-motorischen Erregungsleitung aber sind vielleicht noch verfrüht, wenn auch natürlich aus allem Bisherigen wenigstens so viel mit Sicherheit hervorgeht, daß sehr kleine oder sogar negative Zeiten bei antizipierender Tendenz, die nach L. Lange mitunter einfach als „muskulär" aufgefaßt zu werden pflegten, keinesfalls von rein reflektorischem Charakter zu sein brauchen, sondern einer sogar sehr intensiven Willküranstrengung entsprechen können.

81. Die systematische Erschwerung der Reaktionshandlung durch spezielle Aufgaben bezüglich ihrer einzelnen Komponenten.

a) Die Erhöhung der Auffassungsleistung bei Verabredung spezieller Reaktionsmotive und Auffassungsbedingungen.

Erst durch die präzise Festlegung unseres Gegenstandes, wonach immer nur das Zeitminimum gesucht wird, in welchem eine bestimmte Reaktionsaufgabe eben noch ohne Verfehlung eines zufällig eingestreuten Kontrollversuches der beschriebenen Art gelöst werden kann, sind aber nun auch alle jene Spezialaufgaben bezw. die bei ihnen gefundenen Reaktionszeiten eindeutig bestimmt, bei denen die Instruktion hinsichtlich einer (oder mehrerer) der drei oben genannten Partialleistungen in irgendeiner Weise erschwert wird. Seit Donders' erstmaligen Versuchen in dieser Richtung[1]) wurde zunächst einmal das entscheidende

1) Vgl. S. 487.

Merkmal des Reaktionsmotives so speziell verabredet, daß es zu seiner Wiedererkennung erst einer gewissen geistigen Anstrengung bedurfte. Zweitens kam man später in anderem Zusammenhange darauf, die Reaktionsbewegung zu komplizieren, und drittens wurden endlich ebenfalls bereits von Donders (a. a. O.) gleichzeitig mehrere Zuordnungen verabredet, also je nach dem tatsächlich auftretenden Reiz eine verschiedene Reaktionsbewegung verlangt. Es ist klar, daß den einzelnen Graden einer solchen Erschwerung der Aufgabe bei gleicher Übung nur dann eine stetige Vergrößerung der Reaktionszeit parallel gehen kann, wenn die Instruktion auch wirklich befolgt wird, wenn also etwa die Reaktion nicht statt nur auf das spezielle Merkmal auch auf jeden ähnlichen Reiz hin erfolgt, und wenn man sich speziell bei einer schwierigeren motorischen Leistung nicht einfach zu einer geringeren Aufmerksamkeit auf das Reizmotiv verleiten läßt, wie sie ebenfalls einen Kontrollversuch verfehlen ließe.

Was zunächst die Erschwerung der Motivauffassung anlangt, so ergibt sich eine solche nach Wundt z. B. bei Annäherung des Reizes an die Schwelle oder bei Störungsreizen in unmittelbarer zeitlicher Nähe des eigentlichen Reizmotives [1]). Mit der S. 323 geschilderten Anordnung, mittelst deren zunächst der Einfluß bestimmter Aufmerksamkeitsverteilungen innerhalb des Sehfeldes auf die Schwelle momentaner punktueller Aufhellungen untersucht wurde, prüfte ich mit A. Kästner 1904 auch, wieweit die Zeit der Reaktion auf übermerkliche, überall gleich intensive Aufhellungen der genannten Art von ganz entsprechenden Einstellungen der Aufmerksamkeit modifiziert werden könne [2]). Hierbei war denn auch zum ersten Male die hier überall geforderte Kontrolle der Reaktion auf den Reiz durch gelegentliches Ausbleiben desselben mit Erfolg systematisch durchgeführt worden, wie es besonders bei einer solchen Erschwerung der Auffassungsbedingungen zur Sicherung einer konstanten Einstellung unerläßlich erscheint.

Die Komplikationen durch die inhaltliche Spezialisierung des Reaktionsmotives wurden nach Donders' mehrmals genannten Versuchen dieser Art (s. S. 487) noch öfter mit der nämlichen Einstellung vollzogen [3]), bei der der Reagent sich gleichzeitig die anderen Reizmöglichkeiten vergegenwärtigte, auf die er nicht reagieren sollte, und diese auch relativ häufig auftraten, wodurch die Zeit etwas länger als bei Befolgung des S. 488 genannten Prinzips ausfallen muß, falls wirklich, was allerdings nicht immer erreicht wurde, alle diese Kontrollversuche gelingen. Wundt führte dann auch Erkennungs- und Unterscheidungsreaktionen aus, bei denen er den Impuls erst nach der Apperzeption des Erkennungs- oder Unterscheidungsprozesses auslöste, also gewissermaßen auf einen Gegenstand der Selbstbeobachtung reagierte [4]). Wenn aber nun hierbei auch die vorzeitigen

1) Wundt, Grundzüge der physiol. Psychol. III ^{6}, 1911, S. 415ff.

2) A. Kästner und W. Wirth, Die Bestimmung der Aufmerksamkeitsverteilung innerhalb des Sehfeldes mit Hilfe von Reaktionsversuchen, Wundts Psychol. Stud. III, 1907, S. 361 u. IV, S. 139.

3) v. Kries und Auerbach, Die Zeitdauer einfachster psychischer Vorgänge, Arch. f. Anat. u. Physiol., Phys. Abt. 1877, S. 297.

4) Wundt, Grundz. der Physiol. Psychol. III ^{6}, 1911, S. 428f.

Reaktionen sicher vermieden werden, bei deren Vorkommen auch die Kontrollversuche mißlingen würden, so fallen doch die Zeiten durch das Dazwischentreten einer sogar ziemlich schwierigen Reflexion länger aus, als es bei ausschließlicher Konzentration auf das spezielle Merkmal des Reizmotives zur korrekten Erkennungsreaktion erforderlich wäre[1]. Nach einem Plane, den ich im Zusammenhange mit meiner oben genannten Arbeit entwarf, hat aber in neuester Zeit G. Deuchler[2] in dem ersten Teil seiner im übrigen auch selbständig erweiterten Untersuchung die Reaktionen auf allgemeinere und auf speziellere Reizmerkmale wieder systematisch kontrolliert. Es waren z. B. die Zeiten von Reaktionen auf das Auftreten eines Sinnesreizes überhaupt (Licht-, Schall- oder Tastreiz) mit den Zeiten bei Reaktion auf bestimmte Sinnesgebiete zu vergleichen. Hierbei durfte also bei jener Einstellung wiederum der gelegentliche Ausfall jeglichen Reizes überhaupt, bei dieser dagegen das Auftreten eines disparaten, in der betreffenden Reihe nicht als Motiv verabredeten Reizes keine Reaktion auslösen.

Auch bei den Reaktionen auf Sterndurchgänge ist das Reizmotiv ein sehr spezieller Vorgang, so daß die eigentliche Reaktion nach Unterscheidung der Bisektion von der nächsten zeitlichen Umgebung, wie schon S. Exner hervorhob, zunächst ungleich schwieriger ist als die Reaktion auf Momentanreize. Doch lassen sich auch hier verschiedene Grade der Erkennungsleistung abstufen, wenn man das Motiv nicht auf die Passierung des bei Ruhelage des Sternes eben noch vom Faden unterscheidbaren Standortes einschränkt, sondern bei der Kontrolle damit zufrieden ist, daß der Reagent beim Anhalten des künstlichen Sternes in einer bestimmten Entfernung des Sternes vom Faden den Impuls noch zurückzuhalten vermag.

Bezüglich der Reizapparate ist den früher genannten Hilfsmitteln für die sinnesphysiologische Analyse und die Untersuchung der höheren psychischen Vorgänge nichts weiter hinzuzufügen, zumal bei jenen solche Reaktionen auf speziellere Merkmale auch schon mehrmals als Mittel erwähnt wurden, über die zeitlichen Verhältnisse des Ablaufes der Sinneserregung Aufschluß zu geben. Es handelt sich hierbei überall zunächst einmal darum, daß mit dem Auftreten des Reizes genau gleichzeitig ein Kontakt geschlossen oder geöffnet wird, um auf den zeitmessenden Apparat einzuwirken. Je nach der Wahl des letzteren bezw. seiner Verwendungsform wird dies nämlich, wie unten ausführlicher beschrieben ist, durch eine Stromschließung oder -öffnung erreicht werden. Außerdem muß dann nach dem früher Gesagten das verabredete Reaktionsmotiv völlig unwissentlich in jedem Versuche durch bestimmte Kontroll- oder Prüfungsreize ersetzt werden können. Die Prüfung durch Reizausfall ist natürlich stets ohne weiteres möglich. Besondere Kontrollreize erfordern je nach ihrer Zugehörigkeit zum nämlichen oder zu einem anderen Sinnesgebiet nur geringfügige Zusätze zu der Anordnung oder aber ähnliche Erweiterungen, wie sie bei der Untersuchung der Aufmerksamkeitsverteilung in verschiedenen Sinnesgebieten (S. 139) ausführlich erörtert sind (vgl. die S. 484 genannten Arbeiten von A. Kästner

1) Vgl. auch v. Kries, Über Unterscheidungszeiten, Vierteljahrsschrift f. wiss. Philos. XI, 1887, S. 10.

2) Beiträge zur Erforschung der Reaktionsformen, I. Abh. Wundt, Psychol. Stud. IV, S. 358ff., 1908, und besonders II. Abh. ebenda V, 1909, S. 163.

und Wirth, Deuchler u. a.). Bei Günthers Kontrollen der Reaktion auf Sterndurchgänge war eine mit weißem Papier überzogene Trommel, auf welcher der „Stern" als feiner schwarzer Strich angebracht war[1]), auf die Achse eines Kymographions so aufgesetzt, daß sie von der Achse und einer mit dieser fest verbundenen Platte nur durch Reibung mitgenommen wurde. Mit der Achse war ein Hebel fest verbunden, der einen Kontakt genau im Moment der Bisektion öffnete. Für die Kontrollversuche war nun an dieser Trommel außen eine Nase angesetzt, die durch einen vom Zimmer des Experimentators aus bedienten elektromagnetischen Hebel an einer bestimmten Stelle aufgehalten werden konnte, während die Kymographionachse weiter

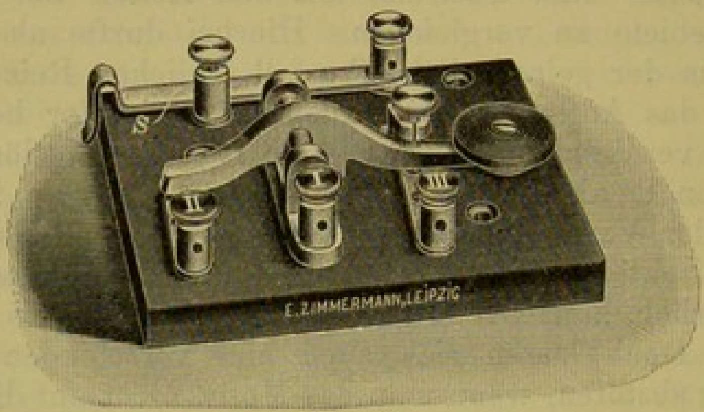


Fig. 53.
Einfacher Reaktionstaster.

lief und die Trommel nach einer weiteren Kontaktschließung seitens der V.-P. von selbst[2]) nach Erreichung der alten Stellung zum Auslöserhebel wieder richtig mitnahm.

b) Die Verabredung besonderer motorischer Leistungen.

Die Leichtigkeit der motorischen Seite hängt zunächst von der Muskelgruppe ab, die so schnell als möglich isoliert in Tätigkeit treten soll. Hierbei kommt in Betracht, daß die V.-P. leichter gewisse umfassendere Bewegungen z. B. der ganzen Hand mitsamt des Unterarmes ausführt, wenn eine große Schnelligkeit erzielt werden soll. Dies ist denn auch die gewöhnliche Reaktionsweise, wenn besondere motorische Komplikationen vermieden werden sollen. Man drückt also etwa mit dem Zeigefinger oder Daumen bei bequemer Auflagerung des Unterarmes und des Handballens auf den Knopf eines federnden Tasters (Fig. 53) bis zum Kontaktschluß (zwischen I und III bei Fig. 53) und fährt mit der ganzen Hand rasch zurück. Will man jedoch mehrere Reaktionsbewegungen für verschiedene gleichzeitig gültige Zuordnungen zur Verfügung haben, wie es bei den unten genannten disjunktiven Reaktionen erforderlich ist, so muß man schon zu den differenzierteren Be-

1) a. S. 484, A. 1 a. O. Hirsch hatte seinerzeit (a. S. 485 a. O.) ein großes, an einer Stelle durchbohrtes Pendel vor dem Lichte des Meridianzeichens der Sternwarte vorbeischwingen lassen.

2) Aus den S. 488 genannten Gründen ist es wichtig, daß die V.-P. durch die Kontrollversuche möglichst wenig Störung erleidet.

wegungen einzelner Finger wie beim Klavierspielen greifen. Hierzu braucht man bei einer sonst gleichen Reaktionsweise die beiden Taster Fig. 54, das verbesserte „psychophysische Klavier" J. Merkels[1]), das einen der zehn Finger bei möglichster Ruhelage der übrigen zu einer registrierenden Unterbrechung des Stromkreises für die elektromagnetische Zeitmessung verwenden läßt. Um stets die „einfachen" Reaktionen mit solchen bei „mehrfachen Zuordnungen" vergleichen zu können, wäre es unter Umständen vorteilhaft, von vornherein auch bei den einfachen Tastern wie Fig. 53 solche Reaktionsbewegungen einzuüben, wie sie am Klaviertaster auszuführen sind.

Als motorische Komplikation wird natürlich zunächst auch jede Verwendung von Muskelgruppen empfunden, die an die Reaktionsleistung oder

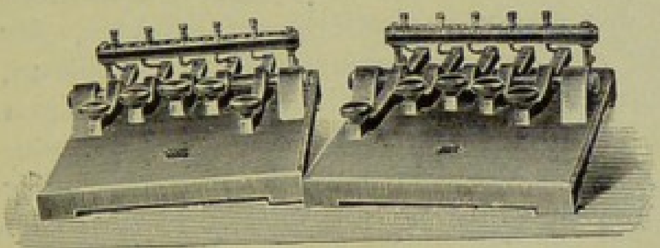


Fig. 54.
Zehnfacher Reaktionsapparat (sog. Klaviertaster).

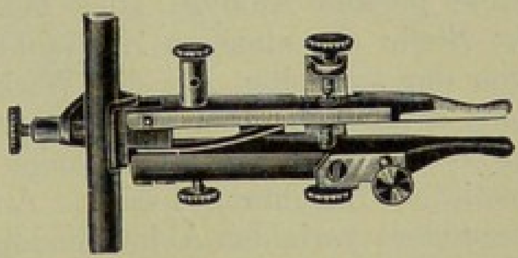


Fig. 55.
Lippenschlüssel.

wenigstens an den hierbei verlangten Kraftaufwand nicht gewöhnt sind, wie beim Arbeiten mit dem Lippenschlüssel[2]), der zu den unten genannten Sprachreaktionen diente (s. Fig. 55). Ebenso wirkt jede Unannehmlichkeit erschwerend, die beim „Lidschlüssel"[3]) kaum völlig auszuschließen ist. Dagegen sind vor allem auch die Zähne zur Überwindung größerer Apparatwiderstände zu gebrauchen, weshalb sie auch schon von Helmholtz (1850) neben der Hand beigezogen wurden (s. S. 482) und auch jetzt noch gelegentlich zur Reaktion mittelst eines besonderen „Zahnschlüssels"[4]) verwendet werden. Freilich ist diese spezielle Art ihrer Tätigkeit auch hier immerhin etwas Ungeläufiges.

Eine interessante Variation der Reaktionsbewegung hat zum ersten Male Orchansky auf Anregung von Gad versucht, indem er durch willkürliches Aufhören einer im Vorbereitungsstadium hergestellten Muskelspannung reagieren ließ[5]). Er wählte die Kontraktion des M. masseter jenseits des Grades, von dem an die Kieferpresse beginnt, damit die

1) J. Merkel, Die zeitlichen Verhältnisse der Willenstätigkeit, Wundt, Phil. Stud. II, 1885, S. 73.

2) Cattell, a. S. 483, A. 3 a. O. III, S. 312.

3) Schon S. Exner hatte in diesem Zusammenhange Lidbewegungen, allerdings nur in Reflexversuchen, registriert. A. S. 480 A. 2 a. O. II Über Reflexzeit und Rückenmarksleitung, ebenda, Bd. VIII, S. 526. Über die Reaktion mittelst Augenbewegungen vgl. S. 327, A. 2.

4) Vgl. den Katalog von Mechaniker E. Zimmermann, Liste 20, S. 92. (Zahnschlüssel nach Meumann.)

5) Zur Lehre von der Willenstätigkeit, Arch. f. Anat. und Physiol., Phys. Abt. 1889, S. 173.

registrierte Aufhebung des Zustandes nicht von der Kontraktion der Antagonisten unterstützt werden könne. Hierbei wurde der Seitendruck des Muskelbauches auf einen in den Mund eingeführten Apparat, eine „Masseterzange“, so übertragen, daß man je nach der Einstellung der Kontakte bald den Beginn der Kontraktion des Muskels, bald auch den Zeitpunkt der Erschlaffung bestimmen konnte (vgl. a. a. O. S. 179f.). Der psychologische Vorgang des willkürlichen Aufhörens des Impulses kann freilich auch in diesem Falle mit einem neuen, auf die Antagonisten gerichteten Impulse zusammenhängen, wenn auch deren äußerer Effekt für die erste Bewegung der Zange nicht in Frage kommt.

Bei den bisher genannten Bewegungen arbeiten, wie schon gesagt, stets mehr oder weniger Muskeln in einer natürlichen Koordination zusammen. Eine genaue Analyse aller hierbei beteiligten Muskelpartien würde aber an Stelle des einzigen Zeitpunktes des ersten registrierbaren Effektes, der von der speziellen Art der Wirkung auf den Reaktionstaster u. ä. abhängt, eine zeitlich differenzierte Entwicklung setzen lassen, die auch von sonstigen psychologischen Nebenumständen abhängt und somit eine besondere symptomatische Bedeutung besitzt. Am deutlichsten, wenn auch zugleich unter besonders variablen Ablaufsbedingungen, ist dies bei künstlichen motorischen Komplexen zu verfolgen, wobei man möglichst gleichzeitig mit mehreren, an sich isoliert beherrschten Bewegungen reagieren läßt. So sind von O. Külpe[1]) und in neuester Zeit von P. Salow[2]) Versuche angestellt worden, bei denen die V.-P. möglichst gleichzeitig mit beiden Händen reagieren sollte. Abgesehen von der Feststellung bestimmter Zeitdifferenzen zwischen rechts und links ist aber dabei zunächst auch wieder von Interesse, wie die mittlere Reaktionszeit im ganzen von dieser Komplikation der Leistung modifiziert wird.

Eine besondere psychologische Bedeutung hat natürlich die sprachliche Lautreaktion. Denn sie dient nicht nur zur Messung der Zeit einer Reaktion mit einer „nicht adäquaten“ (vgl. a. S. 357, A. 4 a. O. S. 280) Lautäußerung, die rein als motorischer Vorgang wie eine Handbewegung einem bestimmten Reiz zugeordnet wird, sowie zur Bestimmung der Zeit des „adäquaten“, so schnell als möglich dem Reiz nachfolgenden Ablesens oder Nachsprechens, sondern gestattet vor allem auch die Zeitverhältnisse aller höheren geistigen Prozesse ohne Verabredung neuer Zuordnungen zu den Erlebnissen zu untersuchen. Deshalb begegnete uns die Lautreaktion ja auch bereits bei der Bestimmung der Reproduktions- und Assoziationszeit innerhalb der Reproduktionsmethoden (s. S. 404). Sobald es sich freilich darum handelt, den ersten Moment einer beliebigen sprachlichen Reaktion zu erfassen, sind die feinsten Registriermethoden der Phonetik gerade ausreichend (Vgl. III. Bd., 6. Abt.). Der Lippen- und der sogleich zu erwähnende Schallschlüssel gehören jedenfalls nicht zu diesen. Auch Donders bediente sich bei seinen erstmaligen Versuchen mit Lautreaktionen eines Phonautographen von Scott-König oder eines von König für ihn besonders gefertigten ähnlichen

1) Über die Gleichzeitigkeit und Ungleichzeitigkeit von Bewegungen, Wundt, Phil. Stud. VI, 1891, S. 514 u. VII, 1892, S. 147ff.

2) In Fortsetzung seiner Untersuchungen zur uni- und bilateren Reaktion, Wundt, Psychol. Stud. VII, 1. u. 2. H., 1911, S. 1.

Sprachzeichners für Vokalschwingungen (a. S. 480 a. O. S. 626). Da die Reaktionszeit, wie erwähnt, von der speziellen Qualität der Bewegungsäußerung abhängt, so sind jedenfalls die Zeiten bei kräftigeren Anlauten, die von einfacheren Apparaten zu registrieren sind, zunächst nur unter sich vergleichbar. Immerhin lassen sich auch mit solchen Hilfsmitteln bei dieser Beschränkung bezüglich der Anlaute bereits viele psychologische Nebeneinflüsse untersuchen, z. B. der Unterschied zwischen den Reaktionszeiten des

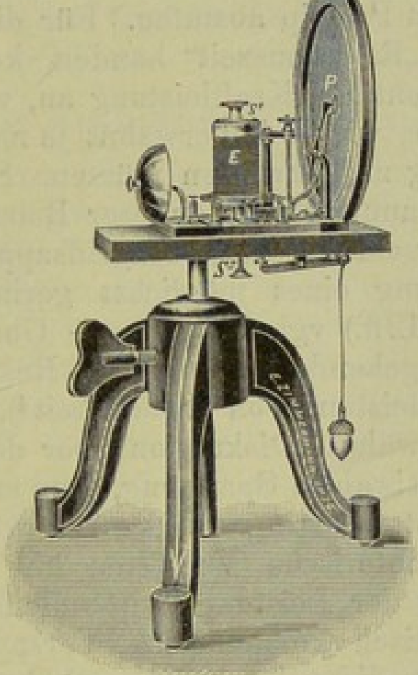


Fig. 56.
Schallschlüssel nach E. Römer.

Lesens einzelner Buchstaben und ganzer Worte, die Einflüsse einer speziellen Einübung u. ä. Hierzu sind vor allem die mit dem Explosivlaut p beginnenden Lautäußerungen zu verwenden, die den Kontakt innerhalb eines sog. „Schallschlüssels" unterbrechen können, wie ihn Cattell[1]) zuerst konstruierte. — Sein Modell bestand in einem Schalltrichter, dessen Boden aus Schafleder durch den Luftstrom beim Sprechen in Vibration geriet und dadurch einen Kontakt inkonstant werden ließ. Bei dessen erster Unterbrechung wurde ein Relais in Bewegung gesetzt, das dann je nachdem eine Dauerschließung oder Öffnung mit einer bestimmbaren Latenzzeit herstellte. Gegenwärtig ist unter mehreren neueren Modellen vor allem der empfindlichere Römersche[2]) Schallschlüssel in Gebrauch (Fig. 56), der sogleich mit dem hierbei stets erforderlichen Relais kombiniert ist. Der Schalltrichter wirkt bei ihm auf eine Membran aus ganz dünnem Fournierholz oder Glimmer, an der zunächst ebenfalls ein sehr labiler Kontakt P durch Ansetzung eines leichten Hebelchens an ein Platinblättchen hergestellt ist. Der Kontakt P liegt im

1) A. S. 497, A. 2 a. O., S. 313f.

2) Beiträge zur Bestimmung zusammengesetzter Reaktionszeiten. (Kraepelins Psychol. Arbeiten Bd. I 1896, S. 566.)

Stromkreis des Elektromagneten E, an dessen unterem Pol ein Hebel angezogen wird. Dieser bewegt sich zwischen den beiden durch die Schrauben S_1 und S_2 regulierten Platinspitzen. Da er nun bei Stromunterbrechung unter gleichzeitiger Erregung der Kontrollglocke nach unten fällt, ohne wieder zurückgeholt werden zu können, so öffnet oder schließt er den Kontakt bei der oberen oder unteren Platinspitze. Durch Zug an der Schnur wird der Kontakthebel wieder an den Pol des Elektromagneten emporgehoben[1]).

Unter Beibehaltung der nämlichen Bewegungsfreiheiten läßt sich die motorische Arbeit bei der Reaktion natürlich weiterhin nach dem bei der Ergographie erwähnten Prinzip abstufen. Für die Reaktion als solche, bei der es sich nur um die „Reaktionszeit" handelt, kommt es dabei allerdings nur auf den ersten Moment der Kraftleistung an, wenngleich auch die später auftretenden Widerstände, wie S. 479 erwähnt, je nach dem Grade ihrer Antizipation auf die Leistung zurückwirken müssen. So untersuchte Scripture den Einfluß der Federspannung und anderer Belastungsweisen auf die Reaktionszeit, wobei er verschiedenartige Angriffsapparate konstruierte[2]). Bezüglich seiner Empfehlung eines möglichst geringen Apparatwiderstandes (Scripture, a. a. O. S. 12ff.) vgl. S. 489[3]). — Überall ist natürlich die der Reaktionsleistung vorhergehende Haltung des Reagenten und eine eventuell mit ihr verbundene Kraftleistung von Wichtigkeit[4]). In dieser Richtung liegt auch die schon S. 462 erwähnte Diskussion über den Einfluß einer kurz vorhergehenden antagonistischen Spannung, dem auch Orchansky mit dem S. 498 erwähnten Apparat nachging. Jedenfalls würde aber eine besondere Instruktion für dieses motorische Verhalten im Vorstadium nur als eine motorische Komplikation der Leistung empfunden worden, also z. B. auch eine zunächst antagonistisch kompensierte Vorspannung der zur Reaktion berufenen Muskeln selbst, die gelegentlich auf Grund eines (von L. Lange nicht verschuldeten) Mißverständnisses der „muskulären" Einstellung (s. S. 492) vorgenommen wurde[5]). Selbstverständlich gilt dies dann in viel höherem

1) Für die insbesondere an amerikanischen psychologischen Instituten ausführlich variierten Reaktionen mit anderen komplexen Bewegungsformen kann hier nur ganz allgemein auf die Fachliteratur, insbesondere American Journal of Psychology und Psychological Review verwiesen werden. Erwähnt sei hier noch der den Sprachreaktionen wieder besonders nahe stehende Versuch, mit Schreibbewegungen zu reagieren. (Vgl. F. N. Freeman, Preliminary Experiments on writing reactions, Psych. Rev. Mon. Suppl. Vol. VIII, 3, 1907, S. 301ff.)

2) Researches on reaction-time. Stud. from Yale Psychol. Lab. IV, 1896, S. 12ff. Schon früher hatten Féré, Compt. rend. de la Soc. de Biol. 1892, S. 432 und Delabarre, Logan and Reed (Psych. Rev. IV, 1897, S. 615) ähnliche Versuche angestellt.

3) Dessoir*) suchte mit einem recht leicht beweglichen Fingerschlüssel nach Dumreicher**) jeglichen Vorteil einer besonderen „muskulären" Einstellung überhaupt (s. S. 492) zu beseitigen.

4) Wislicenus (Über den absoluten persönlichen Fehler, Leipzig 1888) und Münsterberg (Beiträge zur exper. Psychologie 4, IX, 1892) untersuchten den auch für die Praxis der Registriermethode wichtigen Einfluß verschiedener Lagen des Reagenten.

5) Vgl. z. B. einen besonders typischen Fall bei Th. Flournoy, Temps de réaction aux impressions auditives, Arch. des sc. physiques et naturelles, 3me p. T. XXVII, 1892, S. 575ff.

*) Über den Hautsinn, Arch. f. Physiol. 1892, S. 309.

**) Zur Messung der Reaktionszeit, Dissertation, Straßburg, 1889, S. 32.

Grade für alle näheren Bestimmungen, die sich auf den weiteren Verlauf der Bewegung nach ihrem für die Abgrenzung der Reaktionszeit allein maßgebenden Anfange beziehen. Hierauf wurde schon oben beim Beginne der Methodik dieser Versuche hingewiesen. So haben Awramoff[1]) und Specht[2]) Züge am Ergographen, bei denen stets zugleich eine möglichst große Hebung erstrebt wird, als Reaktionsleistung behandelt. Moore[3]) schrieb dagegen bei Reaktion mit einer Unterarmbewegung eine bestimmte Mindestdrehung (20°) vor, wobei außer der Reaktionszeit zugleich die Geschwindigkeit dieser ganzen Bewegung untersucht wurde, um eine eventuelle Beziehung zwischen ihr und der Reaktionszeit aufzufinden.

c) Disjunktive Reaktionen.

Als dritte und wirksamste Form der Komplikation begegnen uns die Reaktionen nach Verabredung mehrerer Zuordnungen, d. h. verschiedener Bewegungen für verschiedene Reize, von denen die V.-P. jeden mit der nämlichen subjektiven Wahrscheinlichkeit zu erwarten hat. Es sind dies die schon S. 488 erwähnten disjunktiven Reaktionen, die ebenfalls Donders bei seinem Versuch zur systematischen Abstufung solcher Komplikationen der Reaktionshandlung zuerst ausführen ließ[4]). Zur korrekten Lösung der Aufgabe hat sich also die V.-P. hier an Stelle der einzigen Zuordnung bei der „einfachen“ Reaktion (s. S. 487f. u. 493f.), das ganze System der Zuordnungen so sicher einzuprägen, daß sie sich beim Auftreten eines der verabredeten Reize womöglich keinen Augenblick im Zweifel darüber befindet, welche Bewegung für diesen Fall verabredet worden ist. Dabei wäre es jedenfalls im allgemeinen zwecklos, auf gut Glück den Impuls zu einer bestimmten Reaktionsbewegung so weit vorzubereiten, wie es bei der einfachen Reaktion zu einer wesentlichen Verkürzung der tatsächlichen Ausführung dieser Bewegung führt. Es ist höchstens insofern ein gewisses Analogon hierzu möglich, als etwa sämtliche Reaktionsmöglichkeiten, wie z. B. die Fingerbewegungen bei 10-facher Zuordnung am Klaviertaster, eine gemeinsame Hauptrichtung der Tätigkeit in sich schließen. Im übrigen ist einfach der Reiz möglichst schnell aufzufassen und im Anschluß daran die

1) D. Awramoff, Arbeit und Rhythmus, Wundt, Phil. Stud. XVIII, 1903, S. 515.

2) W. Specht, Intervall und Arbeit. Experimentelle Untersuchungen über den Einfluß des durch akustische Reize begrenzten Intervalls auf den zeitlichen und formalen Verlauf körperlicher Arbeitsverrichtung. Arch. f. d. ges. Psychologie III, 1904, S. 1.

3) Th. V. Moore, A Study in reaction time and movement, Psych. Rev., Ser. of Monograph Suppl. Vol. VI, 1, (Whole No. 24) 1904, enthält auch eine sorgfältige Zusammenstellung der früheren Literatur, die beim Studium der Beziehungen der Ergographie bzw. aller in Kap. 18 behandelten Methoden zu den Reaktionsversuchen in Betracht zu ziehen ist.

4) A. S. 480, A. 1 a. O. Donders selbst bezeichnet sie als „differentielle Reaktionen“ gegenüber der „einfachen Reaktion“, bei der nur eine einzige Zuordnung in Frage kommt (a. a. O. S. 666). Doch liegt bereits in seinem ebenfalls häufig gebrauchten Ausdruck, daß hierbei ein „Dilemma“ gestellt sei, der Hinweis auf das „disjunktive“ Urteil enthalten, das der Erwartung und Bereitschaft der V.-P. im Stadium der Vorbereitung bis zum Eintritt des Reizes zugrunde liegt, an Stelle des „kategorischen“: „Es wird der (einzige) verabredete Reiz auftreten“ bei der „einfachen“ Reaktion.

ihm zugeordnete Bewegungsart zu vergegenwärtigen, worauf sich alles in einem Zuge so weiterentwickeln kann, wie es sich auch bei der einfachen Reaktion, nur in zwei Etappen der etwas länger aushaltenden Bereitschaft und der Ausführung selbst zerlegt, abspielen würde[1]).

Unter der Voraussetzung, daß alle Zuordnungen gleich neu und unter sich äquivalent sind, gewinnt zunächst die Frage nach dem Einfluß der Zahl der gleichzeitig zu berücksichtigenden Zuordnungen ein besonderes Interesse. Doch kommt es hierbei stets darauf an, wie weit die Zuordnungen wirklich gleichmäßig eingeprägt sind und wie man sich dieselben unmittelbar vor dem Auftreten des Reizes vergegenwärtigt. Schon bei nur drei neuen Zuordnungen, z. B. je eines von drei optischen Eindrücken zu je einem von drei Fingern[2]), kann von einer auch nur einigermaßen gleichmäßigen und klaren Simultanvorstellung des verabredeten Systems keine Rede mehr sein. In der Tat muß man bei komplizierteren Systemen, wenn man nicht geradezu Fehler einüben will, den Versuchen einer eigentlichen „Reaktion", die sich auch hier so schnell als möglich dem Reiz anschließen soll, die Einprägung der Zuordnungen ohne die Forderung der Minimalzeit, aber mit ausdrücklicher Forderung der Richtigkeit voranschicken.

Nach einer solchen sicheren Einprägung hat aber dann natürlich auch die Vergegenwärtigung unmittelbar vor dem Reiz eine viel geringere Bedeutung, so daß man schließlich auch schnell und richtig reagiert, ohne kurz vorher an das System gedacht zu haben. Daher sind hier die Ergebnisse nicht leicht zu deuten, wenn nicht alle Entwickelungsbedingungen sorgfältig angegeben werden. Auf keinen Fall ist aber mit den gefundenen Zeitwerten etwas anzufangen, wenn die mit der Absicht der größtmöglichen Schnelligkeit vollzogenen (ungestörten) Hauptversuche gar nicht durchweg richtig sind, wie es leider bei sehr vielen Untersuchungen dieser Art der Fall war. Ist jedoch die Voraussetzung der Richtigkeit erfüllt, so tragen die Resultate natürlich bereits eine gewisse Kontrolle für die

1) Keinesfalls aber liegt eine „Wahl" im gewöhnlichen Sinne des Wortes vor. Nachdem Donders gelegentlich dieses Wort für die Mehrleistung gebraucht, die bei den disjunktiven Reaktionen nach der Reizauffassung hinzutreten muß (S. 672), hat Wundt den Namen der „Wahlreaktion" für diese Versuche zur allgemeinen Anerkennung gebracht. Man sollte aber, wie gesagt, von diesem Ausdruck wieder zurückkommen, da er eine falsche Vorstellung von den bei dem Vorgang beteiligten psychologischen Prozessen erwecken kann. Einen „Wahlakt" erlebt höchstens der Experimentator, wenn er bei der Ausarbeitung des Versuchsplanes die Zuordnungen zusammenstellt. Die V.-P. würde ihn höchstens durchmachen, falls sie mit sich noch im Zweifel wäre, ob sie sich der Instruktion im ganzen oder in einzelnen Punkten wirklich unterordnen wolle. Es handelt sich aber auch bei mehreren, gleichzeitig gültigen Zuordnungen nur noch um die Vergegenwärtigung der speziellen Zuordnung und die Auslösung eines ganz bestimmten Impulses im Anschluß an ein sicheres Urteil darüber, welche der verabredeten Eventualitäten augenblicklich tatsächlich vorliegt. Somit ist für diese Reaktionen im Unterschiede von der einfachen auch nur dies charakteristisch, daß sich bei ihnen dieses rein intellektuelle Urteil erst aus einer Disjunktion (von bestimmtem Grade der Gliederung) herausarbeiten muß, die bei der „einfachen" Reaktion trotz der drohenden Kontrollversuche ausdrücklich zu vermeiden ist, und daß die Entwickelung der Impulse dadurch entsprechend verzögert ist. Vgl. Kästner u. Wirth a. S. 494 a. O. III, S. 377 u. IV, S. 165, und Exp. Anal. der Bew.-Phän. S. 406, 419 u. 433.

2) Über solche Zuordnungen von Ziffern zu den Fingern hat J. Merkel wohl das umfassendste Material gesammelt, das auf diesem Gebiete vorhanden ist (a. S. 497, A. 1 a. O.).

korrekte Wirksamkeit des verabredeten Motivationszusammenhanges in sich, da die V.-P. so, wie sie reagierte, eben nur auf Grund der Verabredung verfahren konnte. Allerdings wäre nun weiterhin auch wiederum zuzusehen (bzw. von vorne herein besonders zu verabreden), wie weit auch Reize, die einem verabredeten Motiv nur ähnlich sind, ebenfalls die diesem zugeordnete Bewegung auslösen können. Dies ist wiederum nur durch besondere Kontrollversuche mit ähnlichen Reizen festzustellen. Doch müßte die V.-P. auch hier ausdrücklich von ihrer Möglichkeit abstrahieren. Sonst wären ja die Zeiten nicht mehr auf das alte System von Zuordnungen zu beziehen, sondern auf ein neues, das um die Zuordnung der „aktiven Ruhe" zu einer ganzen Anzahl von Reizmöglichkeiten bereichert ist. Deren Vergegenwärtigung könnte insbesondere jener eventuellen Vorbereitung eines allen positiven Bewegungen gemeinsamen Richtungsmomentes entgegenarbeiten.

Die Einübung neuer Zuordnungen bis zu jener Sicherheit, die sie auch ohne jeweilige Rekapitulation vor dem Versuch richtig treffen läßt, gestattet zugleich die Entstehungsbedingungen der Koordinationen experimentell zu analysieren, welche die V.-P. als Ergebnisse früherer Erlernung fertig mitbringt. Andererseits können diese Fertigkeiten, z. B. das Lesen, unter der speziellen Voraussetzung, daß die Laute so schnell als möglich nach dem Erscheinen des Wortbildes ausgesprochen werden, auch ihrerseits sogleich zu interessanten Versuchen über disjunktive Reaktionen beigezogen werden[1]). Auch bei der Beantwortung der schon oben erwähnten Frage, inwieweit neue experimentelle Zuordnungen unter sich wirklich gleichwertig sind, ist stets ihr Verhältnis zu schon vorhandenen Dispositionen zu berücksichtigen, z. B. bei „gleichseitigen" oder „gekreuzten" Zuordnungen räumlich differenzierter Reizmotive.

Versuche mit Verabredung nicht völlig eindeutiger Zuordnungen.

Im übrigen hat man auch schon Wahlvorgänge im eigentlichen Sinne des Wortes experimentell ähnlich wie bei disjunktiven Reaktionen zu analysieren versucht, bei denen die Zuordnung der Bewegung zum Reiz durch die Verabredung noch nicht vollständig festgelegt, sondern in einem bestimmten Punkt der V.-P. freigestellt war. Über etwaige Gesetzmäßigkeiten bei freien Entscheidungen überhaupt hat bereits C. M. Hill[2]) mit Kindern Versuche angestellt, bei denen ihnen freigestellt wurde, nach einem rechten oder linken Objekt zu greifen. Es sollte festgestellt werden, ob die Aufmerksamkeitsrichtung oder die Enfernung der Objekte die Entscheidung in einem bestimmten Sinne beeinflusse. Im Zusammenhange mit disjunktiven Reaktionen hat dann vor allem N. Ach[3]) Versuche in zwei Gruppen angestellt, bei denen die Zeit vom Auftreten der Anregung des Wahlvorganges bis zu einer registrierenden Bewegung gemessen wurde. In der einen Versuchsreihe (Reaktionen ohne Zuordnung des Reizes) war übrigens der Anschluß an die disjunktiven Reaktionen ein besonders enger. Es ging die Verabredung voraus, auf x mit der rechten, auf r mit der linken Hand zu rea-

1) Vgl. u. a. Cattell, a. S. 483, A. 3 a. O. und Erdmann und Dodge a. S. 357, A. 4 a. O.
2) C. M. Hill. On choice. American Journal of Psych. IX, 4, 1898 S. 587.
3) Über die Willenstätigkeit und das Denken 1905, S. 161 ff.

gieren, während dann in Wirklichkeit rx oder xr auftraten. In der zweiten Gruppe (R. ohne Zuordnung der Tätigkeit) erschienen zwei Ziffern, und es stand der V.-P. frei, eine der vier Spezies darauf anzuwenden und darnach pe in den Schallschlüssel (s. S. 499) zu rufen. Versuche dieser letzeren Art fallen natürlich vollständig aus dem Rahmen der experimentell möglichst eindeutig festgelegten Versuche heraus, ähnlich wie die Analyse der intellektuellen Prozesse unter den nicht weiter kontrollierbaren, aus dem alltäglichen Leben mitgebrachten Voraussetzungen.

d) Die Deutung der Zeitverlängerung bei der erschwerten Reaktionshandlung.

(Kritik des Subtraktionsverfahrens.)

Ebenso, wie Helmholtz in seinen S. 482 erwähnten Versuchen durch die Subtraktion zweier Reaktionszeiten einen völlig auf die periphere Erregungsleitung entfallenden Zeitabschnitt abzugrenzen versucht hatte, wollte nun Donders auch die Zeit für die höheren psychischen Prozesse, nämlich die Dauer der „differentiellen Willensbestimmung" bei den disjunktiven Reaktionen und die Unterscheidungszeit bei den Erkennungs-Reaktionen auf spezielle Merkmale (s. S. 494) einfach dadurch bestimmen, daß er zunächst von der Zeit der disjunktiven Reaktion die Zeit der Erkennungsreaktion auf das entscheidende Merkmal des zugehörigen Reizmotives und dann von der letzteren die Zeit einer entsprechenden einfachen Reaktion abzog. Hierin ist ihm vor allem auch Wundt nachgefolgt. Nun hat aber schon Helmholtz (s. S. 483) es als nicht völlig erwiesen zugestanden, ob die Entwickelung des Impulses aus der Reizauffassung bei dem näheren und ferneren Reiz völlig gleich sei, und ähnliches gilt für die der Sinnesphysiologie zugehörige Methode, aus den Zeiten der Reaktion auf spezielle Merkmale, z. B. auf Temperatur, Farbe, Tonhöhe, den Zeitpunkt der Entstehung dieser Qualitäten im Laufe des Anstieges der Sinneserregung zu schließen. Die Zeitverlängerung der disjunktiven gegenüber jener Erkennungs-Reaktion aber kann deshalb nicht einfach auf die neu hinzutretenden Willensprozesse bezogen werden, weil man in diesen Erkennungs-Reaktionen wegen der einzigen Bewegungszuordnung zu allen wie bei der disjunktiven Reaktion gleich möglichen Reizmotiven gar niemals eine objektive Garantie dafür besitzt, ob bei ihnen wirklich nur auf das spezielle Merkmal reagiert wurde, das bei der Disjunktion entscheidend wird. Geschieht dies aber nicht, so ist natürlich auch die Erkennungsleistung eine viel geringere, als sie in der korrekten disjunktiven Reaktion enthalten ist. Wollte man dies aber durch die Selbstbeobachtung kontrollieren, wie Wundt, so würden solche Erkennungsreaktionen wieder Prozesse einschließen, die zur Erkennung der speziellen objektiven Reizmerkmale als solcher bei den disjunktiven Reaktionen nicht erforderlich sind (vgl. S. 495, A. 1). Ebenso ist aber wohl die Annahme unzulässig, daß bei der Reaktion auf ein spezielles, unter Umständen schwer zu erkennendes Merkmal die Impulsentwickelung die nämliche sei, wie bei der Reaktion auf einen deutlich übermerklichen Sinneseindruck überhaupt. Scheint doch auch schon das Ergebnis der Selbstbeobachtung darauf hinzuweisen, daß mit der zunehmenden Erschwerung der Reaktion stets auch der Ablauf alles übrigen beeinflußt werde.

Dem entspricht aber nun auch die in dieser Darstellung überall zum Ausdruck gebrachte Auffassung, daß mit diesen Erschwerungen einschließlich der disjunktiven Verabredungen eigentlich keine prinzipiell neuen Partialleistungen hinzutreten, sondern nur die drei in jeder korrekten Reaktion vorhandenen Momente unter besondere Ablaufsbedingungen gestellt sind. Somit dürfte aus zwei Reaktionszeiten an Stelle der Dauer einer einzelnen relativ selbständigen Unterscheidungs- oder Entschlußzeit eher der Faktor der Veränderung aller in Betracht kommenden Komponenten der Reaktionshandlung durch die Komplikation zu bestimmen sein, der in dem Quotienten aus den beiden Zeiten gegeben ist. Bei der Ableitung dieses Verhältniswertes, der zugleich an die Bestimmung der Veränderung einer Auffassungs- oder Vergleichsleistung durch komplizierende Nebenumstände nach Kap. 12 erinnert, ist also die Zeit der einfachen Reaktion auf den Reiz im allgemeinen gewissermaßen wieder als „Normalwert" aufgefaßt, von dem aus die Veränderung der Dauer aller einzelnen Komponenten durch eine Spezialleistung bezüglich der Motivauffassung, der Bewegung oder der Zuordnung zu beurteilen ist. So bestimmte ich mit A. Kästner diese verhältnismäßige Zeitverlängerung z. B. für einfache Reaktionen bei Verteilung der Aufmerksamkeit auf das Reizfeld, in dem die Motive auftraten, und für disjunktive Reaktionen unter Voraussetzung der besonderen Vergegenwärtigung bestimmter Zuordnungen unmittelbar vor dem Versuche (a. S. 483, A. 3 a. O.).

Wenn dagegen auf Prozesse reagiert wird, die sich von der auslösenden Wahrnehmung so deutlich als neue Akte unterscheiden, wie bei der Reaktion auf eine Assoziation an ein Wort, kommt die Änderung der Zeiten der Reizauffassung und der Impulsentwicklung im Vergleich zur Änderung der Assoziationszeit kaum in Betracht. Hier ließe sich also durch die Subtraktion der Zeit der einfachen Reaktion auf den reproduzierenden Reiz die Assoziationszeit eventuell wirklich herauslösen. Doch wurde schon bei den Gedächtnisversuchen S. 404 f. darauf hingewiesen, daß sich unter diesen Umständen eher Zweifel in der Richtung ergeben, ob nicht der Ablauf der Assoziation durch die Absicht, so schnell als möglich zu reagieren, wesentlich modifiziert sein könne. Für die weiteren Komplikationen der Reaktionsversuche durch Kombination der bisher genannten Leistungen und insbesondere durch fortlaufende Reaktionsarbeit kann hier wieder nur auf die psychologische Spezialliteratur im allgemeinen verwiesen werden.

82. Die Zeitmessung.

a) Vorbemerkungen.

Zur Zeitmessung verwendet man bei Reaktionsversuchen gegenwärtig, soweit die Mittel zur Verfügung stehen, entweder einen Chronographen, bei dem der Reiz und die Reaktionsbewegungen durch einzelne Marken auf einer schnell rotierenden Trommel registriert werden, oder ein Hippsches Chronoskop, bei dem die Zeigerachse in ein bereits im Gange befindliches Uhrwerk nur während der zu messenden Zeit eingeschaltet ist. Von beiden sind mehrere hinreichend genaue Systeme in Gebrauch. Das Anwendungsgebiet des Chronoskopes ist allerdings ein etwas beschränkteres; auch bleibt es hinsichtlich seiner Genauigkeit selbst bei den besten Modellen etwas hinter den besten Chronographen zurück und erfordert einen besonderen Kontrollapparat. Endlich läßt es überhaupt nur Zeiten von mindesten 30 σ noch mit voller Genauigkeit messen. Sucht man also z. B. bei der antizipierenden Einstellung den positiven oder negativen und dabei beliebig kleinen Zeitabstand zwischen dem Zielvorgang, dessen Zeitpunkt die V.-P. zu treffen sucht, und seiner Registrierung, so bedient man sich am einfachsten eines Chronographen, bei welchem beliebig kleine positive oder negative Zeitdifferenzen zwischen den Marken für diese beiden Vorgänge bestimmt werden können. Doch vermöchte man diese spezielle Aufgabe auch mit einem einzigen Chronoskop immerhin noch einigermaßen genau zu lösen, indem man die Zeiger der Uhr anstatt gleichzeitig mit dem Zielvorgang selbst immer schon um eine konstante und möglichst genau bestimmte Zeitstrecke vorher in Gang bringt, die größer ist als der längste zu erwartende negative Zeitbestand der antizipierenden Bewegung. Dagegen erfordert die Registrierung mehrerer gleichzeitiger Reaktionsbewegungen, z. B. mit beiden Händen (s. S. 498), jedenfalls den bezüglich der Anzahl der Marken an sich unbeschränkten Chronographen, zumal auch mehrere gleichzeitig in Gang gesetzte Chronoskope die feinen Zeitunterschiede der einzelnen Reaktionsbewegungen nicht genau genug wiedergeben würden. Handelt es sich aber um die Messung der Zeit einer einzigen Reaktion im eigentlichen Sinne, die erst auf den Reiz hin erfolgt und daher im allgemeinen nicht unter ca. 0,1 Sek. sinkt, so wird das Chronoskop wegen seiner sofortigen Gebrauchsfertigkeit und der Bequemlichkeit der Zeitablesung bei längeren Untersuchungen dieser Art jederzeit unentbehrliche Dienste leisten.

Helmholtz' oben genannte Messungen von Reaktionszeiten wurden übrigens ebenso wie die ersten genauen Versuche über die Leitung im Froschnerven[1]) mittelst des ballistischen Galvanometers nach Pouillet ausgeführt, dessen Genauigkeit allerdings bei den Untersuchungen seines Erfinders 1844[2]) für artilleristische Zwecke, „durch einige Spezialitäten in der Ausführung erheblich beeinträchtigt" war, aber von Helmholtz selbst vor allem durch Anwendung des Spiegelgalvanometers auf $\frac{1}{10000}$ Sek. gebracht wurde[3]). Wie aus der S. 484, A. 1 genannten Arbeit von Günther zu ersehen ist, ließ sich dieses Prinzip, wonach bei kurzen Zeiten der Ausschlagswinkel der Magnetnadel der Dauer des Stromschlusses proportional ist, auch in einer im allgemeinen mit einem Hippschen Chronoskop arbeitenden Untersuchung von Reaktionen auf Sterndurchgänge (mit ausdrücklichem Verbot antizipierender Registrierbewegungen) wenigstens nebenbei

1) Vgl. II, 3. Abt. S. 481 (Garten, Literat. Nr. 82, § 2. (Helmholtz, Wissensch. Abh. II, 1883, S. 771 ff.)
2) Comptes rendus T. XIX, p. 1384. — Poggend. Ann. d. Physik LXIV, p. 452.
3) a. S. 482, A. 1 a. O. S. 872.

verwenden, um auch kleine positive oder negative Zeiten unter 30 σ bei etwaiger unwillkürlicher antizipierender Registrierung schätzen zu können[1]).

b) Der Chronograph.

Während Hirsch und Plantamour bei ihren S. 485, A. 2 genannten erstmaligen Messungen der Reaktionszeiten zu astronomischen Zwecken das Hippsche Chronoskop einführten, bedienten sich die Physiologen Donders und S. Exner bei ihren Reaktionsversuchen der chronographischen Methode. Dabei markierte Donders den Reizeintritt durch Funkenschreibung[2]), die z. B. in Amerika gelegentlich auch noch in neuerer Zeit bei Reaktionsversuchen angewandt wurde[3]), während bei Exner der Reiz vom Chronographen selbst wie in myographischen Versuchen bei einer bestimmten Stellung der Rußscheibe ausgelöst wurde. Dieser verließ sich auch für die Ausmessung der Zeiten noch auf die Konstanz des Umlaufes seiner von einem Helmholtzschen Motor betriebenen Scheibe[4]); dagegen wurde bei Donders bereits von einer Stimmgabel, und zwar später von einer elektromagnetisch betriebenen, eine besondere Zeitlinie aufgeschrieben, wobei zugleich die Bewegung der Trommel nicht mehr völlig konstant zu sein braucht. Für die Registrierung der Reaktionsbewegung bedienten sich jedoch beide Forscher noch der direkten mechanischen Übertragung auf die Schreibfläche, wie es auch bei den Versuchen von Helmholtz und Baxt[5]) mit elektrischer Reizung des motorischen Nerven an lebenden Menschen in Analogie zu den myographischen Tierversuchen geschah. Es sollte ausdrücklich die Latenzzeit der elektromagnetischen Schreiber vermieden werden. Für psychologische Versuche jedoch soll man unbedingt auch die Registrierbewegung auf elektrischem Wege auf den Chronographen übertragen, was beim Chronoskop ohnedies der Fall ist. Wie es nämlich zum erstenmal bei Tigerstedts und Bergquists Versuchen geschah, ist der allein schon wegen des hohen Stimmgabeltones stets geräuschvolle Zeitmeßapparat, wenn irgend möglich, außer Hörweite des Reagenten in einen entfernten Raum zu bringen.

---

1) Vgl. auch Exp. Anal. der Bew.-Phän., S. 394f.

2) Vgl. 1, 4. Abt. Frank, Kymographien, Schreibhebel usw. S. 16.

3) Vgl. z. B. Bliß, Researches on reaction-time and attention, Stud. Yale Psychol. Laboratory I, p. 1, 1892—1893 (ebenso wie bei weiteren Arbeiten aus Scriptures Laboratorium). K. Dunlap kontrollierte auch neulich den Fallhammer (s. u.) in dieser Weise, The Fall-Hammer, Chronoscope and Chronograph, British Journ. of Psychology, IV, 1. 1911, S. 44.

4) S. Exner konstruierte (a. a. O. S. 659) auch bereits einen kleinen leicht transportablen Chronographen für klinische Zwecke, den er Neuramöbimeter* (ἀμοιβή, Antwort, Umsatz) nannte und der im wesentlichen aus einem in eine Metallzunge auslaufenden Tasterhebel bestand, unter dem eine berußte Platte rasch wegezogen wurde, auf der die gleichzeitig mit dem Reiz in Schwingung versetzte Zunge so lange schrieb, bis der Druck auf den Tasterhebel sie von der Rußfläche entfernte.

5) a. S. 482, A. 3 a. O.

---

*) Donders hatte seinen Apparat „Noëmatotachographen“ genannt.

Der große Chronograph, der vom Mechaniker Krille für das psychologische Institut in Leipzig gebaut[1]) und bei seiner Nachbestellung von E. Zimmermann in der aus Fig. 57 ersichtlichen neuen Form hergestellt wurde, gestattet die Markierung von drei Vorgängen mittelst dreier Schreibmagnete E neben der Zeitlinie der primären, mit Trockenkontakt versehenen Stimmgabel S zu 500 Schwingungen. Hierbei wird die Trommel, deren Umfang 62 cm und deren Länge 32 cm beträgt, durch ein starkes Gewichts-

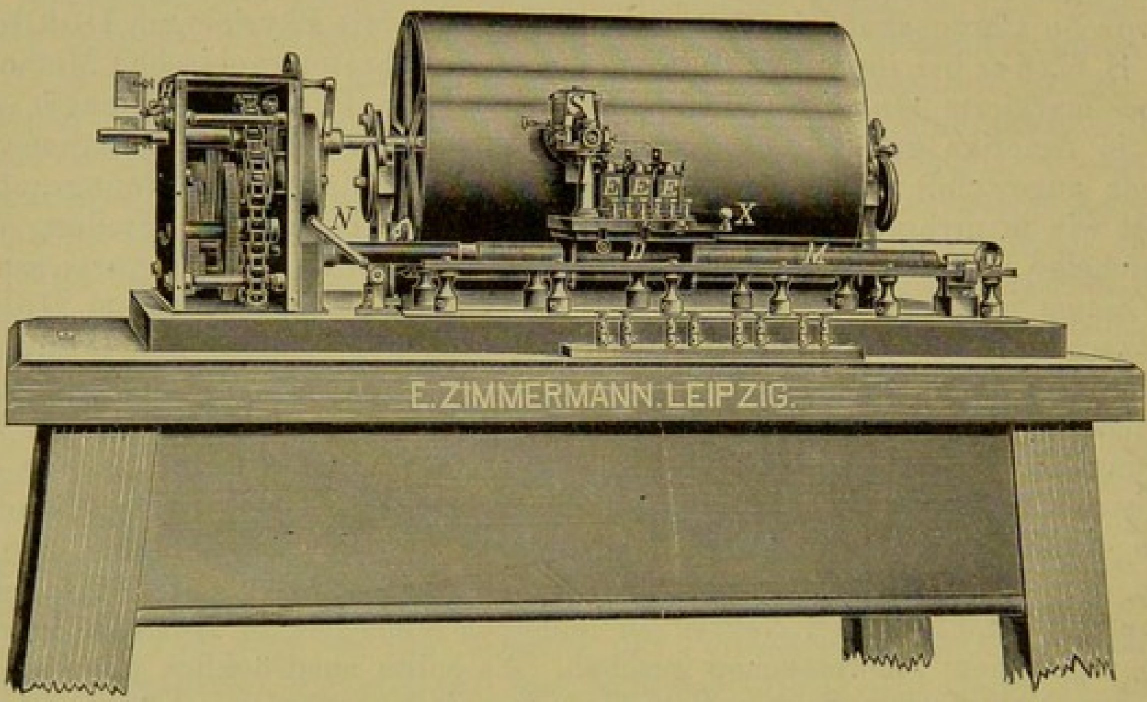


Fig. 57.
Der Große Chronograph neuerer Konstruktion am Psychologischen Institut in Leipzig.

uhrwerk angetrieben und kann bis auf 10 Umdrehungen pro Sek. gebracht werden, so daß an der Zeitlinie 0,1 σ noch bequem zu messen sind. Doch liefert die Firma den Apparat auch mit Motorantrieb, wie er zuerst von F. Schumann[2]) neben der noch einfacheren Tretvorrichtung eingeführt wurde. Übrigens ist bei einer Verwendung feinerer Zeitmarkierer von geringerer Amplitude eine allzu große Geschwindigkeit, bei der außerdem natürlich auch die Trommel viel schneller verbraucht wird, gar nicht einmal vorteilhaft, wenn man nur 0,5 σ noch sicher abschätzen kann. Doch ist bei dem Krilleschen Apparat und dem Modell Fig. 57 leider kein Wert auf geringe Latenz und rasche Bewegung der Schreiber gelegt. Es kann hier überhaupt nur der Punkt der Schreiberlinie, allerdings sehr genau, bestimmt werden, bei dem die Schleuderung der Schreiberspitze nach der Rückkehr des Ankers in seine Ruhelage in einer ziemlich scharfen Ecke umkehrt. Dieser Moment ist aber von der Unterbrechung des Stromkreises durch die um die Latenzzeit vermehrte Zeit der Rückkehrbewegung getrennt,

1) Vgl. Wundt, Physiol. Psychol. III⁶ 1911 S. 383, auch beschrieben von L. Lange. (Ein Chronograph nebst Kontrollapparat für sehr genaue Zeitmessungen, Wundt, Phil. Stud. Bd. 4, 1888, S. 457.)

2) a. S. 437, A. 3 a. O. 1898, S. 260, vgl. auch den Katalog der Firma Spindler & Hoyer (Göttingen) 1908. S. 18. Die Stimmgabel hat hier nur 250 Schwingungen.

die bei der Größe der bewegten Massen[1]) meistens viele σ beträgt. Entsprechendes gilt natürlich für die analoge Marke bei Schließung der Stromes. Doch ist der Apparat deshalb wohl zu gebrauchen, wenn nur ein der Masse gewachsener, starker Antagonismus der regulierbaren Ankerfeder und des Magnetismus hergestellt und sorgfältig kontrolliert wird. Denn es kommt ja nur darauf an, daß die Differenzen der einzelnen Marken bekannt und konstant sind. Am besten sorgt man dafür, daß sich die Marken bei sämtlichen Schreibern auf gleicher Linie befinden, wenn der Strom für alle gleichzeitig unterbrochen wird, was nach genauer Einstellung lange Zeit aufrecht erhalten bleibt. (Zu dieser Prüfung ist nicht einmal ein besonderer Kontrollhammer erforderlich, wie ihn L. Lange (a. a. O.) konstruierte, um die drei isolierten Stromkreise möglichst gleichzeitig zu unterbrechen, was er nur mit großer Mühe und auch da nur annähernd erreichen konnte. Man schaltet eben von vornherein immer alle drei Schreiber parallel und unterbricht dann zur Kontrolle einfach den gemeinsamen Zweig.)

Immerhin ist dieses Prinzip, dessen Genauigkeit von ähnlichen Momenten wie diejenige des Hippschen Chronoskopes abhängt, eine gefährliche Klippe für die Konstruktion und den Gebrauch des Apparates, weshalb es wohl ganz richtig war, daß Schumann (a. a. O.) dafür die bereits erprobten Pfeil-Signale, allerdings ebenfalls in etwas trägeren Modellen, einführte, die sogar die erste Abweichung des Schreibers nach der Stromänderung und auch diese nur mit einer ganz geringen Latenz im Vergleich zum Zeitpunkt der Stromänderung selbst abzulesen gestatten. Schumann fand bei seiner Markierung eine Latenzzeit von 2,65 σ. Dies ist immerhin noch beträchtlich mehr wie bei den von Tigerstedt geprüften Modellen dieses Signales (vgl. I, 4. Abt. S. 12). Doch ergab sich wenigstens eine ebenso geringe mittl. Variation (0,11 σ)[2]).

Da bei der erforderlichen raschen Rotation der Trommel[3]) die Schreibapparate auf dem an ihr von der starken viergängigen Schraube M entlang geführten Wagen womöglich nur während der zu messenden Zeit vom Reiz bis zur Reaktion an der Schreibfläche anliegen sollen, so ist auf dem Wagen erst ein besonderer Schlitten senkrecht zur Trommel etwas verschiebbar. Aber die manuelle Auslösung des Anschießens und der Rückkehr des Schreiberschlittens durch den Drücker D und den Hebel X, wie sie bei den Modellen von Krille und Schumann notwendig ist, läßt noch immer zu viel Zeit verlieren und nimmt außerdem viele Aufmerksamkeit des Experimentators in Anspruch. Dagegen erreichte ich durch eine elektromagnetische Bewegung, die von dem reizauslösenden Apparat und dem Reaktionstaster ohne Eingreifen des Experimentators und ohne jeden Zeitverlust bewirkt wird, eine so gute Ausnutzung der Trommel, daß man unter gleichzeitiger Verwendung zweier auswechsel-

---

1) Bei dem neuen Modell Fig. 57 bestehen die Träger der Schreibspitzen sogar in kleinen Schlittchen, die vollständig in Schienen laufen und eine genaue horizontale Bewegung der Schreiber sichern sollen. Vgl. P. Salow, Beschreibung eines verbesserten Chronographen, Wundt, Psychol. Stud. IV, 1909, S. 530.

2) K. Dunlap (a. S. 507, A. 3 a. O. S. 46 ff.) bestätigte im wesentlichen das bereits Bekannte durch einen Vergleich des Schumannschen Markierers mit einem von E. Zimmermann modifizierten Pfeil-Signal (Preisliste 20, Nr. 1830) und einem viel trägeren Doppel-Markiermagnet (Nr. 1302). Auch von E. Zimmermann wird in Berücksichtigung der oben genannten Forderungen der Chronograph mit solchen Schreibern mit ganz geringer Latenz geliefert (Katalog Nr. 2308).

3) Die Arretierung der Trommel geschieht durch den Exzenterhebel N, diejenige des Werkes durch die Bremse H (Fig. 57).

barer Schreibtrommeln mit dem Chronographen nunmehr fast so schnell und im Zusammenhang arbeiten konnte wie mit dem Hippschen Chronoskop. Die Vorrichtung ist in Fig. 58 von der Seite aufgenommen. Der kräftige Elektromagnet M ist am Grundgestell g des Wagens[1]) und der Eisenanker E unten an dem in den Schienen a_2 des Wagens laufenden Schlitten b[2]) so befestigt, daß die Schreiber bei Anlagerung von E an M die Trommel nicht mehr berühren. Da nun bei dem Beginn des Zurückholens zuerst ein sehr kräftiger Magnetismus erforderlich ist, so wird hierbei zunächst ein sehr starker Strom geschlossen, der von dem einen Pol einer teilbaren Batterie zum Magneten M (d. h. seiner Klemme K_1) und dann durch eine am Wagengestell an der (isolierten) Säule m_1 befestigte Feder L, bzw. ein Platinblättchen auf ihr, nach der am Schlitten durch h isoliert befestigten Kontaktschraube C_2 geleitet ist, von wo er über

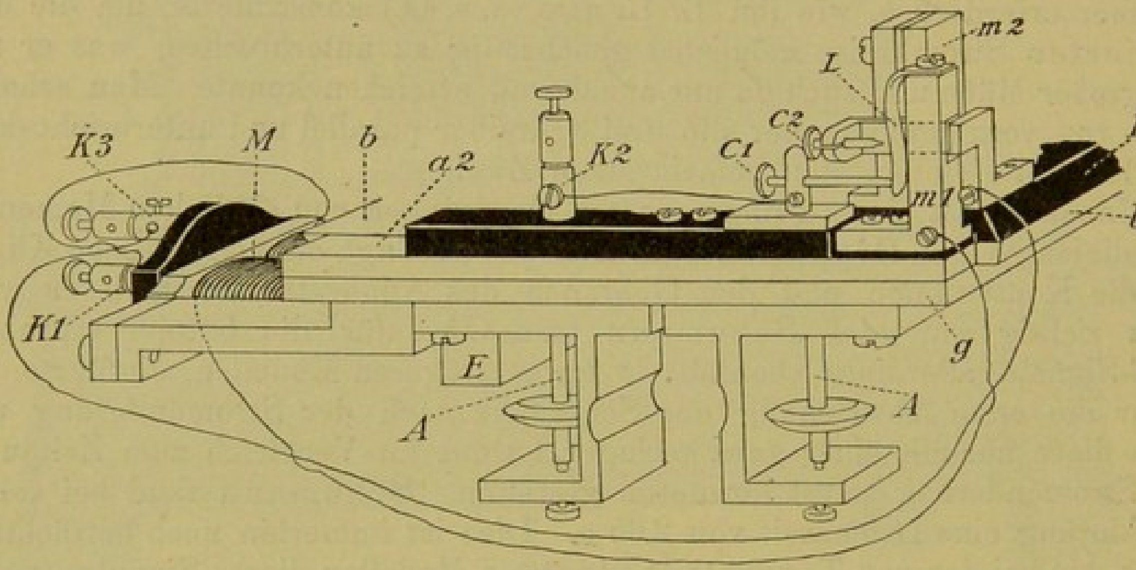


Fig. 58.
Selbsttätige elektromagnetische Ein- und Ausschaltung des Schlittens mit den Markiermagneten am großen Chronographen (nach Wirth).

die vordere isolierte Klemme K_3 nach dem anderen Pol der ganzen Batterie zurückkehrt. Sobald sich nun der Schlitten fast bis an die Pole des Magneten M zurückbewegt hat, trifft der untere, ebenfalls platinierte Teil der federnden Lamelle L, die von C_2 zunächst in Richtung der Säule m_1 zurückgedrückt war, auf die Spitze der Kontaktschraube C_1, die mit ihrer Klemme K_2 isoliert von m_1 ebenfalls am Wagengestell befestigt ist. Dadurch wird im nächsten Augenblick der Kontakt des starken Stromes bei C_2 infolge Zurückbleibens von L gelöst, während dafür, infolge der Verbindung von C_1 mit dem Pole etwa des sechsten Teiles der ganzen Batterie, ein schwacher Strom eintritt, der dazu genügt, den Schlitten gar vollständig an M heranzuziehen und hier festzuhalten. Um das Zurückholen des Schlittens durch die Reaktionsbewegung bewirken zu lassen, versieht man z. B. den Taster Fig. 53, bzw. bei zweihändigen Reaktionen am einfachsten beide Taster, mit einem besondern, von den übrigen völlig isolierten Kontakt, der erst beim Reagieren (also in der Ruhelage des Tasters) geschlossen wird. Durch diesen Nebenkontakt (bzw. bei zweihändiger Reaktion durch die beiden hinteinander geschalteten Nebenkontakte) legt man die starke Ableitung, die von der Schraube C_2 bzw. K_3 ausgeht. Am Beginn des Reaktionsversuches ist also diese Strecke wegen des Niederhaltens der Taster zunächst offen und der Schlitten nur durch die schwache, von C_1 bzw. K_2 ausgehende Leistung festgehalten. Diese wird nun unmittelbar vor dem Reize (es genügt etwa 0,1 Sek. vorher) für einen Moment unterbrochen, so daß der Schlitten mit den Schreibern an die Trommel schießt, worauf er

1) Die Rollen der Achsen A (Fig. 58) greifen in die Schienen des Wagens ein.
2) Die Säule m_2 ist das rechte Ende der Schreibervorrichtung von vorn gesehen.

nach der Reaktion, bzw. bei mehrfachen Bewegungen nach Vollendung der letzten derselben wieder zurückgezogen wird[1].)

Sobald übrigens mit solcher Präzision der Zeitschreibung[2]) nicht nur Differenzen von gleichzeitig intendierten Bewegungen, wie bei Külpes Versuchen (s. S. 498) sondern auch ganze Reaktionszeiten abgelesen werden sollen, ist neben der Linie der Hauptgabel von 500 Schwingungen, wie Salow bei der praktischen Anwendung sehr bald fand, auch eine zweite Zeitmarke von etwa 50 Schwingungen, gewissermaßen wie der Stundenzeiger einer Uhr neben dem Minutenzeiger, erforderlich. Diese kann eventuell auch von einer Primärgabel aus auf einen der Markierhebel übertragen werden, falls noch ein solcher frei ist[3]).

c) Das Hippsche Chronoskop und seine Kontrolle.

Für die Einzelheiten des Chronoskopes darf ich wohl auf die genaue Beschreibung in Wundts Grundzügen der physiologischen Psychologie (III[6], 1911, S. 365) verweisen und hier nur so viel anführen, als zum Verständnis der neueren Kontrollen notwendig ist. Diese wesentlichsten Teile des gegenwärtig gebräuchlichsten Modelles sind in Figur 59 von der Seite skizziert. Das Räderwerk der Uhr wird nach einem kurzen kräftigen Riß[4]) an der vorderen von zwei Zugvorrichtigungen in Gang gesetzt und läuft nach vollem Aufzug des Gewichtes, wenn es nicht vorher durch (langsameres) Anziehen an der hinteren Schnur arretiert wird, 1 Minute lang. Es ist in der Figur nicht mit Buchstaben bezeichnet, bis auf das in der Sekunde zehnmal umlaufende Kronrad k_1, das diese dauernde Bewegung der Uhr auf die Achse des Sigmenzeigers oo überträgt, solange diese eingeschaltet ist. Dieses Rad k_1 ist auf das vordere Ende einer röhrenförmigen, beiderseits offenen Achse aufgesesetzt, in der sich die Zeigerachse oo völlig unabhängig drehen und vor- und zurückbewegen kann. An dieser Zeigerachse, die vor dem (oberen) hundertteiligen Zifferblatt den Zeiger z trägt und innerhalb des Werkes ein Zahnrad, um den Zehntelsekundenzeiger vor dem unteren Zifferblatt in Bewegung zu setzen, ist unmittelbar vor k_1 der kleine Zahnhebel h befestigt, dessen Zahn nach einer Rückwärtsbewegung der Achse in das Kronrad k_1 eingreift und dann mitsamt der Zeigerachse von dem Uhrwerk mitgenommen wird, während er nach einer Vorwärtsbe-

1 Die genauere Beschreibung der Fig. 58 und der Einfügung dieser Schaltungen in eine Anordnung für Reaktionsversuche vgl. Salow, a. S. 509, A. 1 a. O.

2) Ein Chronograph für Tintenschreibung mit einer Gabel à 250 Schw. und zwei Markiermagneten von Dodge, der wenigstens bis auf 0,5 σ genau zu messen gestattet, leistete innerhalb eines etwas beschränkteren Anwendungsgebietes gute Dienste, soweit es sich um einfache Reaktionszeiten oder sonstige Zeitkontrollen handelte. (R. Dodge, Beschreibung eines neuen Chronographen, Zeitschr. f. Psychol. X, 1896, S. 414.)

3) Salow behalf sich bei seinen Versuchen mit zweihändigen Reaktionen damit, die Schwingungen einer primären Gabel von 50 Schwingungen vom Moment des Reizes an auf den ersten Schreibstift zu übertragen, der hier auch den Reiz markieren mußte. Doch ergibt sich hierbei ein von Salow berechneter, wahrscheinlicher Fehler der Reaktionszeit (a. S. 509, A. 1 a. O. S. 535).

4) Hierdurch wird vermieden, daß die regulierende Stimmzunge zu 1000 Schw. in eine falsche Bewegung gerät, die an einem dumpfen Rasselgeräusch an Stelle des hohen reinen Klanges zu erkennen ist. Tritt dies einmal ein, so ist sofort zu arretieren und von neuem anzutreiben. Manchmal ist dieser falsche Gang allerdings auch durch eine Abnutzung des Steigrades oder eine falsche Stellung der Zunge veranlaßt und tritt dann trotz richtigen Anziehens viel häufiger auf.

wegung in die Zähne des am Uhrgehäuse befestigten Kronrades k gerät, wodurch die Zeigerachse gegen jede Verdrehung gesichert ist. Eine vordere Feder m drückt nun zunächst die Achse oo mit h gegen k_1, so daß der Zeiger ohne weitere Beeinflussung stets mitlaufen würde. Dagegen kann die Zeigerachse durch den Druck der Schraube i, die sich an dem oberen Ende des zweiarmigen Hebels n, g des elektromagnetischen Stellwerkes be-

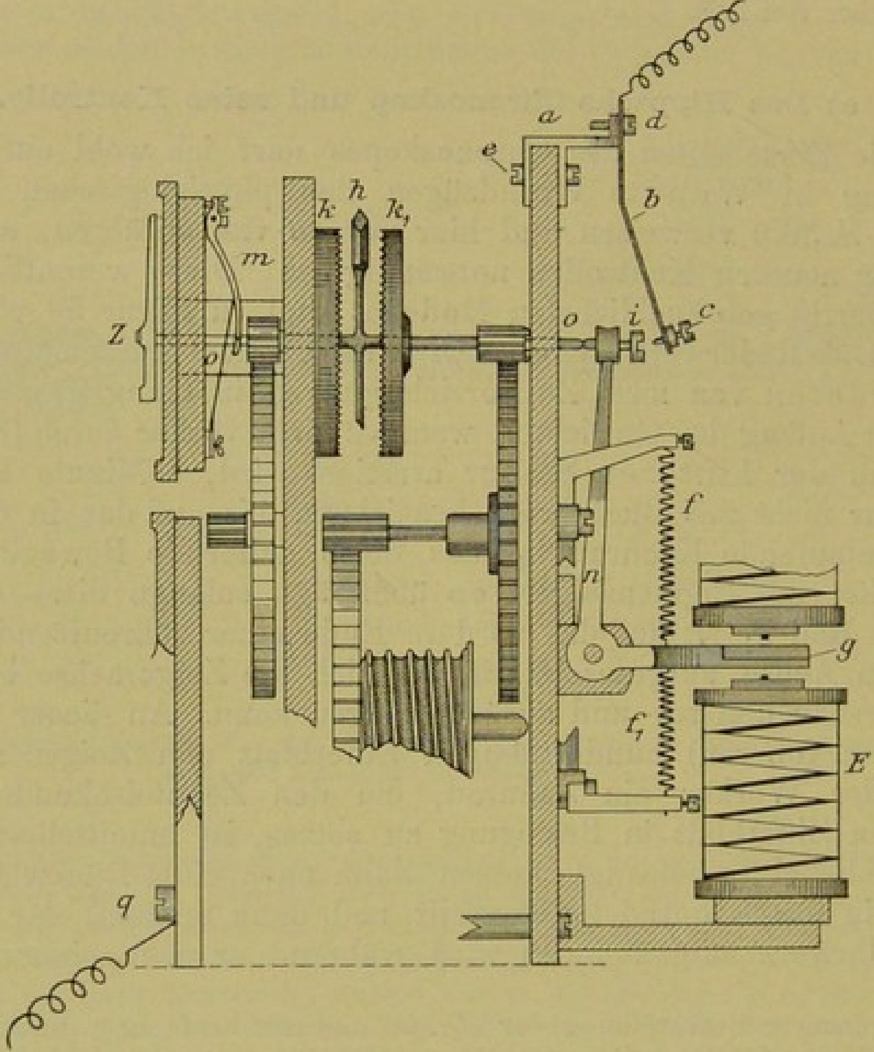


Fig. 59.
Das Hippsche Chronoskop.
(Seitenansicht nach N. Ach, a. S. 503, A. 3 a. O., S. 253 mit der Külpe-schen Kontaktvorrichtung).

findet, von rückwärts gegen die Feder m gedrückt werden, so daß sich h in das feste Kronrad k legt und die Zeiger zum Stillstand kommen. Bei der alten Konstruktion[1]), die von Hirsch a. S. 485 a. O. ausführlich beschrieben

1) Die historische Entwickelung dieses Chronoskopes seit der Erfindung seines Prinzipes durch Wheatstone sowie ein Verzeichnis der neueren Literatur zu seiner Kontrolle findet man in der auch unten erwähnten Abhandlung von Beatrice Edgell and W. Legge Symes, The Weatstone-Hipp-Chronoscop. Its adjustments, accuracy and control, British Journ. of Psychology, II, 1906 p. 58. Ich führe aus ihrem Verzeichnis noch an: M. Hipp, Mitteil. d. Bern. Naturf. Gesellsch. 1855, S. 190. C. Kuhn, Handbuch der angewandten Elektrizitätslehre S. 1175, 1185.

ist, diente nun dieser Hebel n g, an dessen Arm g ein Queranker für einen Elektromagneten angebracht ist, ausschließlich dazu, um bei Schließung des Stromes in dem Elektromagnetenpaare, das dem oberen der Fig. 59 entspricht, diesen Gegendruck zum Festhalten der Zeigerachse auszuüben, so daß nur die Zeit der Unterbrechung des Stromes gemessen werden konnte. Später ermöglichte Hipp durch Hinzufügung des zweiten, unteren Elektromagnetenpaares E daneben auch noch die andere Wirkung des

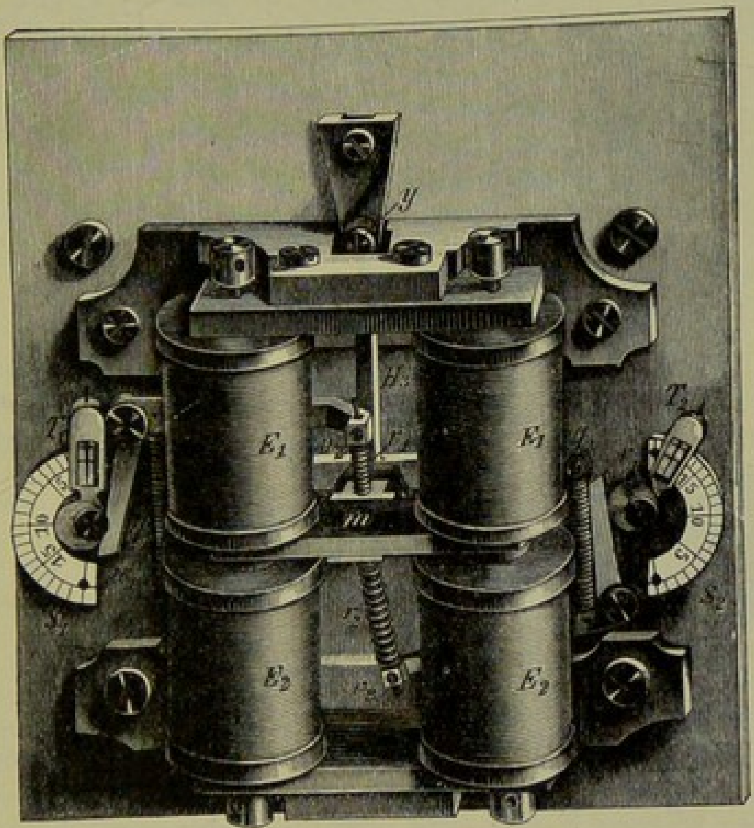


Fig. 60.
Rückseite des Hipp schen Chronoskops mit der Regulierung der Federspannung.
(Nach Wundt, Grundz. der Physiol. Psychol. III[6], S. 372.)

Stromes, die jetzt sogar meistens benützt wird, wobei die Zeiger während der Schließung des Stromes mitlaufen. Dieses in Fig. 59 abgebildete System sei im folgenden allein berücksichtigt. Hierbei kann man zunächst durch Spannung der unteren Feder f_1 und Entspannung der oberen, hierzu antagonistischen f den Anker an g in die untere Lage bringen und das obere Elektromagnetenpaar wie bei der alten Anordnung (mit sog. „Ruhestrom“) benützen. Hebt man dagegen durch das umgekehrte Spannungsverhältnis der Federn f und f_1 den Anker empor, so wird hierdurch ohne Strom der Feder m entgegengearbeitet und die Zeigerachse fest gegen k angedrückt, während die Schließung des Stromes im unteren Elektromagnetpaar E diesen Druck von i gegen m wieder aufhebt und die Zeiger bis zur Stromunterbrechung mitlaufen läßt (Arbeitsstrom)[1]).

1) Man kann hier drittens auch bei oberer Lage des Ankers einen Strom durch die oberen Magneten und gleichzeitig einen zweiten, die Feder f überwindenden durch

Die außen an der Rückwand des Uhrgehäuses angebrachte Regulierung des Spannungsverhältnisses der Feder f und f_1, das neben der Stromstärke als wichtigster Faktor für die Latenzzeit bei Ein- und Ausschaltung der Zeiger in Betracht kommt, ist in Fig. 60 zu sehen. H_3 m ist der Doppelhebel ng von Fig. 59, y die Schraube i. Das äußere Ende der oberen Feder r_1 (= f) hält der Arm u_2 des Winkelhebels u_1 u_2, dasjenige der unteren Feder r_2 (= f_1) der Arm v_2 des Hebels v_1 v_2. Die anderen Arme u_1 bzw. v_1 werden durch die starken Federn q_1 und q_2 gegen die Exzenterscheiben der Hebel T_1 und T_2 gedrückt, deren beiderseitige Einstellung vor

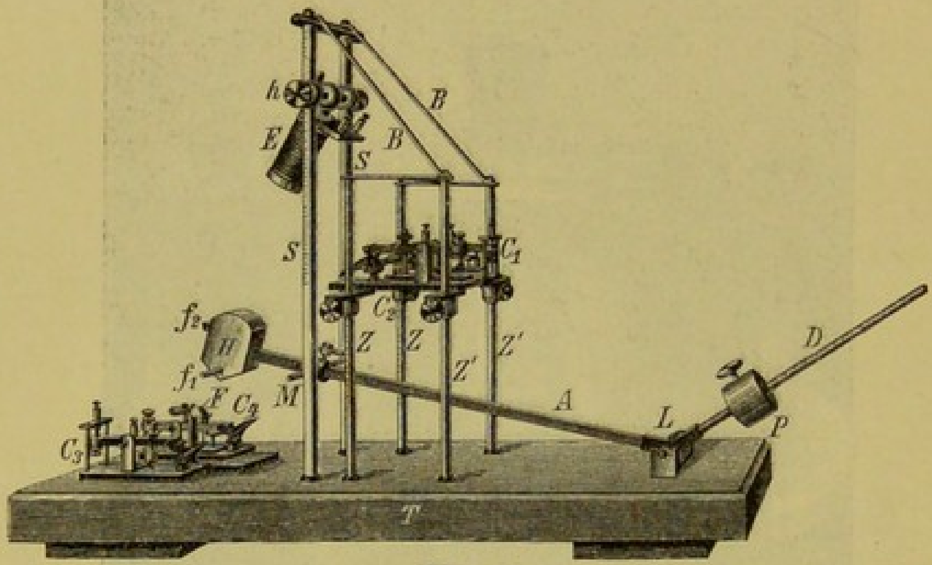


Fig. 61.
Der große Wundtsche Kontrollhammer.

je einer 20-teiligen Skala S_1 und S_2 somit ein beliebiges Spannungsverhältnis zwischen r_1 und r_2 erzeugen läßt. In der Figur 60 herrscht z. B. neben völliger Entspannung der oberen Feder eine ziemliche Spannung der unteren, d. h. der Apparat ist auf „Ruhestrom" eingestellt. Stände umgekehrt T_1 auf ca. 17 und T_2 auf 0 oder einer niedrigen Ziffer, so wäre er auf „Arbeitsstrom" adjustiert.

Vor der absoluten Genauigkeit, die sich mittelst dieses Chronoskopes bei richtiger Behandlung erreichen läßt, hat man erst in neuerer Zeit die ursprüngliche Achtung wiedergewonnen, nachdem zunächst Külpe und Kirschmann[1]) am älteren Modell und dann u. a. R. Sommer[2]), N. Ach[3]) und Edgell und Symes[4]) an neueren Uhren sorgfältige Kontrollen unter Variation aller in Betracht kommenden Bedingungen vorgenommen haben.

die unteren schicken, wodurch die Zeit von der Unterbrechung des oberen bis zu der des unteren Stromkreises meßbar wird. Doch wird diese Einstellung, die zur ballistischen Messung des Intervalles zwischen zwei Kontaktunterbrechungen durch ein Geschoß gebraucht wird, in der Psychologie wohl kaum jemals notwendig sein.

1) Ein neuer Apparat zur Kontrolle zeitmessender Instrumente, Wundts Phil. Stud. VIII, 1893, S. 145ff.

2) Die Messung der Zeit bei psychologischen Versuchen, Ergebnisse der Physiol. II. Jahrg. 1903, II. Abt., S. 673.

3) A. S. 503, A. 3 a. O. im Anhang: Über das Hippsche Chronoskop, 1905.

4) a. S. 512, A. a. O.

Bei den einfacheren Prüfungen wird mittelst eines genauen Kontaktapparates ein konstantes Zeitintervall, u. z. bei „Arbeitsstrom“ durch Schließung und Öffnung und bei „Ruhestrom“ durch Öffnung und Schließung eines Stromes begrenzt, das mittelst eines Chronographen bis auf Bruchteile eines Sigmas genau zu bestimmen ist, und am Chronoskop wiederholt abgelesen[1]. Külpe und Kirschmann verwendeten hierzu den großen Wundtschen Kontrollhammer (Fig. 61), der ähnlich wie der Pflügersche gebaut ist, aber bis zu der längeren Zeit von 0,6 Sek. genau arbeitet und eine variationsreichere Kontaktvorrichtung trägt[2]. Der zunächst an dem verstellbaren Elektromagneten E (Druckschraube h) gehaltene Winkelhebel AD mit dem Hammerkopf H, der breiten Achsenlagerung L und dem Gegengewicht P bedient mit der Nase M die oberen Kontakte C_1 und C_2 und mit Stiften (f_1) am Hammerkopf die unteren C_3 und C_4. (Die in die Feder F beim Aufschlagen von H einschnappende Nase f_2 verhindert ein Zurückspringen.) C_1 und C_3 werden hierbei geöffnet, C_2 und C_4[3] aber werden an einem Punkte geschlossen und bewirken genau im nämlichen Augenblicke an einem zweiten Punkte eine Unterbrechung[4].

Der allgemeine Apparat für Zeitkontrollen ist aber das Pendel[5], das bei längerer Schwingung auch beliebig große Zeiten begrenzen läßt. Die

---

1) Ein solcher Apparat dient dann auch zu den alltäglichen Uhrkontrollen, die man am Anfang und Ende jeder Sitzung vorzunehmen hat, um die Konstanz der mittleren Zeitangaben und ihres Streuungsmaßes zu prüfen. Die beiden Kontakte an ihm, die bei der Kontrolle den Vorgang beim Reize und bei der Reaktion ersetzen, werden an passenden Stellen ein für alle mal in die Anordnung eingefügt und bilden bei den regulären Versuchen nach zuverlässiger Schließung einfach einen Teil der Stromleiter. Bei der Uhrkontrolle werden dann umgekehrt der Reiz- und der Reaktionskontakt geschlossen, wofür an dem Reaktionstaster ein besonderer Seitenhebel (S in Fig. 53) angebracht ist.

2) Eine genaue Beschreibung findet man außerdem wieder in Wundts Grundzügen der physiol. Psychol. III[6], S. 374ff.

3) Wird der untere Kontakt C_4 zur Schließung verwendet, was bei der Uhrkontrolle mit Ruhestrom erforderlich ist, so wird diese allerdings, wie K. Dunlap (a. S. 507, A. 3 a. O. S. 48) durch Funkenchronographie fand, bei diesem Modell durch die große Erschütterung gestört, die der ganze Apparat beim Aufschlag des Hammers erleidet und um derentwillen man ihn bisher ohnedies schon meistenteils auf einem besonderen Tische mit Filzunterlage unterbrachte. Der Kontakt C_4 wird dadurch hergestellt, daß sein Haupthebel einen zweiten Hebel gegen eine Feder nach unten drückt. Die Erschütterung des Aufschlages überträgt sich nun auf diesen zweiten Hebel, der bei den bisherigen Modellen durch eine zu große Masse und die außen aufsitzende Klemmschraube eine zu große Wucht besitzt und daher von der unteren Feder hierbei nicht mehr sicher gegen den oberen angepreßt werden kann. Eine Abstellung dieser Mängel ließ in der Tat die Vergrößerung der mittleren Variation der Chronoskopzeit wieder zurückgehen.

4) Diese Unterbrechung dient z. B. dazu, bei der Eichung des Fallhammers mittelst des Krilleschen Chronographen auch die für das Chronoskop stets einmal erforderliche Zeitbegrenzung durch Schließung mittelst einer dort nach S. 508 allein gut ablesbaren Unterbrechung registrieren zu können.

5) Vor dem Fallhammer wurde vor allem auch der von Hipp selbst konstruierte Fallapparat zur Uhrkontrolle verwendet, bei dem die Zeit durch den freien Fall einer Kugel begrenzt wird. (Hirsch hatte mit ihm seinerzeit den Fehler des Mittels zwischen 0,0002 und 0,0006 σ und den bei einer Beobachtung zu erwartenden Fehler als 0,0011 bis 0,0022 σ gefunden.) Dieses einfachste Prinzip wurde von Ebbinghaus bei seinem größeren und mit schwererer Kugel versehenen Fallapparat für Zeiten bis 0,4 Sek. hinreichend genau befunden. (Ein neuer Fallapparat zur Kontrolle des Chronoskopes, Zeitschr. f.

frühere unzutreffende Vorstellung von der Abhängigkeit des Zeitfehlers von der zu messenden Zeitstrecke konnte denn auch nur durch die Uhrkontrollen für viel längere, genau abgegrenzte Intervalle korrigiert werden[1]). R. Sommer arbeitet mit einem Sekundenpendel, das den Stromkreis für das Chronoskop durch eine sinnreiche Relaisvorrichtung schließt und öffnet. Ach verwendet ein Kontaktpendel, dessen Kontakte pneumatisch ohne Störung der Pendelschwingung eingestellt werden können. Zur genaueren Bestimmung des Zeitfehlers wurde ferner die Zeit zwischen den auf das Chronoskop wirkenden Kontaktänderungen gleichzeitig am Chronographen aufgenommen. Edgell und Symes benützten einfach die Chronographentrommel selbst als Kontaktapparat, dessen Zeit hierbei natürlich immer erst aus der Stimmgabelkurve abzulesen ist. Die so gefundene Differenz zwischen der Chronoskopzeit und der parallel aufgenommenen Chronographenzeit kann nun teilweise einfach daher rühren, daß die Stimmgabel des Chronographen und die Zunge des Chronoskopes eine verschiedene Stimmung besitzen, daß also das Chronoskop relativ zu schnell oder zu langsam läuft. Dieser Fehler „des Ganges“ muß natürlich zur ganzen gemessenen Zeit t proportional oder $t\alpha$ sein. Während aber dieser Fehler durch richtige Abstimmung der Stahlzunge von vornherein auf ein Minimum reduziert sein kann, hat die richtige Auswahl der Stromstärke und der Federspannung beim Gebrauch noch dafür zu sorgen, daß auch der zweite Fehler möglichst klein wird, der darauf beruht, daß die erste Latenzzeit von der ersten Stromänderung bis zum Eingriff von h in k_1 (Fig. 59) und die zweite Latenzzeit von der zweiten Stromänderung bis zur Ruhelage der Zeigerachse voneinander verschieden sind. Zu einer genauen Analyse dieser zweiten Fehlerkomponente haben Ach sowie fast gleichzeitig Edgell und Symes diese beiden Latenzzeiten von der ganzen Zeit zwischen der ersten Stromänderung und dem Stillstand der Zeiger gesondert zu bestimmen versucht. Sie registrierten hierzu in der gleichzeitigen chronographischen Aufnahme noch die beiden Momente, in denen der Doppelhebel ng (Fig. 59) sich bei der Hin- und Herbewegung der Zeigerachse gerade in der Lage befindet, daß diese von k_1 sicher mitgenommen werden mußte[2]). Ach verwendete hierzu eine schon von Külpe eingeführte Kontaktschließung durch den Hebel ng bei der Schraube i. Der Strom wurde

---

Psychol. u. Ph. der S. Bd. 30, 1902, S. 292ff.) Cattell wollte dagegen das mit seitlichen Kontrakten versehene Falltachistoskop zugleich als Fallchronometer verwenden, das jedoch bei der unvermeidlichen Variabilität der Schlittenreibung die Genauigkeit der übrigen Apparate bei gleich guter Ausführung keinesfalls übertreffen kann. (Cattell, a. S. 483, A. 3 a. O. III, S. 307 und ebenda Bd. IX, 1894, S. 307.)

1) Schon Lightner Witmer empfahl zur Uhrkontrolle das Kontaktpendel (The pendulum as a control instrument for the Hipp chronoscop, Psych. Rev. I, 1894 S. 506) und kontrollierte mittelst desselben bereits Zeiten von 0,1 bis 3,5 Sek., wobei er einstweilen wenigstens fand, daß die Streuung mit der gemessenen Gesamtzeit nicht wesentlich zunimmt. (Die mittlere Variation war bei 0,1 Sek. 0,25 σ und bei 3,5 Sek. 0,9 σ.)

2) Einen ganz eindeutigen Zustand entweder der richtigen Geschwindigkeit oder der Ruhe erreicht die Zeigerachse allerdings immer erst, wenn h (Fig. 59) entweder in k_1 oder in k hineingeraten ist. Im Übergangsstadium sind also als dritte Fehlerquelle noch zufällige Verschiebungen möglich. Diese sind aber klein oder konstant genug, um nicht besonders in Anschlag gebracht werden zu müssen.

einerseits bei q in das Uhrwerk nach i eingeleitet, andererseits gelangte er bei d isoliert vom Uhrwerk in die federnde Metallzunge b, die durch den Bügel a mit der Schraube e auf jedes Chronoskop aufgeschraubt werden kann bzw. in die platinierte Schraube c, deren Spitze so eingestellt worden war, daß sie in der genannten Lage des Hebels ng dessen Schraube i gerade berührte[1]). Edgell und Symes ließen dagegen den Hebel ng, an dem sie einen Schreiber angebracht hatten, seine Bewegung selbst direkt auf dem Chronographen aufzeichnen. Bei idealer Starrheit des Schreibers[2])

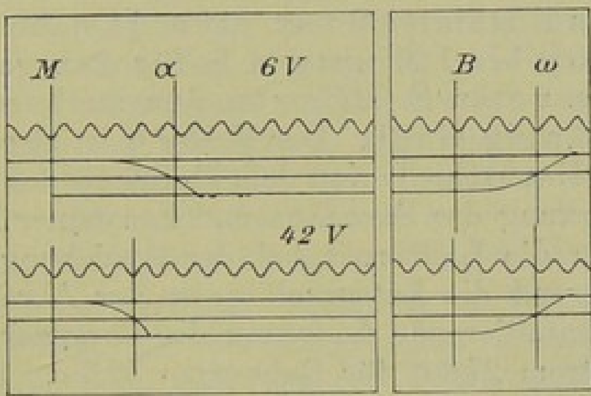


Fig. 62.
Die direkte Registrierung der Ankerbewegung des Hippschen Chronoskops nach Edgell und Symes.

Der Exzenter für die obere Feder stand auf Teilstrich 10 (Skala S_1 der Fig. 60), der für die unter Feder auf 0 (Skala S_2), bei „Arbeitsstrom". Die Stromstärke war in den beiden oben und unten registrierten Fällen konstant 80 MA. Die Spannung war oben 6, unten 42 V, der Widerstand oben 75, unten 525 Ω. Stimmgabel des Chronographen 200 Schwingungen.

entsprächen also in den so gewonnenen Kurven, von denen eine (Fig. V) in Fig. 62 wiedergegeben ist, die Schnittpunkte mit der mittleren Niveau-

1) Die Stellung, in der h mitgenommen wird, war bei Ach durch eine weitere Kontaktvorrichtung rein empirisch genau bestimmt worden. Es wurde an dem Zeiger z selbst ein ganz leichtes Hebelchen angelegt, das dieser beim Beginn der Bewegung zur Seite schleuderte, wodurch ein Strom unterbrochen und auf dem Chronographen eine besondere Marke erzeugt wurde. Die Kontaktvorrichtung bei i wurde nun so eingestellt, daß ihre Schließungsmarke mit dieser genau zusammentraf. Dadurch, daß die Metallzunge b (im Unterschiede von dem Külpeschen Kontakt) leicht federte, um die Endlage des Ankers von g nicht zu beeinflussen, konnte übrigens bei der Vorwärtsbewegung der Zeigerachse in Richtung des Stillstandes die Schraube c die Platte von i noch ein klein wenig über den Punkt der ersten Berührung hinausbegleiten, was durch ein inneres Widerlager für b leicht zu beseitigen wäre. — Den Stillstand des Zeigers konnte Ach allerdings nicht so einfach direkt bestimmen wie die Fortbewegung. Hierzu wäre höchstens eine photochronographische Aufnahme imstande, wie sie zu ähnlichen Zeitkontrollen neuerdings im Kieler psychologischen Institut angewendet wurde. Vgl. Minnemann a. S. 434, A. 6 a. O.

2) Freilich kommen hier noch die von den Verf. a. a. O. S. 63 als sehr gering bezeichneten Fehler durch die Elastizität des Schreibers hinzu, die aus den starken Nachschwingungen nach Erreichung der neuen Endlagen des Hebels zu erschließen ist. Da sie eine Verzögerung der ganzen Linie bewirkt, ist aus der Kleinheit der Differenz zwischen $\omega - \alpha$ und der Chronoskopablesung (nur ca. 1 σ) noch nicht der durch sie bedingte Fehler der Latenzzeiten α — M und ω — B zu ersehen. Um diese Fehler zu vermeiden, könnte man sich bei der mechanischen Übertragung z. B. auch auf die bloße Aufzeichnung der Passierung der mittleren Niveaulinie durch zwei besondere Zeiger

linie, die der Schreiber bei konstanter Stellung des Hebels ng in der kritischen Lage aufzeichnen würde, den beiden von der Achschen Kontaktvorrichtung registrierten Zeitpunkten[3]). Das Lot M bezeichnet den Moment der ersten Stromänderung, α den Beginn der Zeigerbewegung, B die zweite Stromänderung, ω den Stillstand der Zeiger. $\alpha - M$ ist die erste, $\omega - B$ die zweite Latenzzeit und $q = (\omega - B) - (\alpha - M) = (\omega - \alpha) - (B - M)$ den aus der Einschaltungsvorrichtung resultierenden Zeitfehler.

Durch diese Untersuchungen wurde nun zunächst übereinstimmend gefunden, daß die Latenzzeiten, die übrigens bei Ach im einzelnen nur 6 bis 20 σ und meistens nur etwa 14 σ betrugen, für Zeitmessungen von 30 σ bis 1 Minute, d. h. für den ganzen Meßbereich dieser Modelle (s. unten S. 522), von der zu bestimmenden Zeit t so gut wie unabhängig sind[1]). Der Fehler q ist also bei der allgemeinen Fehlergleichung im Unterschiede von dem Fehler $t\alpha$ des Ganges eine Konstante. Bei Verstärkung des Stromes und konstanter Federspannung verkürzt sich vor allem die Latenzzeit bei der Anziehung des Ankers durch den Magneten, während die Latenzzeit nach der Abreißung sich weniger ändert. Als größte resultierende Änderung der Chronoskopangabe fand Ach hierbei für Arbeitsstrom 27,8 σ, für Ruhestrom 52,3 σ. Bei Verstärkung der Federspannung[2]) wurde dagegen umgekehrt vor allem die Latenzzeit nach der Abreißung verkürzt, und die Chronoskopzeit änderte sich bei Arbeitsstrom im Maximum um 45,2 σ und bei Ruhestrom um 37,2 σ. Edgell und Symes haben aber daneben zum erstenmal in der psychologischen Literatur berücksichtigt, daß auch die elektromotorische Kraft, bzw. der Widerstand, mit welchem eine bestimmte Stromstärke erzeugt ist, wegen der Extraströme vor allem für die Latenzzeit bei Schließung nicht gleichgültig ist, was Hipp (a. S. 512, A a. O.) bereits empirisch herausgefunden hatte. Dies ist z. B. auch aus Fig. 62 zu ersehen, wo trotz gleicher Stromstärke die Latenzzeit der Schließung bei 42 Volt kürzer und der zweiten Latenzzeit ähnlicher ist als bei 6 Volt. Diese Autoren empfehlen auch, mit einer höheren elektromotorischen Kraft zu arbeiten, wie es unter Benützung des Stadtstromes schon seit längerer Zeit im psychologischen Institut von Külpe in Würzburg üblich war. Auch die Achschen Messungen waren sämtlich mit 110 Volt ausgeführt.

Da nach alledem die Erhöhung des Magnetismus und die Steigerung der Federspannung den aus den Latenzzeiten resultierenden

---

beschränken. Doch geben die Kurven wenigstens den ungefähren Verlauf der ganzen Bewegung konkret wieder, den Ach sich aus seinen beiden Momentanregistrierungen rein theoretisch rekonstruiert. Jedenfalls wären aber doch auch bei völlig starrem Schreiber die Niveaulinien nur durch ähnliche Vorsichtsmaßregeln wie bei Ach genau zu ermitteln.

1) Früher hatte man dagegen dieser in den Kontrollen dabei meistens viel kürzer bemessenen Gesamtzeit t einen wesentlichen Einfluß auf q zuerkannt und dies auf remanenten Magnetismus zurückgeführt (vgl. S. 514).

2) Edgell und Symes empfehlen, immer nur eine Feder zu spannen und die andere völlig ruhen zu lassen, wodurch die Federn am geringsten in Anspruch genommen werden. Es entscheidet sowohl nach ihren Ergebnissen (a. a. O. S. 75) als auch nach Ach (a. a. O. S. 270) nur das Spannungsverhältnis, da bei den verschiedensten absoluten Spannungen der einzelnen Federn gleiche Chronoskopzeiten gefunden wurden.

Fehler q in entgegengesetztem Sinn beeinflussen, so muß sich dieser theoretisch stets völlig zum Verschwinden bringen lassen. Ist aber außerdem noch ein „Fehler des Ganges“ vorhanden, so ist es unter Umständen empfehlenswerter, den Gesamtfehler $q + t\alpha$ für die am häufigsten gemessene Zeit t_1 zum Verschwinden zu bringen, also $q = -t_1\alpha$ zu wählen. Ach empfiehlt als diese Idealzeit t_1 das Sekundenintervall, was praktisch mit R. Sommers Einstellungsprinzip zusammentrifft, der von vornherein einfach diese Schwingungszeit seines Kontroll-Sekundenpendels durch das Chronoskop so genau als möglich wiederzugeben sucht.

Die mittlere Variation ist, wie für Arbeitsstrom schon Krogius vor längerer Zeit bei Versuchen am Leipziger psychologischen Institut fand[1]), bei einem kräftigen Antagonismus zwischen einer hohen Stromstärke und großen Federspannung am geringsten, und hierbei im allgemeinen nicht größer als etwa 1 σ. Unterhalb der Zeit von 30 σ nimmt sie jedoch unverhältnismäßig zu, wenn auch das Chronoskop noch bei Zeiten bis etwa 15 σ überhaupt anspricht, sofern sie nur größer sind als die erste Latenzzeit.

Nicht ganz einig ist man noch bezüglich der Vermeidung des remanenten Magnetismus, der bei fortgesetzter Einhaltung der nämlichen Stromrichtung entsteht, bei den neueren Elektromagneten mit weicheren Eisenkernen allerdings in geringerem Maße. Sommer, Ach und K. Dunlap möchten ausdrücklich auf die früher stets peinlich besorgte Stromwendung nach jedem Versuch verzichten. Dunlap fand sogar, daß sie für den Fall, daß sie einmal vergessen werde, ganz erhebliche Verschiedenheiten herbeiführe[2]). Gerade seine Beobachtungen zeigen aber doch, daß die absoluten Werte auch unter sonst ganz gleichen Umständen von der Stromrichtung abhängig werden, wenn man nicht prinzipiell jedesmal wendet, und Edgell und Symes deuten auch einen gelegentlichen Befund bei der Achschen Anordnung, bei der nicht gewendet wurde, in diesem Sinne. Der Apparat wird jedenfalls einseitig, wenn auch bald ein stationärer Zustand erreicht ist und der Antagonismus von Federn und Stromstärke diesem angepaßt werden kann. Die mittlere Variation scheint jedenfalls ohne Stromwendung nicht größer auszufallen.

Ach empfiehlt auch noch eine tägliche Entspannung der Federn nach Abschluß der Versuche, um eine auch sonst beobachtete Zunahme der mittleren Variation bei Ermüdung der Federn zu vermeiden. Gerade weil aber, wie Ach selbst feststellte, eine sehr geringe Änderung der Federspannung sehr viel ausmacht, so droht bei täglicher Neueinstellung die Gefahr einer täglichen zufälligen Verschiebung der ganzen Zeiten, die kaum angenehmer ist als eine kleine stetige Änderung der Spannung, die bei guten Federn nach jahrelanger mäßiger Spannung kaum merklich ist, und eine mit ihr vielleicht verbundene minimale Vergrößerung der mittleren Variation.

---

1) Vgl. Kästner und Wirth, a. S. 483, A. 3 a. O., S. 385.

2) K. Dunlap stellte Versuche mit jedesmaliger Wendung außer vor jedem vierten Versuche an und fand als Mittel für die Zeitlage I bis IV innerhalb der Vierergruppen: I: 111,7 (m. V. 1), II: 111,7 (m. V. 1,4), III: 111,9 (m. V. 1), IV: 118,2 (m. V. 1). Vgl. a. S. 507 A. 3 a. O.

d) R. Schulzes Chronoskop.

Die günstigen Ergebnisse dieser Kontrollen lassen es wenigstens für Reaktionsversuche unnötig erscheinen, an dem Hippschen Chronoskop noch weitere Verbesserungen zu versuchen. Immerhin ist der Versuch R. Schulzes in dieser Richtung erwähnenswert, der die Zeigerachse elektromagnetisch durch kurzdauernde Induktionsströme ein- und ausrücken läßt, die durch die beiden Stromänderungen im primären Stromkreise eines In-

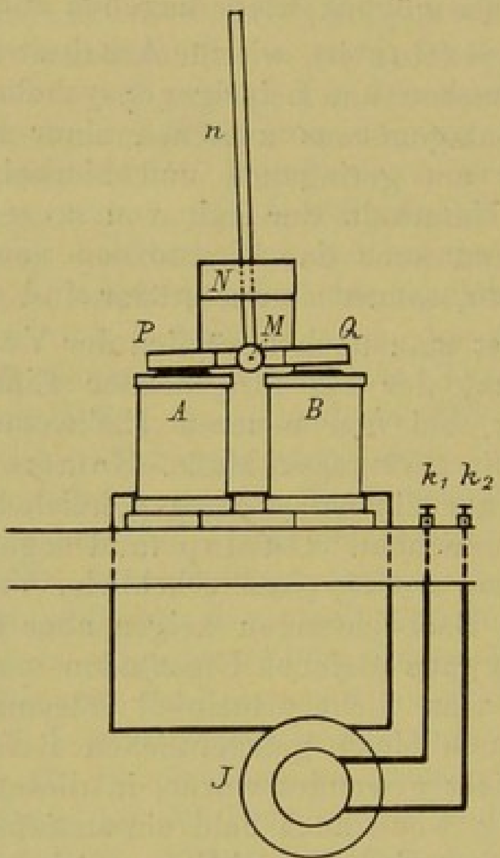


Fig. 63.
Das Prinzip der Hebelbewegung bei dem Chronoskop von R. Schulze.

duktoriums erzeugt werden. In Fig. 63 ist nur das Prinzip dieser elektromagnetischen Vorrichtung skizziert. Ein permanenter Stahlmagnet, dessen Nordpol N sich oben befindet, hängt unten mit den Eisenkernen A und B eines Elektromagnetenpaares zusammen und erzeugt dadurch bei diesen Kernen oben einen Südpol. Dagegen ist der in den oberen Stahlmagneten eingelagerte Doppelanker P, Q, der zu einem dreiarmigen, um M drehbaren Hebel gehört, beiderseits nordmagnetisch. Es haftet also sowohl P an A, als auch Q an B, wenn der für eine mittlere Stellung ausbalancierte Hebel durch irgend einen Anstoß nach dieser oder jener Seite das Übergewicht erlangt. Der dritte vertikale Hebelarm n entspricht dem gleichbenannten Arm in Fig. 59 des Hippschen Chronoskopes. Seine Bewegung nach rechts, durch Auflagerung von Q auf B, schaltet also die Zeigerachse in das laufende Kronrad k_1 (Fig. 59) ein, die Bewegung nach links oder die Annäherung von P an A schaltet sie wieder aus. Die Spulen des Elektromagneten sind nun wie bei einem gewöhnlichen Hufeisenelektromagneten gewickelt und mit der sekundären Spule des Induktoriums J in einen Stromkreis geschlossen, das unter der hölzernen Grundplatte des Uhrgehäuses zwischen den Säulen des Gestelles angebracht ist. Entsteht nun in dieser Spule ein Strom, so werden die Pole von A und B entgegengesetzt magnetisch. Liegt z. B. zunächst zur Bremsung der Zeigerachse P auf A, und erzeugt die Richtung des induzierten Stromes in A einen Nordpol, so wird jetzt P von A abgestoßen und andererseits Q um so stärker von dem verstärkten Südpol in B angezogen. Die Zeiger werden also zu laufen beginnen. Bei umgekehrter Richtung des induzierten Stromes findet dagegen gerade die entgegengesetzte Bewegung des Hebels statt, und die Zeiger werden wieder ausgerückt. Der primäre Strom, in dem der Reiz- und der Reaktionsapparat bzw. die beiden Kontakte zur Uhrkontrolle liegen, muß also hier bei den Klemmen k_1 und k_2 stets in bestimmter Richtung durch das Induktorium geschickt werden, und zwar bei Ruhestrom einfach in entgegengesetzter wie bei Arbeitsstrom.

Über die Einzelheiten, die bei der Adjustierung zu berücksichtigen sind, z. B. die Erlangung der richtigen Gleichgewichtslage des dreiarmigen Hebels PQn, ist in den bisherigen Beschreibungen[1]) nichts Näheres angegeben, und bei früheren Anwendungen des nämlichen Prinzipes in der Technik hatte dieser Gesichtspunkt wohl kaum die gleiche Bedeutung wie gerade hier. Da die Induktionswirkungen bei Schließung und bei Öffnung des primären Stromes verschieden sind, so müßte bei völliger Symmetrie aller mechanischen Verhältnisse (einschließlich des permanenten Magnetismus) zur Übergangsstellung des Hebels (s. S. 516) auch die Latenzzeit bei Öffnung kürzer als die bei Schließung sein. Auch müßte ein hieraus resultierender Fehler für Arbeits- und Ruhestrom entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Es ist also wohl anzuerkennen, daß bei diesem Apparat die Schwierigkeiten, die sich sonst aus dem Antagonismus der Federkraft und des Magnetismus ergeben, sowie die Gefahr der Erschlaffung der Federn und des remanenten Magnetismus vermieden sind. Um aber die kleinen von Schulze angegebenen Fehler von wenigen σ zu erlangen, die übrigens auch bei gelegentlichen Kontrollversuchen am Leipziger psychologischen Institut nicht größer ausfielen, muß dafür die kaum einfachere Aufgabe gelöst werden, den richtigen Antagonismus zwischen dem Hebelwiderstand und der Induktionswirkung herauszufinden. Im übrigen steht allerdings das zunächst noch nicht benutzte Hilfsmittel zur Verfügung, die beiden Stromänderungen im primären Kreise am Anfang und Schluß der zu messenden Zeitstrecke durch entsprechende Schaltungen verschieden groß zu machen und dadurch die beiden Latenzzeiten gar vollständig gegen einander auszugleichen. Vielleicht kommt man dann auch mit einer geringeren Stromstärke aus als mit der für solche Verhältnisse sehr hohen von 3,5 Amp., die Schulze bisher am günstigsten fand. Bei seiner Prüfung ergaben sich für drei verschiedene Stromstärken die Zeitfehler bei zwei gemessenen Zeiten[2]):

1) R. Schulze, a. S. 458, A. 2 a. O. S. 274 (Anhang: Ein neues Chronoskop) und ders., Neue Apparate für experimentelle Untersuchungen, Pädagogisch-psychologische Arbeiten, Veröffentlichungen des Instituts für experimentelle Pädagogik u. Psychol. des Leipziger Lehrervereins, I. Bd. 1910, S. 151 (Chronoskop mit polarisiertem Magneten S. 163).

2) Ebenda (Päd.-psychol. Arb.), S. 177.

	2,5 Amp. bei 2 Volt:	3,5 Amp. bei 8 Volt:	4 Amp. bei 10 Volt:
360 σ:	— 2,35 (m. V. 0,6)	— 0,25 (m. V. 1)	+ 2 (m. V. 0,5)
620 σ:	— 3 (m. V. 1,6)	0 (m. V. 1,3)	+ 2,4 (m. V. 1,3)
360 σ:	— 2,65 (m. V. 1,2)	0 (m. V. 0,8)	+ 2,05 (m. V. 0,6).

Auch hier kann man etwa 30 σ noch exakt messen, während die obere Grenze des Meßbereiches durch Erhöhung des Säulengestelles auf $1\frac{1}{2}$ Minuten erhöht ist. Die mittlere Variation ist keinesfalls größer als bei den besseren Apparaten des bisherigen Systems.

Druck von August Pries in Leipzig.