Nouvelles études sur les réfractions atmosphériques / by M. Biot.

Contributors

Biot, Jean-Baptiste, 1774-1862.
Royal College of Surgeons of England

Publication/Creation

Paris : Mallet-Bachelier, 1855.

Persistent URL

https://wellcomecollection.org/works/ezghdajt

Provider

Royal College of Surgeons

License and attribution

This material has been provided by This material has been provided by The Royal College of Surgeons of England. The original may be consulted at The Royal College of Surgeons of England. where the originals may be consulted. This work has been identified as being free of known restrictions under copyright law, including all related and neighbouring rights and is being made available under the Creative Commons, Public Domain Mark.

You can copy, modify, distribute and perform the work, even for commercial purposes, without asking permission.

wellcome collection

Wellcome Collection
183 Euston Road
London NW1 2BE UK
T +44 (0)20 7611 8722
E library@wellcomecollection.org
https://wellcomecollection.org

C. 11

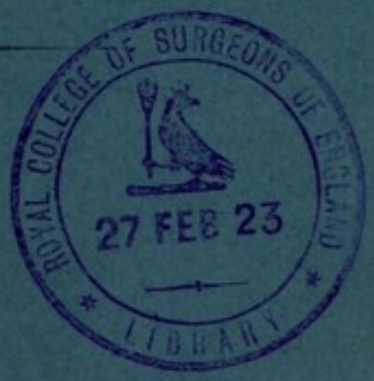
(12

NOUVELLES ÉTUDES

SUR LES

RÉFRACTIONS ATMOSPHÉRIQUES,

PAR M. BIOT.



PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Rue du Jardinet, 12.

1855

NOUVELLES ÉTUDES

SUR LES

RÉFRACTIONS ATMOSPHÉRIQUES,

PAR M. BIOT.

ROYAL COLLEGE OF SURGEONS OF ENGLAND
27 FEB 23
LIBRARY

AVERTISSEMENT PRÉLIMINAIRE.

« On trouvera ici rassemblés une série d'articles qui ont été successivement publiés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. Ils ont été écrits à l'occasion d'une discussion qui s'était élevée dans cette Compagnie, sur un point de théorie relatif à l'appréciation des réfractions atmosphériques, discussion à laquelle plusieurs Membres des Sections d'Astronomie, de Géométrie, de Physique avaient pris part. L'intérêt, plus qu'ordinaire, qu'elle avait excité, me parut offrir une opportunité favorable, pour attirer sur tout l'ensemble des théories qui s'y rapportent, le concours de talents et de connaissances diverses, qui se trouvent réunis dans l'Académie. Il est peu de sujets de recherches scientifiques, où ce concours, toujours utile, soit plus essentiel, et doive avoir des conséquences plus importantes. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la série d'études variées, dont celui-ci a été l'objet, et les efforts de tous genres qu'on y a progressivement appliqués. La nécessité en faisait une loi. Les réfractions produites par l'atmosphère interviennent dans toutes les observations des astronomes, et par suite dans toutes leurs déterminations. Aussi, dès qu'ils ont eu compris la nécessité, et conçu l'espérance, de rendre celles-ci exactes, ce qui a commencé à Tycho, ils se sont efforcés de mesurer les réfractions par des pratiques d'abord grossières; puis en s'aidant d'un empirisme plus ou moins raisonné, pour rassembler dans une loi continue les appréciations

obtenues isolément. En ceci, nul n'a été plus heureux, mais aussi plus judicieux et plus habile, que Dominique Cassini. S'attachant à la partie du phénomène qui s'étend jusque vers 80 degrés du zénith, laquelle est d'une application continuelle, et heureusement aussi, la moins accidentée, il réussit à lier entre elles les réfractions qui s'y produisent, en imaginant une hypothèse physique qui reproduit très-approximativement leurs valeurs moyennes. L'influence des conditions météorologiques pour modifier occasionnellement ces valeurs, quoique très-manifeste, ne pouvait être appréciée alors, parce que l'on manquait des instruments et des méthodes qui servent à la mesurer. L'utilité de ces résultats, encouragea les astronomes à chercher quelque règle empirique, qui pût s'étendre jusqu'à l'horizon; et les efforts peu intelligents de Flamsteed pour y réussir ayant attiré l'attention de Newton sur ce sujet, il entreprit de calculer théoriquement les réfractions qui doivent se produire à toute distance du zénith, non pas dans une atmosphère idéale comme Cassini, mais dans une atmosphère réelle, constituée comme celle de la Terre, connaissance dont il se croyait plus proche qu'il ne l'était et ne pouvait l'être. Il se livra entièrement à ce travail depuis le mois de novembre 1694, jusqu'au mois de mars 1695. Guidé par cette prodigieuse faculté d'intuition, qui lui faisait immédiatement apercevoir dans les phénomènes naturels, leurs causes mécaniques, il reconnut là, tout de suite, un problème d'astronomie planétaire, dans lequel la différence des attractions à petite distance, exercées sur la lumière par des couches d'air de densité inégale, remplaçait la gravitation. Partant de ce principe, et admettant, d'après quelques expériences d'Hanksbee et les siennes propres, que le pouvoir réfringent de l'air est proportionnel à sa densité, il détermina, par la théorie des forces centrales, l'orbite que devaient décrire des molécules lumineuses, mues suivant des directions quelconques, à travers une atmosphère dont les couches d'égale densité seraient sphériques, et en équilibre. Il obtint ainsi l'équation différentielle exacte et complète qui donne, sous une forme explicite, l'incrément infiniment petit de la réfraction, pour un tel cas. Restait à définir l'atmosphère à laquelle il en voulait faire l'application. Après plusieurs essais, qui ne le satisfirent point, il admit, comme caractère déterminatif le plus vraisemblablement conforme à la nature, que la densité de l'air, à toute hauteur est proportionnelle à la pression qu'il supporte. La variabilité de la force élastique des gaz, sous l'influence de la chaleur, fait qu'une telle proportionnalité ne peut exister que dans une atmosphère dont la température serait uniforme, ce qui n'est pas le cas de la nôtre. Mais cela était ignoré

alors. De cette hypothèse qu'il avait déjà exposée dans son *Livre des Principes,* il tira l'expression logarithmique de la densité en fonction de la hauteur, pour l'état supposé d'équilibre; et la substituant dans l'expression de l'incrément différentiel de la réfraction, il n'y avait plus qu'à l'intégrer pour obtenir la réfraction locale, correspondante à chaque distance de l'astre au zénith. Cette opération dépassait de bien loin les forces de l'analyse de son temps. Il y suppléa par des quadratures partielles. Il parvint ainsi, par théorie, à construire une Table de réfractions applicable à toutes les distances zénithales, la première que l'on eût ainsi obtenue, et même espéré d'obtenir. Il en assujettit les constantes à représenter les valeurs des réfractions près de l'horizon qui avaient été déterminées par Flamsteed, lesquelles étaient malheureusement très-peu exactes et dépourvues d'indications météorologiques, malgré toutes les prières que Newton lui avaient adressées pour qu'il les annexât habituellement à ses observations, en prévision de leur utilité future. Il transmit aussitôt cette Table à Flamsteed, qui en fit peu de cas, s'offensant de ce qu'on ne lui en eût pas communiqué aussi la démonstration, qui lui aurait été fort inutile. Pour le calmer, Newton lui envoya l'énoncé du théorème principal sur lequel il l'avait établie, avec la figure explicative qui s'y rapportait, lui laissant le soin de le démontrer, et d'en faire l'application. Il confia aussi cette Table, probablement sous la même réserve, à Halley, plus en état que l'autre d'apprécier la valeur de ce service rendu à l'astronomie. Mais elle ne fut portée à la connaissance du public que vingt-six ans plus tard, en 1721. Halley, avec l'assentiment de Newton, l'inséra enfin, cette année-là, dans les *Transactions philosophiques*, toujours sans démonstration, sans aucune indication de la méthode qui avait servi pour la construire; faisant seulement remarquer que la détermination de la courbe décrite par un rayon lumineux à travers l'atmosphère, est une question très-difficile, *ainsi que le Dr Taylor l'a montré, dans la dernière proposition de son* METHODUS INCREMENTORUM. C'est qu'en effet, à la fin de cet ouvrage, publié en 1717, Taylor avait abordé le problème des réfractions, au même point de vue mécanique sous lequel Newton l'avait envisagé. Il avait obtenu, comme lui, l'expression exacte de l'élément différentiel de la réfraction, et l'avait appliquée au même système d'atmosphère. Mais, voulant l'intégrer généralement par des séries, il y avait supprimé certains termes qui gênaient son calcul, quoiqu'ils fussent nécessaires pour en pouvoir déduire une Table de réfractions applicable aux observations astronomiques, ce qu'effectivement Taylor n'avait pas tenté. La publication faite alors par Halley, conservait donc à Newton

tout l'honneur d'avoir calculé, le premier, une Table pareille, avec l'avantage de tenir encore sa méthode secrète, sorte de privilége d'inventeur dont il se montra toujours fort jaloux. Il se passa un peu plus d'un siècle avant que l'on fût parvenu à la reconstruire théoriquement sur les mêmes principes. Dans l'intervalle, on revint à des formules hypothétiques, à des règles isolées, empiriquement déduites des observations; à quoi concoururent diversement de savants théoriciens et d'habiles astronomes, Bouguer, Th. Simpson, Lambert, Mayer, Lacaille, Euler même. A part d'eux, dans le silence de Greenwich, Bradley s'en formait une, plus proche des phénomènes, et que l'on s'empressa d'accepter aussitôt qu'on la connut; ce qui n'arriva qu'en 1764, deux ans après sa mort. Sa généralité, sa simplicité, qui la faisaient ressembler à une loi naturelle, appelèrent sur cet important sujet les efforts de Lagrange. En 1772, il reprit le problème général des réfractions, au point de vue mécanique, comme Newton et Taylor. Il retrouva les deux équations différentielles auxquelles il donne lieu, ainsi envisagé. Mais, dans le dénûment de données physiques, où l'on était encore, tout ce qu'il put faire, ce fut d'en tirer à titre de déductions approximatives, la règle barométrique de Deluc, et pour les réfractions celle de Bradley, qui étaient les seuls éléments généraux de vérification auxquels il put comparer sa théorie. Enfin en 1798, un géomètre physicien jusqu'alors peu connu, simple professeur de chimie et de physique dans une école départementale, Kramp, parvint à résoudre complétement, par une analyse directe et rigoureuse, le problème des réfractions, dans le système d'atmosphère que Newton avait considéré, et où l'on suppose la densité proportionnelle à la pression. Il réussit à obtenir, par des intégrales générales, ces mêmes réfractions que Newton n'avait pu évaluer qu'isolément par des intégrations partielles. Mais en outre, ce qui est encore un grand service qu'on lui doit, il reconnut et prouva, que ce système d'atmosphère, quoique s'accordant avec l'atmosphère terrestre, dans quelques-unes de ses propriétés générales, en diffère dans plusieurs particularités physiques, dont l'influence doit modifier essentiellement les réfractions; de sorte que la Table de ces phénomènes que l'on en déduit, ne saurait être conforme aux réfractions véritables. A défaut de données physiques suffisantes pour espérer même d'assujettir celles-ci à une théorie rigoureuse, il proposa une hypothèse physique et mathématique, dont l'emploi lui parut propre à les faire obtenir plus approximativement que toute autre. C'est la même que Bessel a prise pour base de ses calculs, dans les *Fundamenta* et les *Tabulæ Regiomontanæ*.

» Ces travaux de Kramp, tout importants qu'ils étaient, avaient donc

pour résultat final de rejeter encore toute la théorie des réfractions dans les hypothèses. Heureusement, une portion considérable de cette théorie, et la plus importante pour les observations astronomiques, peut être rendue absolument indépendante de ce périlleux accessoire. C'est ce que personne n'avait vu avant Laplace. Au livre X de la *Mécanique céleste*, il démontra que, jusque vers 80 degrés de distance zénithale, le simple développement de l'équation différentielle donne, sans erreur pratiquement appréciable, des valeurs absolues des réfractions, dans toute atmosphère sphérique en équilibre, et pour tous les états météorologiques de la couche d'air inférieure, au moyen d'une formule qui ne contient que deux constantes, immédiatement déterminables par les expériences physiques ou les observations astronomiques elles-mêmes, *quelle que puisse être d'ailleurs la constitution de l'atmosphère où la réfraction se produit*.

» C'était un important progrès dans l'étude d'un phénomène aussi complexe, que d'avoir signalé et détaché de son ensemble une portion si étendue de ses phases, où il peut être atteint et embrassé par un calcul général, sans qu'il soit besoin de dénaturer aucunement ses détails, pour le lui appliquer. Mais, à l'époque où Laplace publia sa formule approximative, elle ne pouvait pas être appréciée à sa véritable valeur. Les astronomes pratiques l'auraient trouvée beaucoup trop restreinte pour leurs besoins. Séduits par la généralité de la règle de Bradley ; par la confiance que leur inspiraient toujours leurs propres tentatives d'interpolation ; ne voyant pas les difficultés physiques du problème; ils demandaient impitoyablement aux géomètres de leur fournir des Tables générales qui leur donnassent les valeurs des réfractions à toute distance du zénith, dans tous les états possibles de l'air à leurs stations. Laplace, pour les satisfaire, composa donc aussi une hypothèse mathématique, s'appliquant à toutes les distances zénithales. Seulement il eut la précaution, trop peu remarquée, d'assujettir son empirisme à s'accorder numériquement avec la formule approximative, dans toute la portion du phénomène que celle-ci embrasse ; ce qui, du moins, restreignait les évaluations hypothétiques aux seules réfractions inférieures qu'elle ne peut donner. Quant à l'adapter aux différents états de l'air, il ne s'en chargea point ; montrant, par son silence, qu'il ne la jugeait pas susceptible de cette extension. Bessel et Ivory, qui le suivirent dans cette voie, n'eurent, ni le même discernement, ni la même prudence. Étendant leurs hypothèses à la totalité du phénomène, ils sacrifièrent le certain à l'incertain, pour tâcher de les accorder à peu près ensemble. Plus tard, d'habiles astronomes fabriquèrent encore d'autres Tables de réfraction gé-

nérales, et purement empiriques, pour leur usage propre. De là il arrive qu'aujourd'hui, celle de toutes les sciences d'observation qui a le plus besoin d'appréciations exactes et uniformes, se trouve, à cet égard, si peu fixée, que la réfraction, produite par des circonstances physiques semblables, est évaluée diversement dans les observatoires répartis sur différents points du globe; même, quand elle s'opère à des distances zénithales où l'on peut l'obtenir, sans indétermination, par un calcul certain.

» Pour ôter tout prétexte à ces discordances, je m'attache d'abord à justifier la formule approximative de Laplace; non pas, sans doute, au point de vue analytique, cela n'était pas nécessaire; mais, quant aux conditions de sphéricité et d'équilibre qu'elle suppose exister, sur le trajet des molécules lumineuses auxquelles l'approximation s'applique. Ceci n'exige point leur réalisation simultanée dans l'universalité de l'atmosphère; mais seulement leur réalisation locale, dans un secteur atmosphérique très-aigu, décrit autour de la verticale de l'observateur, dont il ne s'écarte que de $2^{\circ}\,19'\,20''$ au plus. Considérant donc cette portion restreinte de l'atmosphère, je prouve que la condition de sphéricité peut toujours y être légitimement admise, à titre de construction auxiliaire, individuellement applicable à chacune des trajectoires lumineuses qui s'y forment. Quant à la condition d'équilibre, elle est employée uniquement pour pouvoir admettre que le poids total des molécules d'air contenues dans chaque colonne verticale du secteur considéré, est représenté et mesuré par la pression barométrique qui s'exerce à sa base. Or, comme cette supposition d'équivalence affecte seulement un terme de la formule dont la valeur n'excède jamais quelques secondes d'arc, la conclusion serait encore suffisamment exacte dans les applications, si les forces qui peuvent altérer l'équilibre, dans le sens vertical, étaient individuellement fort petites et de nature à se compenser au moins en partie par opposition, sur toute la longueur de la colonne aérienne. Je montre, par des considérations physiques et des épreuves numériques, qu'il en devra toujours être ainsi; à moins de perturbations atmosphériques si désordonnées, qu'elles ne sont nullement supposables, et que si elles devaient jamais se produire, elles rendraient les observations pratiquement impossibles pendant qu'elles subsisteraient.

» Il ne reste plus qu'à discuter les deux constantes l et α que la formule renferme. Cela est bien facile. La première s'obtient par des pesées comparatives de l'air et du mercure sur lesquelles on ne peut aujourd'hui élever aucun doute. L'autre a été conclue d'observations astronomiques et d'expériences physiques, dont les résultats se sont complétement accordés.

D'ailleurs, pour celle-là, il n'y a pas besoin de s'en rapporter à l'autorité de personne. Chaque astronome peut, à sa volonté, la vérifier, ou la déterminer de nouveau, par ses seules observations.

» Cette première partie de la théorie étant ainsi complétement assurée dans ses éléments physiques, comme elle l'était déjà dans ses principes analytiques, je passe à l'examen des hypothèses à l'aide desquelles on a prétendu la continuer jusqu'à l'horizon, ou même la remplacer entièrement par des expressions embrassant l'universalité du phénomène. Cet examen, pour être concluant, m'a paru devoir être, en quelque sorte, expérimental; et il ne pouvait être présenté utilement sous cette forme, qu'à une assemblée, où se trouvent réunies toutes les connaissances de géométrie, de mécanique, de physique, qui interviennent, pour des parts diverses, mais également nécessaires, dans la question ainsi envisagée. Prenant donc les hypothèses de ce genre les plus accréditées, celles qui ont été proposées par Laplace, Ivory, Kramp, et Bessel, je les dépouille de leur enveloppe mathématique, et j'en extrais leur interprétation naturelle. Je reconstruis les atmosphères qu'elles supposent, et j'en montre les caractères spéciaux: leur étendue, leur hauteur infinie ou bornée, les conditions physiques et mécaniques qui les rendent telles; le décroissement, soit absolu, soit local des températures, depuis leur base jusqu'à leur sommet. En comparant ces résultats à ce que nous connaissons de l'atmosphère réelle, on aperçoit avec évidence, qu'aucune de ces atmosphères hypothétiques ne lui est, même approximativement, assimilable; et qu'ainsi elles ne peuvent pas donner les vraies réfractions; surtout celles qui s'opérant près de l'horizon, se montrent perpétuellement troublées par des accidents lointains, dont les hypothèses ne tiennent aucun compte.

» A cela on pourra répondre que ces dernières réfractions, échappent inévitablement à toute théorie; et que, dans l'impossibilité où l'on est de prévoir leurs caprices, on ne doit demander aux hypothèses que de reproduire leurs valeurs moyennes. C'est en effet un des genres d'utilité qu'Ivory et Bessel ont prétendu obtenir de celles qu'ils ont employées. Mais alors, il faudrait, comme l'a fait Laplace, borner l'empirisme à cette portion irrégulière du phénomène, et ne pas l'étendre à des déterminations qui peuvent en être rendues indépendantes. Même, pour ce but particulier, les hypothèses sont encore inutiles. Car, en s'aidant de la formule de Laplace judicieusement appliquée, on peut, comme je le montre, obtenir, par l'observation seule, des Tables de ces valeurs moyennes qui seront propres à chaque localité; qui les donneront telles qu'elles se produisent réellement

dans tout azimut qu'on voudra choisir; et qui offriront encore cet avantage que si, un peu au delà des distances zénithales auxquelles la formule de Laplace s'applique, il existe entre les réfractions et les indications météorologiques, quelque relation assez constante pour qu'on puisse s'en prévaloir, on aura toute chance de la découvrir. Des Tables ainsi construites d'après l'observation pure, pour les distances zénithales que la formule approximative ne peut atteindre, fourniraient, sur la constitution des couches inférieures de l'atmosphère, des documents certains, qui se rattacheraient efficacement à ceux que les physiciens croient recueillir dans ces couches mêmes, ce qui aurait le double avantage d'assurer le présent et de préparer l'avenir.

» Voici donc, en résumé, quel a été le but, et je voudrais pouvoir dire, quel est aussi le résultat de mon travail. Depuis Képler et Newton, la science astronomique s'est débarrassée de l'empirisme qui, jusqu'alors, l'avait dirigée. Elle ne s'en sert plus que pour évaluer les réfractions atmosphériques, qui affectent toutes ses déterminations. J'ai voulu montrer, qu'en cela encore, il lui est inutile; et qu'il ne lui fournit rien qu'elle ne puisse se procurer plus sûrement, par elle-même, sans le secours de cet auxiliaire dangereux. Ai-je rendu ce fait assez évident, pour que l'application doive s'ensuivre? D'autres en décideront. »

(*Séance du 4 septembre* 1854.)

Note lue à l'occasion du Compte rendu *de la dernière séance.*

« Le numéro des *Comptes rendus* qui vient de paraître, contient une Note de M. Faye, *sur les réfractions astronomiques*, dans laquelle notre confrère nous apprend, que la théorie de ces phénomènes, telle qu'elle a été établie par Newton, Laplace, Ivori et la généralité des géomètres, présente une contradiction *qui l'a toujours frappé*. Il spécifie en quoi elle consiste; et il indique les moyens qu'il a imaginés, pour la faire disparaître.

» Mon nom étant rappelé deux fois dans cette Note, à propos de recherches relatives à ce grand problème physique, dont je me suis en effet longtemps occupé, je me trouve dans la nécessité de déclarer ici mon complet dissentiment avec M. Faye, tant sur l'essence de la faute qu'il signale dans les théories adoptées, que sur la valeur du procédé qu'il propose pour y porter remède. Je vais établir ces deux points aussi succinctement qu'il me sera possible.

» Je commence par l'objection. La théorie actuelle des réfractions astronomiques, est calculée pour une atmosphère sphérique, de constitution permanente, soumise à une loi invariable de décroissement des densités; ce qui permet d'évaluer la totalité de la réfraction opérée sur la longueur entière de chaque trajectoire lumineuse, d'après la densité actuelle de la dernière couche d'air, dans laquelle l'observateur se trouve placé.

» S'il en est ainsi, dit M. Faye, les réfractions qui s'observent entre des objets terrestres, devraient être également calculables d'après cette seule densité finale, et l'on devrait par conséquent la trouver toujours la même, quand cette densité reste constante. Or on reconnaît au contraire, que, dans ce cas, elle est extrêmement variable, même quand les objets entre lesquels on l'observe, sont des sommets de montagnes très-élevés au-dessus du sol intermédiaire.

» Les deux faits cités sont exacts, et les auteurs des théories ne les ont point ignorés. Mais la contradiction que M. Faye déduit de leur rapprochement, quoique vraie au point de vue mathématique, n'a pas, dans les observations astronomiques, la gravité d'application qu'il lui suppose.

» Dans l'état habituel de l'atmosphère, les trajectoires lumineuses qui nous viennent des astres élevés de quelques degrés au-dessus de l'horizon,

sont des courbes concaves vers la surface terrestre. Si, du centre de la Terre, on mène à un quelconque de leurs points une droite indéfinie, qui, prolongée, marquera sur le ciel le zénith de ce point, et qu'au même point on leur mène une tangente, la branche de cette tangente située du côté de l'astre, montrera la direction sur laquelle il serait vu par un observateur placé au point choisi; et l'angle formé par cette même branche avec le rayon zénithal prolongé, sera ce que l'on peut appeler la distance zénithale *locale* de l'astre. Cet angle grandit sur chaque trajectoire à mesure qu'elle pénètre dans des couches atmosphériques plus denses; mais, du reste, les définitions précédentes s'y appliquent toujours. Maintenant, si un observateur placé à la surface même de la Terre, perçoit un ou plusieurs astres par autant de trajectoires pareilles, dont la dernière tangente est diversement inclinée sur sa verticale propre, on démontre en toute rigueur, que, depuis le zénith, jusqu'à une distance zénithale d'environ 60 ou 70 degrés sexagésimaux, ce qui comprend presque toutes les observations astronomiques auxquelles on veut attacher un caractère de précision, la somme totale des inflexions que la réfraction y a opérées, est sensiblement indépendante du mode de succession des densités dans les couches supérieures que la trajectoire a parcourues; et qu'on peut la conclure de la densité finale, combinée avec la mesure de la distance zénithale apparente, dans des amplitudes d'incertitude comparables, si ce n'est inférieures, à celles que les observations elles-mêmes comportent. Ainsi déjà, pour ce cas d'application très-étendu, et de beaucoup le plus essentiel aux astronomes, peu importe qu'il survienne dans l'atmosphère des changements de stratification accidentels, puisque les réfractions totales qui s'opèrent n'en sont point ou à peine modifiées. Ce résultat de la théorie mathématique est manifestement confirmé par l'expérience. Car, depuis le zénith jusqu'à 60 ou 70 degrés de distance zénithale apparente, toutes les Tables de réfractions, correctement calculées dans les hypothèses de constitution atmosphérique les plus diverses, donnent presque identiquement les mêmes indications.

» Sortons maintenant de ces limites; et, plaçant toujours notre observateur à la surface de la Terre, faisons parvenir à son œil une trajectoire lumineuse, dont la dernière tangente forme avec sa verticale un angle plus grand que 70 degrés. Alors, si nous remontons par la pensée le long de cette trajectoire, nous y trouverons un point, une station, où la distance zénithale locale n'excédera plus cette valeur. Le théorème rappelé tout à l'heure y deviendra donc applicable; et toute la portion de la réfraction qui se sera opérée sur le reste de la trajectoire, pourra se calculer d'après la densité

actuelle de l'air à cette station. Mais cette densité ne pourra s'évaluer que si l'on connaît la loi actuelle de la stratification des couches inférieures, et cette connaissance sera également indispensable pour connaître la portion de la réfraction totale sur la trajectoire considérée. Ici commencent les incertitudes, et elles sont d'autant plus grandes que les trajectoires sont plus basses; parce que, d'une part, le point de leur cours où l'indépendance de la stratification commence à être admissible, devient plus distant; de l'autre, parce que la radiation de la surface terrestre et sa température locale occasionnent des perturbations plus considérables et plus capricieuses, sur les couches d'air qui en sont rapprochées. On ne peut donc alors se proposer, que de déterminer expérimentalement l'état de stratification moyen, autour duquel les états accidentels oscillent habituellement. Les géomètres se sont beaucoup plus occupés de cette question que M. Faye ne semble le croire quand il dit que les astronomes qui emploient leurs Tables ne tiennent pas compte de cette partie inférieure de la réfraction. Laplace a fait beaucoup d'efforts pour la conclure du décroissement moyen des températures à mesure que l'on s'élève au-dessus de la surface terrestre. Mais malheureusement les déterminations expérimentales que l'on a jusqu'ici obtenues sur cet élément ne sont ni assez certaines ni assez nombreuses pour que l'on puisse en déduire des moyennes assurées. On trouve dans les additions à la *Connaissance des Temps*, de 1839 à 1842, et dans le tome XVII de notre Académie, plusieurs Mémoires qui ont spécialement pour but, de rechercher l'état moyen de stratification des couches inférieures de l'atmosphère pour l'appliquer au calcul des réfractions qui s'y opèrent, soit sur les astres, soit entre des signaux terrestres; et l'on y a employé avantageusement les indications recueillies par Gay-Lussac dans son mémorable voyage aérostatique, ainsi que les observations faites par MM. de Humboldt et Boussingault sur les hautes montagnes des régions équatoriales. L'accord des lois ainsi obtenues à des latitudes si distantes, par des observations si diverses, peut faire espérer que des recherches persévérantes suivies dans ces voies ne seraient pas sans fruit. Quant à l'idée émise par M. Faye d'employer les observations des réfractions terrestres pour calculer les réfractions astronomiques qui se font près de l'horizon, il me semble que les énormes perturbations locales qui se produisent entre des signaux placés à de petites distances, donneraient beaucoup plus de risque de vicier les indications moyennes de nos Tables si l'on voulait les y transporter, l'état des couches d'air plus éloignées, pouvant être fort différent de celui qu'elles accuseraient; et l'inconvénient serait bien autrement grave, si l'on voulait intro-

duire les résultats de ces dernières réfractions, si capricieusement variables, dans le calcul des réfractions astronomiques, aux limites de distances zénithales où la théorie montre qu'elles sont indépendantes du mode de stratification des couches d'air supérieures au lieu d'observation.

» Je n'ai pas écrit cette Note dans une intention de critique. Mais uniquement parce que j'ai cru pouvoir exprimer librement mon avis, sur une question de physique céleste qui m'a longtemps occupé. Je n'aurais ni le temps, ni la volonté, de prolonger sur ce sujet une polémique qui me semblerait superflue; et je m'en remets entièrement au jugement général des géomètres, des physiciens et des astronomes pour décider qui, de M. Faye ou de moi, est dans le vrai. »

(*Séance du* 18 *septembre* 1854.)

Note sur les articles relatifs aux réfractions atmosphériques.

« Lorsqu'une discussion scientifique s'élève dans une Académie telle que la nôtre, et acquiert un développement qui amène plusieurs de ses Membres à y prendre part, en attirant l'intérêt de tous, ce peut être une excellente occasion de faire concourir au perfectionnement des théories controversées, les connaissances spéciales que chaque individu possède, et qui s'adapteraient à leurs détails avec moins d'entente, par le manque d'une direction commune, si elles y étaient appliquées isolément. Cela peut offrir aussi l'avantage de répandre dans un plus grand nombre d'esprits éminents, des doctrines que leurs études propres ne leur ont pas donné lieu d'approfondir, quoiqu'ils pussent y apporter des améliorations importantes, si on les décidait à y pénétrer. Supposant donc de telles discussions, suivies et soutenues, dans la seule intention de fortifier, d'accroître, la somme des vérités déjà acquises, sans y mêler de misérables sentiments d'aigreur ou d'animosités personnelles, la science ne saurait que gagner à ce qu'elles se produisent; et, dans cet intérêt, commun à nous tous, on doit plutôt souhaiter de les voir naître, et s'entretenir par une émulation active, que s'éteindre et mourir sous le froid accueil d'un silence indifférent.

» Une condition essentielle, et l'on pourrait dire, logiquement nécessaire, pour que cette lutte d'idées soit profitable, c'est que l'on éclaircisse d'abord

complétement le terrain sur lequel la discussion repose; qu'on y marque avec précision les limites actuelles du certain et de l'incertain; qu'on le débarrasse des erreurs qui ont pu s'y introduire, et qu'on le soumette à l'investigation commune, ainsi déblayé. Chacun de nous, sans doute, ne pourra remplir cette tâche que dans les bornes de ses vues propres, avec la défiance qu'elles doivent toujours inspirer à ceux qui les croient les plus assurées. Mais cette juste réserve étant admise (et, qui de nous ne doit pas l'admettre, pour lui-même comme pour les autres!), il faut que chacun soit reçu à dire complétement sa pensée sans qu'on s'en offense; à exposer librement ce qu'il croit vrai, ce qu'il croit faux, en accordant à ses contradicteurs la même patience, la même indulgence, dont il aura presque infailliblement besoin, à son tour, pour peu que la controverse se prolonge, et s'étende aux régions de l'inconnu.

» La discussion qui vient de s'élever dans l'Académie sur l'important sujet des réfractions atmosphériques, me paraît s'être assez généralisée pour que la question puisse être maintenant traitée avec utilité devant elle, dans toutes ses parties. D'excellentes vues ont été émises sur les procédés physiques qu'il faudrait mettre en œuvre, pour perfectionner les observations de ces phénomènes, par une meilleure appréciation des éléments météorologiques qui y concourent, lesquels ont été jusqu'ici abandonnés à des évaluations imparfaites qui ne sont plus en rapport avec les progrès que la science expérimentale a faits de notre temps; état de choses d'autant plus dommageable à l'astronomie de précision, qu'il apporte journellement dans ses résultats, des erreurs inconnues, que l'on ne pourra jamais corriger ultérieurement. Sur ce point, des améliorations essentielles ont été proposées; d'autres, je crois, non moins désirables, qui n'ont été qu'indiquées, pourraient être utilement associées à celles-là. Entrant, autant que je le peux encore, dans ces vœux d'un progrès trop longtemps différé, je demande à l'Académie la permission de lui soumettre, sur l'ensemble et les détails de ce grand problème d'astronomie physique, les idées de perfectionnement qui m'ont été suggérées, par une longue étude des théories qui s'y appliquent, et par une longue expérience personnelle de ses plus minutieuses particularités. Mais, pour que la combinaison de ces idées avec celles qui ont été déjà présentées ici, puisse être fructueusement effectuée, j'ai besoin de définir, par des spécifications précises, les différents ordres de phénomènes auxquels je conçois qu'on devra diversement les appliquer; et ceci exige que j'établisse préalablement la proposition suivante :

» Remonter de la réfraction opérée entre des signaux terrestres, à la

réfraction astronomique, par des résultats transportés de la première à la seconde, c'est un mode de déduction, qui, bien que théoriquement admissible, au point de vue mathématique, conduirait à des conséquences vicieuses dans l'application.

» Cette proposition sera l'objet d'une Note, que j'aurai l'honneur de lire à l'Académie dans la séance prochaine. »

(*Séance du 25 septembre 1854.*)

Sur les réfractions atmosphériques.

« Dans la dernière séance de l'Académie, je me suis engagé à établir la proposition suivante :

» Remonter de la réfraction opérée entre des signaux terrestres, à la réfraction astronomique, par des résultats transportés de la première à la seconde, c'est un mode de réduction, qui, bien que théoriquement admissible au point de vue mathématique, conduirait à des conséquences vicieuses dans l'application.

» Une étude plus attentive du sujet m'a fait reconnaître que la première partie de cet énoncé renferme une concession beaucoup trop large. Lorsque la formule approximative qui donne la réfraction terrestre proportionnelle à l'angle au centre, a eu son coefficient de proportionnalité numériquement déterminé par des observations faites à de petites hauteurs, elle n'est plus assez générale pour qu'on puisse l'étendre, même comme hypothèse analytique, à toute la masse gazeuse de notre atmosphère, parce que la valeur particulière, assignée ainsi à ce coefficient, serait presque toujours autre que la stabilité de cette masse ne l'exige, dans l'état de stratification qu'on lui attribue. Cette impossibilité, dont on verra ci-après la preuve, rend mon dissentiment avec M. Faye encore plus complet que je ne l'avais témoigné d'abord.

» Ces dénominations, de réfraction terrestre et de réfraction astronomique, sont impropres. La première n'est que la petite partie de la seconde, qui s'opère dans les couches d'air les plus basses et les plus rapprochées de l'observateur, aux distances restreintes où des signaux érigés sur la surface convexe de la Terre peuvent lui être visibles. Concevez une trajectoire

lumineuse, qui, partant d'une étoile, parvienne à son œil sous une certaine distance zénithale apparente, après avoir traversé toute l'atmosphère. La somme des déviations que le pouvoir réfringent des couches aériennes aura fait subir au rayon lumineux, dans le sens vertical, sur toute l'étendue de ce trajet, composera la réfraction astronomique, qui, ajoutée à la distance zénithale apparente, donnera la distance zénithale vraie, sous laquelle l'étoile aurait été vue directement à travers le vide. Maintenant supposez, que, dans le plan vertical qui contient cette trajectoire, on érige un signal vertical qui l'intercepte, et qui demeure seul visible pour l'observateur par la lumière propre qui en émanera. Ce signal devra être d'autant plus élevé au-dessus de la surface convexe de la Terre qu'il sera plus distant ; et cette condition de visibilité met des bornes très-restreintes à son éloignement, si on le compare à tout le reste de l'espace que la trajectoire lumineuse venue de l'étoile, a dû parcourir avant d'arriver au signal qui l'a interceptée. La faible portion de la réfraction totale qui se produit alors entre le signal et l'observateur, sur cette même trajectoire lumineuse idéalement continuée, constitue ce que l'on appelle la réfraction terrestre, pour les circonstances ici assignées à l'observation.

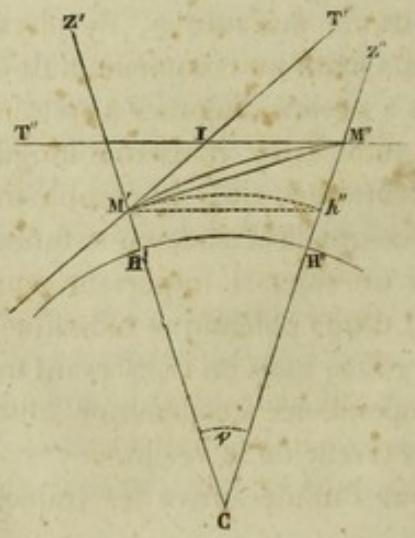
» Ces définitions étant établies, je me suis proposé de caractériser exactement les relations, tant mathématiques qu'expérimentales, qui existent entre ces deux parties du même phénomène. Les premières sont énoncées et fixées, dans le livre X de la *Mécanique céleste*, avec un détail et une rigueur de démonstration qui ne laissent rien à désirer. Je les ai tirées de là, en conservant scrupuleusement les mêmes notations symboliques avec lesquelles l'illustre auteur les a exprimées, et qui doivent être familières à tous ceux qui ont voulu étudier, après lui, ce problème, où il faut faire concourir des considérations de mécanique, de physique, d'astronomie, si délicates et si multipliées. Quant au complément de données expérimentales que le progrès du temps a permis d'ajouter à celles qu'il avait rassemblées, je les ai puisées, en grande partie, dans une longue pratique personnelle des divers genres d'observations qui s'y combinent. J'ai espéré pouvoir ainsi résumer utilement ce que la science nous fournit aujourd'hui de connaissances positives sur un sujet si important pour l'astronomie, sans y chercher le futile intérêt d'une polémique individuelle qui ne conviendrait ni à mon âge ni à mes goûts, mais en conservant toutefois l'entière liberté de discussion que l'indépendance académique autorise, et qui est indispensable pour séparer l'erreur de la vérité.

» N'ayant pas ici pour but de suivre les trajectoires lumineuses dans

toute l'étendue de leur cours à travers l'atmosphère terrestre, mais seulement d'étudier par la théorie et par l'observation des portions de ces trajectoires comprises entre des rayons vecteurs qui ne sous-tendent au centre de la Terre qu'un angle très-restreint, presque toujours moindre que 1 degré, j'emprunte au chapitre II du livre X de la *Mécanique céleste* leur équation différentielle générale, mise sous la forme la plus appropriée à cette recherche, et qui est :

$$(1) \qquad d\theta = -\frac{2k\left(\frac{d\rho}{dr}\right)}{1+4k\rho}\cdot r\,dv;$$

r est le rayon vecteur mené du centre de la sphère terrestre a un point quelconque de la trajectoire, où la densité de l'air est ρ, et $4k\rho$ son pouvoir réfringent, la vitesse de la lumière dans le vide étant 1. Le coefficient différentiel $\left(\frac{d\rho}{dr}\right)$ exprime donc la variation de la densité à cette hauteur entre deux couches d'air infiniment voisines; dv est l'élément de l'angle au centre compris entre deux rayons vecteurs infiniment voisins; et $d\theta$ est l'angle infiniment petit formé par les tangentes de la trajectoire, aux deux points extrêmes du petit arc que ces rayons vecteurs interceptent. La relation différentielle ainsi établie suppose que l'atmosphère considérée a une composition chimique uniforme, et que, dans la portion actuellement traversée par la trajectoire lumineuse, les couches d'égale densité sont concentriques à la région de la surface terrestre sur laquelle elles reposent; leur mode de répartition à diverses hauteurs pouvant d'ailleurs être quelconque. La même relation pourrait, avec une légère modification de symboles, être étendue à une atmosphère dont la composition chimique serait variable; mais je ne considère pas ici ce cas.



» Si l'on pouvait obtenir la somme des $d\theta$, qui se succèdent entre deux points de la trajectoire, situés à une distance finie l'un de l'autre, et que je désigne par M′, M″ dans la figure ci-jointe, cette somme ou intégrale θ représenterait l'angle aigu T″IM′, ou T′IM″, compris entre les tangentes menées à la trajectoire en ces deux points extrêmes M′, M″, dont les rayons vecteurs embrassent l'angle au centre v. Or, dans les limites d'application ici assignées, la valeur de θ peut être obtenue de deux manières : par la théorie, par l'observation.

» Pour suivre la première voie, il faut adapter l'équation différentielle aux conditions d'application restreinte que nous voulons lui donner, lesquelles exigent que les rayons vecteurs menés aux points M′, M″ diffèrent très-peu l'un de l'autre dans les étroites limites que la convexité de la Terre apporte à la possibilité d'une visibilité réciproque. Désignant donc le premier de ces rayons par r_1, faisons généralement :

$$\frac{r_1}{r} = 1 - s; \tag{2}$$

s sera une nouvelle variable qui restera toujours très-petite dans la portion restreinte de la trajectoire à laquelle notre application peut s'étendre. Par exemple, si la station M′ était située au niveau de la mer, et que M″ fût un signal élevé de 2400 mètres au-dessus de ce niveau, la plus grande valeur de s, sur la trajectoire lumineuse qui joindrait ces deux points, serait 0,000 376 849, et elle se réaliserait à ce signal même. Cet exemple justifie suffisamment le caractère de petitesse qu'on peut lui attribuer dans les applications plus restreintes.

» Introduisant donc cette variable s dans notre équation différentielle (1), elle devient :

$$d\theta = -\frac{2k(1-s)\left(\frac{d\rho}{ds}\right)}{1+4k\rho}\cdot dv. \tag{3}$$

Pour aller plus loin, il faudrait connaître la composition analytique de ρ et de $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)$ en fonction de s, dans les couches d'air que traverse la portion de la trajectoire lumineuse comprise entre les deux stations M′, M″. Vouloir l'assigner à priori, ce serait se jeter dans les hypothèses. Mais, en examinant les circonstances dans lesquelles cette difficulté se produit, on va voir, qu'à l'aide de quelques déterminations expérimentales aujourd'hui très-faciles, on peut toujours l'éluder avec une approximation suffisante pour toutes les opérations pratiques, et dont j'apprécierai plus loin les limites d'erreur.

» Les portions de trajectoires lumineuses que nous avons ici à considérer, sont toujours comprises dans des couches d'air peu distantes de la surface terrestre. Or, les plus simples notions de physique font pressentir que la distribution des densités, et par suite des pouvoirs réfringents dans le sens vertical, y doit être extrêmement variable, et soumise à de continuelles fluctuations. L'expérience ne confirme que trop ces prévisions de la science. C'est ce que savent, ou doivent savoir, tous les observateurs qui ont exécuté de grandes opérations géodésiques, et qui se sont rendu compte de leurs détails, par une pratique propre, non pas en les étudiant dans des livres, où l'on se complaît trop souvent à régulariser, par des moyennes, des résultats essentiellement irréguliers. Voyez combien Delambre, observateur toujours sincère, a rencontré de ces capricieux phénomènes dans la triangulation de la méridienne de France! Un air calme ou agité, un ciel couvert ou serein, parfois le seul passage d'un nuage qui venait voiler le soleil, faisaient varier les hauteurs apparentes de ses signaux, et les lui rendaient occasionnellement visibles et invisibles. Et ce n'est pas seulement pendant le jour que ces caprices s'observent. Nous en avons eu, Arago et moi, bien des exemples dans notre triangulation d'Espagne, qui a été faite tout entière sur des signaux de nuit, placés au sommet des plus hautes montagnes qui pussent les recevoir. J'en citerai un seul. C'était dans la nuit du 22 décembre 1806: nous étions à la station du Desierto de las Palmas, d'où nous observions le signal de Campvey, situé à 82557 toises de distance. Le temps était parfaitement calme depuis plusieurs jours; la température de l'air à notre station, 12 degrés centigrades. Sitôt après le coucher du soleil, dans le crépuscule, la lumière de Campvey se voyait distincte, unique, et bien terminée. Nous prîmes quatre fois l'angle de position entre elle et le signal de Mongo, sans rien remarquer d'extraordinaire. Mais ensuite, nous commençâmes à la voir accompagnée d'une seconde lumière située exactement dans la même verticale, à une distance que nous estimâmes au moins de trois minutes de degré. Bientôt il s'en forma trois, puis quatre, toujours dans le même vertical; tantôt se montrant toutes ensemble, tantôt s'éteignant isolément, pour reparaître après; l'une d'elles jusqu'à plus de cinq minutes de distance à la plus basse. Ce phénomène dura tant que la lumière de Campvey resta visible, et disparut avec elle dans les vapeurs, vers 11 heures du soir. Le lendemain le temps était encore calme, mais la mer était couverte au loin de masses de brouillard, arrondies, détachées les unes des autres, représentant des montagnes. Nous pensâmes que des courants d'air locaux avaient pu refroidir certaines parties de la surface de la mer, entre l'île d'Yviça, où était le signal, et la côte de Valence, où nous étions. Des perturbations analogues et beau-

coup plus fortes doivent aisément et fréquemment se produire pendant le jour dans les couches d'air comprises entre deux stations peu élevées au-dessus du sol, comme celles que l'on emploie habituellement pour les petites triangulations.

» Ce serait, à mon avis, faire un mauvais usage de l'analyse mathématique que de vouloir assujettir à des formules rigoureuses et générales des phénomènes si capricieux. Mais, dans les opérations géodésiques ordinaires, la minceur et le peu d'étendue de la masse d'air qui sépare deux signaux consécutifs, permet, le plus habituellement, de représenter son état réel, par des expressions approximatives, au moyen desquelles la quantité totale de la réfraction, opérée à travers cette masse, sur la portion de trajectoire lumineuse allant d'un signal à l'autre, peut être théoriquement calculée avec un degré de précision qui suffit aux besoins du praticien.

» Cela a lieu toutes les fois que les densités de l'air à diverses hauteurs varient dans l'épaisseur de cette masse, suivant une loi de décroissement ou d'accroissement continue, quelle qu'elle puisse être. C'est ce qui arrive en général dans les temps calmes, quand les circonstances météorologiques sont à peu près fixes. L'expérience, d'accord avec le raisonnement, montre qu'alors la variation des densités suit une marche très-lente; de sorte que leurs valeurs, même extrêmes, diffèrent peu entre elles, dans l'amplitude restreinte que l'intégrale θ doit embrasser. Admettant donc qu'un tel état existe actuellement, dans la mince épaisseur d'air parcourue par la trajectoire lumineuse, ou qu'il n'y soit que peu troublé, on voit que l'on aura déjà une valeur très-approchée de l'intégrale θ, en substituant, au coefficient variable de dv, un coefficient moyen et constant, formé avec les valeurs moyennes des quantités qui composent le coefficient théorique rigoureux. D'après cela, si l'on désigne par s_2 et ρ_2 les valeurs de s et de ρ à la station M'', comme elles sont o et ρ_1 à la station M' que nous avons prise pour origine des s, la valeur cherchée de θ sera

$$\theta = -k\,\frac{\left(1-\frac{1}{2}s_2\right)\left[\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0+\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_2\right]}{1+2k(\rho_1+\rho_2)}\cdot v. \tag{4}$$

Nous apprécierons tout à l'heure les limites d'erreur de cette expression approximative, mais il faut d'abord définir les caractères physiques des éléments qui la composent.

» Les densités ρ_1 et ρ_2 s'obtiendront immédiatement par les observations du baromètre et du thermomètre, faites simultanément aux deux stations. Les coefficients différentiels $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0$, $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_2$, représentent la variation virtuelle

de la densité en chacun de ces points. On les obtiendrait par des observations météorologiques analogues, effectuées à de petites hauteurs, tant au-dessus qu'au-dessous de chacun d'eux, dans leurs verticales propres, comme je les ai obtenus pour les diverses stations de Gay-Lussac, dans son voyage aérostatique. A défaut de pareilles observations, on pourra, mais avec une approximation moins sûre, quoique très-souvent suffisante, supposer ces coefficients différentiels égaux entre eux aux deux stations, et alors leur valeur commune s'obtiendrait par les observations météorologiques simultanées qu'on y aurait faites, puisque, à cause de la minceur de la couche d'air qui est censée les séparer, on pourrait prendre, pour cette valeur, le rapport $\frac{\rho_2 - \rho_1}{s_2}$, dans lequel s_2 se déterminerait par la formule barométrique, avec toute l'exactitude nécessaire. Cette égalité des deux coefficients deviendrait rigoureuse, si la variation des densités s'opérait en progression arithmétique avec les s, ce qui, dans les temps calmes, et pour de petites différences de hauteur, s'écarte habituellement très-peu de la réalité.

» Pour apprécier le degré d'approximation de cette formule, je me suis formé un type de comparaison exact, qui embrassât et dépassât toutes les amplitudes d'angle au centre, non-seulement admises, mais physiquement admissibles, dans les opérations géodésiques. Prenant comme exemple, l'état des couches inférieures de l'atmosphère, qui s'est réalisé dans l'ascension de Gay-Lussac, j'ai supposé que, dans ces circonstances, un astronome placé à l'Observatoire de Paris eût dans son méridien un signal dont la verticale fît avec la sienne un angle au centre de 1°30′; et qu'à cette distance, plus grande que le plus grand côté de nos triangles d'Espagne, ce signal lui fût visible à la distance zénithale apparente de 90 degrés, c'est-à-dire dans l'horizon même. Comme seconde épreuve, j'ai réduit l'angle au centre à 30 minutes, ce qui rentre dans les conditions ordinaires des opérations géodésiques. Alors, pour chacun de ces cas, j'ai calculé rigoureusement toutes les particularités de la trajectoire lumineuse, qui, partant des deux signaux, arrivait à l'observateur sous la distance zénithale apparente convenue de 90 degrés. La même analyse m'a donné, avec une égale rigueur, les hauteurs verticales relatives des deux signaux, qui satisfaisaient aux conditions de visibilité supposées; et, de ces calculs bien vérifiés, j'ai déduit les deux tableaux suivants, auxquels j'ai comparé les résultats de l'expression approximative, lesquels ne s'en écartent que dans d'étroites limites d'erreurs, que les praticiens peuvent négliger; et pour l'angle au centre de 30 minutes, ces erreurs deviennent tout à fait insensibles.

Tableau A.

Angle au centre..... $\nu = 1^\circ 30'$.
Hauteur de la station M″ au-dessus du niveau sphérique de la station M′... $r_2 - r_1 = 1846^m,060$.

STATION INFÉRIEURE M′.			STATION SUPÉRIEURE M″.				
DISTANCE zénithale apparente de M″, vu de M′. z_1	DISTANCE zénithale vraie de M″, vu de M′. $z_1 + \delta_1$	RÉFRACTION locale en M′. δ_1	DISTANCE zénithale apparente de M′, vu de M″. z_2	DISTANCE zénithale vraie de M′, vu de M″. $z_2 + \delta_2$	RÉFRACTION locale en M″. δ_2	SOMME des deux réfractions locales. $\delta_1 + \delta_2$	DIFFÉRENCE des deux réfractions locales. $\delta_1 - \delta_2$
90°	90° 6′ 55″,89	+ 6′ 55″,89	91°16′27″,90	91° 23′ 4″,11	+ 6′ 36″,21	+13′ 32″,10	+ 19″,68

» Coefficient de la réfraction terrestre conclu de ces nombres :

$$\theta = 0,150388\,9 \cdot \nu.$$

» Résultats analogues déduits de la formule approximative, en évaluant les coefficients différentiels $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_1$, $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_2$, par la parabole la plus basse conclue de l'ascension de Gay-Lussac :

$$\theta = 0,147385\,2\,\nu; \quad \delta_1 + \delta_2 = 13' 15'' 56'''.$$ Erreur de l'approximation : $-16'',544$.

Tableau B.

Angle au centre..... $\nu = 0^\circ,30$.
Hauteur de la station M″ au-dessus du niveau sphérique de la station M′... $r_2 - r_1 = 204^m,313$.

STATION INFÉRIEURE M′.			STATION SUPÉRIEURE M″.				
DISTANCE zénithale apparente de M″, vu de M′. z_1	DISTANCE zénithale vraie de M″, vu de M′. $z_1 + \delta_1$	RÉFRACTION locale en M′. δ_1	DISTANCE zénithale apparente de M′, vu de M″. z_2	DISTANCE zénithale vraie de M′, vu de M″. $z_2 + \delta_1$	RÉFRACTION locale en M″. δ_2	SOMME des deux réfractions locales. $\delta_1 + \delta_2$	DIFFÉRENCE des deux réfractions locales. $\delta_1 - \delta_2$
90°	90° 2′ 21″,46	+2′ 21″,46	90°25′17″,746	90° 27′ 38″,454	+ 2′ 21″,798	+ 4′ 42″,254	+ 0″,658

» Coefficient de la réfraction terrestre conclu de ces nombres :

$$\theta = 0,156807 \cdot \nu.$$

» Résultats analogues déduits de la formule approximative, en évaluant les coefficients différentiels $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_1$, $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_2$ par la parabole la plus basse conclue de l'ascension de Gay-Lussac :

$$\theta = 0,156446\,\nu; \quad \delta_1 + \delta_2 = +4' 41'',604.$$ Erreur de l'approximation : $-0'',650$.

» Tous les calculs sur lesquels ces résultats sont fondés, se trouvent rapportés en détail dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour l'année 1842 (*).

(*) Je profite de cette circonstance pour indiquer une faute d'impression qui existe à la page 54 du Mémoire auquel je renvoie. Elle porte sur l'expression approximative de θ, qui est écrit avec le signe $-$, au lieu du signe $+$. On lui a donné en outre pour facteur $\frac{r_1 + r_2}{r_1}$, tandis qu'il faut $\frac{r_1 + r_2}{r_4}$. Ces fautes n'existaient point dans le manuscrit, et tous les calculs qui suivent ce passage du Mémoire ont été effectués sur la formule exacte. Elle a été reproduite et employée sous sa forme correcte, dans les Notes du tome I^er^ de mon *Traité d'Astronomie*, pages 262 et suivantes.

» Connaissant, par cette étude préliminaire, les caractères géométriques des portions de trajectoires lumineuses qui ont pu se former entre des signaux terrestres situés à diverses distances, dans un état régulier des couches inférieures de l'atmosphère, qui a effectivement existé, cherchons quels sont ceux de ces caractères que l'on pourra constater et apprécier par des observations de distances zénithales, effectuées aux deux stations qui les terminent.

» Si deux observateurs placés en ces points extrêmes prennent *simultanément* les distances apparentes Z_1, Z_2 de l'autre signal, séparé d'eux par l'angle au centre v, la considération du quadrilatère plan $CM'IM''$, dont les angles internes doivent former en somme quatre angles droits, leur donnera immédiatement l'angle intérieur $T''IM'$ ou θ, lequel aura pour expression :

$$\theta = 180^\circ + v - (Z_1 + Z_2). \tag{5}$$

» Mais cette relation ne s'appliquera à une même trajectoire lumineuse que sous la condition rigoureuse que les distances zénithales réciproques auront été observées simultanément. Car si elles étaient seulement réciproques sans être simultanées, elles appartiendraient généralement aux tangentes extrêmes de deux trajectoires différentes; et la valeur de θ, fournie par la même relation, exprimerait l'angle formé par ces tangentes, qui n'auraient entre elles aucune connexité physique dont on pût se prévaloir.

» La valeur de θ obtenue ainsi par des observations, même simultanées, représente seulement la somme $\delta_1 + \delta_2$ des deux réfractions locales qui ont eu lieu à un même instant, aux deux extrémités d'une même trajectoire. Mais cette donnée est insuffisante pour que l'on puisse en conclure la différence de niveau des deux stations, ce qui est l'usage spécial auquel ce genre d'observations s'emploie dans les opérations géodésiques. Il devient alors nécessaire de connaître aussi la différence $\delta_1 - \delta_2$ des deux réfractions locales, afin d'avoir chacune d'elles individuellement. On y supplée en les supposant égales, ce que nos tableaux A et B montrent devoir être peu en erreur, aux distances restreintes où la convexité de la Terre oblige de placer les signaux géodésiques. Cela revient à considérer comme circulaire la portion de la trajectoire lumineuse, qui est comprise entre eux. Mais cette hypothèse, suffisante pour la pratique de l'ingénieur, n'est pas théoriquement acceptable comme réalité.

» Ayant ainsi constaté l'excessive variabilité physique du coefficient

de dv, dans l'expression différentielle

$$(1) \qquad d\theta = -\frac{2k(1-s)\left(\frac{d\rho}{ds}\right)}{1+4k\rho}\cdot dv,$$

lorsqu'on l'applique à des couches d'air minces, peu étendues, et peu élevées au-dessus de la surface terrestre, comme sont toujours celles qui se trouvent comprises entre deux signaux géodésiques, supposons que, par des observations de distances zénithales réciproques et simultanées, faites entre deux signaux pareils, on ait, à un certain jour, à un certain instant, déterminé sa valeur actuelle, sur la ligne d'air suivie par la trajectoire lumineuse qui va de l'un à l'autre, et qu'on l'ait trouvée égale à $\frac{1}{2m}$, m étant un nombre connu. On n'en pourra nullement conclure qu'il aurait encore cette même valeur, à ce même instant, sur les trajectoires lumineuses qui parcourraient des portions de la même masse d'air, comprises entre des signaux moins ou plus distants; et nos tableaux A et B offrent des exemples du contraire. Toutefois, admettons hypothétiquement qu'il en soit ainsi. Alors, tous les éléments de l'intégrale θ, se trouvant constants, et égaux à $\frac{1}{2m}dv$ entre les limites d'amplitude qu'elle doit embrasser, on en conclura immédiatement, dans ces limites,

$$\theta = \frac{1}{2m}v.$$

Alors $\frac{1}{2m}$ sera ce que l'on appelle le *coefficient de la réfraction terrestre*, dans les circonstances supposées; et il est à remarquer qu'il sera essentiellement propre et spécial à ces circonstances.

» Concevons maintenant que l'on demande quel mode de variation des densités il faudrait idéalement établir dans la masse d'air considérée, pour que le coefficient de dv eût précisément cette valeur constante $\frac{1}{2m}$, dans l'amplitude d'épaisseur et d'étendue qu'elle embrasse? La condition à remplir s'exprimera en posant l'égalité :

$$\frac{-2k(1-s)\left(\frac{d\rho}{ds}\right)}{1+4k\rho} = \frac{1}{2m}; \quad \text{d'où l'on tire} \quad \frac{d\rho}{1+4k\rho} = -\frac{1}{2m}\cdot\frac{ds}{1-s}.$$

Sous cette seconde forme, l'intégrale se présente immédiatement, et elle est

$$1+4k\rho = A(1-s)^{\frac{1}{m}},$$

A étant une constante arbitraire. Cette constante se détermine par la condition que la densité ρ, ait sa valeur vraie et observable ρ_1, à la surface de la couche d'air d'où l'on compte les variables s. Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'on ait :

$$1 + 4k\rho_1 = A,$$

ce qui donne, après l'élimination de A,

$$\frac{1+4k\rho}{1+4k\rho_1} = (1-s)^{\frac{1}{m}}, \text{ et, par suite, } \left(\frac{1+4k\rho}{1+4k\rho_1}\right)^m = 1 - s,$$

ou, en remplaçant $1 - s$ par son expression équivalente $\frac{r_1}{r}$,

$$\left(\frac{1+4k\rho}{1+4k\rho_1}\right)^m = \frac{r_1}{r}. \tag{6}$$

» Si l'on a bien suivi les détails de cette déduction analytique, on doit reconnaître avec évidence que la formule (6), à laquelle nous venons de parvenir, n'est légitimement applicable qu'à la masse restreinte d'air où l'on a déterminé par observation le coefficient m; et même, qu'elle ne s'étend à tous ses points intérieurs, qu'au moyen de la généralisation hypothétique sur laquelle l'intégration est fondée. Or, non-seulement M. Faye lui attribue virtuellement ce caractère d'application local, mais, par une extension d'idées bien autrement hypothétique, et, je l'ose dire, contraire à toutes les notions de la physique, tant rationnelle qu'expérimentale, il en fait le type d'une loi de variation des densités, qui doit matériellement s'établir depuis la surface de la Terre jusqu'aux dernières régions de l'atmosphère, en conformité avec la valeur actuelle, que l'observation locale aurait donnée au coefficient m !

» Avant de revenir sur cette idée, je ferai remarquer que notre équation (6) est, dans sa composition analytique, et jusque dans sa notation littérale, identique à celle que Laplace donne au § 6 du livre X de la *Mécanique céleste*, comme une hypothèse mathématique dans laquelle l'équation différentielle de la réfraction devient rigoureusement intégrable, et conduit à la même expression que la loi de Bradley. Mais, pour que ce mode de décroissement des densités, ou tout autre que l'on voudrait imaginer, puisse, même hypothétiquement, être appliqué à une atmosphère gazeuse, composée de couches pesantes et compressibles, il faut d'abord l'assujettir à une équation de condition, qui est toujours nécessaire pour assurer sa stabilité, dans un tel état; puis, si l'on veut qu'elle représente réellement l'atmosphère terrestre, il faudra disposer des constantes qui la définissent, de

manière qu'elle s'y assimile dans ses particularités physiques; c'est-à-dire que les réfractions à toutes les distances zénithales y soient de même grandeur, et que le décroissement des températures à diverses hauteurs y soit tel qu'on le constate dans notre atmosphère par l'observation. Or, la constitution d'atmosphère représentée par l'équation (6), ne contenant de disponible que la seule constante m, ce serait un singulier hasard qu'elle pût satisfaire à toutes ces conditions d'identité. Effectivement, la relation nécessaire à la stabilité de la masse gazeuse, détermine à elle seule immédiatement cette constante; et, à la température de o degré, sous la pression de $o^m,76$, elle lui assigne pour valeur numérique :

$$m = 4,25970; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{2m} = 0,11738;$$

$\frac{1}{2m}$ est le coefficient de la réfraction terrestre, qui se trouve ainsi notablement moindre que l'observation ne le donne, en moyenne, dans notre atmosphère. m étant ainsi déterminé, il en résulte pour la grandeur de la réfraction horizontale, à o degré de température, et sous la pression totale de $o^m,76$,

$$30' 24'',12,$$

valeur pareillement beaucoup trop faible, comme moyenne. Enfin le décroissement moyen des températures, près de la surface terrestre, conclu de ce même m, dans les mêmes circonstances météorologiques, serait de 1 degré centigrade pour $63^m,8$ d'accroissement de hauteur, progression environ trois fois plus rapide qu'on ne l'observe réellement.

» Tous ces résultats ont été établis par Laplace au § 6 du livre X de la *Mécanique céleste*, comme autant de conséquences mathématiquement inhérentes à la constitution d'atmosphère représentée par notre équation (6). Je n'ai fait que lui emprunter ses nombres, et je les ai rapportés avec tout ce détail, pour montrer que la valeur occasionnelle du coefficient m, déterminée par des observations géodésiques faites à travers des couches d'air d'une épaisseur restreinte, et à de petites hauteurs, ne peut pas, sans contradiction mathématique, être employée dans l'équation (6), comme caractérisant un mode de variation des densités applicable à toute hauteur dans notre atmosphère. Car une atmosphère ainsi constituée artificiellement, non-seulement n'aurait pas les qualités physiques de la nôtre, mais ne satisferait pas même à la condition de stabilité nécessaire à son existence.

» Voilà pourtant ce que M. Faye fait, ou prétend faire. Car il demande qu'on emploie les réfractions calculées dans cette atmosphère fictive, pour

corriger les irrégularités de celles que l'atmosphère réelle nous présente habituellement, près de l'horizon. Or ces irrégularités ne peuvent être assujetties à aucune théorie générale, parce qu'elles résultent de perturbations opérées dans les couches basses et lointaines de notre atmosphère, par des accidents météorologiques locaux, dont les caprices échappent à toute prévision, et se réalisent même soudainement à notre insu. On ne saurait se débarrasser de leurs effets que par compensation; et le procédé que M. Faye propose pour y remédier ne ferait que vicier les résultats moyens qui peuvent être obtenus à la longue.

» Supposons, dit M. Faye, qu'une mire éloignée, visible de jour et de nuit, soit placée dans la direction du méridien de l'observateur à une grande hauteur au-dessus du sol, et que l'on ait déterminé sa distance ainsi que son altitude relative, à l'aide d'un nivellement ordinaire à petites portées. On en déduira la distance zénithale vraie de cette mire. L'observation donnera la distance zénithale apparente. La différence sera l'effet de la réfraction (locale); et, comme on connaît l'angle au centre, on aura la valeur actuelle du coefficient de la réfraction terrestre (sur la portion de la trajectoire lumineuse propagée du signal à l'observateur). Ce coefficient, introduit dans l'équation (6) de Laplace, donnera la réfraction astronomique actuelle, sous la forme que lui assigne la loi de Bradley, dont tous les éléments se trouveront ainsi déterminés pour l'application.

» J'ai présenté ici l'esprit de la méthode aussi fidèlement que j'ai pu le saisir dans la nouvelle notation que M. Faye a substituée à celle de Laplace. Je regrette, pour mon compte, ces changements de formes symboliques, qui rendent plus pénibles à lire, à retrouver, des théories déjà exposées avec un entier développement, dans des ouvrages célèbres, que tout le monde a étudiés.

» Je ne reviendrai pas sur la difficulté mécanique, toute grave qu'elle est. Je veux considérer ici la méthode, uniquement au point de vue de l'application physique et astronomique. Elle se résume, pour moi, en ce point : que, d'après la quantité de la réfraction observée à l'une des extrémités d'un petit arc de trajectoire lumineuse, réfraction qui n'excédera jamais quelques minutes de degré, M. Faye veut conclure la totalité de la réfraction qui se produira pour des distances zénithales de même ordre, sur toute la longueur des trajectoires lumineuses, qui se seront propagées depuis les extrémités de l'atmosphère jusqu'à l'observateur, en traversant des régions aériennes immensément distantes, dont la stratification pourra n'avoir aucun rapport avec l'état actuel de la même couche d'air comprise

entre l'observateur et le signal observé. Croire que l'état accidentel de celle-ci pourra, devra, se propager ainsi, instantanément, à tout le reste de la masse aérienne, c'est une concession que la vieille physique, je dirai aussi la vieille logique de mon temps, ne me permet pas de faire, et pourtant elle semble indispensable pour que l'application ait lieu. Mais alors, si le même observateur établissait autour de sa station trois ou quatre signaux terrestres, sur diverses directions azimutales, au nord, au sud, à l'est, à l'ouest, comme les couches basses qui les sépareraient de lui pourraient se trouver, au même instant, dans des états physiques très-dissemblables, il faudrait donc que l'atmosphère réelle se conformât simultanément à tous ces états divers, ce qui ne me paraît pas moins dur à concevoir.

» Tels sont les motifs du dissentiment que j'ai témoigné, lorsque ce nouveau moyen de corriger les irrégularités des réfractions atmosphériques, a été annoncé à l'Académie. M. Faye a comparé ma résistance à celle que Flamsteed opposait aux conseils de Newton, quand il voulait lui persuader de joindre à ses observations astronomiques, les indications du baromètre et du thermomètre. Cette comparaison me semble pécher, au moins dans l'un de ses termes. Mais, peut-être, M. Faye n'a pas entendu l'appliquer à lui et à moi, dans toute sa rigueur.

» Je pense qu'il reste beaucoup de perfectionnements à faire dans l'appréciation des réfractions atmosphériques; mais il faut, je crois, les chercher par une autre voie. C'est ce que j'essayerai de montrer dans la séance prochaine, ou dans celle qui suivra. »

(*Séance du* 16 *octobre* 1854.)

Sur la théorie des réfractions atmosphériques.

« La théorie des réfractions atmosphériques n'a été amenée au degré de précision et d'utilité où elle est aujourd'hui, que par les efforts accumulés des plus grands géomètres, combinés avec les perfectionnements progressifs de la physique expérimentale. La multitude de considérations délicates qui y concourent, la rend difficile à pénétrer; et il est plus malaisé encore de s'en être rendu assez maître, pour montrer avec justesse en quoi, et comment, on pourrait l'améliorer. Avant d'y prétendre, il faut voir clairement d'où elle part, et où elle arrive. Il faut définir exactement les concep-

tions mécaniques générales sur lesquelles on l'appuie ; distinguer ce qu'elles ont de positif, et ce qui s'y mêle de conjectural ; apprécier le degré de certitude, ainsi que la légitimité d'appropriation des données expérimentales qu'on y emploie; et, tout cela reconnu, déterminer les limites d'erreur entre lesquelles nous pouvons espérer de représenter les phénomènes, sous ces conditions. C'est à ce point de vue d'ensemble que je vais me placer d'abord, non sans une grande défiance de me trouver insuffisant à l'embrasser.

» Cette théorie, prise dans son abstraction géométrique, considère l'atmosphère terrestre, comme une enveloppe gazeuse, de constitution permanente, composée de particules pesantes, compressibles, expansibles, qui possèdent une force d'élasticité propre, variable avec leur densité, avec leur température, et qui exercent sur les rayons de la lumière un pouvoir réfringent proportionnel à leur densité. On donne à ce système un arrangement intérieur, qui, par la généralité de ses caractères, s'assimile aussi approximativement qu'il est possible à l'état moyen de l'atmosphère réelle, sans être compliqué par ses perturbations, dont l'analyse mathématique de notre temps ne saurait pas calculer les effets accidentels. Pour cela on admet que, dans toute son étendue, la densité, en chaque point, dépend seulement de la distance de ce point au centre de la Terre, pouvant d'ailleurs être une fonction quelconque de cette distance, que l'on s'efforce ensuite d'identifier, d'aussi près que possible, à celle qui a lieu effectivement. D'après cette condition conventionnelle, les couches d'égale densité de l'atmosphère fictive sont sphériques, et concentriques à la surface terrestre qui les supporte. Leur ordre de superposition n'est d'ailleurs analytiquement astreint qu'à la seule condition de pouvoir se maintenir stable en obéissant aux lois de la statique des gaz. Sous cette réserve, elles peuvent occasionnellement, se contracter ou se dilater dans leur épaisseur propre par un changement simultané de température, comme aussi être soulevées ou abaissées, pourvu que toutes les colonnes verticales conservent une constitution similaire qui leur permette de se maintenir individuellement sans se rompre ni se désagréger. Dans un système gazeux ainsi constitué, la sphéricité des couches d'égale densité imprime à la force réfringente une direction centrale. Le mouvement des molécules lumineuses, s'opère conformément aux principes des aires et des forces vives, qui, réunis et combinés avec les éléments du contact du premier ordre dans les courbes continues, donnent immédiatement l'équation différentielle de la trajectoire décrite, et l'élément différentiel de la réfraction. Le reste n'est plus qu'une affaire de calcul intégral.

» Telle est la conception mécanique la plus générale que l'on ait jusqu'à présent appliquée au problème des réfractions atmosphériques. Toutes les théories que les géomètres ont données de ces phénomènes, depuis Newton jusqu'à nos jours, ont été fondées sur des hypothèses analogues, mais plus restreintes. Avant de rappeler les résultats qu'ils en ont tirés, il convient d'examiner, jusqu'à quel point les abstractions dont elles se composent sont conformes aux réalités physiques; et à quel degré les particularités, qui ne s'y trouveraient pas comprises, peuvent vicier les déductions que le calcul en obtiendrait.

» Un état d'équilibre général, et que l'on pourrait appeler sphérique, n'a évidemment jamais lieu dans notre atmosphère. Nous voyons sans cesse ses couches les plus basses, troublées, remuées, agitées, par suite des accidents météorologiques, qui produisant en quelques points des contractions ou des expansions soudaines, engendrent les vents, les tempêtes; et ces fluctuations partielles, se propagent fréquemment jusqu'à plusieurs mille mètres de hauteur. En fait, le repos n'y est jamais qu'accidentel, peu durable, et toujours local. La physique générale nous apprend aussi que la zone gazeuse, située entre les tropiques, étant maintenue dans un état perpétuel d'expansion par l'impression prédominante de la chaleur solaire, l'air qui la compose, est continuellement soulevé et porté vers les régions supérieures de l'atmosphère, d'où il va se déverser vers les pôles; tandis que le vide formé à sa base, est continuellement suppléé par un courant d'air inférieur qui afflue des pôles vers l'équateur; ce qui, combiné avec la force centrifuge engendrée par le mouvement de rotation diurne de la Terre, produit le grand phénomène des vents alizés. Des inégalités d'action calorifiques analogues, mais locales, produisent les vents semestriels du golfe du Mexique, et les moussons de l'Inde. Des dérangements soudains, d'une extrême violence, s'opèrent encore fréquemment dans les couches d'air qui recouvrent la surface des mers ou des grands continents d'Amérique et d'Asie, et y propagent au loin leurs ravages. En présence de tels effets, la conception d'une atmosphère partout calme et sphériquement constituée, ne peut être considérée que comme représentant un cas abstrait, qui n'est jamais complétement réalisé.

» Ces mouvements intérieurs de l'atmosphère échappent jusqu'ici à tous nos calculs, même quand on n'envisage que ceux qui sont permanents et réguliers. L'Académie appela, il y a quelques années, sur ce sujet, les efforts des physiciens et des géomètres, en restreignant ses demandes, à la seule théorie des phénomènes constants et généraux. Aucune pièce n'a été apportée au concours. Sans doute le problème est encore inaccessible.

» Cette impuissance trop avérée de l'analyse mathématique, à s'assujettir jusqu'à présent des phénomènes si complexes, semble envelopper un paradoxe des plus étranges. Les conditions statiques, auxquelles les géomètres ont été obligés de plier leurs atmosphères fictives, étant aussi différentes de celles de l'atmosphère réelle que nous venons de le voir, comment a-t-il pu se faire qu'ils en aient tiré des Tables de réfractions si exactement conformes aux véritables, jusque vers 80 degrés de distance du zénith? Que, dans cette grande amplitude d'application, ces Tables s'adaptent si fidèlement aux circonstances météorologiques locales, dans toutes les contrées, dans toutes les saisons, à toutes les hauteurs au-dessus de la surface du globe, où l'on a eu l'occasion de les éprouver? Quel est le principe caché d'un pareil accord? d'autant plus surprenant qu'il n'est pas attaché, à telle ou telle hypothèse géométrique plus ou moins heureuse! Car, jusqu'aux limites de distances zénithales ci-dessus fixées, on l'obtient à peu près aussi parfait, quelle que soit la constitution intérieure de l'atmosphère sphérique à laquelle on applique le calcul, pourvu qu'elle s'accorde avec la réelle dans ses conditions générales d'existence; c'est-à-dire qu'elle soit composée du même gaz, possédant les mêmes qualités physiques, et stratifiée aussi par couches dont les densités décroissent à mesure qu'elles sont plus élevées, suivant toute loi quelconque, compatible avec les conditions de leur équilibre; l'inférieure seule étant identifiée quant à sa densité, et à la pression qu'elle supporte, à la couche de l'atmosphère réelle, où l'on veut placer l'observateur; de sorte qu'on lui emprunte uniquement ces deux dernières données. La parité presque exacte de résultats numériques, conclus d'hypothèses si diverses, présente déjà un mystère mathématique, qu'il faut nécessairement éclaircir, avant de chercher à découvrir pourquoi ces résultats se trouvent si approximativement conformes aux réalités. C'est aussi à cela que je vais m'attacher d'abord.

» Pour montrer jusqu'où cette liberté d'hypothèse a pu s'étendre, sans discordance notable dans les nombres, tant qu'on ne descend pas à plus de 80 degrés du zénith, je rappellerai ici quelques-unes des plus employées, en spécifiant les qualités physiques des atmosphères qui en résultent, qualités que les premiers auteurs de ces spéculations pouvaient, tout au plus, vaguement soupçonner. Et comment auraient-ils pu en avoir la notion exacte? ce n'est guère que depuis cinquante ans, que l'on connaît avec précision les lois de dilatabilité de l'air et des vapeurs, les conditions de leur mélange à l'état aériforme, leurs densités relatives, l'influence de cette densité et de la température sur le pouvoir réfringent de l'air, enfin l'énergie absolue de ce pouvoir même, qui est l'élément fondamental des réfractions

qu'il peut exercer? Toutefois, chose étrange, et qui montre bien la puissance du génie géométrique, la seule contemplation abstraite des conditions générales d'existence auxquelles l'atmosphère terrestre doit être assujettie, a suffi à Newton pour établir toute la théorie mathématique des réfractions qu'elle produit. OEuvre admirable, qui est demeurée ignorée pendant cent quarante ans, et que la postérité n'a connue, qu'après s'être avancée une seconde fois, par de longs efforts, aussi loin que lui!

» L'honneur d'avoir donné le premier aux astronomes une Table de réfractions utilement applicable, et théoriquement calculée, est due à Dominique Cassini. Il la publia en 1662. Elle est fondée sur un aperçu tout à fait empirique, mais qui se trouve très-approximativement juste dans ses conséquences numériques même à 80 degrés de distance zénithale. Considéré comme s'adaptant à un état de choses réel, cet aperçu revient à concevoir autour de la Terre, une atmosphère d'air sphérique d'une certaine hauteur, uniformément dense, où la lumière se brise à son entrée suivant la loi de Descartes, et se propage ensuite en ligne droite jusqu'à l'observateur. L'hypothèse renferme ainsi deux éléments arbitraires : la hauteur de l'atmosphère fictive, et son pouvoir réfringent, proportionnel à sa densité. Prenons, comme cas d'application que cette densité soit celle de l'air atmosphérique à la température de la glace fondante, sous la pression de 76 centimètres de mercure, et attribuons-lui l'intensité de force réfringente qui se conclut aujourd'hui d'expériences directes. Alors l'atmosphère fictive devra avoir 7974 mètres de hauteur; et, à 80 degrés de distance zénithale, la réfraction sera $5'31'',14$ (1). Les Tables de Laplace, calculées pour une constitution d'atmosphère toute différente, étant appliquées aux mêmes circonstances météorologiques donnent $5'32'',41$. C'est $1'',27$ de plus. Voilà un exemple de ce mystérieux accord de nombres que j'ai annoncé, et dont il nous faudra trouver la cause mathématique. Il se soutient ainsi depuis le zénith jusqu'à 80 degrés de distance zénithale. Mais, en approchant

(1) Pour avoir un type de comparaison assuré, je fais ce calcul avec les données adoptées par Laplace, pour ces mêmes circonstances météorologiques, au livre X de la *Mécanique céleste*; et je les applique à l'expression qu'il a donnée au § 4, de la réfraction dans l'hypothèse de Cassini. En conservant la notation dont il fait usage, ces données sont :

$$l = 7974^{m}; \quad a = 6366198^{m}; \quad 2K\rho_1 = 0{,}000294047.$$

Seulement, par abréviation, j'ai remplacé par 1 la lettre n qui représente la vitesse de la lumière dans le vide, et j'ai désigné par ρ_1 la densité de l'air dans la couche inférieure, que Laplace appelle (ρ).

davantage de l'horizon, l'hypothèse de Cassini donne des réfractions de plus en plus faibles comparativement à celles de Laplace, et l'écart est de 13′ 37″ à l'horizon même. Mais Cassini en a judicieusement restreint l'application à la limite de 80 degrés. Il n'avait pas comme nous la notion et la mesure des données météorologiques. Il y a suppléé en pliant son hypothèse à deux réfractions soigneusement observées. Et, comme Delambre le dit avec quelque naïveté, sa Table est si juste, *qu'il a l'air de prendre ses nombres dans la Connaissance des Temps*.

» Les deux autres exemples, que je citerai, se rattachent à un fait d'histoire scientifique trop curieux, pour ne pas le rappeler ici.

» L'insuffisance de la Table de Cassini, pour les réfractions qui s'opèrent à plus de 80 degrés de distance zénithale, faisait sentir vivement aux astronomes le besoin de la prolonger. Le 11 octobre 1694, Flamsteed, alors établi à Greenwich, écrivit à Newton qu'il avait commencé à calculer les réfractions qui se déduisent des observations du Soleil et de Vénus faites à de petites hauteurs, pour s'en servir à corriger les observations de la Lune, et obtenir ses positions vraies que Newton lui avait demandées. Cela excita ce grand génie, à s'occuper de ce problème, pour en chercher une solution, non pas empirique, mais mathématique et physique, comme lui seul était capable de le faire alors. Depuis neuf ans qu'il avait publié le livre des *Principes*, il avait approfondi la théorie des attractions à petites distances. La marche de la lumière à travers un milieu réfringent quelconque était pour lui un problème de mécanique parfaitement accessible, pourvu que la nature et la constitution de ce milieu lui fussent données. Or, à cette époque, on ne connaissait de l'atmosphère que ses propriétés générales, en tant qu'elle est formée d'un air pesant, compressible, élastique, réfringent. L'inégalité de la température à diverses hauteurs était inconnue; son influence pour modifier le volume de l'air, et son ressort, à peine soupçonnée. Dans un dénûment si absolu de données expérimentales, tout ce que l'on pouvait faire, c'était d'appliquer les principes de la mécanique et de la physique abstraite, à des constitutions d'atmosphères théoriquement possibles, dont les effets optiques fussent calculables par les méthodes d'intégration alors connues, en tâchant d'identifier ces effets aux réfractions qu'on observe. C'est à quoi Newton se dévoua avec une patience admirable. Il resta pendant six mois plongé dans ce travail, communiquant à Flamsteed ses tentatives, ses réussites, ses mécomptes, ses rectifications, ses espérances, à mesure qu'il avançait. De tant d'efforts, il n'était resté qu'une règle approximative, rapportée par Halley, suivant laquelle, à de médiocres dis-

tances du zénith, la réfraction est proportionnelle à la tangente de la distance zénithale; et une Table des réfractions pour toutes les distances, publiée aussi par Halley dans les *Transactions philosophiques* de 1721, comme venant de Newton, sans qu'on sût comment, ni à quelle époque, il l'avait composée. Toute la partie scientifique de cet immense travail, n'a été connue qu'en 1836, lorsque le gouvernement anglais eut fait publier par Baily, la correspondance de Newton avec Flamsteed, conservée dans les archives de Greenwich. Non pas que les procédés mathématiques de Newton y soient exposés à découvert; il ne les indique jamais que par parties, en termes voilés, en s'enveloppant d'une extrême réserve. Or, s'il n'est pas déjà si facile de saisir complétement sa pensée quand il veut bien la dire, il l'est beaucoup moins de la lui dérober. Toutefois, en rapprochant des demi-confidences qui lui échappent, sur les voies qu'il essaye, sur les procédés de calcul qui lui ont ou ne lui ont pas réussi; surtout, en approfondissant un théorème qu'il donne sans démonstration, avec une figure, en disant seulement à quoi il lui sert, on a pu mettre tous ses secrets au grand jour, retrouver ses méthodes, et reconstruire en nombres la Table de réfractions que Halley avait publiée d'après lui. On a reconnu ainsi qu'il possédait tous les principes mathématiques de cette théorie : l'équation différentielle de la trajectoire lumineuse, et l'expression différentielle de l'élément de la réfraction, sous la forme simple que Laplace lui a donnée depuis. Il était arrivé à ces découvertes huit ans avant la deuxième édition des *Principes*, à l'âge de cinquante-trois ans. Cette reproduction tardive d'une si précieuse portion de ses travaux, jusque-là ignorée, a été publiée dans le *Journal des Savants* de 1836. J'en extrairai seulement les deux hypothèses d'atmosphères qu'il a soumises à ses calculs, et qui, réunies, ont servi de fondement aux théories plus parfaites de ses successeurs.

» Pour se rendre un compte exact de la tâche qu'il avait à remplir, il faut envisager le problème, à son point de vue mathématique complet, comme nous pouvons le faire aujourd'hui, et voir quels moyens il avait de le résoudre. On y reconnaît alors deux parties distinctes : la première consiste à définir la constitution de l'atmosphère sphérique sur laquelle on veut opérer; la seconde, à calculer les réfractions qu'elle doit produire, pour un observateur placé dans une de ses couches, dont on se donne conventionnellement le rayon r_1, la densité ρ_1, la température t_1, et la pression p_1 qu'elle supporte. Alors l'atmosphère choisie sera complétement définie, si, en une quelconque de ses couches concentriques ayant pour rayon r, on peut assigner la densité ρ, la température t et la pression p, ces trois dernières varia-

bles étant considérées comme des fonctions de la première, qui, seule, reste indépendante.

» Or, pour que ces quatre quantités puissent être associées dans une même atmosphère gazeuse, supposée en repos, leur ensemble doit toujours être assujetti à deux équations de condition générales : l'une, qui s'écrit en termes différentiels, exprime que le système est dans un état de stratification permanent ; l'autre, qui s'écrit en termes finis, signifie que les lois de la dilatabilité des gaz y sont observées. Si donc on se donne arbitrairement, hypothétiquement, une troisième relation entre les quatre variables ρ, p, t, r, les trois premières se trouveront analytiquement déterminées en fonction de la dernière, et le système atmosphérique, auquel elles appartiendront, sera complétement défini. Je montrerai plus loin que, dans notre atmosphère terrestre, la nature propre de cette troisième relation est très-nettement indiquée par l'expérience, et que les Tables, qui représentent le mieux les réfractions réelles, ont été fondées, insciemment, sur les hypothèses qui approchent le plus d'y ressembler.

» L'atmosphère hypothétique étant constituée, on y approprie l'expression générale de l'élément différentiel de la réfraction, et il ne reste qu'à l'intégrer pour avoir la réfraction même en nombres.

» Newton ne possédait pas l'ensemble de données qui lui auraient été nécessaires pour reconnaître complétement les propriétés physiques des atmosphères qu'il établissait. J'y suppléerai pour lui. L'analyse mathématique de son temps, ne lui fournissait pas des méthodes suffisamment puissantes pour les intégrations qu'il eut souvent à effectuer. Il y suppléa par des procédés équivalents, mais beaucoup plus pénibles. Le manque de données physiques le forca de plier ses résultats aux observations imparfaites que lui fournissait Flamsteed, ce qui en altère l'exactitude numérique. Mais, ces ombres dissipées, on voit reparaître son génie dans toute sa puissance. C'est ce que j'ai tâché de mettre en lumière dans les articles du *Journal des Savants* que j'ai déjà cités ; et je ne reprends les deux cas qu'il a traités que pour achever de prouver l'identité presque parfaite des réfractions qui se produisent jusqu'à 80 degrés de distance zénithale, dans ces systèmes d'atmosphères sphériques, comme dans tous les autres.

» Il considéra d'abord une atmosphère où, depuis la base jusqu'au sommet, des différences égales de hauteur correspondent à des diminutions égales de la densité. Si l'on suppose, qu'à cette base, la température soit celle de la glace fondante, et la pression $0^m,76$ de mercure, la hauteur totale de l'atmosphère sera de 15948 mètres, exactement double de celle de

Cassini. La température n'y est plus constante. A mesure qu'on s'élève, elle s'abaisse de quantités égales pour des différences égales de hauteur, comme cela s'observe aussi approximativement dans l'atmosphère terrestre; mais ce décroissement mathématique est environ trois fois plus rapide que dans celle-ci. La réfraction à l'horizon est $30'\,24'',17$, plus faible encore que la réelle, beaucoup moins toutefois que dans l'atmosphère de Cassini. Malgré toutes ces dissemblances, la réfraction à 80 degrés de distance zénithale se trouve être $5'\,32'',16$, plus forte seulement de $1'',2$ qu'elle ne l'était dans l'hypothèse de Cassini, et elle diffère à peine de celle de Laplace (1).

» Dans ce premier système atmosphérique de Newton, les pressions à diverses hauteurs sont proportionnelles au carré des densités. Trouvant peut-être que l'étendue de l'atmosphère y était trop restreinte, il en choisit un autre, qu'il avait déjà présenté dans le livre des *Principes*, et qui a pour caractère que les pressions soient simplement proportionnelles aux densités. Alors la température est constante à toute hauteur, et l'atmosphère s'étend indéfiniment. Si l'on astreint la couche inférieure aux mêmes circonstances météorologiques tout à l'heure admises, la température 0° et la pression

(1) Le procédé d'intégration approximatif que Newton a dû employer pour calculer les réfractions dans cette première hypothèse est exposé en détail dans le volume du *Journal des Savants* pour l'année 1836, pages 735 et suivantes. En désignant par R la réfraction correspondante à la distance zénithale apparente et quelconque θ_1, on est immédiatement conduit à la formule suivante, rapportée page 743,

$$\operatorname{tang} n\mathrm{R} = \left(\frac{m-1}{m+1}\right)\operatorname{tang}(\theta_1 - n\mathrm{R});$$

n et m sont deux coefficients, fonctions des éléments météorologiques de la couche aérienne dans laquelle l'observateur se trouve placé. En continuant d'employer la notation de Laplace, telle que je l'ai spécifiée, dans la Note précédente, on a :

$$\frac{1}{2n} = \frac{\mathrm{K}\rho_1\left(1+\frac{l}{a}\right)}{\frac{l}{a}(1+\mathrm{K}\rho_1)-\mathrm{K}\rho_1}, \qquad \frac{1}{m} = \frac{\sqrt{1+4\rho_1}}{1+\frac{2l}{a}}.$$

La règle de Bradley n'est autre que la formule précédente dans laquelle les deux coefficients $\frac{m-1}{m+1}$ et n, sont remplacés par des valeurs empiriques, qui se déterminent par la condition de satisfaire à deux réfractions observées, l'une loin de l'horizon, l'autre à l'horizon même, comme l'a fait Newton. Mais il est présumable que Bradley n'y a été conduit qu'en cherchant à modifier analytiquement la règle approximative $\mathrm{R} = \mathrm{A}\operatorname{tang}\theta_1$ donnée par Halley pour les observations faites à peu de distance du zénith, de manière qu'elle pût s'étendre à toutes les valeurs de θ_1.

$0^m,76$, la réfraction à l'horizon est $39'\,54'',6$, beaucoup plus forte que la moyenne véritable. Toutefois, à 80 degrés du zénith elle se trouve être $5'\,34''$, surpassant seulement de $1'',84$ celle que nous avions tout à l'heure trouvée.

» L'évaluation exacte de cet élément ne peut alors s'obtenir que par des procédés d'analyse très-élevés, qui étaient inconnus à Newton. Mais il y a suppléé par des successions de quadratures paraboliques, dont l'application à l'atmosphère réelle est rendue toujours légitime, par la lenteur du décroissement des densités à mesure qu'on s'élève. C'est même là le seul moyen d'établir le calcul des réfractions sur les véritables lois de décroissement que l'expérience peut fournir, sans être arrêté par les difficultés d'intégrations qu'elles présenteraient.

» L'extension indéfinie que cette seconde hypothèse de Newton donnerait à l'atmosphère terrestre, est contraire au fait de sa persistance. Elle l'est aussi à un grand nombre d'indications physiques. Sa limitation peut se conclure de ce que, depuis la surface terrestre jusqu'aux plus grandes hauteurs auxquelles Gay-Lussac s'est élevé, le décroissement de la température a été en s'accélérant, sans qu'il soit possible d'imaginer une cause physique par laquelle il pût être ralenti dans les régions supérieures à celles où il est parvenu. Car, en supposant même, contre toute vraisemblance, qu'il conservât ultérieurement la même valeur qu'il avait à sa station la plus haute, les lois de l'équilibre ne permettraient pas que l'épaisseur totale de l'atmosphère atteignît 48000 mètres, et par conséquent, il est présumable qu'elle est encore moindre (1). Si donc, les hypothèses qui lui attribueraient une extension plus grande, et même indéfinie, conduisent, par le calcul, à des réfractions peu différentes entre elles, et qui ne s'écartent pas excessivement de la réalité, cela tient à ce que, au delà d'un certain degré de raréfaction de l'air, tout le reste de l'atmosphère fictive ne contribue à la réfraction totale que pour une part insensible ou à peine appréciable, qui, en outre, devient indépendante du mode de stratification que l'hypothèse employée lui attribue.

» Si l'on veut comprendre toute la puissance mathématique dont Newton a fait preuve dans son travail sur les réfractions, il n'y a qu'à voir combien d'efforts ses plus illustres successeurs ont dû faire avant de le rejoindre. Euler, en 1754, attaque le même problème, avec le même dénûment de données physiques (2). Il obtient l'équation différentielle de la trajectoire

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome XVII.

(2) *Mémoires de Berlin* pour 1754.

lumineuse et lui associe l'équation qui assure l'équilibre. Mais le second membre de la solution, je veux dire l'expression différentielle de l'élément de la réfraction, lui manque ; ou s'il l'a connue, il n'en fait aucun usage ; de sorte qu'il se borne à discuter les propriétés géométriques de la trajectoire, sans obtenir la réfraction elle-même. Lagrange reprend la question en 1772, espérant que la règle empirique de Deluc pour la mesure des hauteurs par le baromètre, pourra lui fournir un type véritable de constitution atmosphérique, sur lequel il assoira le calcul (1). Il obtient en effet, pour cette loi particulière, des formules exactes, quoique embarrassées de la complication inhérente à l'expression empirique sous laquelle Deluc l'avait présentée. Mais comme, au fond, elle ne comprend que l'hypothèse d'un décroissement de densités en progression arithmétique, Lagrange n'en déduit et n'en pouvait déduire, qu'une expression de la réfraction analogue à la règle de Bradley ; sans indiquer aucunement la nécessité, encore moins la nature, des expériences qu'il faudrait entreprendre pour fonder une théorie plus sûre et plus générale de ces phénomènes. C'est ce que Laplace a fait le premier trente-trois ans plus tard, en 1805, dans le livre X de la *Mécanique céleste*, en concentrant sur ce problème toutes les forces de l'analyse mathématique réunies à une intelligence complète des données expérimentales devenues, avec le temps, plus précises, et que son influence protectrice avait puissamment contribué à propager, à étendre, à perfectionner. Cette faculté d'application que lui donnait le sentiment intime des vérités physiques allié à l'esprit géométrique, alliance qui avait manqué à Euler et à Lagrange, se voit dans le choix même de la conception abstraite sur laquelle il établit ses calculs. Trouvant que le décroissement des densités par progression arithmétique faisait la réfraction horizontale trop faible, et par progression géométrique la faisait trop forte, il en prit une mêlée des deux, qui renfermât un nombre suffisant d'arbitraires pour s'adapter aussi approximativement que possible aux effets réels. Son instinct le conduisait ainsi, sans qu'il le sût, à la relation même entre les pressions et les densités, qui a matériellement lieu dans notre atmosphère. De là, il tira une Table de réfractions, complétement calculée par théorie, laquelle s'identifie pour ainsi dire avec la vérité physique, dans tous les cas réguliers du phénomène, en fournissant les évaluations moyennes les plus sûres, dans ceux où ses caprices sont impossibles à prévoir. Ce travail n'a pas été surpassé. Ivory l'a refait depuis, avec des formes analytiques plus

(1) *Mémoires de Berlin* pour 1772.

simples, mais équivalentes pour le fond et les résultats. J'ai à peine besoin de dire que, jusqu'à 80 degrés de distance zénithale, ces Tables, d'accord entre elles, donnent des réfractions très-peu différentes de celles qui se déduisent de toutes les autres hypothèses si variées que nous avons parcourues. Cette singulière parité de résultats, se soutient, dans ces limites de distance zénithale, à travers des modifications analytiques, qui par la suppression de quelques termes, changent complétement la constitution de l'atmosphère fictive à laquelle le calcul s'appliquait. Par exemple, dans les prolégomènes des *Fundamenta astronomiæ*, Bessel a voulu abréger ainsi l'expression symbolique du décroissement des densités adoptée par Laplace, afin de rendre les intégrations plus aisément exécutables. Il en résulte une atmosphère qui n'a plus que 28370 mètres de hauteur, en conservant à son sommet, où la pression devient nulle, une densité finale qui est les $\frac{36}{1000}$ de la densité à sa base. Or, malgré tout cela, si la température à cette base est o degré, et la pression $0^{m},76$, la réfraction à 80 degrés de distance du zénith, pour un observateur qui y serait placé, se trouvera être $5'31'',14$, moindre seulement de $1'',4$ que dans les atmosphères de Laplace ou d'Ivory.

» La remarquable concordance de nombres que j'avais annoncée au commencement de cette communication, se trouvant ainsi matériellement constatée dans les cas les plus divers, il reste à en chercher la cause mathématique. On la découvre avec autant de généralité que d'évidence par le théorème suivant (1).

» Concevez une atmosphère sphérique dans laquelle les pressions, les densités, les températures, soient réparties à diverses hauteurs suivant des lois quelconques, compatibles avec les conditions de l'équilibre et de la dilatabilité des gaz; prenez seulement pour données les valeurs absolues de ces trois éléments météorologiques, dans celle des couches sphériques où vous voudrez placer l'observateur, et dont vous fixerez à volonté la distance au centre. Alors, sans avoir aucun besoin de connaître la constitution intérieure de votre atmosphère fictive, sachant seulement que la lumière y

(1) Dans le livre X de la *Mécanique céleste*, page 268, 1re édition, Laplace a établi une formule approximative, commune à toutes les atmosphères sphériques en équilibre, où l'on voit, en fait, que, jusqu'à plus de 80 degrés de distance zénithale, elles doivent donner des valeurs à très-peu près égales de la réfraction. Le théorème que je présente ici prouve la même vérité, en renfermant toutes les évaluations possibles de la réfraction entre des limites d'appréciation rigoureuses, pour chaque distance zénithale à laquelle on veut l'appliquer.

pénètre en sortant du vide, et se transmet de là jusqu'à l'observateur par des trajectoires non rentrantes sur elles-mêmes, comme cela a lieu dans l'atmosphère terrestre, vous pourrez, pour toute distance zénithale apparente qu'il vous plaira de choisir, former deux expressions analytiques de la réfraction, en termes finis, et numériquement calculables, dont l'une vous donnera une évaluation certainement trop forte, l'autre une évaluation certainement trop faible; de sorte que la moyenne des deux comportera toujours une erreur moindre que leur demi-différence, que j'appellerai par cette raison sa *limite d'erreur*. Maintenant, comme type d'application, j'attribue à la couche où je place l'observateur, les mêmes conditions météorologiques adoptées aussi par Ivory, c'est-à-dire la température t_1 égale à + 10 degrés centésimaux, et la pression p_1 égale à $0^m,762$; puis, effectuant le calcul numérique des deux évaluations pour des distances apparentes diverses, depuis le zénith jusqu'à 86° 30′, j'obtiens le tableau suivant, où l'on voit leurs limites d'erreurs respectives, ainsi que les évaluations moyennes qui y correspondent, en regard desquelles je place les réfractions absolues données par la Table d'Ivory (1).

DISTANCE ZÉNITHALE apparente θ_1	MOYENNE des deux évaluations de $R\theta_1$	LIMITE D'ERREUR.	RÉFRACTION donnée par la Table d'Ivory.	EXCÈS de la moyenne sur la Table.
45. 0	0.58,357	0,001	0 58,36	0,00
74. 0	3.21,154	0,277	3.21,01	+ 0,14
80. 0	5.21,234	2,243	5.20,19	+ 1,25
84. 0	8 35,030	17,401	8.29,80	+ 5,23
85. 0	10. 0,941	34,130	9.53,84	+ 7,10
86. 0	11.52,846	75,100	11.47,15	+ 5,70
86.30	12.58,186	118,490	12.59,51	— 1,32

» On voit que les deux évaluations, d'abord coïncidentes au zénith, s'écartent progressivement l'une de l'autre à mesure que l'on descend vers

(1) Les formules qui fournissent les deux valeurs numériques de la réfraction, l'une trop forte, l'autre trop faible, sont établies analytiquement dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour l'année 1839, pages 65 et suivantes; le tableau lui-même s'y trouve à la page 70.

l'horizon. Mais, même à 80 degrés de distance zénithale apparente, *la limite d'erreur* de leur moyenne est encore restreinte à 2″,243. C'est-à-dire, qu'à cette distance du zénith, toutes les particularités de constitution intérieure des atmosphères sphériques, assujetties aux conditions communes de l'équilibre et de la dilatabilité, ne peuvent, quelle que soit leur diversité, modifier la réfraction que dans cette portion minime de sa valeur totale, comme nous l'avons effectivement constaté sur les cas nombreux que nous avons successivement considérés. Quand on s'éloigne davantage du zénith, les deux évaluations s'écartent davantage l'une de l'autre; la limite d'erreur de leur moyenne s'agrandit; mais, par une circonstance bien digne de remarque, jusqu'à 86° 30′ de distance zénithale, ces valeurs moyennes s'accordent encore presque exactement avec les valeurs absolues calculées par les théories d'Ivory et de Laplace, comme si toutes les propriétés spéciales des atmosphères fictives que l'on peut imaginer, s'identifiaient en somme dans ce résultat final, avec celles des atmosphères qu'ils ont employées.

» Telle est l'explication du mystère numérique sur lequel j'ai d'abord appelé l'attention. Il faut maintenant expliquer aussi le mystère physique qui l'accompagne. Comment se fait-il, que, jusqu'à cette même distance zénithale de 80 degrés, des atmosphères sphériques et en équilibre donnent, par un calcul indubitable, des réfractions, si approximativement conformes à celles de l'atmosphère réelle, toujours déformée, toujours agitée par les accidents locaux? conformité telle, que les observations les plus précises, effectuées dans toutes les régions du globe, à toutes les hauteurs, dans tous les états météorologiques de la couche d'air où l'on porte les instruments, n'y fassent jamais apercevoir que des différences occasionnelles, à peine appréciables, et de sens divers? Ces questions ne peuvent évidemment se résoudre, qu'en étudiant par l'expérience, les caractères propres de l'atmosphère réelle, les dissemblances de sa constitution physique en différents lieux à un même instant, les conditions de mutabilité auxquelles elle est sujette; puis, en examinant jusqu'à quel point ces particularités, non comprises dans nos formules, peuvent vicier la justesse de leur application. Ceci nous mène évidemment dans un ordre d'idées tout autre que celui que nous venons de suivre; et j'en remets l'exposition à la séance prochaine, ou à celle qui suivra, si l'Académie veut bien m'accorder aussi longtemps son attention. »

(*Séance du* 30 *octobre* 1854.)

Sur la théorie des réfractions atmosphériques.

« Je me propose aujourd'hui d'examiner, comment il se fait que nos Tables de réfractions, calculées pour des atmosphères sphériques en équilibre, donnent, jusque vers 80 degrés de distance zénithale, des résultats si concordants avec les réfractions de l'atmosphère réelle, dont les couches d'égales densités, surtout les inférieures, sont perpétuellement ondulantes et agitées. Ce n'est pas, qu'à cette limite, et même plus près du zénith, on ne remarque dans ces phénomènes des variations accidentelles, que l'on dit avoir vu parfois s'élever à plusieurs secondes de degré. Sans prétendre contester le fait, je me bornerai à dire que l'appréciation de ces amplitudes est difficile, parce que, pour la connaître avec certitude, il faudrait en séparer les erreurs qui proviennent de l'état des instruments, de l'irrégularité locale des températures admises dans le calcul, des Tables de refraction qu'on y emploie, enfin de l'observation elle-même. C'est pourquoi, dans ce que j'aurai à rapporter ici, sur ces accidents des réfractions atmosphériques, je m'appuierai particulièrement sur des observations qui me sont propres, que j'ai faites spécialement pour les étudier, et qui ne seront pas sujettes aux mêmes objections.

» Mais avant tout, je me débarrasserai des mouvements de l'atmosphère, en réduisant leur influence sur les réfractions à ce qu'elle est réellement. La lumière emploie 493 secondes de temps sexagésimal à parcourir la distance du Soleil à la Terre, qui, dans sa valeur moyenne, comprend 24096 rayons terrestres, dont la longueur est connue en mètres. D'après cela, si l'on donnait à l'atmosphère terrestre 76400 mètres de hauteur, ce qui est plus d'une fois et demie celle que l'on peut lui attribuer d'après les indications physiques les mieux établies, le temps qu'une trajectoire lumineuse, même horizontale, mettrait à venir depuis sa sortie du vide jusqu'à un observateur placé à la surface de la Terre, serait moindre que la 314^{e} partie d'une seconde. Pour une telle vitesse, les mouvements les plus violents qui puissent se produire dans l'atmosphère sont nuls; et l'élément lumineux traverse les couches aériennes situées sur son passage, comme si elles étaient en repos. Les déplacements qui s'y sont opérés, n'influent sur sa marche, que par la répartition des densités et des températures qu'ils ont amenées avec eux.

Maintenant, supposez que l'observateur continue de regarder la même étoile pendant quelques instants, comprenant, par exemple, 10 secondes de temps sexagésimal. Durant ces 10 secondes, la Terre et l'atmosphère qui la recouvre, auront décrit autour de leur axe commun un angle dièdre qui comprend 150 secondes en arc ; donc, à la fin de cet intervalle, l'élément lumineux qui parviendra de l'étoile à l'observateur, aura traversé une portion de l'atmosphère physiquement différente de celle que le premier avait parcourue, et qui pourra être un peu différemment stratifiée, ce qui occasionnera une inégalité correspondante dans la réfraction. Or, on sait que la rétine une fois excitée par la lumière, conserve pendant un temps fixe, quoique très-court, l'ébranlement qu'elle a reçu. Conséquemment les impressions produites dans l'œil de l'observateur, par les trajectoires inégalement refractées venues successivement de l'étoile durant un intervalle de temps moindre que celui-là, se mêleront et se superposeront pour ainsi dire, de manière à lui faire voir l'étoile plus ou moins dilatée et agitée, selon l'inégalité d'état des portions différentes de l'atmosphère, que sa lumière aura dû traverser pour arriver jusqu'à lui (1).

» Les astronomes observent tous les jours des accidents de ce genre dans la perception, non-seulement des étoiles, mais aussi des planètes. Il ne sera pas inutile pour le sujet que nous traitons, d'en apprécier au moins approximativement l'amplitude; et comme on décrit toujours plus sûrement ce qu'on a vu que ce qu'on a ouï raconter, j'en rapporterai ici quelques exemples, qui se sont présentés à moi, dans le voyage astronomique que je fus chargé de faire en 1824 et 1825, sur divers points de l'Italie, de l'Illyrie et de l'Espagne, ayant pour aide le fils que j'ai perdu, et qui était devenu, depuis, membre de l'Académie des Inscriptions.

» Me trouvant, au commencement de 1825, à la station Scarpa, près de Fiume, pour mesurer la longueur du pendule, j'avais aussi à déterminer un azimut, que je désirais obtenir avec la dernière précision. Pour cela, entre autres procédés, j'observai un grand nombre de passages supérieurs et inférieurs de la polaire avec une lunette méridienne de Fortin, munie d'un micromètre à cinq fils très-fins, formés d'un fil de cocon dédoublé, que

(1) Les effets optiques dont je veux parler ici, diffèrent essentiellement de ces vibrations lumineuses avec changement instantané d'éclat et de couleur, que l'on observe fréquemment dans les images des étoiles, et que l'on appelle *la scintillation*. Arago a décrit en détail ces derniers phénomènes dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, pour 1852 ; et il en a donné une explication fondée sur le principe des interférences.

j'avais tendus moi-même, et que je surveillais avec un grand soin. Cette lunette, bien étudiée, était établie sur de gros piliers de pierre, scellés dans le roc; et sa fixité, qui ne s'est jamais démentie, se constatait à tout instant sur une mire visible de jour et de nuit, placée au sud de la station, à 16″ en arc du méridien, dans l'île de Veglia, éloignée de 12 à 15 kilomètres. Les distances zénithales de la polaire étaient approximativement, dans le passage supérieur, 43° 4′, dans l'inférieur, 46° 18′; et pour des observations faites aussi près du zénith, les irrégularités des réfractions sont généralement peu à craindre. Mais, dans cette localité adossée au sud des Alpes illyriennes, il descend fréquemment de cette chaîne, pendant la saison d'hiver, des vents de nord furieux, appelés des *Bora*, dont la violence est telle, qu'il avait fallu recouvrir notre cabane par des câbles attachés au roc pour qu'elle ne fût pas emportée. Dans ces occasions, le mouvement horizontal de l'étoile, qui, par des temps calmes, est sensiblement uniforme, se montrait troublé par des oscillations très-vives, que la lenteur de sa marche générale rendait fort sensibles, et que j'ai soigneusement observées. Quelques notes extraites de mes registres en donneront une idée plus vraie que ne ferait une description étudiée.

1823. Février 8. Polaire supérieure; de trois à quatre heures après midi. L'étoile est excessivement agitée par le Bora, ce qui la rend très-dilatée et très-faible. On n'a pu l'observer qu'au 4ᵉ et au 5ᵉ fil, en estimant l'instant moyen de son occultation, sans pouvoir l'assurer par ses contacts antérieurs et postérieurs que son mouvement oscillatoire rend impossible de fixer.

1823. Février 9. La même. Il fait un vent de Bora qui agite l'étoile de la façon la plus violente, et la rend comme une vapeur oscillante. On n'a pu l'observer qu'au premier fil et aux trois derniers. Elle est restée au moins pendant 10 secondes sous le 4ᵉ avant de lancer des rayons au delà du second bord, après avoir cessé d'être visible de l'autre côté. Elle fait des oscillations qui la portent quelquefois soudainement à plus de 20 secondes de temps de son lieu vrai.

1823. Février 11. La même. Vent de Bora qui l'agite. On a pu l'observer aux cinq fils Voici quelques remarques sur ses passages.

1ᵉʳ Fil. L'étoile, d'abord séparée du fil, a volé sur lui d'une distance plus grande que le diamètre apparent qu'il sous-tendait.

2ᵉ Fil. L'étoile est sous le fil, et, quoique bien plus petite que lui, elle lance des rayons des deux côtés.

1825. Février 11. 3e Fil. L'étoile éprouve des oscillations qui font varier subitement son lieu, comme en voltigeant, jusqu'à des distances qui valent plus de 10 secondes de temps. Elle se tourbillonne, et se défait quelquefois en plusieurs petites étoiles sensiblement écartées les unes des autres.

4e Fil. L'étoile est sous le fil et oscille des deux côtés.

» Dans ces observations, pendant l'intervalle de temps d'environ 20 minutes que l'étoile employait pour parcourir l'intervalle de deux fils consécutifs, on constatait l'immobilité de la lunette en observant des passages d'étoiles dans le sud, et en la ramenant sur la mire de Veglia, qui s'est trouvée toujours exactement bissectée par le fil central.

» Ceci prouve donc, que, dans ces cas de perturbations violentes et locales de l'atmosphère, il se produit parfois, même à de médiocres distances du zénith, des réfractions latérales dont la théorie ne saurait tenir aucun compte. Mais on voit également, que, s'opérant par oscillations, leur influence sur les positions absolues peut être éludée, dans des observations faites avec soin : d'abord, par des estimes judicieuses de leurs phases moyennes; puis, par compensation entre les passages qui ont lieu aux différents fils, et à différents jours. Aussi, les observations que je viens de rapporter, ont-elles pu être employées à la détermination de l'azimut de la mire, avec non moins d'utilité, et sans plus d'erreur, que celles qui avaient été faites par des temps plus calmes (1).

» Dans cette même étendue de distances zénithales, moindre de 80 degrés, où les résultats de toutes les hypothèses mathématiques s'accordent, les réfractions présentent encore d'autres irrégularités accidentelles, dont l'effet s'exerce verticalement. J'ai eu l'occasion, et le devoir, d'étudier celles-ci avec de grands soins, quand je retournai à Formentera en 1825, pour mesurer de nouveau la longueur du pendule et la latitude, à cette limite australe de notre arc méridien. Mon observatoire nomade offrait pour cette étude les conditions les plus favorables : solidement assis sur une masse de rochers, s'élevant isolée au milieu de la mer, et séparé seulement de l'air extérieur par une mince cabane qui lui laissait un libre accès autour des instruments, que des toiles légères tenaient constamment abrités contre les rayons du soleil. Aussi, quelles ont été les conséquences de ces dispositions? Du 7 juin au 1er juillet, 86 séries de passages méridiens d'étoiles ont été observées avec

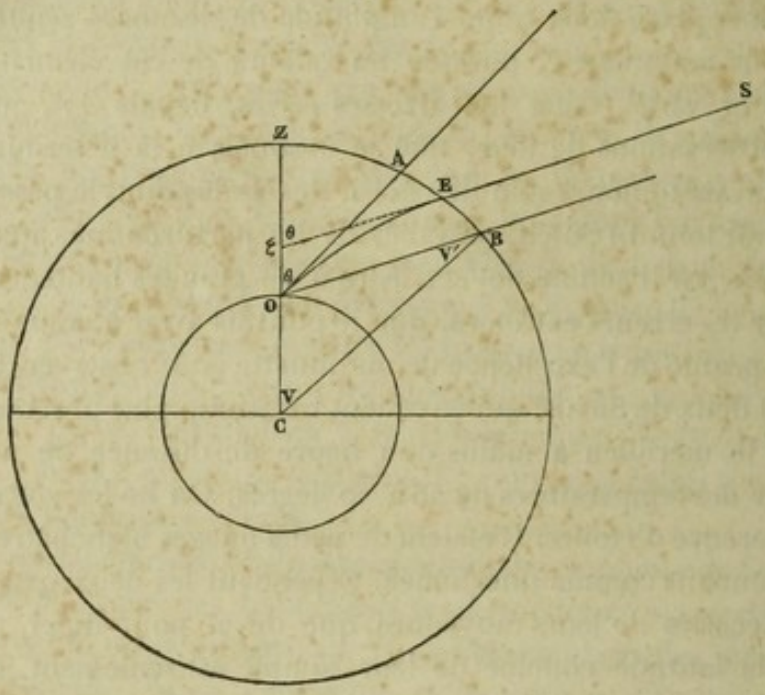
(1) Ces déterminations, ont été rapportées en détail, dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour l'année 1830.

le cercle répétiteur, au nord et au sud, tant de nuit que de jour, depuis 33° 47′ de distance zénithale, jusqu'à 74° 8′, γ petite Ourse supérieure et θ du Centaure, par des températures qui ont varié depuis + 16°,1 jusqu'à + 31°,3 du thermomètre centésimal. Or, non-seulement l'accord a été général; mais, pour chaque étoile, en particulier, quand on a rapproché les résultats partiels, les écarts de 1 seconde en arc autour de leur moyenne, ont été des cas tout à fait exceptionnels; concordance, je crois, au moins égale, à tout ce que l'on a pu jusqu'ici obtenir, ou espérer, dans les observations fixes, avec de grands instruments. Ceci prouve évidemment l'exactitude des Tables de réfraction de Laplace dans toute l'amplitude de distances zénithales que ces observations embrassent, puisque les valeurs de cet élément qu'on en a déduites ont varié, dans les diverses séries, depuis 37″, jusqu'à 192″. Dans les observations de jour, que je destinais à la détermination de la latitude, j'avais toujours soin de choisir des étoiles dont le passage au méridien s'opérât loin du Soleil, afin d'éviter les perturbations atmosphériques occasionnées par l'action de cet astre à de grandes hauteurs. Mais, afin d'apprécier les erreurs extrêmes, que je pouvais avoir à craindre de sa présence, j'ai profité de l'excellence de ma lunette pour observer deux passages de Rigel et deux de Sirius, qui en étaient beaucoup plus proches; ce dernier traversant le méridien à moins de 1 heure de distance de midi, l'un et l'autre, par des températures de 28 à 30 degrés. On ne les voyait plus alors avec l'apparence d'étoiles. C'étaient de petits nuages blanchâtres, voltigeant et tourbillonnant comme une fumée. Cependant les deux passages partiels ne se sont écartés de leurs moyennes que de 2″ pour Rigel, de 1″,8 pour Sirius; et la latitude conclue de leur somme est seulement inférieure de 0″,08 à celle qui se déduit de toutes les autres étoiles observées comme elles du côté du sud, dans les conditions convenables qu'un astronome intelligent choisira toujours (1). Je conclus de là, qu'en fait, jusqu'à 75 degrés de distance zénithale au moins, les irrégularités des réfractions atmosphériques, dans le sens vertical, sont, comme les latérales, fort petites, oscillantes, et de nature à se compenser dans les moyennes de résultats partiels, même peu nombreux; j'en conclus aussi que, dans ces limites d'application, les Tables déduites des théories analytiques de Laplace ou d'Ivory, sont parfaitement fidèles, et qu'on les trouvera telles, quand la disposition des observatoires où on les emploiera, ne détruira point l'iden-

(1) Tous les détails de ces déterminations sont consignés dans le tome XIX des *Mémoires de l'Académie*.

tité d'état physique de l'air intérieur et de l'air extérieur, pour laquelle on les a établies ; et n'y déterminera pas des agitations qui échappent à toute théorie.

» Pour bien comprendre les circonstances qui facilitent l'appréciation théorique des réfractions, depuis le zénith jusque vers 80 degrés de distance zénithale, il faut premièrement se faire une idée exacte des routes que les trajectoires lumineuses, comprises dans cette amplitude, suivent à travers l'atmosphère en venant du vide jusqu'à nous (1). Cette route, pour chaque trajectoire SEO, est entièrement comprise entre deux droites OA, OB, par-



tant de l'œil de l'observateur, suivant des directions faciles à déterminer. La plus haute, OA, coïncide avec la dernière tangente de la trajectoire considérée ; et elle forme, avec la verticale de l'observateur, un angle AOZ, égal à la distance zénithale *apparente* θ_1. La plus basse, OB, est parallèle à la première tangente SEζ de cette trajectoire ; et elle forme, avec la même verticale, un angle BOZ, égal à la distance zénithale *vraie* θ, ou $\theta_1 + R$, R étant la réfraction correspondante à la distance

(1) Dans la figure, C est le centre de la Terre et de l'atmosphère supposées sphériques. O est l'observateur, COZ sa verticale. SEO est une trajectoire lumineuse, qui, partie d'une étoile suivant la droite SE, s'infléchit en E à son entrée dans l'atmosphère, et arrive en O, sous la distance zénithale apparente AOZ ou θ_1. Dans la figure, il a fallu agrandir l'épaisseur de l'atmosphère, hors de toute proportion pour rendre les détails du tracé perceptibles.

apparente θ_1. La trajectoire sera partout plus haute que OB, plus basse que OA. Conséquemment, si vous conduisez ces deux droites jusqu'à la limite extrême de l'atmosphère, telle que le calcul appliqué aux observations physiques nous la fait admettre, l'entrée de la trajectoire s'opérera toujours entre les deux points d'intersection ainsi obtenus. Si, de ces points, vous menez deux rayons dirigés au centre C de la masse atmosphérique, qui est aussi celui de la Terre, ils formeront, avec la verticale de l'observateur, deux angles au centre, l'un provenant de OB, plus grand que le réel, l'autre provenant de OA, plus petit. Cela vous fera donc connaître approximativement, et en moyenne, au-dessus de quelle région du globe, et à quelle distance angulaire V, de l'observateur, chaque trajectoire fait son entrée. Si vous voulez ultérieurement savoir à quelle hauteur elle se trouve, quand elle est encore séparée de lui par un angle au centre donné v, vous pourrez facilement avoir deux évaluations de cette hauteur, dont l'une sera certainement trop grande et l'autre certainement trop petite. Pour cela, vous n'avez qu'à mener du centre C une droite indéfinie, formant, avec la verticale de l'observateur, l'angle donné v; puis, la conduisant jusqu'aux droites OB, OA, vous déterminerez les deux rayons d'intersection ρ, ρ_1, d'où retranchant le rayon a de la Terre, il restera la hauteur $\rho_1 - a$ trop grande, et la hauteur $\rho - a$ trop petite; ce qui vous donnera, en moyenne, la hauteur véritable, avec une approximation d'autant plus grande que les deux évaluations partielles seront moins différentes l'une de l'autre (1). Je rejette en note ce calcul trigonométrique très-simple; je ne rapporterai ici que les données que j'y ai employées, et les résultats que j'en ai déduits.

» La première de ces données, c'est la hauteur que l'on attribue à l'atmosphère. Dans un travail inséré au tome XVII des *Mémoires de l'Académie*, je crois avoir établi, par des considérations physiques et mathématiques très-probantes, qu'elle n'excède pas, et ne saurait excéder, 48000 mètres : ce serait environ $\frac{75}{10000}$ du rayon de la Terre. Toutefois, pour me rapprocher des idées communes qui la font plus haute, quoique, à mon avis, sans mo-

(1) Quand on calculera ces deux limites de hauteur pour de petites valeurs de l'angle v, la hauteur de la trajectoire se trouvera toujours beaucoup plus proche de $\rho_1 - a$ que de $\rho - a$, puisque, dans cette dernière portion de son cours la plus voisine de l'observateur, elle approche de plus en plus de se confondre avec la dernière tangente OA. La nécessité de cette distinction est surtout manifeste pour la trajectoire qui arrive horizontale à l'observateur. Car sa première tangente OB, passe nécessairement au-dessous de la convexité de la Terre, dans les amplitudes initiales de l'angle au centre v; de sorte que pour ces premières valeurs, on rouverait nécessairement $\rho - a$ négatif.

tifs fondés, je substituerai à ce rapport 0,008, ce qui donnera pour la hauteur 51000 mètres environ. Les deux limites d'entrée de chaque trajectoire en deviendront un peu plus écartées ; mais, pour les aperçus que nous voulons obtenir, cela n'aura qu'un léger inconvénient.

» Il faut ensuite connaître les réfractions R qui appartiennent à chaque distance zénithale apparente θ_1. Je les emprunte à la Table de Laplace, que l'expérience prouve être très-exacte, au moins jusqu'à 80 degrés de distance du zénith, ce qui comprend toutes les trajectoires que je veux spécialement considérer, celles qui se forment plus près de l'horizon étant sujettes à des accidents de déformation, impossibles à prévoir et à calculer, comme on le verra clairement par cette étude même. Enfin, pour fixer les conditions de l'application, j'attribuerai à la couche aérienne dans laquelle l'observateur, se trouve, le même état météorologique qu'elle avait à l'Observatoire de Paris lors de l'ascension de Gay-Lussac, c'est-à dire $t_1 = +30°,75$, $p_1 = 0^m,76568$. J'y trouverai l'avantage de pouvoir employer, dans notre recherche actuelle, la portion de la trajectoire horizontale que j'ai calculée exactement, pour ce cas-là, et dont j'ai déjà rapporté la marche dans ma communication précédente (1).

» Considérons d'abord cette trajectoire qui arrive horizontale à l'observateur. Ses deux limites d'entrée sont très-larges. Les angles au centre, provenant des droites OA, OB, diffèrent entre eux de 33 minutes. La moyenne est $7°\,29'\,45''$. Prenons-la avec cette incertitude, et supposons que la trajectoire venant ainsi du sud dans le méridien de Paris, arrive horizontale à l'Observatoire impérial, dont la latitude est $48°\,50'\,14''$. Celle du point d'entrée sera alors $48°\,50'\,14'' - 7°\,29'\,45''$, ou $41°\,20'\,29''$. La trajectoire dont il s'agit, pénétrera donc notre atmosphère un peu au sud de Barcelone. Elle passera au-dessus des Pyrénées, descendra vers la France; et quand son angle au centre, compté de la verticale de l'Observatoire, sera réduit à $1°\,30'$, ce qui l'amène sur la limite nord du département du Cher, elle ne sera plus qu'à 1846 mètres de hauteur. Sur le parallèle de Fontainebleau, elle sera descendue à 204 mètres, et de là, elle ira en s'abaissant jusqu'à Paris. Étonnez-vous donc

(1) Cette première portion de la trajectoire qui arrive horizontale à l'observateur a été calculée rigoureusement d'après les données atmosphériques fournies par l'ascension de Gay-Lussac, sans rien emprunter aux Tables, ni à la théorie de Laplace. Celle-ci a pour un de des éléments déterminatifs, la valeur moyenne de la réfraction horizontale observée par les astronomes, que Laplace suppose être $0°\,35'\,6''$, quand la température de l'air à la station est 0 degré, et la pression $0^m,76$. Mais cet élément est, par sa nature, fort incertain, et je montrerai plus tard comment on peut se dispenser d'y avoir recours.

qu'un pareil trajet, soumis à des influences météorologiques si diverses, s'opérant si près du sol dans une longue portion de son cours, amène des réfractions qui ne soient pas fidèlement accusées par le seul état physique de l'air, au point d'arrivée! Pour se figurer qu'une telle dépendance fût possible, il faudrait ne s'être rendu aucun compte des conditions dans lesquelles le phénomène s'accomplit. Il y a plus : nous avons supposé que la trajectoire horizontale venait du sud; si nous la faisions venir du nord, de l'est, de l'ouest, ou dans tout autre azimut, les circonstances météorologiques qui l'influenceraient dans sa route près du sol seraient dissemblables; il pourrait donc, il devrait même, en général, en résulter des réfractions horizontales différentes, au même instant, dans un même état du thermomètre et du baromètre de l'observateur. Comment cette seule indication suffirait-elle à faire prévoir leurs diversités simultanées?

» Ces conditions de parcours sont tout autres pour la trajectoire, qui, venant de même du sud, dans le méridien de Paris, arrive à l'Observatoire sous la distance zénithale apparente de 80 degrés. La distance vraie n'est alors que de $80°\,4'\,59''$ dans les circonstances météorologiques pour lesquelles nous opérons. Les deux angles au centre d'entrée sur les droites OA, OB, ne diffèrent plus entre eux que de 1 minute. La moyenne est $2°\,19'\,20''$. La trajectoire pénètre alors notre atmosphère à la latitude de $46°\,30'\,54''$, entre Saint-Saturnin et Cullan, à la limite sud du département du Cher. Sa hauteur est alors celle de l'atmosphère même, telle que nous l'avons admise. Ensuite, pour que l'on puisse voir clairement sa marche à mesure qu'elle se rapproche de Paris, je calcule les hauteurs de la droite la plus basse OB, pour diverses valeurs de l'angle au centre, moindres que $2°\,19'\,20''$, hauteurs qui seront certainement moindres que celle de la trajectoire; quand elle arrivera sur les mêmes verticales. J'obtiens ainsi le tableau suivant, dans lequel les parallèles terrestres auxquels ces verticales répondent, sont désignés par des noms de localités propres à les faire reconnaître.

ANGLES au centre comptés vers le sud, à partir de la verticale de l'Observatoire.	HAUTEURS de la droite OB inférieure à la trajectoire.	LATITUDES correspondantes.	NOMS DES LOCALITÉS situées approximativement sous le parallèle au zénith duquel la trajectoire se trouve.
2.19.20	50930m	46.30.54	Entre Saint-Saturnin et Cullan. Arrondissement de Saint-Amand (Cher).
1.30. 0	31339	47.20.14	Entre Meri-ès-Bois et Ennordre. Arrondissement de Sancerre (Cher).
1. 0. 0	20460	47.50.14	1′ 42″ au sud de Châteauneuf. Arrondissement d'Orléans (Loiret).
0.30. 0	9970	48.20.14	Entre la Forêt Sainte-Croix, arrondissement d'Étampes (Seine-et-Oise), et la Chapelle-la-Reine, arrondissem. de Fontainebleau (Seine-et-Marne).
0.15. 0	4921	48.35.14	Sur le parallèle d'Arpajon. Arrondissem. de Corbeil (Seine-et-Oise).
0. 5. 0	1626	48.45.14	9260 mètres au sud de l'Observatoire. Arrondissement de Sceaux (Seine).

» Il me semble que ce tableau parle aux yeux. On y voit que l'élément lumineux décrit toute sa trajectoire, dans un secteur atmosphérique très-aigu, ayant pour axe la verticale de l'observateur, dont il ne s'écarte que de 2° 19′ 20″. Ce secteur, dans son amplitude restreinte, s'adaptant par sa base à la configuration de la surface terrestre autour du point d'observation, y forme, pour ainsi dire, une atmosphère locale, dont la pression sur cette surface, au moment du trajet, est indiquée par la longueur de la colonne barométrique qu'elle y soutient. Presque tout ce trajet s'opère fort au-dessus de la région de l'air, qui est le domaine des nuages, et des autres accidents météorologiques; de sorte que l'élément lumineux, arrivé jusqu'à quelques milliers de mètres de l'observateur, presque sans ressentir ces influences perturbatrices, n'a plus ensuite à traverser qu'une portion de la masse atmosphérique située tout près de la verticale du lieu d'observation, et dont par conséquent l'état physique peut être accusé fidèlement par les instruments météorologiques qu'on y a placés. Alors, pour ne pas vicier volontairement ce reste de trajet, on devra supposer que l'observateur n'établira pas sa station immédiatement à la surface d'un sol exposé aux ardeurs du soleil, d'où s'élèveraient continuellement des filets d'air chaud, remplacés par des filets descendants d'air froid, qui pourraient infléchir la trajectoire, et même intervertir localement sa cour-

bure. Mais il lui sera toujours facile de se soustraire à ces mouvements désordonnés. Car l'expérience prouve que les échanges d'où ils résultent, ne s'étendent généralement qu'à de médiocres hauteurs, au-dessus desquelles la vision, même horizontale, des objets peu éloignés, s'opère par des trajectoires sensiblement rectilignes. J'admettrai donc qu'il s'est mis ainsi hors de ce trouble, en s'établissant par exemple sur les terrasses de l'Observatoire de Paris, ou à ma station de Formentera, ou sur quelque pic encore plus isolé. Là, au niveau de la cuvette de son baromètre, je décris une surface sphérique, concentrique au sphéroïde solide de la Terre ; et laissant à la couche atmosphérique située dans cette surface de niveau, les pressions, les densités, les températures, qu'elle a réellement dans chacun de ses points au moment de l'observation, je la considère comme la base actuelle du secteur atmosphérique, dans lequel s'accomplit la trajectoire qui arrive à la station sous la distance de 80 degrés. Si l'on se reporte aux démonstrations qui précèdent, on concevra aisément que, sous de telles conditions d'observation, il pourra exister une dépendance, au moins approximative, entre l'état de l'air à cette base au point d'arrivée de l'élément lumineux, et la faible réfraction que lui imprime le secteur atmosphérique restreint, dans lequel toute sa trajectoire est comprise. Il ne reste qu'à substituer une appréciation mathématique à cet aperçu. Mais cela exige le rapprochement d'un certain nombre de considérations physiques et mécaniques, dont le détail pourrait prolonger aujourd'hui au delà des bornes de l'indulgence, l'attention que l'Académie peut m'accorder. C'est pourquoi je lui demande la permission de remettre cet exposé à la séance prochaine. »

Note. Soit a le rayon CO de la Terre, r celui de l'atmosphère CB ou CZ, le zénith de l'observateur. Les angles AOZ, BOZ sont donnés ; le premier est θ_1, le second θ ou $\theta_1 + R$. Pour connaître l'angle au centre d'entrée V propre au point B, nommons V′ l'angle OBC. On aura, dans le triangle OBC

$$\sin V' = \frac{a}{r} \sin \theta ; \qquad V = \theta - V' ;$$

V′ se calculera par la première relation, et l'on en déduira V par la seconde.

En désignant par un indice inférieur les éléments analogues relatifs à la droite OA, on aura l'angle au centre d'entrée V_1 propre au point A, par les formules semblables

$$\sin V'_1 = \frac{a}{r} \sin \theta_1 ; \qquad V_1 = \theta_1 - V'_1 .$$

Maintenant, étant donné un angle au centre v moindre que V, soit ρ la longueur du rayon

central mené sous cet angle et aboutissant à la droite OB. Si l'on nomme v' l'angle analogue à V′, que ce rayon forme avec cette droite; on aura de même

$$\sin v' = \frac{a}{\rho}\sin\theta \quad \text{et} \quad v = \theta - v'; \quad \text{conséquemment,} \quad v' = \theta - v.$$

Ici v est connu et l'on cherche ρ; il se déduira de la première relation qui donnera

$$\rho = a\,\frac{\sin\theta}{\sin v'}, \quad \text{et par suite,} \quad \rho - a = a\,\frac{(\sin\theta - \sin v')}{\sin v'} = 2a\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\theta - v')\cos\frac{1}{2}(\theta + v')}{\sin v'},$$

ou, en remplaçant v' par sa valeur connue $\theta - v$,

$$\rho - a = 2a\,\frac{\sin\frac{1}{2}v\cos(\theta - \frac{1}{2}v)}{\sin(\theta - v)},$$

$\rho - a$ sera la hauteur du point d'intersection au-dessus de la surface de la Terre.

Si l'on voulait obtenir la longueur du même rayon central, conduit jusqu'à la droite supérieure OA, il n'y aurait qu'à remplacer θ par θ_1 dans le second membre; et, en nommant ρ_1 la longueur cherchée, on aurait évidemment

$$\rho_1 - a = 2a\,\frac{\sin\frac{1}{2}v\cos(\theta_1 - \frac{1}{2}v)}{\sin(\theta_1 - v)},$$

$\rho_1 - a$ sera la hauteur du point d'intersection au-dessus de la surface de la Terre.

Pour chaque angle au centre v ainsi donné, la trajectoire sera toujours plus haute que $\rho - a$ et plus basse que $\rho_1 - a$; du moins, pourvu qu'elle n'éprouve pas d'inflexions locales dans sa courbure, ce qui ne serait à craindre que pour celles qui arrivent horizontales ou presque horizontales à l'observateur. J'ai à peine besoin de rappeler que θ est toujours égal à $\theta_1 + R$, R désignant la réfraction qui correspond à la distance zénithale apparente θ_1.

Dans l'application, j'ai supposé la hauteur de l'atmosphère égale à $0{,}008.a$. Il en résulte donc

$$r = 1{,}008.a, \qquad \log\left(\frac{a}{r}\right) = \bar{1}{,}9965395,$$

je prends, comme Laplace,

$$a = 6366198^{m}, \qquad \text{d'où} \qquad \log a = 6{,}8038802.$$

En outre, dans les circonstances météorologiques supposées

$$t_1 = +30°{,}75; \qquad p_1 = 0^{m}{,}76508.$$

Les réfractions R évaluées d'après la Table de Laplace, sont :

à la distance zénithale apparente	$\theta_1 = 90°$;	$R = 31'.31''{,}5.$
	$\theta_1 = 80°$;	$R = 4'.58''{,}5.$

Les résultats numériques rapportés dans le texte ont été calculés avec ces données, d'après les formules établies plus haut.

(*Séance du* 13 *novembre* 1854.)

Sur la théorie des réfractions atmosphériques.

« Grâce à l'attention patiente que l'Académie a bien voulu m'accorder, je puis achever aujourd'hui d'expliquer ce mystère, en apparence si étrange, que les Tables de réfraction actuelles, calculées pour une atmosphère idéale, où les couches d'égale densité seraient sphériques et en équilibre, en quoi elle n'est pas physiquement assimilable à l'atmosphère réelle, donnent cependant des résultats vrais jusque vers 80 degrés de distance zénithale, ne devenant incertaines qu'aux approches de l'horizon. Après avoir reconnu, comme nous l'avons fait, les conditions spéciales sous lesquelles les réfractions s'opèrent, dans l'un et l'autre cas, la raison de l'accord et du désaccord, va se présenter avec une entière évidence.

» Dans ma communication précédente, j'ai spécifié les particularités d'intromission et de trajet d'un élément lumineux, qui, après avoir traversé l'atmosphère terrestre, arrive sous la distance zénithale apparente de 80 degrés à une station d'observation, suffisamment isolée, et élevée au-dessus du sol environnant, pour que la couche sphérique d'air, située à son niveau, ne se trouve pas comprise dans ce flux alternatif de courants ascendants et descendants qui sont occasionnellement produits par les différences locales de la température, au contact immédiat de la terre ou de la mer. Cette couche de niveau devra alors être considérée comme la base actuelle de l'atmosphère supérieure, au moment où chaque trajectoire lumineuse la traverse. J'ai montré de plus que, dans les circonstances météorologiques auxquelles notre calcul s'applique, la portion de cette atmosphère parcourue par la trajectoire qui s'observe à 80 degrés de distance zénithale apparente, est comprise tout entière dans un secteur sphérique décrit autour de la verticale de l'observateur, avec une amplitude d'écart mesurée par un angle au centre de $2^{\circ}19'20''$. C'est dans cette étroite portion de l'atmosphère totale que se passent les phénomènes de transmission que nous allons étudier. Le reste de la masse gazeuse n'y a aucune influence.

» Pour n'avoir à envisager que les conditions essentielles de leur accomplissement, je les dégage de leurs irrégularités accidentelles. Je choisis pour l'observation un temps serein et calme; non pas, sans doute, que je veuille le supposer tel dans toute l'universalité de l'atmosphère, ce qui serait phy-

siquement inadmissible. Je borne ces circonstances favorables au secteur atmosphérique restreint, qui entoure la verticale de notre station à une distance angulaire de 2°19′20″, lequel comprend toute la trajectoire lumineuse que nous voulons suivre. Peu importe qu'il y ait ailleurs, au même instant, des pluies, des orages, ou des tempêtes, pourvu que l'effet ne s'en propage pas jusqu'à nous, pendant l'observation. J'isole cette trajectoire de toutes celles qui arrivent quelques secondes plus tôt, ou plus tard, dans la même direction, et je suis, dans sa marche rapide, l'élément lumineux qui la décrit. Comparativement à sa vitesse propre la portion de la masse gazeuse qu'il traverse est comme en repos; et les impressions qu'il en éprouve sont uniquement produites par l'état instantané où il la trouve, au moment de son passage.

» Pour caractériser avec précision les phases successives de sa marche, considérons un arc infiniment petit de la trajectoire lumineuse, et menons le rayon central qui y correspond. Ce sera la verticale d'un des points de la surface terrestre, sur lesquels notre secteur atmosphérique repose. Ainsi, quand l'élément lumineux y arrivera, il se trouvera au zénith de ce point. Or, dans tous les lieux, et à toutes les hauteurs où l'on a porté des instruments astronomiques, en les établissant dans les conditions d'observation que nous avons assignées, on constate que, sauf les cas de perturbations atmosphériques extrêmement violentes et toujours passagères, dont je fais ici abstraction, la réfraction est généralement nulle au zénith, et a des grandeurs égales dans tous les azimuts autour de ce point, même quand on s'en écarte à de grandes distances angulaires, pourvu que l'on ne descende pas trop près de l'horizon où elles deviennent irrégulières. Si la petite amplitude de quelques minutes qu'elles atteignent, sous ces restrictions, pouvait être considérée comme un indice rigoureux, cette symétrie prouverait que la stratification des couches aériennes est généralement horizontale autour de chaque zénith. Mais, en restreignant la conséquence dans des limites proportionnées à la nature des données qui la fournissent, il résulte au moins de ce fait que, l'horizontalité a lieu, sinon rigoureusement, du moins très-approximativement au zénith même, sauf dans les cas de perturbations extraordinaires que j'ai exceptés. Ainsi, quand l'élément lumineux traversera les verticales successives des lieux situés sur sa route, la symétrie des réfractions qui s'y observent dans tous les azimuts, nous permettra d'admettre que la couche aérienne qu'il y rencontrera, se présentera à lui suivant une direction, exactement, ou à très-peu près, parallèle à l'horizon du lieu auquel chacune de ces verticales appartient.

» Cette conséquence se confirme et s'explique quand on examine la nature des causes mécaniques, par lesquelles les couches aériennes situées dans chaque verticale, pourraient être dérangées de l'horizontalité où les actions réunies de la gravité et de la force centrifuge tendent à les retenir. La principale consiste dans l'inégalité de température qui existe presque toujours entre l'air et les corps terrestres, avec lesquels il se trouve en contact immédiat. De là naissent des courants ascendants et descendants, entremêlés de remous intermédiaires, qui excluent toute régularité de stratification. Mais ces mouvements ne s'étendent qu'à de médiocres hauteurs, où ils sont éteints par les échanges mutuels des températures, qui ramènent bientôt les particules aériennes à un même état de poids spécifique, et les obligent à reprendre le mode de stratification horizontale que la gravité leur impose. Or, nous avons placé notre station d'observation au-dessus de l'épaisseur restreinte d'air, où se passent ces agitations désordonnées. En nous élevant un peu plus haut, dans les portions inférieures du secteur atmosphérique que notre trajectoire de 80 degrés traverse, nous pourrons rencontrer des masses d'air d'égale densité, qui seront mues en divers sens, suivant des directions de transport que la gravité tend sans cesse à rendre horizontales. Mais, en exceptant les cas où elles seraient poussées avec tant de violence, qu'elles rompraient convulsivement sur elles-mêmes comme une mer qui déferle, ainsi que cela arrive peut-être dans les Bora de Fiume, contrairement à la supposition d'un temps calme que j'ai admise, ce qu'on y devra concevoir de plus habituel, c'est qu'elles soient largement ondulantes comme les longues houles de l'Océan loin des côtes. Ces mouvements qui se ressentent encore de la proximité de la surface terrestre, doivent s'affaiblir à mesure qu'on s'élève, et devenir insensibles, ou tout à fait nuls, dans les régions supérieures de l'atmosphère, que leur distance soustrait complétement aux impressions qui les produisent. Les choses étant ainsi, du centre commun de la Terre et de l'atmosphère menez une verticale quelconque. Les éléments des couches d'égale densité qui se trouveront sur sa route, lui seront tous perpendiculaires ou très-peu obliques. Car, dans les couches tranquilles la perpendicularité résultera de ce qu'elles seront horizontales; et, pour celles qui auraient un mouvement de transport régulier, la verticale leur sera encore exactement ou à très-peu près perpendiculaire, selon qu'elle les rencontrera aux sommets opposés, ou sur les penchants de leurs ondulations; et dans ce dernier cas même, leurs faibles obliquités, de sens divers à diverses hauteurs, équivaudront, en somme, à l'horizontalité. C'est ce résultat d'ensemble que manifestait la symétrie des réfractions opérées

autour de chaque zénith. Mais la discussion précédente le rend plus assuré, en faisant voir comment il se produit.

» D'après cela, quand l'élément lumineux, poursuivra son trajet dans les circonstances régulières que nous avons spécifiées, les couches d'égale densité qu'il traversera successivement se présenteront toutes à lui, au point de rencontre, suivant des directions au moins très-approximativement perpendiculaires aux verticales locales, et qui se trouveront être exactement telles, en somme, si elles ne le sont individuellement. Laissant donc aux portions infiniment petites de ces couches dans lesquelles la réfraction s'est successivement opérée, leurs densités, leurs températures, les pressions qu'elles supportaient, et le mode de superposition qu'elles avaient entre elles, à l'instant du passage de l'élément lumineux, je les rassemble toutes par leurs prolongements dans une sphère complète, dont les couches d'égale densité, rigoureusement sphériques, seront assujetties dans tout leur contour, aux mêmes conditions physiques qui n'étaient que locales dans ses éléments générateurs. Cette sphère instantanée qui devra être constituée spécialement pour chaque trajectoire lumineuse, conformément aux conditions réelles de son parcours, sera évidemment un cas particulier de celles que les géomètres conçoivent spéculativement pour établir la théorie des réfractions atmosphériques. Mais, au lieu de se présenter à l'esprit avec le caractère contestable d'une hypothèse mathématique, elle sera seulement une construction auxiliaire légitimement permise, et complétement déduite de réalités, à laquelle, d'ailleurs, le calcul ne s'appliquera que sur la trajectoire même qui l'a fournie.

» Les géomètres assujettissent encore leurs atmosphères fictives à une autre condition. C'est que les densités y soient réparties dans le sens vertical, de manière que toute la masse gazeuse se trouve dans un état d'équilibre stable. Or, nous ne pouvons nous prévaloir, dans la nôtre, de cette disposition arbitraire, puisque la distribution des densités, des températures et des pressions, nous est donnée. Nous bornant donc toujours, comme je l'ai fait précédemment, à déterminer deux limites, entre lesquelles la réfraction soit comprise, il nous va falloir examiner, jusqu'à quel point cette condition d'équilibre pourra être violée dans notre secteur idéal; et dans quelle proportion, nos deux limites, calculées en la supposant satisfaite, pourront se trouver fautives. C'est à quoi je vais procéder.

» Les instruments météorologiques placés à la station d'observation, indiquent à chaque instant l'état physique de l'air en ce point central de la base de notre secteur atmosphérique. On y connaît donc sa température

t_1, la pression p_1 qui s'y exerce, d'où l'on pourra conclure sa densité actuelle ρ_1 par les lois de la dilatabilité ou de la compressibilité des gaz, en tenant compte de la petite proportion de vapeur aqueuse qui s'y trouvera mêlée, et qui est indiquée par les épreuves hygrométriques. Des expériences très-précises faites par Arago et moi, d'après le désir et avec les conseils de Laplace, ont prouvé que, à force élastique égale, la vapeur d'eau, et l'air sec, exercent des forces réfringentes si approximativement pareilles, qu'on peut, dans le calcul des réfractions atmosphériques, substituer, sans erreur appréciable, aux molécules d'air humide, des molécules d'air sec exerçant la même pression, comme Laplace l'avait inféré d'une considération physique, qui rendait cette équivalence très-vraisemblable (1). En conséquence, ne voulant pas ici compliquer la question de particularités qu'il serait facile ensuite d'y introduire, et ayant surtout pour but d'exposer le raisonnement qui la résout, je supposerai, pour simplifier, que le secteur atmosphérique qui contient notre trajectoire lumineuse est entièrement composé d'air sec, auquel j'appliquerai les lois simples de compressibilité et de dilatabilité établies par Mariotte et Gay-Lussac, en remplaçant dans celle-ci le coefficient fautif 0,00375, par 0,00366 qui est sa valeur plus exacte, assignée par MM. Regnault et Magnus, quand la pression est maintenue constante et le volume laissé variable. Pour abréger je représenterai ce nombre par ε.

» Ceci admis, soit à la station d'observation, t_1 la température mesurée au thermomètre centésimal, ρ_1 la densité de l'air rapportée à celle du mercure sous l'influence commune de la gravité locale g_1; h_1 la colonne de mercure ramenée à la température de 0°, qui est soutenue dans le baromètre par la pression p_1 qu'exerce l'atmosphère supérieure. Établissons idéalement autour de la verticale de l'observateur un cylindre très-mince, ayant pour base l'unité de surface, composé d'air ayant partout la densité ρ_1, et dont la longueur l soit telle, que toute sa masse étant sollicitée par la gravité g_1, qui a lieu au niveau de la station, y exerce la même pression p_1 que l'atmosphère réelle. La condition de cette égalité sera évidemment :

$$p_1 = g_1 \rho_1 l.$$

» Quand on connaît, par l'expérience, le rapport des densités de l'air sec, et du mercure sous l'influence d'une gravité commune et connue G, on

(1) *Mémoires de la Classe des sciences physiques et mathématiques de l'Institut pour* 1807, 1er semestre, page 39.

déduit aisément l de cette relation (1). Par exemple, si l'on suppose la température t_1 égale à 0 degrés, et la pression p_1 mesurée par une colonne de mercure à cette même température, ayant $0^m,76$ de longueur, les expériences faites à Paris par M. Regnault, sous l'action de la gravité $g_1 = G$ qui avait lieu dans le laboratoire où il a opéré, donneront pour ce cas d'application

$$l = 7990^m,26,$$

et dans toute autre station où la gravité sera g_1, la température t_1, la longueur de la colonne barométrique g_1, on aura

$$l = 7990^m,26 \frac{G}{g_1}(1 + \varepsilon t_1).$$

Cette quantité l revient sans cesse, dans la théorie des réfractions atmosphériques. Mais elle n'y entre jamais que divisée par le rayon a du sphéroïde terrestre, que Laplace suppose en moyenne contenir 6396198 mètres. En adoptant cette évaluation, où la recherche d'une rigueur locale serait inutile, on aura généralement à une latitude quelconque où la gravité sera g_1 et la température t_1 :

$$\frac{l}{a} = 0,0012551 \frac{G}{g_1}(1 + \varepsilon t_1);$$

la longueur h_1 de la colonne barométrique n'entre point dans l'évaluation de l.

» La base du secteur atmosphérique qui contient notre trajectoire ne s'étend que jusqu'à 2° 19′ 20″, au sud de la station d'observation que nous avons placée à l'Observatoire de Paris. Sur un arc si restreint, le rapport $\frac{G}{g_1}$ est à peine différent de 1, et les variations, si l'on voulait y avoir égard, ne modifieraient pas sensiblement le facteur numérique de $\frac{l}{a}$; mais nous de-

(1) Je dois supposer les éléments de ce calcul météorologique, connus du lecteur. Il les trouverait au besoin, exposés en détail, dans les Additions à la *Connaissance des temps* de 1839, pages 9 et suivantes. Seulement, au lieu du nombre 10462 que nous avions obtenu Arago et moi, comme exprimant le rapport des densités de l'air atmosphérique sec, et du mercure sous l'influence de la gravité G, il faudra substituer le nombre 10513,5 qui a été obtenu par M. Regnault sous l'influence de la même gravité, au moyen d'expériences plus exactes que les nôtres n'avaient pu l'être à l'époque où nous les avons faites.

vons nous attendre que la température t_1 et la colonne barométrique h_1 ne seront pas rigoureusement égales sur toute cette base, au même instant. Pour exagérer leur différence occasionnelle, supposons que la température, étant 0° à Paris, elle se trouve être $\pm$ 10° à l'origine australe de notre secteur, ce qui serait presque incompatible avec la condition d'un temps calme à la station de Paris. Alors, en donnant au coefficient ε sa valeur 0,00366, il en résultera

$$\frac{l}{a} = 0{,}0012551\,\frac{G}{g_1} \pm 0{,}0000459\,\frac{G}{g_1};$$

la fraction numérique $\frac{l}{a}$ restera donc encore très-petite, et moindre que $\frac{13}{1000}$ dans ces suppositions exagérées. Cette constante exiguïté de ses valeurs possibles nous sera tout à l'heure très-importante.

» Étudions maintenant la composition, non plus conventionnelle, mais réelle, du petit cylindre d'air élevé autour de la verticale de l'observateur, depuis sa station jusqu'à la limite extrême de notre atmosphère sphérique idéale. Si, à une distance quelconque r du centre de la terre, nous isolons par la pensée, dans ce cylindre, une tranche infiniment mince, dont la hauteur soit dr et la densité ρ, son poids sera $g_1 \frac{a^2}{r^2}\rho\,dr$, a étant la longueur du rayon r à la station d'observation, parce que l'action de la gravité décroît en raison du carré de la distance au centre commun de la Terre et de l'atmosphère ainsi formées. Nommons généralement p la pression qui a lieu dans cette atmosphère à la même distance r du centre. La tranche considérée sera soulevée de bas en haut par la pression p, qui sera exercée sur sa surface inférieure; et, à sa surface supérieure, elle sera poussée de haut en bas par la pression $p + dp$, le signe + affecté à la différentielle dp ne fixant rien autre chose, sinon que nous la considérons *analytiquement* comme positive, en même temps que dr. La pression p, qui tend à soulever la petite tranche d'air, sera donc combattue par son poids, jointe à la pression supérieure $p + dp$, c'est-à-dire par $g_1 \frac{a^2}{r^2}\rho\,dr + p + dp$. Retranchant des deux parts p, qui est commun, la petite tranche se trouvera, en définitive, poussée de haut en bas par la résultante $g_1 \frac{a^2}{r^2}\rho + dp$. Ainsi, pour qu'elle demeurât en équilibre à la distance r, où nous la supposons placée, il faudrait que cette résultante fût nulle, c'est-à-dire qu'on eût :

$$(1) \qquad dp = -g_1 \frac{a^2}{r^2}\rho\,dr;$$

et, pour que toutes les tranches pareilles, dont le cylindre se compose, fussent de même individuellement en équilibre à leur distance propre r, il faudrait que, depuis la station d'observation jusqu'au sommet de l'atmosphère, l'équation (1) eût généralement lieu entre les éléments variables p, ρ, r.

» Nous ne pouvons pas supposer à priori que cette condition d'équilibre se trouve naturellement remplie dans le cylindre d'air de notre atmosphère sphérique, construit avec les valeurs de p et de ρ, qui ont existé simultanément aux distances r, prises sur chacune des verticales de notre secteur, au moment où l'élément lumineux les a traversées. C'est pourquoi, désignant en général par $+ \partial p$, ce qu'il faudrait *analytiquement* ajouter au *dp réel*, pour que chaque tranche infiniment mince demeurât fixe à la distance r, avec sa densité actuelle ρ, je remplacerai l'équation (1) par son analogue ainsi corrigée, qui sera

$$(2) \qquad dp + \partial p = - g_1 \frac{a^2}{r^2} \rho \, dr;$$

dans celle-ci, ∂p devra être considérée comme une fonction de r, toujours très-petite de l'ordre dr, mais qui peut varier discontinûment, de manière à devenir au besoin, et par intermittences, positive, nulle ou négative. Il restera à chercher plus tard quelles peuvent être physiquement les valeurs de ∂p aux divers étages de notre cylindre d'air, et quelle influence leur ensemble peut avoir pour modifier la réfraction opérée par le secteur sphérique dans lequel la trajectoire est comprise. En outre, on devra se rappeler, que, par convention, les dp de l'équation (2) sont ceux qui ont réellement lieu à chaque étage de l'atmosphère auxiliaire que nous avons construite avec les éléments des couches aériennes que notre trajectoire lumineuse a traversées; en sorte que leur somme équivaut à la pression p_1, qui s'exerce au niveau de la station d'observation, et qui est mesurée par la hauteur du mercure contenue dans le baromètre qu'on y a placé.

» Maintenant, je prie le lecteur de vouloir bien se reporter à mon Mémoire sur les réfractions atmosphériques inséré parmi les Additions à la *Connaissance des temps* pour l'année 1839, et dans lequel j'ai obtenu deux évaluations analytiques, l'une certainement trop faible, l'autre certainement trop forte de la réfraction, correspondante à une distance apparente quelconque θ_1, dans une atmosphère où les couches d'égale densité sont supposées sphériques et en équilibre. Dans notre étude actuelle, la sphéricité de ces couches est un résultat de construction, puisqu'elles ont été formées par cette condition même, d'après la série réelle des densités que l'élément lu-

mineux avait rencontrée sur son passage, en décrivant la trajectoire isolée que nous considérons. Jusque-là toutes les formules établies dans le Mémoire cité sont applicables. Mais de plus, en le consultant aux pages 57 et 67, on y verra que pour obtenir les deux limites de la réfraction, il n'est nécessaire de recourir à l'équation (1) de l'équilibre que pour évaluer l'intégrale :

$$\int_a^{a+h} \frac{k\rho\, a\, dr}{r^2},$$

dans laquelle a désigne le rayon de la Terre à la station d'observation, ρ la densité à la distance r du centre, et k un coefficient qui dépend du pouvoir réfringent spécifique de l'air à cette même distance. Les indices annexés au signe d'intégration signifient, selon l'usage, que l'intégrale doit être effectuée pour toute la hauteur de l'atmosphère, depuis la valeur inférieure de r qui est a, jusqu'à la supérieure qui est $a+h$; de manière que si elle se trouve être exprimée analytiquement par $\varphi(r)+\text{const.}$, sa valeur définie sera $\varphi(a+h)-\varphi(a)$.

» Dans la généralité du problème des réfractions, k doit être considéré comme une fonction variable de r. Car, indépendamment de l'humidité dont nous avons fait abstraction, il changerait avec la hauteur si l'air atmosphérique avait une composition chimique différente à des hauteurs diverses. Mais, comme les expériences faites jusqu'ici s'accordent à montrer qu'elle est partout la même, sauf de très-petites différences locales et accidentelles, qui très-probablement ne se produisent que dans le voisinage immédiat de la surface terrestre, par l'effet des émanations gazeuses qui en sortent, et des modifications chimiques occasionnées par l'action de l'homme, je ferai abstraction de ces particularités propres aux couches d'air tout à fait inférieures, et je traiterai le coefficient k comme constant. Le faisant donc sortir, à ce titre, de dessous le signe $\int$, l'intégrale à évaluer sera simplement

$$k\int_a^{a+h} \frac{\rho\, a\, dr}{r^2}.$$

» Or, un procédé bien simple va faire voir *pourquoi* cette somme se conclut immédiatement de la condition d'équilibre, quand elle existe, et *pourquoi* on ne peut l'obtenir sans y avoir recours, à moins que des considérations particulières au problème que l'on traite, n'autorisent à s'en dispenser.

» A cet effet, je donne à l'intégrale demandée la forme équivalente

$\frac{k}{g_1 a}\int_a^{a+h}\frac{g_1 a^2 \rho\, dr}{r^2}$, qui, en remplaçant g_1 hors du signe $\int$ par sa valeur tirée de la relation $p_1 = \rho_1 g_1 l$, devient

$$\frac{l}{a} k\rho_1 . \frac{1}{p_1}\int_a^{a+h}\frac{g_1 a^2 \rho\, dr}{r^2};$$

maintenant, la quantité qui se trouve sous le signe d'intégration représente le poids de la petite couche aérienne située à la distance r du centre, ayant pour densité ρ, pour hauteur dr, et pour base l'unité de surface. Ainsi, la somme qu'il s'agit d'effectuer est celle de tous ces poids élémentaires contenus dans la colonne verticale qui s'étend depuis la station d'observation, jusqu'au sommet de l'atmosphère. Quand la masse gazeuse est en équilibre, cette sommation est facile. Car alors, chacun de ces poids équivaut à l'incrément $-dp$ de la pression à la distance r; et leur somme prise depuis $r = a$ jusqu'à $r = a + h$ est représentée par la pression totale p_1; de sorte que l'intégrale demandée multipliée par ses facteurs extérieurs, est :

$$+\frac{l}{a} k\rho_1 . \frac{p_1}{p_1} \quad \text{ou simplement} \quad +\frac{l}{a} k\rho_1 .$$

Pour apprécier l'importance numérique de ce produit, je prends les données suivantes qui ont été adoptées par Ivory, comme base de ses Tables de réfraction,

$$\frac{l}{a} = 0{,}0012940, \qquad k\rho_1 = 0{,}00014183\,04;$$

cela suppose qu'à la station d'observation la température $t_1 = +10$ degrés centésimaux, et la pression $p_1 = 0^m{,}762$.

» L'extrême petitesse de ces nombres fait que leur produit, converti en secondes sexagésimales de degré, vaut seulement $0''{,}037846$. Il entre avec cette faible valeur dans l'expression des deux limites de la réfraction, propres à chaque distance zénithale apparente θ_1; mais son influence s'y agrandit rapidement à mesure que θ_1 augmente. Toutefois, quand θ_1 est égal à 80 degrés, le terme le plus fort qui en provient s'élève seulement à $13''{,}815$. De sorte que ce sera là son maximum d'effet pour les trajectoires les plus basses que je veuille ici considérer.

» Dans notre recherche actuelle, nous ne pouvons pas prétendre que les éléments de couches sphériques, pris sur les diverses verticales de l'atmosphère réelle aux points où la trajectoire lumineuse les a traversées, composeront un système gazeux nécessairement stable, quand elles seront super-

posées dans le même ordre, avec leurs conditions physiques propres, pour former l'atmosphère sphérique dans laquelle nous les assemblons. Or un tel système étant donné, quand chaque petite couche de l'épaisseur dr, n'est pas individuellement équilibrée par l'incrément de la pression à la hauteur où elle se trouve, la pression p_1 que supporte la couche d'air inférieure située au niveau de la station d'observation, et que le baromètre indique, n'est plus seulement produite par la somme de leurs poids. Elle représente cette somme accrue par la résultante de toutes les forces étrangères à la pesanteur, qui agissent aux divers étages de la colonne aérienne pour soulever ou abaisser chaque couche élémentaire dans le sens vertical. Aussi notre équation corrigée (2), donne-t-elle, pour ce cas :

$$\frac{g_1 a^2 \rho\, dr}{r^2} = -\,dp - \delta p;$$

d'où l'on déduit

$$(3)\qquad \frac{l}{a} k \rho_1 \frac{1}{p_1} \int_a^{a+h} \frac{g_1 a^2 \rho\, dr}{r^2} = -\frac{l}{a} k \rho_1 \frac{1}{p_1} \int_{p_1}^{0} dp - \frac{l}{a} k \rho_1 \frac{1}{p_1} \int_{p_1}^{0} \delta p.$$

Le premier terme du second membre a pour éléments les *dp réels*, qui, pris en somme, composent la pression totale p_1, manifestée par le baromètre à la station d'observation. L'intégrale de ce premier terme, effectuée depuis la base de l'atmosphère sur sa limite supérieure sera donc o $- p_1$ ou $- p_1$, laquelle étant affectée extérieurement du signe $-$ donnera pour résultat $+ p_1$, comme précédemment. On aura ainsi en définitive :

$$(3)\qquad \frac{l}{a} k \rho_1 \cdot \frac{1}{p_1} \int_a^{a+h} \frac{g_1 a^2 \rho\, dr}{r^2} = + \frac{l}{a} k \rho_1 - \frac{l}{a} k \rho_1 \cdot \frac{1}{p_1} \int_{p_1}^{0} \delta p.$$

Pour avoir la valeur complète du premier membre qui est l'objet spécial de notre recherche, il reste à évaluer la somme des δp, qui nous sont individuellement inconnus.

» Or, sans connaître leurs valeurs ni même leurs signes propres, la notion que nous avons de leur provenance physique suffit pour leur assigner plusieurs caractères qui nous feront apprécier avec une suffisante approximation, quel peut être l'ordre de grandeur de leur ensemble. D'abord, à la surface supérieure de l'atmosphère δp sera nulle, puisque la pression est nulle dans toute cette surface. Il est aussi physiquement présumable que les valeurs individuelles de δp devront être très-faibles dans les couches aériennes très-élevées. Car les accidents météorologiques, dont l'effet pour troubler la stratification de la masse atmosphérique est le plus manifeste, sont presque toujours excités

par des causes physiquement appréciables : par exemple, l'action calorifique du Soleil immédiatement exercée, en proportion prédominante, sur certaines parties de la surface de la Terre ou de la mer ; un développement local exagéré de la vapeur aqueuse, ou sa précipitation soudaine et pareillement locale sous forme de pluie, de neige, de glace; à quoi se joignent des dégagements et des recompositions d'électricité qui déterminent des expansions ou des vides partiels dans les points où ils s'opèrent. Or, tous ces phénomènes perturbateurs doivent cesser de se produire, ou devenir au moins très-faibles et très-rares, dans la portion de l'atmosphère qui, étant soustraite par sa distance aux perturbations calorifiques engendrées par le contact immédiat de la surface terrestre, est en outre préservée contre la cause la plus puissante d'agitation, par cette circonstance que la vapeur d'eau n'y existe plus en quantité sensible, ce qui a lieu vers 9000 ou 10000 mètres de hauteur. De là, jusqu'au terme supérieur de l'atmosphère, on ne voit aucune raison physique ou mécanique qui puisse empêcher les couches aériennes de s'être disposées à la longue dans un état de stratification permanent, conforme aux conditions d'équilibre relatif que la gravité leur impose : ou, si des causes qui nous sont inconnues peuvent produire en quelques-uns de leurs points des dérangements accidentels, ils doivent être par cela même très-faibles, peu durables, et de sens occasionnellement contraires à diverses hauteurs, sur chaque verticale, à un même instant. Je conclus de ces considérations, que, dans toute cette étendue supérieure à 9000 ou 10000 mètres, les valeurs du terme correctif δp, qui exprime les écarts de l'état réel autour de l'équilibre, doivent, si elles ne sont pas nulles, être extrêmement petites, et de nature à se compenser en partie mutuellement sur les divers points d'une même verticale. Or, comme nous l'avons prouvé, la trajectoire lumineuse qui arrive sous la distance zénithale apparente de 80 degrés, à la station d'observation, telle que nous l'avons placée et isolée du sol terrestre, accomplit la plus grande partie de son cours dans cette région élevée ; de sorte que, tant qu'elle y reste comprise, l'équation de l'équilibre peut, en somme, lui être légitimement appliquée, surtout quand on l'emploie seulement, comme je l'ai fait, pour évaluer, dans l'expression totale de la réfraction, un terme très-petit, auquel les faibles dérangements, tout au plus supposables, dans l'équilibre de la masse gazeuse à de grandes hauteurs, ne pourraient apporter que des modifications bien plus petites encore, qui, par cela même, deviendraient inappréciables à l'observation.

» Suivons maintenant notre trajectoire quand elle commence à entrer

dans les couches d'air plus basses que 10000 mètres. Alors elle n'est plus séparée de la verticale de l'observateur que par un angle au centre de 30′; et lorsque cet angle est réduit à 15′, elle se trouve encore à plus de 4900 mètres au-dessus de son niveau, par conséquent bien plus haut que le domaine habituel des nuages. Il me suffit donc, pour assurer ce reste de sa marche, d'avoir spécifié que l'observation est faite par un temps calme et serein. Car s'il est tel à la station, les couches aériennes comprises dans une amplitude de 15′ autour du zénith seront calmes, et leur stratification, toujours très-approximativement horizontale, ne pourra déroger que très-peu aux lois de l'équilibre, en des sens divers Ainsi dans cette dernière portion même, la plus ordinairement exposée au trouble, les valeurs individuelles du terme correctif δp seront encore très-restreintes, et de nature à se compenser en partie dans leur somme totale.

» Il résulte de cette discussion que, dans les circonstances d'observation que nous avons spécifiées, l'intégrale $\int_{p_1}^{0} \frac{\delta p}{p_1}$, sera par elle-même une très-petite fraction de l'unité. Or, elle n'entre dans le second membre de l'équation (3) que multipliée par le facteur $\frac{l}{a} k \rho_1$, lequel est déjà si faible, qu'il influe pour moins de 14″ dans l'évaluation des deux limites de la réfraction à la distance zénithale apparente de 80 degrés. Donc, à cette distance du zénith, le terme correctif $\frac{l}{a} k \rho_1 \int \frac{\delta p}{p_1}$, ne pourra donner que des fractions excessivement faibles ou insensibles de ces mêmes quantités. Par conséquent, dans ces circonstances et dans ces limites d'application, les réfractions calculées par les géomètres, sur l'hypothèse d'une atmosphère sphérique en équilibre, doivent se trouver, comme elles se trouvent en effet, très-approximativement conformes aux réfractions réelles, parce que la condition de sphéricité peut être remplie rigoureusement par construction pour chaque trajectoire isolément considérée, et que ce qui peut manquer alors à la condition d'équilibre ne pourrait produire, à cette distance du zénith, que des effets très-petits, le plus souvent insensibles, toujours accidentels, et de nature à se compenser en grande partie par opposition.

» Quoiqu'il puisse paraître inutile de matérialiser la démonstration précédente par des preuves numériques, j'en rapporterai une qui sera fondée sur la supposition la plus démesurément exagérée que l'on puisse imaginer pour la trouver en défaut. J'admettrai, en premier lieu, que, depuis le sommet de l'atmosphère jusqu'à la station d'observation, la valeur du terme correc-

tif ∂p, est, dans chaque couche infiniment mince, $\frac{1}{10}$ de dp. C'est-à-dire que si deux couches sphériques de notre atmosphère instantanée se trouvent, en réalité, soumises à des pressions différentes entre elles de 10 centimètres de mercure, il faudrait, pour les ramener à l'équilibre, réduire cette différence à 9 centimètres, ou la porter à 11 : ce qui semble incompatible avec la condition que j'ai posée, que le temps soit calme et serein à la station d'observation. J'admettrai en outre, contre toute vraisemblance physique, que, dans l'épaisseur entière d'air traversée par la trajectoire lumineuse, ces corrections se trouveront être toutes de même signe, soit positives, soit négatives, sans aucune compensation. Alors l'intégrale $\int \frac{\partial p}{p_1}$, prise depuis le sommet de l'atmosphère jusqu'à l'observateur, sera $\pm \frac{1}{10}$; et comme ce $\frac{1}{10}$ doit être multiplié par $\frac{l}{a} k \rho_1$, il en résulterait une correction moindre que $\pm 1'',4$, dans l'évaluation des deux limites de sa réfraction à 80 degrés de distance zénithale apparente. Or, si toutes les exagérations que je viens d'accumuler, la donnent encore si petite, à quel point ne devra-t-elle pas se trouver atténuée et rendue insensible, dans les conditions réelles dont nous avons reconnu plus haut les particularités!

» Tel est le dénoûment du paradoxe que j'ai signalé en commençant ces communications. Les réfractions calculées par les géomètres, dans l'hypothèse d'une atmosphère sphérique en équilibre, s'accordent avec les réfractions réelles jusque vers 80 degrés de distance zénithale, en vertu de deux causes maintenant évidentes : d'abord, parce que la condition de sphéricité n'entre dans le calcul qu'à titre de construction géométrique, légitimement applicable à chaque trajectoire lumineuse considérée isolément ; puis, parce que la condition d'équilibre n'y est employée que pour évaluer un terme des formules qui, ayant une valeur très-petite quand cette condition se trouve remplie en toute rigueur, ne peut éprouver que des modifications insensibles ou à peine sensibles, par les dérangements accidentels qui peuvent physiquement se produire dans le secteur atmosphérique peu écarté de la verticale de l'observateur, où sont comprises toutes les trajectoires qui lui arrivent depuis le zénith jusqu'à la distance apparente de 80 degrés. Cette dernière considération ne peut plus être appliquée aux trajectoires qui arrivent à l'observateur très-près de l'horizon, à cause de la grande amplitude du secteur atmosphérique où elles s'accomplissent, et des perturbations énormes, impossibles à prévoir, qu'elles doivent généralement éprouver, en

rampant longtemps, près de la surface terrestre, dans les dernières portions de leur cours. Ces deux cas, l'un de certitude que la science géométrique peut atteindre, l'autre d'incertitude où elle est réduite par les nécessités physiques, doivent, à son honneur, être soigneusement distingués. Jusque vers 80 degrés de distance zénithale, les Tables de réfractions théoriquement calculées par Laplace peuvent être employées avec sûreté, dans tous les climats, dans toutes les saisons, à toutes les hauteurs, quand l'observateur prendra soin de se placer dans les conditions pour lesquelles on les a établies. Elles donneront toujours, et partout, des résultats pareils, également vrais. Plus près de l'horizon, au contraire, on n'en peut espérer que des moyennes locales, qui pourront différer sensiblement d'une station à une autre, et probablement aussi dans les divers azimuts autour d'une même station.

» Les considérations que je viens d'exposer justifient, au point de vue physique, une expression approximative de la réfraction jusque vers 80 degrés de distance zénithale, dans toute atmosphère sphérique et en équilibre, que Laplace a donnée le premier, dans le tome V de la *Mécanique céleste* (1) ; et elles expliquent la conformité de ses indications avec les réfractions réelles. Cette expression s'obtient par un développement en série, qui est analytiquement irréprochable dans les bornes d'application que Laplace lui assigne, comme Ivory s'est plu à le reconnaître, en le mentionnant dans son beau travail sur les réfractions inséré aux *Transactions philosophiques* de 1823 (2). Mais ce savant géomètre paraît n'avoir pas vu pourquoi cette formule, fondée sur deux hypothèses mathématiques qui ne sont jamais complétement réalisées dans notre atmosphère, peut néanmoins donner, et donne effectivement des résultats concordants avec l'observation, quand on ne dépasse point les limites qui lui sont propres. Car, faute de s'en être rendu compte, il apprécie mal, à mon avis, sa justesse physique, laquelle est assurée par les deux causes que j'ai tout à l'heure signalées. En effet, la condition de sphéricité y est rendue légitime par son application isolée à chaque trajectoire lumineuse; et ensuite la condition d'équilibre n'y est employée que pour évaluer ce même terme très-petit, qui ne peut pas être

(1) *Mécanique céleste*, tome I, page 268, 1re édition, 1805. D'après cette formule, en faisant : $\alpha = \frac{2\pi\rho_1}{1+4\rho_1}$, la réfraction à la distance zénithale θ_1 qui n'excède pas 80 degrés, est :

$$R = \alpha\left(1+\frac{3}{2}\alpha-\frac{l}{a}\right)\operatorname{tang}\theta_1 - \alpha\left(\frac{l}{a}-\frac{1}{2}\alpha\right)\operatorname{tang}^3\theta_1.$$

(2) *Philosophical Transactions*, 1823, part. II, pages 430 et 431.

sensiblement modifié par les accidents physiques, dans l'amplitude des distances zénithales, auxquelles l'application astronomique est bornée. Ainsi envisagée, cette formule de Laplace ne donne prise à aucune objection.

» En résumé : des deux conceptions abstraites sur lesquelles la théorie actuelle des réfractions atmosphériques repose, l'une, la sphéricité, n'est point hypothétique, quand on sait voir l'individualité de son application. L'autre, la condition d'équilibre, l'est toujours en fait ; mais, depuis le zénith jusque vers 80 degrés de distance zénithale, son emploi est justifié par les restrictions qu'on lui donne, et le peu qu'on lui emprunte. Voilà les deux principes que j'ai voulu mettre en évidence. En le faisant, je crois avoir suffisamment soustrait cette théorie aux charges que l'on a récemment élevées contre elle dans cette Académie, et aux perfectionnements dangereux que l'on avait prétendu y apporter. Telle qu'elle est, elle donne des valeurs exactes dans tous les cas où le phénomène est régulier ; et elle fournit des moyennes très-approchées, lorsqu'il est rendu irrégulier par des influences lointaines dont les caprices, la notion même, échappent à toute prévision. Les grands géomètres qui l'ont établie ne nous ont laissé rien à y faire, au point de vue analytique, si ce n'est peut-être de former des limites de la réfraction à toute distance zénithale, qui seraient complétement indépendantes de la condition d'équilibre ; et d'y introduire plus rigoureusement la diminution progressive de l'humidité dans le sens vertical, ce qui ne pourrait amener dans leurs résultats que des modifications excessivement faibles. Mais, dans la partie physique du problème, ils nous ont donné beaucoup de choses à rechercher. Depuis eux, la mesure des éléments météorologiques a été rendue plus précise, et leur détermination moins incertaine. La pratique des ascensions aérostatiques devenue plus familière, nous fournit, pour explorer la constitution de l'atmosphère des moyens qui, de leur temps, n'ont pu être que très-rarement employés. Avec tous ces secours nous pouvons utilement travailler à améliorer les données physiques de leurs calculs, pourvu que nous en comprenions assez l'esprit, pour bien connaître ce qu'ils exigent. Dans une dernière communication j'essayerai de rassembler quelques vues sur ce sujet, m'efforçant au moins d'appeler le concours des expérimentateurs de cette grande voie de recherches, où je ne puis plus marcher avec eux. »

(*Séance du* 15 *janvier* 1855.)

Sur le degré de confiance que l'on doit accorder aux Tables de réfractions actuelles. Détermination des circonstances hors desquelles leur application cesse d'être légitime.

« La question que je me propose de traiter ici n'est pas d'une petite importance pour l'astronomie. Car, presque tous les éléments des mouvements célestes, qu'elle conclut des observations, dépendent de la mesure des réfractions dont celles-ci sont affectées. Et l'on s'efforcerait vainement de les rendre précis, jusque dans les centièmes de seconde de degré, comme on se flatte aujourd'hui de le faire, si l'on ne se mettait pas en garde contre les erreurs, d'un ordre bien plus considérable, que les Tables de réfractions pourraient y introduire, étant appliquées dans des circonstances, où leurs indications, bien loin d'être assurées, ne sont pas même légitimement déduites des hypothèses employées à leur confection. Or c'est là malheureusement ce qui arrive tous les jours, ainsi que je le montrerai trop évidemment.

» D'après la discussion que j'ai établie dans mes communications précédentes, on a vu que la théorie générale des réfractions atmosphériques comprend deux applications d'une difficulté très-inégale. L'une, la moins dépendante des accidents physiques, s'étend depuis le zénith jusque vers 80° de distance zénithale apparente. L'autre, qui en est incomparablement plus troublée, embrasse les trajectoires lumineuses plus voisines de l'horizon. J'ai montré comment, et pourquoi, la formule approximative établie par Laplace, pour le premier cas, est irréprochable dans sa composition mathématique; n'empruntant à l'atmosphère réelle que des caractères généraux parfaitement justifiables, dans les conditions d'application auxquelles on la restreint. Quant aux réfractions qui s'opèrent plus près de l'horizon, il n'est pas possible de les obtenir par un calcul théorique, même approximatif, sans définir mathématiquement l'atmosphère, ou au moins la portion de l'atmosphère, parcourue, à chaque instant, autour d'un même observateur, par les trajectoires lumineuses qui les produisent. Cela ne saurait se faire aujourd'hui que par des hypothèses plus ou moins assorties au peu que nous savons des réalités. Et encore, dans la voie que les géomètres ont jusqu'à présent suivie, on ne peut tirer parti de ces fictions que si elles se prêtent

à des intégrations générales, ce qui restreint considérablement la justesse de leur appropriation physique. Telle est la double difficulté de ce problème, qu'ont successivement attaqué, avec toutes les ressources de la science analytique, Laplace, Bessel, Ivory. Pour apprécier utilement leurs théories, je déduirai de chacune d'elles, son interprétation physique. Je reconstruirai les atmosphères qu'elles supposent, et je montrerai leurs caractères spéciaux. En les comparant, alors, à ce que nous savons de l'atmosphère réelle, à ce que nous pouvons croire présumable, ou espérer de découvrir, on verra clairement ce qui, dans ces théories, est assuré, incertain, inexact; et, par suite, ce qui nous reste à chercher.

» Mais d'abord, puisque la formule approximative de Laplace est théoriquement incontestable dans les limites d'application auxquelles il la restreint, il faut achever de la rendre pratiquement sûre, en donnant à ses éléments physiques des valeurs plus exactes qu'il ne les avait, et telles qu'on les a, ou qu'on peut les avoir aujourd'hui. Ces éléments physiques sont au nombre de deux, qu'il désigne par les lettres l et α. Le coefficient l ne contient de variable que la température de l'air à la station d'observation, et la proportion de vapeur aqueuse qu'il renferme; deux choses qui peuvent être à chaque instant accusées par un thermomètre exact, et par les procédés hygrométriques de M. Regnault. A cela se joignent deux constantes, également bien connues aujourd'hui. La première est le rapport de la densité du mercure à celle de l'air atmosphérique sec, pris à la température de la glace fondante et sous la pression $0^m,76$, à la latitude où l'on observe ; rapport que M. Regnault a aussi déterminé très-exactement. La seconde est le coefficient de la dilatation des gaz permanents, sur lequel ses expériences et celles de M. Magnus ne laissent plus de doute. Rien ne manque donc pour calculer le coefficient l de la formule de Laplace dans toutes les conditions d'observation où elle doit s'employer. Je n'y ai même mentionné l'intervention de la vapeur aqueuse que pour ne rien omettre de ce qui le compose; car, dans les circonstances naturelles où se font les observations astronomiques, il sera bien rare que sa valeur en soit sensiblement affectée (1).

(1) Dans la formule (B), insérée au § 9 du livre X de la *Mécanique céleste*, le coefficient l est calculé dans la supposition que l'air, à la station d'observation, est exempt de vapeur aqueuse, et se trouve à la température t_1. En conséquence, si l'on désigne par l_0 sa valeur à la température de la glace fondante, et que ε soit le coefficient de dilatation de l'air 0,00366, que Laplace suppose être 0,00375, on aura, pour ce cas,

$$l = l_0(1 + \varepsilon t_1);$$

c'est aussi l'expression que Laplace lui attribue. Maintenant, supposez que l'air autour de la

» L'autre coefficient de la formule, que Laplace appelle α, dépend du pouvoir réfringent que l'air exerce dans la couche atmosphérique où l'observateur est placé; de sorte qu'il doit varier avec la densité de cet air, et avec sa composition chimique. On sait maintenant, qu'abstraction faite de la vapeur aqueuse qui peut s'y trouver contenue en quantité plus ou moins abondante, cette composition est la même dans toutes les régions du globe et à toute hauteur, sauf quelques variations accidentelles dans les proportions relatives de l'oxygène, de l'azote, de l'acide carbonique, qui sont beaucoup trop petites pour que les réfractions en soient sensiblement affectées. Quant à la présence de la vapeur aqueuse, nous avons prouvé, Arago et moi, par des expériences directes, que l'air sec et l'air humide, étant soumis à des conditions identiques de pression et de température, exercent la même action réfringente, sans différence appréciable, comme Laplace l'avait soupçonné (1); d'où il suit que l'on peut évaluer le coefficient α de la formule, d'après les conditions météorologiques apparentes, en supposant l'air complétement sec. On admettait aussi, d'après quelques expériences d'Hansbee, que, dans toutes les températures naturelles où les réfractions s'observent, le pouvoir réfringent de l'air est constamment proportionnel à sa densité actuelle, calculée par la loi de Mariotte, sans que la

---

station contienne une certaine quantité de vapeur aqueuse dont la tension propre soit ϖ_1, en sorte qu'elle soutienne cette portion de la pression totale p_1 qu'on observe. La valeur de l sera alors

$$l = l_0(1+\varepsilon t_1)\frac{p_1}{p_1 - \frac{3}{8}\varpi_1};$$

elle ne différera donc de la précédente que par l'adjonction du facteur $\frac{p_1}{p_1 - \frac{3}{8}\varpi_1}$, qui, dans les conditions hygrométriques naturelles à l'air libre, ne surpassera l'unité que par une fraction très petite, dont l'influence se trouvera encore excessivement affaiblie dans l'expression de la réfraction, où elle n'entre que divisée par le rayon a de la terre.

Ces diverses modifications des valeurs de l sont démontrées en détail dans la première partie de mon Mémoire sur la réfraction astronomique, insérées aux *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1839. L'expresion de l, que je rapporte ici, s'y trouve à la page 16. Comme on supposait alors ε égal à 0,00375 ou $\frac{3}{800}$, j'avais, dans les calculs subséquents, remplacé le facteur $\frac{3}{8}$ par 100ε. Mais cette substitution ne peut plus avoir lieu quand ε est 0,00366; et il faut restituer au facteur $\frac{3}{8}$ son expression explicite comme je le fais ici.

(1) *Mémoires de la Classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut pour* 1806.

chaleur y intervienne autrement que pour modifier sa force élastique. Nous avons vérifié ce fait capital, Arago et moi, par des expériences nombreuses et précises, entre des limites de températures qui ont varié naturellement depuis $-1°,5$ cent., en hiver, jusqu'à $+31°,4$ en été; et nous les avons étendues artificiellement fort au delà de ce dernier point. Quant aux pressions, nous les avons variées depuis le vide parfait, jusqu'aux plus grandes hauteurs du baromètre qui se réalisent naturellement à la surface de la terre. Cela suffisait pour notre but (1).

» Sachant ainsi calculer les valeurs relatives du pouvoir réfringent, et par suite celles du coefficient α, dans tous les états de pression et de température que puisse éprouver la couche d'air, où l'astronome se trouvera placé, on n'a plus qu'à connaître sa valeur absolue, pour une température et une pression assignées, par exemple, $0°$ et $0^m,76$, à une latitude définie; ce que je désignerai par α_0. Borda avait entrepris cette recherche. Mais la mort l'avait interrompue, sans qu'on ait pu en retrouver autre chose que l'appareil ingénieux qu'il avait imaginé pour l'effectuer. Nous avons été chargés, Arago et moi, de la reprendre, avec ce même appareil; ce que nous avons fait par une suite d'expériences que nous avons eu lieu de croire très-précises, y ayant consacré plusieurs mois, avec d'excellents baromètres et un nombreux assortiment de thermomètres très-exacts, que Gay-Lussac avait construits et divisés lui-même pour nous (2). La constante ainsi obtenue s'est trouvée à peine différente de celle que Laplace avait adoptée d'après un autre mode de détermination dont je parlerai tout à l'heure. Mais nos résultats avaient besoin d'être calculés de nouveau, avec les véritables dilatations de l'air et du mercure, qui n'étaient pas exactement connues alors. Une personne aussi zélée qu'habile, M. Caillet, examinateur de la marine, qui a déjà rendu le même service aux Tables de Laplace, a bien voulu se charger de ce soin; et nos déterminations ainsi rectifiées, se sont montrées encore plus concordantes entre elles qu'elles ne le paraissaient auparavant. L'Académie en peut juger par le travail même de M. Caillet que j'ai eu l'honneur de lui présenter, dans sa dernière séance, et qui est inséré au *Compte rendu*.

» L'autre procédé auquel je viens de faire allusion consiste à déduire la constante α_0 des observations astronomiques elles-mêmes. Pour cela le moyen le plus exact, et je crois pouvoir dire le seul légitime, c'est de n'y

(1) *Mémoires de la Classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut de France* pour 1807.

(2) *Ibid.*, 1806 et 1807.

employer que des passages supérieurs et inférieurs d'étoiles circompolaires, observés, pour chacune, à peu d'intervalle, entre des limites de distance zénithale qui n'excèdent pas ou seulement de très-peu 80°. En effet, le pouvoir réfringent de l'air, étant déjà très-approximativement connu, et le coefficient l de la formule étant toujours directement calculable, la réfraction R_θ qui correspond à chaque distance zénithale θ, observée dans ces limites peut se mettre sous la forme suivante :

$$R_\theta = A\alpha_0 + B\alpha_0^2$$

où les valeurs actuelles des coefficients A, B, peuvent toujours être assignées en nombres. Alors chaque couple de passage supérieur et inférieur, fournit une équation de condition, qui ne contient d'inconnue que la constante α_0, et la distance D du pôle, au zénith du lieu d'observation. De sorte qu'en formant un grand nombre d'équations pareilles on peut déterminer très-exactement ces deux quantités. Les avantages particuliers qu'offrent ainsi les étoiles circompolaires pour déterminer directement les valeurs des réfractions, à diverses distances du zénith, sont connus de tous les astronomes; et personne n'ignore les applications multipliées que Brinkley, Delambre, surtout Bessel, en ont faites à ce problème. Mais, outre l'imperfection des données physiques alors admises, et sur lesquelles ils ont dû s'appuyer, l'espérance qu'ils avaient d'en déduire des Tables de réfraction complètes, leur a fait combiner ensemble, pour ce but, des observations qui descendent bien au delà de 80° du zénith; de sorte qu'elles entrent dans cette région incertaine des réfractions, où leur coordonnation dépend des hypothèses que l'on adopte sur la constitution de l'atmosphère ; et ainsi, la valeur de la constante α_0, conclue d'un tel ensemble, se trouve toujours plus ou moins mêlée aux incertitudes que ces hypothèses comportent. Delambre, qui a fourni à Laplace la valeur de cette constante dont il a fait usage, est tombé plus que tout autre dans cet excès, puisqu'il déclare y avoir combiné les observations d'étoiles circompolaires, avec des observations du Soleil étendues jusqu'à 90° 20′, de distance zénithale! Il me semblerait donc essentiel que cette détermination fût reprise dans son application spéciale à la formule approximative de Laplace; soit au moyen d'observations astronomiques nouvelles; soit en extrayant des observations antérieures, celles qui ne sortiraient pas des limites de distance zénithale qu'elle embrasse. Et pour aider à obtenir ce perfectionnement désirable, je la joins ici en note toute préparée avec les données les plus minutieusement exactes que l'on y puisse aujourd'hui introduire.

» Les corrections expérimentales que je viens d'énumérer étant supposées faites, la formule de Laplace fournira une Table de réfractions théoriquement assurée, jusque vers 80° du zénith, et applicable dans toutes les régions du globe, comme à toutes hauteurs où les observateurs voudront se transporter. Les perturbations accidentelles de l'atmosphère, à moins qu'elles ne soient excessives, n'occasionneront, dans ses résultats, que de très-petites erreurs, variant, à différents jours, en des sens divers; et de nature à se compenser entre elles, dans une série d'observations, même peu nombreuses, comme on en a la preuve matérielle, par celles que j'ai faites à Formentera, en 1825. Ce précieux présent, l'astronomie le doit tout entier à Laplace. Voyons maintenant ce que lui-même, et ses successeurs, ont pu faire pour étendre la théorie des réfractions au delà de ce premier pas si important.

» Là, nous sortons de la seule approximation qui soit légitime, pour entrer dans le domaine des hypothèses. Or il s'y présente tout d'abord une cause d'incompatibilité fondamentale, entre l'application régulière du calcul théorique, et les exigences des astronomes. Les réfractions qui s'opèrent près de l'horizon, sont rendues perpétuellement variables à une même distance du zénith, par des accidents météorologiques lointains qu'il est impossible de prévoir et d'apprécier. Dans ces circonstances, tout ce que le géomètre pourrait espérer, ce serait de concevoir une atmosphère tranquille, constituée, aussi approximativement que possible, comme le serait la véritable si elle était soustraite aux causes qui la troublent, et d'en déduire les valeurs des réfractions qui s'opéreraient ainsi en moyenne, si ces accidents perturbateurs n'existaient pas ; mais cela ne satisferait nullement les astronomes, qui demandent des Tables de réfractions applicables aux divers états météorologiques de la couche d'air où se trouvent leurs instruments; de sorte que le géomètre qui ne peut établir ses calculs que pour le cas idéal d'une atmosphère tranquille et d'une constitution fixe, est ensuite obligé d'en rendre les effets optiques variables pour satisfaire aux nécessités des observateurs. Les Tables que l'on a déduites de la théorie de Laplace n'échappent pas à cette incompatibilité plus que les autres. Mais il en a eu le sentiment. Car, après avoir soigneusement expliqué les réductions que son expression approximative de la réfraction exige, pour être adaptée aux divers états de pression et de température de la couche d'air où se trouve l'observateur, il ne dit nulle part que l'on doive, ou que l'on puisse, faire subir des réductions analogues à la partie hypothétique de ses formules, afin d'en rendre l'application aussi étendue. Ce sont les astronomes calculateurs, qui, voulant les convertir en Tables usuelles, leur ont donné, tant bien que mal, avec

son agrément peut-être, ce caractère général de variabilité qu'elles ne comportent point.

» Voici la conception géométrique qui leur sert de fondement. Laplace établit ses calculs pour un observateur placé au niveau de la mer; la température t_1 à sa station étant 0°, et la pression p_1, $0^m,76$. Il n'entend donc pas les appliquer à l'état moyen, mais à un état spécial de l'air, dans notre climat. Autour de son observateur, il constitue une atmosphère d'air sec, dont les couches d'égale densité sont sphériques et en équilibre; deux conditions qu'il faut concevoir restreintes à la portion angulaire de cette atmosphère qui est parcourue presque instantanément par chacune des trajectoires lumineuses que l'on veut considérer. J'ai montré, qu'à ce point de vue, la sphéricité des couches peut être légitimement admise, à titre de construction auxiliaire. Mais l'équilibre sera un cas exceptionnel, d'autant plus rare que les trajectoires considérées devront traverser, dans une plus longue portion de leur cours, les plages inférieures et troublées d'un secteur atmosphérique plus étendu. Ces conventions étant faites, il ne reste, pour achever de définir la constitution de ce secteur, qu'à y établir arbitrairement une relation générale entre les températures t, les pressions p, et les densités ρ, à une distance quelconque r du centre. Car la condition d'équilibre, et la loi de dilatabilité des gaz, fournissent déjà deux relations obligées entre ces quatre variables. De sorte que, si on leur en assigne arbitrairement une troisième, les trois premières t, p, ρ, se trouveront déterminées, pour chaque distance r du centre. Ainsi la constitution de l'atmosphère idéale sera complétement fixée; et l'on n'aura plus qu'à en déduire, par le calcul analytique, les réfractions qui doivent s'y opérer à toute distance du zénith.

» C'est uniquement dans le choix de cette troisième relation arbitraire, que consiste la différence des théories de Laplace, de Bessel, et d'Ivory. L'exposition préliminaire que je viens de présenter servira donc également pour toutes, et je n'aurai plus à la répéter.

» Laplace ouvrait une voie nouvelle. Il commence par en sonder les abords, et se procure un signal certain pour s'y diriger. Il s'impose, comme condition déterminative de toute hypothèse, que, dans les circonstances météorologiques assignées par lui à la station d'observation, l'atmosphère idéale y fasse la réfraction horizontale égale à 35′ 6″, valeur qu'il admet comme étant une moyenne entre toutes celles que les astronomes observent dans ces mêmes circonstances. Quoique le choix d'une telle donnée ne comporte pas une rigueur absolue, du moins le nombre adopté 35′ 6″, ne peut être que très-proche de la vérité, dans le cas particulier d'application

qu'il lui donne ; et ainsi, la légitimité de son emploi, comme type approximatif de la réalité physique, est alors incontestable. Laplace s'en sert pour éprouver la convenance relative des systèmes d'atmosphères que les géomètres avaient employés avant lui, pour calculer les réfractions. L'hypothèse qui fait décroître les températures par différences égales, pour des accroissements égaux de hauteur, lui donne une réfraction horizontale beaucoup plus faible que 35′6″ dans les circonstances météorologiques supposées ; celle qui fait la température constante lui donne cette réfraction beaucoup trop forte. Or, dans la première, les pressions se trouvent être proportionnelles au carré des densités ; et, dans la seconde, elles sont proportionnelles à la première puissance de ces mêmes densités. Il en conclut que la relation véritable, ou du moins celle qui s'assimilera le plus approximativement à l'atmosphère réelle, doit être un assemblage de ces deux puissances. Alors, il compose une expression mathématique qui les réunit, en se prêtant aux intégrations, et en conservant, dans sa contexture, une quantité indéterminée, dont il dispose pour y rendre la réfraction horizontale, conforme à son type. L'atmosphère ainsi définie se trouve donc constituée spécialement pour les circonstances météorologiques que ce type suppose ; ses constantes déterminatives seraient autres, si ces circonstances étaient différentes, parce qu'il aurait fallu les approprier à un autre type de réfraction horizontale. Cette extension, pour devenir générale, exigerait une masse d'observations et de calculs numériques si effrayante, que personne ne les entreprendra jamais, tant l'hypothèse mathématique adoptée par Laplace est d'un emploi difficile ; mais, par cela même, les réfractions que l'on en peut déduire, s'appliquent seulement aux circonstances physiques pour lesquelles son atmosphère fictive est fabriquée. A la vérité, il prouve que le décroissement des températures qui en résulte, entre la surface terrestre et la plus haute station de Gay-Lussac, diffère peu de celui que cet habile physicien a observé, quoique cette donnée ne soit entrée pour rien dans la confection de l'atmosphère hypothétique. Mais cette concordance approchée, n'a que très-peu de force comme épreuve confirmative, parce que, dans l'ascension de Gay-Lussac, la température de l'air à la station de départ, était 30°,75, et non pas 0°. Or, rien n'autorise à penser que le décroissement dût être le même, dans les deux cas ; et il y a au contraire toute raison de croire qu'il serait différent. Enfin, la relation mathématique, employée par Laplace pour caractériser son atmosphère fictive, lui donne une étendue infinie, tandis que la nôtre est bornée ; et il a été contraint de la faire telle, pour y pouvoir adapter les formules géné-

rales d'intégration propres à ce problème, formules laborieusement préparées par Kramp, et les seules que l'on possède encore aujourd'hui. Par tous ces motifs, on est obligé de reconnaître que cette théorie de Laplace, relative aux réfractions qui s'opèrent à de grandes distances du zénith, n'a d'application légitime que dans l'atmosphère idéale qu'il a considérée, et dans le cas spécial de pression et de température inférieure pour lequel il l'a établie; limitation qu'il me paraît avoir lui-même sentie, et reconnue par son silence, n'ayant indiqué nulle part qu'on dût l'étendre à d'autres cas.

» En montrant ces vérités, nécessaires au progrès de la science qu'il a aimée avant toutes choses, je ne crois pas manquer de respect à sa mémoire. Elles n'ôtent rien au mérite qu'il a eu d'attaquer le premier ce problème, en s'efforçant d'assujettir l'analyse aux conditions physiques dont il dépend; et d'y avoir appliqué, en les étendant, les travaux pénibles que Kramp avait faits pour surmonter les difficultés d'intégration qu'on y rencontre. Par ce double service, il a tracé à ses successeurs la route qu'il fallait suivre, et leur a préparé les moyens d'y pénétrer. C'est ce que l'on va voir quand j'analyserai leurs théories. Quoique celle de Bessel soit la première en date, je la réserve pour une dernière étude, tant à cause des particularités physiques qui la distinguent, qu'en raison de l'importance qu'elle a acquise, ayant servi de fondement à la Table de réfraction, que cet habile et savant astronome a insérée dans ses *Tabulæ regiomontanæ*, comme l'expression la plus approchée des réfractions réelles, opinion qui semble confirmée par l'usage presque général qu'en font aujourd'hui les observateurs. Je m'attacherai donc d'abord à la théorie d'Ivory, qui est postérieure de 18 ans à celle de Laplace, et de 5 à celle de Bessel. Mais les vues et les efforts de ces hommes distingués, sur un sujet si difficile, méritent bien d'être appréciés séparément. C'est pourquoi je remettrai l'examen de la théorie d'Ivory à la séance prochaine, dans le dessein de voir, si ce savant géomètre a été plus heureux, ou plus habile, que son devancier. »

Note relative à la Formule approximative de Laplace.

Plaçons d'abord l'observateur dans une couche d'air dont la température soit 0°, et qui supporte actuellement la pression d'une colonne de mercure à cette même température, ayant pour longueur $0^m,76$, laquelle se trouve sollicitée par la gravité g_1. Nommons ρ_0 la densité de cet air, et désignons par R_θ la réfraction qui, dans ces circonstances, s'opère à

la distance zénithale apparente θ, n'excédant pas 80° sexagésimaux. Alors la formule approximative de Laplace donne

$$(1) \qquad R\theta = \alpha_0 \operatorname{tang}\theta + \alpha_0^2 \left(1 + \frac{1}{2\cos^2\theta}\right) \operatorname{tang}\theta - \frac{\alpha_0 l_0}{a} \frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos^2\theta}.$$

α_0, l_0, a, sont trois coefficients constants, indépendants de θ, et dont je vais définir la signification précise. Je commence par les deux derniers, dont les valeurs sont toujours immédiatement assignables en nombres.

l_0 se conclut du rapport des densités du mercure et de l'air, celui-ci étant pris à la température de 0°, et sous la pression de $0^m,76$, dans un lieu dont la latitude est assignée, ce qui définit l'intensité de la gravité qui s'y exerce. On peut voir tous les détails de cette déduction dans la 1re partie de mon Mémoire sur la réfraction astronomique, inséré aux *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1839. D'après des expériences très-exactes de M. Regnault, à la latitude de 45°, et au niveau de la mer, lorsque l'air est exempt de vapeur aqueuse, on a en mètres :

$$l_0 = 10516{,}8\ 0^m,76 = 7992^m,765.$$

Cette valeur varie réciproquement à l'intensité de la gravité ; de sorte que si G désigne cette intensité au niveau de la mer sur le parallèle à 45°, on aura à la station d'observation, où nous l'avons désignée par g_1 :

$$l_0 = 7992^m,765 \cdot \frac{G}{g_1}.$$

Soit ψ la latitude de la station, et G_1 la gravité qui s'y exerce au niveau de la mer. D'après l'ensemble des expériences sur la longueur du pendule, que j'ai rapportées dans le tome II de mon *Astronomie*, on a trouvé en moyenne entre 49° et 43° de latitude boréale, c'est-à-dire à peu près dans l'étendue de la France :

$$\frac{G}{G_1} = 1 + 0{,}002484 \cos 2\psi.$$

Nommons h la hauteur de la station au-dessus du niveau de la mer, le rayon de la Terre supposée sphérique étant a, on aura très-approximativement :

$$\frac{G_1}{g_1} = \frac{(a+h)^2}{a^2} = \left(1 + \frac{h}{a}\right)^2 = 1 + \frac{2h}{a}.$$

De là on tire par substitution :

$$\frac{G_1}{g_1} = \left(1 + \frac{2h}{a}\right)(1 + 0{,}002484 \cos 2\psi);$$

conséquemment

$$l_0 = 7992^m,765 \left(1 + \frac{2h}{a}\right)(1 + 0{,}002484 \cos 2\psi).$$

Ceci suppose que la couche d'air où se trouve l'observateur est exempte de vapeur aqueuse. Mais si elle contient une certaine proportion de cette vapeur, dont la tension propre soit ϖ_1, la pression totale étant p_1, l'expression de l_0 acquerra un facteur additionnel dépendant de cette circonstance, et deviendra :

$$(2) \qquad l_0 = 7992^m,765 \left(1+\frac{2h}{a}\right)(1+0,002484\cos 2\psi).\frac{p_1}{p_1-\frac{3}{8}\varpi_1}.$$

Rien ne manquera donc pour l'évaluer numériquement.

Considérons maintenant le terme a qui lui est annexé comme diviseur dans la formule (1). Dans son application exacte, il représente le rayon de la sphère qui serait osculatrice à la couche d'air de la station, suivant le plan vertical où la réfraction s'opère. Mais, à cause de la grandeur de ces rayons, comparativement à l_0, le quotient, qui seul nous intéresse, s'obtiendra avec toute l'exactitude nécessaire, si nous remplaçons a par le rayon qui est osculateur à la surface de la mer suivant le méridien, à la latitude ψ de la station. Or si l'on se reporte à l'expression générale de ce rayon, et des dimensions de l'ellipse terrestre, dans le deuxième volume de mon *Astronomie*, pages 186 et 221, on trouvera facilement qu'en nommant γ_0 celui qui a lieu pour la latitude de 45°, et γ celui qui a lieu pour la latitude ψ, on a très-approximativement

$$\gamma = \gamma_0(1-0,00477588\cos 2\psi), \quad \text{et en mètres} \quad \log\gamma_0 = 6,8039237.$$

Effectuant donc la division des deux facteurs de l_0 par les deux facteurs numérique et symbolique de γ, on aura, par la réunion de ceux-ci en un seul du même ordre,

$$(3) \qquad \frac{l_0}{a} = 0,0012553\,7\left(1+\frac{2h}{a}\right)(1+0,0072599\,4\cos 2\psi).\frac{p_1}{p_1-\frac{3}{8}\varpi_1},$$

expression qui s'appliquera maintenant à tous les cas possibles de la formule (1), lorsque la température de l'air à la station sera 0° et la pression $0^m,76$, comme nous l'avons supposé. D'après la petitesse du coefficient de $\cos 2\psi$, le terme qui en dépend diminuerait seulement la réfraction de $0'',377$ à 80° du zénith, si l'on transportait la formule du parallèle de 45° jusqu'à l'équateur; et il l'accroîtrait de cette même quantité si on la transportait de 45° jusqu'au pôle. L'influence de cette correction sera donc le plus souvent négligeable. Néanmoins j'ai cru devoir la signaler, parce qu'il n'y a aucun avantage à l'omettre, quand il est si aisé d'en tenir compte.

En désignant par ρ_0 la densité de l'air à la température de la glace fondante et sous la pression d'une colonne de mercure ayant pour longueur $0^m,76$, à la latitude où l'on opère, l'expression correspondante de α_0, dans la formule (1), est :

$$\alpha_0 = \frac{2k\rho_0}{1+4k\rho_0}.$$

Le produit $k\rho_0$ est toujours moindre que 0,000015, quelle que soit la latitude sous laquelle on l'évalue. On peut, comme je l'ai dit dans le texte, l'obtenir par des expériences directes sur le pouvoir réfringent de l'air; et alors, si l'on suppose ces expériences faites

sous le parallèle de 45°, ou réduites à ce parallèle, on aura reproduit $k\rho_0$ pour toute autre latitude ψ, en le multipliant par le facteur $1 - 0,002484 \cos 2\psi$, parce que la densité ρ varie proportionnellement à l'intensité de la gravité qui affecte la colonne barométrique. Mais, pour le déduire des observations astronomiques faites dans un lieu assigné, il faut adapter l'équation (1) à des conditions plus générales que celles pour laquelle nous l'avions préparée.

A cet effet, supposons que, la station d'observation restant la même, la température de l'air y devienne t_1, la pression p_1; et faisons

$$\alpha_1 = \frac{2k\rho_1}{1 + 4k\rho_1}.$$

D'après les expériences que nous avons faites, Arago et moi, sur l'égalité du pouvoir réfringent de l'air sec et de l'air humide, quand ils ont la même température et la même force élastique, la densité ρ_1, qui entre dans la composition de α_1, pourra se rattacher à ρ_0, comme si l'air était, dans les deux cas, exempt de vapeur aqueuse. De sorte qu'en désignant par ε le coefficient de la dilatation des gaz qui est 0,00366 compté de 0°, on aura à la station d'observation, et pour ce calcul spécial :

$$\rho_1 = \rho_0 \cdot \frac{p_1}{0^m,76\,(1 + \varepsilon t_1)}.$$

Or, dans ces suppositions plus générales, le développement approximatif de Laplace donne encore la réfraction correspondante à la distance zénithale apparente θ par une expression pareille à la précédente, et qui est

$$(4) \qquad \mathfrak{R}_\theta = \alpha_1 \operatorname{tang}\theta + \alpha_1^2 \left(1 + \frac{1}{2\cos^2\theta}\right) \operatorname{tang}\theta - \frac{\alpha_1 l}{a} \frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos^2\theta},$$

l étant une nouvelle constante qui se rattache à l_0, par la relation simple :

$$l = l_0\,(1 + \varepsilon t_1).$$

On peut également rattacher α_1 à α_0, par la série de transformations suivantes :

$$\alpha_1 = \frac{2k\rho_1}{1 + 4k\rho_1} = \frac{\rho_1}{\rho_0} \cdot \frac{2k\rho_0}{1 + 4k\rho_0} \cdot \frac{1 + 4k\rho_0}{1 + 4k\rho_1} = \frac{\rho_1}{\rho_0}\alpha_0 \left(1 + \frac{4k(\rho_0 - \rho_1)}{1 + 4k\rho_1}\right)$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_0}\alpha_0 \left(1 + 2\alpha_1 \frac{(\rho_0 - \rho_1)}{\rho_1}\right),$$

d'où l'on tire

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\rho_1}{\rho_0}\alpha_0}{1 - 2\alpha_0 \left(\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0}\right)}.$$

La valeur du terme $2\alpha_0 \left(\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0}\right)$, qui accompagne l'unité dans le dénominateur du second membre, dépendra des écarts accidentels que la densité ρ_1 de l'air à la station d'obser-

vation éprouvera autour de la densité normale ρ_0. Il pourra donc arriver souvent que son influence sur α_1 soit négligeable, si la station est peu élevée au-dessus de la mer, et située dans un climat tempéré. Mais il sera toujours facile d'en tenir compte sans cercle vicieux, en le calculant avec la valeur de α_0, qui est donnée par les expériences physiques, puisqu'elle ne peut comporter qu'une très-petite erreur. Faisant donc, par abréviation,

$$c_1 = \frac{1}{1 - 2\alpha_0\left(\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0}\right)},$$

c_1 sera connu dans chaque état particulier de la densité ρ_1; et, en remplaçant le rapport $\frac{\rho_1}{\rho_0}$ par sa valeur en éléments météorologiques dans le numérateur de α_1, on aura

$$\alpha_1 = c_1\alpha_0\frac{p_1}{0,76\,(1+\varepsilon t_1)};$$

ceci étant substitué dans l'équation (4), concurremment avec l'expression de l, il en résultera

$$(5)\quad R_\theta = c_1\alpha_0\frac{p_1}{0^m,76(1+\varepsilon t_1)}\cdot\tang\theta + c_1^2\alpha_0^2\left(\frac{p_1}{0^m,76\,(1+\varepsilon t_1)}\right)^2\left(1+\frac{1}{2\cos^2\theta}\right)\tang\theta - c_1\alpha_0\frac{l_0}{a}\cdot\frac{p_1}{0^m,76}\frac{\tang\theta}{\cos^2\theta}.$$

Cette expression concorde avec celle que Laplace donne au livre X de la *Mécanique céleste*, § 9; sauf qu'il y a supposé notre coefficient c_1 constamment égal à l'unité, et que la valeur de $\frac{l_0}{a}$ y est un peu moins complète.

Pour chaque distance zénithale apparente θ qui aura été observée, tous les éléments qui la composent, excepté α_0, seront numériquement calculables. On en déduira donc une expression de la forme

$$R_\theta = A\alpha_0 + B\alpha_0^2,$$

où A et B seront deux coefficients connus. Quant à la manière dont il faut l'employer pour en conclure α_0, par les observations d'étoiles circompolaires, je l'ai exposée avec détail dans le tome II de mon *Astronomie*, page 419; et j'en ai fait l'application à quatre observations de Méchain, ce qui suffira comme type des calculs à effectuer. Seulement, à la suite de cet exemple, j'ai eu tort de dire, page 425, que l'on pourrait y employer des étoiles plus basses que 82°, ou même 83°, pour que la réfraction devînt plus forte. Car elles sortiraient des limites de distances zénithales dans lesquelles la formule approximative de Laplace est légitimement applicable. J'avais aussi, d'après Delambre et Bessel, indiqué comme des auxiliaires utiles les observations du Soleil faites aux environs du solstice d'été. Mais elles offrent moins de précision, et plus de chances de trouble, que les étoiles circompolaires auxquelles il ne me semblerait pas aujourd'hui profitable de les associer. Dans tout cela, je m'étais laissé trop entraîner par l'autorité de ces deux habiles astronomes, qui, au lieu de se borner à établir la formule approximative de Laplace avec toute la précision qu'elle peut recevoir, avaient conçu l'espérance, à mon avis mal fondée, de composer, d'après l'observation seule, une Table de réfractions qui s'étendît à toute distance du zénith.

(*Séance du 22 janvier* 1855.)

Sur le degré de confiance que l'on doit accorder aux Tables de réfractions actuelles. Examen de la théorie d'Ivory.

« A la fin du paragraphe de la *Mécanique céleste*, où Laplace développe l'hypothèse mathématique, par laquelle il avait essayé d'embrasser le problème des réfractions dans toute sa généralité, il fait remarquer, qu'au lieu de la réfraction horizontale, il aurait aussi bien pu prendre pour donnée, le décroissement de la température dans l'atmosphère; et il ajoute, que, si l'on connaissait, par des observations nombreuses, les valeurs de ce décroissement, ou des réfractions horizontales qui correspondent aux divers états météorologiques de la couche d'air inférieure, dans laquelle l'observateur se trouve placé, on pourrait en déduire une Table de réfractions beaucoup plus exacte que celles dont on fait usage, quoiqu'elle ne fût pas exempte d'incertitudes accidentelles. Ivory paraît s'être proposé de traiter le problème à ce point de vue; mais il n'a pas suffisamment apprécié les difficultés physiques que Laplace y avait signalées.

» Il se guide sur lui, sans le dire. L'expression dans laquelle Laplace avait associé les deux premières puissances de la densité, à la pression, était peu commode pour la détermination numérique des constantes qu'elle renferme. Ivory l'abrége, et lui donne une forme plus simple, la plus simple même que l'on pût lui assigner, si elle se trouvait suffire. Il suppose qu'à toute hauteur dans l'atmosphère, ces deux éléments sont liés entre eux par une même équation parabolique du second degré, qui est (*)

$$(1) \qquad \frac{p}{p_1} = A\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right) + B\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2.$$

A et B sont deux coefficients constants et positifs dont la somme doit toujours être égale à $+1$, pour que la condition d'égalité soit satisfaite à la station d'observation, où p devient p_1 et ρ, ρ_1. De sorte qu'un seul des deux reste disponible, pour accorder ultérieurement l'atmosphère fictive avec l'atmosphère véritable.

(*) Ivory, on the astronomical Refractions, *Phil. Trans.*, 1823, pages 455, 457.

» Ivory n'adopte cette formule simple qu'après une longue discussion et de savants calculs destinés à en justifier la convenance. Je passe ces préparatifs, qui sont hors de mon sujet. Mais, pour que l'on puisse voir immédiatement, dans son ensemble, la constitution physique de l'atmosphère qui en résulte, quand on la combine avec les conditions de l'équilibre et de la dilatabilité des gaz, comme Ivory le fait, et est obligé de le faire, je place à la suite de la présente communication, les formules qui en définissent toutes les propriétés caractéristiques; non-seulement pour la relation qu'Ivory adopte, mais pour celle-ci, plus générale, et que l'on verra être nécessaire :

$$\frac{p}{p_1} = A\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right) + B\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2 + C, \qquad (2)$$

où C est une constante, telle que l'on a

$$1 = A + B + C.$$

En m'autorisant de ces formules, je n'aurai qu'à énoncer les résultats qui s'en déduisent à mesure qu'ils me deviendront nécessaires, sans interrompre la suite des raisonnements. Je préviens seulement que, pour abréger le discours et l'écriture, je représenterai désormais le rapport $\frac{p}{p_1}$ par x, et $\frac{\rho}{\rho_1}$ par y; par suite de quoi notre équation (2) s'écrira

$$x = Ay + By^2 + C,$$

la somme $A + B + C$ des coefficients du second membre, devant être toujours égale à $+1$.

» Je ferai remarquer d'abord que la relation (1), qui fait la densité nulle en même temps que la pression, n'est pas physiquement propre à représenter une atmosphère de dimension finie telle qu'est la nôtre, caractère qu'Ivory reconnaît lui appartenir. Poisson, dans son *Mémoire sur la Théorie de la chaleur*, pages 21 et 60, me paraît avoir très-bien prouvé, qu'en un tel cas, pour que, à la limite de l'atmosphère où la pression devient nulle, les dernières molécules d'air ne se dissipent pas dans l'espace extérieur, il faut que l'abaissement de la température les ait privées de toute expansibilité propre; ce qu'il spécifie en disant que l'air doit être alors *liquéfié;* et cette idée hardie aurait été plus juste encore, s'il avait dit qu'il doit être à l'état de congélation. Un calcul théorique dont on peut contester les détails, mais non les principes généraux, lui donnait même la très-petite densité

locale que devrait avoir, à cette limite, l'air congelé. Sans nous prévaloir de ces considérations, si l'on admet entre les pressions et les densités la relation (2), qui comprend celle d'Ivory, et qu'on la combine rigoureusement avec les équations de l'équilibre et de la dilatabilité des gaz, en tenant compte du décroissement de la pesanteur qui ne peut pas être négligé, quand on laisse à cette formule la généralité de son application aux atmosphères d'une étendue quelconque, on trouve que la condition de l'équilibre y nécessite *toujours* l'existence d'une densité finale, qui subsiste quand la pression devient nulle; densité, qui s'affaiblit à mesure que l'atmosphère considérée devient plus haute, mais qui n'est pas absolument nulle, même quand elle s'étend à l'infini. Cette conséquence irrécusable du calcul, si conforme aux considérations physiques, ne se voit point dans le travail d'Ivory, parce qu'il a négligé dans ses formules le décroissement de la pesanteur, même quand il les applique à des atmosphères d'une étendue infinie, comme l'est celle qu'il adopte pour y calculer définitivement les réfractions. Mais, outre que tel n'est pas le cas de la nôtre qui est bornée, comme il le reconnaît lui-même, la supposition d'une atmosphère infinie et celle d'une gravité constante, ne sont pas conciliables physiquement.

» Ces remarques faites, j'arrive à la considération par laquelle Ivory détermine le coefficient B de sa formule (1). La donnée qu'il prend, comme déterminative, je devrais plutôt dire qu'il présente comme telle, c'est la valeur initiale du décroissement de la température atmosphérique à partir de la surface terrestre, condition qui, dit-il, *a été jusqu'ici entièrement négligée* (*). Il oublie que Laplace en avait formellement indiqué l'usage facultatif, en signalant les incertitudes physiques qu'on y rencontre. Reste à voir comment on peut l'introduire dans le calcul, et quel degré de sûreté son emploi actuel présente.

» Le premier point est très-facile. Nommons l_0 la valeur en mètres de la constante l à la température de la glace fondante, valeur qui, d'après le rapport des densités de l'air et du mercure trouvé par Arago et moi, serait pour la latitude de Paris, $10467.0^m,76$ ou $7954^m,92$: c'est celle qu'Ivory admet. Soit ε le coefficient de la dilatabilité des gaz pour 1 degré centésimal, qu'il suppose, d'après Gay-Lussac, être 0,00375 en partant de 0 degré. Appelons, comme précédemment, $\frac{p}{p_1}$, x, et $\frac{\rho}{\rho_1}$, y. Enfin, désignons par $+\partial r$ le nombre de mètres dont il faut *s'élever* pour que la température t *s'abaisse*

(*) *Phil. Trans.*, 1823, page 423, *ad calcem*.

de 1 degré centésimal, en partant de chaque couche d'air, où x et y ont des valeurs déterminées. Ceci convenu, dans toute atmosphère dont les couches d'égale densité seront sphériques, en équilibre, exemptes de vapeur aqueuse, et définies par la relation

$$x = Ay + By^2 + C; \qquad (2)$$

qui comprend celle d'Ivory comme cas particulier, l'expression générale de ∂r, à toute distance r du centre, sera (*)

$$\partial r = l_0 \varepsilon \frac{r^2}{a^2}\left(1 + \frac{x}{By^2 - C}\right). \qquad (3)$$

A la station d'observation, r est a; et x, y sont tous deux égaux à l'unité. Nommant donc $(\partial r)_1$ la valeur de ∂r qui s'y rapporte, on aura

$$(\partial r)_1 = l_0 \varepsilon\left(1 + \frac{1}{B - C}\right), \qquad (3)$$

et, dans l'hypothèse d'Ivory, où C est nul,

$$(\partial r)_1 = l_0 \varepsilon\left(1 + \frac{1}{B}\right); \quad \text{conséquemment :} \quad \frac{B}{1 + B} = \frac{l_0 \varepsilon}{(\partial r)_1}.$$

» Quand $(\partial r)_1$ sera donné par l'observation, cette relation fera connaître la valeur du coefficient B d'Ivory, puis celle de A qui est $1 - B$, dans son hypothèse. La formule (1) ne contenant plus alors rien d'indéterminé, on n'aura qu'à la combiner avec les équations de l'équilibre et de la dilatabilité des gaz, pour obtenir les expressions générales des variables t, x, y, en fonction de r; de sorte que l'atmosphère considérée se trouvera définie dans toutes les particularités de sa constitution. Mais, par cela même, elle sera entièrement appropriée à cette valeur spéciale de $(\partial r)_1$; et les réfractions que l'on en déduira ne pourront être légitimement attribuées qu'à ce cas unique. D'où il suit qu'on ne pourra pas les transporter à des états météorologiques quelconques de la couche d'air inférieure, si l'on suppose $(\partial r)_1$ constant. Or c'est là ce qu'Ivory prétend faire, comme on le verra plus loin.

» Je montrerai dans un moment que cette limitation résulte de la suppression du coefficient C, dans la relation parabolique dont il fait usage. Mais je vais préalablement continuer de le suivre dans la détermination de

(*) *Voir* la note insérée à la suite du texte.

$(\partial r)_1$. Pour l'obtenir, Ivory se fonde sur les mesures barométriques de Ramond, de M. de Humboldt, et sur la différence observée par Gay-Lussac entre les températures de l'air à son point de départ et à sa plus haute station (*).

» Je rapporte dans le tableau suivant les valeurs de $(\partial r)_1$ qu'il tire de ces diverses observations, ainsi que celles de $\frac{\varepsilon l_0}{(\partial r)_1}$ qui s'en déduisent. Le numérateur εl_0 est $29^m,831$, d'après les évaluations ci-dessus établies :

NOMS des observateurs.	VALEURS de $(\partial r)_1$ tirées des observat.	VALEURS de $\frac{\varepsilon l_0}{(\partial r)_1}$ conclues.
Ramond.....	$164^m,7$	0,181123
Humboldt.....	161,0	0,185287
Gay-Lussac.....	174,0	0,171442

» Ivory trouve sept unités de plus sur la troisième décimale des nombres contenus dans la dernière colonne, parce qu'il les a calculés en donnant à la constante l la valeur qu'elle a quand la température est 10° (**); tandis que sa vraie valeur est l_0, dans cette application (***).

» Au point de vue physique, la diversité des nombres rapportés dans la première colonne, et leurs incertitudes propres, doivent faire douter qu'on puisse, avec sûreté, les prendre pour base d'une détermination fondamentale, comme l'est celle des coefficients A, B dans la formule (1). Leur emploi, à ce titre, serait fort contestable, étant conclus des observations par une règle empirique. Mais ces difficultés de détail s'effacent devant l'évaluation arbitraire qu'Ivory substitue aux quotients qui s'en déduisent, et qui sont rapportés dans la dernière colonne de notre Tableau. Car, au lieu de prendre une moyenne entre eux, comme cela était naturel, et comme on

(*) *Mémoire*, pages 427, 428.

(**) *Ibid*, page 424.

(***) *Voir* la note placée à la suite du texte.

devait s'y attendre, *nous pouvons, par approximation,* dit-il (*), faire $\frac{\varepsilon l_0}{(\delta r_1)}$ égal à $\frac{1}{5}$ ou 0,2; valeur notablement plus forte que toutes celles qu'il a déduites, des données expérimentales qu'il a rassemblées. Le rapport $\frac{B}{1+B}$, étant ainsi rendu égal à $\frac{1}{5}$, B devient $\frac{1}{4}$ et A $\frac{3}{4}$; ce qui donne en définitive

$$\frac{p}{p_1} = \frac{3}{4}\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^3. \qquad (1)$$

C'est la détermination à laquelle il s'arrête, après avoir essayé beaucoup d'autres formes d'atmosphères. Mais, quoiqu'elle ait pu lui convenir, comme élément de calcul, pour obtenir des réfractions approximativement conformes à celle que produit l'atmosphère réelle, on ne peut pas dire qu'elle résulte des données sur lesquelles il semble l'appuyer. Elle est au contraire fort en dehors du cercle de leurs valeurs. Car, si $\frac{\varepsilon l_0}{(\delta r)_1}$ est égal à $\frac{1}{5}$, $(\delta r)_1$ devra être $5\,\varepsilon l_0$ ou $149^m,15$. C'est-à-dire, qu'en moyenne, il faudrait s'élever de cette quantité au-dessus de la surface terrestre, pour voir la température baisser de 1° centésimal. Or toutes les mesures barométriques citées par Ivory indiquent des décroissements beaucoup moins rapides. Mais il a été obligé d'en écarter le sien *dans ce sens,* par l'hypothèse même qu'il avait admise. En effet, si, dans l'expression générale de δr, applicable à toutes les atmosphères paraboliques, on fait C nul, et que l'on remplace x par sa valeur $Ay + By^2$, elle donne

$$\delta r = l_0 \varepsilon \frac{r^2}{a^2}\left(2 + \frac{A}{By}\right).$$

Alors le décroissement initial $(\delta r)_1$ est $l_0\varepsilon\left(2 + \frac{A}{B}\right)$, et toutes les valeurs ultérieures de δr surpassent de plus en plus celle-là, à mesure que y devient moindre; de sorte que le décroissement de la température se ralentit à mesure qu'on s'élève. Ivory s'est conformé à cette conséquence de son hypothèse, en faisant $(\delta r)_1$ moindre que les décroissements moyens indiqués par les observations qu'il rapportait. Mais le motif qu'elle lui a donné d'agir ainsi, la met en contradiction avec les faits. Car, dans l'atmosphère réelle, le décroissement de la température va en s'accélérant à mesure qu'on

(*) *Phil. Trans.*, 1823, page 428.

s'élève, au lieu de se ralentir; comme le montrent ces mêmes observations de Gay-Lussac, de M. de Humboldt, et celles de M. Boussingault, quand on les discute exactement dans leurs détails (*).

» Ivory ne dit nulle part les raisons qu'il a eues, pour donner à son coefficient B cette valeur précise $\frac{1}{4}$, plutôt que toute autre; et néanmoins il témoigne y avoir une telle confiance qu'il l'emploie comme établi en fait sur l'observation, non-seulement dans toute la suite de ses calculs propres, mais même à titre de type incontestable pour éprouver les théories de Laplace et de Bessel (**). On peut difficilement croire qu'il ait fondé une telle certitude, sur le choix arbitraire de la valeur qu'il lui avait primitivement attribuée, en dehors des observations qu'il rapporte; et nous lui en trouverons bientôt une raison meilleure, qu'il semble n'avoir pas voulu découvrir. Mais auparavant, je crois qu'il sera utile de montrer l'étendue d'application que prend la formule parabolique, lorsqu'on n'y supprime pas le coefficient C.

» On a alors :

$$x = Ay + By^2 + C, \qquad (2)$$

avec la relation

$$1 = A + B + C.$$

Attribuons à l'atmosphère active une densité finale u quand la pression x est nulle. Il en résultera :

$$0 = Au + Bu^2 + C.$$

Pour prendre un cas de calcul simple, supposons cette densité finale u si petite, que son carré soit négligeable comparativement à sa première puissance. L'équation de condition à laquelle elle doit satisfaire, donnera alors immédiatement :

$$C = -Au,$$

d'où l'on tirera aussitôt :

$$B = 1 - A + Au, \quad \text{et par suite :} \quad B - C = 1 - A + 2Au.$$

(*) *Additions à la Connaissance des Temps de* 1841, pages 73 et 107, tableaux. *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome XVII, page 784, et tableaux additionnels.

(**) *Phil. Trans.*, 1823, pages 478 et 481.

Or l'équation (3), qui détermine le décroissement initial de la température, donne :

$$B - C = \frac{\frac{l_0 \varepsilon}{(\partial r)_1}}{1 - \frac{l_0 \varepsilon}{(\partial r)_1}}$$

Prenons, comme Ivory, $\frac{l_0 \varepsilon}{(\partial r)_1}$ égal à $\frac{1}{5}$; il en résultera :

$$B - C = \frac{1}{4}, \quad \text{conséquemment} \quad A(1 - 2u) = \frac{3}{4}.$$

De là, en négligeant toujours u^2, comparativement à u, on tirera :

$$A = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}u,$$

et par suite, dans le même ordre d'approximation :

$$B = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}u,$$

$$C = -\frac{3}{4}u;$$

ce qui satisfait à la condition :

$$A + B + C = 1.$$

» Les coefficients A, B, C, ne diffèrent de ceux d'Ivory que par l'adjonction des termes en u; et ils s'y accorderaient exactement si la densité finale u était supposée, non pas tout à fait nulle, ce qui serait incompatible avec la condition de l'équilibre, mais si excessivement petite, que sa première puissance même fût insensible comparativement aux termes de A ou de B qui en sont indépendants. Ce cas particulier est donc le seul auquel l'hypothèse d'Ivory soit légitimement applicable.

» Ce sont les valeurs attribuées à la densité finale u, qui déterminent les hauteurs diverses des atmosphères, définies par la relation générale (3); comme on peut le voir par la note insérée à la suite de ce texte. Par exemple : si l'on fait successivement u égal à 0,001 et à 0,0001, en désignant par z la hauteur totale de l'atmosphère qui en résulte, on obtient les valeurs suivantes :

u	A	B	C	z
0,001	$\frac{3}{4} + 0,0015$	$\frac{1}{4} - 0,00075$	$- 0,00075$	47301^{m}
0,0001	$\frac{3}{4} + 0,00015$	$\frac{1}{4} - 0,000075$	$- 0,000075$	66842

» D'après les présomptions les plus vraisemblables, la hauteur de l'atmosphère terrestre est comprise entre ces deux valeurs de z, et plus proche de la première que de la seconde. C'est donc seulement jusqu'à ces hauteurs, et pour la dégradation des densités qu'elles supposent, qu'il faudrait conduire les intégrations, si l'on admettait la relation parabolique, comme représentant l'atmosphère réelle. Mais les réfractions que l'on obtiendrait, ne s'appliqueraient encore qu'à l'atmosphère spécialement constituée pour la valeur de (δr), qu'on lui aurait attribuée.

» Pour justifier l'emploi de la formule parabolique (1) privée de constante, qui donne à l'atmosphère une étendue infinie, Ivory compose une autre hypothèse mathématique très-générale, qu'il présente comme comprenant dans ses applications extrêmes, l'hypothèse de Cassini d'où résulte une atmosphère bornée, et celle de Newton où la température est constante, d'où résulte une atmosphère d'une étendue infinie. Le cas où la température décroît en progression arithmétique, et qui donne comme le premier une atmosphère bornée, tombe, dans la formule, entre ces deux-là. Ivory trouve que ce cas, et l'hypothèse de Cassini, font la réfraction horizontale beaucoup trop faible; tandis que l'hypothèse d'une température constante la fait beaucoup trop forte; d'où il conclut que la distribution des températures dans l'atmosphère réelle, devra être intermédiaire entre l'invariabilité et le décroissement uniforme. C'est ce que Laplace avait prouvé bien plus simplement, et plus directement, avant lui. Le type seul de comparaison est différent. Ivory prend, comme circonstances météorologiques normales de la couche d'air inférieure, la température de 50° Far. ou 10° cent., et la pression de 30 pouces anglais ou $0^{m},7617$; à quoi il attache une réfraction horizontale moyenne de $34'17'',5$, plus forte de $25''$ que ne serait celle de Laplace, dans les mêmes circonstances. La différence est de l'ordre d'incertitude que comporte l'évaluation de cet élément.

» Il tire encore de ses calculs une autre conséquence : c'est que toutes les

atmosphères, dont la hauteur s'étend depuis environ 42 000 mètres jusqu'à l'infini, donnent, à très-peu près, une même valeur à la réfraction horizontale, quand leur base est dans le même état météorologique. Mais la démonstration ne vaut que pour les atmosphères comprises dans son hypothèse mathématique; et, pour celles-là même, elle est contestable quand elles atteignent de grandes hauteurs. Car il n'obtient leurs caractères spécifiques, et les réfractions qu'elles doivent produire, qu'en y supposant la densité nulle à leur limite supérieure, et en négligeant, pour la commodité de ses calculs, le décroissement progressif de la gravité dans l'équation de l'équilibre à laquelle il les assujettit. Or, étant ainsi constituées, pour le cas idéal d'une gravité constante à toute distance du centre, elles ne resteraient pas en équilibre sous l'influence décroissante de la gravité réelle; et elles se dissiperaient dans l'espace en vertu de l'élasticité propre à l'air qui les compose, laquelle ne se trouverait plus contre-balancée.

» Ce résultat, qu'Ivory s'efforce ainsi d'établir par de savants calculs, peut se déduire immédiatement d'une considération très-simple. Concevez une atmosphère dans laquelle les densités, les pressions, les températures décroissent progressivement, suivant une loi quelconque, à mesure qu'on s'y élève; faites seulement cette loi assez lente pour que, vers 28 000 ou 30 000 mètres de hauteur, la densité conserve encore une valeur très-petite, par exemple $\frac{1}{100}$ de ce qu'elle était à la surface du sol. Distribuez alors ce reste de densité suivant toute autre loi de décroissement, complétement arbitraire. La petite portion de la réfraction, même horizontale qu'il produira, sera toujours comprise entre deux limites faciles à évaluer, et qui ne s'écarteront l'une de l'autre que de quelques fractions de seconde. De sorte qu'à cette différence près, elle sera la même dans toutes les atmosphères ultérieurement plus étendues. Dans l'atmosphère parabolique d'Ivory, par exemple, la densité se trouve réduite à $\frac{1}{100}$, quand la hauteur est 32 755 mètres; et, de quelque manière qu'on distribue ce $\frac{1}{100}$, la portion qu'il ajoute à la réfraction horizontale est $5''{,}4933$, avec une limite d'erreur de $0''{,}1461$ (*).

» Toutes ces épreuves préparatoires étant faites, Ivory revient définitivement à l'hypothèse parabolique simple :

$$(1) \qquad x = (1 - f)\, y + f y^2,$$

(*) *Additions à la Connaissance des Temps de* 1839, pages 73 et 81.

où il laisse maintenant indéterminé ce même coefficient constant f qu'il avait trouvé d'abord égal à $\frac{1}{4}$, et que j'avais désigné par la lettre B. Mettant alors l'atmosphère résultante en équilibre, sous l'influence d'une gravité constante, quoiqu'il lui attribue une étendue infinie, il lui applique, avec une rare habileté, les formules d'intégration de Kramp; et il parvient à en déduire une expression générale de la réfraction à toute distance du zénith, en conservant au coefficient f une entière indétermination. Il se trouve donc libre de fixer sa valeur, de manière à reproduire la réfraction horizontale adoptée comme moyenne par les astronomes; ou par la condition que la formule s'accorde, en moyenne, avec des observations faites à de petites hauteurs. Mais, considérant les irrégularités que les réfractions présentent dans ces deux cas, *il est douteux*, dit-il, *que l'on puisse assigner au coefficient* f *une valeur plus satisfaisante que celle de* $\frac{1}{4}$, *que nous lui avons trouvée d'abord* (*). Le prenant donc tel, sa formule lui donne la réfraction horizontale égale à $34'17''{,}5$, et, par suite, les autres à toute distance du zénith. C'est là son résultat définitif.

» Il serait naturel de penser qu'Ivory, ayant successivement attribué différentes valeurs à son coefficient f, dans sa formule générale de la réfraction, il se sera arrêté à celle de $\frac{1}{4}$, qui lui donnait une réfraction horizontale suffisamment conforme aux observations, dans les circonstances météorologiques qu'il avait admises, et que c'est de là, bien plutôt que des mesures barométriques, qu'il a tiré le décroissement initial $149^{m},15$ dont il le présente comme dérivé. En cela encore, il aurait suivi Laplace. Mais, sans prétendre décider cette alternative, prenons cette valeur du coefficient f telle qu'il l'adopte; et voyons si, en la maintenant constante, comme il le fait, l'expression de la réfraction qui en résulte peut être légitimement transportée à des états météorologiques de la couche d'air inférieure, autres que celui pour lequel il l'a établie.

» Cette expression, comme toutes celles qui ont été obtenues par d'autres géomètres, renferme deux éléments physiques, désignés généralement par les lettres l et α, lesquels varient avec la température t_1 et la densité ρ_1 de la couche d'air inférieure où l'observateur se trouve placé. Leurs valeurs algébriques sont

$$l = l_0(1 + \varepsilon t_1), \qquad \alpha = \frac{2k\rho_1}{1 + 4k\rho_1},$$

(*) Mémoire d'Ivory, page 473.

l_0 est une constante qui dépend du rapport des densités de l'air et du mercure, évalué pour la station d'observation, la température étant 0° et la pression $0^m,76$; ε est le coefficient de la dilatation des gaz; k est un nombre constant qui dépend du pouvoir réfringent de l'air, et qui est connu par des expériences de laboratoire. Dans toute expression générale de la réfraction, théoriquement établie, ces deux éléments l et α entrent explicitement, sous des formes définies par la nature de l'atmosphère fictive où l'on suppose la réfraction opérée. On pourrait donc déterminer symboliquement les changements que leurs variations doivent produire dans la grandeur de ce phénomène à toute distance du zénith, si l'on savait assigner les changements correspondants qui doivent survenir dans la constitution de l'atmosphère fictive, quand l'état météorologique de la couche d'air qui la supporte vient à varier. Mais ceux-ci n'étant pas assignables par nos connaissances actuelles, on n'en tient pas compte. C'est-à-dire, qu'après avoir déterminé les constantes spécifiques de cette atmosphère pour un état météorologique spécial, et, si l'on veut, moyen de la couche inférieure, on l'applique avec ces mêmes constantes à tous les autres, ce qui implique une impossibilité mathématique manifeste.

» Elle ne l'est pas moins au point de vue physique. Je prends comme exemple la formule d'Ivory. Après y avoir fait le coefficient f égal à $\frac{1}{4}$, elle lui donne la réfraction horizontale conforme à son type $34'17'',5$, quand la température t_1 est 10° Farenheit, et la pression p_1 30 pouces anglais, ce qui détermine l, ρ_1 et par suite α. Alors il calcule les changements que doivent éprouver l et α, quand t_1 et p_1 varient autour de ces valeurs fondamentales; et il les introduit comme correctifs, dans son expression générale de la réfraction sans y changer le coefficient f. Or, puisque ce coefficient détermine mathématiquement le décroissement initial de la température dans son atmosphère hypothétique, et qu'il fixe même complétement la constitution absolue de cette atmosphère, la constance qu'Ivory lui attribue, équivaut à supposer que ce décroissement, et par suite l'atmosphère tout entière, se maintiendront invariables, quel que soit l'état météorologique de la couche inférieure. Ceci est physiquement impossible. Car les mêmes causes qui font varier accidentellement l'état de cette couche, agissent toujours, en même temps, mais avec des intensités inégales, sur les supérieures qu'elle supporte; ce qui doit changer continuellement leurs relations de densités et de températures à une même hauteur, comme en effet l'expérience nous le montre tous les jours. L'atmosphère d'Ivory, rendue constante par l'invariabilité de son coefficient f, ne se prête donc pas à ces variations. Elle ne s'applique légitimement qu'à

l'état météorologique pour lequel il l'a fabriquée. Vraie ou fausse, elle ne peut donner les réfractions que pour cet état spécial, non pour aucun autre. C'est donc à tort qu'Ivory prétend la leur appliquer, et qu'il la présente comme étant, sous ce rapport, plus générale que celle de Laplace. Toute la différence, c'est qu'il a méconnu cette limitation, que Laplace avait comprise.

» Dans un Mémoire postérieur de quinze années, qui est inséré aux *Transactions philosophiques* de 1838, Ivory a repris ce travail avec de nouveaux développements analytiques, appliqués à des hypothèses de même forme, seulement composées de plus de termes que celles de 1823. Mais, il entreprend toujours le problème à ce même point de vue, qui renferme l'incompatibilité que j'ai signalée tout à l'heure. Car il se propose de constituer une atmosphère fictive en équilibre, représentant l'état moyen de l'atmosphère réelle si elle était soustraite aux causes qui la troublent, d'y calculer les valeurs moyennes des réfractions, et de les adapter ensuite à des états météorologiques quelconques de la couche inférieure, sans changer les éléments déterminatifs de l'atmosphère moyenne, qui est supposée les produire (*). Voilà aussi ce qu'il fait en définitive. Car, après avoir déterminé de nouveau son coefficient f, qui dépend du décroissement initial de la température, il le conserve constant dans ses réductions, par la raison, dit-il, *qu'il ne paraît pas sujet à changements dans notre climat* (**). Or il est au contraire perpétuellement variable. Dans ce même travail, il entreprend d'étendre sa théorie à une atmosphère humide, admettant d'après les expériences faites par Arago et moi, que cette circonstance influe seulement sur la stratification des couches aériennes, sans que le pouvoir réfringent de l'air, à pression et température égale, en soit sensiblement altéré. Mais, avec cette simplification même, le problème ne serait accessible que si l'on connaissait, au moins approximativement, la proportion moyenne, et graduellement décroissante de vapeur aqueuse, qui existe dans l'atmosphère à diverses hauteurs. Cette difficulté a été cachée à Ivory, par une fausse équation de dilatabilité de l'air humide sur laquelle il se fonde (***),

---

(*) *Phil. Trans.*, 1838, page 187.

(**) *Ibid.*, page 221.

(***) *Ibid.*, 1838, page 199. Soit (ρ) la densité de l'air *humide*, sous la pression p et à la température t. Nommons $(\rho)_1$, p_1, t_1, les éléments analogues dans la couche inférieure

et qui, dit-il, *équivaut à celle que M. Biot établit dans les Additions à la Connaissance des Temps de* 1839, page 18. Mais cette équivalence n'est pas réelle. L'équation d'Ivory n'est vraie que dans deux cas : lorsque les couches d'air sont tout à fait privées de vapeur aqueuse; et lorsque la tension de la vapeur aqueuse y est partout proportionnelle à la pression, ce qui n'a pas lieu dans notre atmosphère, puisque la vapeur aqueuse y devient insensible à des hauteurs où la pression est encore très-forte. La preuve de cette erreur est si simple, que je l'insère en note au bas de cette page; et, par une conséquence inévitable, la suite entière de ses calculs en est viciée.

» De tout cela, cependant, Ivory déduit une Table de réfractions appli-

---

de l'atmosphère. L'équation de dilatabilité, posée par Ivory, est :

$$(1) \qquad \frac{p}{p_1} = \frac{(1+\varepsilon t)}{(1+\varepsilon t_1)} \frac{(\rho)}{(\rho)_1},$$

ε étant le coefficient de la dilatation des gaz. Désignons maintenant par ρ et ρ_1 les densités de l'air sec, sous les mêmes pressions, et les mêmes températures. On aura encore, dans ce cas :

$$(2) \qquad \frac{p}{p_1} = \frac{(1+\varepsilon t)}{1+\varepsilon t_1} \frac{\rho}{\rho_1};$$

cette seconde équation ne peut s'accorder généralement avec la première, que si l'on a :

$$\frac{(\rho)}{(\rho)_1} = \frac{\rho}{\rho_1};$$

or cette égalité de rapports ne peut exister que dans deux cas : 1° si la quantité de vapeur contenue dans (ρ) et $(\rho)_1$ est nulle; 2° si la tension de cette vapeur est, dans (ρ) et $(\rho)_1$, proportionnelle aux pressions p et p_1.

La véritable équation de dilatabilité, que j'ai établie à la page 18 de mon Mémoire, et qu'Ivory a citée, est :

$$\frac{p\left(1-\frac{3}{8}\frac{\varpi}{p}\right)}{p_1\left(1-\frac{3}{8}\frac{\varpi_1}{p_1}\right)} = \frac{(1+\varepsilon t)(\rho)}{(1+\varepsilon t_1)(\rho)_1},$$

(ρ) et $(\rho)_1$ représentent les densités *actuelles* des deux mélanges gazeux, et ϖ, ϖ_1, les tensions de la vapeur qu'ils renferment. Comme je supposais alors le coefficient ε égal à 0,00375 ou $\frac{3}{800}$, j'avais remplacé $\frac{3}{8}$ par sa valeur 100ε. De plus, ayant spécifié la signification des symboles employés dans mes formules, j'y avais exprimé les densités *actuelles* des mélanges gazeux par ρ et ρ_1, sans parenthèses. C'est là probablement ce qui aura trompé Ivory.

cable à toutes les distances zénithales, et à tous les états météorologiques de la couche d'air inférieure, Table, selon lui, bien plus exacte que celle de la *Connaissance des Temps*, et concordante avec celle de Bessel jusque vers 88° ou 88° $\frac{1}{2}$ de distance du zénith. Mais cette conformité de nombres, conclus d'hypothèses diverses, prises en dehors des réalités, ne prouve point la justesse physique de ces hypothèses. On n'y peut voir que le résultat commun d'un empirisme différent. Or, autre chose est de composer une formule, qui reproduise approximativement, et en moyenne, les réfractions qu'on observe, ou de les déduire d'une théorie générale, fondée sur des principes physiques et mathématiques rigoureux. Aux distances du zénith qui sortent de l'approximation générale, la théorie d'Ivory n'offre pas plus que celle de Laplace ce dernier caractère, quoi qu'il ait cru pouvoir le lui attribuer à meilleur titre. Il nous reste à voir si Bessel, en se bornant au dessein plus modeste, de composer une Table des réfractions moyennes, suffisamment approchée pour les besoins des astronomes, a été conduit à des formules, dans lesquelles les caractères réels de notre atmosphère se trouvent plus fidèlement empreints. C'est ce que leur interprétation va nous apprendre; et je terminerai par là cette longue étude.

Formules qui définissent les propriétés caractéristiques de l'atmosphère d'Ivory.

Ces formules ne seront que des applications particulières de celles que j'ai établies dans les *Additions à la Connaissance des Temps* de 1839 et de 1841, pour des atmosphères quelconques, sèches ou humides, dans lesquelles la relation générale des densités aux pressions, est donnée. C'est pourquoi je me bornerai ici à montrer la marche du calcul par laquelle on les obtient, en indiquant les pages de ces deux Mémoires, où l'on trouvera les détails des démonstrations.

Soit généralement $\frac{p}{p_1} = x$, $\frac{\rho}{\rho_1} = y$; et désignons par l_0, la valeur de la constante l, à la station d'observation, quand la température t_1 est 0 degré. Nommons ε le coefficient de la dilatation des gaz. Alors l'atmosphère considérée étant supposée sèche, l'expression générale de l sera

$$l = l_0(1 + \varepsilon t_1)$$ Mémoire de 1839, page 13.

Dans ces mêmes circonstances, on aura :

l'équation de la dilatabilité	(1)	$\frac{(1+\varepsilon t)}{1+\varepsilon t_1} = \frac{x}{y}$	Mémoire de 1841, pages 69 et 70, en y faisant nuls ω et ω_1, qui représentent les tensions de la vapeur aqueuse.
l'équation de l'équilibre	(2)	$l\,dx = -\frac{a^2}{r^2} y\,dr$	

La première étant différentiée donne :

$$(3) \qquad dt = \frac{(y\,dx - x\,dy)}{\varepsilon y^2}(1 + \varepsilon t_1).$$

En divisant cette valeur de dt, par celle de dr, prise dans l'équation (2), on au $\frac{dt}{dr}$. Or, si l'on désigne par $+\delta r$ le nombre de mètres dont il faut *s'élever* au-dessus de la distance r du centre, pour que la température t *s'abaisse* de 1 degré centésimal, les formules générales de variation, établies dans mon Mémoire de 1841, pages 71 et 72, étant appliquées à ce cas spécial, donneront :

$$\delta r = -\frac{1}{\left(\frac{dt}{dr}\right)};$$

en effectuant les calculs indiqués, on trouve ainsi :

$$\delta r = \varepsilon l_0 \frac{r^2}{a^2}\left(1 + \frac{x}{y\frac{dx}{dy} - x}\right);$$

quand la relation donnée entre x et y est :

$$(4) \qquad x = Ay + By^2 + C,$$

il en résulte

$$\delta r = \varepsilon l_0 \frac{r^2}{a^2}\left(1 + \frac{x}{By^2 - C}\right).$$

C'est l'expression que j'ai rapportée dans le texte.

L'équation différentielle (3), étant retournée, donne :

$$dy = \frac{y}{x}dx - \frac{\varepsilon y^2}{x(1 + \varepsilon t_1)}dt.$$

Remplacez dx par sa valeur, prise dans l'équation de l'équilibre; puis divisez les deux membres par dr, et substituez à $\frac{dt}{dr}$ sa valeur $-\frac{1}{\delta r}$, vous obtiendrez :

$$\frac{dy}{dr} = -\frac{a^2}{r^2}\frac{y^2}{lx} + \frac{\varepsilon y^2}{x(1 + \varepsilon t_1)\delta r}.$$

Ivory remplace r par une autre variable s, telle qu'on ait

$$r = a + ls; \quad \text{et de plus il fait} \quad y = 1 - \omega,$$

il en résulte donc généralement, dans sa notation,

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{a^2}{r^2}\frac{y^2}{x} - \frac{\varepsilon l_0 y^2}{x\delta r}.$$

A la station d'observation r est a, et x, y sont tous deux égaux à $+1$. On a donc alors :

$$\left(\frac{d\omega}{ds}\right)_1 = 1 - \frac{\varepsilon l_0}{(\delta r)_1},$$

c'est l'équation de condition qu'Ivory pose à la page 424 de son Mémoire. Mais il écrit mal à propos, dans le second membre, l au lieu de l_0.

Il ne reste plus qu'à découvrir la relation qui existe entre les densités et les hauteurs, dans l'atmosphère considérée. Pour cela, de l'équation (4) qui la définit, tirez, par la différentiation, dx en fonction de dy, et substituez-le dans l'équation de l'équilibre. Il en résultera

$$-\frac{a\,dr}{r^2} = \frac{l}{a}\left(\mathrm{A}\frac{dy}{y} + 2\mathrm{B}\,dy\right).$$

Intégrant les deux membres de celle-ci, et ajoutant une constante arbitraire C', on a, en logarithmes tabulaires :

$$\frac{a}{r} = \frac{l}{a}\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{M}}\log y + 2\mathrm{B}y\right) + \mathrm{C}';$$

M est le module 0,4342945, dont le logarithme tabulaire est $\bar{1}$,6377843. La constante C' se détermine par la condition que l'égalité subsiste à la station d'observation, où y est $+1$ et r égal à a ; cette condition exige qu'on ait :

$$1 = 2\mathrm{B}\frac{l}{a} + \mathrm{C}'.$$

En retranchant la première égalité de celle-ci, la constante C' disparaît, et l'on a enfin :

$$\frac{r-a}{r} = \frac{l}{a}\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{M}}\log\left(\frac{1}{y}\right) + 2\mathrm{B}(1-y)\right];$$

$r - a$ est la hauteur au-dessus de la station d'observation. Nommons-la z ; et faisons, pour abréger,

$$\mathrm{H} = l\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{M}}\log\left(\frac{1}{y}\right) + 2\mathrm{B}\,(1-y)\right],$$

on aura

$$\frac{z}{a+z} = \frac{\mathrm{H}}{a},$$

et, par suite,

$$z = \mathrm{H} + \frac{\mathrm{H}^2}{a-\mathrm{H}}. \qquad (5)$$

La hauteur z devient infinie quand $\mathrm{H} = a$, ce qui répond à une certaine valeur de y, dépendante de celles des coefficients A, B. Ainsi, dans le cas même où l'atmosphère caractérisée par l'équation (4) aurait une étendue infinie, la condition de son équilibre exige que la densité ne devienne pas nulle à sa limite. Si on lui assigne toute autre densité finale u, plus

grande que celle-là, sa hauteur sera limitée, et on la connaîtra par l'équation (5). C'est ainsi que j'ai calculé les deux exemples rapportés dans le texte, en attribuant à l la valeur $8253^m,23$, qui résulte des données adoptées par Ivory, lorsqu'on l'applique à la température de 50° Far., ou 10° cent. pour laquelle ses calculs sont établis.

Il pourra ne pas être inutile d'ajouter ici un mot d'explication, relativement au passage de mon Mémoire, inséré aux *Additions à la Connaissance des Temps de* 1841, sur lequel je me suis appuyé. Dans ce passage, pages 71 et 72, δr et δy expriment généralement les variations *algébriques* de r et de y qui répondent à un *accroissement* $t' - t$ de la température, égal à 1° centésimal. Alors δr est $+\frac{1}{\left(\frac{dt}{dr}\right)}$; et δy est $+\frac{1}{\left(\frac{dt}{dy}\right)}$. Mais, si l'on veut que ces mêmes symboles, répondent à un *abaissement* de 1°, il faut supposer $t' - t$ égal à $-1°$; ce qui donne :

$$\delta r = -\frac{1}{\left(\frac{dr}{dt}\right)} \quad \text{et} \quad \delta y = -\frac{1}{\left(\frac{dt}{dy}\right)},$$

c'est ainsi que j'ai dû les employer dans l'application actuelle; comme je l'avais fait également dans le tableau numérique inséré à la page 73 de mon Mémoire.

(*Séance du* 19 *février* 1855.)

Sur le degré de confiance que l'on doit accorder aux Tables de réfraction actuelles. Examen de la théorie de Bessel.

« Avant de commencer cette nouvelle lecture, j'ai besoin de répondre à une pensée qui s'est présentée à l'esprit de plusieurs de mes amis, dont la bienveillance, ainsi que les lumières, me rendent les avis scientifiques très-précieux. Considérant que la constitution réelle de l'atmosphère terrestre ne nous est pas connue, qu'elle a même été jusqu'ici, à peine explorée dans ce qu'elle aurait d'accessible; pourquoi, disent-ils, vous obstinez-vous à scruter minutieusement des théories qui ne peuvent être qu'hypothétiques, au lieu d'employer le peu qui vous reste de temps et de forces, à des recherches d'un intérêt plus immédiat, et plus apparent? Je sais gré du conseil; je ne saurais accepter la conséquence. On enrichit les sciences quand on leur apporte des vérités nouvelles; on les fortifie en les débarrassant des fausses appréciations. Si les Tables de réfraction, actuellement en crédit, n'avaient d'autre défaut que de devenir incertaines aux approches de

l'horizon, elles ne tromperaient personne. L'excessive mutabilité que les phénomènes acquièrent alors, par des accidents lointains hors de toute prévision, montre suffisamment qu'aucune théorie ne peut enchaîner leurs caprices. Mais supposez que, pour les réunir approximativement dans une même loi avec ceux qui sont plus réguliers, les auteurs de ces théories aient affaibli insciemment la rigueur, la certitude, qu'elles pouvaient avoir, étant limitées à des distances zénithales moindres ; qu'y aurait-il de plus utile que d'en avertir, quand on songe que toute la précision de l'astronomie observatrice en serait compromise? Les Tables de Bessel, aujourd'hui presque universellement adoptées, sont-elles, en ce point, irréprochables? c'est ce que je me propose d'examiner. J'y procéderai avec tout le respect, et toute la défiance de moi-même, que doit inspirer un nom si justement célèbre ; mais aussi avec la plénitude de la liberté scientifique. Maintenant, comme toujours, on peut aimer Platon ; mais il faut aimer davantage la vérité.

» Les recherches de Bessel sur les réfractions astronomiques, datent de 1818 ; elle sont postérieures de 13 ans, à la théorie que Laplace avait donnée de ces phénomènes dans le livre X de la *Mécanique céleste*. Il fut conduit à les entreprendre par son mémorable travail sur les observations de Bradley ; car leur réduction exigeait la détermination exacte des réfractions qui les affectent, en même temps qu'elles lui fournissaient les données les plus précieuses, comme les plus abondantes, pour l'obtenir. L'exposé de ces recherches se voit au chapitre IV des *Fundamenta astronomiæ,* avec la Table générale de réfractions que Bessel en a déduite. C'est la même qu'il a reproduite, avec quelques modifications relatives à l'emploi des éléments météorologiques, et à la valeur absolue de la constante α, dans le célèbre recueil intitulé : *Tabulæ Regiomontanæ,* qui est aujourd'hui comme le code légal des astronomes. Mais il n'a rien changé aux principes mathématiques sur lesquels il l'avait établie, non plus qu'aux formules générales qu'il en dérive. Nous pouvons donc apprécier complétement les bases et les conséquences de sa théorie, dans ce premier travail, où tous les détails des calculs analytiques sont exposés.

» Laplace avait mis en évidence les difficultés physiques du problème, que lui-même avait ouvertement signalées. Considérant la presque impossibilité de former une hypothèse assurée, sur la loi de décroissement des densités dans l'atmosphère terrestre, parmi les continuelles perturbations qu'elle éprouve, Bessel déclare « qu'il s'est uniquement proposé, de com-
» poser une expression générale des réfractions qui satisfasse le mieux pos-

» sible aux observations des astronomes (*). » Or, ayant atteint ce résultat à sa propre satisfaction, que partage le plus grand nombre des observateurs de nos jours, il y a un grand intérêt, non pas à contester l'hypothèse mathématique dont il est parti, mais à en déduire les hypothèses physiques qui s'y trouvent implicitement comprises; à voir ce qu'elles représentent; jusqu'à quel point elles s'accordent avec les réalités; et enfin si toute la série de ses calculs s'y adapte fidèlement. C'est à ce point de vue d'une exploration, pour ainsi dire expérimentale, que je vais me placer. Pour la faire, je n'aurai qu'à m'autoriser des formules générales que j'ai exposées à la suite de ma communication précédente; et c'en sera une application très-facile.

» Désignons, comme je l'ai fait toujours, $\frac{p}{p_1}$ par x, et $\frac{\rho}{\rho_1}$ par y. Bessel adopte pour circonstances météorologiques normales de la couche d'air inférieure, la température de 48°,75 Farenheit, ou 9°,3056 centigrades; et la pression p_1 de $29^{pces},6$ anglais, ou $0^{m},7518$. A cette température, il prend la constante l égale à $4226^{t},85$ ou $8236^{m},73$; et comme l'expression générale de l est :

$$l = l_0 (1 + \varepsilon t_1),$$

ε étant le coefficient de la dilatation des gaz, qu'il suppose d'après Gay-Lussac être 0,0375, il en résulte :

$$l_0 = 7959^{o},0 \qquad \log l_0 = 3,9008585.$$

Les autres données linéaires, qu'il exprime de même en toises de Paris, et que je traduis aussi en mètres, sont :

» 1°. Le rayon terrestre à la station d'observation :

$$a = 6\,372\,969^{m}, \qquad \log a = 6,8043418,$$

d'où il résulte

$$\frac{l_0}{a} = 0,00124887, \qquad \log \frac{l_0}{a} = \bar{3},0965167,$$

» 2°. Une constante arbitraire g, dont j'expliquerai l'emploi tout à l'heure, et dont la valeur est :

$$g = 227\,775^{m},6, \qquad \log g = 5,3575073,$$

(*) *Fundamenta astronomiæ. Præfat.*, page 27.

d'où il résulte

$$\frac{l_0}{g} = 0{,}0349423, \qquad \log \frac{l_0}{g} = \bar{2}{,}5433512.$$

Ces éléments de calcul étant préparés, Bessel les associe dans une combinaison analytique très-simple, qui lui permet d'emprunter toutes les formules d'intégration que Laplace avait établies pour le cas d'une température uniforme, en les rendant susceptibles d'une application plus générale. Dans ce cas d'uniformité si l'on fait, comme Laplace au § 5 du livre X de la *Mécanique céleste* :

$$(1) \qquad \frac{a}{r} = 1 - s,$$

s, étant une nouvelle variable, dont les valeurs extrêmes sont 0 et $+1$, on trouve, après avoir introduit la condition de l'équilibre, que les densités $\frac{\rho}{\rho_1}$ ou y, sont liées à la variable s, par l'équation suivante :

$$y = e^{-\frac{as}{l}},$$

dans laquelle e désigne la base des logarithmes hyperboliques. Bessel lui substitue hypothétiquement :

$$(2) \qquad y = e^{-\frac{i.as}{l}}$$

i, étant un coefficient, qui a pour expression générale :

$$i = 1 - \frac{l}{g},$$

où g est la constante arbitraire dont on a vu plus haut la valeur numérique; et il dit l'avoir déterminée, par la condition de représenter le mieux possible les réfractions inférieures de 24 étoiles circompolaires, que Bradley avait observées un très-grand nombre de fois dans leurs deux culminations (*). D'après ces mêmes épreuves, il adopte, pour la constante α, une

(*) *Fund. Præf.*, page 40. En exposant page 27 son hypothèse mathématique, Bessel dit que le produit *as* représente la *hauteur* de la couche aérienne. Ce ne peut être là qu'un énoncé approximatif, fréquemment usité, mais qui n'est applicable qu'à des hauteurs restreintes. En effet, si *as* était supposé rigoureusement égal à $r - a$, s serait $\frac{r-a}{a}$. Alors,

valeur moindre que celle de Laplace, et qui s'accorde moins bien avec les déterminations physiques. Il la fait, en secondes sexagésimales, égale à 57″,538 dans les circonstances météorologiques qu'il a choisies comme fondamentales. Celle de Laplace, transportée à ces mêmes circonstances, serait 57″,940. La différence absolue des deux évaluations 0″,4 est fort petite; mais son influence s'agrandit considérablement, dans les réfractions voisines de l'horizon. Sur ces données, le calcul algébrique s'achève par les formules de la *Mécanique céleste*, que la présence du coefficient i, n'empêche pas d'être analytiquement applicables; et c'est de là que Bessel conclut les valeurs numériques des réfractions, dans l'état normal de l'air à la station d'observation. Il les transporte ensuite à tout autre état de cet air, en faisant varier analytiquement la température et la pression inférieure, *dans tous les termes* de leur expression algébrique qui contiennent ces deux éléments, et en calculant les réductions qui doivent en résulter. C'est le seul moyen correct de les obtenir. Ivory et d'autres, lui ont emprunté cette méthode sans le citer; et une phrase des *Tabulæ Regiomontanæ*, qui fait allusion à cet oubli, montre que Bessel n'y a pas été insensible (*).

» La relation hypothétique (2) doit, comme celle qu'il remplace, être supposée astreinte à la condition de sphéricité des couches aériennes, ainsi qu'aux équations de l'équilibre et de la dilatabilité des gaz. J'ai montré que la sphéricité est toujours admissible, pour chaque trajectoire lumineuse, à titre de construction auxiliaire. La condition d'équilibre est nécessitée, non seulement par l'analogie des formes, mais aussi parce que, sans elle, on ne saurait admettre qu'il pût exister une relation fixe entre les densités et les hauteurs. D'ailleurs, la constante l, n'a d'application physique, qu'en admettant que la pression p_1 représente le poids total des couches supérieures à la station d'observation; et la condition de dilatabilité, est également supposée par le mode de variation que l'on attribue à cette même constante, en fonction de la température t_1. Nous pouvons donc à juste titre appli-

---

dans l'application à des atmosphères indéfinies, les intégrales relatives à la variable s devraient être prises depuis $s = 0$ jusqu'à $s = \infty$. Or celles que Bessel emprunte à Laplace, pour des cas pareils, sont prises depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$, parce que s y est fait égal à $\frac{r-a}{r}$. Ce doit donc être là aussi l'expression exacte de la variable s dans les formules de Bessel; et cela se voit aussi, par la forme sous laquelle il la fait entrer, page 28, dans l'expression complète de la densité, donnée par la condition de l'équilibre.

(*) *Tabulæ Regiomontanæ*, Introduction, page LX.

quer ces deux conditions à l'équation (2) de Bessel, pour en déduire les caractères constitutifs de l'atmosphère, où elle existerait.

» La condition d'équilibre établit entre la pression $\frac{P}{P_1}$ ou x et la distance r, la relation suivante :

$$ldx = -\frac{a^2}{r^2}ydr;$$

qui, en remplaçant r, par son expression en s, devient :

$$ldx = -aydx.$$

Or l'équation hypothétique (2) donne :

$$dy = -\frac{i}{l}aydx;$$

il en résulte donc :

$$idx = dy$$

et en intégrant :

$$ix + c = y;$$

c est une constante arbitraire, qui doit se déterminer de manière que l'égalité subsiste à la station d'observation, où x et y deviennent tous deux égaux à $+1$. Cette condition donne $c = 1 - i$; d'où résulte ensuite généralement :

$$ix + 1 - i = y; \tag{3}$$

si l'on construit géométriquement cette équation en prenant les pressions $\frac{P}{P_1}$ ou x, pour abscisses, et les densités $\frac{\rho}{\rho_1}$ ou y, pour ordonnées, elle représente une ligne droite, inclinée sur l'axe des pressions d'un angle I, tel que

$$\text{tang I} = i.$$

Or, d'après l'ascension de Gay-Lussac, comme d'après les mesures barométriques de MM. de Humboldt et Boussingault, cette relation rectiligne est effectivement celle que l'on trouve exister dans l'atmosphère réelle, quand on s'y élève au-dessus des couches d'air les plus habituellement troublées par les accidents météorologiques; et même, la valeur de l'angle I qui se déduit de ces observations diffère très-peu de celle que l'hypothèse de

Bessel donne pour les valeurs correspondantes de la constante l, comme je le prouverai dans un moment par les nombres.

» A la limite supérieure de l'atmosphère, où la pression x doit devenir nulle, l'équation (3) assigne à la densité une valeur finale u, qui est

$$u = 1 - i;$$

dans l'hypothèse de Bessel, i est $1 - \frac{l}{g}$; il en résulte donc :

$$u = \frac{l}{g} = 0{,}0349423\,(1 + \varepsilon t_1).$$

D'après la petitesse du coefficient ε, et le peu d'étendue dans laquelle les températures t_1 oscillent naturellement, on voit que la densité finale restera toujours une petite fraction de l'unité dans les applications; c'est-à-dire qu'elle ne sera jamais qu'une faible partie de la densité inférieure ρ_1, qui est prise pour unité de toutes les autres.

» Le fait d'une densité finale, qui subsiste encore quand la pression devient nulle, est conforme aux considérations physiques. Mais la formule de Bessel la ferait varier avec la température t_1, dont l'influence ne pourrait s'étendre aussi loin. Cet inconvénient sera commun à toute hypothèse où l'on prétendra lier les pressions aux densités par une même loi de dépendance continue, s'étendant à toute l'atmosphère. Car l'état de celle-ci ne varie très-probablement que dans les couches inférieures, et doit se maintenir constant, ou à peu près constant, à une certaine élévation.

» Puisque la condition de l'équilibre exige que la densité finale u, soit égale à $1 - i$, tous les systèmes d'atmosphères, résultants de l'hypothèse mathématique de Bessel, prise dans sa généralité algébrique, seront complétement définis par les deux équations suivantes :

$$(2) \qquad y = e^{-(1-u)\frac{a}{l}s};$$

$$(3) \qquad y = (1 - u)x + u.$$

dans lesquelles on a :

$$u = \frac{l}{g} \qquad \text{et} \qquad s = \frac{r - a}{r} = \frac{z}{a + z},$$

en nommant z la hauteur de la couche atmosphérique dont la distance au centre est r, et la densité y.

» Quand la densité finale u sera donnée par son expression conventionnelle $\frac{l}{g}$, l'équation (2) fera immédiatement connaître chaque valeur de la densité y qui correspond à une valeur assignée de la variable s, et réciproquement. Car, en prenant les logarithmes tabulaires des deux membres, on obtient :

$$\log\left(\frac{1}{y}\right) = (1-u)\frac{a}{l}s\log e$$

$\log e$ a pour valeur 0,4342845... Je le désigne par M, dont le logarithme tabulaire sera $\bar{1}$,6377843. Si s est donné, on aura tout de suite $\frac{1}{y}$. Si au contraire y est donné, on dégagera s. Pour connaître la hauteur z de la couche aérienne qui y correspond, il n'y a qu'à remplacer s par l'expression équivalente $\frac{z}{a+z}$; et alors, en faisant, pour abréger :

$$\mathrm{H} = \frac{l}{(1-u)\,\mathrm{M}}\log\left(\frac{1}{y}\right),$$

on obtiendra :

$$z = \mathrm{H} + \frac{\mathrm{H}}{a-\mathrm{H}} \qquad (5)$$

si l'on prend y égal à la densité finale u, z sera la hauteur de l'atmosphère à laquelle cette densité appartient. Je la désignerai généralement par Z.

» En la calculant avec les données numériques que Bessel adopte, pour des valeurs graduellement croissantes de la température inférieure t_1, par conséquent aussi de la constante l, on trouve qu'elle en résulte de plus en plus grande. Toutefois, même en laissant à l'expression qui la donne toute sa généralité de variation analytique, la hauteur Z ne peut jamais devenir infinie. Car, pour que cela arrivât, il faudrait que le produit que j'ai désigné par H, pût se trouver égal à a. Or, d'après les conditions assignées par Bessel il restera toujours inférieur à la constante g, qui est moindre que a.

» En effet, dans son hypothèse, la densité finale u, a pour expression générale $\frac{l}{g}$. Remplaçant donc l, dans H, par sa valeur gu, et y par u, pour signifier que nous cherchons Z, nous aurons :

$$\mathrm{H} = \frac{g}{\log e}\cdot\frac{u}{(1-u)}\log\frac{1}{u}.$$

La densité finale u est toujours moindre que 1 qui représente la densité de

la couche inférieure. Représentons-la généralement par $1-\omega$, ω désignant une fraction positive quelconque. Il en résultera :

$$H = -\frac{g}{\log e}\frac{(1-\omega)}{\omega}\log(1-\omega).$$

Le facteur logarithmique peut se développer en une série toujours convergente, puisque ω est moindre que 1. En le faisant, et achevant les opérations indiquées, on trouve en définitive :

$$H = g\left(1-\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{2.3}\omega^2-\frac{1}{3.4}\omega^3\ldots\right),$$

ce qui montre que H ne pourra jamais surpasser, ni même égaler la constante g, que Bessel a faite conventionnellement moindre que a.

» Si on laissait cette constante g, par conséquent, la densité finale u, entièrement arbitraire, tout en conservant à l la liberté naturelle de ses variations, on pourrait rendre Z infini, en posant la condition :

$$\frac{l}{(1-u)\log e}\log\left(\frac{1}{u}\right) = a, \quad \text{ce qui donne :} \quad u = -e^{(1-u)\frac{a}{l}},$$

et il ne resterait qu'à déduire u de cette égalité. Je me borne à la mentionner ici, parce que nous en retrouverons l'application plus tard.

» Ce point établi, je cherche le mode de distribution des températures. On le connaîtra par l'équation de dilatabilité, qui, dans les atmosphères dépourvues de vapeurs aqueuses, comme celles que nous considérons ici, est :

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_1} = \frac{x}{y},$$

en la combinant avec la relation assignée des x aux y, qui est :

$$(3) \qquad y = (1-u)x + u,$$

il en résulte :

$$(5) \qquad t = t_1 - \frac{u}{1-u}\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1+\varepsilon t_1}{\varepsilon}\right),$$

y étant toujours une fraction de l'unité si ce n'est dans la couche inférieure, et la densité finale u étant aussi toujours moindre que 1, t sera toujours moindre que t_1. C'est-à-dire que la température ira en décroissant de bas en haut. Pour une même valeur de y, l'abaissement *absolu* $t_1 - t$ sera d'au-

tant plus grand que la densité finale u sera plus sensible; ce qui dans l'hypothèse particulière de Bessel, suppose l'atmosphère plus haute. Toutefois, à la limite de toutes ces atmosphères, où y devient égale à la densité finale u, u disparaît du second membre de la formule, ainsi que t_1; et quelles que soient les valeurs de ces deux éléments, elle donne toujours

$$t = -\frac{1}{\varepsilon};$$

mais ceci est seulement un résultat spéculatif auquel l'hypothèse conduit.

» Si l'on nomme ∂r le nombre de mètres dont il faut s'élever au-dessus de la couche aérienne dont le rayon est r, pour que la température s'abaisse de 1 degré centésimal, l'expression générale de ∂r, dans une atmosphère exempte de vapeur aqueuse, est :

$$\partial r = l_0 \varepsilon \frac{r^2}{a^2} \left(\frac{y \frac{dx}{dy}}{y \frac{dx}{dy} - x} \right).$$

En la particularisant pour la relation des x aux y assignée par l'équation (3), il en résulte :

$$\partial r = \frac{l_0 \varepsilon}{u} \cdot \frac{r^2}{a^2} y.$$

Dans les atmosphères de Bessel, on a généralement

$$u = \frac{l}{g} = \frac{l_0(1 + \varepsilon t_1)}{g};$$

il en résulte donc :

$$\partial r = \frac{g\varepsilon}{1 + \varepsilon t_1} \cdot \frac{r^2}{a^2} y; \qquad (7)$$

au niveau de la couche inférieure $\frac{r}{a}$ et y, sont, l'un et l'autre, égaux à $+1$.

Le décroissement initial de la température est donc $\frac{g\varepsilon}{1 + \varepsilon t_1}$, ou $\frac{854^m,16}{1 + \varepsilon t_1}$, en attribuant à g et ε leurs valeurs numériques. Il se trouve ainsi beaucoup plus lent qu'on ne l'observe dans l'atmosphère réelle. Lors de l'ascension de Gay-Lussac, par exemple, t_1 étant $+ 30°,75$, on a eu $(\partial r)_1$ égal à 195^m, ou $\frac{854^m,16}{4,38}$. Pour l'obtenir tel, par l'hypothèse de Bessel, il faudrait donc y affaiblir la constante g dans le même rapport. Mais alors elle ne satisferait plus aux réfractions; et il en résulterait une densité finale u, égale à 0,153 de celle de la couche inférieure, ce qui est également inadmissible.

» Le produit $\frac{r^2}{a^2}\gamma$ qui forme la partie variable de ∂r dans la formule (7), est composé de deux facteurs, qui, ayant d'abord la même valeur 1, dans la couche inférieure, s'écartent ensuite l'un de l'autre en sens opposé, dans tout le reste de leur progrès. Le premier $\frac{r^2}{a^2}$ s'accroît d'abord lentement, mais indéfiniment, à mesure que r augmente, tandis que, dans les mêmes circonstances, la densité γ va s'affaiblissant toujours jusqu'à sa limite finale u. Il résulte de cette opposition, qu'en partant de la couche inférieure la diminution provenant du facteur γ prédomine d'abord, de sorte que les valeurs de ∂r diminuent, et le décroissement de la température va en s'accélérant, ce qui s'observe aussi dans l'atmosphère réelle. Mais si l'on pouvait attribuer à l'atmosphère une étendue illimitée, l'accroissement progressif de $\frac{r^2}{a^2}$ se trouverait, à une certaine hauteur, prédominer sur la diminution de γ; et dès lors, dans tout le reste de l'atmosphère, le décroissement de la température irait en se ralentissant. D'après l'expression générale de γ en r que fournit l'équation (2), ce passage s'opérerait *analytiquement*, quand on aurait

$$r = (1 - u)\frac{a^2}{2l};$$

or, la constante l ne pouvant jamais, dans les applications, s'élever jusqu'à 10000 mètres, ou environ $\frac{1}{637}$ du rayon a, cette valeur de r dépassera toujours $300a$. Elle excédera donc énormément les hauteurs de toutes les atmosphères qui peuvent se déduire de l'hypothèse de Bessel pour des valeurs physiquement réalisables de t_1. Ainsi, le décroissement local de la température ira toujours en s'y accélérant depuis leur base jusqu'à leur sommet.

» Afin que l'on puisse voir, d'un seul coup d'œil, toute l'interprétation physique de l'hypothèse de Bessel, je rassemble, dans le tableau suivant, les caractères principaux des atmosphères qui en résultent, pour les trois valeurs de t_1 ; 0°; + 9°,3056; + 30°,75. La seconde est la température qu'il a prise comme normale ; la troisième est celle qui a eu lieu dans l'ascension de Gay-Lussac.

	$t_1 = 0.$	$t_1 = +9°,3056.$	$t_1 = +30°,75.$	Gay-Lussac. $t_1 = +30°,75.$	
Décroissement initial de la température.... $(\delta r)_1$	$854^m,16$	$825^m,35$	$765^m,84$	$195^m,81$	Observé.
Décroissement local, quand $y = 0,5$..... (δr)	430,79	416,36	386,53	155,94	Observé.
Décroissement absolu, pour $y = 0,5$ ..... $t - t_1$	$-9°,66$	$-10°,54$	$-12°,06$	$-37°,75$	Observé.
Densité finale, u ou .. $\frac{l}{g}$	0,0349423	0,0361616	0,389716	....	
Inclinaison de la droite sur l'axe des pressions .. I	$43°58'52''$	$43°56'43''$	$43°51'42$	$42°53'29''$	Observé.
Hauteur de l'atmosphère Z.	27782^m	28497^m	30113^m	.....	

» On voit, par ce tableau, que les atmosphères résultantes de l'hypothèse de Bessel s'accordent avec l'atmosphère réelle dans plusieurs de ses propriétés, et lui ressemblent en beaucoup plus de points que celles qui se déduisent des hypothèses de Laplace et d'Ivory. Mais ces analogies pèchent dans les nombres. On les rapprocherait de l'identité si l'on affaiblissait la constante g. Mais alors la formule hypothétique ne reproduirait plus les réfractions, comme c'était le but de Bessel. La plus remarquable des analogies dont il s'agit, consiste en ce que, dans l'atmosphère réelle, lorsqu'on s'élève à la hauteur où la densité y est à peu près réduite à 0,5, le lieu ultérieur des densités et des pressions, aussi loin que l'on a pu le suivre par les expériences aérostatiques ou barométriques, devient rectiligne comme celui de Bessel, et avec des valeurs de l'angle I très-peu différentes. C'est ce que montre le tableau suivant où j'ai rassemblé ces valeurs, telles que je les ai établies dans les *Additions à la Connaissance des Temps* de 1841, et dans le tome XVII des *Mémoires de l'Académie des Sciences*.

	VALEURS DE I.	
Gay-Lussac, ascension aérostatique.....	42°53′28″67	Comprenant ses seize stations les plus hautes; sans écarts sensibles.
Humboldt, Chimboraço. Mesure barométrique.....	39.51.17.33	Ces inclinaisons s'appliquent à l'ensemble des plus hautes stations, les températures inférieures ayant varié de 25° à 26°.
Boussingault, Chimboraço. Mesure barométrique.....	41. 0.53.54	
Le même, Anhsana. Mesure barométrique.....	39.49.59.42	
Le même, Anhsana, autre série. Mesure barométrique.....	41. 6.33.41	

» Bessel n'a pas signalé ces concordances physiques, et il y a lieu de croire qu'il ne les a pas cherchées. Car, s'il avait remarqué que, d'après l'expression qu'il assigne au coefficient i de son hypothèse mathématique, toutes les atmosphères qui peuvent en résulter dans les applications, se trouvent avoir des hauteurs si petites, que les plus grandes valeurs de la variable s ne s'y élèvent pas jusqu'à 0,006; et qu'en outre elles conservent toujours une densité finale fort sensible, il n'aurait pas cru pouvoir leur appliquer, sans explication, les intégrales de Laplace qui conviennent à des atmosphères d'une étendue infinie, ayant des densités finales d'une petitesse excessive, et dans lesquelles les valeurs de cette même variable s s'étendent depuis o jusqu'à + 1. C'est là pourtant ce que fait Bessel, et ce sont là aussi les limites qu'il assigne à ses propres intégrations.

» Pour faire voir clairement ce qu'il y a d'irrégulier, dans ce transport, j'ai besoin de rappeler la condition déterminative du système d'atmosphères, pour lequel Laplace établit les calculs que Bessel lui emprunte. C'est que la température t y soit constante à toute hauteur. Or, quand on néglige l'intervention de la vapeur aqueuse, comme le font Laplace et Bessel, l'équation générale de dilatabilité est

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_1} = \frac{x}{y},$$

donc, si l'on veut que t soit partout égal à t_1, il faudra poser généralement

$$[1] \qquad y = x.$$

C'est effectivement la relation que Laplace admet; et, en faisant par con-

vention,

$$\frac{a}{r} = 1 - s,$$

il en tire, comme je l'ai dit, par la condition de l'équilibre,

$$[2] \qquad y = e^{-\frac{a}{l}s} \quad \text{où l'on a} \quad l = l_0(1 + \varepsilon t_1).$$

» *Mathématiquement parlant,* les équations [1] et [2] sont incompatibles. En effet, la première suppose qu'à la limite extrême de l'atmosphère où la pression x doit être nulle, la densité y devient nulle aussi; mais, d'après l'équation [2], y ne peut devenir nulle que si s devient infini, ce que ne comporte pas la nature de cette variable. Car la plus petite de ses valeurs est 0, ce qui arrive dans la couche d'air inférieure où $r = a$; et la plus grande est $+1$, ce qui arrive lorsque r est infini, auquel cas la valeur de y est $e^{-\frac{a}{l}}$. Il suit de là qu'*une atmosphère gazeuse ne peut pas se maintenir en équilibre, sous l'influence d'une gravité réciproque au carré de la distance* r, *si la température* y *est supposée rigoureusement constante.*

» Renonçant donc à cette condition d'égalité absolue, qui donnerait x égal à y, proposons-nous de constituer une atmosphère en équilibre, où la relation algébrique des y aux x, soit seulement astreinte à être linéaire, comme l'était l'équation [1]. La forme la plus générale que l'on puisse attribuer à cette relation sera :

$$y = ix + b,$$

i et b étant deux constantes indéterminées. Pour que l'égalité ainsi exprimée, se vérifie dans la couche inférieure, où x et y sont tous deux égaux à $+1$, il faudra faire $b = 1 - i$; ce qui donnera en définitive :

$$[3] \qquad y = ix + 1 - i.$$

» Le coefficient i reste indéterminé. Mais, quel qu'il soit, on voit qu'à la limite supérieure de l'atmosphère où x doit devenir nul, la densité y conservera une valeur finale $1 - i$.

» Cette relation étant ainsi établie dans toute la généralité qu'elle peut admettre, appliquons-lui l'équation de l'équilibre :

$$l\,dx = -a\,y\,ds.$$

Il en résultera

$$\frac{dy}{y} = -\frac{ia}{l}\,ds;$$

équation dont l'intégrale est :

$$[2] \qquad y = e^{-\frac{ia}{l}s}.$$

Il n'y a pas de constante arbitraire à ajouter, parce que la condition que y soit $+1$ quand s est 0, se trouve satisfaite.

» En représentant la densité finale $1 - i$ par u, les équations [2] et [3] deviennent :

$$[2] \quad y = e^{-(1-u)\frac{a}{l}s}, \qquad [3] \quad y = (1-u)x + u;$$

ce sont les deux mêmes que nous avons déduites de l'hypothèse mathématique de Bessel, sauf que nous y laissons maintenant le coefficient i indéterminé. Elles auront donc les mêmes conséquences générales.

» Si l'on veut que S soit la valeur de s, à la limite extrême de l'atmosphère, où y est u; l'équation [2] donnera pour ce cas :

$$u = e^{-(1-u)\frac{a}{l}S};$$

ce qui établit une condition de dépendance mutuelle entre u et S.

» Laplace fait $S = 1$; ce qui donne à son atmosphère hypothétique une étendue infinie. Alors la valeur de u sera déterminée par l'équation :

$$u = e^{-(1-u)\frac{a}{l}};$$

c'est en effet la même que nous avons reconnue précédemment, comme devant rendre la hauteur Z de l'atmosphère infinie.

» Il est facile de prévoir, que la valeur de u qui satisfera à cette égalité, sera d'une petitesse excessive. Car le nombre e est 2,7281823... ; et, dans toutes les applications habituelles le rapport $\frac{a}{l}$, surpassera 700; puisque la valeur de l ne deviendrait assez grande pour l'abaisser jusque-là que si la température inférieure t_1, s'élevait à $+ 38°,372$ de la division centésimale, en adoptant le coefficient de dilatation 0,00375, comme le font Laplace et Bessel. Or, dans ce cas extrême, $e^{-\frac{a}{l}}$ serait moindre que $\frac{1}{10^{301}}$;

» Pour mettre à profit cette circonstance, j'écris l'équation précédente sous la forme :

$$u = e^{-\frac{a}{l}} e^{+\frac{a}{l}u};$$

et comme le produit $\frac{a}{l}u$, devra être une très-petite fraction, je développe le facteur qui le contient en série, ordonnée suivant ses puissances ascendantes ; ce qui donne :

$$u = e^{-\frac{a}{l}}\left[1 + \frac{a}{l}u + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{l}\right)^2 u^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{a}{l}\right)^3 u^3 - \text{etc.}\right];$$

d'ou l'on tire :

$$u = \frac{e^{-\frac{a}{l}}}{1 - \frac{a}{l}e^{-\frac{a}{l}}}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{l}\right)^2 u^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{a}{l}\right)^3 u^3 - \text{etc.}\right].$$

» En se bornant au premier terme du second membre qui est indépendant de u, on a :

$$u = \frac{e^{-\frac{a}{l}}}{1 - \frac{a}{l}e^{-\frac{a}{l}}}.$$

» Il est visible que l'erreur de cette approximation ne commence que dans les termes de l'ordre $e^{-\frac{3a}{l}}$. Cela suffit donc pour prouver que, dans l'application de l'hypothèse mathématique, définie par l'équation [2], en y laissant le coefficient i quelconque, au lieu de le particulariser comme le fait Bessel, les atmosphères de toute dimension, que l'on en peut déduire, conservent toujours une densité finale u ou $1 - i$, qui ne devient jamais absolument nulle, même quand leur hauteur est infinie.

» Dans toutes ces atmosphères l'équation de dilatabilité donnera, comme on l'a vu précédemment :

$$[5] \qquad t = t_1 - \frac{u}{1-u}\left(\frac{1}{y} - 1\right)\left(\frac{1 + \varepsilon t_1}{\varepsilon}\right);$$

seulement la densité finale u n'y étant plus rendue dépendante de t_1, comme dans l'hypothèse de Bessel, la liberté de ses variations est beaucoup plus étendue. Ainsi, dans le cas extrême que nous considérions tout à l'heure, l'excessive *petitesse* de la densité finale u fera que t paraîtra presque constant et égal à t_1, à toutes les hauteurs où la densité y pourrait avoir quelque influence appréciable sur les réfractions. Toutefois t ne sera pas constant à la rigueur ; car, à la limite de l'atmosphère où y devient égal à u, la formule donne :

$$t = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

» Prenons une de ces atmosphères, d'une hauteur quelconque, correspondante à une certaine valeur S de la variable s; et supposons, qu'à cette limite, elle conserve une certaine densité finale u. Pour évaluer la réfraction totale qui doit s'y opérer, sous chaque distance zénithale apparente θ_1, il faudra d'abord effectuer l'intégration générale depuis $s = 0$ jusqu'à $s = S$, ce qui donnera la portion R_{θ_1} de cette réfraction qui est indépendante de la couche terminale. Arrivé là, on calculera l'angle v' que la tangente à cette dernière portion courbe de la trajectoire lumineuse forme avec le rayon central r qui y correspond. Cet angle s'obtiendra généralement par la formule :

$$\sin v' = \frac{a \sin \theta_1}{r\,[1 - 2\alpha_1(1-\gamma)]}\,; \quad \text{dans laquelle } \alpha_1 = \frac{2k\rho_1}{1+4k\rho_1}.$$

On pourra l'en conclure directement si le rapport $\frac{a}{r}$ est une très-petite fraction de l'unité; mais il conviendra de l'évaluer par sa cotangente, si ce rapport diffère peu de 1, comme cela a lieu dans toutes les atmosphères peu étendues (*).

» v' est l'angle de réfraction intérieur suivant lequel l'élément lumineux s'est dirigé, lorsque, sortant du vide, il a traversé la couche terminale, sans épaisseur, dont la densité est u. Conséquemment, si l'on nomme ω la déviation qu'il a subie dans ce passage, son angle d'incidence extérieur, compté de la même normale, a dû être $v' + \omega$. Cette déviation s'opère suivant la loi de Descartes, avec un rapport de réfraction qui est $\sqrt{1 + 4k\rho_1 u}$. On doit donc avoir

$$\sin(v' + \omega) = \sin v' \sqrt{1 + 4k\rho_1 u}$$

de là on tire :

$$\sin\omega - 2\sin^2\frac{1}{2}\omega \tang v' = \frac{4k\rho_1 u \tang v'}{1+\sqrt{1+4k\rho_1 u}}.$$

Si l'on ne tient compte que des termes qui contiennent la première puissance du produit $k\rho_1 u$, ce que la petitesse, physiquement nécessaire de la densité finale u, permettra presque toujours, l'égalité précédente donnera simplement :

$$\omega'' = 2R'' k\rho_1 u \tang v',$$

R'' désignant le rayon du cercle réduit en secondes, lequel, dans la division sexagésimale, a pour logarithme tabulaire 5,3144251. La valeur complète

(*) Voyez les *Additions à la Connaissance des Temps* de 1839, pages 77 et suivantes.

de la réfraction produite par l'atmosphère considérée, sera ainsi :

$$R_{\theta_1} + \omega''.$$

» Appliquons d'abord ces règles de calcul, à une atmosphère d'une étendue infinie. C'est le cas que Laplace a traité. Pour former R_{θ_1}, on devra étendre les intégrations depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$. C'est ce qu'il fait. A cette dernière limite, le rayon central r étant infini, l'angle v' devient nul, et la dernière tangente de la trajectoire lumineuse se trouvant perpendiculaire à la couche terminale, il ne peut s'y produire aucune réfraction Ainsi, tant par cette circonstance, qu'à cause de l'excessive petitesse de la densité finale u, ω'' est nul, et la réfraction totale se réduit à R_{θ_1}. Le calcul de Laplace est donc correct.

» Mais, d'après les mêmes principes, celui que Bessel applique à ses atmosphères d'une étendue bornée, semblerait analytiquement fautif en deux points. Premièrement, au lieu d'effectuer les intégrations qui s'y rapportent depuis $s = 0$ jusqu'à la valeur très-petite S, qui a lieu à leur limite supérieure, et qui s'élève à peine à 0,006, il les étend, comme Laplace jusqu'à $s = 1$, c'est-à-dire jusqu'à des valeurs infinies du rayon central r; en sorte qu'il continue ainsi de les appliquer à des hauteurs où la pression deviendrait algébriquement négative dans ses atmosphères, ce qui répugne à toute interprétation physique. Secondement, il ne tient aucun compte de la portion de la réfraction qui se produit dans leur couche terminale. Or il s'en faut qu'elle puisse être négligée; non-seulement parce que sa densité u est toujours fort sensible, mais aussi parce que le rapport $\frac{a}{r}$ étant très-peu différent de l'unité à la limite de ces atmosphères, la dernière tangente des trajectoires lumineuses voisines de l'horizon, arrive à cette couche sous des incidences intérieures très-considérables, ce qui accroît la grandeur de la déviation que l'élément lumineux y subit. Si l'on suppose, par exemple, que, dans la couche d'air inférieure, la température soit 0°, et la pression $0^m,76$, la valeur finale de l'angle v', pour la trajectoire qui arrive horizontale à l'observateur, est 84° 50′ 41″; et comme la densité finale u est alors, 0,035, la valeur résultante de ω'' est 23″,5, quantité trop notable pour qu'on puisse la négliger.

» Quoique les démonstrations précédentes ne me semblent pas pouvoir être contestées, l'autorité scientifique de Bessel est, à juste titre, si grande, et sa Table de réfraction est si généralement acceptée comme loi par les astronomes, que j'ai jugé indispensable d'en vérifier les résultats par des

épreuves numériques directes et rigoureuses, avant de me hasarder à dire, ou même à croire, qu'ils pussent être inexacts.

» Pour cela, j'ai encore eu recours au zèle et à l'inépuisable obligeance de mon ami M. Caillet, examinateur de la marine. Je l'ai prié de vouloir bien appliquer aux atmosphères bornées de Bessel la méthode générale des interpolations paraboliques, dont l'exactitude semble avoir été suffisamment prouvée par l'usage que j'en ai fait précédemment pour calculer les réfractions dans les hypothèses analytiques de Newton et d'Ivory, comme on le pourrait avec non moins de sûreté et de concordance numérique dans toute autre (*). Opérant donc ici, comme je l'ai tout à l'heure expliqué, on effectue d'abord les interpolations depuis la couche inférieure de ces atmosphères jusqu'à leur sommet, ce qui donne la portion principale de la réfraction que j'ai appelée R_{θ_1}. On évalue ensuite la portion ultérieure ω'' de cette même réfraction qui s'opère dans leur couche finale, dont la densité est désignée par l'hypothèse même. La somme $R_{\theta_1} + \omega''$ représente la réfraction totale qui doit se produire à la distance apparente θ_1, pour laquelle on a effectué le calcul.

» M. Caillet a d'abord cherché, par cette méthode, la valeur de la réfraction horizontale, dans l'atmosphère constituée pour les circonstances météorologiques que Bessel adopte comme normale, et de laquelle j'ai consigné plus haut tous les caractères déterminatifs. Voici quels ont été les résultats (**) :

Portion principale de la réfraction horizontale.....	R_q	35′.44″,699
Portion complémentaire opérée dans la couche terminale...	ω''	0′.22″,700
Réfraction totale résultante.....	$R_q + \omega$	36′.7″,399
La même, par la Table de Bessel.....		36′.6″,86
Excès des interpolations sur la Table.....		+ 0′.0″, 54

» M. Caillet a effectué le même calcul pour l'atmosphère de Bessel, correspondante aux conditions météorologiques $t_1 = -0^{\circ},6944$ et $p_1 = 0^{m},76$. Quoique Bessel ait établi ses réductions analytiques de pression et de température sur des considérations analytiques parfaitement exactes, la complication des formules a pu le contraindre d'admettre quelque tolérance approximative dans leur application. En outre, il y a une petite faute dans

(*) *Additions à la Connaissance des Temps* de 1839, pages 81 et 107.

(**) N'osant pas insérer ici les éléments des interpolations partielles, pour ne pas trop étendre cette communication, je les dépose au Secrétariat, où chacun pourra les consulter et en vérifier l'exactitude.

l'emploi du coefficient de dilatation de l'air, qui est pris à partir de 10 degrés, comme s'il partait de 0 degré (*). Quoi qu'il en soit, voici le résultat de cette seconde épreuve :

Portion principale de la réfraction horizontale.....	R_q	38′.40″,307
Portion complémentaire opérée dans la couche terminale.	ω''	0′.23″,481
Réfraction totale résultante.....	$R_q + \omega''$	39′. 3″,788
La même, par la Table de Bessel.....		39′.10″,2
Excès des interpolations sur la Table.....		— 0′. 6″,4

» Cette différence, occasionnée par les réductions, est insignifiante dans un résultat pareil. La première, de sens contraire, était presque nulle.

» Ces épreuves nous conduisent à une conséquence fort étrange. L'hypothèse de Bessel, régulièrement interprétée, donne des atmosphères dont les hauteurs, au-dessus de la surface terrestre, atteignent à peine 0,006 de son rayon dans les applications qu'on en peut faire; et elles ont toutes des densités finales dont l'effet réfringent est fort sensible. Bessel y calcule les réfractions, par les formules de Laplace, comme si ces atmosphères, n'ayant pas de densité finale, n'étant pas non plus assujetties aux conditions d'équilibre, s'étendaient depuis la surface de la terre jusqu'à une hauteur infinie; et les résultats qu'il obtient se trouvent numériquement d'accord avec ceux que fournit le calcul direct appliqué à ces mêmes atmosphères, considérées dans leurs circonstances réelles de limitation et de densité finale propre. Ceci présente un paradoxe de physique mathématique dont je dois remettre le dénoûment à une séance prochaine. »

(*) Bessel adoptait le coefficient de Gay-Lussac, 0,00375 ou $\frac{3}{800}$, qui suppose la température comptée de 0 degré. Lui attribuer cette valeur quand on la compte de 10 degrés, c'est le faire originairement égal à $\frac{3}{770}$, ou 0,003896; cette faute est corrigée dans les *Tabulæ Regiomontanæ*, avec la particularité remarquable que, dans son introduction, page 60, Bessel dit avoir été amené, par des observations d'étoiles circompolaires très-basses, à prendre pour le coefficient de dilatation 0,0036438, à partir de 0 degré; ce qui est presque identiquement sa valeur véritable, trouvée sept ans plus tard par Rudberg.

(*Séance du 5 mars 1855.*)

Sur le degré de confiance que l'on doit accorder aux Tables de réfraction actuelles. Examen de la théorie de Bessel. (Suite et conclusion.)

« Dans ma communication précédente, je me suis arrêté à un point de la théorie de Bessel, qui m'a paru avoir besoin d'éclaircissement, je dirais presque de justification. Je m'étais borné à signaler la difficulté qu'il présente : je vais aujourd'hui l'aborder de plus près, en spécifier le caractère, et montrer comment on la peut résoudre.

» Laplace avait, après Kramp, établi le calcul général de la réfraction dans une atmosphère sphérique, en équilibre et de température uniforme. Il commence par prouver qu'alors, la densité à toute hauteur $r - a$, a pour expression :

$$y = e^{-\frac{a}{l}s}, \qquad (1)$$

s étant une variable assujettie à la relation

$$\frac{a}{r} = 1 - s,$$

de sorte, qu'étant d'abord o, dans la couche inférieure où $r = a$, elle peut s'accroître jusqu'à $+1$, si l'atmosphère a une étendue illimitée, ce qui est le cas extrême que l'hypothèse comporte, et auquel les expressions intégrales des réfractions obtenues par Kramp et Laplace, s'appliquent spécialement.

» Bessel ne définit point la constitution statique de l'atmosphère qu'il se propose de considérer. Il se borne à y supposer hypothétiquement :

$$y = e^{-\frac{ia}{l}s}, \qquad (2)$$

i étant un coefficient positif, très-peu inférieur à $+1$, qu'il fait généralement égal à $1 - \frac{l}{g}$, expression dans laquelle g désigne une constante très-grande comparativement à l.

» Cette nouvelle forme de y est empruntée à Kramp, auquel Bessel oublie de l'attribuer (*). Elle ne diffère de celle de Laplace qu'en ce que le coeffi-

(*) Kramp, *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres*, page 24 et 121. Dans la relation de Kramp, la constante l de Laplace et de Bessel est désignée par la lettre h, et le rayon central par y. Pour les applications à de petites hauteurs, il néglige le décroissement de la gravité; mais, quand il y a égard, il remplace comme nous la hauteur $y - a$ ou $r - a$ par $a\left(\frac{y-a}{y}\right)$ dans l'exposant de la base logarithmique e (*voyez* page 35 de son ouvrage).

cient $\frac{a}{l}$ est devenu $\frac{ia}{l}$. S'autorisant de cette analogie, Bessel admet, sans autre explication, que l'expression analytique de la réfraction à toute distance du zénith, donnée par Kramp et Laplace pour la forme (1), devra s'appliquer également à la forme (2), en remplaçant le rapport $\frac{a}{l}$ par $\frac{ia}{l}$, dans tous les termes qui la composent (*). La Table des réfractions des *Fundamenta*, reproduite dans les *Tabulæ Regiomontanæ*, est numériquement calculée, sur la formule ainsi étendue.

» Toutefois, cette extension immédiate ne serait pas analytiquement légitime. Les atmosphères qui se déduisent de la forme (1), tout en satisfaisant à la condition de l'équilibre, peuvent avoir une étendue quelconque, même illimitée. Les formules de Kramp et de Laplace sont établies pour ce cas extrême; et, en conséquence, les intégrales relatives à la variable s, y ont été prises depuis $s = 0$, jusqu'à $s = +1$. Mais les atmosphères qui se déduisent de la forme (2), assujettie de même à la condition d'équilibre, ont toutes des étendues bornées, telles que les plus grandes valeurs de la variable s, ne s'élèvent pas jusqu'à 0,006 dans les applications qu'on en peut faire. Les intégrales relatives à la variable s, doivent donc y être effectuées depuis 0, jusqu'à la limite restreinte de s qui est propre à chacune d'elles, et non pas entre les limites infiniment plus étendues 0 et $+1$. Cependant, un calcul direct nous a fait reconnaître que les réfractions déduites par Bessel de ces intégrales ainsi prolongées, ne présentent pas d'erreurs numériques, sensibles. C'est là le paradoxe qu'il faut dénouer.

» Pour cela il est nécessaire de rappeler ici une hypothèse physique très-simple, très-ingénieuse, que Bessel emprunte textuellement à Kramp sans le citer, en la présentant même, par oubli, comme sienne (**). Kramp l'avait énoncée, et traduite aussi en langage analytique, dans son remarquable ouvrage sur les réfractions atmosphériques, où la théorie de ces phénomènes a été envisagée pour la première fois dans son ensemble, ouvrage qui a paru en 1798, sept années avant la publication du travail de Laplace, trente-deux ans avant celui de Bessel sur le même sujet, et qui renferme toutes les intégrales générales, qu'on y a, depuis, appliquées.

(*) *Fundamenta*, page 28.

(**) Comparez Bessel, *Fundamenta*, page 27, et Kramp, pages 23, 24. Le principe et son énoncé algébrique sont identiques. Il n'y a de différence que dans la valeur attribuée à la constante g. Kramp a bien vu qu'elle devait être beaucoup plus grande que la constante l. Mais n'ayant pour la déterminer que des données très-vagues, il l'estime beaucoup moindre que Bessel, la faisant de 27000 à 30000 toises; au lieu de 116866, qui est le nombre des *Fundamenta*.

» Kramp appelle *élasticité spécifique* d'un gaz, le rapport de la pression qu'il supporte, à la densité sous laquelle son élasticité propre, le rend actuellement capable de la soutenir. Prenant donc pour unité de pression, et pour unité de densité, les valeurs simultanées de ces deux éléments, dans la couche inférieure d'une atmosphère en état d'équilibre, ce rapport, à toute hauteur, sera exprimé généralement par $\frac{x}{y}$, suivant la notation que j'ai adoptée. Des considérations physiques, portent ensuite Kramp a admettre qu'il doit décroître en progression géométrique pour des accroissements égaux de hauteur. Pour traduire cette loi en analyse, prenons une variable s, qui dépende des distances au centre a et r, par la relation algébrique :

$$\frac{a}{r} = 1 - s;$$

le produit as, représentera très-approximativement la hauteur d'une couche quelconque. Alors, en désignant par g, une constante, que nous laisserons d'abord arbitraire, et prenant pour raison de la progression géométrique la base e des logarithmes hyperboliques élevée à la puissance $\frac{1}{g}$, ce qui simplifiera les calculs, on aura généralement dans toute atmosphère en équilibre, ainsi constituée :

$$[1] \qquad \frac{x}{y} = e^{-\frac{as}{g}}.$$

Et ces atmosphères ne différeront entre elles que par la valeur que l'on voudra attribuer à la constante g, qui représente ici un certain nombre d'unités linéaires, de même nature que celles dans lesquelles le rayon a est exprimé.

» La relation [1] est précisément celle sur laquelle Bessel se fonde, et qu'il emprunte textuellement à Kramp, sans le citer. Je n'ai fait qu'y désigner la constante par la même lettre g dont il fait usage, pour rendre l'identité plus évidente.

» La relation hypothétique [1] étant combinée avec l'équation de dilatabilité :

$$[2] \qquad \frac{1 + \varepsilon t}{1 + \varepsilon t_1} = \frac{x}{y},$$

et avec l'équation de l'équilibre :

$$[3] \qquad ldx = -ayds,$$

détermine complétement la constitution de l'atmosphère résultante. Cette

relation différentiée, donne d'abord :

$$dx = e^{-\frac{a}{g}s}\left(dy - \frac{a}{g}y\,ds\right),$$

et l'équation [3], particularisée pour cette valeur de dx, devient

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{a}{g} - \frac{a}{l}e^{+\frac{a}{g}s}\right)ds.$$

Sous cette forme elle est immédiatement intégrable, et en déterminant la constante arbitraire par la condition que y soit égal à $+1$ quand s est nul, on en tire

$$[4] \qquad y = e^{-\frac{g}{l}\left(e^{\frac{a}{g}s}-1\right)+\frac{a}{g}s}.$$

» Bessel rapporte cette expression de la densité comme étant la conséquence de la relation [1], ce qui montre qu'il a dû également l'en dériver par l'équation de l'équilibre, en prenant la variable s dans la même acception que nous lui avons attribuée. Mais, en introduisant y comme une fonction de s aussi complexe, dans l'équation différentielle générale de la réfraction établie par Laplace au livre X de la *Mécanique céleste*, § 6, les intégrations seraient inexécutables. Pour les faciliter Bessel simplifie l'expression de y. Il développe, suivant les puissances ascendantes de s, l'exponentielle qui s'y trouve en exposant, et s'arrêtant à la première de ces puissances, il obtient

$$(1) \qquad y = e^{-\left(1-\frac{l}{g}\right)\frac{as}{l}},$$

ou, en faisant

$$i = 1 - \frac{l}{g}, \qquad y = e^{-i\frac{as}{l}}.$$

» Au point de vue purement analytique, cette déduction serait incorrecte. Le développement de $e^{\frac{a}{g}s}$ n'est légitime, du moins ne peut être restreint à ses deux premiers termes, que si le produit $\frac{a}{g}s$ est une très-petite fraction de l'unité. Or, d'après la valeur que Bessel attribue ultérieurement à la constante g, le rapport $\frac{a}{g}$ est presque égal à 28. Cela exigerait donc que la variable s restât toujours individuellement très-petite dans les applications; ce qui est loin d'avoir lieu, puisque Bessel y étend ses variations jusqu'à leur

limite extrême $+1$. Il se justifie toutefois, en alléguant que l'expression simplifiée (1) peut être admise à priori comme hypothétique, tout aussi valablement que la relation complète [4], qui ne l'est pas moins. A ce titre on ne peut la lui contester; mais alors, pour se réserver le droit de l'employer comme élément d'intégrales prises depuis $s=0$ jusqu'à $s=1$, il faut expressément spécifier, ainsi que l'a fait Kramp, que l'on se propose toujours de calculer les réfractions dans l'atmosphère rigoureuse, définie par l'équation [4], laquelle admet une étendue illimitée; et que l'expression simplifiée (1) sert seulement à titre d'évaluation approximative de ses densités à toute hauteur. Car, supposé que cette évaluation ne se trouve pas trop inexacte en pratique, on obtiendra les réfractions qui y correspondent, dans l'atmosphère définie par l'équation [4], en remplaçant le rapport $\frac{a}{l}$ par $i\frac{a}{l}$, dans les intégrales analytiquement établies pour le cas d'une atmosphère de température uniforme; et il ne restera plus qu'à voir si les valeurs numériques des réfractions ainsi obtenues s'accordent suffisamment avec l'observation quand on aura déterminé convenablement la constante g. Voilà ce que Kramp a dit à la page 121 de son ouvrage, et Bessel n'a fait que suivre, en cela, ses prescriptions, sans les rappeler. Seulement il a jugé nécessaire de justifier la substitution de la forme abrégée (1), à la forme complète [4], dans les éléments des intégrales, en montrant que ces deux expressions assignent à la densité des valeurs à peine différentes quand on les calcule pour des valeurs égales des hauteurs as. Voici le tableau de cette comparaison, auquel j'ai ajouté deux termes intermédiaires qui nous serviront plus tard. Les hauteurs as y sont exprimées en toises de Paris.

as	$e^{-\frac{g}{l}\left(e^{\frac{as}{g}}-1\right)+\frac{as}{g}}$	$e^{-\left(1-\frac{l}{g}\right)\frac{as}{l}}$	OBSERVATIONS.
0	1,00000	1,0000	
625	0,8668	0,8671	
1250	0,7508	0,7519	
2500	0,5618	0,5653	
3039,17	0,4953	0,5000	
5000	0,3116	0,3196	
10000	0,0921	0,1021	
14455,83	0,028914	0,03616...	Limite de l'atmosphère qui serait construite avec la valeur abrégée de γ.
20000	0,0068	0,0104	
40000	0,000018	0,0001	

» On voit que l'expression abrégée de Bessel donne toujours des densités peu différentes de l'expression complète, mais constamment un peu plus fortes. Leur substitution dans les formules d'intégration devra donc donner des réfractions un peu plus grandes qu'elles ne résulteraient de l'hypothèse de Kramp, si elle était soumise à un calcul rigoureux. Mais ce travail serait fort inutile : car le décroissement des températures, dans l'atmosphère de Kramp, ne s'accorde nullement avec l'observation.

» La loi de ce décroissement est immédiatement déterminée par l'équation de dilatabilité

$$\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon t_1} = \frac{x}{y}.$$

En effet, le rapport $\frac{x}{y}$ étant, par l'hypothèse $e^{-\frac{as}{g}}$, on en tire :

$$t - t_1 = -\left(1 - e^{-\frac{as}{g}}\right)\left(\frac{1+\varepsilon t_1}{\varepsilon}\right).$$

» Le terme exponentiel se trouvant toujours moindre que 1, pour toutes les valeurs de as, la température ira en s'abaissant à mesure que la hauteur augmentera. En cela, l'hypothèse est conforme aux phénomènes.

» La vitesse locale de ce décroissement à diverses hauteurs, pour 1 degré centésimal, est généralement

$$\partial r = -\frac{1}{\left(\frac{dt}{dr}\right)};$$

or l'expression précédente de $t - t_1$ étant différentiée, donne

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{as}{g}\left(\frac{1+\varepsilon t_1}{\varepsilon}\right)e^{-\frac{as}{g}} = -\frac{a}{g\varepsilon}(1+t);$$

on a en outre :

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dr} = \frac{a}{r^2}\frac{dt}{ds};$$

de là, on déduit $\frac{dt}{dr}$; et ensuite, par inverse :

$$\partial r = \frac{g\varepsilon\left(\frac{r^2}{a^2}\right)}{1+\varepsilon t}.$$

Dans la couche inférieure $\frac{r}{a}$ est 1 et $t = t_1$, le décroissement initial est donc

$$(\partial r)_1 = \frac{g\varepsilon}{1+\varepsilon t_1} = \frac{854^m,16}{1+\varepsilon t_1}.$$

» Il est donc le même que dans l'atmosphère limitée de Bessel, et se trouve de même beaucoup trop lent. Mais, dans celle-ci, sa vitesse ultérieure allait toujours en s'accélérant, conformément à ce qu'on observe dans l'atmosphère véritable, quand on s'élève au-dessus de ses couches les plus troublées ; au lieu que, dans l'atmosphère de Kramp, l'expression précédente de ∂r montre que sa vitesse se ralentit continuellement à mesure que la hauteur augmente, ce qui est contraire aux faits. Toutes ces incompatibilités deviennent manifestes dans le tableau suivant qui est calculé pour la température normale de Bessel, $t_1 = 9^{\circ},3056$.

Tableau du décroissement absolu et local des températures, à diverses hauteurs, dans l'atmosphère de Kramp.

as	y	$t - t_1$	∂r
0^m	1	0°	$825^m,35$
5923,36	0,49530	— 7,084	862 , 30
28370	0,02891	— 32,319	1028 , 06

» Il résulte de la discussion précédente que, ni l'hypothèse physique de Kramp, ni l'expression abrégée de la densité que Bessel en a déduite, ne représentent, même approximativement, la constitution réelle de l'atmosphère terrestre, voulût-on se borner à la considérer dans son état moyen. Les Tables de réfraction calculées d'après ces hypothèses, ne peuvent donc être qu'empiriques, et Bessel n'a pas envisagé autrement la sienne. Il a seulement voulu qu'elle fournît les valeurs, aussi approchées que possible, des réfractions qui s'opèrent régulièrement à toute distance du zénith, dans chaque état météorologique de la couche inférieure, sauf à n'en attendre que des indications moyennes, mais toutefois les plus probables, pour celles auxquelles le voisinage immédiat de l'horizon imprime des irrégularités accidentelles que l'on ne saurait prévoir. Il reste à examiner comment ce but a pu être atteint.

» Oublions l'hypothèse d'où Bessel est parti. Prenons seulement la formule analytique qu'il en a dérivée, et qu'il adopte comme l'expression générale des réfractions à toute distance du zénith, dans chaque état donné de la couche d'air inférieure. Cette formule contient trois constantes l, α, g, qui, une fois assignées en nombres, déterminent la valeur absolue de la réfraction

pour chaque distance zénithale apparente θ_1. La constante g est entierement arbitraire; mais les deux premières, l, α, ne sont pas au service des hypothèses. Elles entrent dans l'expression différentielle même de la réfraction, à titre d'éléments physiques propres à la couche d'air inférieure où les trajectoires lumineuses viennent aboutir. L'une l dépend du poids spécifique de cet air, l'autre α du pouvoir réfringent qu'il exerce dans son état de densité actuel; de sorte que toutes deux doivent être prises et acceptées, telles que les expériences physiques et les épreuves astronomiques les donnent, pour ces conditions spéciales, sans qu'on ait le droit de les altérer. Bessel viole cette règle pour le besoin de son hypothèse. Car, ayant entrepris de reproduire toutes les réfractions, depuis l'horizon jusqu'au zénith, par la formule mathématique qu'il a fabriquée, il y traite, non-seulement la constante g, mais encore la constante α, comme si elles étaient toutes deux entièrement arbitraires. Il l'applique avec ces éléments indéterminés, à un grand nombre d'étoiles circompolaires, tant hautes que basses, observées dans leurs passages supérieurs et inférieurs; puis il tire de là les valeurs qu'il faut leur attribuer pour que toutes ces observations se trouvent représentées, en somme, avec le minimum possible d'erreur. Cela lui donne la constante α tant soit peu moindre qu'elle ne se conclut des expériences physiques, et des observations mêmes d'étoiles circompolaires, spécialement appropriées à sa détermination. Or cette différence, toute petite qu'elle est, a une conséquence grave, en théorie comme en pratique. Car, ainsi que Laplace l'a démontré, depuis le zénith jusque vers 80 degrés de distance zénithale, l'expression complète et générale de la réfraction se déduit directement de l'équation différentielle, sans avoir besoin de faire aucune hypothèse sur la constitution de l'atmosphère. Il ne faut pour cela que développer cette équation en une série, qui est rapidement convergente lorsque le rapport $\frac{l-\frac{1}{2}\alpha}{\cos^2\theta_1}$ est une petite fraction de l'unité, auquel cas ses deux premiers termes donnent la réfraction correspondante à chaque distance zénithale apparente θ_1, sans erreur pratiquement appréciable, pourvu que l'on attribue aux constantes l et α, les valeurs exactes que les expériences physiques et les épreuves astronomiques leur assignent. Toute cette portion si étendue du phénomène, qui peut être calculée immédiatement sans incertitude, se trouve donc viciée dans son évaluation, quand on veut l'associer, dans une même hypothèse, avec la portion plus basse et plus difficilement appréciable, qui ne les embrasse toutes deux approximativement, qu'aux dépens de la rigueur dont une seule est susceptible. C'est là le défaut inévitablement attaché au procédé

empirique d'après lequel Bessel a construit sa Table générale de réfractions. Pour connaître les erreurs qu'elle comporte, dans les limites de distance zénithale où l'exactitude a été sacrifiée à la généralisation, je compare ces indications à celles que fournit le développement immédiat de l'équation différentielle, obtenue par Laplace, en attribuant aux constantes l et α leurs vraies valeurs. Tel est l'objet du tableau suivant, qui est calculé pour la pression $p_1 = 0^m,76$, en attribuant aux températures t_1 les valeurs successives, $-5°$, $0°$, $+10°$ du thermomètre centésimal. Les réfractions de Bessel sont prises des *Tabulæ Regiomontanæ*, où elles sont déduites de la même hypothèse, et présentées comme ses résultats définitifs (*).

DISTANCES ZÉNITALES APPARENTES.		45°	60°	75°	80°
$t_1 = -5°$	Laplace	61″,689	106″,620	227″,159	339″,154
	Bessel	61,467	106,228	226,220	337,625
	Bessel	− 0,222	− 0,392	− 0,939	− 1,529
$t_1 = 0°$	Laplace	60,501	104,561	222,710	332,344
	Bessel	60,296	104,200	221,830	330,944
	Bessel	− 0,205	− 0,361	− 0,880	− 1,400
$t_1 = +10°$	Laplace	58,251	100,659	214,282	320,454
	Bessel	58,079	100,358	213,560	318,320
	Bessel	− 0,172	− 0,301	− 0,742	− 1,134

» Dans toute cette amplitude de distances zénithales, où les réfractions peuvent être obtenues directement, sans incertitude, celles de Bessel se montrent relativement trop faibles, par suite de la valeur moindre que sa formule empirique lui a donnée pour la constante α, quand il a voulu lui faire embrasser la totalité de ces phénomènes depuis le zénith jusqu'à l'horizon. Maintenant de quel côté est l'erreur? La formule approximative de Laplace, dans les limites d'application qu'il lui assigne, est théoriquement

(*) Les réfractions données par la formule de Laplace sont tirées de la Table que publie la *Connaissance des Temps*, d'après les calculs exécutés par M. Caillet pour y introduire les véritables coefficients de l'air et du mercure. J'ai calculé les réfractions de Bessel d'après la transformation très-commode que M. Airy a faite de sa Table, dans l'Appendice au Recueil des observations de Greenwich pour 1836.

incontestable. Des deux constantes l et α qu'elle renferme, la première l s'obtient par des pesées comparatives de l'air et du mercure, auxquelles on ne peut, aujourd'hui, rien objecter. La seconde α lui avait été donnée par Delambre, qui l'avait conclue directement d'observations astronomiques. Sa valeur s'est trouvée identique à celle que nous avons obtenue, Arago et moi, par des expériences physiques sur le pouvoir réfringent de l'air, comprenant plus de 400 observations faites à des températures et sous des pressions très-variées; observations dans chacune desquelles la réfraction effectivement mesurée était toujours cinq ou six fois plus grande que la constante α qu'on en déduisait. Les indications d'une formule établie sur des principes aussi assurés, et ne contenant que des données immédiatement fournies par l'observation ou l'expérience, ne sauraient, ce me semble, être légitimement contre-balancées par celles que l'on tirerait d'une expression hypothétique, dont les données se déterminent par empirisme, en associant les phénomènes simples à ceux qui sont complexes, et les réguliers aux irréguliers. Nous pouvons donc, sauf plus ample examen, regarder au moins comme très-vraisemblable, que, dans les comparaisons précédentes, l'infériorité relative des réfractions fournies par la Table de Bessel, donne à la fois la preuve, et la mesure, des erreurs qu'elle comporte, dans les distances zénithales auxquelles nous l'avons appliquée.

» Ces erreurs, si j'ose les nommer ainsi, sont numériquement fort petites; et il n'en saurait être autrement. Car même à 80 degrés du zénith, toutes les atmosphères sphériques, en équilibre, composées du même gaz que la nôtre, donnent des réfractions qui ne peuvent pas s'écarter des véritables au delà de $2''\frac{1}{4}$. Les différences que nous trouvons ici tombent fort en deçà de cette limite. Mais, toutes petites qu'elles sont, elles auraient une grande importance, se produisant dans la portion du ciel, où les observations astronomiques sont les plus fréquentes, et les réfractions moins troublées par les accidents atmosphériques. Elles sont de l'ordre des quantités que les astronomes s'efforcent aujourd'hui d'atteindre et d'assujettir à des déterminations précises. Elles rendraient ces déterminations impossibles, en les compliquant, en les viciant, de leurs propres irrégularités. Si, comme il y a lieu de le croire, ce sont des erreurs, il n'est pas improbable que déjà, l'emploi trop confiant des réfractions de Bessel, a déjoué les espérances que des observateurs habiles avaient légitimement fondées sur de longs et pénibles travaux.

» D'après la série d'études que je viens de soumettre à l'Académie, la formule approximative de Laplace, applicable jusque vers 80 degrés de dis-

tance zénithale, est aujourd'hui la seule qui, dans cette amplitude restreinte, donne, pour tous les états météorologiques de la couche d'air inférieure, des valeurs de la réfraction que l'on puisse admettre, comme étant légitimement déduites de la théorie et justifiées par la pratique. A des distances zénithales plus grandes, la connaissance de cet état local ne suffit plus, pour prévoir les effets des influences lointaines que les trajectoires lumineuses subissent avant de parvenir à l'observateur; et la constitution réelle de l'atmosphère est encore trop ignorée, pour que l'on sache rattacher ces effets lointains, aux mutations survenues dans le lieu d'observation. On ne peut plus alors espérer que de constater les valeurs moyennes, autour desquelles les réfractions oscillent. Or, en s'aidant de la formule de Laplace, tout observateur peut, sans aucune intervention d'hypothèses, se procurer une Table complémentaire qui lui fera connaître très-assurément ces moyennes, ainsi que les amplitudes des excursions qui s'opèrent autour d'elles dans la localité où il est placé; et, s'il existe quelque relation simple, qui permette de prolonger les prévisions un peu au delà de la formule, avec assez de constance pour qu'on puisse s'en prévaloir, quoique la théorie ne l'ait pas encore mise en évidence, il la découvrira infailliblement.

» Une condition essentielle à la bonne exécution de ce programme, c'est de n'y faire servir que des étoiles, dont les distances polaires aient été déterminées par des observations de distances zénithales qui n'excèdent point, ou même n'atteignent pas 80 degrés, afin d'exclure complétement des résultats toute évaluation hypothétique de la réfraction. Ceci convenu, choisissons des observateurs laborieux et habiles. Établissons-les avec de bons instruments dans des stations assez isolées et élevées au-dessus du sol environnant, pour que la couche d'air située à leur niveau échappe aux perturbations immédiates qu'engendrent des dispositions moins favorables. Puis, supposons, qu'ainsi préparés, ils entreprennent de déterminer les réfractions moyennes qui se produisent autour d'eux dans un azimut défini, dans le méridien, par exemple, aux distances de leur zénith comprises entre 80 et 88 degrés, s'ils jugent inutile d'aller au delà.

» Considérons d'abord des stations qui seraient situées dans notre hémisphère boréal, sous des latitudes comprises entre 30 et 40 degrés. Les observateurs qu'on y aura placés pourront se suffire à eux-mêmes, ne leur accordât-on que des instruments portatifs.

» Prenons en effet, comme exemple, la latitude de 40 degrés. A cette limite, la distance du pôle au zénith est 50 degrés. Elle se trouve comprise dans la formule de Laplace. L'étoile qui passe au méridien, sous le pôle, à 88 degrés

de distance zénithale, a donc 38 degrés de distance polaire. Ainsi, quand elle revient dans ce même plan, au-dessus du pôle, elle se trouve à 12 degrés au nord du zénith; ce qui donne la possibilité d'observer encore ce second passage avec une suffisante exactitude, même au cercle répétiteur. L'observateur que nous considérons, en s'aidant de la formule de Laplace, et de ses propres observations d'étoiles circompolaires, pourra donc, sans autre secours, déterminer la vraie distance du pôle à son zénith, vérifier la constante α de cette formule, et obtenir les valeurs des réfractions que les étoiles observées auront subies dans leurs passages inférieurs, depuis 80 jusqu'à 88 degrés du zénith, en retranchant des distances zénithales apparentes qu'elles ont eues alors, leurs distances zénithales vraies, conclues des distances polaires qu'il aura mesurées dans les passages supérieurs. La même étude aussi complète, aussi indépendante, pourra s'effectuer par les mêmes procédés, sous toutes les latitudes plus méridionales, où les étoiles qui entourent le pôle ne descendront pas, dans leurs passages inférieurs, trop loin du zénith pour que la formule de Laplace puisse s'y appliquer. Mais, dans ce dernier cas, la distance vraie du pôle au zénith se conclurait de distances polaires mesurées sous des latitudes plus élevées, et le reste du travail s'achèverait immédiatement par l'observation.

» Transportons-nous maintenant sous un parallèle plus boréal; celui par exemple, dont la latitude est 50 degrés, ce qui réduit la distance du pôle au zénith à 40 degrés. Alors les étoiles qui feront leurs passages inférieurs entre 80 et 88 degrés de distance zénithale, auront leurs distances polaires comprises entre 40 et 48 degrés. Leurs passages supérieurs s'opéreront donc, depuis le zénith même, jusqu'à 8 degrés au sud de ce point; et l'on ne pourra plus les observer avec sûreté aussi proche de la verticale, au moyen des cercles répétiteurs portatifs. Mais, à défaut d'autre secours, on pourra emprunter leurs distances polaires déterminées sous des latitudes plus grandes ou moindres, à des distances zénithales auxquelles la formule de Laplace s'applique, ce qui donnera de même les réfractions qu'elles auront subies dans leurs passages inférieurs. Si l'observateur est pourvu d'instruments qui permettent d'observer aussi près du zénith, comme cela a lieu dans les grands observatoires fixes, on déduira ces mêmes réfractions des distances polaires déterminées immédiatement. Ces diverses opérations seront également réalisables sous toutes les latitudes plus élevées; et, en les assujettissant aux mêmes règles, elles feront connaître avec la même sûreté, sans aucune intervention d'hypothèses, les réfractions qui se seront opérées, au delà des limites de distances zénithales que la formule théorique de Laplace peut embrasser.

» A mesure que l'on obtiendra ces résultats, on les enregistrera dans une Table, présentant en regard, pour chaque observation, les indications du baromètre, du thermomètre, de l'hygromètre, ainsi que la distance zénithale apparente, et la réfraction que l'on a conclue. L'ensemble de ces tableaux fera connaître, sans aucune hypothèse, les réfractions moyennes, qui s'opèrent au nord du zénith, dans la localité choisie, sous toutes les distances zénithales auxquelles les observations ont été appliquées; et si, par delà 80 degrés, il existe encore quelque relation approximativement constante entre les réfractions et les indications des instruments météorologiques, on aura toute chance de la découvrir. On obtiendrait des résultats analogues pour les réfractions qui s'opèrent au sud du zénith, ou dans tout autre azimut, en s'aidant des distances polaires déterminées sous d'autres latitudes, à des distances zénithales auxquelles la formule approximative de Laplace, permet d'évaluer théoriquement la réfraction.

» Dans la préface des *Tabulæ Regiomontanæ,* page LXII, Bessel dit avoir vérifié sa Table par des observations d'étoiles circompolaires jusqu'à 85° de distance zénithale. Mais si, comme cela est très-vraisemblable, la valeur de la constante α, qui lui avait été donnée par son hypothèse, est trop petite, cette erreur a dû affecter les distances polaires conclues des passages supérieurs, ainsi que la distance même du pôle au zénith, de sorte que l'on ne peut pas logiquement dire que la Table a été ainsi vérifiée, dans cette partie supérieure de son application. La même objection me semble s'appliquer aux amplitudes d'erreurs occasionnelles de ses indications depuis 45° jusqu'à 89° 30′ du zénith, que Bessel rapporte comme lui ayant été communiquées par l'habile astronome M. Argelander. Car toutes ces évaluations ne peuvent être réputées absolues, qu'autant que les couples d'observations supérieures et inférieures d'où on les déduit, ont un de leurs éléments théoriquement assuré, condition que la formule approximative de Laplace peut seule remplir ; soit qu'on veuille l'employer avec la valeur de la constante α qu'il avait admise, et que les expériences physiques ont pleinement confirmée, soit que l'on juge convenable d'en assurer de nouveau la détermination par des observations astronomiques spécialement appropriées à ce but comme je l'ai tout à l'heure expliqué. Elle seule est vraie et certaine en soi, parce qu'elle ne repose que sur les propriétés statiques nécessairement inhérentes à une atmosphère gazeuse, possédant un pouvoir réfringent connu. Les discussions minutieuses, dans lesquelles je suis entré, montrent, je crois, suffisamment, qu'il n'y a aucun fonds de réalité dans toutes les hypothèses mathématiques, où la portion complexe et irrégulière du

phénomène des réfractions est associée à la régulière, au détriment de la rigueur avec laquelle celle-ci peut être évaluée isolément, par la formule théorique que Laplace nous a donnée. Je ne regretterais ni le temps ni la peine, que m'a coûté ce long travail, s'il pouvait persuader aux astronomes de s'accorder à calculer généralement leurs réfractions par cette formule, dans les limites de distances zénithales qu'elle embrasse; ce qui serait l'unique moyen de rendre uniformes, et comparables entre elles, les déterminations délicates qu'ils s'efforcent maintenant d'obtenir. Persister à évaluer ces phénomènes, dans les différents observatoires, par des Tables empiriques, construites sur des hypothèses dissemblables, et dont les indications discordent entre elles, cela équivaudrait, en physique, à mesurer les températures par des thermomètres, dont les échelles de graduation auraient leurs points fixes inégalement placés, et mal définis. Quant à construire une Table générale de réfractions, qui soit théoriquement modelée sur la constitution véritable de notre atmosphère, l'espoir en est, au moins, bien éloigné. Trop de données nous manquent. Les unes, que l'on pourrait connaître par des séries d'ascensions aérostatiques convenablement instituées, seraient difficiles, délicates, et surtout trop coûteuses à recueillir, pour que l'on puisse, de longtemps, les espérer. Les autres, ne se trouveraient qu'à des hauteurs, où l'homme ne peut vivre. Une de celles-ci, et des plus importantes, parce qu'elle intervient sans cesse dans ce genre de recherches, c'est l'élévation absolue de l'atmosphère. Peut-être réussirait-on à déterminer très- approximativement sa limite sensible, par des observations longtemps suivies de la courbe crépusculaire, surtout de son mouvement progressif d'ascension ou de descente, à mesure que le soleil se rapproche de l'horizon oriental avant son lever, ou s'abaisse sous l'occidental après son coucher. Des îles isolées dans l'Océan, loin des côtes, offriraient des stations éminemment convenables à cette étude. Mais ce sont là des vœux pour l'avenir. En attendant qu'ils se réalisent, servons-nous de ce que nous possédons, et tâchons de l'accroître par l'observation ou l'expérience. Mais craignons de le gâter, en le compliquant d'hypothèses, qui ne seraient bonnes qu'à nous égarer »

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

INSTITUT IMPÉRIAL DE FRANCE.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XL, séance du 3 janvier 1855.

NOTE

Sur la valeur du pouvoir réfringent de l'air atmosphérique qui résulte des anciennes expériences de MM. Biot *et* Arago;

PAR M. V. CAILLET,

Examinateur de la Marine.

« Lorsque MM. Biot et Arago entreprirent, en 1806, d'obtenir par des expériences directes les forces réfringentes de différents gaz, on supposait, avec Lavoisier, que le coefficient de dilatation du mercure était égal à $\frac{1}{5412}$, et, d'après Gay-Lussac, que celui des gaz était 0,00375. L'erreur reconnue, depuis cette époque, par MM. Dulong et Petit, dans le calcul des observations de Lavoisier, ainsi que la détermination plus récente des véritables coefficients des gaz, due aux travaux de MM. Magnus et Regnault, ont fait penser à M. Biot qu'il y aurait intérêt pour la science, de voir si ces changements apporteraient une modification sensible à la valeur assignée par lui, il y a près d'un demi-siècle, au pouvoir réfringent de l'air atmosphérique. Sur le désir qu'il a bien voulu m'en témoigner, je me suis empressé de reprendre la réduction de ses expériences relatives à l'air, avec les nouveaux coefficients $\frac{1}{5550}$ et 0,003665, et c'est le résultat de cette recherche que j'ai l'honneur de faire connaître à l'Académie.

C.

» M. Biot a exposé, dans deux Mémoires lus à l'Institut le 24 mars 1806 et le 31 août 1807, tous les détails des expériences auxquelles il s'est livré, la première année, à de basses températures, avec le concours de M. Arago, et la seconde année seul, à des températures beaucoup plus élevées. Il a développé en même temps les considérations théoriques sur lesquelles reposent ses opérations, et l'on trouvera, dans ces deux Mémoires, tous les documents qui ont servi de base à mes calculs.

» Les expériences de 1806 représentent 166 observations; parmi elles, deux séries sont signalées comme douteuses, et si nous les rejetons, il reste 132 observations faites dans des circonstances favorables, à des températures comprises entre — 1°,5 et + 12° centigrades, dont la valeur moyenne est + 4°,61. Les résultats que j'ai tirés de chaque série sont réunis dans le tableau suivant, où l'expression $\frac{2k}{n^2}(\rho)$ désigne la moitié du pouvoir réfringent de l'air rapporté à la température de la glace fondante et à la pression barométrique $0^m,76$, conformément à la notation de Laplace :

Époques des expériences.	Nombre des observations.	Valeur de $\frac{2k}{n^2}(\rho)$.
13 frimaire.	20	0,0002946078
14 —	20	0,0002937790
26 —	20	0,0002938772
29 —	30	0,0002938131
20 février.	10	0,0002937407
4 mars.	22	0,0002953570
7 —	10	0,0002937800

» Les expériences de 1807 embrassent 252 observations faites pendant l'été : une seule série est à mettre de côté, parce que la température avait été élevée artificiellement jusqu'à + 31°,43 (1). Les 232 observations restantes ont eu lieu par des températures qui s'étendent de + 22°,70 à + 27°,74, et dont la valeur moyenne est + 25°,52. Voici les nombres que m'ont donnés ces nouvelles séries :

---

(1) Dans la série du 27 août, il existe une transposition évidente de chiffres, à l'article de la pression de l'air intérieur du prisme; d'après la réfraction calculée par M. Biot, on doit lire 0,0025 et non 0,0205. Si l'on négligeait, du reste, cette série, on trouverait 0,0002936742 pour le résultat moyen conclu des hautes températures : le pouvoir réfringent moyen deviendrait 0,0005878616, et ce nombre se rapprocherait encore davantage de celui de Delambre.

Époques des expériences.	Nombre des observations.	Valeur de $\frac{2k}{n^2}(\rho)$.
8 Juillet	20	0,0002939868
9	20	0,0002942314
10	20	0,0002929212
11	30	0,0002940166
11	18	0,0002933967
12	24	0,0002938290
13	24	0,0002928847
13	36	0,0002939057
26 Août	20	0,0002936385
27	20	0,0002932695

» Les résultats moyens sont, d'une part, 0,0002941874, et de l'autre 0,0002936393. La différence entre ces deux nombres ne porte que sur des chiffres d'un ordre très-éloigné, ce qui est conforme aux anciens calculs de M. Biot, et l'on peut admettre cette conséquence énoncée dans son Mémoire de 1807, que la chaleur n'a aucun effet appréciable sur le pouvoir réfringent de l'air, abstraction faite des variations de densité qu'elle occasionne dans les couches atmosphériques.

» En ajoutant l'un à l'autre les deux nombres précédents, on obtient 0,0005878267 pour la valeur du pouvoir réfringent qui résulte de toutes les expériences. Delambre a donné la valeur 0,000588094 comme conclue d'un très-grand nombre d'observations astronomiques qu'il avait faites à Bourges, combinées avec d'autres observations faites par Piazzi à Palerme. Ces deux nombres ne diffèrent l'un de l'autre que de 0,0000002 67, quantité qui échappe aux expériences les plus précises Cet accord entre deux procédés complétement différents est tellement remarquable, qu'il est à regretter que Delambre n'ait pas publié ses observations de Bourges ; il eût été curieux de reprendre également le calcul de ses réductions avec les nouveaux coefficients de dilatation, et de s'assurer si cette coïncidence cesserait d'être aussi intime, ou bien si elle ne serait pas rendue plus grande encore, ainsi qu'il est arrivé des expériences physiques de MM. Biot et Arago.

» Lorsqu'on introduit le nombre 0,0005878267 dans la formule approchée des réfractions de Laplace, la quantité qu'il appelle α devient 0,0002937407. On en déduit, avec la valeur de $\frac{l}{a}$ qu'il adopte, 60″,472 pour la réfraction astronomique correspondante à 45 degrés de hauteur apparente, la température étant à 0 degré et la pression 0^m,76. D'après la valeur

de Delambre, on aurait 60″,500 dans les mêmes circonstances, c'est-à-dire un arc qui différerait à peine de 3 centièmes de seconde du précédent.

» M. Ivory trouve 58″,36 pour la même réfraction rapportée à + 10° de température centigrade et à une pression barométrique de 0^{m},762 ; la valeur 60″,472 devient alors 58″,37. L'identité des deux résultats était facile à prévoir, car M. Ivory adopte, comme Laplace, la constante de Delambre, et la hauteur considérée est indépendante des lois plus ou moins exactes qu'ils ont dû supposer aux régions supérieures de l'air, dans la recherche des réfractions voisines de l'horizon. »

Paris. — Imprimerie de Mallet-Bachelier,
rue du Jardinet, 12.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER, GENDRE ET SUCCESSEUR DE BACHELIER,
RUE DU JARDINET, 12.